

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BARCELONA

Estudios de Doctorado (RD 1393/2007)
en Psicología Evolutiva y de la Educación (DIPE)



**CONVERSIÓN DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS
DE UN REGISTRO NUMÉRICO A OTRO Y
CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS**

Jorge Castaño García

**Trabajo de Investigación
Director: Dr. Carlos Eduardo Vasco
Co director: Dr. José Luís Lalueza**

**Dr. Carlos Eduardo Vasco
Director**

**Dr. José Luís Lalueza
Co director**

**Jorge Castaño García
Doctorando**

Barcelona, julio de 2014

*A mis hijos
Diego Andrés y Daniel Felipe*

*A la memoria de mis padres
Luzmila y Camilo*

*Agradezco a los niños
que con su curiosidad,
avidez de conocer
y sus respuestas espontáneas
me indicaron el camino*

*Agradezco a José Luis Lalueza
quien me orientó y apoyó*

*Y agradezco muy especialmente
al profesor Carlos Eduardo Vasco,
el maestro de maestros,
quien con generosidad me compartió sus conocimientos,
me ayudó a organizar ideas,
me mostró el camino cuando perdía el rumbo
y aguzó mi mirada*

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS	7
TABLA DE TABLAS	9
INTRODUCCIÓN	17
1 CUESTIONES PRELIMINARES	27
1.1 EXIGENCIAS QUE HACE AL NIÑO LA APROPIACIÓN DEL SISTEMA DECIMAL DE NUMERACIÓN	31
1.2 ALGUNOS HECHOS QUE ILUSTRA LA HISTORIA DE LA CONSTRUCCIÓN DEL SDN	38
1.3 ALGUNOS ESTUDIOS SOBRE LAS RELACIONES QUE EL NIÑO ESTABLECE ENTRE EL REGISTRO VERBAL Y EL REGISTRO ESCRITO	43
2 HACIA UNA COMPRENSIÓN DEL SIGNO	47
3 LAS REPRESENTACIONES SEMIOTICAS Y SU PAPEL EN LA ACTIVIDAD CONCEPTUAL EN LA CONSTRUCCION DEL SDN POR PARTE DE LOS NIÑOS	65
3.1 LAS TRES ACTIVIDADES COGNITIVAS QUE POSIBILITAN LOS REGISTROS NUMÉRICOS	69
3.2 ANALISIS DE LA CONGRUENCIA DE LOS REGISTROS SEMIÓTICOS DEL SDN	72
3.3 PLURALIDAD DE REGISTROS SEMIÓTICOS	76
4 UN MODELO DEL SIGNO NUMÉRICO Y ANALISIS DE LA OPERACIÓN DE CONVERSION	79
4.1 UN MODELO DEL SIGNO NUMÉRICO	79
4.2 ANALISIS DE LA TAREA DE CONVERSIÓN ENTRE REPRESENTACIONES DEL SDN Y ASIGNACIÓN DE SIGNIFICADO	91
4.2.1 Conversión de representaciones numéricas verbales a representaciones en el registro indo-arábigo (Rv => Ri-a)	93
4.2.2 Conversión de representaciones numéricas indo-arábigas a representaciones verbales (Ri-a => Rv)	96
5 PROBLEMA, PREGUNTAS Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN	99
5.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	102
5.2 PREGUNTAS	102
5.3 OBJETIVOS	103
6 METODOLOGÍA	105
6.1 DESCRIPCIÓN GLOBAL DEL PROCEDIMIENTO	105
6.2 PERIODO DE INTERVENCIÓN Y OBSERVACIÓN	106
6.3 POBLACIÓN	106
6.4 CRITERIOS DE SELECCIÓN DE LOS CASOS DE ESTUDIO	107
6.5 RECOLECCION DE INFORMACION (Procedimientos e instrumentos)	108
6.5.1 Mediante pruebas	108
6.5.2 Mediante entrevistas (descripción de tareas)	109
6.6 ANÁLISIS DE DATOS	111

6.7	CLASIFICACIÓN Y CODIFICACIÓN DE LAS PRODUCCIONES DE LOS NIÑOS CUANDO REALIZAN CONVERSIONES Rv => Ri-a	112
6.7.1	Escrituras tipo 1 (e1)	114
6.7.2	Escrituras tipo 2 (e2)	115
6.7.3	Escrituras tipo 3 (e3)	115
6.7.4	Escrituras tipo 4 (e4)	115
6.7.5	Escrituras tipo 5 (e5)	115
6.7.6	Escrituras tipo 6 (e6)	116
6.7.7	Escrituras tipo 7 (e7)	116
6.7.8	Escrituras tipo 8 (e8)	116
6.7.9	Escrituras tipo 9 (e9)	116
6.7.10	Escrituras tipo 10 (e10)	116
6.7.11	Otras escrituras (e11 o simplemente o)	117
6.8	LA EXPERIENCIA DIDÁCTICA	117
6.9	ANÁLISIS DE LAS TAREAS QUE SE PRESENTAN EN LAS ENTREVISTAS	122
6.9.1	Tareas tipo 1. De enumeración	122
6.9.2	Tareas tipo 2. Cuantificación mediante grupos de diez y sueltas	123
6.9.3	Tareas tipo 3. Organización y descripción de unidades compuestas	124
6.9.4	Tareas tipo 4. Conversión de representaciones del registro verbal a representaciones del registro indo-arábigo (Rv => Ri-a) y viceversa (Ri-a => Rv)	124
6.9.5	Tareas tipo 5. Conversiones de representaciones del registros verbal o indo-arábigo a representaciones del registro con tiras y cuadros (Rv => Rt-c o Ri-a => Rt-c) y viceversa (Rt-c => Rv o Rt-c => Ri-a)	125
6.9.6	Tareas tipo 6. Conversión entre representaciones del registro verbal (canónico Rv o modificado Rvm), registro indo-arábigo (canónico Ri-a o modificado R(i-a)m) y registro con billetes (Rb)	126
6.9.7	Tareas tipo 7. Conversión de representaciones del registro verbal modificado (Rvm) al registro R(i-a)m y viceversa	127
6.9.9	Tareas tipo 9. Anticipación de las unidades de orden superior	128
6.9.10	Tareas tipo 10. Composición aditiva	129
7	ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	131
7.1	ANÁLISIS CUANTITATIVO. RESULTADOS OBTENIDOS EN LAS PRUEBAS	131
7.1.1	Conversiones Ra => Ri-a en [1, 999] al interior de cada grupo	132
7.1.2	Conversiones Ra => Ri-a en [1, 999] comparación de los dos grupos	135
7.1.3	Análisis de resultados de conversiones Ra => Ri-a en [1000, 9999]. Comparaciones entre los dos grupos	136
7.2	ANÁLISIS CUALITATIVO	139
7.2.1.	Análisis de las actuaciones tareas tipo No 1(de enumeración)	141
7.2.2	Análisis de las actuaciones tareas tipo No 2 (Cuantificación mediante grupos de diez y sueltas)	142
7.2.3	Análisis de las actuaciones tarea tipo No 3 (organización y descripción de unidades compuestas)	144
7.2.4	Análisis de las actuaciones tareas 4, 6 y 7 (Conversiones entre representaciones Rv, Ri-a, Rvm, R(i-a)m y Rb)	150
8	CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN	203
	REFERENCIAS BIBLIOGRAFIA-	213
9	ANEXOS	221
9.1	ANEXO A TRANSCRIPCIONES EN CD	221
9.2	ANEXO B ANÁLISIS DE LOS CUATRO CASOS EN CD	222

TABLA DE FIGURAS

Figura 1 Correspondencia entre expresiones verbales numéricas e indo-arábigas	29
Figura 2. Sintaxis polinomial de un numeral en el registro indo-arábigo	32
Figura 3. Sintaxis aditivo-multiplicativa de un numeral en el registro indo-arábigo	32
Figura 4. Sintaxis aditiva de un numeral en el registro indo-arábigo	33
Figura 5. No congruencia entre los dos registros numéricos	33
Figura 6. Posiciones de los órdenes decimales	38
Figura 7. Modelo del signo de Ogden y Richards	48
Figura 8. Componentes del signo según diferentes autores (Eco, 1973/1988, p. 26)	50
Figura 9. Modelo de signo según Peirce	53
Figura 10. Una cadena posible de transformaciones semióticas a partir de la marca '234'	57
Figura 11. Otra cadena posible de transformaciones semióticas a partir de la marca '234'	58
Figura 12. Modelo tetrádico de Federici	63
Figura 13. Ejemplo de una tarea de coordinación de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión	77
Figura 14. Modelo del signo numérico	90
Figura 15. Interpretación de tipo aditivo-multiplicativo	94
Figura 16. Identificación del operador multiplicador	95
Figura 17. Cuantificación mediante grupos de diez	123
Figura 18. Los IO para cada tipo de escritura del Grupo A en tres momentos (nov., feb. y jun.). $R_v \Rightarrow R_i\text{-a}$ en [100, 999]	133
Figura 19. IO del Grupo B en dos momentos (feb. y jun.). $R_v \Rightarrow R_i\text{-a}$ en [100, 999].	135
Figura 20. IO del Grupos A y B prueba aplicada en febrero. $R_v \Rightarrow R_i\text{-a}$ en [100, 999]	135
Figura 21. IO del Grupos A y B prueba aplicada en junio. $R_v \Rightarrow R_i\text{-a}$ en [100, 999]	136
Figura 22. IO del Grupos A y B prueba aplicada en junio. $R_v \Rightarrow R_i\text{-a}$ en [100, 999]	138
Figura 23. Comparación de la marca '11' como 'once' y como 'ciento diez', caso uno	162

Figura 24. Cambio de escrituras e2 a e1 en conversiones $R_v \Rightarrow R_{i-a}$, caso uno	163
Figura 25. Conversiones de $R_v \Rightarrow R_{i-a}$ en el intervalo $[100, 109]$, caso dos	165
Figura 26. Escrituras e2 en conversiones de $R_v \Rightarrow R_{i-a}$, caso dos	165
Figura 27. Comparación de la marca '609', caso cuatro	170
Figura 28. Escrituras de mil cuarenta y dos, caso cuatro	181
Figura 29. Diferentes reglas en $R_v = R_{i-a}$, caso uno	183
Figura 30. Pago de cuatrocientos veintitrés, caso uno	191

TABLA DE TABLAS

Tabla 1. Ordenes decimales de la expresión 'm....dcba' de una representación en Ri-a	73
Tabla 2. Asociación entre expresiones de los dos registros del SDN, para expresiones verbales compuestas y completas	74
Tabla 3. Asociación entre expresiones de los dos registros del SDN, para expresiones verbales compuestas y no completas	74
Tabla 4. Grupo A. Grupo en el que se desarrolla la experiencia	106
Tabla 5. Grupo B. Grupo paralelo	107
Tabla 6. Edad y nivel inicial de los cuatro casos estudiados	108
Tabla 7. Numerales dictados en cada una de las pruebas	110
Tabla 8. Las diez tareas estudiadas	130
Tabla 9. IO de los tipos de escrituras de ambos grupos en las diferentes pruebas, conversiones Rv => Ri-a en [100, 999]	132
Tabla 10. IO de los tipos de escrituras de ambos grupos en las diferentes pruebas, conversiones Rv => Ri-a en [1000, 9999]	137
Tabla 11. Edad y nivel de desempeño de los sujetos de estudio	141
Tabla 12. Descripción de las actuaciones de cada caso en la tarea Tipo No 1	141
Tabla 13. Análisis de ejecuciones tarea tipo 2. Cuadro comparativo de los cuatro casos	143
Tabla No 14. Análisis de ejecuciones tarea tipo 3 (separar 'a G de b'). Cuadro comparativo de los cuatro casos	146
Tabla 15. Comparación entre tareas tipo No 2 y tipo No 3	148
Tabla 16. Resumen de escrituras producidas por el caso UNO en conversiones Rv => Ri-a	150
Tabla 17. Resumen de escrituras producidas por el caso DOS en conversiones Rv => Ri-a	152
Tabla 18. Resumen de escrituras producidas por el caso TRES en conversiones Rv => Ri-a	153
Tabla 19. Resumen de escrituras producidas por el caso CUATRO en conversiones Rv => Ri-a	154
Tabla 20. Conversiones Rv => Ri-a [1000, 9999] realizadas por el caso cuatro siguiendo la regla e3 (primera entrevista)	157
Tabla 21. Primer momento de conversiones Rv => Ri-a [1000, 9999] realizadas por el caso cuatro en la primera entrevista	169

Tabla 22. Formas de convertir la primera parte de la representación verbal en [100, 999] del caso cuatro. Primera entrevista	173
Tabla 23. Porcentajes escrituras en [1000, 9999] producidas por niños que hacen escrituras canónicas en [100, 999], en la prueba final (junio 2011)	175
Tabla 24. Primer momento de conversiones $R_v \Rightarrow R_i-a$ [1000, 9999] realizadas por el caso cuatro en la primera entrevista	178

RESUMEN

Esta investigación da por supuesto algún tipo de vínculo entre dos hechos: el uno tiene que ver, en términos de Duval, con la operación de conversión entre representaciones semióticas y, el otro, con la construcción de significado. Se pretende estudiar este vínculo en un campo específico: la adquisición por parte del niño del sistema decimal de numeración. Con este propósito se retoman tres aportes teóricos: primero, la perspectiva semiótico-cognitiva de Duval sobre la operación de conversión entre registros semióticos; segundo, se hace un análisis del signo numérico a partir de los modelos de Peirce y Saussure, junto con los aportes del enfoque onto-semiótico de Godino sobre significados personales e institucionales y, tercero, se utiliza la teoría de campos conceptuales de Vergnaud, en particular, en lo que tiene que ver con el carácter operatorio que se reconoce a la actividad conceptual. Desde estos aportes teóricos se busca entender mejor el proceso de conversión de representaciones del registro verbal numérico al registro indo-arábigo.

El contexto de la investigación fue una experiencia didáctica que tuvo una duración de año y medio, con niños entre 6 a 8 años de edad de una escuela elemental colombiana. La experiencia fue diseñada y desarrollada con el propósito explícito de apoyarlos en la construcción de las capacidades operatorias implicadas en la apropiación de la sintaxis del registro verbal numérico y en la realización de la operación de conversión entre los dos registros numéricos mencionados. Se estudió en detalle el proceso que ellos siguen en el intento de darle significado al signo numérico. Este estudio aporta información que permite considerar la operación cognitiva de conversión como un juego complejo y dialéctico entre noesis y semiosis que parece irreducible a procesos de transcodificación, como pretenden explicarlo otros modelos sintáctico-semánticos de procesamiento del código numérico.

Palabras clave: cognición matemática, representaciones semióticas, aprendizaje de las matemáticas, enseñanza de las matemáticas, representaciones numéricas, sistemas numéricos, sistemas de numeración, sistema decimal de numeración, numerales indo-arábigos.

ABSTRACT

This research takes for granted the existence of some sort of link between two facts: the first has to do, in terms of Duval, with the conversion operation between semiotic representations, and the other, with the construction of meaning. It intends to study this link in a specific field: the acquisition of the decimal numeric system by the child. In order to achieve this purpose, three theoretical contributions are reviewed: first, Duval's semiotic-cognitive perspective on the operation of conversion between semiotic registers; second, Peirce's and Saussure's approaches to signs, from which—along with Godino's contributions on the onto-semiotic approach and the distinction between personal and institutional meanings—an analysis of the numeric sign and a model of interpretation is proposed; third, Vergnaud's theory of conceptual fields, a theory that has played a significant part in this work, particularly, concerning the operative character attributed to conceptual activity. From these theoretical contributions, the present work seeks to better understand the process of conversion between representations from the verbal numerical register into the Hindu-Arabic register.

The research context was an 18-month didactic experience with children aged 6 to 8 from an elementary school in Colombia. The experience was designed and carried out with the specific goal of supporting them in building the operative capacities implied in the appropriation of the syntax of the verbal numeric register, and in the accomplishment of the conversion operation between the above-mentioned numerical registers. The study provided a detailed analysis of the process they follow in their attempts to give meaning to the numerical sign. This study provides information that allows us to consider the cognitive conversion operation as a complex and dialectic interplay between noesis and semiosis that seems irreducible to processes of trans-codification that have been suggested by other syntactic-semantic models of numerical code processing.

Keywords: mathematical cognition, semiotic representations, mathematics learning, mathematics teaching, numerical representations, number systems, numeration systems, decimal numeration system, Hindu-Arabic numerals.

+

INTRODUCCIÓN

Esta investigación, como lo indica su título, da por supuesto algún tipo de vínculo entre dos hechos; uno tiene que ver, en términos de Duval, con la operación de conversión entre representaciones semióticas¹ y, el otro, con la construcción de significado. Se pretende estudiar este vínculo en un campo específico: la adquisición por parte del niño del sistema decimal de numeración (SDN). Parece incuestionable la existencia de algún vínculo entre sistemas de signos y los procesos de construcción de significado, en este sentido —el de la simple existencia del vínculo— el presente trabajo no ofrece novedad alguna, su existencia se da por aceptada en la literatura especializada y en el conocimiento común. Pero cuando se busca ir más allá y se trata de dar cuenta de su naturaleza y de sus mecanismos, aparece un panorama múltiple y diverso, consecuencia de la variedad de respuestas que se intentan, desde disciplinas y enfoques distintos, a cuestiones como: ¿a qué nos referimos con términos como “representación” o “significado”?, ¿cómo se construye “significado”?, ¿cuál es el papel que ha de reconocerse a los sistemas semióticos en la actividad conceptual²?, ¿qué es conversión de una representación semiótica a otra?

La semiótica (o la semiología³) y la psicología desde puntos de vista distintos y, en cada una de estas disciplinas bajo enfoques y perspectivas diferentes, de alguna manera, han abordado el estudio de estas cuestiones.

Peirce construye su sistema semiótico más desde la lógica: *“La lógica, en un sentido general, es solo otro nombre de la semiótica, la doctrina cuasi necesaria o formal de los*

¹ Duval (1994/2005) introduce este término para indicar la operación consistente en pasar de una representación semiótica producida en un registro (en este caso el verbal) a otra representación en otro registro (en este caso el indo-arábigo).

² Se prefiere usar el término de “actividad conceptual” más bien que otros posibles como “actividad mental” o “actividad noética”. Se entiende por actividad conceptual la actividad de tener ideas sobre algo, por elementales que estas sean y, sobre todo, para referir la actividad de coordinarlas. Así esta expresión “actividad conceptual” nos es tan amplia como las otras dos. La actividad mental incluye fenómenos más allá de tener ideas y trabajar con ellas, por ejemplo, lo emocional-afectivo y aunque Duval usa la expresión “lo noético” para referirse a *“los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia”*, cubriendo un conjunto de fenómenos cercanos a los que se hace referencia en este trabajo con la expresión “actividad conceptual” (1995/2004, p. 14), se prefiere este último por ser de uso más generalizado.

³ Se asume el término “semiótica” (generalmente asociado a Peirce) y no semiología (asociado a Saussure), por ser el de mayor uso; aunque, como suele ocurrir con toda terminología, no es únicamente un problema de palabras, sino que detrás de ellas existen diferencias de enfoque.

signos” (Peirce, C.P. 2.227, tomado de Sercovich. 1987, p. 244). En el tomo I de los *Collected Papers* dice también Peirce:

Empleo el término lógica de una manera no científica, en dos sentidos distintos: En un sentido estrecho, es la ciencia de las condiciones necesarias para alcanzar la verdad. En un sentido más amplio, es la ciencia de las leyes necesarias del pensamiento o, aún mejor (pues el pensamiento se lleva a cabo siempre por medio de signos), es una semiótica general, que trata no solo de la verdad, sino también de las condiciones generales de los signos como tales (...) y también de las leyes generales de la evolución del pensamiento,...” (C.P. 1.444, tomado de Sercovich, 1987, p. 215)

Los signos no son solo la base del pensamiento, son el pensamiento mismo “... *la trama y la urdimbre de todo pensamiento y de toda investigación son los símbolos y la vida del pensamiento y de la ciencia es la vida inherente a los símbolos, por tanto (...) es erróneo decir, tan sólo, que un buen lenguaje sea importante para pensar correctamente; pertenece a su esencia*” (Peirce. C.P. 2.200, citado por Magariños, p. 110).

Por su parte, Ferdinand de Saussure (1945), desde la vertiente lingüística, en su *Curso de Lingüística General* habla de la semiología como ciencia de los signos

...se puede, pues, concebir una ciencia que estudie la vida de los signos en el seno de la vida social. Tal ciencia sería parte de la psicología social, y por consiguiente de la psicología general. Nosotros la llamaremos semiología (del griego *sēmeion* ‘signo’). Ella nos enseñará en qué consisten los signos y cuáles son las leyes que los gobiernan (...). La lingüística no es más que una parte de esta ciencia general. Las leyes que la semiología descubra serán aplicables a la lingüística, y así es como la lingüística se encontrará ligada a un dominio bien definido en el conjunto de los hechos humanos. (Saussure, 1945, p. 39)

Barthes habla de semiología, pero invierte la posición de Saussure:

...parece cada vez más difícil concebir un sistema de imágenes u objetos cuyos “significados” pudiera existir fuera del lenguaje. [...] la lengua no es una parte, aunque privilegiada de la ciencia general de los signos; es la semiología la que es parte de la lingüística. (Barthes, 1994, citado por Zecchetto, 2002, p. 8)

Saussure propone una ciencia de los signos que incluye la lengua como objeto de la lingüística; al responderse la pregunta ¿cuál es el objeto a la vez integral y concreto de la lingüística?, dice:

A nuestro parecer, no hay más que una solución para todas estas dificultades: hay que colocarse desde el primer momento en el terreno de la lengua y tomarla como norma de todas las otras manifestaciones del lenguaje. En efecto, entre tantas dualidades, la lengua parece ser lo único susceptible de definición autónoma y es la que da un punto de apoyo satisfactorio para el espíritu, (...). Tomado en su conjunto, el lenguaje es multiforme y heteróclito; (...), a la vez físico, fisiológico y psíquico, pertenece además al dominio individual y al dominio social; no se deja clasificar en ninguna de las categorías de los hechos humanos, porque no se sabe cómo desembrollar su unidad. La lengua, por el contrario, es una totalidad en sí y un

principio de clasificación. En cuanto le damos el primer lugar entre los hechos de lenguaje, introducimos un orden natural en un conjunto que no se presta a ninguna otra clasificación. (Saussure, 1945, pp. 32-33)

Benveniste llama la atención sobre el problema no resuelto del lugar de la lengua en el sistema de los signos.

Desde que aquellos genios antitéticos que fueron Peirce y Saussure concibieron (...), la posibilidad de una ciencia de los signos, y laboraron para instaurarla, surgió un gran problema, que aún no ha recibido forma precisa y ni siquiera ha sido planeado con claridad, en la confusión que impera en este campo: ¿cuál es el puesto de la lengua entre los sistemas de signos? (Benveniste, 1974/1987, p. 47)

Según Benveniste, en el edificio teórico de Peirce la lengua no tiene, como en la teoría de Saussure, un lugar especial.

Para él [Peirce] la lengua se reduce a las palabras, que son por cierto signos, pero que no participan de una categoría distinta o siquiera de un especie constante.(...) el signo [en el sistema de Peirce] es puesto en la base del universo entero, y que funciona a la vez como principio de definición para cada elemento y como principio de explicación para todo conjunto, arbitrario o concreto...Pero al fin de cuentas estos signos, que son todos signos de otros, ¿de qué podrían ser signos que NO FUERA signo?, ¿Daremos con el punto fijo donde amarrar la PRIMERA relación del signo? El edificio semiótico que construye Peirce no puede incluirse en su definición... Se seguirá contra Peirce, que todos los signos no pueden funcionar idénticamente ni participar de un sistema único. Habrá que construir varios sistemas de signos, y entre estos sistemas explicar una relación de diferencia y de analogía. (Benveniste, 1974/1987, pp. 48-49)

El debate sobre la significación, tomado en “el sentido de que las palabras y otras partes del habla constituyen signos que, de alguna manera, significan o representan otras cosas” (Lyons, 1977/1980, p. 91) está abierto. Según este autor el debate entre el nominalismo, realismo y conceptualismo no se ha cerrado.

Esta diversidad de perspectivas en los niveles generales conlleva diferencias en cuestiones menos generales, pero ligadas de manera directa a esta investigación; por ejemplo, el tema de la estructura del signo: el modelo diádico de signo (significante-significado) propuesto por Saussure, es considerado por algunos como conceptualista o psicólogo, mientras que el modelo triádico de Peirce (objeto, representamen e interpretante) por algunos otros, es considerado como logicista.

Aunque estos debates no son objeto de estudio en este trabajo, en más de una ocasión se tomarán decisiones que asumen una u otra idea más cercana a un determinado enfoque; muy particularmente, en este trabajo se echa mano de los aportes de estos dos modelos

sobre la estructura del signo, y junto con el modelo tetrádico de Federici⁴ (denotante, significante, significado y denotado), se elabora y sustenta el modelo del signo numérico desde el cual se orientan las indagaciones que se realizan en este estudio. Pero para este estudio estos modelos u otros que surgen de la semiótica o la lingüística no son suficientes, porque ellos no tienen la pretensión de explicar los procesos de construcción (de re-construcción, o, si se prefiere, de apropiación) de significado por parte de un sujeto particular en un dominio específico (en nuestro caso el relativo al sistema de numeración) y en contextos de enseñanza-aprendizaje escolar, pretensión que sí se tiene con este estudio. Y no tienen tal pretensión por no ser sus objetos de estudio. Este problema le corresponde a la disciplina, o mejor, a las disciplinas encargadas del estudio de la cognición, llamadas con frecuencias “ciencias cognitivas” y a la didáctica de la matemática. Pero nuevamente aquí hay diversidad y ambigüedad. Algunos considerarán que tratar de explicar la construcción de significado del signo numérico por parte de los niños como un fenómeno cognitivo es circunscribir el problema a los límites individuales del sujeto, precisamente porque prejuzgan que el estudio de la cognición supone el estudio de individuos aislados. En este trabajo se asume que aunque la construcción de conocimiento es un hecho social, en el que participan sujetos inmersos en prácticas sociales —que como tales son culturales—, y que por lo tanto la mente no puede limitarse a un fenómeno intra-craneal, intra-cerebral, los fenómenos cognitivos pertenecen a los individuos. Dicho de otra forma, son los individuos quienes asignan significado a los hechos del mundo movilizándolo su aparato cognitivo, y lo realizan gracias a sistemas de signos, usados en sistemas de prácticas, en contextos que son culturales y en situaciones concretas de comunicación. De ahí que en el caso de este estudio si bien se entiende que el SDN cumple un papel fundamental en la conceptualización del número y es parte de lo que este trabajo pretende mostrar, también es cierto que existe otra dimensión del problema que es necesario contemplar, que no es otra cosa que tener presente que para ser apropiado este instrumento cultural por parte de un sujeto, en nuestro caso el niño, se requiere de un pensamiento capaz de establecer y ejecutar las relaciones en el que se fundamenta este sistema semiótico, razón por la cual, si se quiere entender lo que ocurre en el intercambio y lo que ocurre en las mentes de sus participantes, es necesario tener

⁴ Carlo Federici (1906-2005), genovés, profesor de matemáticas, lógica y física en la Universidad Nacional de Colombia, sede de Bogotá a partir de 1948. En sus conversaciones con sus discípulos enseñaba un modelo tetrádico del signo. Sobre las díadas, tríadas y tétradas en el signo, puede verse el trabajo de Vasco, Zellweger y Sáenz-Ludlow (2009, pp. 107-109).

presente las elaboraciones con las que llegan los individuos a él. En otras palabras, el significado que un sujeto da a los registros numéricos que se tramitan en el acto de interacción comunicativa tiene que ver tanto con los sistemas semióticos que se usan en el intercambio como con las operaciones cognitivas⁵ que el sujeto realiza. Una enunciación como la recién hecha puede introducir ambigüedad, ya que tiene la debilidad de presentar las funciones de los sistemas semióticos y las operaciones cognitivas necesarias para su aprehensión como entidades distintas que se ponen en relación; quizá, más bien, las posibilidades de solución están en poder elaborar un modelo que, si bien haga distinciones, no produzca separaciones entre actividad conceptual y semiótica. En parte este trabajo tiene que ver con ofrecer alguna explicación sobre cómo entender esta relación en el caso del SDN: ¿habrá que entenderse como un simple efecto de los sistemas semióticos sobre el pensamiento de los sujetos que hacen uso de ellos? o ¿habrá de entenderse que entre actividad semiótica y conceptual existe una relación dialéctica, que cada sujeto realiza en cada acto de interacción comunicativa?, o más aún, ¿conviene entender que las actividad semiótica y la actividad conceptual son como dos caras de un mismo proceso que podríamos acordar en llamar pensamiento?

Si bien es innegable una fuerte tendencia en las últimas décadas por reconocer el papel que tienen los sistemas de representación externa en el pensamiento, como se ha dicho, está lejos un acuerdo sobre cuál es la relación entre sistema de representación semiótica y actividad conceptual y en cuáles son los mecanismos que operan en esta relación. Incluso no siempre se ha tenido claridad sobre la importancia de su estudio en los procesos de conceptualización. Martí señala que la psicología ha tomado las representaciones mentales (representaciones internas) del sujeto como objeto de estudio, en su pretensión de estudiar los procesos mentales que rigen la conducta humana y dice que de esta manera la psicología ha valorado la importancia de las representaciones internas para dar cuenta de la interacción entre el sujeto y su entorno. Pero considera que “*aunque esencial, esta postura tiene sus limitaciones si pensamos en la importancia que tienen todos los sistemas de signos que median las actividades humanas*” (Martí, 2003, p. 9). Para este autor, los sistemas externos de representación han sido estudiados como forma de llegar

⁵ El uso de la expresión “operaciones cognitivas” no es de todo claro en psicología. Si se toma desde la tradición cognitiva más del lado de procesamiento de información esta expresión hace referencia a los subprocesos que se dan en el procesamiento mismo de información. Duval desde su enfoque de cognitivo-semiótico la usa más en términos de la actividad conceptual a que da lugar la actividad semiótica y desde el estructuralismo genético refiere al funcionamiento operatorio del pensamiento. Esta expresión será objeto de análisis en este trabajo.

a las representaciones internas,⁶ pero reclama que no se han considerado como objeto de estudio de los psicólogos; sólo hasta hace apenas unos cuantos años atrás se ha empezado a considerar el papel que estos sistemas tienen en la configuración de la conducta humana y en los cambios cognitivos que se producen, gracias a la difusión de las ideas de Vygotsky sobre la importancia de la mediación semiótica en la configuración de la mente humana.

Raymond Duval (1995/2004, 2006), desde su enfoque cognitivo-semiótico, destaca la importancia de los sistemas semióticos en la construcción del conocimiento matemático y en su aprendizaje. Basta revisar la historia, dice este autor para ver que el desarrollo de las representaciones semióticas era una condición esencial para el desarrollo del pensamiento matemático

El papel desempeñado por los signos, o más exactamente por los sistemas semióticos de representación, no es sólo para designar los objetos matemáticos o comunicar, sino también trabajar sobre los objetos matemáticos y con ellos. Ningún tipo de procesamiento matemático se puede realizar sin necesidad de utilizar un sistema semiótico de representación, ya que el procesamiento matemático siempre implica la sustitución de una representación semiótica por otra. ¡La parte que los signos juegan en las matemáticas no es para ser sustituida por objetos, sino por otros signos! Lo que importa no son las representaciones, sino su transformación. A diferencia de las otras áreas del conocimiento científico, signos y la transformación de representaciones semióticas están en el corazón de la actividad matemática. (Duval, 2006, pp. 106-107)

Algunos investigadores, especialmente desde perspectivas culturalistas, actúan como si el hecho de reconocer este papel central de las representaciones semióticas en la actividad matemática conllevara necesariamente la negación de la existencia de representaciones internas. O algunos otros, sin negar las representaciones internas, actúan como si la actividad del sujeto sobre las representaciones externas reflejara de manera directa y diáfana sus representaciones internas. Sobre esta cuestión, que se considera central en este estudio, se volverá más adelante. Por lo pronto, se afirmará que la perspectiva desde la que se asume este trabajo, postula la necesidad de la existencia de

⁶ Las representaciones internas o representaciones mentales “*son las que permiten mirar el objeto en ausencia total de significante perceptible. Por lo general se igualan con las “imágenes mentales” en tanto que entidades psicológicas que han tenido una relación con la percepción. Pero las representaciones mentales cubren un dominio más amplio que las imágenes. Es necesario incorporar en ellas no solo los conceptos, las nociones, las “ideas”, sino también las creencias y las fantasías, es decir todas las proyecciones más difusas y más globales que reflejan los conocimientos, y los valores que un individuo comparte con su medio, con un grupo particular o con sus propios deseos*” (Duval, p. 36).

representaciones internas. Duval (1995/2004) afirma que “*no hay noesis sin semiosis*”,⁷ pero también habría que agregar que, en cierto sentido, no hay semiosis sin noesis. Vasco destaca la necesidad de considerar la íntima relación de estos dos procesos

La palabra ‘semiosis’ como una actividad humana de expresión, representación y comunicación pretende ser opuesta a ‘noesis’, la actividad mental, cerebral, interna del pensamiento. Las ideas —a veces erróneamente atribuidas a Piaget—, que el pensamiento (noesis) es una actividad puramente mental, sin imágenes, palabras internalizadas o símbolos, y que el lenguaje es sólo una expresión externa de pensamiento (semiosis), se han convertido en obsoletas. Las ideas —a veces erróneamente atribuidas a Vygotsky— que lenguaje, expresiones sociales y herramientas culturales eran los principales componentes de la realidad humana, y que el pensamiento (noesis) es sólo el lenguaje interiorizado, afortunadamente están volviéndose obsoletas. La dialéctica de la noesis y semiosis es compleja, dinámica y creativa; no puede haber ninguna actividad individual noética y semiótica refinada sin lengua y otras herramientas culturales, pero no puede haber cultura refinada y lenguaje sin actividad noética y semiótica individual, a menudo idiosincrásica, creativa e impredecible. (Vasco, 2007, p. 14).

A partir de sus consideraciones sobre las relaciones pensamiento-lenguaje, Feldman (1987/1990) reconoce también las representaciones mentales “*antes de que el sujeto pueda emitir un juicio sobre los materiales que se le han presentado, en primer lugar, debe realizar una representación mental de la situación. Cuando emprende la tarea que le presenta el experimentador, reflexiona*⁸ *sobre esta representación mental*” (p. 127). De una afirmación como esta no hay razón para entender que la representación mental es anterior al acto de semiosis y, menos aún, que semiosis y representación mental son actividades independientes.

Hay razones suficientes para mantener como presupuesto de nuestro análisis la existencia de algo que podríamos reconocer como “representación mental”. Gardner ilustra esta cuestión:

La ciencia cognitiva se basa en la creencia de que es legítimo —más aún necesario— postular un nivel separado de análisis, al que podría llamarse “nivel de la representación”. El hombre de ciencia que opera en este nivel comercia con entidades como símbolos, reglas, imágenes —la materia prima de la representación, que encontramos entre lo que afluye y lo que efluye, entre lo que entra en la mente y lo que sale de ella—, y explora la forma en que estas entidades representacionales se amalgaman, transforman o contrastan entre sí. Este nivel es indispensable para explicar toda la variedad de las conductas, acciones y pensamientos humanos. (Gardner, 1985/1988, p. 55).

⁷ Semiosis: “la aprehensión o la producción de una representación semiótica”. Noesis: “Los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia, o la comprensión de una inferencia” (Duval, 1995/2004, p. 14).

⁸ Quizá no ocurre necesariamente que reflexione sobre ellas, al menos no en todos los casos, pero sí que las tome como base (conscientemente o no) para sus actuaciones al enfrentar una tarea.

Unas líneas más adelante este autor indica que casi todos los psicólogos cognitivistas aceptan la necesidad y conveniencia de postular un nivel de representación mental. Esto se refleja en el uso de expresiones como conceptos de esquema, operación mental, transformaciones e imágenes. *“Los debates no giran en torno a la necesidad de este aparato conceptual sino en torno de cuál es el mejor modelo de representación”* (1988, p. 149).

Si bien es cierto que Duval reconoce algún tipo de constructo mental, como ya lo hemos dicho, no lo entiende como opuesto a las representaciones semióticas; desde este enfoque, parece que la oposición que generalmente se hace entre las representaciones mentales y representaciones semióticas ya no resulta tan relevante, *“porque se basa en la confusión entre el modo fenomenológico de la producción y el tipo de sistema de movilización para la producción de toda representación”* (2006, p. 105).

Duval (1995/2004) distingue tres formas diferentes en las que la idea de representación aparece en la literatura especializada sobre cognición: una primera, como representación de ideas, de creencias o “evocación de objetos ausentes”; cuyo origen lo ubica en Piaget. Una segunda, como “codificación de información” desde enfoques de procesamiento de información. En esta perspectiva se puede ubicar en los trabajos Clark (1977), de Newell y Simon (1972), Anderson (2001), Pylyshyn (1988), Fodor, García-Albea y Zulaica (1985) y Fodor (1986). Pozo (2010) destaca que el enfoque de procesamiento de información comparte con otros enfoques que la acción del sujeto está determinada por sus representaciones mentales, y que la característica específica que lo distingue de otros enfoques cognitivos es proponer que esas representaciones se forman por algún tipo de cómputo: *“cualquier proceso o ejecución cognitiva puede ser comprendido reduciéndolo a las unidades mínimas de que está compuesto. Estas unidades más pequeñas que tienen una naturaleza discreta en lugar de continua, se unen entre sí hasta construir un ‘programa’...”* (p. 45). Según Duval, la tercera forma como aparece la idea de representación en psicología es como representación semiótica. En esta dirección se puede citar una gran variedad de trabajos, además de los de este autor, algunos otros, Karmiloff-Smith (1992/1994), Kaput (1998), Tolschinsky (2007), Vasco (2007), Martí (2003).

Otra manera de expresar la pretensión de este trabajo podría ser que se busca arrojar luces sobre cómo entender las relaciones entre representaciones externas y

representaciones internas en un campo muy específico: el de la numeración, o para ser más exacto, en el proceso de apropiación por parte del niño del sistema semiótico de numeración llamado “Sistema Decimal de Numeración”, que abreviaremos “SDN”.

El marco referencial para este trabajo se compone de cinco partes. En el primer capítulo se presentan algunas cuestiones preliminares que ubican al lector en los hechos en los que se pretende trabajar. En el capítulo segundo se aborda el problema del signo, fundamentalmente desde dos modelos, el de Peirce y el de Saussure, complementados con el modelo tetrádico de Federici. En el capítulo tercero se pasa a dilucidar el papel de las representaciones semióticas en la actividad de apropiación del SDN, con apoyo, especialmente, de la teoría semiótico-cognitiva de Duval sobre las operaciones de tratamiento y conversión de registros semióticos (1995/2004, 1999/2004, 2006), en tanto que brinda herramientas para poner en relación actividad conceptual y actividad semiótica en los procesos de aprendizaje de la matemática. En el capítulo cuarto se elabora el modelo del signo numérico en el que se sustenta este trabajo. En este modelo se sintetizan los elementos que se han desarrollado a partir del análisis del signo y del papel de la actividad semiótica en la actividad conceptual. Aunque en este trabajo no se asume la perspectiva pragmática del significado tal cual como es propuesta por el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) de Juan Díaz Godino (1994), se recurre a las ideas de significado institucional y significado personal en tanto que esta diferenciación permite reconocer los procesos de construcción de significado que ocurre en individuos inscribiéndolos en sistemas de práctica (sociales y culturales). También se recurre a los aportes de la teoría de los campos conceptuales (especialmente Vergnaud, 1990; 1998), en particular, en lo que tiene que ver con el carácter operatorio que se reconoce a la actividad conceptual a través del concepto de *esquema*, en tanto que ofrece elementos para entender el proceso de asignación de significado por parte del sujeto.

1 CUESTIONES PRELIMINARES

Como ya se dijo, esta investigación pretende estudiar el vínculo entre la operación de conversión de representaciones semióticas de un registro a otro del SDN y la construcción de significado de estas representaciones por parte los niños. En otras palabras, interesa estudiar lo que hace el niño cuando intenta convertir expresiones verbales numéricas como “trescientos cuarenta y siete” a expresiones como ‘347’, que llamaremos *indo-arábicas* y establecer la relación que esta actividad cognitiva tiene con el proceso de significación que ellos les dan a estas expresiones.

La primera parte del problema —lo relativo a la conversión— ya tiene una larga tradición de estudio, especialmente en lo que tiene que ver con la descripción y caracterización de las producciones de los niños cuando escriben numerales que se les dictan. Más adelante se describirán algunas perspectivas de estudio sobre este tema. Por ahora, se dirá que de forma reiterada estos estudios encuentran que los niños producen escrituras no canónicas prototípicas cuando se les dictan ciertos tipos de numerales (Power y Dal Martello, 1990; Orozco, Guerrero y Otálora, 2007; Orozco y Hederich, 2002; Scheuer, Sinclair, Merlo de Rivas y Tièche 2000). Un estudio reciente de Villarroel, Jiménez, Rodríguez, Peake y Bisschop (2013) con 325 niños de edades entre 7 y 9 años, aunque también encuentra errores sintácticos, reporta una preponderancia de errores lexicales con relación a los sintácticos cuando se les pide escribir numerales correspondiente a números en el intervalo [100, 999].

En el estudio de tesina⁹ (Castaño, 2008) realizado por el autor de este trabajo se encontraron las mismas escrituras no canónicas producidas por los niños que reseñan los estudios citados. Al igual que lo constatan Orozco, Guerrero y Otálora (2007), este autor encontró que la tendencia de los niños de primer grado escolar (6-7 años) de producir este tipo de escrituras no canónicas es muy alta cuando se le dictan numerales verbales que en registro indo-arábigo se representan por numerales de tres dígitos, y aunque disminuía considerablemente en los niños de segundo, aún permanecía cuando intentaban escribir

⁹ En este trabajo también se estudiaron las producciones no canónicas de los niños al intentar escribir numerales que se les dictan. Para obtener información que permitiera entender el por qué de sus producciones se realizaron entrevistas a profundidad a algunos niños.

numerales de cuatro cifras (por ejemplo, escribían ‘3000456’, ‘300456’, ‘30456’, o ‘3004056’, u otras formas, cuando se le dictaba “tres mil cuatrocientos cincuenta seis”).

Aunque el estado actual de la investigación muestra un relativo acuerdo en la descripción de las escrituras no canónicas que producen los niños, no es igual cuando se trata de dar explicación de por qué se producen unos tipos de escrituras y no otros. Para la psicología y para la didáctica de la matemática es importante construir modelos que ayuden a suponer los mecanismos que operan cuando los niños convierten una representación de un registro numérico a una representación del otro registro y, más aún, acopiar información que ofrezca una relativa validez de ellos.

Un niño podría tener éxito al escribir numerales en el registro indo-arábigo que se le presentan en el registro verbal (o como se dice comúnmente: “que se le dictan”) si posee un modelo mental, que podría llamarse de “traducción” (o de transcripción) en el que cada elemento de la representación del registro verbal se traduce (se transcribe) al correspondiente elemento en el registro indo-arábigo; para ello el niño tiene que reconocer que se escriben las cifras representadas por las palabras que en la expresión verbal anteceden las marcas de unidad (cien, mil, diez mil, etc.) y que las marcas de unidad quedan representadas por el lugar que ocupe la cifra. Y, además, que en caso de ausencia de una marca de unidad en la expresión verbal, se debe escribir cero en el lugar correspondiente. Obsérvese que este procedimiento requiere del niño tener un “modelito” que ponga en orden las marcas de unidad (miles, cientos,...), ver figura 1.

Pero el niño prefiere otra cosa: él prefiere aplicar el modelo de transcripción de forma mucho más natural y de manera más directa, sin los refinamientos del adulto.¹⁰ El niño preferiría escribir “trescientos veinticuatro” como ‘300204’ (o ‘30024’) y ‘3000802’ (o ‘300082’) cuando se le dicta “tres mil ochenta y dos”. ¿Por qué a muchos niños les resulta difícil aprender y aplicar correctamente el principio de transcripción ilustrado en el párrafo anterior?¹¹

¹⁰ Convertir la representación de un numeral en el registro verbal a una representación de un numeral en el registro indo-arábigo “consiste simplemente en escribir en cifras lo que dicen las palabras”.

¹¹ Incluso los que lo aprenden con relativa facilidad también en algún momento del proceso de aprendizaje producen escrituras no canónicas como las descritas.

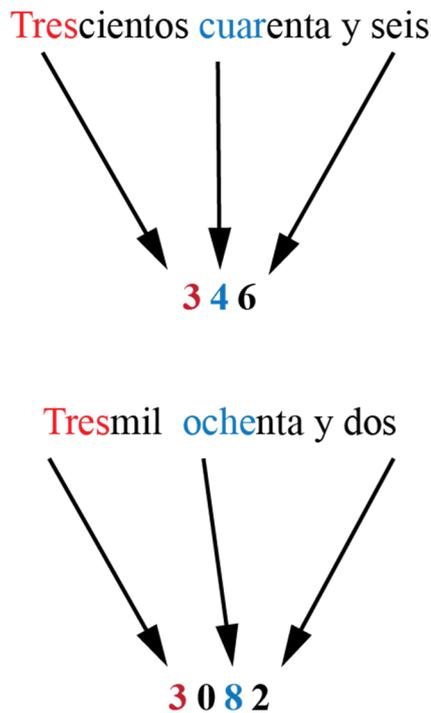


Figura 1 Correspondencia entre expresiones verbales numéricas e indo-arábigas

La conversión en el primer caso es relativamente sencilla, ya que en ambas representaciones es posible identificar marcas que se corresponden (“trescientos” con el ‘3’ de las centenas, “cuarenta” con el ‘4’ de las decenas, etc.); en cambio, en el segundo, al no existir en el registro verbal una marca que señale la ausencia de unidades de cien — que sí se escribe en el registro indo-arábigo— resulta problemática. En general, los profesores y las profesoras están familiarizados con las dificultades que tienen los niños para entender el principio de posicionalidad y las dificultades que tienen para abandonar esa hipótesis simple de transcripción. ¿Qué es lo que se evidencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje escolar? Los niños terminan haciendo sus propias combinaciones de las reglas que se les enseña. ¡Lo interesante de los hechos es precisamente que estas producciones no canónicas son características: ‘324’ no es ‘30024’ o ‘300204’ como él hubiera preferido, posiblemente sea mejor escribir ‘3024’! La investigación las ha identificado y tipificado y ha constatado que, a pesar de variables culturales y de la mayor o menor transparencia con la que los lenguajes “naturales” del grupo social de los niños muestran la conversión entre los dos registros,¹² se pueden encontrar algunas invariantes en las tendencias de los niños. Este fenómeno es el que merece explicación.

¹² Por ejemplo, en castellano, el registro verbal numérico, al no ser homogéneo en algunas representaciones, oculta más la sintaxis que rige esas representaciones, por lo que hace más difícil la conversión: se dice “dieciséis” y no “diez y uno” (o dieciuno). “Dieciséis” es relativamente fácil de

Se han ensayado distintas formas de explicación de acuerdo con las perspectivas de investigación. En particular, desde la perspectiva neuro-cognitiva, a la que se hará referencia más adelante, la explicación que se ofrece de las producciones no canónicas cuando los niños intentan escribir en el registro indo-arábigo numerales que se les dictan (es decir, que se les presentan mediante representaciones en el registro verbal oral) se busca en los mecanismos de procesamiento de información, recurriendo a procesos de registro de la información que después es procesada para darle significado. Los avances en esta línea de investigación son significativos; pero, ¿será que las producciones no canónicas descritas por la investigación se pueden explicar exclusivamente mediante mecanismos de procesamiento de información, mecanismos éstos que, en un momento, impiden a los niños hacerse a la totalidad de la expresión verbal y por eso la segmentan, para luego traducir cada segmento al registro indo-arábigo?, o, ¿es necesario complementar la explicación recurriendo a proceso de significación? Esta investigación se interesa, como se ha dicho, en estudiar los hechos que ocurren cuando el niño intenta convertir representaciones numéricas verbales a representaciones en el registro indo-arábigo.

Antes de desarrollar los referentes teóricos que soportan la investigación, en las siguientes sesiones de este capítulo se presentan algunos desarrollos preliminares para facilitar las aplicaciones que se irán haciendo de estos referentes para el análisis mismo del SDN y al proceso de apropiación por parte del niño. En la sección 1.1 se realiza un análisis formal de SDN para derivar una primera aproximación a la complejidad que representa al niño la apropiación del SDN; en la sección 1.2 se recurre a la historia de la construcción del SDN como forma de tener un referente que puede insinuar los problemas que tienen que resolver los niños cuando tratan de apropiarse de este sistema y, por último, en la sección 1.3 se presentan estudios que se han hecho sobre el proceso de conversión de representaciones numéricas.

interpretar como “diez y seis”, lo que facilita comprender la regla con la que se hace la conversión a “16”. “Once” hace totalmente arbitraria la conversión. Algo semejante ocurre en inglés (eleven, twelve). Después viene thirteen, fourteen, fifteen, que no expresan de forma explícita la composición de “diez y algo”. A partir de dieciséis se tiene sixteen, seventeen, eighteen, nineteen). El francés rompe en setenta la regularidad con la que se enuncian las “decenas” (sesenta es soixante, setenta es soixante-dix y ochenta quatre-vingts). En lenguas como el chino, japonés y coreano la numeración oral hacen más explícita las operaciones involucradas en la escritura (en la sección 1.3 se ampliará este punto)

1.1 EXIGENCIAS QUE HACE AL NIÑO LA APROPIACIÓN DEL SISTEMA DECIMAL DE NUMERACIÓN

El SDN es un sistema que permite representar la cantidad de elementos¹³ que tiene una colección; para producir estas representaciones, este sistema¹⁴ posee al menos dos registros semióticos distintos: uno es el verbal (expresable de forma oral o escrita), como cuando se utiliza la expresión “trescientos cincuenta y cinco” y el otro, es el registro indo-arábigo, como cuando se escribe el numeral ‘345’ (expresable únicamente de forma escrita).¹⁵ Como en todo sistema semiótico, estos dos registros tienen un sistema de reglas sintácticas propias que posibilitan acceder al significado de las expresiones que se emiten en el sistema.

Desde el punto de vista formal, el registro indo-arábigo es una forma de representar por escrito y de forma abreviada el resultado final de un proceso de agrupaciones y reagrupaciones de diez unidades de un mismo orden con el fin de dar cuenta de la cantidad de elementos de una colección. Por ejemplo, para dar cuenta de la cantidad de elementos de una colección que tiene “cuatrocientos treinta y cinco” elementos, se trata de formar todos los grupos de diez que sea posible hacer (43 grupos de diez y 5 elementos sueltos), y con los 43 grupos de diez se forma otro de orden mayor (compuesto por 4 grandes grupos de diez grupos de diez elementos cada uno) y quedan sobrando 3 grupos de diez. El resultado final de estas agrupaciones es entonces 4 grandes grupos de diez de diez, 3 grupos de diez y 5 elementos sueltos. El numeral que representa el número correspondiente a esta cantidad se obtiene registrando la cantidad de grupos del mayor orden que se hayan logrado formar y, a su derecha, (al menos en nuestro caso) la cantidad de grupos del orden inmediatamente inferior que quedaron sueltos y, nuevamente a la

¹³ Una magnitud hace referencia a un atributo que puede reconocerse en los objetos materiales (o físicos) o en los eventos y que puede ser medido para dar cuenta de su cantidad. Entre estos atributos está el de la cantidad de elementos que tiene una colección. Dada el carácter discreto de esta magnitud, para dar cuenta de su cantidad (su numerosidad) basta el procedimiento de enumeración. El sistema decimal de numeración SDN es un sistema semiótico utilizado para representar la numerosidad de las colecciones.

¹⁴ Existen otros registros, como el Braille o el lenguaje de señas, pero estos registros y las conversiones entre ellos no serán objeto de estudio de esta investigación. De igual forma, existen otros sistemas de numeración como el romano (no posicional como el indo-arábigo), o posicionales en bases diferentes a diez. Este estudio solo enmarca en lo que ocurre al interior de este grandioso invento de la humanidad, el Sistema Decimal de Numeración.

¹⁵ Por ahora se toma la expresión “registro semiótico” como un sistema productor de representaciones semióticas. Es decir, en el caso particular del SDN, el registro verbal es el sistema que permite producir representaciones como “cuatrocientos veinte” y el registro indo-arábigo es el sistema que permite producir representaciones como ‘348’.

derecha, los del orden inmediatamente inferior que quedaron sobrando, y así sucesivamente hasta llegar a los últimos elementos no agrupados o sueltos, siempre menos de diez. En caso de que no quede sobrando ningún grupo en algún orden, se escribe '0' (cero) en el sitio correspondiente. En este ejemplo se forman 4 unidades de mayor orden posible, quedan sueltas 3 unidades del orden inmediatamente inferior y finalmente quedan sobrando 5 unidades del orden inmediatamente inferior (figura 2)

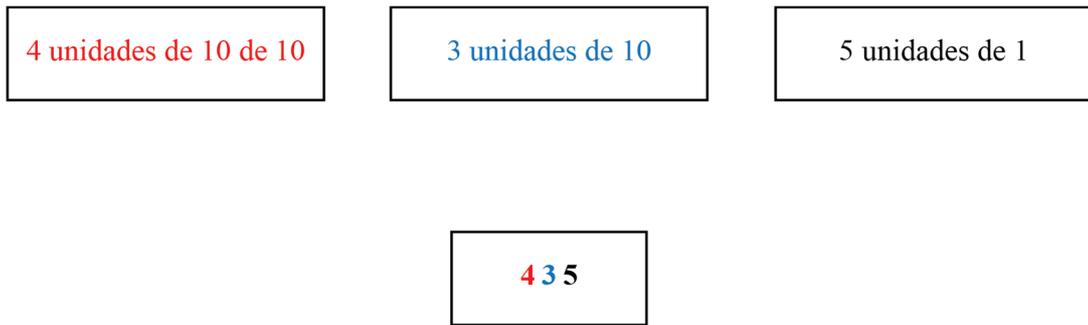


Figura 2. Sintaxis polinomial de un numeral en el registro indo-arábigo

El registro verbal se puede expresar de forma oral y escrita, y se rige por una sintaxis distinta. Una expresión verbal numérica está compuesta de segmentos enunciados uno después del otro. La primera palabra o el sufijo de estos segmentos hace referencia a un dígito e indica las veces que se repite la unidad decimal del sistema (mil, cientos, dieces). Esta palabra actúa como un operador multiplicador sobre el valor al que hace referencia la palabra que indica la unidad decimal. En muchas de estas expresiones el último segmento está formado por una única palabra que corresponde a un dígito y va antecedida de la expresión "y". Hay una regla del sistema: los segmentos se expresan en orden estricto según la unidad decimal, empezando por la de mayor valor. La figura 3 ilustra esta sintaxis en el caso de cuatrocientos treinta y cinco.

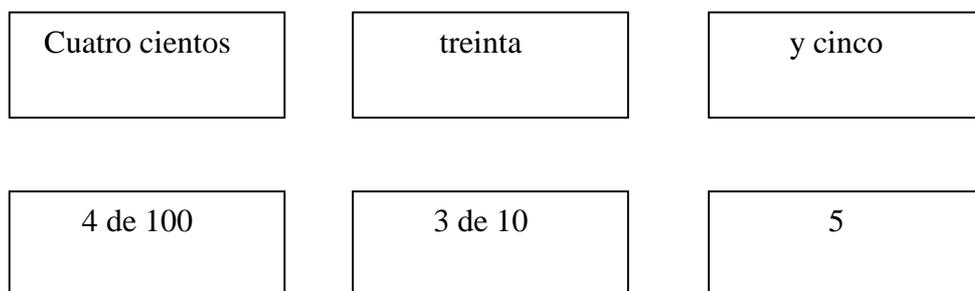


Figura 3. Sintaxis aditivo-multiplicativa de un numeral en el registro indo-arábigo

Aunque el registro verbal presenta esa estructura aditivo-multiplicativa, admite una simplificación y puede reducirse a una estructura estrictamente aditiva (figura 4).

Cuatro cientos	treinta	y cinco
400	30	5

Figura 4. Sintaxis aditiva de un numeral en el registro indo-arábigo

Al analizar las demandas lógicas de estos dos registros y ponerlos en relación, se puede establecer:

- En términos de Duval (1995/2004), las representaciones correspondientes de los dos registros no son congruentes. El registro verbal no enuncia el segmento correspondiente a las unidades decimales que tendrían que ir precedidas de la palabra cero; en cambio, en el registro indo-arábigo hay que indicar con '0', en el lugar adecuado, que no quedaron unidades sueltas de ese orden decimal. En el registro indo-arábigo las segundas palabras de cada segmento (las que corresponden a las unidades decimales: diez, cientos, mil etc.) no se codifican con marcas específicas; éstas se sugieren por la posición que ocupa el dígito correspondiente a la primera palabra de cada segmento.

3	0	0	9
Tres mil			Nueve

Figura 5. No congruencia entre los dos registros numéricos

- Es clara la complementariedad de las representaciones de los dos registros para enriquecer el significado. Si únicamente se contara con el registro indo-arábigo, quizá la forma de tener alguna idea de la cantidad sería mediante la representación de las disposiciones de agrupaciones (grupos de 10 de 10, grupos sueltos de 10 y elementos sueltos), pero no se tendría la idea de un todo homogéneo de unos, que es lo que posibilita el registro verbal. El registro verbal numérico facilita convertir los encajamientos en un todo homogéneo, lo que posibilita, por ejemplo, que una centena no tenga que representarse únicamente como un grupo de 10 de 10 sino además —y de forma mucho más simple— como un grupo de 100.

Según Duval (1995/2004), “*la especificidad de las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos y en que pueden ser*

convertidas en representaciones ‘equivalentes’ en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza” (p. 27). Así los dos sistemas de representación numérica se enriquecen mutuamente, y el sujeto podrá aprovecharse de esto si cuenta con los recursos intelectuales para hacer conversiones de un registro a otro. Este autor dice que

Para los sujetos una representación puede funcionar verdaderamente como representación, es decir, permitirles el acceso al objeto representado, solo cuando se cumplen dos condiciones: que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso... y que “espontáneamente” puedan ejecutar la operación de conversión, sin siquiera notarlo. Cuando estas dos condiciones no se cumplen, la representación y el objeto representado se confunden, y no se pueden reconocer dos representaciones diferentes de un mismo objeto como representaciones de ese mismo objeto. (p. 31).

- El registro verbal no es homogéneo, mientras para los numerales de dos cifras las expresiones “veinti___”, “treinta___”, “cuarenta___”, etc. del castellano, no indican de manera directa las ideas de “dos dieces”, “tres dieces”, “cuatro dieces”, etc. (“veinti-” es la que menos muestra la idea de operador multiplicador aplicado sobre diez); en cambio en los numerales de tres cifras, algunas expresiones verbales muestran de forma explícita el operador multiplicativo sobre las unidades de “cien”: dos cientos”, “tres cientos”, etc. “Quinientos” es bastante distante de la idea de “cinco cientos”; en “setecientos” y “novecientos”, aunque es un poco más clara, hay contracciones. En los numerales de cuatro cifras, las expresiones verbales presentan de forma clara y consistente los operadores sobre mil: “dos mil”, “tres mil”, etc. Ya no se presentan las excepciones como “quinientos”, “setecientos” y “novecientos”; en estos casos se dice: “cinco mil”, “siete mil” y “nueve mil”.

- Una cuarta cuestión tiene que ver con responder a las preguntas ¿qué hace que las representaciones del registro verbal no se queden como yuxtaposición de segmentos?, ¿qué permite al niño pasar de expresiones como “cuatrocientos/cuarenta/siete” compuesta de varios segmentos a una expresión de la forma “cuatro-cientos-cuarenta-y-siete” como representante de un todo único y homogéneo?, ¿qué hace que las representaciones del registro indo-arábigo no se queden como yuxtaposición de cifras sino que se constituyan en unidades que representan un todo único y homogéneo de unos?

Para el caso del registro indo-arábigo, la respuesta podría buscarse con apoyo en el registro verbal; pero en el caso de este último, el problema no puede resolverse

satisfactoriamente —a no ser que se acepte la circularidad— recurriendo nuevamente al registro indo-arábigo. Parece, entonces, que es necesario recurrir a dos ideas que pongan en relación, ya no expresiones particulares de un registro a otro, sino expresiones diferentes al interior del mismo registro, una referida al orden y la otra a la composición aditiva. En el primer caso, cuando a partir de dos o más expresiones distintas del registro verbal se compara la cantidad de elementos de dos colecciones para contestar a preguntas tales como ¿en dónde hay más?, ¿en dónde hay menos? y, en el segundo, cuando se hacen composiciones o descomposiciones, para contestar la pregunta ¿cuánto se reúne en total?

Una forma de acceder a la dimensión ordinal del número con apoyo en el registro verbal está dada por el lugar que ocupa una representación verbal particular en la sucesión ordenada de representaciones numéricas verbales; este lugar brinda al niño cierta idea de la extensión de la cantidad que representa una expresión. Si la sucesión de numerales verbales para contar no fuera un todo ordenado, por esta vía no se tendría acceso a la idea de mayor o menor cantidad. De forma semejante ocurre con el registro indo-arábigo.

Ahora bien, aceptar lo anterior no significa que la vía de acceso al orden sea la de establecer una correspondencia uno a uno entre los elementos de los dos registros. Se necesita, además, una operación de composición que reúna en un todo homogéneo los segmentos de la expresión verbal, y este todo se expresa como un lugar en un orden. A este todo no se accede por una sucesión “+1” homogénea; más bien es una sucesión “+1” heterogénea: unas veces se incrementará sucesivamente unidades de primer orden, otras unidades de 10, otras de 100.¹⁶ Parece que aquí radican en gran parte las dificultades de los niños para apropiarse del significado de las expresiones del SDN. En verdad, para hacerse a la idea del lugar de una expresión por la vía del registro verbal numérico, el niño no puede limitarse a trabajar sobre una única sucesión (la de los unos), sino también sobre la de los dieces y las de los cientos. Pero no se trata de trabajar estas sucesiones por separado para pasar de la una a la otra en forma sucesiva, sino de ponerlas en relación,

¹⁶ Hacerse a una idea del lugar en la sucesión numérica de un numeral supone coordinar varias sucesiones. Por ejemplo para cuatrocientos cincuenta y seis, primero ha de representarse la sucesión 100, 200, 300, etc. y ubicar el lugar de “cuatrocientos”. En segundo lugar, hay que representarse la sucesión de dieces y ubicar 50 y por último, ubicar el lugar de “seis”, en la sucesión de unos. Si el niño no puede coordinar estas tres sucesiones no podrá hacerse a una idea razonable del lugar de este numeral y como consecuencia de su cantidad. Como seguramente se tendrá la oportunidad de ver en las evidencias de este trabajo, el niño recurrirá a su experiencia con algunas cantidades y sus primeros intentos serán fragmentarios. Pero aun así, esto no elimina la necesidad lógica de estas coordinaciones.

para coordinarlas e, incluso, para llegar a trabajarlas de forma simultánea. La siguiente situación bastante recurrente ilustra esta dificultad:

Una niña, al resolver un problema de empacar 157 objetos en bolsas, colocando de a 10 en cada una (previamente ha resuelto problemas semejantes disponiendo de colecciones de objetos y de bolsas, para ejecutar físicamente las acciones), dice “diez”, y separa un dedo para indicar una bolsa; dice “veinte”, y separa dos dedos para otra bolsa, y continúa así, contando de diez en diez, hasta 190; al hacérsele notar que se ha pasado, reinicia el proceso y, al llegar a “ciento cincuenta”, titubea,... y luego continúa “ciento cincuenta y uno”, y pasa un nuevo dedo (por lo que lleva 16 bolsas), “ciento cincuenta y dos”, y pasa otro nuevo dedo (lleva 17 bolsas); así llega al resultado de 22 bolsas.

Una posible forma de explicar estas actuaciones puede ser: en el primer intento termina trabajando sobre una única sucesión, la de dieces, dejando de lado la de unos; en el segundo intento busca ponerlas en relación, pero al tomar la sucesión de unos, mientras piensa en la de dieces, cada elemento de la primera toma el valor de una unidad de la segunda (de 150 a 151 hay una unidad, pero como viene de la sucesión de dieces, esta unidad se le vuelve de diez). Esta falta de coordinación se repite una y otra vez en los niños.

- La posibilidad de asignar significados a los diferentes registros hace demandas lógicas variables a los niños. El registro indo-arábigo, por tener una sintaxis polinomial,¹⁷ como se ha descrito arriba, exige la capacidad de componer encajamientos (componer correspondencias múltiples, un grupo de 10 de 10 equivale a un grupo de 100), de aplicar operadores multiplicativos y de componer aditivamente las partes. El registro verbal, por tener una sintaxis aditivo-multiplicativa un poco más elemental que el registro anterior, exige del niño ser capaz de aplicar operadores multiplicativos y de componer aditivamente partes. El uso de ambos registros para expresar la cantidad de elementos de una colección requiere del niño la coordinación de unidades de diferente valor, de tal forma que pueda operar con diferentes unidades. Sin embargo el registro verbal ofrece la oportunidad de una interpretación más elemental, en la que las unidades decimales diferentes se homogenizan, reduciéndolas a unidades de uno; esto se hace posible debido a la relación lógica existente en lo multiplicativo y lo aditivo, precisamente es esto lo que

¹⁷ $435 \Rightarrow 4 \text{ de } 10 \text{ de } 10, 3 \text{ de } 10 \text{ y } 5 \text{ de } 1$ se puede representar como un polinomio, del cual se van a escribir más tarde solo los coeficientes: $4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$.

hacen muchos niños que se inician en el SDN: limitan el significado del registro verbal a lo estrictamente aditivo. Las exigencias que hace cada tipo de interpretación de los registros numéricos determinan niveles de complejidad en su comprensión. Un niño que no pueda coordinar unidades de diferente valor para operar con ellas, se verá obligado a homogenizarlas para trabajar en un sistema que permita operar con un único tipo de unidades. Un niño que no pueda hacer composiciones de correspondencia múltiple, cuando más, podrá operar en un sistema de tipo aditivo-multiplicativo. Así se hace explícito el papel que desempeña el registro verbal para favorecer una interpretación más elemental del registro indo-arábigo.

A partir del análisis precedente parece razonable afirmar que el registro verbal comanda las interpretaciones de representaciones en el registro indo-arábigo; sin embargo, para que esta posibilidad se realice en todo su potencial, es necesario que en el proceso de enseñanza se apoye intencional y sistemáticamente a los niños tanto en el reconocimiento y apropiación de esa sintaxis del registro verbal como en el proceso de conversión entre los dos registros. En la enseñanza escolar y familiar¹⁸ no se apoya a los niños, o al menos no lo suficiente, para que comprendan las relaciones entre representaciones de los dos registros. La enseñanza generalmente se centra en el aprendizaje de la sucesión numérica expresada en los dos registros y en la asociación entre términos correspondientes de las dos sucesiones. Para el caso del registro verbal, dicha asociación se hace con apoyo en reglas fonéticas y morfológicas, así como lo muestra el niño de corta edad al enunciar oralmente la sucesión de palabras de contar. El niño al recitar la sucesión de las palabras-números se detiene en “diecinueve” y pregunta “¿qué sigue?”, se le suele decir: “veinte”, y él continúa: “veintiuno, veintidós...”, porque él descubre que recitar la sucesión de numerales verbales a partir de veinte consiste en mantener una palabra o una parte y acompañarla de la sucesión de las nueve primeras palabras de la sucesión que ya ha aprendido. Para el caso del registro indo-arábigo, descubre una regla de generación semejante a la de las expresiones verbales: los “veinte...” se abrevian empezando con la cifra “2” y se van cambiando las cifras de la derecha (“veintiuno” es 21, “veintidós” es 22, etc.). De esta forma los numerales escritos funcionan como una especie de abreviatura de los numerales verbales. También es muy

¹⁸ Este es un tema, junto con el de los algoritmos de las cuatro operaciones básicas, en el que la familia interviene con frecuencia. En parte, porque todo adulto escolarizado se considera con el conocimiento para hacerlo y, en parte, porque socialmente se valora este aprendizaje como necesario, ya que pertenece al ámbito de la alfabetización básica.

común que en el proceso de enseñanza se le expliquen al niño cosas como que con “diez y siete” elementos se forma una “decena” y quedan “siete unidades”, y que por eso se escribe ‘17’, y además se le suele presentar la tabla de las posiciones:

Decenas	Unidades
1	7

Figura 6. Posiciones de los órdenes decimales

Estas relaciones entre los dos registros no son suficientes para comprender las relaciones entre representaciones correspondientes en esos dos registros. Aunque con un adecuado entrenamiento los niños terminan manejando más o menos bien las asociaciones entre representaciones de los dos registros,¹⁹ no logran comprender plenamente esta correspondencia, con las consecuencias nefastas para el desarrollo del pensamiento numérico. Aunque un niño puede terminar aprendiendo la asociación entre ‘325’ y “tres cientos veinticinco”, en un importante número de casos va a dar muestras de no entender que esa marca ‘325’ también representa 300, 20 y 5 (o 3 de 100, 2 de 10 y 5 de 1) y no hace uso de estas relaciones cuando realiza cuentas. Precisamente la costumbre generalizada de introducir los algoritmos estandarizados (de sumar y restar en columnas) no favorece que los niños tengan que establecer relaciones entre los dos registros, ya que estos algoritmos permiten calcular haciendo operaciones entre cifras aisladas de cada columna y, de esta forma, se ocultan al maestro y a la escuela los vacíos que los niños tienen del SDN.

1.2 ALGUNOS HECHOS QUE ILUSTRAN LA HISTORIA DE LA CONSTRUCCIÓN DEL SDN

En este apartado se recurre a la historia de la construcción de los sistemas de numeración con la intención de establecer algunas relaciones que parecen posibles entre este proceso y algunos hechos que se pueden observar en el proceso que siguen los niños. Se afirmará que a lo largo de la historia es posible identificar la invención de sistemas

¹⁹ Pero aun en este plano, todo profesor de los últimos años de educación básica primaria (4 y 5 grado de primaria, 9 a 11 años) sabe de las dificultades que los niños tienen para leer numerales escritos o escribir numerales que se les dictan cuando estos representan números de intervalos mayores, por ejemplo, mayores que 100.000 o 1.000.000.

numéricos con características que permiten afirmar la existencia de un proceso de complejización de sistemas de representación que permitían registrar (de forma oral y escrita) las cantidades de las colecciones (los granos producidos, la cabeza de ganado, lo personas de un clan, etc.). Se constata que la sintaxis de estos sistemas se va haciendo más compleja, hasta llegar al sistema posicional decimal que conocemos hoy día, de tal forma que entre los estudiosos de esta historia existe un relativo acuerdo sobre la existencia de unos momentos que se infieren al ordenar la abundancia de datos que los diferentes pueblos, esparcidos por todo el planeta y en diferentes épocas, nos ofrecen. Estos momentos pueden ponerse en relación con las formas como los niños van complejizando los significados de los números; sin embargo, no se trata de retomar la hipótesis de la identidad entre la historia de las ideas en nivel humano y la historia de las ideas en nivel del individuo, una especie de identidad consecuencia de aceptar la hipótesis de la correspondencia entre la filogenia y la ontogenia, pero sí de aceptar que el camino recorrido por la humanidad ilustra en más de una ocasión, al menos en lo que respecta a este tema, las dificultades a las que se enfrentan los niños y las formas como las resuelven.

Indudablemente la posición del niño de nuestro tiempo que tiene que apropiarse del sistema de numeración decimal es muy distinta a la de los individuos de las civilizaciones que nos precedieron, por muchas razones; pero aquí sólo destaquemos una directamente vinculada con nuestro tema: nuestro niño vive en un mundo adulto que posee un sistema posicional decimal; se encuentra con este en el día a día desde muy temprana edad; sus padres y la escuela buscan enseñárselo; en cambio, el hombre antiguo no tenía las ideas de posición, ni de cero, por lo que tuvo que arreglárselas con otras más elementales para dar cuenta de las cantidades y de las operaciones entre los números. Martí (2003) advierte que no hay que extraer conclusiones abusivas de la historia de la construcción del sistema numérico para estudiar el proceso de construcción de este sistema en los niños *“la diferencia fundamental es que los niños ya nacen en un entorno que incluye el sistema numérico como instrumento de representación y cálculo. Un sistema que es utilizado por los adultos (...)”* (p. 210). Esta razón es suficientemente fuerte para descartar un paralelo entre ambos procesos; sin embargo, al observar los intentos que los niños hacen en el proceso de apropiación del sistema de escritura de los numerales y las formas como hacen sus cuentas, se aprecia que se enfrentan a dificultades semejantes a las que la historia nos muestra y, sobre todo, lo que es especialmente importante, ensayan soluciones que guardan grandes semejanzas con las vividas por los pueblos.

Seguramente diferentes explicaciones de esta relación son posibles, pero una que puede ensayarse consiste en afirmar que estas semejanzas responden a la conjunción de dos hechos:

El primero, el proceso de contar y operar con las expresiones que se utilicen para representar los productos que se obtienen de ese conteo exige construir ideas aritméticas básicas; estas ideas poseen dos componentes: el convencional y el lógico (los agrupamientos, las composiciones aditivas y multiplicativas). El primero de ellos, expresado en los sistemas de representación semiótica adoptados por un grupo humano, es que, ineludiblemente, entre ellos está el verbal. El segundo tiene que ver con hechos como la imperiosa necesidad de hacer agrupamientos que el conteo impone. Independientemente del recorrido que un grupo humano tome, para tener la posibilidad de contar más allá de lo que una sucesión particular de palabras lo permite, necesariamente hay que llegar a la idea de hacer agrupaciones. Efectivamente lo hicieron muchos pueblos desde épocas remotas; aquellos que no lograron concebir esta idea, que a nosotros nos parece elemental, no pudieron dar cuenta de la cantidad más allá de aquellas colecciones que sus prácticas cotidianas les exigían. Otro hecho que puede vincularse con este componente lógico es el de las composiciones aditivas. Una vez que se llega a la solución de los agrupamientos para extender la posibilidad del conteo más allá de los límites que le fija el sistema de signos que un grupo humano adopta, necesariamente surge la condición de la composición de partes. Estas relaciones de composición necesariamente han de aparecer expresadas en el sistema de signos verbales o escritos que utilice dicho grupo para representar estas cantidades. Finalmente, como parte de este componente lógico podría citarse, aunque no con el mismo carácter de necesidad lógica, la composición multiplicativa. Si se quiere evitar registros escritos que requieran repeticiones exageradas de un mismo signo, la única solución posible es la de hacerse a la idea de repetición. Inventar nuevos signos (verbales o escritos) para representar agrupaciones más grandes (así como se ha hecho en la historia para 100 y 1000) no es la solución más potente, pues sobrecarga la memoria y siempre está cerrada para representar cantidades mayores que aquellas para las cuales se ha construido el sistema.

El segundo de los dos hechos en el que se basa una posible explicación de las relaciones entre los dos procesos, el histórico y el de los niños, es consecuencia del anterior. Si bien los niños, a diferencia del hombre antiguo, disponen de partida de un

sistema posicional que los adultos procuran enseñarle, aún no poseen en su pensamiento la aritmética sobre la que se soporta la sintaxis del sistema que pretende enseñarle, razón por la que estarán obligados a hacer sus propias interpretaciones desde el incipiente pensamiento aritmético que están construyendo (que no va más allá de un pensamiento aditivo y multiplicativo muy elemental). De ahí que el niño interpreta los numerales de un sistema posicional simplificándolo al nivel que le es posible y estas simplificaciones son muy semejantes a las sintaxis sobre las que descansan los sistemas de numeración de muchos pueblos antiguos antes del llegar al sistema indo-arábigo.

A partir de los trabajos de Ifrah (1985/1998) y Collette (1973/1985), se puede establecer que la historia de la construcción del sistema decimal de numeración a escala humana ejemplifica un proceso prolongado, en el que si bien se dan retrocesos, lentamente se va complejizando desde un punto de ausencia de una idea de número hasta llegar al sistema posicional decimal que conocemos hoy día.

Desde épocas muy remotas, el hombre logró comparar las cantidades de dos colecciones haciendo uso de la correspondencia biunívoca.²⁰ Para ello parece aceptable que haya utilizado colecciones de objetos, huellas sobre árboles, en hueso, arena o arcilla, a manera de colecciones “modelo” para registrar la cantidad de elementos de las colecciones que les interesaban, como lo sugieren los dos autores citados en el párrafo anterior.

Se tienen evidencias arqueológicas que nos permiten suponer que aun sin contar con un sistema verbal, desde épocas muy remotas (3500 a 2000 años a.C.) el hombre había logrado un verdadero sistema de notación gráfica para dar cuenta de cantidades relativamente grandes.

Estos hechos dan paso a la numeración sustentada en el lenguaje articulado. Una vez que se consolidan sistemas verbales numéricos, su sintaxis es aditiva. De forma semejante, ocurre con los registros escritos: la cantidad representada se obtiene sumando el valor de cada uno de los signos utilizados. Este es un método que, aunque muy potente, tiene el inconveniente de exigir muchos signos; piénsese en la dificultad que tendría el memorizar un valor de una cantidad más o menos grande. Algunos de estos sistemas

²⁰ Aunque desde el punto de vista lógico este sistema le permite comparar colecciones extensas, puede suponerse que no fue aplicado para colecciones muy grandes, y que las necesidades prácticas, junto con los progresos en formas articuladas de comunicación, dieron lugar a palabras para contar.

agregan a la lista de signos de potencias de sus bases otros intermedios para evitar la carga excesiva de signos, pero este hecho no altera la estructura aditiva de la sintaxis. El recurso multiplicativo aparece como un perfeccionamiento más allá de los sistemas de estructura aditiva. La historia ofrece ejemplos que nos permiten pensar en que la conquista definitiva del principio multiplicativo no se da de una vez, sino que más bien se da progresivamente, hasta llegar a sistemas híbridos (que combinan los principios multiplicativo y aditivo).

A medida que se avanza en los sistemas híbridos, se da lugar a principios posicionales. Esta conquista tampoco es simple y se hace progresivamente. Ifrah cita numerosas evidencias que ilustran que al lado de sistemas híbridos se encuentran sistemas abreviados que introducen un sistema posicional que no se aplica más allá de la centenas (o de forma más general, más allá de las unidades de tercer orden como el caso de las escrituras babilónicas de ciertas épocas), o si se lleva más allá esos refinamientos están reservados a grupos de sacerdotes o de eruditos.

Tres pueblos descubrieron, al parecer de forma independiente y en momentos diferentes, el principio de posición: los babilonios, al comienzo del II milenio a.C.; los matemáticos chinos, un poco antes de nuestra era, y los sacerdotes-astrónomos mayas, entre los siglos IV y IX d.C. Pero ninguno de estos intentos logra aplicar este principio de forma sistemática, debido a una o ambas de las dos razones siguientes: la primera de ellas consiste en que ninguno de estos tres sistemas asigna signos distintos para representar las cifras básicas de sus sistemas. Los babilonios no tenían 59 signos distintos para sus cifras básicas; en lugar de ello sólo tenían dos (para el uno y para el diez) que combinaban siguiendo el principio aditivo para obtenerlas. Los chinos hacen algo semejante en su sistema de base diez; el ocho se obtiene por la combinación del signo que representa cinco y la repetición de tres veces el signo que representa la unidad. Los mayas también usaban dos signos para producir los 19 primeros signos de su sistema. La segunda razón es la inexistencia de un signo para el cero; en el caso de los babilonios hay que esperar hasta la Mesopotamia tardía (Siglo VI a.C.) para que se introduzca un signo propio para el cero; los chinos lo introducen en su sistema bajo la influencia de la numeración moderna (siglo VIII d.C.) y aunque los mayas dan muestra de haber inventado un signo para el cero, al igual que los babilonios no logran sacar suficiente partido de esta idea. Son los indios (apenas hace unos quince siglos) quienes dan el verdadero sentido al cero, como signo para indicar la ausencia de un orden decimal, sea

éste intermedio o al final, y especialmente, son ellos lo que logran reconocerlo como cantidad nula.

La lección fundamental de la historia de la construcción del número y de sus sistemas de representación consiste en que este es un proceso que se prolonga en el tiempo y que, antes de llegar al sistema posicional que actualmente conocemos, la humanidad pasa por sistemas que solo requieren una sintaxis más elemental, inicialmente de tipo aditivo y posteriormente híbrida: aditivo-multiplicativa. La construcción de un sistema posicional es ardua y requiere de la invención de la idea de cero, no simplemente como un signo que indica ausencia, sino como representación de la cantidad nula. Sin embargo esto es importante tenerlo presente cuando se trata de interpretar el proceso de los niños, la ausencia de un sistema posicional no impedía el que se tuviera dominio del cálculo; la humanidad realizó con destreza cálculos numéricos muy complejos apoyándose en los sistemas de representación aditivo y aditivo-multiplicativo. Los algoritmos de cálculo numérico que hoy en día pretendemos que los niños aprendan desde temprana edad apenas aparecen en épocas muy recientes.

Cuando se comparan estos hechos a nivel filogenético con algunas producciones no canónicas que realizan los niños cuando tratan de escribir numerales en el registro indo-arábigo, como por ejemplo '20034' en lugar de '234', o '2100034' en lugar de '2034', es difícil no encontrar algo de similitud. La escritura de '20034' quizá revele que al hacer la conversión del registro verbal (doscientos treinta y cuatro) al registro indo-arábigo, lo que se hace es trasladar la sintaxis del primer registro al segundo.

1.3 ALGUNOS ESTUDIOS SOBRE LAS RELACIONES QUE EL NIÑO ESTABLECE ENTRE EL REGISTRO VERBAL Y EL REGISTRO ESCRITO

En las últimas décadas, diferentes autores desde diferentes perspectivas teóricas, reconocen el importante papel que juegan los sistemas de representación externa en el aprendizaje de la matemática (Duval, 1995/2004, 1999/2004, 2006; Lee y Karmiloff, 1996, Vasco, 2007; Tolchinsky, 2007; Vergnaud, 1990, 1998, Martí 2003); tal como se señaló en la introducción, este trabajo se interesa por estudiar las relaciones entre un sistema de representación externa (en este caso el sistema decimal de numeración) y la actividad conceptual que su apropiación requiere y a la vez posibilita.

Ponce y Wolman (2010) analizan tres perspectivas diferentes desde las que se han estudiado las relaciones entre la “numeración oral” y “la numeración escrita” (se usan los términos que utilizan estos autores). Según ellos, una perspectiva hace referencia a estudios comparativos en relación con la lengua materna (ellos la llaman “perspectiva centrada en la transparencia del lenguaje”); otra, a los estudios de transcodificación y, una tercera, a la perspectiva psicogenética.

Los estudios que se realizan desde la primera perspectiva se preguntan si se dan o no diferencias en la apropiación del SDN por parte del niño en razón de la lengua materna del niño. Ponce y Wolman refieren los trabajos de Miura, Kim, Chang y Okamoto (1988), en los que se comparan las representaciones que niños de lenguas asiáticas y no asiáticas realizan de los números. Estos estudios encuentran diferencias entre los dos grupos: los de origen asiático prefieren utilizar una construcción basada en decenas y unidades para representar los números de dos cifras que se les pedían, mientras que los niños de habla inglesa basaban sus representaciones en unidades. Estas diferencias son explicadas en razón de la correspondencia exacta que existe entre las lenguas asiáticas y la “escritura gráfica” de los numerales (por ejemplo: ‘T’ es ‘shí’ y representa 10, ‘—’ es ‘yí’ representa, ‘T—’ es ‘shi-yí’ y representa 11). La réplica de este estudio con niños de Francia, Suecia y Corea, realizada por Miura, Okamoto, Kim, Steere y Fayol (1993), corrobora las conclusiones encontradas en el anterior: la representación cognitiva de número puede variar en función de la lengua que se habla.

Los estudios de transcodificación numérica en niños (Power y Dalmartello, 1990; Scheuer; Sinclair, Merlo de Rivas y Christinat, 2000; Orozco y Hederich, 2002; Orozco, Guerrero y Otálora, 2007) investigan la forma como ellos procesan información numérica cuando hacen conversión del registro indo-arábigo al registro verbal y viceversa (por ejemplo en tareas como estas: dada una expresión oral o escrita como ‘doscientos treinta y ocho’ el niño debe escribir ‘238’ o viceversa; dado un numeral indo-arábigo como ‘238’ el niño debe leerlo y decir o escribir ‘doscientos treinta y ocho’). Estos estudios se asientan en la investigación neuropsicológica cognitiva, de la que son pioneros los trabajos de McCloskey y colaboradores (McCloskey, Caramazza, & Basili, 1985; McCloskey, Aliminosa, & Sokol, 1991; McCloskey, 1992; Dehaene & Cohen, 1995, y Dehaene, 1997). En general puede decirse que estos estudios coinciden en que todos constatan que los niños idean formas propias (no canónicas) de escribir numerales. Entre unos y otros existen diferencias en las descripciones de algunas formas de escrituras pero

en general coinciden en lo fundamental. Quizá la diferencia central entre estos estudios está en las explicaciones que ofrecen sobre la aparición de estas producciones, algunos como Power y Dal Martello (1990) intentan hacerlo desde patrones derivados de la sintaxis del SDN y otros, como Orozco, Guerrero y Otálora (2007), afirman que los niños más que intentar seguir patrones derivados de la sintaxis del sistema, lo que los orienta en el momento de la escritura es su experiencia. Power y Dal Martello (1990) explican que los niños concatenan debido a la falta de manejo que ellos tienen de la regla de sobreescritura.²¹

Estudios de Orozco y Hederich (2002) encuentran que los niños tienden a acertar al escribir numerales dictados de rango propio (numerales que ya han sido enseñados a los niños en la escuela) y a cometer errores predominantemente sintácticos en numerales impropios (los del rango inmediatamente superior a los ya enseñados); pero, al igual que los estudios previos, encuentran que el porcentaje de estos errores desciende con el aumento del grado escolar. Estos autores no sólo reportan que en sus estudios encuentran una mayor variedad de errores que los identificados en estudios previos, sino que, además, dan explicaciones diferentes de ellos.

Orozco, Guerrero y Otálora (2007) afirman que a pesar de que desde el punto de vista de un análisis formal del SDN se requiere utilizar las operaciones de composición y descomposición de tipo aditivo y multiplicativo, en sus estudios sobre la escritura de numerales dictados encuentran que los niños no rigen sus escrituras por estas operaciones: *“Parece ser que fragmentan las expresiones que escuchan, probablemente en función de su experiencia, obteniendo fragmentos que les resultan familiares; para codificarlos utilizan dígitos, nudos o numerales compuestos en rango inferior y para unirlos, relaciones variadas de contigüidad”* (p. 37).

²¹ La regla de sobreescritura consiste en reconocer, por ejemplo, que al escribir tres cientos sesenta y cinco sobre los dos ceros de 300 se escribe 65. La palabra “concatenación” es tomada por estos autores en el sentido usual de encadenar, de enlazar, y no en el sentido que le dan Orozco y sus colaboradores: *“los niños concatenan cuando sólo codifican los dígitos correspondientes a las marcas de cantidad presentes en la expresión verbal”* (Orozco, Guerrero y Otálora, 2007, p. 5). Lo que para Power y Dal Martello (1990) es “concatenación” corresponde a “yuxtaposición” en Orozco y sus colaboradores. En este trabajo se usará el término “concatenación” como lo usan Power y Dal Martello, por corresponder más a la forma como este término se ha usado en la literatura de la didáctica de la matemática (Kieran & Filloy, 1989).

Ellos consideran que ni la concatenación (entendida como encadenamiento de las partes de la expresión verbal), ni la sobreescritura propuestas por Power y Dal Martello (1990) explican la variedad de los errores encontrados; en particular, estas reglas no logran explicar la omisión de ceros intermedios.

Cuando los niños utilizan las relaciones de yuxtaposición y compactación, unen numerales que codifican tanto marcas de cantidad como de potencia; en cambio al concatenar sólo codifican las marcas de cantidad y no respetan el valor de posición. Escribir los dígitos correspondientes a las marcas de cantidad y conservar el valor de posición que las potencias establecen constituyen las reglas que el sistema exige. La escritura de los numerales que tienden a generar este error exige que los niños utilicen ceros para conservar el valor de posición de los dígitos. En 3º grado, cuando la yuxtaposición y la compactación disminuyen y el acierto incrementa, se puede proponer que los niños han incorporado la regla que exige codificar las marcas de cantidad, pero en los numerales con ceros intermedios aún no dominan el valor de posición. (p. 44).

La tercera perspectiva de estudio entre numeración hablada y numeración escrita que identifican Ponce y Wolman (2010) es la que ellos llaman “psicogenética”, en tanto se interesan en comprender cómo los niños avanzan en sus conceptualizaciones sobre el funcionamiento del sistema de numeración: “...desde esta perspectiva la apropiación del SN [sistema de numeración] por parte de los niños es un proceso constructivo y se ha verificado que comprenderlo acabadamente involucra un largo proceso dado que requiere desentrañar cuáles son las operaciones que subyacen” (p. 214). Desde esta misma perspectiva, Lerner, Sadovsky y Wolman (1994) afirman que al apropiarse de la escritura de los números, los niños no lo hacen siguiendo el orden de la serie numérica, sino que, en primer lugar, aprenden la escritura de los nodos (las decenas, centenas, unidades de mil...) y que después los usan para escribir los números que se ubican en los intervalos entre nodos²². Para Ponce y Wolman (2010), el estudio de la relación entre numeración hablada y numeración escrita incluye la conceptualización que los niños van elaborando sobre las operaciones que están involucradas en la escritura numérica. Terigi y Wolman (2007) también destacan la relación entre el aprendizaje de las operaciones aritméticas y la comprensión de las relaciones de tipo multiplicativo.

²² Un nodo es la expresión que da cuenta de un número de unidades de la mayor potencia de diez. En el intervalo numérico [1, 99] los nodos son: 10, 20, 30, ..., 90; en el intervalo [1, 999] son: 100, 200, 300, ..., 900, y en el intervalo [1, 9999] son 1000, 2000, 3000, etc.

2 HACIA UNA COMPRENSIÓN DEL SIGNO

A continuación se exponen algunos aspectos particulares del debate lingüístico sobre representación y significación que, a juicio del autor de este trabajo, parecen más pertinentes para este trabajo. La pretensión en este capítulo no es la de hacer una exposición de algunos modelos de signo y, menos aún, pretender establecer sus fundamentaciones teóricas, propósito muy complejo que está por encima del propósito más modesto de recurrir a algunos modelos del signo reconocidos en la literatura especializada para entender sus relaciones y componentes fundamentales y, sobre esta base, tomar decisiones para la elaboración de un modelo de signo numérico en el cual se pueda soportar este estudio. A medida que se vaya avanzando en la exposición, se destacarán algunos elementos que se van tomando como referencia para la elaboración de dicho modelo.

Lyons (1977/1980) ilustra la diversidad existente entre los lingüistas u otros estudiosos sobre un aspecto particular, aunque central, en el estudio del significado de las expresiones lingüística, que nos permite hacernos a una idea de la dificultad a la que se enfrenta el no especialista que, por razones de sus intereses investigativos, se ve obligado a lidiar con el problema del significado. *“Muchos autores que han tratado el concepto de significación han sentado una diferencia entre signos y símbolos, entre señales y símbolos, o incluso entre símbolos y síntomas, pero, por desgracia, no siempre se ha producido una coherencia en estas distinciones”* (p. 91).

Un primer modelo que se encuentra en la literatura es el de Ogden y Richards (1923/1964). Estos autores ofrecen una descripción ternaria de la significación, como se ilustra en la figura 7.²³

Para estos autores entre un pensamiento y un símbolo²⁴ existen relaciones causales. *“Cuando hablamos, el simbolismo empleado obedece en parte a la referencia que estamos haciendo y en parte a factores sociales y psicológicos”* (p. 29).

²³ Este modelo representa la máxima escolástica: *“la palabra significa [la cosa] a base de conceptos interpuestos”* (Lyons, 1977/1980, p. 93), que guarda cierta relación con este modelo.

²⁴ El término *símbolo* es reservado por estos autores para las expresiones lingüísticas, mientras que *signo* es usado de forma más amplia: *“un signo es siempre un estímulo similar a alguna parte de un estímulo original y suficiente para evocar el engrama [huella residual, una excitación similar a la causada por el estímulo general] formado por ese estímulo”* (Ogden y Richards, 1954, p. 71).

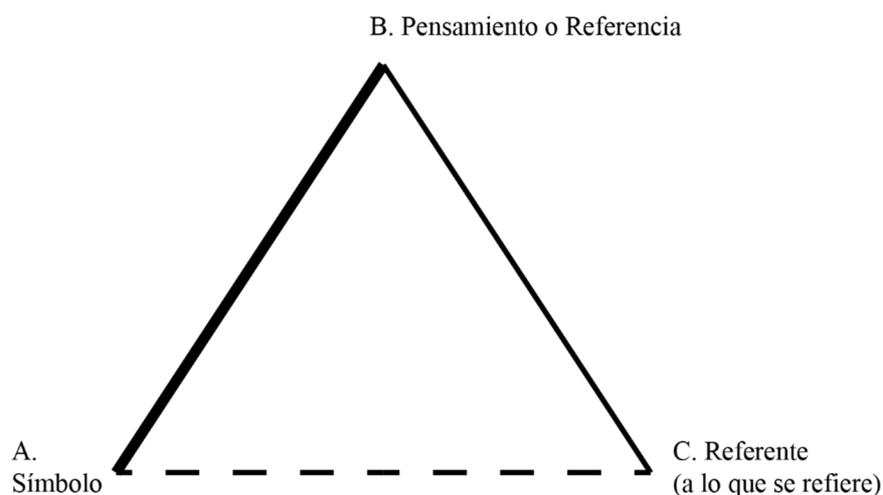


Figura 7. Modelo del signo de Ogden y Richards

Entre los factores sociales y psicológicos incluyen la finalidad que persiguen los hablantes al hacer la referencia, los efectos que se proponen causar en otras personas, la propia actitud del hablante. De igual forma, advierten estos autores, algo semejante ocurre cuando oímos; los símbolos nos llevan a la vez a cumplir un acto de referencia y asumir una actitud.

La relación entre el pensamiento y el referente puede ser más o menos directa o indirecta. En el primer caso ponen como ejemplo el hecho de pensar en una superficie coloreada o de prestarle atención, en el segundo caso, como cuando se piensa o se hace referencia a Napoleón, “*en cuyo caso puede haber una cadena muy larga de situaciones-signo que se interponen entre el acto y su referente*” (p. 29).

En cambio entre símbolo y referente solo reconocen un relación indirecta, “*que consiste en que alguien la use para representar al referente (...) —y cuando por razones gramaticales significamos tal relación, se tratará meramente de una relación atribuida, por aposición a una relación real*”— (p. 30).

La relación entre símbolo y referente se da recorriendo los dos lados del triángulo... “*es importante recordar que la interpretación, o lo que ocurre a —o a la mente de— un intérprete, es enteramente distinto tanto del signo como de aquello que el signo representa o a lo que se refiere*” (p. 39). Por ello, Ogden y Richards advierten que no debe confundirse la relación de atribución (que se da entre un signo y aquello a lo que

éste se refiere), con el referente (lo que es objeto de referencia) o con el proceso de interpretación (los progresos en la mente del intérprete).²⁵

Un poco más adelante estos autores advierten que las funciones de dirigir, organizar, registrar y comunicar de los símbolos se efectúan sobre el pensamiento,²⁶ no sobre las cosas.

Los símbolos dirigen y organizan, registran y comunican. Al establecer qué es lo que dirigen y organizan, registran y comunican, tenemos que distinguir, como siempre entre pensamientos y cosas. Es el pensamiento —o, como diremos usualmente, la referencia— lo que es dirigido y organizado, y es también el pensamiento lo que es registrado y comunicado.²⁷ Pero tal como decimos que el jardinero corta el césped cuando sabemos que es la guadaña la que efectivamente realiza el corte, así también, aunque sabemos que los símbolos tienen relación directa con el pensamiento, decimos también que los símbolos registran eventos y comunican hecho. (pp. 27-28).

De las citas anteriores, parece importante destacar: la primera, claramente aceptada, el signo cumple la función de “representar” y la segunda, no tan aceptada y que genera diferencias, pero que para este trabajo es fundamental: esta función del signo de estar en “lugar de...” se hace posible gracias a una acción de interpretación (de significación) por parte de un intérprete.²⁸

Eco (1973/1988) brinda una versión del triángulo de Ogden y Richards en la que deja ver la heterogeneidad con la que diferentes autores han abordado el problema del signo y de su significación (ver figura 8). A pesar de las diferencias notables que se encuentran en estos modelos, Eco destaca el hecho de que la gran mayoría de ellos²⁹ sean triádicos, “...pero no el nombre que se le ha dado a los tres polos. Unos llegan a llamar /significado/³⁰ a los que nosotros hemos llamado objeto, y /sentido/ a lo que nosotros hemos llamado /significado/” (p. 26).

²⁵ García-Carpintero (1996) dice que según Locke “la significación primaria de las palabras son ideas en la mente de quien las usa y no elementos de la realidad extralingüística que, a lo sumo, se vinculan con las palabras secundariamente, a través de sus vínculos naturales con las ideas.” (p. 109)

²⁶ Sobre los contenidos de los pensamientos que los signos producen (o evocan o se asocian)

²⁷ Indudablemente se puede aceptar esta distinción, pero ello no impide reconocer que el símbolo extiende sus funciones de dirección, registro y organización a la experiencia del sujeto con y en el mundo (mundo que también es social y cultural).

²⁸ “Las palabras, (...), no significan nada por sí mismas, (...). Sólo cuando un sujeto pensante hace uso de ellas, representan algo o, en un sentido, tienen significado” (Ogden y Richards, 1923/1964, p. 28).

²⁹ Una notable excepción es el modelo de Saussure, quien ofrece un modelo diádico (significante-significado).

³⁰ Según la convención de Eco por /significado/ hace referencia al significante, en este caso, de la palabra significado.

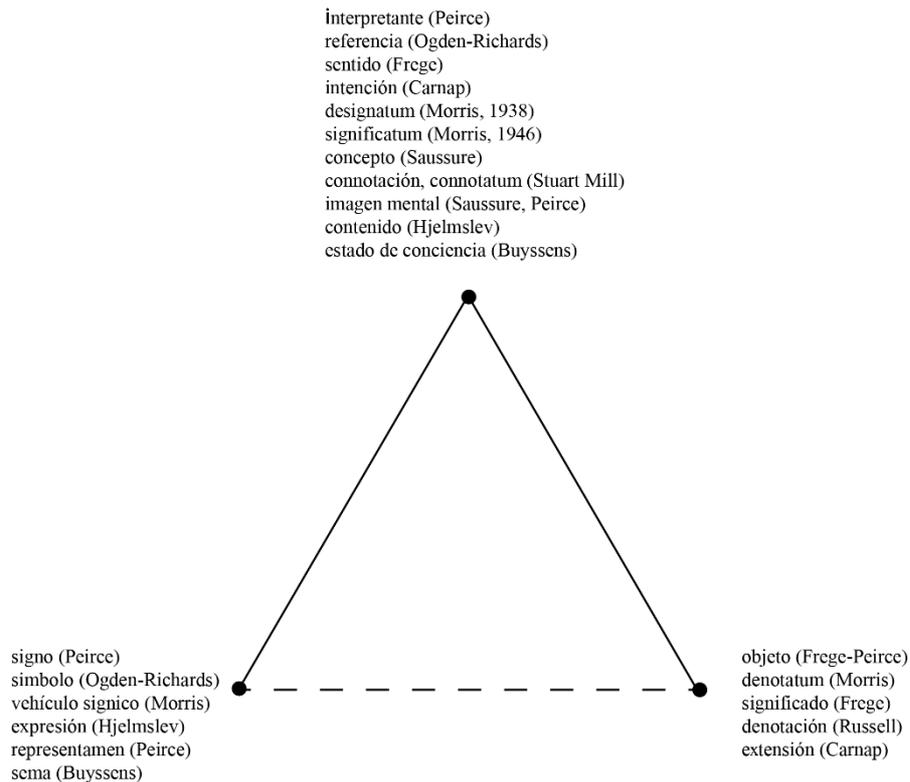


Figura 8. Componentes del signo según diferentes autores (Eco, 1973/1988, p. 26)

Conviene ver esta variedad, así como lo sugiere este autor, no como fruto de una simple diferencia terminológica, sino como el hecho de que en el fondo puede haber divergencias de pensamiento. Aunque —como ya se ha dicho— dilucidar estas diferencias va más allá de las necesidades de este trabajo y de las comprensiones de su autor, en la medida de lo posible se tomarán las precauciones necesarias en la terminología que posteriormente se adopte.

Al menos en la heterogeneidad que muestra el triángulo, según Eco, “*una cosa es cierta: en cualquier clasificación del signo como elemento del proceso de significación siempre aparece algo que se pone en lugar de otra cosa o por alguna otra cosa*” (p. 27). Obsérvese que se dice “se pone en lugar de...” o “por...”; es decir, *alguien* (o un grupo social, como generalmente ocurre), bien sea porque busca expresar o porque intenta interpretar, a *algo* le atribuye esa función de representación.

Otro modelo del signo que es útil revisar es el modelo de Peirce. Lamentablemente, acceder a su comprensión resulta una tarea bastante compleja para el no especialista, no solo por la fragmentación con la que se puede llegar a sus escritos, sino por la

reformulación frecuente de sus planteamientos.³¹ Sin embargo, para este trabajo se ha tomado la decisión de revisarlo, no solo por ser una referencia obligada por lo que este autor representa en la literatura especializada, sino porque, en verdad, a pesar de fragmentada y elemental que sea su revisión, resulta muy sugerente en el intento de aprehender de forma más amplia y compleja la dinámica del signo y su significación.

Peirce asigna repetidamente —aunque con algunas excepciones— a los tres vértices de su modelo los nombres *representamen*, *interpretante* y *objeto*. Estas diferencias con el triángulo de Ogden y Richards, seguramente —como ya se dijo— son más que terminológicas. Al tratar de comprender el triángulo peirceano, de entrada encontramos un primer escollo: Peirce da a las expresiones “signo” y “representamen” significados diferentes, aunque, en muchos pasajes de su obra las usa como si no hiciera diferencia alguna.

Uso estas dos palabras, signo y representamen, de modo diferente. Por signo entiendo todo lo que transmite, de cualquier manera, cualquier noción definida de un Objeto, pues tales transmisores del pensamiento nos son familiares. Comienzo con esta idea familiar y realizo el mejor análisis que puedo de aquello que es esencial para un signo, y defino un representamen como cualquier cosa a la cual se aplique este análisis. (Peirce, C.P. 1.540, tomado de Sercovich, 1987, pp. 219-220).

Según Deladalle (1990/1996), Peirce distingue el signo-acción del signo-representamen; el primero es otro nombre de la semiosis, y el segundo es el punto de partida de la inferencia semiótica. Para este autor la distinción de estas dos funciones del signo llevó a Peirce a utilizar la palabra “signo” cuando habla de signo en acción, y la palabra “representamen” cuando analiza los elementos que constituyen de la semiosis. “*Pero, lamentablemente, este uso no es constante y varía (...) según el público al cual se dirige...*” (p. 86). Podría decirse que el “signo-acción” corresponde al acto mismo de la semiosis, (al “acto mismo de inferir a partir de signos” que es la forma como Peirce concibe la semiosis); mientras que el “signo-representamen” es el punto de partida.

Unas páginas más adelante, Deladalle comenta que Peirce le da al signo el nombre técnico de “representamen” para dar a entender “*que no es una representación mental, sino un objeto que por cierto afecta los sentidos pero que no se define por la aprehensión de los sentidos*” (p. 116) A decir de Deladalle, para Peirce, “*el representamen es el representante de la cosa, exactamente como el signo lo es para el lógico epicúreo...*” (p.

³¹ En muchos casos no es muy claro el orden cronológico de algunas de sus producciones, al menos en la edición de los *Collected Papers*.

116).³² Así, en tanto representamen, para Peirce “*el signo no es una idea, ni tampoco objeto de conocimiento directo, no es más que simple ‘cualidad material’ pero sin la cual no podría haber conocimiento por medio de los signos...*” (p. 116).

Quizá aclare al lector la distinción que, según Deladalle, hace Peirce entre percepto y juicio perceptivo. “*En el caso de la percepción, (...), es necesario distinguir el ‘percepto’ y el ‘juicio perceptivo’. El representamen es, en tanto tal, un ‘percepto’. (...). Con el juicio perceptivo el representamen entra en la semiosis y se convierte en representación*” (Deladalle, 1990/1996, p. 116-117).

Podríamos aceptar entonces que con el término *representamen* Peirce está expresando una idea más cercana a lo que entendemos por *marca* (al estímulo sensorial propiamente o a su fuente, en inglés *token*) o *instancia*.³³ Independientemente de que sea correcto o no llegar a identificar una marca (token) o instancia con el término *representamen*, para efectos del modelo del signo numérico que se llegue a elaborar es importante destacar que esta marca (token) necesita ser reconocida por alguien como representando a un objeto para entrar en un proceso de semiosis; si no se da eso, no es más que un objeto físico sin ninguna función de representar.

Otra cuestión que conviene subrayar es: en sus modelos Peirce no reduce el concepto de signo a uno de los vértices de la relación triádica; este concepto comprende la totalidad de la relación. El signo es una relación triádica básica que debe ser entendida como una totalidad y no como un simple agregado de tres relaciones diádicas (representamen-interpretante, interpretante-objeto y representamen-objeto). Sin embargo, con frecuencia Peirce utiliza el término *signo* unas veces para referirse a la totalidad del triángulo y otras para referirse al representamen; precisamente la cita que sigue es un buen ejemplo de ello

³² Deladalle nos ofrece una cita de Marquand, discípulo de Peirce, que nos permite entender el uso que dan los Epicúreos al término signo: “*consideraban el signo como un fenómeno cuyas características nos permitirían inferir las características de otros fenómenos en condiciones de existencia similares. Para ellos, el signo era objeto sensorial*” (Marquand, 1983, citado por Deladalle, 1990/1996, p. 112).

³³ Lyons distingue entre *tipo* y *muestra*: una muestra es espécimen de un tipo. “*Las muestras son entidades físicas únicas, localizadas en un lugar determinado del espacio o del tiempo. Se identifican como muestras del mismo tipo en virtud de su semejanza con otras entidades físicas únicas y de su conformidad con el tipo que especimentan*” (1980, p. 18). *Marca (token)* o *instancia* son tomados como sinónimos de *muestra*. El tipo es un esquema mental que permite reconocer esa marca como muestra de ese tipo. Aceptar que un individuo reconoce una marca (token) o instancia como espécimen de un tipo es aceptar ya el acto organizador de la percepción misma.

Un signo o representamen es algo que representa algo para alguien en algún aspecto o carácter. Se dirige a alguien, es decir, crea en la mente de esa persona un signo equivalente o, quizá aún, más desarrollado. A este signo creado, yo lo llamo el Interpretante del primer signo. El signo está en lugar de algo, su Objeto. Representa este objeto no en todos sus aspectos, pero con referencia a una idea que he llamado a veces del Fundamento del representamen. (C.P. 2.228, tomado de Sercovich, 1987, pp. 245-246).

La figura 9 ilustra una interpretación posible del concepto de signo a partir de esta cita.³⁴

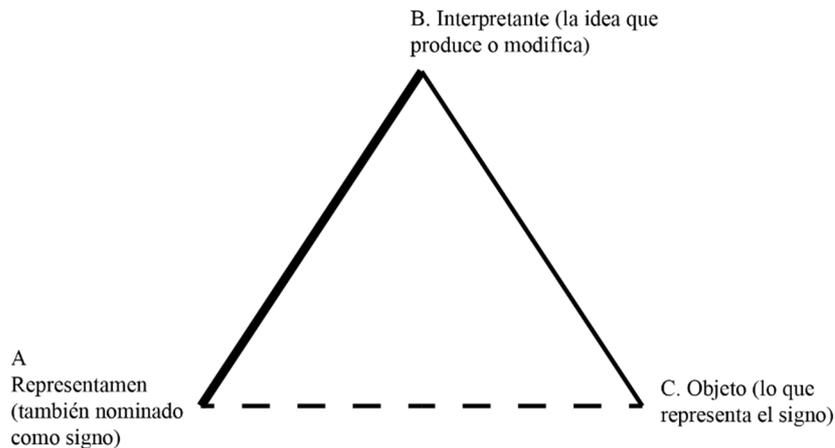


Figura 9. Modelo de signo según Peirce

El modelo de signo pretende captar la complejidad y dinamismo de la semiosis. La siguiente cita de Peirce, aunque muestra diferencias con lo que se indica en la anterior, también muestra la dinámica que Peirce da al signo y a la semiosis.

Un signo representa la idea que produce o modifica. Es un vehículo que transmite a la mente algo desde afuera. Aquello que representa se llama *objeto*; aquello que transmite, su *significado*, y la idea que origina su *interpretante*. El Objeto de la representación solo puede ser una representación de la cual el interpretante es la primera representación. Pero se puede pensar que una serie interminable de representaciones, cada una de las cuales representa la anterior, requiere un objeto absoluto como su límite. El significado de una representación puede tan solo ser una representación. De hecho, no es más que la propia representación, pensada como si estuviera despojada de un ropaje sin importancia. Pero no se puede eliminar nunca por completo este ropaje; sólo se lo cambia por algo más diáfano. Por último, el “interpretante” es tan sólo otra representación a la cual se entrega la antorcha de la verdad, y en calidad de representación, tiene a su vez su interpretante. He aquí otra serie infinita”. (C.P. 1.339, tomado de Sercovich, 1987, p. 167).

En esta cita aparece un elemento nuevo, el significado, que no estaba enunciado en la cita anterior. Pero además aquí, a diferencia de la cita anterior, el término *signo* parece

³⁴ Los vértices del triángulo coinciden con los que Eco asigna a Peirce en el triángulo presentado anteriormente (figura 8). Obsérvese que, en el triángulo de Eco, en el vértice correspondiente al “representamen” también aparece “signo”.

que se reservara para expresar la totalidad de la triada, triada que ya no es representamen-interpretante-objeto sino interpretante-significado-objeto.³⁵ Más allá de las posibles diferencias y de las precisiones que se tengan que hacer, se derivan algunas ideas que merecen tenerse presente en la elaboración del modelo:

- En la afirmación de Peirce “*Un signo representa la idea que produce o modifica*”, siguiendo a Deladalle, conviene entender “produce” como “*que un signo interpretante propone un ‘objeto’ para el representamen*” (Deladalle, 1990/1996, p. 102). Admitir “produce” carga más el sentido de un efecto del representamen sobre algo (por ejemplo, sobre la mente de quien interpreta); en cambio, entender que “*el signo interpretante propone un objeto para un representamen*” supone entender el proceso de semiosis más en sentido contrario, o, al menos, incluye un movimiento complementario en sentido contrario, es decir, dentro de la amplitud de posibilidades de encontrar otros signos-interpretantes que interpreten el signo-representamen, se seleccionan unos como representados por ese representamen. Esto es importante en tanto que puede pensarse que el proceso de significación no es tanto el efecto que produce (en su mente o pensamiento) sobre el sujeto que lo interpreta, sino, que éste (su mente o su pensamiento) propone otro u otros signos para interpretarlo (bien sean otros que se poseían previamente u otros nuevos, fruto de relaciones nuevas entre ellos suscitadas, precisamente, por el representamen).³⁶

- Peirce dice que el signo representa una idea, “*la idea que produce o modifica*” y esto que representa es lo que llama “objeto”. Parece lícito interpretar desde esta cita que para Peirce el objeto representado por el signo no es un objeto material, es una idea. Al decir Peirce que el signo o representamen “*representa la idea que produce o modifica*” y que “*aquello que representa se llama objeto*”, podría interpretarse como: el

³⁵ Como ya se ha dicho resulta realmente difícil, incluso para el especialista en estos temas, dilucidar si las diferencias que se aprecian de estas dos citas obedecen a intentos de revisión del modelo por parte de Peirce (incluso no es claro que la primera cita se pueda establecer como posterior a la primera por el hecho de que aquella pertenezca al segundo tomo y ésta al primero de la edición de los *Collected Papers*, por la dificultad de establecer el orden cronológico de muchos de sus manuscritos). Afortunadamente, como ya se ha dicho, para efectos de este trabajo se recurre a Peirce con la intención no tanto de asumir un modelo sino de apoyarse en los esfuerzos que hace un autor reconocido por la comunidad de estudiosos del signo, para acercarse a una idea de la complejidad que este tema representa.

³⁶ Posiblemente el lector considere, con algo de razón, que esta idea traiciona la intención del modelo peirceano de evitar cualquier psicologismo en sus explicaciones, pero, como se ha expresado, el recurso a Peirce y a otros autores no es el de seguir su modelo sino el de tener un apoyo para construir el modelo del signo numérico que sea útil para este trabajo.

representamen hace referencia al objeto. Quizá convenga, para nuestros propósitos, distinguir entre referir y representar. Silvestri y Blanck (1993) destacan la dificultad que representa el tema de la referencia para filosofía del lenguaje y de la semiótica. Desde algunas perspectivas se oscila entre negar la existencia objetiva (independiente de la conciencia humana) o aceptar tal existencia pero excluirla por razones metodológicas. Estos autores citan como ejemplo el caso de Eco quien considera que una expresión no designa objetos sino que transmite contenidos culturales y son éstos los que deben interesar a una teoría de los códigos. Eco propone *“liberar al término ‘referente’ de toda clase de hipotecas referenciales”* (Eco, 1977, p. 12, citado por Silvestri y Blanck, 1993, p. 45). El mismo Saussure con su modelo significante-significado excluye el problema de la referencia como objeto de estudio de la lingüística. Silvestri y Blanck, siguiendo los trabajos de Bajtín, proponen entender la referencia a un objeto concreto como propiedad del enunciado en determinada situación comunicativa: *“el proceso de referencia es el que permite que un hablante logre guiar adecuadamente a su interlocutor hacia la identificación de los objetos, cualidades, acciones o eventos sobre los que habla. Así pueden distinguirse la referencia y la significación como dos funciones distintas — aunque estrechamente relacionadas— y aceptarse la inclusión teórica tanto del significado como del objeto designado”* (p. 45). Si se acepta este planteamiento, podría decirse, en el caso de este estudio, que el objeto designado por el signo numérico, puede tener las cualidades de un objeto externo a pesar de ser un objeto relacionado con la matemática; por ejemplo, puede ser simplemente el producto que se obtiene al ejecutar la acción de contar los elementos de una colección y no ese objeto que representa el cardinal de un conjunto.

- Para Peirce representamen, interpretante y objetos son todos representaciones. Lo que da origen a una cadena semiótica infinita. Más allá de las consecuencias ontológicas y epistemológicas que en esta posición pueda encontrar el estudioso, conviene recuperar el dinamismo que Peirce busca destacar del acto del proceso semiótico. Deladalle se cuida en destacar que los tres componentes, “representamen”, “interpretante” y “objeto”, de todo acto particular de semiosis, indican relaciones y no son los términos (o argumentos) que se ponen en relación, no se los va a encontrar estableciendo otras relaciones o desempeñando otras funciones en otras semiosis: *“Lo que ocurre es todo lo contrario. El interpretante en una semiosis se convertirá en representamen en otra. Lo que cambia de función son los ‘términos’ y no a la inversa”* (Deladalle, 1990/1996, p. 87). Por eso, los

tres elementos constituyentes de la semiosis (o signo-acción), en últimas son ellos “signos-representámenes”.

- Una tercera cuestión que es importante dilucidar hace referencia a las diferenciaciones que hace el modelo peirciano de Objetos y de Interpretantes. Peirce distingue dos objetos: uno inmediato y otro dinámico.

(...) tenemos que distinguir entre el Objeto Inmediato, que es el Objeto tal cual el signo mismo lo representa y cuyo Ser depende por ello de la Representación de él en el Signo, y el Objeto Dinámico, que es la realidad que de alguna manera contribuye a determinar el Signo para su Representación. (Peirce, C.P. 4.536 tomado de Sercovich, 1987, p. 381).

El Objeto es lo que el signo representa (“*la idea que produce o modifica*”). Así el Objeto Inmediato es la idea inmediata que produce o modifica y el Objeto Dinámico es la realidad que ayuda a determinar el signo.

Deladalle, a propósito de este punto, establece relación entre las ideas Frege y Peirce:

Según Frege, un signo (Zeichen) “está en lugar de” (bedeutet) su objeto exactamente en el sentido en que Peirce entiende ‘re-presentar’. Por otra parte, para Frege, como para Peirce, hay dos objetos: un objeto dinámico o referencial (Bedeutung) y un objeto inmediato o sentido (Sinn). El objeto referencial (el número o la estrella del pastor) no es lo que el signo representa (el objeto inmediato o sentido). Hay algo fuera del signo, pero sólo se dice en y por el signo (semiosis o discurso): el número figura en las proposiciones de la aritmética como la estrella del pastor en las proposiciones de la astronomía. (Deladalle. p.165-166).

Hay algo por fuera del signo, pero solo se dice en y por el signo, ese algo es a lo que el signo se refiere, pero no lo representa; lo que representa el signo solo puede ser una representación.

Peirce distingue tres interpretantes: interpretante inmediato, interpretante dinámico e interpretante final.

...el interpretante inmediato, que es el interpretante tal cual se revela en la correcta comprensión del Signo mismo y que ordinariamente se llama significado del signo, pero, en segundo lugar, tenemos que tomar nota del Interpretante Dinámico, que es el efecto concreto que el Signo, en cuanto Signo, realmente determina. Por último, está el Interpretante Final, que se refiere a la manera como el Signo tiende a representar que él está relacionado con su Objeto. (C.P. 4.536, tomado de Sercovich, 1987, p. 380).

De las consideraciones anteriores que se han hecho del modelo de Peirce se pueden hacer algunas formulaciones que guardan relación directa con el modelo del signo numérico que se adoptará en este estudio.

- Los tres componentes del signo (representamen, interpretante y objeto) son ellos representaciones (representaciones en tanto que son objetos —no necesariamente materiales— que están “por otro”) y que estos más que términos de una relación son relaciones. Estas dos consideraciones son importantes para los propósitos de este trabajo sobre la aritmética escolar ya que, por una parte, obliga a tener presente que toda representación semiótica del número es precisamente eso: una representación; y, por otra, que al estudiar el signo numérico conviene distinguir la función que desempeña una determinada representación semiótica en un eslabón de una cadena semiótica; en otras palabras, el uso de signo numérico por parte de los niños hay que hacerlo al interior de actos específicos de semiosis, ya que como lo dice Peirce, el interpretante de una semiosis se puede convertir (como generalmente se da) en representamen en otra. Por ejemplo, cuando un niño se enfrenta a una tarea en la que se le presenta la marca ‘234’ y si admitimos que este representamen suscita en este niño el interpretante ‘doscientos treinta y cuatro’ (hecho que es posible siempre que, como se dice comúnmente, el niño sepa leer numerales en el SDN) y si suponemos además que este niño cae en la cuenta, porque en su pensamiento ya posee esa posibilidad, que esa expresión del lenguaje común “doscientos treinta y cuatro” es precisamente, “dos cientos (dos de cien) y treinta y cuatro”, entonces, esa marca ‘234’ hace referencia a una cantidad que es la reunión de dos cientos más treinta y más cuatro, siendo éste el objeto de este acto de semiosis particular (o mejor, cadena semiótica) cuyo representamen es ‘234’, como ilustra la cadena siguiente

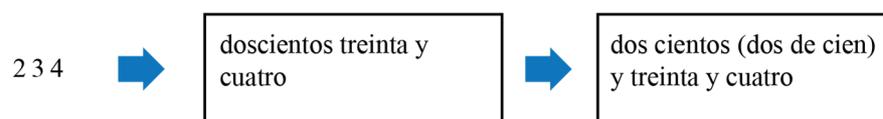


Figura 10. Una cadena posible de transformaciones semióticas a partir de la marca ‘234’

Esta cadena semiótica podría prologarse y mediante una operación de *conversión* (en términos de Duval) de representaciones del registro verbal a representaciones del indo-arábigo se podría llegar a que ‘dos cientos treinta y cuatro’ es “2 de 100, 3 de 10 y 4 de 1” o escrito en un registro más aritmético $2 \times 100 + 3 \times 10 + 4$, así, el representamen 234 suscitaría en este niño, mediante esta cadena de semiosis, un nuevo signo, que encierra un significado nuevo, $2 \times 100 + 3 \times 10 + 4$. Aclaremos que el representamen inicial ‘234’ que se ha considerado en esta semiosis, bien puede ser considerado como interpretante en otro acto de semiosis diferente, por ejemplo, en una tarea en que se le pide al niño que

escriba el numeral “doscientos treinta y cuatro” o en una como: escriba el número anterior a doscientos treinta y cinco”.

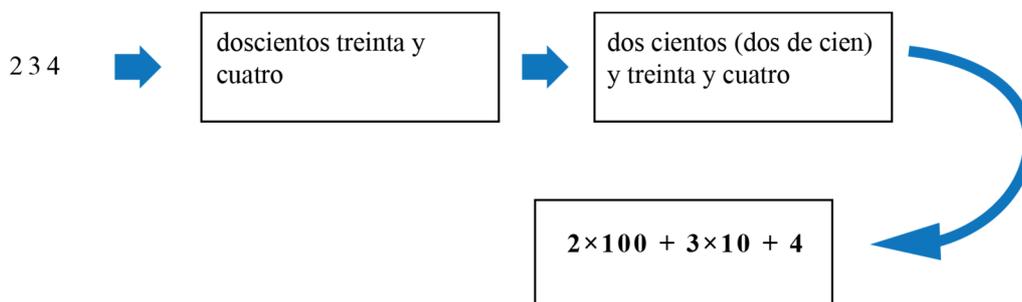


Figura 11. Otra cadena posible de transformaciones semióticas a partir de la marca ‘234’

- El signo por sí solo no da información del objeto: “el signo puede solamente representar al objeto y aludir a él. No puede dar conocimiento o reconocimiento de este objeto...” Es la cadena de semiosis que supone el signo y que da lugar a un significado más “diáfano”, la que permite obtener información del signo. Para nuestro caso el niño no podría obtener información de una representación, por ejemplo ‘234’, si no cuenta con otros signos para “proponer” como interpretantes de ese signo.³⁷ Por ejemplo el niño puede llegar a relacionar este registro con la cantidad de elementos de una colección que: “excede en 34 a la de 200”, o “excede en 1 a 233” o “tiene 1 menos que 234”, o si se ubica en la sucesión ordenada del registro indo-arábigo, “que es el siguiente de 233”, o “el anterior a 235”, y otras posibilidades más. Estas relaciones son la que permitirán interpretar el signo. Podría suponerse que entre más relaciones sean posibles de establecer (entre más amplia sea la cadena de semiosis que pueda suscitar en un niño) mayor será la comprensión que podría obtener de esta representación (o para ser más precisos, de estas representaciones).

- Precisamente la cadena de semiosis que supone el signo y que da lugar a un significado más “diáfano” podría relacionarse con la función de transformación (tratamiento y conversión) de las representaciones semióticas a la que se refiere Duval.

- Es útil la diferenciación entre objeto inmediato y dinámico de Peirce, más allá de si se llegue a aceptar o no, la consideración de Deladalle de entenderla como diferencia entre el sentido y la referencia de Frege, en tanto que el objeto inmediato del signo

³⁷ No por ello se está negando cualquier posibilidad a la novedad. Bien podría pensarse en que una cadena de semiosis da lugar a relaciones nuevas entre signos ya disponibles, de dónde emerge signos nuevos.

numérico se podría asociar a la referencia que en un proceso particular de semiosis realizado por un niño hace de un “representamen” numérico; mientras, que el objeto dinámico podría asociarse al objeto institucional, ese objeto propio de un discurso matemático en una comunidad de práctica (Godino, 1994). Más adelante se aclararán estos conceptos.

- De igual forma, para este estudio, las distinciones que hace Peirce de los tres tipos de interpretantes resultan útiles en tanto que sugieren la conveniencia de considerar: uno, el efecto inmediato del representamen numérico, que es tanto más sensorial, no volitivo —diríamos que involucra más la subjetividad del intérprete— y como más contextual; este efecto producto de lo contextual y subjetivo podría relacionarse con el sentido del signo numérico;³⁸ dos, un efecto mediato, como el efecto realmente producido en el pensamiento del intérprete fruto de una cadena de semiosis suscitada en un sujeto (o grupo de sujetos que participan en un intercambio) y, por último, tres, el interpretante final. En su carta a Lady Welby de marzo 14 de 1909, Peirce escribe que este tercer tipo de interpretante es “*el efecto que el Signo produciría sobre cualquier mente sobre la cual las circunstancias permitirían que pudiera ejercer su efecto pleno*” (Tomado de Sercovich, 1987, p. 145). De manera que el interpretante final podría considerarse como el significado epistémico (o institucional), el significado compartido por una comunidad de expertos.

El otro modelo que toma como referencia en este trabajo es el modelo de Saussure. Este autor ofrece un modelo del signo lingüístico que de partida, a diferencia de Peirce, reconoce su estrecha relación con entidades mentales y no se propone evitar esta condición en su formulación. De ahí que se le tilde de psicólogo. Aunque puede parecer paradójico a pesar de esta ligazón con la psicología, Saussure se preocupa —y así cree resolverlo— por deslindar bien el campo de la lingüística de lo psicológico y de otros campos extralingüísticos. Es importante advertir al lector que si bien es cierto que una preocupación fundamental de Peirce fue la de elaborar un modelo no psicólogo de la semiótica —pretensión que parece lícita y necesaria, en tanto que la semiótica como disciplina no puede depender de la psicología—, esta restricción de orden epistemológico no conlleva a desconocer la posibilidad (y necesidad) de un nivel de explicación que dé

³⁸ Vygotski vincula el sentido de la palabra tanto a lo contextual como a lo subjetivo. Este segundo aspecto es “*la suma de todos los sucesos psicológicos evocados en nuestra conciencia gracias a la palabra*” (1934/2001, p. 333).

cuenta de la existencia de la actividad cognitiva del sujeto interpretante; actividad que en este estudio interesa develar y poner en relación con la actividad semiótica. Incluso, el mismo Peirce no deja de utilizar expresiones de orden “mental”; basta recordar la cita de unas páginas atrás cuando define el signo: *“Un signo o representamen es algo que representa algo para alguien en algún aspecto o carácter. Se dirige a alguien, es decir, crea en la mente de esa persona un signo equivalente o, quizá aún, más desarrollado...”* (C.P. 2.228, tomado de Sercovich, 1987, p. 245).

Sobre el modelo saussureano habría que empezar por decir que es diádico *“Lo que el signo lingüístico no es una cosa y un nombre, sino un concepto [significado] y una imagen acústica [significante]”* (Saussure, 1945, p. 22). Saussure advierte a continuación que esa imagen acústica no es el sonido material (el hecho físico), sino la huella psíquica que ha dejado este sonido *“la representación que de él nos da el testimonio de nuestros sentidos; esa imagen es sensorial, y si llegamos a llamarla «material» es solamente en este sentido y por oposición al otro término de la asociación, el concepto, generalmente más abstracto”* (p. 92).

Saussure propone conservar el nombre de signo para el conjunto formado por la diada, *“proponemos conservar la palabra signo para designar el conjunto, y reemplazar concepto e imagen acústica respectivamente con significado y significante...”* (pp. 92-93). Para él, el signo lingüístico es una entidad psíquica, *“El signo lingüístico es, pues, una entidad psíquica de dos caras, (...). Estos dos elementos están íntimamente unidos y se reclaman recíprocamente”* (p. 92). Una cara es la imagen acústica, el significante y, la otra, el concepto, el significado. Para Saussure es clara la dificultad que representa el uso de la expresión ‘signo’ para referirse al conjunto, cuando la costumbre hace referencia a la marca (estímulo auditivo, percibido sensorialmente a través del sentido del oído). *“Llamamos signo a la combinación del concepto y de la imagen acústica: pero en el uso corriente este término designa generalmente la imagen acústica sola...”*. Dice este autor que generalmente se olvida que si llamamos signo, por ejemplo a ‘árbol’, no es más que por el hecho de que éste conlleva el concepto ‘árbol’, *“de tal manera que la idea de la parte sensorial implica la del conjunto”* (p. 92).

Otro elemento a destacar del modelo de Saussure es el carácter arbitrario que asigna al lazo que une a significante y significado. Saussure dice:

El lazo que une el significante al significado es arbitrario [...]. En efecto, todo medio de expresión recibido de una sociedad se apoya en principio en un hábito colectivo o, lo que viene a ser lo mismo, en la convención. [...]. La palabra arbitrario necesita también una observación. No debe dar idea de que el significante depende de la libre elección del hablante (ya veremos luego que no está en manos del individuo el cambiar nada en un signo una vez establecido por un grupo lingüístico); queremos decir que es inmotivado [el subrayado es del autor del presente trabajo], es decir, arbitrario con relación al significado, con el cual no guarda en la realidad ningún lazo natural. (p. 94).

Benveniste (2001) hace una precisión que nos parece fundamental al respecto. Distingue el lazo que se da entre significante y significado desde el punto de vista de sujeto parlante y del lingüista, en el primer caso dice que el lazo es necesario y en el segundo reconoce su convencionalidad (su arbitrariedad).

Entre el significante y el significado el nexo no es arbitrario, al contrario, es necesario. El concepto (“significado”) “boeuf” es por fuerza idéntico en mi conciencia al conjunto fónico (“significante”) böf. El espíritu no contiene formas vacías, conceptos innominados. El propio Saussure dice ‘Psicológicamente, prescindiendo de su expresión por las palabras, nuestro pensamiento no es sino una masa amorfa e indistinta’. (p. 51).

Unas líneas más adelante, Benveniste afirma que lo que es arbitrario es que tal signo (la totalidad significante y significado) sea aplicado a un determinado elemento de la realidad (objeto u hecho del mundo) y dice que es en este sentido en el que es posible hablar de contingencia. *“Para el sujeto parlante, hay entre la lengua y la realidad adecuación completa... A decir verdad, el punto de vista del sujeto y el del lingüista son tan diferentes a este respecto que la afirmación del lingüista en cuanto a lo arbitrario de las designaciones no refuta el sentimiento contrario del hablante”* (pp. 51-52).

De las citas que se acaban de destacar del modelo saussureano, dos consideraciones merecen señalarse

- Significante y significado son intramentales. Esta unidad constituye el signo. En el caso del signo numérico tendríamos, por ejemplo, un significante ‘doscientos treinta y cuatro’ y su significado (digamos convencional) las ideas que acostumbran a vincular los sujetos de un grupo social a este significante. Más adelante, siguiendo a Godino (1994) se diferenciará entre significado personal e institucional. Ya hemos visto también que Peirce distingue varios interpretantes y que en esta distinción da cabida a distinguir entre significado personal e institucional.
- Podría decirse que para un niño aparece como necesaria la relación entre el significante lingüístico ‘siete’ y la idea de siete, pero no lo es entre la extensión de una colección de

elementos de siete elementos y el signo (significante-significado) que la representa; podrían tenerse otros registros semióticos, como efectivamente sucede: ‘7’ o ‘IIIIII’, o ‘VII’, o cualquier otro. Y más aún, una vez establecidos (aprendidos) los signos 7 y 3 (cualquiera que sea su registro) es necesario que la cantidad de elementos resultantes después de reunir dos colecciones cuyo cardinales son 3 y 7 sea representada por el signo lingüístico diez (o cualquier otra marca en el registro en el que se representó 7 y 3). De forma análoga, a este último ejemplo, la relación entre un numeral de dos o más cifras escrito en el SDN y la extensión de elementos que éste representa para el niño aparece como necesaria una vez que se apropia de las sintaxis de los registros de representación del SDN, aunque posteriormente pueda comprender su convencionalidad.

Para efectos de este trabajo, los dos modelos del signo estudiados, el peirceano (representamen-interpretante-objeto) y el saussureano (significante-significado) pueden complementarse con el modelo de Federici.³⁹ Este modelo es tetrádico, mantiene la diada saussureana (significante-significado), como componentes intramentales, tal como lo hace Saussure, y agrega dos componentes externos: el denotante, que para evitar las dificultades que implica los términos denotación y connotación, podría llamarse significante externo (es el token) y lo denotado (el objeto al que hace referencia), que bien puede tener existencia material (independiente de la conciencia) o no (como en el caso de los conceptos matemáticos). La gráfica 12 ilustra el modelo.

En esta figura:

El denotante (o significante externo) correspondería al representamen (que en la interpretación que aquí se le ha dado se ha tomado más cercano a token) de Peirce.

El denotado correspondería al referente externo, al objeto externo.

³⁹ La descripción de este modelo se hace a partir de la presentación que el profesor Vasco, uno de los directores de este trabajo, hizo en las reuniones de asesoría ofrecidas a partir de 2009. Para la tetrada de Federici como modelo para el signo puede verse también el ya mencionado trabajo de Vasco, Zellweger y Sáenz-Ludlow (2009, pp. 107-109). Actualmente el profesor Vasco recomienda un modelo pentádico, que acerca el modelo federiciano al peirceano, identificando el significado externo con el representamen externo como objeto ostensible (marca, instancia o token), el significante interno con el representamen interno (tipo o esquema), y dividiendo el significado interno en Objeto e Interpretante, exista o no un significado externo como objeto ostensible.

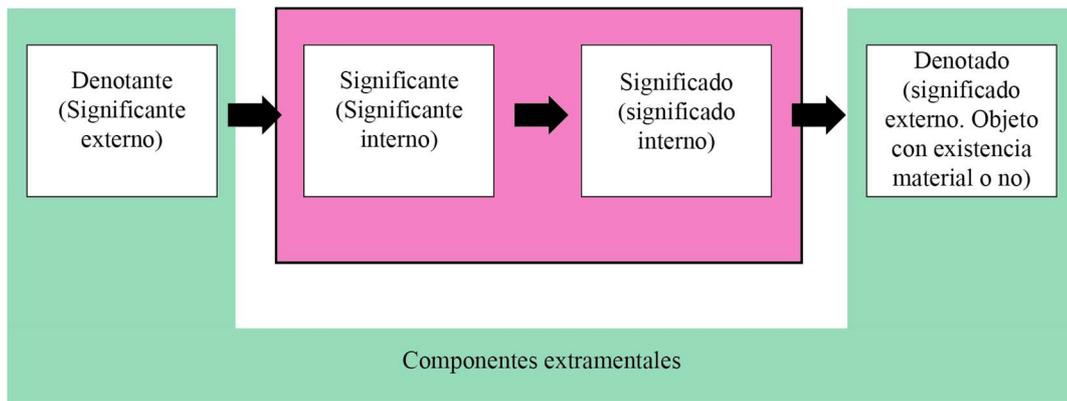


Figura 12. Modelo tetrádico de Federici

El que se hable de objeto externo no supone una determinación de su naturaleza, esta puede ser material o no. Incluso en el caso del aprendizaje de las nociones elementales de matemáticas para el niño que las aprende aparecen primero como objetos a los que les da cierta materialidad (como cuando señala un dibujo de un triángulo o el recorte de una hoja de forma triangular y dice “ese es un triángulo”, o como cuando muestra tres rayas o un dibujo de tres cruces para decir “eso es tres”).

Desde el punto de vista de la semiótica y de la lingüística, los elementos recogidos hasta aquí permiten hasta cierto punto comprender el signo, pero esta comprensión, siempre parcial, no agota el análisis de la actividad conceptual vinculada al proceso de significación, por esta razón en el siguiente apartado se aborda esta otra dimensión, para ello se pone en relación los registros semióticos y la actividad conceptual implicada en su uso, bien como proceso de comprensión o como producción.

3 LAS REPRESENTACIONES SEMIOTICAS Y SU PAPEL EN LA ACTIVIDAD CONCEPTUAL EN LA CONSTRUCCION DEL SDN POR PARTE DE LOS NIÑOS

Las representaciones externas son objetos de doble naturaleza: por un lado son un conjunto de estímulos que los seres humanos percibimos mediante diferentes sistemas sensoriales (táctiles, auditivos, visuales, etc.), son objetos ostensibles, que se organizan según reglas formales propias del sistema que las produce y, por otro, estos estímulos se constituyen en signos y, como tales, tienen la función fundamental de representar (de estar en lugar de otra cosa).⁴⁰ Más allá de las distinciones y refinamientos teóricos, importantes para otros efectos, en este trabajo se hace referencia a sistemas de representación semiótica como sistemas de representación,⁴¹ constituidos por sistemas de signos que permitan significar (sin importar el soporte material que se utilice); es decir, que permitan a los sujetos: a) apropiarse del significado de expresiones constituidas por combinaciones de signos, siempre que estas combinaciones estén dentro de los límites de reglas aceptadas para combinar la unidades tomadas como elementales. Este significado apropiado es compartido (o mejor, dado por compartido) por el grupo social que lo utiliza y, b) producir, expresiones con significados comprensibles para otros.

Las representaciones externas, además de herramientas comunicativas referenciales, son también herramientas epistémicas, son objetos para pensar (Tolchinsky, 2007; Duval, 1995/2004, 1999/2004, 2006). Por una parte, “*podemos realizar las mismas acciones mentales o actividades lingüísticas en línea o fuera de línea*” (Tolchinsky, 2007, p. 2). Lee y Karmiloff (1996, citado por Tolchinsky, 2007) afirma que las representaciones externas se pueden separar del productor y de la situación de producción; ellas se desprenden del proceso, del contexto de producción y del momento en el cual fueron producidos. Esto es mucho más claro cuando se trata de sistemas de notación o sistemas gráficos y menos en sistemas externos de representación como el habla o el gesto (como levantar varios dedos para indicar un número). Por otra parte, lo que es más importante,

⁴⁰ Peirce “limita la palabra representación al funcionamiento de un signo o a su relación con el objeto para el intérprete de la relación” (C.P. 1.540, tomado de Sercovich, 1987, p. 219). Representar: “estar en lugar de, es decir, encontrarse con relación tal con otro, que para ciertos fines es tratado por alguna mente como si fuera ese otro” (C.P. 2.273, tomado de Sercovich, 1987, p. 261).

⁴¹ Inicialmente se había escrito “sistemas de representación externa”. El tomar decisiones sobre el carácter interno o externo de los sistemas de representación no es un asunto fácil. En las dos páginas siguientes, cuando se defina con Duval lo que se asume en este trabajo como Registro Semiótico, se explicita la decisión que se toma para efectos de este trabajo.

de alguna manera estos aspectos se incrustan en el producto, “*de modo que este producto significa en ausencia del productor, y en un contexto y en tiempos diferentes*” (Tolchinsky, 2007, p. 2). Martí señala que las propiedades formales de un sistema de notación no solo determinan lo que es posible y no es posible hacer dentro del sistema, sino que, además, éste se constituye es una manera de representar cierta visión de la realidad. “*En este sentido, los sistemas externos de representación no son la traducción directa de la realidad, sino que son modelos de esta realidad según determinadas restricciones*” (Martí, 2003, p. 23).

Duval (1995/2004) dice que, considerados los sistemas semióticos desde el punto de vista de las relaciones entre conocimiento y representación, estos han de posibilitar la realización de tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: a) **formación de representaciones**, que tiene que ver con la constitución de una marca o un conjunto de marcas perceptibles e identificables como una representación de alguna cosa en un sistema semiótico determinado, permitiendo la función de expresión de una representación mental o la de evocación de un objeto, b) **tratamiento**, consistente en la transformación de una representación en otra dentro del mismo sistema, constituyéndose en ganancia de conocimiento con relación a la representación inicial y c) **conversión**, consistente en la transformación de una representación en otra de un sistema semiótico diferente, de tal manera que permitan otras significaciones nuevas de aquello que es representado. Duval dice que no todos los sistemas semióticos permiten estas tres actividades cognitivas; él indica que sistemas como el lenguaje en código Morse o las señales de tránsito son ejemplos de sistemas semióticos que no cumplen estas tres funciones. En cambio, el lenguaje natural y las lenguas simbólicas son sistemas semióticos que sí permiten estas tres funciones. Este autor decide llamar a los sistemas semióticos que posibilitan realizar estas tres funciones cognitivas fundamentales **registros de representación semiótica**.

Cada expresión con significado producida por un sistema de representación semiótica es a su vez un sistema. Entonces conviene distinguir dos sistemas: el productor y el producido: El primero, **el sistema productor**, es el sistema general con los signos que se toman como unidades elementales y sus reglas de combinación para producir los segundos sistemas, **los sistemas producidos**, o sea, expresiones que tienen significado para todo aquel que conozca el sistema. Siguiendo a Duval (1995/2004), se acordará en llamar al sistema productor “registro de representación semiótica” o simplemente

“registro de representación” y, para referirnos a las expresiones producidas, se dirá “representación semiótica” o simplemente “representación”. Entonces las representaciones semióticas, los productos, son externas, se materializan (para eso usan las marcas y reglas del sistema productor, los registros de representación semiótica) y por eso son observables. Duval dice: “*Las representaciones semióticas son a la vez representaciones conscientes y externas*” (1995/2004, p. 35). Pero esto no significa que la actividad semiótica sea necesariamente externa. Aceptaremos para este trabajo, independientemente de las discusiones teóricas, que la actividad semiótica es interna (mental) y solo alguno de sus productos se externalizan. Con esta decisión no se está afirmando una relación de subordinación de la semiosis con relación a la noesis, más bien se integra la actividad semiótica a la actividad conceptual. Una vez convenida esta decisión, en este trabajo, siguiendo a Vasco, podría hablarse de representaciones semióticas mentales (estas sí claramente internas).

Otra cuestión, ya no tan fácil de dirimir por las implicaciones de orden teórico que conlleva, es sobre el carácter interno o no de los registros de representación semiótica (RRS). Este asunto no se asume en este trabajo, simplemente se toma la decisión de admitir que los dos registros del SDN (el verbal y registro indo-arábigo) son registros de representación semiótica, ya que cumplen las condiciones definidas por Duval, y como tales son sistemas productores de representaciones numéricas (“trescientos cuarenta y seis” o 346).

Vasco (2007) advierte que Duval emplea el término ‘semiosis’ para referirse tanto a la actividad cognitiva de producción o de externalización (lo que Vasco prefiere llamar semiosis expresiva o proyectiva), como para la actividad de interpretación o de internalización (semiosis interpretativa o inyectiva, en términos de Vasco), pero que en casi todos los análisis sobre semiosis específicas que se encuentran en la obra de Duval hay una clara predominancia de la semiosis expresiva o proyectiva. Resulta conveniente distinguir estos dos tipos de actividad cognitiva, uno ligado a la comprensión (o interpretación) y otro al de producción. Son dos tipos de actividades distintas, aunque generalmente no se presente la una sin la otra.⁴² Una cosa es la actividad semiótica cuando el sujeto se enfrenta a un token o instancia que reconoce como un representamen (una

⁴² Basta pensar en cualquier situación interactiva para constatar que involucra ambos procesos, los cambios de turno en la interacción marcan cambios en el tipo de actividad semiótica que realizan quienes interactúan.

representación semiótica en un determinado registro semiótico) y otra la actividad semiótica cuando el sujeto busca expresar para otros (o para sí, como cuando busca tomar de conciencia o la situación exige una carga atencional especial) un producto de su actividad mental. En el primer caso, lo que llama Vasco, semiosis interpretativa (o semiosis inyectiva) se trata de proponer un interpretante para el representamen y un objeto que se interpreta⁴³ y en el segundo caso, se trata de que por algún mecanismo se selecciona el registro semiótico en el que se va a expresar y producir la representación semiótica adecuada que va a operar como representamen para los interlocutores reales o posibles, (independientemente, por una parte, de que el intento sea exitoso o fallido; en este último caso porque no expresa lo que se pretendía o no se logra con exactitud. Vasco apela a la experiencia personal de haber tenido que decir a un interlocutor, después de un momento de perplejidad, “tal vez no le entendí bien”, y a la de haber tenido que decir, después de un momento de perplejidad del interlocutor, “tal vez no me expresé bien”). “*El acto de enunciar consiste en el pasaje del pensamiento o del lenguaje interior a la expresión verbal, al enunciado real*” (Silvestri y Blanck, 1993, p. 49). Un estudio diferenciado de los dos tipos de actividad semiótica puede terminar favoreciendo las comprensiones sobre las relaciones entre actividad semiótica y la actividad conceptual, sin embargo, en este trabajo se hará el análisis de la actividad semiótica cuando el niño interpreta y produce representaciones numéricas desde un modelo único del signo —quizá muy pensado como semiosis inyectiva o interpretativa—, debido, no solo a dificultades teóricas que supone elaborar modelos diferenciados, sino también a las implicaciones que conlleva en el nivel metodológico.

Una preocupación central de Duval (1995/2004) consiste en mostrar el papel fundamental de las representaciones semióticas en el funcionamiento del pensamiento y en el desarrollo de los conocimientos. “*Las representaciones mentales nunca pueden considerarse independientes de las representaciones semióticas [...]... es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis*” (p. 16). En la consecución de su propósito, Duval, busca desvelar los mecanismos mediante los cuales las representaciones semióticas cumplen este papel. Estudia las actividades cognitivas

⁴³ Seguramente el proceso noético no es tan simple. Más que un interpretante se dará un red de interpretantes, antes de surgir uno como posible.

ligadas a la actividad semiótica y muestra que esta última es la que hace posible el desarrollo del pensamiento y del conocimiento.

3.1 LAS TRES ACTIVIDADES COGNITIVAS QUE POSIBILITAN LOS REGISTROS NUMÉRICOS

Se ha dicho que el SDN puede considerarse constituido por dos registros de representación semiótica: el verbal (que puede tener un soporte escrito, como, cuando se escribe: “cuarenta y tres”, u oral, como cuando se dice: “cuarenta y tres”); y, el indo-arábigo (como cuando se escribe: ‘43’); este último solo tiene un soporte escrito.⁴⁴

Soportadas en Duval, se estudiarán cada una de las tres actividades cognitivas que el SDN posibilita. La primera, **la actividad de formación** se da cuando se recurre a los signos propios de algunos de los dos registros en tareas como expresar la cantidad de elementos de una colección como producto de la acción de contar o dar el resultado de una operación que involucra combinaciones de dos o más expresiones en esos registros, etc. La actividad de formación de representaciones semióticas debe respetar las reglas propias del sistema semiótico en el que se produce, por razones, tanto de comunicabilidad como por razones de tratamiento. Con relación a la comunicabilidad, Duval dice: *“es importante que la formación de representaciones semióticas respete las reglas propias del sistema empleado no solo por razones de comunicabilidad”* (Duval, p. 43). Con relación al tratamiento Duval dice: *“...para hacer posible la utilización de los medios de tratamiento que ofrece ese sistema semiótico empleado. Una representación semiótica no debe salirse del dominio definido por las reglas que constituyen un sistema semiótico”* (Duval, p. 43). Duval llama a estas reglas *“reglas de conformidad”*. Estas reglas se refieren: a) *“a la determinación de unidades elementales”*, b) a *“las combinaciones admisibles de estas unidades elementales para formar unidades de orden superior”* y c) a *“las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa...”* (p. 43). En el caso del SDN las unidades elementales en el registro verbal serían las expresiones de la sucesión verbal numérica que podríamos reconocer como simples (no formadas como combinaciones de otras): uno, dos, tres,...

⁴⁴ Existen diferentes sistemas de numeración, que se distinguen por las marcas que utilizan para producir las representaciones (las marcas del sistema decimal de numeración romano, las marcas del sistema de numeración babilónico, las marcas del sistema indo-arábigo, etc.), su base y su sintaxis (aditiva, aditiva-multiplicativa o polinomial. Esta lista no es exhaustiva); en otras palabras existen diferentes sistemas de numeración que se distinguen por sus registros de representación semiótica, uno de estos es el SDN.

nueve; las correspondientes a marcas de decenas: diez, veinte, treinta,...; de centenas: cien, doscientos,...; de miles, etc. Podríamos incluir las expresiones como: once, doce,..., quince, que en este registro semiótico no están formadas por otras más simples y, a diferencia de las anteriores, no se usan para formar otras de orden superior. En el registro indo-arábigo, la lista de estas unidades elementales no se corresponden exactamente con la del registro verbal; apenas consiste en la pequeña lista de diez expresiones correspondientes a las cifras 1, 2, 3,..., 9 y 0.

En cuanto a las reglas de combinación que permiten la producción de expresiones significativas de orden superior, en el caso del registro verbal estas reglas de combinación incluyen operaciones de tipo aditivo-multiplicativo y una regla de orden de conformación de la expresión: se dice, por ejemplo, ‘treinta y cinco’ y no ‘cinco y treinta’, o ‘doscientos treinta y ocho’ y no ‘treinta y ocho, doscientos’ u ‘ocho, treinta y doscientos’. Obsérvese que el no respetarla no afecta la cantidad de la colección a la que se hace referencia, sino a la comunicabilidad y, como dice Duval, a la operación de tratamiento. En el caso del registro indo-arábigo estas reglas de combinación son de tipo polinomial, por ejemplo, la representación semiótica ‘234’ es la expresión abreviada del polinomio $2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0$, pues solo escribimos sus coeficientes.

La segunda actividad, **la de tratamiento**, corresponde a la “*transformación de una representación (inicial) en otra representación (terminal), respecto a una cuestión, a un problema o a una necesidad, que proporcionan el criterio de interrupción en la serie de transformaciones efectuadas*” (Duval, 1995/2004, p. 44). Un tratamiento es una transformación que se hace al interior de un mismo registro de la representación o un mismo sistema. En nuestro caso, serían transformaciones al interior de los dos registros posibles: el verbal o el indo-arábigo. Por ejemplo, “doscientos treinta y cinco” se transforma en “doscientos treinta y cinco”, o ‘45’ en ‘40 + 5’. A la actividad de tratamiento “*corresponde su expansión informacional*” (p. 45). Permite obtener nueva información, gracias a transformar una representación en otra del mismo sistema que hace explícita una información que, si bien estaba en la primera, no era tan evidente. Transformar la representación ‘45’ en ‘40 y 5’, o en ‘40 + 5’, o en ‘4x10 + 5’ hace evidente nueva información que puede ser útil para nuevos tratamientos o para enriquecer el significado de la representación ‘45’. La actividad de tratamiento de las

representaciones se rige por reglas precisas del sistema semiótico en el que se definen (en el caso de lo numérico corresponden a las reglas de cálculo aritmético).⁴⁵

La tercera actividad cognitiva que posibilita todo registro de representación semiótica **es la conversión**. Esta actividad corresponde a *“la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, esta misma situación o de la misma información en otro registro”* (Duval, p. 46). La actividad de conversión es una transformación externa en el sentido de que se hace de un registro a otro diferente. Por ejemplo, cuando la expresión “trescientos cuarenta y dos” se escribe como ‘432’ o viceversa, o, cuando, la expresión “cuatrocientos dos” se transforma como ‘402’. En este último caso es clara la dificultad de esta transformación, debido a que se convierte una expresión de registro verbal compuesta por dos elementos (cuatrocientos-dos) a una en el registro indo-arábigo compuesta por tres elementos (tres cifras, 4-0-2). Claramente, esta actividad de conversión se realiza correctamente y con cierto nivel de comprensión solo si se está en posesión en cierto nivel del principio de posicionalidad que rige el segundo registro. El proceso de conversión entre estos dos registros deberá analizarse en todos sus detalles para entender su complejidad cognitiva.

Para la actividad de conversión no es posible encontrar en todos los casos reglas precisas que indiquen cómo pasar de una representación en un registro a otra en otro registro diferente y esto es lo que sucede en el caso de SDN. Duval considera que en este hecho radica, de una parte, el descuido en la enseñanza: ya que generalmente no se enseña de forma explícita las acciones de conversión necesarias para comprender un concepto, pues se considera que los alumnos lo logran espontáneamente y, de otra, consecuentemente, de las dificultades en el aprendizaje *“...se ha probado que cambiar la forma de representación es, para muchos alumnos de los diferentes niveles de enseñanza, una operación difícil e incluso en ocasiones imposible”* (p. 50). La apropiación del SDN es un buen ejemplo de las dificultades que entraña la actividad de conversión, esta no es

⁴⁵ Duval señala que en matemática el término “cálculo” se toma de forma más amplia que incluye la actividad de conversión. *“El cálculo es un tratamiento interno al registro de una escritura simbólica de cifras o letras: sustituye, en el mismo registro de escritura de los números, expresiones nuevas por expresiones dadas. Sin embargo, el término “cálculo” en matemática, es tomado de en una acepción más amplia: se llama cálculo a todo proceso de transformación de escritura de números, combinando actividad de tratamiento y actividad de conversión”* (Duval, p. 44). Pero también habría que extenderlo a otros conjuntos de objetos matemáticos en los que se define una o más operación (al álgebra y al cálculo de funciones).

inmediata y resulta difícil para muchos alumnos, precisamente, producciones de los niños como escribir '4007' cuando se les dicta "cuatrocientos siete" ponen en evidencia estas dificultades.

Al analizar la operación de conversión Duval distingue dos casos, según se haga entre sistemas de representación que sean congruentes o no. La congruencia hace referencia a que a cada unidad significativa simple de la representación inicial, sea posible asociar una y sólo una unidad significativa en el sistema final y a que se mantenga el orden de arreglo de las dos representaciones, es decir que el orden en que se componen las unidades elementales de la representación inicial, sea el mismo en la composición de las unidades que se ponen en correspondencia semántica en la representación final. En caso en que no se cumpla alguna o todas estas condiciones se dice que las dos representaciones no son congruentes. La operación de conversión presenta menos dificultad en caso de representaciones congruentes que cuando se hace entre representaciones no congruentes. Y en caso de representaciones no congruentes su nivel de dificultad será mayor cuanto mayor sea el grado de no congruencia, determinado éste por el número de condiciones de congruencia no satisfechas por las dos representaciones.

3.2 ANALISIS DE LA CONGRUENCIA DE LOS REGISTROS SEMIÓTICOS DEL SDN

Según los criterios de congruencia establecidos por Duval, ¿se puede decir que todo par de representaciones correspondientes de los dos registros, el verbal y el indo-arábigo, del SDN son congruentes?

Antes de realizar este análisis diremos que en términos abstractos podemos pensar cualquier expresión del SDN, bien sea en el registro verbal o el indo-arábigo, como una expresión formada por expresiones simples que hacen referencia a una cantidad dada de unidades simples o de unidades compuestas. Las unidades compuestas, en el SDN, precisamente, se componen de una o varias veces una potencias de diez (10^1 , 10^2 , 10^3 ,...) de unidades simples. Se llamará a estas unidades compuestas "ordenes decimales"; a las unidades compuestas de 10^1 simples se llamarán "unidades de orden uno", a las unidades compuestas de 10^2 unidades simples se llamarán "unidades de orden dos" y así sucesivamente, a las unidades compuestas de 10^n unidades simples, "unidades de orden n". Para unificar, se podría acordar que a las unidades simples (como efectivamente se le

reconoce en la literatura en el registro indo-arábigo) se podrían considerar como “unidades de orden cero”, con la convención usual de que ‘1’ puede reescribirse como ‘10⁰’ o como ‘1×10⁰’ (tabla 1)

Tabla 1
 Ordenes decimales de la expresión ‘m...dcba’ de una representación en Ri-a

m	n	...	d	c	b	a
m unidades de orden cero	n unidades de orden m - 1		d unidades de orden tres	c unidades de orden dos	b unidades de orden uno	a unidades de orden cero
$m \cdot 10^m$	$(m-1) \cdot 10^{m-1}$...	$a \cdot 10^3$	$a \cdot 10^2$	$a \cdot 10^1$	$a \cdot 10^0$

En el registro verbal algunas expresiones compuestas omiten expresiones simples que hacen referencia a alguna o varias unidades compuestas correspondientes a alguno o varios ordenes decimales, por ejemplo, “doscientos cinco”, es un expresión del registro verbal que tiene una expresión ‘doscientos’ que hace referencia a unidades de orden dos y otra expresión que hace referencia a unidades de orden cero. Se dirá que una expresión del registro verbal es completa si la expresión contiene expresiones simples para todos y cada uno de los órdenes decimales que cubren desde el orden mayor al que hace referencia una de la expresiones elementales que la componen hasta la de orden cero; en caso contrario, diremos que es incompleta. Ejemplo, “tres mil doscientos cuarenta y seis” es un expresión completa porque es posible encontrar expresiones que hacen referencia a unidades compuestas de los órdenes 3 (tres mil), 2 (doscientos), 1 (cuarenta) y 0 (seis); mientras que tres mil seis es incompleta porque faltan expresiones para los órdenes decimales 2 y 1. Claramente esta distinción solo se aplica a representaciones del registro verbal.

Estudiamos entonces la actividad de conversión en el caso del SDN. Para ello se analizan dos casos según se trate de expresiones verbales completas o no.

Caso uno. Conversiones de representaciones verbales “compuestas y completas” a representaciones indo-arábigas y viceversa.

En este caso a cada expresión verbal elemental le corresponde una única unidad semántica elemental del registro indo-arábigo. En sentido contrario también se cumple la correspondencia, a cada unidad semántica elemental del registro indo-arábigo le

corresponde una parte constituyente de la expresión en el registro verbal. La correspondencia se hace entre expresiones correspondientes del mismo orden decimal (tabla 2)

Tabla 2

Asociación entre expresiones de los dos registros del SDN, para expresiones verbales compuestas y completas

Registro verbal	Registro indo-arábigo
Cuarenta y seis	46
Trescientos cuarenta y seis	346
Dos mil trescientos cuarenta y seis	2346

La tabla 2 muestra que a cada expresión verbal elemental que constituye la expresión compuesta le corresponde una única unidad semántica elemental del registro indo-arábigo, y, por consiguiente, la correspondencia se hace entre expresiones correspondientes al mismo orden decimal.

De igual forma la conversión en sentido contrario está garantizada de forma inmediata; a cada unidad elemental del registro indo-arábigo (cada cifra del numeral) le corresponde una única unidad del registro verbal.

Sin embargo esta regla de correspondencia no agota todos los casos posibles. Once, doce, trece, catorce y quince, son expresiones que no son composición de unidades simples del registro verbal, mientras las expresiones 11, 12,..., y 15 sí se componen por las unidades elementales de este registro. Algo semejante ocurre con expresiones como ‘veintiuno’ (en lugar de ‘veinte y uno’).

Caso dos. Conversiones de representaciones verbales “compuestas e incompletas” y representaciones indo-arábigas y viceversa (tabla 3).

Tabla 3

Asociación entre expresiones de los dos registros del SDN, para expresiones verbales compuestas y no completas

Registro verbal	Registro indo-arábigo
Trescientos seis	306
Dos mil seis	2006

La tabla 3 muestra que si bien cada expresión verbal elemental que constituye la expresión compuesta le corresponde una única unidad semántica elemental del registro

indo-arábigo, en sentido contrario no ocurre lo mismo, para algunas expresiones existe una o más unidades “semánticas” elementales del registro indo-arábigo que no tiene su correspondiente en el registro verbal.

Ahora sí estamos en condiciones de responder la pregunta inicial que nos habíamos hecho, sobre si representaciones de los dos registros del SDN, las verbales y las indo-arábigas, son congruentes. El análisis recién hecho nos muestra que representaciones de estos dos registros no son congruentes. Sin embargo existe una clase de expresiones, “las verbales completas”, en las que con algunas excepciones puede hablarse de congruencia. Esto explica la facilidad, constatada por la mayoría de los profesores de la escuela primaria y corroborada por algunos estudios, con la que los niños que están en el proceso de aprendizaje del SDN realizan las conversiones de las expresiones “verbales completas” y la mayor dificultad para realizar la operación de conversión de expresiones numéricas “verbales incompletas”. Orozco, Guerrero y Otálora (2007) reportan que en una muestra de 142 niños de los grados de segundo y tercero (entre 7 a 9 años) al escribir numerales de cuatro cifras (en el registro indo-arábigo) que se les dictan (se representan oralmente en el registro verbal), los que llevan a mayor número de escrituras no-canónicas son, precisamente, aquellos que en el registro indo-arábigo tiene cero en el lugar de la centenas (5046, 35046). Resultados semejante se constatan en estudios propios, en una muestra de 66 niños de dos cursos de grado segundo (7-8 años) a quienes se les dictaron numerales de cuatro cifras: del total de numerales de la forma abcd (todas las cifras diferentes de cero) que les fueron dictados, el 81% de las escrituras producidas fueron canónicas; mientras que apenas un promedio de 66% fueron canónicas cuando se trató de numerales de las formas a0cb, ab0d, a00d y a0c0 (Castaño, J., 2008).

Estudiadas las tres actividades cognitivas de representación ligadas a la actividad de semiosis (formación, tratamiento y conversión) que distingue Duval y las dificultades que entraña la tercera de estas actividades en el caso del SDN; especialmente, las debidas a la no congruencia entre representaciones en los dos registros (el verbal y el indo-arábigo), ahora se analiza la importancia de la existencia de múltiples registros para la actividad conceptual.

3.3 PLURALIDAD DE REGISTROS SEMIÓTICOS

Para este autor, como ya se ha expresado, es la diversidad de registros semióticos y la actividad cognitiva de conversión que ésta permite, la que hacen posible el desarrollo del pensamiento y del conocimiento. *“La diversificación de los registros de representación semiótica es la constante del desarrollo de los conocimientos, tanto desde el punto de vista individual como científico y cultural”* (1995/2004, p. 62). Ligado a los procesos del desarrollo del conocimiento y a las dificultades de su aprendizaje Duval destaca tres fenómenos estrechamente ligados: uno, la diversificación de los registros de representación; dos, la diferenciación entre representante y representado (hecho fundamental en matemática en tanto que los objetos representados no son ostensibles), es precisamente la diversidad de registros de representación la que posibilita tal diferenciación y, tres, la coordinación entre diferentes registros.

Para los sujetos, una representación puede funcionar verdaderamente como representación, es decir, permitirles el acceso al objeto representado, solo cuando se cumplen dos condiciones: que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso y que “espontáneamente” puedan convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo. Cuando estas dos condiciones no se cumplen, la representación y el objeto representado se confunden, y no se pueden reconocer dos representaciones diferentes de un objeto como representaciones de ese mismo objeto (Duval, 1995/2004, p. 31).

La semiosis consiste no solo en una diversidad de sistemas semióticos sino también en las posibilidades de coordinarlos. La actividad conceptual y variedad de registros de representación no son independientes. *“La comprensión conceptual está ligada al descubrimiento de una invarianza entre representaciones semióticas heterogéneas”* (Duval, 1995/2004, pp. 63-64).

La coordinación de registros de representación requerida en la actividad conceptual no se da espontáneamente, por el contrario, es un proceso difícil y que requiere una orientación intencionada y adecuada del aprendiz; como se ha visto, a veces encierra grandes dificultades cuando se trata de coordinar dos registros no congruentes. *“Es necesario que un sujeto haya llegado al estadio de la coordinación de representaciones*

semióticamente heterogéneas, para que pueda discriminar el representante y lo representado, o la representación y el contenido conceptual que esta representación expresa o ilustra (Duval, 1995/2004, p. 63).

En el caso del SDN es clara la necesidad de coordinación de los dos registros de representación. No solo se la encuentra en tareas que supone la actividad de conversión de un registro al otro, como cuando resuelve tareas como escribir números dictados o cuando debe leer numerales que se le presentan en el registro indo-arábigo, también en tareas como, transformar la expresión '234' en '200 + 30 + 4'. Tarea ésta que a simple vista pareciera exigir únicamente la actividad de tratamiento, en tanto que se puede ver como la acción de pasar de una forma de expresión a otra dentro del mismo registro indo-arábigo, sin embargo, no siempre es así. Esta tarea puede ser exclusivamente una actividad cognitiva de tratamiento, como cuando los niños aprenden por entrenamiento a pasar de la primera a la segunda, pero también puede ser una actividad cognitiva que conlleva la coordinación entre dos registros como muestra la figura 13.

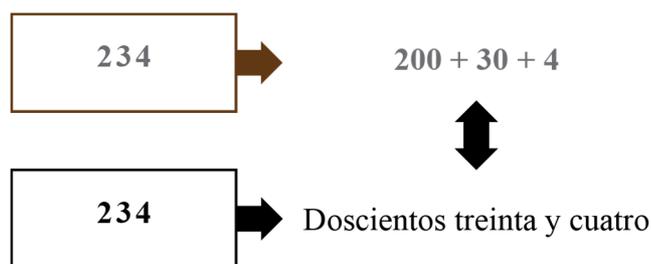


Figura 13. Ejemplo de una tarea de coordinación de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión

Una comprensión deseable de los registros numéricos exige cierta coordinación entre los dos registros, como la que muestra la figura. Se puede suponer una diferencia en la comprensión de los registros numéricos en caso de que un niño pueda realizar únicamente el tratamiento que se muestra en la primera línea sin que sea capaz de ponerlo en relación con el de la segunda línea (o incluso que pueda hacer las transformaciones de las dos líneas, pero cada una independientemente de la otra) y aquel que sí pueda coordinarlas. En este último caso se ha de observar mayor flexibilidad en el uso de estas transformaciones, mientras que en los primeros cada transformación queda encerrada en sí misma.

La figura ilustra que esta tarea requiere de la coordinación de los dos registros numéricos (verbal e indo-arábigo) y, además, de la combinación de las dos actividades de

transformación de representaciones semióticas: tratamiento y conversión. Es esta adecuada coordinación de registros y combinación de operaciones cognitivas la que en este caso permite la toma de conciencia de que “doscientos treinta y cuatro” es equivalente a “ $200 + 30 + 4$ ” y que esta suma se escribe de manera abreviada como 234”, aunque por este hecho no quiera decir que ya ha llegado al nivel de entender que esa cifra ‘2’ en este caso representa “2 unidades de 10 de 10 unidades de nivel cero”. Duval (1995/2004) dice que “...*Pero es en relación con la función de objetivación y no con las de expresión o la de tratamiento, que en últimas debe analizarse la estructura de la representación para comprender su papel en el funcionamiento cognitivo del pensamiento*” (p. 64). Para este mismo autor “*la objetivación corresponde al descubrimiento por parte del sujeto mismo de aquello que hasta entonces no sospechaba, incluso si otros se lo hubieran explicado*” (p. 33).

4 UN MODELO DEL SIGNO NUMÉRICO Y ANALISIS DE LA OPERACIÓN DE CONVERSION

A partir de los aportes presentados en los apartados anteriores desde la semiótica y la lingüística y del enfoque semiótico cognitivo de Duval, en este apartado, en un primer momento, se formula el modelo de signo numérico que se asumirá en este trabajo y, en un segundo momento se aplica para analizar la tarea de conversión entre representaciones numéricas en el SDN. Se elabora una formulación que focaliza la atención en el papel de los signos y en el proceso que se da en un sujeto a nivel individual, tanto en el momento en el que lo interpreta como cuando lo produce; el modelo no incluye esa dimensión relativa a los contextos interactivos en el que se hace uso de estos signos, esta dimensión pragmática está presente únicamente como un marco a tener en cuenta para completar el proceso de significación. Aunque esta dimensión es fundamental para comprender el proceso de significación en sus reales condiciones de producción, el no incluirla en el modelo no lo invalida pero si lo hace incompleto. Queda al “buen sentido” del investigador que lo use, la responsabilidad de leer e interpretar en la pragmática de las situaciones en la que se estudian las producciones de los niños aquello que el modelo deja por fuera que en un momento dado resulta fundamental para entender de forma más completa los sentidos y significados que los niños asignan en el intercambio. Se es consciente de las limitaciones que genera esta decisión e incluso de los peligros que conlleva, pero también entiende la necesidad de delimitar el espacio de investigación. Por eso en el proceso de recolección y análisis de la información el investigador tendrá que estar atento y sobre todo ser sensible a recuperar eso que el modelo deja escapar y que puede ser determinante para las interpretaciones que se hagan.

4.1 UN MODELO DEL SIGNO NUMÉRICO

Piénsese en el proceso que se da cuando un niño interpreta una marca como ‘16’ (también podría ser la expresión verbal ‘dieciséis’ u otra equivalente en otro registro semiótico, por ejemplo, la marca en Braille correspondiente a 16). El primer paso es el acto de percepción y reconocimiento de la marca misma (el punto de partida de la semiosis, como lo decía Peirce). Se puede distinguir un primer componente de ese primer paso, consistente en que el niño reconoce esa marca como una instancia de un tipo, el tipo

de '16',⁴⁶ que se usa en el registro indo-arábigo para hacer referencia al referente u objeto dieciséis del sistema numérico conceptual, sea cual fuere el interpretante que le da sentido. Piaget (1970/1983, 1974/1983) mostró que el acto de percibir ya es un acto de organización del pensamiento. Ese tipo no puede considerarse externo, es la representación mental que el niño se hace de esa marca. Podría decirse que el tipo es la representación mental previa, en la semiosis interpretativa o inyectiva, que le permite reconocer al niño esa marca como una instancia del tipo.⁴⁷ En este nivel básico de percepción ya hay que admitir que el proceso no es de simple inscripción o copia, no es simplemente un efecto de un estímulo que actúa y produce efectos sobre el sujeto, sino que el pensamiento, o la actividad cognitiva realiza una acción en sentido contrario, organizando los estímulos de acuerdo con sus organizaciones previas.

También se puede distinguir un segundo componente de este primer paso, el sujeto intérprete reconoce esa marca como haciendo parte de un sistema semiótico, es decir la reconoce como un representamen, en términos Peirce; se dirá que la reconoce como una representación semiótica, en términos de Duval. Decir esto, es admitir que el sujeto intérprete ya tiene alguna idea de lo que es esa marca, al menos reconoce que esa marca no es cualquier cosa, reconoce que se trata de esas marcas que hacen referencia a algo que tiene que ver, en este caso, con los hechos de contar o con la cantidad.⁴⁸ Si esto no se diera, esta marca sería un estímulo cualquiera que se percibe pero a la que el sujeto no le

⁴⁶ Conceptualmente los términos marca, instancia y tipo son diferentes. Toda marca es singular y el sujeto puede reconocerla como un ejemplar o instancia de la representación mental que tiene de la clase de esas marcas: su tipo, en ese sentido el tipo es una abstracción; sin embargo, a pesar de esta diferencia, en el nivel tipográfico no se hará ninguna distinción: marca y tipo se escribirán entre comillas simples y el texto será el que permita establecer la diferencia al lector. Cuando una marca que se use en este texto se hace con la intención de referirse al sentido o al significado del representamen a la que ella alude (es decir la marca tomada como representación semiótica) se escribirá sin comillas. Se usará comillas doble para hacer referencia a citas textuales. Ejemplo, en la expresión: *el profesor dicta al niño "trece" y el niño escribe "13", en este caso "trece" y "13" hace referencia a la citas de lo que dijo el profesor y de lo que escribió el niño, pero si se escribe: el profesor dicta al niño "trece" y el niño escribe '13' se está citando lo que dijo el profesor y se hace referencia a la marca que produjo el niño. Queda la tarea al investigador de interpretar el sentido asignado por el niño al representamen que expresó con esa marca y al lector queda la tarea de juzgar como plausible la interpretación que propone el autor.*

⁴⁷ Por ejemplo, el tipo '5' es distinto del tipo 's' y un token [particular] puede ser difícil de identificar como tipo '5'. Piénsese en las dificultades que tienen los niños pequeños para reconocer las formas de las grafías de los numerales (el uno escrito como '1' o como 'l' o el cuatro cerrado o abierto).

⁴⁸ La investigación a este respecto muestra que los niños desde muy temprana edad son capaces de diferenciar palabras para contar de las que no y las grafías que sirven para escribir números de las que se usan para escribir palabras. (Karmiloff-Smith, 1992/1994; Martí, 1999, Tolchinsky y Karmiloff-Smith, 1993). Martí dice que la diferenciación entre grafías "se basa, no sólo en la progresiva familiarización y conocimiento que los niños tienen con los caracteres unitarios de los dos sistemas (letras y cifras), sino que se elabora en un principio en base a las propiedades básicas que diferencian ambos sistemas" (2003, p.187).

asigna la función de representar. ¿Cuál de estos dos componentes sucede primero, el reconocer la marca como tipo o el reconocerla como representamen? Difícil contestar esta pregunta, por fortuna para efectos de este trabajo no es relevante, es posible incluso que convenga admitir que se trata de un único proceso.

Reconocida la marca como representamen (o representación semiótica) el sujeto intérprete propone uno o varios interpretantes. Se distinguirán dos tipos, uno inmediato, más o menos automatizado, en el que por el interjuego del hábito, de la situación, del contexto y de las expectativas e intereses del intérprete (o factores subjetivos) suscita en el sujeto la actualización de un interpretante (incluso pueden ser varios); siguiendo a Peirce podría llamarse **interpretante inmediato**. Si se dan las condiciones (bien sea por los requerimientos de la situación y/o por las posibilidades del pensamiento y condiciones del sujeto intérprete) se puede dar un segundo momento, ya menos automático, con algún nivel de reflexión, en el que el sujeto intérprete realiza las acciones semióticas (de expresión en un registro semiótico, de conversión a otro, o de tratamiento dentro de un mismo registro) con los interpretantes inmediatos que fueron actualizados o de las nuevas representaciones que surgen, podría llamarse **interpretante mediato**.⁴⁹ Este último subproceso puede ser mental (en el sentido de exclusivamente interno) o no y más o menos consciente. Puede suceder que el sujeto realice esas transformaciones internamente, bien porque está en condiciones de coordinar diferentes representaciones sin que le exija un esfuerzo atencional especial (de lo que dependerá que tenga mayor o menor conciencia del mismo) o puede suceder que la tarea demande un esfuerzo atencional mayor a un sujeto y entonces las realice como hablándose para sí (en este caso supone mayor conciencia). Incluso puede suceder que el acto de semiosis se exteriorice produciendo secuencias de representaciones semióticas externas (verbales o escritas, u de otro medio) que dejan ver a un observador externo el juego de transformaciones realizado, o permiten seguir paso a paso la cadena de transformaciones semióticas al mismo sujeto intérprete.

Estos dos momentos (el del interpretante inmediato y el del interpretante mediato) podrían ilustrarse siguiendo el ejemplo del dieciséis. Percibida y reconocida la marca '16' como instancia del tipo correspondiente a esa marca y como una representación semiótica

⁴⁹ Indudablemente entre estos dos tipos de interpretantes se está estableciendo una relación de temporalidad, de ahí sus calificativos. Por eso se hablará indiferentemente de tipos de interpretantes y de momentos.

del sistema semiótico que se ha llamado SDN, el niño actualiza alguno o algunos de los interpretantes de los que dispone para el dieciséis, como por ejemplo el dos ocho sugerido por un canto que él se sabe y que termina en “ocho y ocho, die-ci-seis”; otro ejemplo, puede que actualice el interpretante dieciséis⁵⁰ (la expresión del registro verbal) como que hace referencia a alguna idea de la cantidad de elementos de un colección tal que al numerar sus elementos tienen como cardinal el dieciséis. Pero si, además, entre sus comprensiones el niño cuenta con alguna imagen de la sucesión numérica podrá pensarlo como un lugar en esta sucesión (esta transformación puede ser de tratamiento en caso de que la imagen sea la sucesión numérica verbal, pero puede ser de conversión en caso de que la imagen sea la sucesión indo-arábica. Y, aún más, si el niño puede coordinar las imágenes en estos dos registros, se podría hablar de tratamiento y conversión). Esta cadena de semiosis puede continuar; por ejemplo, si el niño cuenta con un manejo medianamente flexible de la sucesión numérica, podrá identificar que es el siguiente del quince o el anterior al diecisiete. La anterior trayectoria es una posibilidad entre varias, pueden recorrerse otras trayectorias semióticas, por ejemplo, el representamen ‘16’ puede dar lugar a actualizar el interpretante 10 y 6 (que puede ser simplemente un tratamiento o fruto de la coordinación de diferentes representaciones semióticas, una posible sería: ‘16’ => dieciséis => diez y seis => 10 y 6). Según las posibilidades del niño incluso las dos trayectorias pueden coordinarse obteniendo como resultado un significado más enriquecido de ese representamen inicial ‘16’.

Se ha dicho que en el momento del interpretante inmediato se puede admitir que el sujeto intérprete proponga varios interpretantes para el representamen. Se dirá que esto tiene que ver con el nivel de automatización que el intérprete tenga en el manejo del o los registros semióticos que se pongan en uso.⁵¹ En general, un adulto escolarizado ante la marca ‘16’ puede actualizar de inmediato (y quizá de manera simultánea) varios signos como interpretantes: ‘dieciséis’, ‘10 y 6’, etc. ¿En este caso hay que reconocer una operación cognitiva de transformación de representaciones semióticas, en términos de Duval? La respuesta es sí; la conciencia o no por parte del sujeto de la ejecución de la transformación y la mayor o menor automatización con la que ésta se ejecute, no definen

⁵⁰ Efectivamente en esta cadena semiótica la expresión del registro verbal dieciséis hace las veces de interpretante. En este caso hay una acción de conversión en tanto convierte una representación semiótica en el registro indo-arábigo a la representación semiótica en el registro verbal, fruto de un acto más o menos memorizado.

⁵¹ Esto no es del todo exacto. Además de la automatización existen otros componentes que juegan en la actualización de un interpretante: contexto, expectativa, intereses, etc.

la naturaleza de la transformación.⁵² El segundo momento, el de interpretante mediato, supone una actividad semiótica que exige del sujeto cierto grado de atención al proceso mismo de transformación, de ahí su carácter de mediato.

Si se busca evitar cosificar el acto de significación y más bien se pretende entenderlo como proceso, es necesario reconocer que generalmente un acto de semiosis es una cadena o entramados de semiosis; en esto, con leguajes distintos, hay coincidencia entre Peirce y Duval.⁵³ No necesariamente hay que entender estas cadenas como sucesión de semiosis simples, aunque puede serlo como cuando el sujeto se limita a reproducir, por entrenamiento, cadenas de transformaciones semióticas a la manera de algoritmos que ha aprendido. Pero también puede suceder que la actividad semiótica sea más un entramado —y esto es lo deseable— fruto de la coordinación de cadenas semióticas diferentes y que coordinan registros semióticos diferentes. Duval (1995/2004) muestra que la diferenciación entre el representante y el representado se encuentra estrechamente ligada a la coordinación de representaciones diferentes: *“hablaremos de comprensión integrativa para designar la comprensión de las representaciones semióticas que procede de una coordinación de registros”* (p. 69).

¿Qué hace que el sujeto se proponga un determinado interpretante o determinadas cadenas de interpretantes para un representamen? Una alternativa de explicación sería dejar esta función exclusivamente a la actividad semiótica. Al menos hay dos posibilidades a las que se recurre para justificar esta alternativa. Algunos podrán justificarla, como efectivamente lo hacen, soportándose en los trabajos de Duval; pues interpretan —de manera equivocada, a mi propio entender— la insistencia de Duval en destacar el papel determinante de la semiosis en la actividad matemática y encuentran en su afirmación básica de la no existencia de noesis sin semiosis, una razón para afirmar la subordinación de la primera a la segunda; otros, podrían justificar esta misma alternativa recurriendo a la posición pragmática asumida por Peirce para explicar el signo. Otra alternativa posible para contestar la pregunta inicial del párrafo, que es la que se asume

⁵² Recuérdese que según Duval (1995/2004) una representación permite el acceso al objeto representado a un sujeto, solo bajo dos condiciones: disposición de por lo menos dos sistemas semióticos diferentes y que el sujeto “espontáneamente” pueda convertir la representación de un sistema semiótico a otro.

⁵³ Es posible que por la exigencia de una tarea o por las condiciones del sujeto un acto de semiosis se reduzca a una “única acción semiótica”, por ejemplo, el hecho de escribir un numeral dictado en registro indo-arábigo, por parte de un sujeto que tiene suficiente dominio de esta operación de conversión como para que produzca una respuesta automatizada. Pero en general las tareas que hacen exigencias más allá de las automatizaciones alcanzadas por el sujeto dan lugar a cadenas semióticas.

para este modelo, consiste en suponer una instancia intramental, (que en la psicología y en la didáctica de la matemática se nombra de diferentes maneras: representaciones internas, representaciones mentales, comprensión, concepción, etc.), que podría ser la noesis en términos de Duval, o la actividad conceptual como se ha llamado en este trabajo (ver notas pies de páginas 1 y 6) que junto con la actividad semiótica,⁵⁴ sea la responsable de la asignación de significado.⁵⁵ En este modelo se asumirá el concepto de esquema que propone Vergnaud como dicha instancia.

La teoría de campos conceptuales de Vergnaud asume el concepto de esquema de Piaget (1936/1969) como una totalidad dinámica que organiza la acción del sujeto en una clase de situaciones. *“Llamamos ‘esquema’ a la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada. En los esquemas⁵⁶ es donde se debe investigar los conocimientos-en-acto del sujeto, es decir, los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria”* (Vergnaud, 1990. p. 133). Para este autor *“un esquema reposa siempre sobre una conceptualización implícita”* (p. 135) y designa con las expresiones “concepto-en-acto” y “teorema-en-acto” (los invariantes operatorios) los conocimientos contenidos en los esquemas. En este modelo se asume este concepto de esquema como esa entidad conceptual (intramental) que explica que un sujeto particular en una situación dada produzca ese significado personal para esa situación, *“son los*

⁵⁴ Actividad semiótica y noética son inseparables pero no por ello indistinguibles por el análisis.

⁵⁵ Precisamente, parte de la pretensión de este estudio es aportar algunos elementos para describir la relación entre esta entidad y la actividad semiótica, en el caso del SDN.

⁵⁶ La palabra esquema es utilizada por diferentes autores con distintos significados que reflejan la perspectiva teórica desde la que se usa. Para el estructuralismo genético (Piaget 1936/1969, 1964/1969) los esquemas son marcos asimiladores que hacen posible la organización e interpretación de la datos de la realidad *“...toda conducta es una asimilación de lo dado a los esquemas anteriores (...) y toda conducta es al mismo tiempo una acomodación de estos esquemas a la actual situación”* (Piaget, 1964/1969, pp. 128-129). En una versión más actual dentro de esta perspectiva *“los esquemas son organizadores de la conducta que no son observables pero que se pueden inferir”* (Inhelder y De Campora, 1996, p. 46). La idea de esquema incluye un aspecto funcional, otro estructural y la relación entre la conducta y la meta que se pretenden alcanzar. Por otra parte para Cubero (2005) la palabra esquema utilizada por los teóricos de inteligencia artificial y los psicólogos de procesamiento de información es tomada de Bartlett, para quién esquema se refiere a *“(...) una organización activa de reacciones pasadas, o de experiencias pasadas, que debe siempre suponerse que está operando en cualquier respuesta orgánica bien adaptada”* (1932, citado Cubero, 2005). Cubero identifica algunas características que se asignan al concepto de esquema en la ciencia cognitiva; a pesar de las diferencias que se pueden dar entre un autor y otro, entre ellas se destacan: los esquemas representan conocimiento (tanto semántico como episódico) y reglas de acción que regulan los usos de los conocimientos, representan conocimientos en diferentes niveles de abstracción, los esquemas son compuestos, están formados por subesquemas, y son activados por otros esquemas.

*esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o por un significante lo que constituye el sentido*⁵⁷ *de esta situación o de este significante para este sujeto*” (p. 147).

Vergnaud (p. 139) considera a todo concepto como una triplete constituida por tres conjuntos C (S, I, Γ). S es el conjunto de situaciones⁵⁸ que le da sentido⁵⁹ al concepto, I es el conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas (teoremas y conocimientos en acto) y Γ conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento. El conjunto S puede ser asociado a las situaciones de referencia del concepto. I puede asociarse al significado de Saussure y Γ puede asociarse a los significantes. Estudiar el desarrollo y el funcionamiento de un concepto, exige considerar estos tres planos a la vez.

Según Vergnaud (p. 149) si bien es clásico reconocer la doble función del lenguaje como herramienta para comunicar y para representar, en la actividad matemática el lenguaje representa cosas de diferentes órdenes y tiene diferentes funciones: a) tiene que ver con representar los elementos pertinentes de la situación, b) representación de la acción y c) representación de las relaciones entre la acción y la situación.

De acuerdo con esta perspectiva, estudiar el proceso de apropiación del SDN por parte de los niños incluye tener presente las diferentes situaciones a las que se enfrenta en el proceso de aprendizaje relacionadas con el SDN y el conjunto de conceptos-en-acto y teorema-en-acto (los invariantes operatorios que va construyendo) que se pueden inferir como invariantes en el actuar cuando produce y usa representaciones del SDN en variedad

⁵⁷ Por ahora, se toma este término “sentido” como una forma de significado asignado por el sujeto; más adelante se precisará cómo se asume este término en el este modelo.

⁵⁸ El concepto de situación asumido por Vergnaud no es exactamente el concepto de situación didáctica de Guy Brousseau (1986). Dice Vergnaud “*Nosotros no tomamos aquí el concepto de ‘situación’ con toda esta significación [la de situación didáctica] nos limitaremos al sentido que le da habitualmente el psicólogo: los procesos cognitivos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones a las cuales son confrontados*” (p. 143). Se trata del conjunto de situaciones escolares o no (a las que están asociadas unas prácticas sociales) en las que se construye el concepto, estas son las que precisamente se encargan de darle sentido a ese concepto (mejor aún, a ese sistema de conceptos) para el sujeto que las vive (o los sujetos que las viven).

⁵⁹ No por ello se ha de entender que el sentido está en las situaciones. Es el sujeto quien en relación con la situación da sentido. “*A través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver es como un concepto adquiere sentido para el niño*” (Vergnaud, p. 133); y un poco más adelante afirma explícitamente: “*Son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido no está en las situaciones mismas*” (p. 147).

de prácticas. Se trata de situaciones que incluyen prácticas sociales, que no se reducen a la simple ejercitación de representaciones del SDN.

En el modelo que se adopta en este estudio se acepta la diferencia entre significado personal e institucional que establece el Enfoque Ontológico y Semiótico (EOS) (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2003; Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006; Godino, Batanero, Font, 2007), al primero corresponde el sistema de prácticas personales y al segundo el sistema de prácticas institucionales,⁶⁰ en tanto que, por una parte, posibilita estudiar la actividad mental individual en su dialéctica con ese otro polo, lo institucional. Godino y Batanero (1994) así lo expresan refiriéndose a lo que ellos consideran una omisión del enfoque antropológico en la didáctica de la matemática, “... *un énfasis excesivo en lo institucional puede ocultar la esfera de lo mental, de los procesos de cognición humana, que quedan diluidos en la teorización de Chevallard, de los que en un enfoque sistémico de la Didáctica no se puede prescindir*” (p. 6); y, por otra parte, esta diferenciación (significado personal y significado institucional), abre la posibilidad de describir el proceso de transformación progresiva del significado personal que se espera como consecuencia de un proceso de aprendizaje (al menos si se tiene la pretensión de que sea comprensivo) como una dinámica de integración, cada vez mayor, entre el significado institucional construido por una comunidad de práctica y el significado personal.⁶¹

En este modelo se diferenciará entre significado y sistema de prácticas. Se admitirá como significado aquello que **orienta** las prácticas; se dirá, entonces, que el significado personal orienta el sistema de prácticas personales (lingüísticas o no) y que el significado institucional el sistema de prácticas institucionales (lingüísticas o no).⁶² Por lo tanto los

⁶⁰ Para estos autores sistema de práctica es toda actuación o manifestación (lingüística o no) significativa realizada para resolver problemas, comunicar, validar y generalizar soluciones. La institución supone la realización de prácticas compartidas por las personas que la constituyen.

⁶¹ En el proceso de enseñanza-aprendizaje escolar el significado institucional corresponde a las construcciones que se van logrando en una comunidad de aprendizaje. Si bien estas construcciones se dan como resultado de la dinámica de interacción y comunicación entre sus miembros y puede encontrarse materializado en productos externos (representaciones semióticas) sus significados pertenecen a los sujetos individuales. Con el proceso de enseñanza aprendizaje se espera que los miembros de la comunidad de aprendizaje vayan integrando a sus significados personales los significados institucionales que se van construyendo, proceso que supone una dinámica de modificaciones tanto de los significados personales como de los institucionales (de esa comunidad de aprendizaje).

⁶² Godino y Batanero (1994) desde una perspectiva pragmática del significado aceptan como significado al sistema de prácticas (actuaciones y expresiones, lingüísticas o no) significativas para resolver un campo de problemas. Estos autores apoyan sus afirmaciones en Wittgenstein. “*Para una gran clase de casos de utilización de la palabra significado —aunque no para todos los casos de su*

significados personal e institucional se infieren del estudio del sistema de prácticas respectivas, del estudio sistemático de prácticas personales e institucionales para identificar lo que permanece como invariante. En ese sentido el significado podría entenderse como esas hipótesis que hace el estudioso sobre lo que supone **orienta** al individuo o a un grupo de individuos en sus prácticas y que permite explicar la sistematicidad de sus acciones. Así, asumir el significado como producto de la actividad semiótica y conceptual no es contraria a una posición pragmática del significado, en tanto, que en uno y otro caso se admite que se accede a este mediante el estudio de las prácticas, pero sí permite tener presente que el sujeto es quien asigna significado.

El interpretante inmediato y el interpretante mediato actualizados por el sujeto en una actividad semiótica desplegada a partir del proceso de interpretación de un representamen que él realiza, gracias a los esquemas que este representamen evoca en él, en un contexto y momento determinados, constituyen el **sentido** que el sujeto asigna a ese representamen. Ambos interpretantes pueden cambiar a lo largo de un proceso de semiosis (y es deseable que así sea, especialmente en una situación de aprendizaje) bien porque la actividad semiótica permite evocar otros esquemas que a su vez permiten actualizar otros interpretantes o porque posibilita coordinaciones e integraciones nuevas que dan lugar a nuevos esquemas. Eso que permanece invariable en los diferentes sentidos que un individuo asigna al mismo interpretante en diferentes situaciones y contextos (sus sistemas de prácticas personales, en las que produce y hace uso de ese interpretante) es lo que constituye el **significado personal**. Así el sentido es variable, depende de las múltiples relaciones entre el estado del sujeto, de la situación y del contexto y de las formas semióticas, mientras que el significado personal, por su propia definición, es más constante. En la distinción entre sentido y significado en lingüística algunos autores incluyen en el sentido de las palabras componentes subjetivos del individuo mientras otros lo limitan a aspectos contextuales del enunciado.⁶³ Silvestri y Blanck (1993) asumiendo las elaboraciones de Vygotsky y Bajtin, dicen que toda palabra tiene un significado formado a lo largo de la historia, que potencialmente se conserva en todo los

utilización— puede explicarse esta palabra así: el significado de esta palabra es su uso en el lenguaje” (Wittgenstein, 1958/1999. p.23, párrafo 43) y “En la práctica del uso del lenguaje, una parte grita las palabras, la otra actúa de acuerdo con ellas” (p.10, párrafo 7).

⁶³ Bajtin ve el sentido como patrimonio del enunciado, razón por la que sólo se refiere al sentido contextual. . “*lo que yo sé, veo, quiero, y amo, no puede ser sobreentendido. Sólo lo que todos los hablantes sabemos, vemos, amamos, admitimos, aquello en lo que todos estamos de acuerdo, puede volverse parte sobre entendida del enunciado” (Bajtin, 1980, citado por Silvestri y Blanck, p. 50).*

hablantes de la lengua y que además tiene un sentido, que consiste en la elección de aquellos aspectos y relaciones ligados a las situaciones dadas. En *Vygotsky* (1934/1964) se encuentran referencias tanto a un sentido contextual como a un sentido subjetivo.

Una palabra adquiere un sentido del contexto que la contiene, cambia su sentido en diferentes contextos. El significado se mantiene estable a través de los cambios de sentido. El significado ‘de diccionario’ de una palabra no es más que una potencialidad que encuentra su realización en el lenguaje.⁶⁴ (pp. 188-189).

Y con relación al sentido subjetivo Vygotsky apoyándose en Paulman, señala “*El sentido de la palabra es para él la suma de todos los sucesos psicológicos que la palabra provoca en nuestra conciencia*”. (p. 188), de manera que en el significado que un sujeto asigna a un representamen también se dan relaciones fruto de la historia personal de los individuos, que incluyen sus vivencias afectivas.

De forma semejante a la diferenciación entre sentido y significado personal, se diferenciará entre significado personal y significado institucional. El significado personal es variable, depende del sujeto y, como toda actividad semiótica, guarda dependencia con la situación y el contexto, aunque más estable que en el caso del sentido. El significado institucional tiene mayor estabilidad. Esta mayor estabilidad es dada en la medida en que es construcción en la interacción de una comunidad de prácticas específica que no va a cambiar hasta tanto que los cambios individuales sean capaces de producir cambios en el conjunto, y, en tanto, que se infiere de las invariantes en los sistemas de prácticas institucionales. No depende de la subjetividad individual sino de la intersubjetividad de los miembros de la institución, y, también, presenta una relativa mayor independencia de las situaciones y de los contextos.

¿En este modelo qué se va a aceptar como objeto (del signo)? Lo que se construye y a lo que se reconoce como referencia en una cadena de semiosis. Al interpretante inmediato corresponde el objeto inmediato y al interpretante mediato corresponde el objeto mediato. A diferencia de Peirce, en este modelo el objeto no necesariamente es una representación, puede ser un objeto externo (una cosa, un acontecimiento, una acción, una cualidad), ese objeto, al que si se dan la condiciones, se puede mostrar ostensivamente, mediante enunciados como “esto es...”, pero en ausencia de esta posibilidad puede ser una representación: la que se reconoce a la que se hace referencia. El objeto inmediato y el

⁶⁴ El subrayado es mío.

objeto mediato en una semiosis de un individuo es personal y externo (aunque no por ello necesariamente material; como se ha dicho, puede ser una representación), y se da independientemente de que el individuo sea consciente o no, o de tener intención de hacer referencia a un objeto determinado. En la página siguiente se presenta gráficamente el modelo que se ha venido desarrollando.

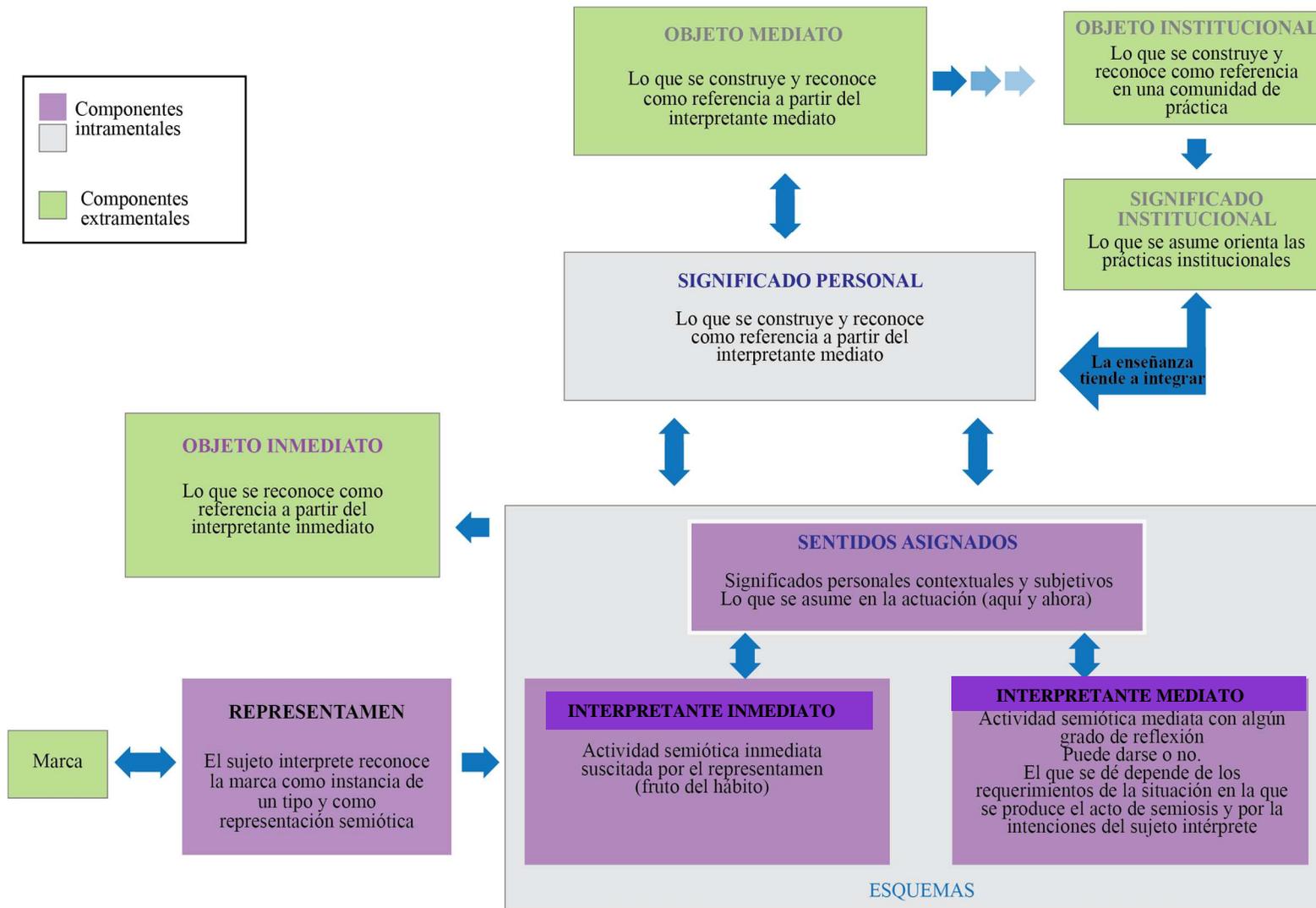


Figura 14. Modelo del signo numérico

4.2 ANALISIS DE LA TAREA DE CONVERSIÓN ENTRE REPRESENTACIONES DEL SDN Y ASIGNACIÓN DE SIGNIFICADO

Con base en los análisis hechos en las sesiones anteriores y, en particular, con base en el modelo de signo numérico recién presentado, se intenta ahora hacer un análisis de las demandas cognitivas formales que supone para el niño la operación de conversión entre representaciones numéricas de un registro a otro del SDN.

Antes de realizar este análisis se explica en qué sentido se va a entender la expresión demandas cognitivas. Con este término se hace referencia a aquellos componentes cognitivos que tienen que estar presentes en los esquemas del sujeto para que resuelva la tarea o la situación adecuada y comprensivamente. Estas demandas cognitivas son de complejidad diferente dependiendo del significado que el sujeto asigne a la situación particular. Es decir la demanda cognitiva no se determina exclusivamente por un análisis lógico, es necesario también tener presente el significado que el sujeto da a la tarea. Por ejemplo, lo que suelen hacer los niños pequeños que todavía no tienen un esquema multiplicativo y resuelven por medios aditivos tareas que desde la mirada adulta son típicas de la multiplicación; al no tener el esquema multiplicativo que le demanda el problema aritmético típico, el niño simplifica esta demanda cognitiva volviéndolo un problema aditivo. Es importante aclarar que la demanda cognitiva de este problema multiplicativo transformado en uno aditivo no es la misma de los problemas típicos de adición que venía resolviendo, ya que en estos nuevos problemas tiene que controlar el números de veces en que ha sumado un número, hecho que no estaba presente en los problemas típicos aditivos. En el caso particular de este estudio al analizar las demandas cognitivas que hacen las conversiones de representaciones de un registro al otro del SDN hace demandas cognitivas de diferente complejidad según los significados que los niños asignen a la conversión que va a realizar, desde la perspectiva de este estudio, un nivel será si lo hace desde significados aditivos, multiplicativos o posicional.

Finalmente otra aclaración, siempre (al menos como posibilidad), la demanda cognitiva de una tarea o un conjunto de tareas susceptible de ser consideradas semejantes por algún criterio, puede simplificarse por la vía de un procedimiento que el sujeto aprende. En estos casos al sujeto le basta seguir estrictamente el procedimiento para obtener resultados correctos. De manera que por esta vía puede suceder que un sujeto logre resolver correctamente una tarea sin contar aún con los suficientes componentes

cognitivos en sus esquemas, precisamente ese nivel insuficiente de construcción de los esquemas cognitivos implicados, compromete la comprensión de las situaciones y de los procedimientos que utiliza; en otras palabras, produce un saber hacer sin suficiente comprensión. Esto se refleja en la poca generalización y flexibilidad del hacer; el sujeto adquiere saberes muy locales, muy anclados a las situaciones en las que fueron aprendidos, basta un poco de novedad de las situaciones con relación a utilizadas en el aprendizaje del procedimiento para que el sujeto no encuentre la forma de aplicarlo. En el caso particular de este estudio, es posible —de hecho esto es lo que tradicionalmente se hace— que el niño aprende procedimientos para hacer conversiones que aplica con relativo éxito, pero que muestran sus vacíos. El niño ha aprendido hacer conversiones canónicas de representaciones completas del registro verbal al registro indo-arábigo, por ejemplo, aprende a convertir expresiones como trescientos cuarenta y dos en 342 y no en 30042, como lo hubiera preferido, siguiendo un procedimiento más o menos como sigue: a) se identifica la expresión que antecede a ‘cientos’, b) esta marca se transforma por la marca ‘3’ del registro indo-arábigo, acción que él domina c) se hace caso omiso de la expresión cientos (se le dan razones como “los ceros no se escriben”) y luego se hace la conversión de la siguiente expresión ‘cuarenta y dos’ que él ya conoce. Con un adecuado entrenamiento el niño tiene éxito, pero, como se ha dicho —y los profesores saben que en estos casos no hay mayores problemas— la dificultad está en las conversiones de expresiones verbales numéricas que son incompletas. Nuevamente aquí se puede intentar que los niños aprendan un procedimiento para hacer tales conversiones, por ejemplo, la regla de sobreescritura o la típica tabla de centenas, decenas y unidades u otro. Pero estos procedimientos son insuficientes para comprender el principio de posicionalidad que está en el fondo de las conversiones de los dos registros del SDN.

NOTA: Sobre simbolización de conversiones entre representaciones de los dos registros del SDN. Con el propósito de abreviar la escritura y precisar en cada caso el tipo de conversión que se hace se introduce el siguiente simbolismo para representar las conversiones entre representaciones de un registro al otro del SDN (el verbal e indo-arábigo).

Con R_v y R_i -a se representará el registro verbal y el registro indo-arábigo respectivamente. $R_v \Rightarrow R_i$ -a representa la operación de conversión de una representación en el registro verbal a una del registro indo-arábigo y R_i -a $\Rightarrow R_v$ representa la operación en sentido contrario. En caso de ser necesario especificar el intervalo numérico al que

pertenece el número al que hace referencia la representación de partida, a las expresiones ‘Rv => Ri-a’ y ‘Ri-a => Rv’ se agrega el intervalo numérico; ejemplo, Rv => Ri-a en [1, 9999] representa las conversiones consistentes en convertir una representación en el registro verbal que representa un número mayor o igual que 1 y menor o igual que 9999 a una representación en el registro indo-arábigo. Cuando se desee hacer referencia a conversiones de un conjunto de representaciones particular del registro de partida se escribirá expresiones como

Rv => Ri-a [x] siendo x expresiones completas del registro verbal

Ri-a => Rv [x] siendo x una expresión que representa un número en el intervalo [1, 999] y de la forma a0b.

Cuando sea necesario referirse a la conversión de una representación particular a otra, se escribirá simplemente la representación de partida seguida de una flecha hacia la representación de llegada; ejemplo, doscientos treinta y uno => 231, representa la conversión de la representación doscientos treinta y uno en Rv a 231 en Ri-a.

4.2.1 Conversión de representaciones numéricas verbales a representaciones en el registro indo-arábigo (Rv => Ri-a)

Una primera afirmación que podría hacerse al intentar analizar las demandas cognitivas que hace a un niño la tarea de convertir representaciones del registro verbal al indo-arábigo es: esta tarea exige del niño interpretar la representación verbal como un todo. Esta afirmación posiblemente moleste al autor por su obviedad, pero tiene un beneficio explicitarla, ya que precisamente por obvia, muchas veces se pasa por alto y se considera el proceso de conversión como si se tratara solo de “traducción” (o transcripción) de segmentos de la representación de partida a la representación de llegada.⁶⁵ En otras palabras, se está afirmando que la operación de conversión, al menos en este caso del SDN y en el sentido del registro verbal a indo-arábigo, exige la interpretación de la totalidad de la representación de partida antes de descomponerla en partes, cualquiera que sea esta interpretación; en caso contrario, el niño puede llegar a

⁶⁵ No se está afirmando que en el proceso de conversión un niño, en algún momento de la apropiación del SDN que con seguridad será en los momentos iniciales, procede descomponiendo la representación de origen en unidades significativas para él, que de forma sucesiva va convirtiendo al otro registro. En particular este procedimiento podría llegar a funcionar con la conversión de representaciones verbales compuestas y completas.

producir la representación de llegada correctamente pero a la que asignará un significado empobrecido, precisamente porque las posibilidades de darle significado a las representaciones en el registro indo-arábigo descansa en el registro verbal, como se busca demostrar en este trabajo.

Para interpretar la representación verbal en lo que esta representación posibilita según su sintaxis, se puede pensar —de acuerdo con el análisis que se ha hecho en este trabajo— que el niño cuenta con dos posibilidades: hacer la interpretación desde una sintaxis aditivo-multiplicativa o desde una sintaxis aditiva (ver sección 1.1 Especialmente literales d y e).⁶⁶ En lo que sigue se hace el análisis considerando las dos opciones por separado

Para una interpretación de tipo aditivo-multiplicativo. En este caso para un representamen como “trescientos cuarenta y dos” el niño tendría que proponerse el interpretante “tres cientos cuarenta y dos” (figura 15)

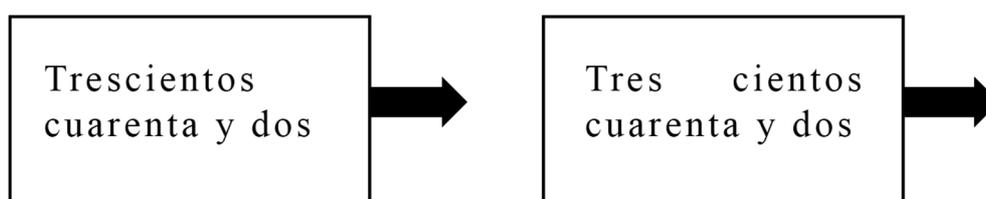


Figura 15. Interpretación de tipo aditivo-multiplicativo

Proponerse este interpretante le da la posibilidad de identificar el operador multiplicador tres y la expresión cientos (que debe reconocer como haciendo referencia a

⁶⁶ El que utilice una u otra, como se ha dicho, depende tanto de los esquemas que el niño posee como de factores contextuales y situacionales en los que se da la tarea. Un niño podrá interpretar la representación verbal numérica (que escucha o lee) de forma aditivo-multiplicativa si en sus esquemas (mentales) posee elementos para interpretar expresiones verbales que son operadores multiplicadores, de lo contrario no. En el caso que nos ocupa, lo podrá hacer si identifica e interpreta el segmento de la expresión verbal que hace las veces de operador multiplicador como eso que es (como un operador que actúa sobre el segmento siguiente, repitiéndolo un número de veces). Si tiene este esquema elemental multiplicativo y tiene en sus esquemas mentales elementos para entender la composición de partes podrá entonces interpretar la representación de forma aditivo-multiplicativa. Si sus esquemas le permiten hacer composiciones de partes homogéneas en un todo estará en condiciones de interpretar de forma aditiva representaciones aditivas numéricas, si no es así en el mejor de los casos, no podrá ir más allá de entender la representación verbal como una totalidad indiferenciada, a la manera como los niños inicialmente interpretan “doce”, por ejemplo. Si bien lo anterior explica el carácter necesario de los esquemas, también, es importante tener presente su contrapartida, no son suficientes; en la actualización de un esquema juegan los factores contextuales y situacionales (incluido aquí factores propios del sujeto intérprete), de manera que bien puede suceder que un niño posee los esquemas para asignar significados más complejos, pero que el observador no puede identificar en los sentidos asignados por el niño en momentos específicos.

cien), para interpretar el segmento trescientos multiplicativamente⁶⁷ (tres de cien, tres veces cien o cien, cien, cien y cien, etc.). figura 16

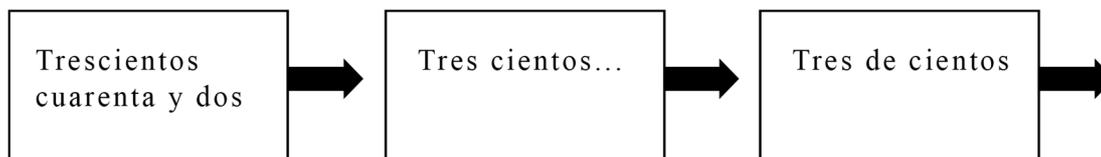


Figura 16. Identificación del operador multiplicador

Una vez que el niño se propone el interpretante tres de cien y si conoce y puede aplicar la regla de que para obtener la representación en el registro indo-arábigo solo hay que escribir el operador multiplicador podrá determinar que la representación empieza con 3 (la primera cifra del numeral es 3). ¿Qué sigue con el segmento restante?, ¿qué se toma ahora?, el segmento ‘cuarenta y cinco’ o el segmento ‘cuarenta’. Si tomara la segunda opción, es de esperar que después de ‘3’ escriba 40 (completando 340) y después pasaría al otro segmento ‘cinco’ para terminar escribiendo 3405. Si tomara la primera opción es de esperarse que escriba 345. No se analiza la interpretación de ‘cuarenta y cinco’ como 4 de 10 y 5 porque, como se ha dicho, en este caso resulta más oculta la idea de 4 de 10 y, además, para cuando los niños abordan el aprendizaje de los números mayores que 100 ya cuentan con un entrenamiento más o menos largo con la numeración en el intervalo [1, 99] lo que les permite producir ‘45’ con facilidad. Obsérvese que en este caso el niño no necesita saber —o si lo sabe, puede pasarlo por alto— que cada lugar de la representación indo-arábigo corresponde a un unidad potencia de diez (100, 10 y 1). El niño puede lograr producir la representación correcta simplemente con tomar el segmento primero (en caso de ser la marca oral, sería el sonido que identifica y escucha en primer lugar, en caso de ser escrita la palabra de la izquierda, en el caso de nuestra lengua) y después ir tomando sucesivamente los otros segmentos y respetando el orden de escritura de izquierda a derecha.

El proceso recién descrito puede llevar al niño a producir la representación indo-arábigo correcta, pero, ¿qué hace que la nueva marca obtenida sea representación de algo distinto a la marca de la representación de partida ‘trescientos cuarenta y cinco’? Solo, como se dijo al comienzo, si la representación verbal se puede interpretar como un todo. Todo compuesto de dos partes trescientos y cuarenta y cinco o de tres trescientos, cuarenta

⁶⁷ Por ahora no se toma en cuenta el otro segmento “cuarenta y dos”.

y cinco. Aquí se hace evidente la necesidad de que el niño tenga en sus esquemas algo que le permita componer como totalidad lo que el registro verbal le presenta en partes. Para el niño ese todo puede ser simplemente un lugar difuso en una sucesión ordenada de representaciones verbales. Es claro, como se dijo en la sección 1.1, que esta ubicación se hace más precisa si se está en condiciones de coordinar tres sucesiones ordenadas: la de los cientos (10, 200, 300, ..., 900), la de los dieces (10, 20, 30, ..., 90) y la de los unos (1, 2, 3, ..., 9).

Para una interpretación de tipo aditivo. En este caso para un representamen como trescientos cuarenta y dos el niño debe ser capaz de identificar o tres segmentos que componen la expresión (“trescientos”, “cuarenta” y “cinco”) o dos (“trescientos”, “cuarenta y cinco”). En el primer caso, podría proponerse como interpretantes 300, 40 y 5 para cada uno de estos segmentos, que podría concatenar tratando de imitar lo modelos de representaciones indo-arábicas por él conocidas y escribir 300405 y en el segundo 30045. Debido a que el niño que solo puede hacer este tipo de interpretación no tiene la posibilidad de identificar segmentos que correspondan a operadores multiplicadores y menos las de unidades compuestas (de 10 y de 100) parece razonable pensar que tiene que recurrir a otras reglas diferentes, como las de sobreescritura,⁶⁸ por ejemplo.

4.2.2 Conversión de representaciones numéricas indo-arábicas a representaciones verbales (Ri-a => Rv)

¿Qué es lo que posibilita al niño decir ‘trescientos cuarenta y cinco’ cuando se le presenta la marca ‘345’? Primero que todo el niño tiene que contar con una información básica: en el sistema en el que se produce esta representación las cifras que la componen representan los operadores multiplicadores y que estos operadores se aplican sobre unidades compuestas; las unidades de mayor valor se escriben a la izquierda (en nuestro caso), a la derecha, la del siguiente menor valor y así sucesivamente, siempre a la derecha la del siguiente menor valor. Pero aún le falta completar la información, ¿cuáles son los valores de esta sucesión de unidades compuestas? Al menos tendrá que saber que esa sucesión de unidades es 1, 10, 100, 1000, 10000, etc. Pero él tiene que reordenarla empezando con la mayor. ¿Cómo define por dónde empezar? Para ello tendrá que contar con algún recurso que ponga en relación la representación ‘345’ y la sucesión de valores

⁶⁸ Con frecuencia los niños dicen que “trescientos cuarenta y cinco”, se escribe 345 y no 30045 “porque no se escriben los ceros de 300”.

de unidades compuestas, bien porque identifica que la representación tiene 3 cifras y entonces busca el tercer valor de unidad y a partir de ahí reconstruye la sucesión en orden de mayor a menor (la primera cifra indica la cantidad de unidades de 100, la segunda...). Esta descripción muestra, que el proceso es más complejo que el de conversiones en sentido contrario, porque de partida exige del niño contar en entre sus esquemas con la posibilidad de comprender:

- que esas cifras representan operadores multiplicadores
- la idea de unidades compuestas
- de determinar los valores de esas unidades compuestas

Como en el caso anterior el niño tiene caminos que le permiten evadir esa exigencia que hace la interpretación de la representación. Por ejemplo podrá aprender que las representaciones en el registro indo-arábigo que se escriben con tres cifras empiezan con unidades de “cientos” y que basta entonces agregar a la palabras que corresponde al “nombre de la cifra” la palabra “cientos”.⁶⁹ Pero estos caminos que con un buen entrenamiento permiten lograr producciones correctas no posibilitan construir significados adecuados.

⁶⁹ Esto lo puede hacer el niño teniendo o no conciencia del operador multiplicador que está representado por esa cifra.

5 PROBLEMA, PREGUNTAS Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Como ya se ha dicho, esta investigación pretende estudiar el vínculo entre la operación de conversión de representaciones semióticas de un registro a otro del SDN y la construcción de significado de estas representaciones por parte de los niños.

En el capítulo primero se indicó que el estado actual de la investigación sobre las producciones de los niños cuando escriben numerales en el registro indo-arábigo, muestra un relativo acuerdo en la descripción de las escrituras no canónicas, pero que el panorama es distinto cuando se trata de ofrecer explicaciones sobre por qué los niños las producen. Al aplicar el concepto de congruencia elaborado por Duval, al caso de la conversión de representaciones de uno de los dos registros del SDN al otro, se establece que todas las representaciones del registro verbal, llamadas en la sección 3.2 “compuestas e incompletas” no son congruentes con sus correspondientes representaciones en el registro indo-arábigo, de manera que las producciones de los niños en las tareas de escribir en el registro indo-arábigo los numerales verbales que se les dictan, no pueden explicarse mediante un proceso de transcodificación, este mecanismo podría ser válido cuando más en el caso de que la expresión dictada fuera una representación verbal “compuesta y completa”.

En cuanto a la construcción de significado de las representaciones del SDN, el otro componente de la investigación, en el análisis que se realizó en la sección 1.1 sobre las demandas cognitivas que hace al niño la apropiación comprensiva del SDN, se afirmó que las representaciones numéricas hacen exigencias cognitivas distintas cuanto les asigna significado según sea el registro de la representación. Esto sucede, precisamente, por diferencias en la complejidad de la sintaxis de estos dos registros. Las representaciones del registro indo-arábigo por sustentarse en una sintaxis polinomial, involucra la operación de composición de encajamientos (componer correspondencias múltiples: un grupo de 10 grupos de 10 elementos equivale a un grupo de 100), la aplicación operadores multiplicativos (por ejemplo 3 grupos de 10^2) y la composición aditiva ($3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 2 \times 10^0$ en el caso de 342).⁷⁰ Las representaciones del registro

⁷⁰ Esto no quiere decir que el niño no logre algunos aprendizajes más o menos simples, parciales y más o menos memorísticos, de las representaciones numéricas indo-arábigas sin soportarse en estas operaciones cognitivas.

verbal, por tener una sintaxis aditivo-multiplicativa, exige del niño ser capaz de aplicar operadores multiplicativos y de componer aditivamente partes. Pero el registro verbal ofrece la oportunidad de una interpretación más elemental, en la que las unidades de diferentes órdenes decimales se homogenizan, reduciéndolas a unidades de uno, esto se hace posible debido a la relación lógica existente entre lo multiplicativo y lo aditivo (la multiplicación de números naturales puede ser pensada como adiciones sucesivas); precisamente es esto lo que hacen muchos niños que se inician en el SDN, limitan el significado del registro verbal a lo estrictamente aditivo (la representación “tres cientos cuarenta y cinco” no la entienden como 3 de 100 y 4 de 10 y 5 de 1, sino, como $300 + 40 + 5$). Así las representaciones del registro verbal han de ser más elementales para el niño que las del indo-arábigo. Y dentro de las representaciones del registro verbal aquellas interpretaciones que homogenizan unidades, simplificando la sintaxis aditivo-multiplicativa del registro verbal a una meramente aditiva, han de resultar más fáciles para el niño que las que trabajan con diferentes tipos de unidades como lo exige propiamente la sintaxis aditivo-multiplicativa del registro verbal.

Puede suponerse entonces que un niño que está empezando a apropiarse del SDN cuando tiene que convertir una representación del registro verbal a una del indo-arábigo, intente trasladar la interpretación que hace de la primera representación a la representación del segundo, produciendo escrituras no canónicas como a00b0c o a00bc⁷¹ cuando se le dictan numerales de la forma abc (ejemplo, 300405 o 30045 para 345) y solo después, fruto del entrenamiento, empieza a producir por una especie de adaptación, las escrituras canónicas.⁷² En el intermedio, antes de llegar a volverse eficiente para producir correctamente representaciones indo-arábigas, presentará la variedad de escrituras. Los niños crean otras escrituras no canónicas en su intento de combinar algunas claves que van captando de lo que se le explica y de imitaciones que él hace de algunas representaciones particulares que le sirven de muestra. Aunque esta suposición puede parecer factible, en los estudios sobre este tema se proponen otras explicaciones que sus autores juzgan razonables. Ya se dijo que Orozco, Guerrero y Otálora (2007) dicen que a pesar que desde el punto de vista de un análisis formal del SDN se requiere utilizar las

⁷¹ Ya se dijo que los niños suelen escribir por ejemplo 30056 y no 300506, porque cuando se enseña los numerales en el rango [100,999], ya han aprendido las escrituras canónicas indo-arábigas en el rango [1,99].

⁷² Bien podría suceder que mediante un proceso didáctico adecuado el niño pudiera realizar esta operación de conversión de una forma más comprensiva.

operaciones de composición y descomposición de tipo aditivo y multiplicativo, en sus estudios encuentran que los niños no rigen sus escrituras por estas operaciones, para estos autores codifican las expresiones verbales numéricas en relación con sus experiencias. Este estudio busca acopiar datos que permitan describir y explicar las ideas que orientan a los niños cuando hacen conversiones de representaciones del SDN del registro verbal al indo-arábigo.

Pero el propósito de este trabajo no es únicamente el de mostrar que la operación de conversión entre representaciones verbales a las indo-arábigas del SDN no puede reducirse a la de transcodificación, ni el de explicar, únicamente, por qué los niños producen las representaciones no canónicas que producen cuando realizan las conversiones que se les piden; sino además, y esto es lo que se considera más importante —como ya se ha dicho— es estudiar el vínculo entre la operación de conversión de representaciones semióticas de un registro a otro del SDN y la construcción de significado de estas representaciones por parte de los niños. De acuerdo con el modelo del signo numérico desarrollado en el capítulo cuatro que se asume en este trabajo, la posibilidad de asignar significado por parte de los sujetos se soporta en los invariantes operatorios (conceptos-en-acto y teorema-en-acto) que constituyen el esquema que actualice. Si el niño se apoya en las representaciones del registro verbal para dar significado a las representaciones del registro indo-arábigo es de esperarse, en primera instancia, que las interpretaciones de las representaciones numéricas en los dos registros se soporten en dos invariantes operatorios básicos: la de aplicar operadores multiplicadores (dos cientos, tres mil, etc.) y composiciones aditivas. Pero como la aplicación de operadores multiplicadores supone una “unidad” a la cual se aplica el operador, habría que incluir otro invariante operatorio básico del esquema desde el cual el niño asigna significado, este ha de ser un esquema que posibilite el manejo de diferentes tipos de unidades (unidades simples y unidades compuestas), no es únicamente el de poder identificar y diferenciar tipos de unidades, sino el poder coordinarlas para poder operar con ellas juntas (las unidades de diez y las de uno, si se trata de representaciones de números en el intervalo $[1, 99]$ y las unidades de cien, de diez y de uno en el intervalo $[1, 999]$, etc.). De manera que en este estudio poner en relación la operación de conversión entre representaciones numéricas del SDN y la asignación de significado de estas representaciones, requiere dar cuenta al menos de estos tres invariantes operatorios

vinculados con las producciones no canónicas que los hacen cuando convierte representaciones verbales a representaciones indo-arábicas.

El reto para la investigación estaría en identificar, en las producciones de los niños, qué es lo que se presenta como consecuencia de los invariantes operatorios que ellos van construyendo a medida que se apropian del número y distinguirlo de aquello que aparece como consecuencia de condiciones particulares de aprendizaje, que generalmente, como se ha dicho se reducen a lograr aprendizajes estereotipados.⁷³ Esto no es posible si sólo se examinan las producciones de los niños; parece necesario estudiar estas producciones en los mismos procesos de su construcción; esto es, conviene acompañar a los niños en segmentos más o menos prolongados de su proceso de aprendizaje del número, para observar y estudiar los cambios en sus producciones. Esfuerzos de este tipo quizá ofrezcan mejores posibilidades para entender los mecanismos cognitivos implicados en la comprensión del SDN. Este estudio es un esfuerzo en esta dirección, pretende examinar las producciones de un grupo de niños, en un intervalo de tiempo específico (año y medio) que siguen un proceso de enseñanza escolar para la apropiación del SDN también particular.

5.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Cuáles son los mecanismos y los cambios que se producen en la operación de conversión de representaciones numéricas en el registro verbal a representaciones del registro indo-arábigo del SDN, a lo largo de su apropiación por parte de los niños, y cómo son las relaciones entre esta operación de conversión y la asignación de significado?

5.2 PREGUNTAS

¿El proceso realizado por los niños que se inician en la apropiación del SDN, cuando hacen conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a se rige por la sintaxis del registro verbal?

¿Cómo es el proceso que siguen niños de primero y segundo que se inician en la apropiación del SDN al intentar realizar conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a [1, 9999], cuando experimentan un proceso de enseñanza aprendizaje que los apoya en la construcción de

⁷³ Debido a que la práctica de enseñanza del SDN no brinda suficientes posibilidades a los niños para establecer y comprender las relaciones entre los dos registros, no sólo se deja en manos de ellos la responsabilidad de descubrirla por cuenta propia, sino que en los procesos de enseñanza no se invita a descubrirlas, ni se ofrecen las condiciones para que lo hagan; peor aún, se impone a los niños que asuman una actitud de simples imitadores.

esquemas mentales que les posibilite coordinar unidades compuestas y sucesiones numéricas distintas (de mil en mil, de cien en cien, de diez en diez y de uno en uno)?

¿Es posible identificar niveles de complejidad en los significados que los niños asignan a las representaciones verbales e indo-arábigas del SDN durante el proceso de apropiación que ellos hacen de este sistema? Y si es así, ¿estos niveles están relacionados con las capacidades que los niños van ganando al manejar los invariantes operatorios en los que se soporta las representaciones del registro verbal?

¿Cuáles son las relaciones que se producen entre la operación de conversión $R_v \Rightarrow R_i$ y la asignación de significado que los niños dan a estas representaciones a lo largo de un proceso de enseñanza aprendizaje del SDN?

5.3 OBJETIVOS

General

Mostrar las relaciones entre la operación de conversión de $R_v \Rightarrow R_i$ [1, 9999] y el proceso de asignación de significado que los niños dan a estas representaciones, describir sus mecanismos y los cambios que se producen.

Específicos

Describir el proceso que siguen niños de los cursos primero y segundo que se inician en la apropiación del sistema decimal de numeración, al intentar realizar conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ [1, 9999], cuando experimentan un proceso de enseñanza aprendizaje que los apoya en la construcción de esquemas mentales que les posibilite reconocer y coordinar unidades compuestas y coordinar sucesiones numéricas distintas (de mil en mil, de cien en cien, de diez en diez y de uno en uno).

Mostrar que el proceso de significación inicial que los niños dan a las representaciones del SDN se rige por la sintaxis aditivo-multiplicativa o aditiva de las representaciones en el registro verbal numérico.

6 METODOLOGÍA

La metodología del presente estudio es de carácter mixto. El componente cuantitativo es de tipo descriptivo y el componente cualitativo es de tipo descriptivo-interpretativo. El primer componente describe los tipos de escrituras no canónicas producidas por los niños. El segundo componente es un estudio longitudinal de caso múltiple, para esto el investigador desarrolla un proceso de enseñanza-aprendizaje del SDN y describe e interpreta los cambios progresivos que durante el periodo de observación presentan las producciones realizadas por los niños que se toman como “estudio de caso”, es decir en quienes se focaliza la observación.⁷⁴ Para el seguimiento de las producciones de los niños se realizan entrevistas semi-estructuradas, estas entrevistas consisten en proponer al niño una tarea y observar el proceso que sigue para resolverla; durante este proceso se registra lo que dice y hace (en este estudio se hacen registros en video que después se transcriben en su totalidad) y el entrevistador se permite modificar su guión inicial para adecuarse a lo que ocurre en el proceso de resolución que intenta el entrevistado.

6.1 DESCRIPCIÓN GLOBAL DEL PROCEDIMIENTO

A lo largo de año y medio se desarrolla una experiencia didáctica con un grupo de niños que inicia primero de primaria en febrero de 2010.⁷⁵ El grupo está conformado por 35 a 40 niños. La experiencia se desarrolla durante año y medio.⁷⁶ Se interviene en dos sesiones semanales de aproximadamente 80 minutos cada una. Las situaciones didácticas son diseñadas y desarrolladas directamente por el investigador y se centran en la intención

⁷⁴ Se aclara que el hecho de que se desarrolle una experiencia didáctica no tiene la pretensión de realizar un experimento didáctico con el fin de relacionar un método de enseñanza con los efectos en el aprendizaje del SDN. Simplemente se busca desarrollar un proceso de enseñanza aprendizaje del SDN y observar los cambios en las producciones de los niños cuando hacen conversiones de representaciones verbales a representaciones en el registro indo-arábigo. En la experiencia se evita ofrecer un entrenamiento para que el niño llega a dominar tal conversión, más bien se promueve en un comienzo el uso del registro verbal.

⁷⁵ En Colombia la educación elemental está organizada en dos niveles: preescolar (comprende tres grados, dirigida a niños entre 3 a 5 años de edad) y primaria dividida en cinco grados, dirigida a niños entre 6 a 10 años. Los niños inician el primer curso de primaria aproximadamente a los 6 años.

⁷⁶ Inicialmente se había pensado que la experiencia duraría a lo más el año escolar, pero debido a que en ese tiempo no se alcanzó a llevar a los niños a un nivel en el que se hubiera extendido el sistema de numérico hasta 9999, fue necesario continuar durante un semestre de segundo. Hay diferentes hechos que pueden explicar el ritmo que puede parecer excesivamente lento. La dinámica institucional, por razones distintas se interrumpe el trabajo académico, el número de estudiantes por grupo, las condiciones del espacio físico inciden en el ritmo con el que avanza el grupo. El tiempo efectivo de trabajo académico en la práctica se reduce por la ejecución de otras actividades (llamado a lista, recomendaciones del día, distribución y consumo de refrigerio. En las escuelas Colombianas el Estado provee complementos alimenticios a los niños).

de apoyar a los niños en la apropiación de SDN. Se seleccionarán seis niños de desempeños diferentes en matemática (bajo, medio y alto) quienes serán los casos de estudio.

A la totalidad de niños del curso en el que se desarrolla la experiencia se aplican pruebas en tres momentos (noviembre de 2010, febrero de 2011 y junio de 2011) consistentes en solicitar conversiones del registro verbal a indo-arábigo. A otro grupo, de la misma institución, que también cursa segundo en el 2011 se le aplican las mismas pruebas de febrero y junio.

6.2 PERIODO DE INTERVENCIÓN Y OBSERVACIÓN

Iniciación: febrero de 2010. Momento en que el grupo A inicia primero de primaria.⁷⁷

Finalización: Junio de 2011. Momento en que los grupos A y B finalizan la mitad del año académico de segundo de primaria.

6.3 POBLACIÓN

Grupo A: Es el grupo en el que el investigador desarrolla la experiencia didáctica.

Tabla 4

Grupo A. Grupo en el que se desarrolla la experiencia

GRUPO A		
Número de niños	Grado	Edad
30 a 40 niños	inician primero en febrero del 2010	6-7 años en primer grado 7-8 años en segundo grado

Grupo B: Es el otro grupo de la institución que también cursaba segundo en el 2011. En este grupo enseñaba matemática otra profesora, siguiendo el currículo y la orientación propia de la institución. A este grupo se aplicaron las mismas pruebas que se aplicaron al A en febrero y junio de 2011.⁷⁸

⁷⁷ En calendario escolar en Colombia inicia en la última semana de enero y finaliza en la tercera semana de noviembre. Hay un receso escolar de tres semanas que comprende aproximadamente las dos últimas semanas de junio y la primera de julio.

⁷⁸ No es un grupo control en tanto que el método de investigación no es experimental.

Tabla 5

Grupo B. Grupo paralelo

GRUPO B		
Número de niños	Grado	Edad
30 a 40	Segundo en 2011	7-8 años

El estudio se realiza en una escuela dirigida por una Organización no gubernamental (ONG) que contrata con la Secretaría de Educación Distrital de Bogotá la educación de los niños. La escuela está ubicada en un barrio cuya población pertenece a estratos socio-económicos menos favorecidos, en los que hay altos índices de desempleo y trabajo informal. Cuando las personas tienen algún empleo estable se desempeñan especialmente como obreros en los sectores de la construcción, comercio informal o de la manufactura, oficios que requieren poca formación técnica, tiene remuneraciones muy bajas, apenas iguales al mínimo. Es común que muchas mujeres trabajen en labores de servicio doméstico, por lo que no tienen contrato de trabajo. Los niveles de escolaridad de los adultos generalmente se reducen a una secundaria incompleta, y en algunos pocos casos hay analfabetismo. Satisfacen de manera básica sus necesidades de vivienda, alimentación y salud, en este último caso, recurren a los deficientes servicios que en este sector ofrece el Estado. Algunos niños presentan desnutrición y con mayor frecuencia hay malnutrición, en parte por factores económicos, pero también debido a factores de orden cultural. Los niños asisten a la escuela de 6:45 am a 12:30 m, en muchos casos permanecen en la tarde solos o al cuidado de un hermano mayor, abuela o vecina que hacen las veces de cuidador. Es frecuente que los adultos ofrezcan escasa o ninguna ayuda a los niños para cumplir los compromisos escolares, debido a sus ocupaciones, a sus pocos conocimientos y a la ausencia de recursos como libros de consulta y computador.

6.4 CRITERIOS DE SELECCIÓN DE LOS CASOS DE ESTUDIO

Los niños seleccionados como caso de estudio corresponden a tres niveles de desempeño escolar en matemática: bajo, medio y alto. El procedimiento de selección se hizo en dos momentos

- **Preselección.** Con base en la información del profesor titular del curso en el momento en que se empieza el desarrollo de la experiencia y cuando se hizo posible, se tuvo en cuenta la opinión del profesor del año anterior (último grado de preescolar) y la historia académica del niño.

- **Selección y clasificación:** A los niños preseleccionados se les aplica una prueba mediante entrevista individual que evalúa el conocimiento del conteo, lectura y escritura de numerales y aspectos del pensamiento numérico vinculados (problemas simples de composición y descomposición en el intervalo numérico [1,15]). También se tiene en cuenta la observación directa durante las dos primeras semanas del desarrollo de la propuesta didáctica (en febrero del 2010). Para su clasificación los dos niños de mejor desempeño se ubican como de nivel alto, los otros rendimientos un poco menores en nivel medio y los dos de más bajo rendimiento en nivel bajo.

La tabla 6 muestra la edad y el nivel inicial de los cuatro casos estudiados y reportados

Tabla 6
Edad y nivel inicial de los cuatro casos estudiados

Número de niños	Sujeto uno: "A"	Sujeto dos: "N"	Sujeto tres: "MF"	Sujeto cuatro: "M"
Edad en febrero de 2010	6 años y 1 mes	6 años 3 meses	6 años 2 meses	6 años 3 meses
Nivel inicial de desempeño en matemática	Bajo	Medio	Medio	Alto

6.5 RECOLECCION DE INFORMACION (Procedimientos e instrumentos)

6.5.1 Mediante pruebas

Para el estudio cuantitativo se aplicaron pruebas escritas cuya única tarea consiste en solicitar al niño conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a. Las representaciones en R_v se presentan oralmente. Las representaciones verbales varían según el intervalo numérico al que pertenece el número que ellas representan: [10, 99], [100, 999] y [1000, 9999] y según si la expresión de la representación verbal es completa (es decir que al ser convertidas a R_i -a correspondan a un numeral de la forma ab, abc, abcd⁷⁹) o incompleta (a0, a0b, ab0, a00d, a0c0, ab00, a0c0)

⁷⁹ Se acordará en representar la forma de un numeral en el registro indo-arábigo utilizando secuencias de letras: "ab" para numerales que representan números en el intervalo [19, 99], "abc" para [100,999] y "abcd" para [1000,9999]. Las letras a, b, c y d representan cualquier número del 1 al 9. Para representar un numeral que tenga una de sus cifras igual a cero, en el lugar de la cifra cero se remplazará la letra por cero. Por ejemplo, 2304 se representa como ab0d, 360 se representa como ab0.

Al grupo A se aplican tres pruebas, en tres momentos diferentes (noviembre 2010, momento de finalización del curso primero, febrero 2011 momento de inicio del curso segundo y junio 2011 en la mitad del curso segundo y finalización de la experiencia didáctica) y al grupo B la pruebas de febrero y junio de 2011. Según el momento de aplicación de las pruebas se dictan numerales que representan números en intervalos numéricos diferentes: Una parte de los numerales dictados pertenecen al intervalo (o intervalo) propio y la otra al impropio. Orozco, Guerrero y Otálora (2007) hablan del rango impropio para referirse al intervalo numérico inmediatamente superior en el que el niño ya ha recibido enseñanza escolar sistemática y en caso contrario al propio. En el caso de esta escuela para los niños de grado primero el intervalo propio es $[1,99]$ y el impropio $[100,999]$, en segundo grado el impropio es $[1000,9999]$ al menos en el primer semestre académico. En cada intervalo numérico se tiene el cuidado de presentar diferentes formas de numerales. La tabla 7 muestra los numerales que se dictan a los niños en cada prueba.

6.5.2 Mediante entrevistas (descripción de tareas)

Ya se ha dicho la observación se focaliza en algunos niños y que mediante entrevistas se hace seguimiento a sus producciones cuando realizan tareas de conversión entre representaciones del registro numérico y en otras tareas relacionadas con el SDN.

Son varias las funciones del entrevistador: la de animador, para ello motiva, mantiene la atención, invita a intentar soluciones y a no desfallecer ante los obstáculos que el niño pueda encontrar al procurar resolver la tarea; la de analista, para ello observa e interpreta las actuaciones (lo que dice y hace el niño) y de acuerdo a estas interpretaciones hace hipótesis sobre la forma como el niño está entendiendo y resolviendo la tarea. Sobre estas hipótesis formula preguntas y contrapreguntas que le permitan corroborarlas o rechazarlas. Dado que este estudio es longitudinal el investigador tiene la oportunidad de analizar la información recogida para diseñar nuevas tareas para la siguiente o siguientes entrevistas, con el fin de ampliar y completar la información necesaria para los propósitos de su estudio. Este tipo de entrevista puede identificarse con la entrevista clínico-piagetiana (Ponce, 1992) o con la entrevista estructurada basada en tareas de Goldin (2000).

Tabla 7
 Numerales dictados en cada una de las pruebas

Prueba aplicada	ab	a0	abc	ab0	a0c	abcd	abc0	a0cd	ab0d	a00d	a0c0
En Noviembre 2010 únicamente a grupo A			134		708						
En Febrero 2011 a los dos grupos	45	90	134	670	708						
En Febrero 2011 a los dos grupos	67		237	340	107	8975	8053	8009	8506	8320	8060
	81		456			4656	4043	4005	4304	4650	4050

Origen: Fuente propia

6.6 ANÁLISIS DE DATOS

Se realizan dos tipos de análisis que se corresponden con los dos componentes metodológicos de la investigación. El primer análisis, el del componente cuantitativo, mostrará tendencias de las producciones de los niños cuando realizan conversiones de representaciones del registro verbal al indo-arábigo, estas tendencias darán lugar a interpretaciones por parte del investigador, que pueden ser sometidas a prueba en el análisis del componente cualitativo. Precisamente este segundo análisis intenta encontrar en los casos de estudio los mecanismos de conversión que puedan explicarlas o, si es el caso, rechazarlas o ponerla en duda.

Para el análisis cuantitativo se toman los datos obtenidos a partir de las pruebas aplicadas a los dos grupos A y B, se clasifican y codifican las producciones de los niños (según se describirá en la sección siguiente) y se hace un análisis descriptivo de frecuencias, en el que se comparan las frecuencias de ocurrencia de cada uno de los tipos de producciones encontradas según tres variables independientes:

- Grupos (A y B),
- Momentos de aplicación de las pruebas:

Noviembre 2010 cuando los niños finalizan primero.

Febrero 2011 cuando empiezan segundo.

Junio 2011 en la mitad del año académico de segundo, momento en el que finaliza el desarrollo de la experiencia.

- el intervalo numérico. Son tres los intervalos trabajados: [1, 99], [1, 999] y [1, 9999].

Para el análisis cualitativo se transcriben las entrevistas realizadas y junto con la observación detallada y análisis exhaustivo de los registros fílmicos se describen las producciones de los niños en las tareas que les proponen, se identifican regularidades y los cambios que se producen en las formas de realizar las tareas de conversión.

El análisis cualitativo se va desarrollando mediante el análisis intersujetos en el que se comparan las producciones de un niño a otro y el otro intrasujeto en el que se busca captar los cambios producidos en un mismo sujeto en la forma de comprender y realizar las

tareas de conversión a lo largo del año y medio de observación. Se espera con estos análisis identificar indicios de la dinámica del proceso, describirla e identificar los mecanismos que permitan explicarla.

En las tres secciones siguientes se explican los criterios de clasificación y codificación de las producciones de los niños (sección 6.7), se describe la experiencia didáctica desarrollada en el grupo A (sección 6.8) y por último, se describen y analizan las tareas que se presentan en las entrevistas (sección 6.9)

6.7 CLASIFICACIÓN Y CODIFICACIÓN DE LAS PRODUCCIONES DE LOS NIÑOS CUANDO REALIZAN CONVERSIONES $R_v \Rightarrow R_i-a$

En este apartado se presenta una clasificación de posibles escrituras que se pueden producir cuando los niños realizan conversiones de $R_v \Rightarrow R_i-a$. Esta clasificación en parte es fruto del análisis formal de las posibles escrituras que podrían producirse y en parte también, fruto de la investigación previa, especialmente de los trabajos que en este campo se han hecho desde los estudios de transcodificación numérica que en este trabajo ya se han citado y de los estudios propios del autor en su trabajo de tesina. En la literatura se distinguen dos tipos de escrituras no canónicas (McCloskey, Caramazza, & Basili, 1985; Power & Dal Martello, 1990; y Orozco, Guerrero y Otálora, 2007): las que no satisfacen alguna de las reglas sintácticas del SDN, error sintáctico, y las que convierten una o varias de las unidades semánticas simples de la representación R_v en una o varias unidades simple del registro R_i-a que no corresponde según la convención,⁸⁰ error tipo lexical.⁸¹

A medida que se describen las clases de esta clasificación se introduce el sistema de codificación que se utiliza en este estudio. Recuérdese que cualquier representación de R_i-a se representará por una secuencia de letras en orden alfabético, por ejemplo, representaciones de cuatro cifras se representan por abcd, las de tres por abc, etc. Se dijo también que en caso de que la representación tenga cifras cero, en el lugar o los lugares correspondientes se reemplaza la letra por cero, por ejemplo, representaciones como 3004 que tienen ceros, en los lugares correspondientes a las unidades de orden uno (lo que suele reconocerse como el lugar de las decenas) y de orden dos (lo que suele conocerse como

⁸⁰ Dicho en otros términos se habla de error léxico cuando al hacer la conversión de una de las unidades simples significativas del R_v a la representación de R_i-a se escribe una cifra distinta a la que corresponde por convención.

⁸¹ En este estudio la inversión en la escritura de una grafía o el uso o no de punto o coma no son considerados como “errores”.

el lugar de las centenas)⁸² se codifican como a00d. Así las representaciones indo-arábigas que representan números del intervalo numérico [10, 99] (las comúnmente llamadas de dos cifras) tiene dos formas ab (por ejemplo 34, 78, etc.) y a0 (10, 20, ... , 90), las que representan números del intervalo [100, 999] tienen cuatro formas distintas abc, a00 (100, 200, ..., 900), ab0 (por ejemplo, 120 y 450) y a0b (por ejemplo, 504 y 609) y las que representan números del intervalo [1000, 9999] tienen cinco formas distintas: abcd (como 2341), abc0 (como 2340), ab00 (como 2300), a000 (como 2000), ab0d (como 2301), a00d (como 2001).

Como ya se ha dicho, a todas las representaciones del registro indo-arábigo que tienen las cifras cero en alguno de sus órdenes decimales les corresponden representaciones del registro verbal cuyas expresiones son incompletas y a todas aquellas que no tienen cifras cero les corresponde representaciones del registro verbal cuyas expresiones son completas. Para abreviar, aunque abusando de la notación, al hacer referencia a la forma de una representación del registro verbal se usará la misma codificación de las representaciones del registro indo-arábigo; esta decisión no lleva a confusión siempre que se tenga el cuidado de advertir el registro al cual pertenece la representación. Por ejemplo, se escribirá: sea la representación de Rv de la forma a0c, para hacer referencia a expresiones verbales numéricas incompletas de la forma ‘p cientos q’ siendo p uno, dos, ..., nueve⁸³ y q una expresión (también de Rv) que corresponde a números del intervalo [1, 99]. La excesiva extensión de la enunciación anterior, ilustra y a la vez justifica la decisión de optar también por una notación del registro indo-arábigo. Indudablemente es mucho más fácil decir: sea la representación de Rv de la forma a0c, que el enunciado anterior; sin embargo, es necesario reconocer que hacer esto es poco riguroso, en tanto que se está usando un registro de una sintaxis posicional propia del Ri-a, cuando lo correcto habría sido mantenerse dentro de los límites de Rv. La comprensión por parte del lector de la notación recién propuesta para Rv se tiene garantizada porque él posee un pensamiento que le permite hacer las conversiones entre representaciones de los dos registros, pero esto que es una ventaja también es un peligro en otro sentido, ya que el uso indiscriminado de la misma notación para referirse a formas de representación de los dos registros oculte detalles de la operación cognitiva de conversión cuando es

⁸² Ver figura sección 3.2 Ordenes decimales de la expresión m...dcba, de una representación en Ri-a

⁸³ Realmente P no es uno, dado que en el Rv no decimos, por ejemplo, un ciento cuarenta y tres, sino ciento cuarenta. Algo semejante ocurre con P=cinco para quinientos y P=7 para setecientos.

realizada por los niños. Por eso en el análisis se estará alerta a mantener las diferencias. Pero más allá de estas precauciones, lo interesante de esta consideración sobre la notación es precisamente que en parte ilustra el papel de la multiplicidad de registros en la asignación de significado.

Para finalizar esta introducción, se advierte al lector que prácticamente la totalidad de los tipos de escritura que se describen a continuación se pueden ver desde dos sentidos, como lo que son, es decir, como la descripción de un tipo de escritura particular (la descripción del producto resultante al realizar la conversión $R_v \Rightarrow R_i$ -a), y, como una regla de conversión, la regla que aplica el niño al realizar la conversión. De manera que se escribirá unas veces la escritura tipo e1, por ejemplo, y otras la regla aplicada es del tipo e1, o simplemente e1. En lo que sigue se tratará de escribir en el primer sentido, en tanto que en este apartado se está describiendo una clasificación de escrituras producidas, pero más adelante, especialmente en el momento del análisis, se utilizará muchas veces como regla.

6.7.1 Escrituras tipo 1 (e1)

Estas escrituras corresponden a conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a en las que el niño empieza convirtiendo la parte de la representación de R_v que corresponde al mayor orden decimal y la convierten a una representación de R_i -a (es decir escribe el nodo en términos de Lerner, Sadovsky y Wolman. 1994) y después convierte la parte restante bien sea en forma canónica o vuelva a hacer lo mismo que ya hizo con la primera parte. Por ejemplo una expresión en R_v de la forma abcd es convertida en una de la forma a000bcd en R_i -a (tres mil cuatrocientos cincuenta y siete \Rightarrow 3000457, también podría ser 300040057) o (tres mil cuatrocientos cincuenta y siete \Rightarrow 300040057, o 3000400507). Este tipo de escrituras se codifica como e1.

Nota. Como se dijo unas pocas líneas atrás las escrituras tipo e1 se logran porque el niño aplica una regla: para hacer la conversión $R_v \Rightarrow R_i$ -a primero identifica la primera parte de la representación de R_v que define un nodo (ejemplo, dos mil, cuatrocientos, cincuenta), convierte a R_i -a, luego toma el resto de la representación y la convierte a R_i -a (también puede ser que no haga la conversión de la parte restante de R_v a R_i -a en forma canónica sino que repita la regla o aplique otra diferente). De manera que también además de decir la escritura de tipo e1 se dirá, cuando convenga hacerlo, la regla de tipo e1.

6.7.2 Escrituras tipo 2 (e2)

Estas escrituras en parte se rigen por el mismo principio de las de tipo 1 (e1) pero en este caso se omiten o agregan uno o varios ceros del numeral nodo o de los nodos de órdenes inferiores. Se codifican como “e2”, ejemplo “tres mil cuatrocientos cincuenta y siete” se escribe como 300457, 30457, 30000457 o 34057, etc. Puede suceder como en las escrituras e1 que el niño aplica el mismo procedimiento a los órdenes decimal subsiguientes. Se codifican como e2.

6.7.3 Escrituras tipo 3 (e3)

Esta escritura consiste en escribir el numeral correspondiente a la expresión verbal que hace las veces de coeficiente (u operador multiplicador) en la parte de la expresión verbal que define un orden decimal seguido de 1000, 100, 10 según corresponda al orden decimal (bien sea que se escriban todos, algunos o ninguno de los ceros de 1000, 1000, 10). Estas escrituras se codifican como e3. Ejemplo tres mil cuatrocientos cincuenta y siete se escribe 31000457, 31000410057 o 310057, o dos cientos cincuenta y seis se escribe 210056, 21005106. Puede suceder que esta forma de conversión se aplica a otros ordenes decimales. Se codifican como e3.

6.7.4 Escrituras tipo 4 (e4)

Estas escrituras son semejantes a las anteriores pero en este caso el numeral correspondiente a la expresión verbal que hace las veces de operador se acompaña de ceros. Ejemplo “tres mil cuatrocientos cincuenta y siete” se escribe 30100457 o “dos cientos cincuenta y seis” se escribe 201056.

6.7.5 Escrituras tipo 5 (e5)

Estas escrituras corresponden a conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a en las que la representación de R_v que es una expresión incompleta que termina en uno, dos, ..., nueve es convertida en una representación de R_i -a omitiendo los ceros intermedios que debía tener en caso de producirse la escritura canónica. Las representaciones de R_v es de alguna de las formas $a00d$, $a0cd$, $ab0d$, $a0c$, para el caso de este estudio. Ejemplo en lugar de 4005 se escribe 45.

6.7.6 Escrituras tipo 6 (e6)

Estas escrituras corresponden a conversiones de representaciones de R_v cuyas expresiones son incompletas que no terminan en uno, dos, ..., nueve, como las anteriores; es decir, las representaciones de R_v son de las formas $abc0$, $ab00$, $a000$, $ab0$ y $a00$ en el caso de los intervalos $[1000, 9\ 999]$ y $[100, 999]$. Las conversiones que se realizan por este procedimiento producen representaciones de R_i -a con más o menos ceros de los que debía tener en caso de hacerse la conversión canónica. Ejemplo se dicta “tres mil quinientos” y se escribe 35000, 350; etc. se dicta “trescientos veinte” y se escribe 32, 3200, etc. Se codifican como e6.

6.7.7 Escrituras tipo 7 (e7)

Estas escrituras consisten en omitir el numeral correspondiente a la expresión verbal que indica el operador multiplicativo de la unidad de orden mayor y se escribe simplemente 1000 o 100. Ej: Tres mil cuatrocientos cincuenta y seis \Rightarrow 1000456. Puede suceder que se escriban menos ceros de los necesarios (100456 o 10456). Se codifica como e7.

6.7.8 Escrituras tipo 8 (e8)

Estas escrituras corresponden a conversiones en las que en la representación de R_i -a aparecen errores lexicales. Se dice que una escritura presenta este tipo de error cuando en un orden decimal se escribe una cifra distinta a la que debería ir. Se codifica como e8. Sin bien en este estudio no se tendrá en cuenta este tipo de escrituras al juzgar si la conversión es canónica o no, sí se codificarán en las pruebas escritas para indagar sobre su frecuencia.

6.7.9 Escrituras tipo 9 (e9)

Estas escrituras corresponden a conversiones en la que se omiten cifras distintas de cero. Se codifican como e9. Ejemplo, en lugar de 3456 se escribe 356.

6.7.10 Escrituras tipo 10 (e10)

Estas escrituras se dan en conversiones en la que únicamente se escribe el nodo correspondiente al mayor orden decimal de la representación R_v . Ejemplo, en lugar de 4567 se escribe 4000, o en lugar de 678 se escribe 600. Se codifican e9.

6.7.11 Otras escrituras (e11 o simplemente o)

Otros. Cualquier otra escritura no codificada. En este caso se codifica con “o”

Finalmente se utilizará “no” en aquellos casos en que no se encuentra escritura.

6.8 LA EXPERIENCIA DIDÁCTICA

Para el diseño y desarrollo de la propuesta didáctica se asume que el niño como sujeto constructor del conocimiento va apropiándose del número al hacer uso de las rudimentarias ideas que va elaborando sobre el número y numeración al intentar resolver los problemas a los que se ve enfrentado en las múltiples experiencias vividas en y fuera de la escuela, (Castaño, 1997): *“El saber (entendido como saber genuino) que construye el alumno no es fruto exclusivo de la acción escolar, es más bien el resultado de la interacción de las construcciones propias de los educandos al intentar comprender y darle sentido a cada una de sus experiencias, entre ellas lo que se enseña en la escuela”* (Castaño, Forero y Oicatá, 2007). Esta forma de ver, ayuda a entender la enseñanza más allá de intentar transmitir un conocimiento, obliga a entender como lo sugiere Confrey (1990, citado por Sierpinska y Lermans, 1996), que una nueva didáctica consiste en que el profesor reconozca que él les está enseñando a sus estudiantes cómo desarrollar su cognición y que no está transmitiendo contenidos de matemáticas simplemente.

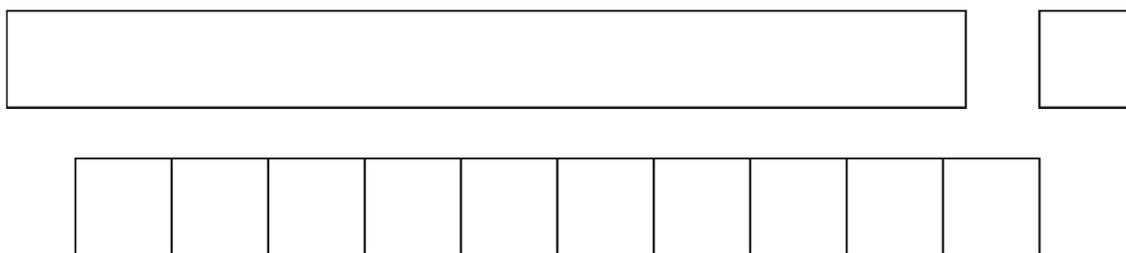
¿Cómo potenciar el pensamiento matemático del estudiante? Diseñando experiencias para que se involucre en actividades que lo pongan en el papel de hacer matemática. Estas experiencias son vivencias en las que los educandos se apropian de un problema que tienen que resolver, por lo que logran llenarlo de sentido y movilizan sus propios conocimientos para configurar posibles caminos de solución. Estas experiencias son invitaciones a pensar, a dialogar, a debatir, a la búsqueda colectiva. Las situaciones o experiencias didácticas valiosas se caracterizan porque el estudiante se enfrenta a situaciones en las que se apropia de un problema y en la búsqueda de posibles soluciones, unas veces entre los alumnos sin la intervención directa del profesor y otras, entre los educandos y el profesor, se comunican y negocian las tentativas de solución. Las intervenciones del docente están orientadas a ayudar a enriquecer las discusiones, a estimular la discusión cuando hay posiciones contrarias, a requerir intentos de validación, a precisar y ampliar conclusiones.

En el caso particular del número las diferentes situaciones didácticas de esta experiencia fueron diseñadas para que los niños establecieran las relaciones y ejecutaran las operaciones necesarias que los ayudara a comprender el número (establecer y operar con relaciones de orden y relaciones de composición y descomposición), haciendo uso de formas de representación no convencionales introducidas con propósitos didácticos. Estas representaciones se constituyen en formas intermedias más cercanas a las comprensiones iniciales que le son posibles a los niños y que poco a poco permiten el tránsito a formas más complejas, son un apoyo para que con material físico o gráfico el niño tenga la oportunidad de construir los invariantes operatorios que están en la base de la apropiación del SDN. Siguiendo a Duval se admitirá que en cierto sentido estos sistemas de representación son otros registros en tanto que permiten realizar las tres operaciones cognitivas necesarias de todo sistema semiótico para ser registro de representación (formación, tratamiento y conversión). Los invariantes operatorios que están en la base de la SDN son: a) la idea de unidad compuesta y su equivalencia en unidades “simples”, esto lleva, en un primer momento a la necesidad de coordinar dos tipos de unidades —las de diez y las de unos—, posteriormente, al ampliarse el sistema, será necesario coordinar tres o más tipos de unidades, b) coordinación de diferentes tipos de sucesiones ordenadas (de 1000 en 1000, de 100 en 100, de 10 en 10 y de 1 en 1) y c) composición aditiva de partes. Aunque estos invariantes no son suficientes para acceder a un significado que corresponda a la sintaxis polinomial de las representaciones en R_i -a, sí posibilita significados que descansan en sintaxis de tipo aditivo y aditivo multiplicativo propias de las representaciones en R_v . A continuación se describen los registros usados en esta experiencia.

Registro basado en grupos de diez y sueltas. (Rg-s). Este sistema tiene dos elementos básicos para formar las marcas que constituyen las representaciones susceptibles de producirse en el sistema: grupos de diez y unidades sueltas. Para determinar la cantidad de elementos de una colección se organizan todos los grupos de diez que son posibles formar y para dar cuenta de la cantidad de elementos de una colección basta decir cuántos grupos de diez se formaron y cuántos elementos quedaron sueltos. Este sistema tiene al menos dos soportes: a) gráfico (se dibujan los grupos de diez y las sueltas), b) verbal (oral o escrito) mediante expresiones lingüísticas (oral o escrita) como: “3 grupos de diez y 5 sueltas”; cuando se hace por escrito se pueden usar expresiones abreviadas como “3g y 4s” u otras que descansan en convenciones más

locales como cuando los niños de una clase acuerdan escribir el '3' que indica la cantidad de grupos de diez encerrado en un óvalo y a su derecha el 4 fuera del óvalo. El sistema bien podría extenderse para representar números mayores, agregando grupos de 100, de 1000 etc. Se acordará en representar este registro como Rg-s

Registro basado en tiras y cuadros (Rt-c). Este sistema tiene dos tipos de elementos básicos para formar las marcas que constituyen las representaciones susceptibles de producir en el sistema: tiras y cuadros.⁸⁴



Una tira equivale a 10 cuadros

Este sistema permite el uso de diferentes soportes de expresión: a) el material físico mismo, b) representaciones gráficas, c) expresiones verbales (orales o escritas) como 3 tiras y 4 cuadros, que se pueden escribir de forma abreviada '3T y 4C'. De forma análoga al registro basado en Rg-s, este sistema podría extenderse para representar números en los intervalos numéricos [1, 999] aumentando en este caso un cuadrado de 10 por 10 cuadros y [1, 9999] agregando además del cuadro un cubo de 10 cuadros de arista. Se acordará en representar este registro como Rt-c.

Registro basado en billetes (Rb). Este sistema tiene como elementos básicos billetes de las denominaciones que coinciden con potencias de 10 (1, 10, 100, 1.000, etc.). Permite el uso de diferentes soportes de expresión, uso de material físico mismo, representaciones gráficas, representaciones verbales (orales o escritas) como '3 billetes de 10 y 4 pesos'. . Se acordará en representar este registro como Rb.

Registro verbal modificado y registro indo-arábigo modificado (Rvm y R(i-a)m, respectivamente)

⁸⁴ Estos dos elementos son como los del clásico material de cubos multibases de Dienes.

Como forma de ayudar a los niños a comprender las representaciones del registro indo-arábigo a partir de la sintaxis aditiva del registro verbal, en el proceso de enseñanza se introdujeron dos modificaciones a los dos registros convencionales.

La primera: la representación del registro verbal se segmenta en dos partes, la primera corresponde a la expresión que representa el nodo y la otra la parte restante, estas dos partes se unen con “y”, ejemplo: “doscientos cuarenta y seis” queda como “doscientos y cuarenta y seis”. Para la conversión de estas representaciones a representaciones en el registro indo-arábigo modificado se escribe, siguiendo el ejemplo, “200 y 46”. De esta manera un niño que aún no maneja las representaciones de $R(i-a)$ en el intervalo $[100, 999]$ pero sí en el intervalo $[1, 99]$ podrá aprovechar su conocimiento de $R(i-a)$ en $[1, 99]$ y el de los nodos $(100, 200, 300, \dots, 900)$ para representar números en el intervalo $[1, 999]$. Estas nuevas formas de producir representaciones numéricas no son propiamente nuevos registros por eso se mantendrán las nominaciones de registros verbal o indo-arábigo modificados. Los tres primeros registros ($Rg-s$, $Rt-c$ y Rb) son diferentes a estos dos últimos (Rvm y $R(i-a)m$), ya que las marcas de los tres primeros registros son propias y siguiendo las reglas de producción de representaciones de estos sistemas se obtienen nuevas representaciones comprensibles para quienes manejen las reglas del sistema, a la vez que permiten las operaciones de transformación, mientras que los dos últimos no tienen marcas propias y sus representaciones se componen de las representaciones del verbal en un caso y del indo-arábigo en el otro. Si se quiere se le podrían llamar pseudoregistros. Se acordará en representar Rvm al registro verbal modificado y $R(i-a)m$, al registro indo arábigo modificado. Es importante señalar que la introducción de $R(i-a)m$ es solo un recurso didáctico que prepara a los niños para la comprensión de conversiones de $Rv \Rightarrow R(i-a)$.

Ya descritos los registros se indica a continuación las grandes fases en las que se desarrolló la experiencia didáctica.

Al comienzo del curso primero se buscó que los niños consolidaran el dominio del número en el intervalo $[1, 19]$. Esto requirió de alrededor de unos dos meses⁸⁵. Los niños

⁸⁵ Para el lector puede resultar excesivo el tiempo, sin embargo, aunque puede ser que el ritmo hubiera sido lento, no lo es tanto si se tiene presente que es la época del comienzo de año, durante las dos primeras semanas se buscó establecer vínculo con los niños, formas de trabajo, en fin fijar en la práctica reglas de interacción que mostraran otras formas de relación con el conocimiento, con sus pares y el profesor que favorecieran las experiencias que se iba a iniciar. Se trató de asumir de forma consciente lo que han mostrado estudios de los procesos de enseñanza-aprendizaje desde perspectivas

iniciaron el curso con un relativo dominio de los primeros números en intervalo [1, 9]. Se trató entonces que los niños se enfrentarán a múltiples y variadas situaciones como juegos con dados, juegos de rutas, situaciones de compra venta que les ayudara a construir un pensamiento que les permitiera resolver comprensivamente las preguntas básicas que involucran la construcción del número. ¿cuántos hay?, ¿hay más?, ¿hay menos?, ¿hay la misma cantidad?, ¿cuántos reúne?, ¿cuántos quedan?, ¿cuántos faltan?, ¿cuántos sobran?, ¿cuántos había?

Una vez que la gran mayoría de los niños daban muestras de un relativo dominio del número se extendió al intervalo [1, 99]. Pero al comienzo no se introduce el signo convencional en ninguno de los dos registros semióticos (verbal e indo-arábigo) se propuso a los niños cuantificar separando los elementos de la colección en grupos de diez y que para decir la cantidad se usaran representaciones de Rg-s (hay ---grupos de diez y quedan --- elementos sueltos). De esta forma los niños pueden cuantificar la cantidad de elementos de una colección sin tener que conocer por completo la sucesión numérica y este nuevo registro numérico les permite empezar a resolver las preguntas que se enunciaron en el intervalo [1,19]. Los niños vivieron en un nuevo intervalo las experiencias que ya habían vivido en el intervalo anterior. Los signos convencionales se introdujeron poco a poco, como fruto del intercambio entre los niños.

Cuando los niños tenían un relativo dominio del registro Rg-s se introdujo el registro Rt-c y de forma complementaria el registro Rb. A medida que se avanzaba en el manejo de estos registros se estimulaba a los niños para que hicieran cuentas por procedimientos propios que los niños inventaban como fruto de la apropiación de los registros semióticos que se pusieron a circular en la clase. A medida que se apropiaban de los signos convencionales se les veía hacer sus cuentas basados en la sintaxis aditiva o aditiva-multiplicativa del registro verbal, por ejemplo la suma de 35 y 43 podría ser la descomposición en dieces (30 en 10, 10 y 10; y 40 en 10, 10, 10 y 10, para contar de diez en diez y obtener 70) y después sí sumar las unidades sueltas. Estos procedimientos cada

del interaccionismo simbólico aplicado a la educación matemática. Font (2001) señala que desde el programa interaccionista los procesos culturales y sociales son parte integrante de la actividad matemática, esta perspectiva supone, siguiendo a Font que: el profesor y los estudiantes constituyen interactivamente la cultura del aula; las convenciones y convenios emergen interactivamente; y, que el proceso de comunicación se apoya en la negociación y los significados compartidos. Si bien es claro que estos tres campos de estudio del programa interaccionista no supone prescripciones para el buen hacer, si son puntos de referencia para hacer más consciente su actuación en el aula. Por otra parte el alto número de alumnos (alrededor de 40) impone ritmos lentos si se busca abrir posibilidades de participación a la gran mayoría.

vez se hacían de forma más sistemática y con mayor habilidad, se producían procedimientos más eficientes y se podían aplicar a problemas que requerían relaciones más complejas (por ejemplo resolver problemas que involucraran la pregunta ¿cuánto tenía? que supone la recomposición de totalidad). Al finalizar el curso primero la gran mayoría de los niños mostraron un adecuado dominio del número en el intervalo [1,99].

En grado segundo se trabajó durante el primer semestre en la extensión y consolidación del número al intervalo [100, 999]. Para eso se trabajó con el sistema de los billetes de \$100, \$10 y \$1. Para acercar a los niños al signo convencional se modificó el registro Ri-a y en lugar de escribir cosas como '456' los niños escribían '400 y 56', esta representación facilita la conversión de la representación verbal 'cuatrocientos cincuenta y seis', en tanto que '400 y 56' simplifica en una escritura aditiva la escritura '456'

6.9 ANÁLISIS DE LAS TAREAS QUE SE PRESENTAN EN LAS ENTREVISTAS

En este apartado se describen las tareas que se aplicaron en las entrevistas. Para ser más exactos, no son tareas más bien son tipos de tareas, ya que a partir de estas se presentan varias tareas específicas en cada entrevista.

6.9.1 Tareas tipo 1. De enumeración

Propósito: Identificar si el niño maneja los principios de enumeración y establecer hasta cuánto cuenta.

Descripción: Cuantificación de la cantidad de elementos de una colección mediante el método convencional (uso del método de enumeración uno a uno). Se presenta al sujeto una cantidad de objetos y se le pide que diga cuántos hay. Esta tarea se aplicó al comienzo del proceso y sirvió para establecer el nivel de entrada.

Demandas cognitivas de la tarea: A partir de los trabajos de Gelman y Gallistel (1978, 1986) se acepta que la tarea de enumeración se rige por los principios: a) correspondencia una a uno entre los elementos contados y cada elemento de la sucesión ordenada de representaciones en el registro verbal (unos, dos, tres, etc.) o del registro indo-arábigo (1, 2, 3,...), b) orden estable (respetar el orden convencional de las series) c) indiferenciación de los elementos, d) indiferencia del orden en que se cuentan los

elementos y e) por último, el principio de cardinalidad. En las ejecuciones de los niños se observará si sus actuaciones se rigen o no por cada uno de estos principios.

6.9.2 Tareas tipo 2. Cuantificación mediante grupos de diez y sueltas

Propósito: Estudiar el proceso que sigue el niño para expresar la cantidad de unidades de cada tipo (grupos de diez y sueltas) como forma de dar cuenta de la cantidad de elementos de una colección.

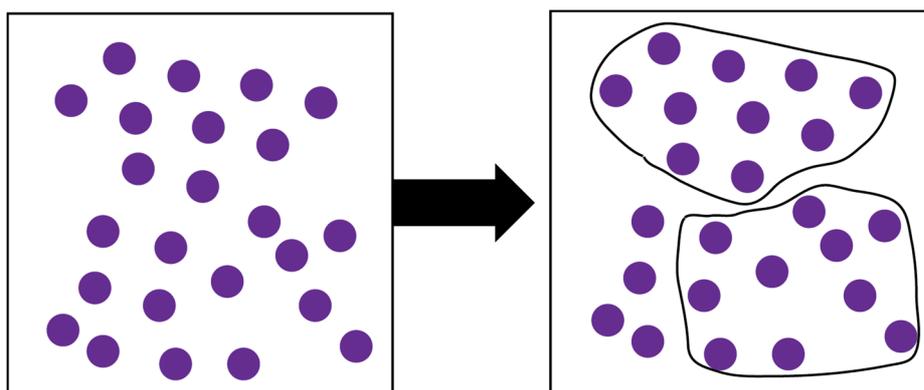


Figura 17. Cuantificación mediante grupos de diez

Descripción: Se presenta una colección de objetos al niño (bien sea objetos materiales o representaciones gráficas) y se pregunta ¿cuántos hay? Para dar respuesta a esta pregunta se espera que el niño organice todos los grupos de diez que sea posible y diga algo como: “hay X grupos de diez y Y sueltos”.

Demandas cognitivas de la tarea: De una parte el niño debe manejar el proceso de enumerar hasta diez correctamente. Una vez que organiza los grupos de diez, la totalidad homogénea de unos aparece al niño dividida en dos partes “los grupos de diez” y “las unidades sueltas”. Para contestar la pregunta ¿cuántos elementos hay? tendrá que reconstruir la totalidad diciendo la cantidad de grupos de diez y la cantidad de sueltas y para dar cuenta de la cantidad de grupos de diez le exige reconocerlos como unidades a pesar de ver dentro de esos grupos diez unidades. Es decir el niño tiene que distinguir dos tipos de unidades: las de los grupos de diez y las sueltas. Una vez que reconoce los grupos de diez como unidades está en condición de contarlos (así como lo hace con los elementos sueltos) y decir “hay X grupos de diez” (o simplemente “X grupos”). Para contestar a la pregunta cuántos elementos hay por todos debe decir “X grupos de 10 y Y sueltos” esto exige tener presente los dos tipos de unidades y coordinarlos. Pero no solo eso, reconocer que expresiones del tipo “X grupos y Y sueltas” dan cuenta de la cantidad de “unidades

simples” de la colección, hecho que genera un conflicto en el niño en tanto que por ahora no tiene (como si lo hay en el SDN) otro sistema de registro semiótico que hable del total homogéneo de unos.

6.9.3 Tareas tipo 3. Organización y descripción de unidades compuestas

Propósito: Estudiar la habilidad de los niños para comprender y producir expresiones del tipo “X grupos de diez”

Descripción: Se presentan al niño varias colecciones de “torres” (o montones) de fichas, una colección compuesta de varias torres de 2 fichas cada una, otra colección de 3, otra de 4 y otra de 5. Para la tarea de comprensión se dice al niño “separe X torres (o montones) de Y fichas” y para la tarea de producción se separan varias torres de la misma cantidad de fichas y se pide al niño que describa lo que se ha separado, se le hace preguntas como: ¿que hay aquí? o ¿qué acabo de separar? mientras se muestra lo recién separado.

Demandas cognitivas de la tarea: Esta tarea exige reconocer cada torre como una unidad (una unidad compuesta) e identificar cuántas unidades simples (en este caso fichas) tiene cada torre, lo que le permitiría enumerar las torres (así como lo hace con los elementos sueltos) y decir “hay X grupos de p fichas”. Aquí nuevamente aparece una tarea que involucra dos dimensiones que deben coordinarse: la cantidad de grupos y la cantidad de elementos de cada grupo.⁸⁶ Esta tarea se relaciona con el manejo elemental de operadores multiplicadores naturales que involucran las representaciones numéricas en el registro verbal del SDN.

6.9.4 Tareas tipo 4. Conversión de representaciones del registro verbal a representaciones del registro indo-arábig (Rv => Ri-a) y viceversa (Ri-a => Rv)

Propósito: Estudiar las producciones que hacen los niños cuando convierten representaciones semióticas del registro verbal al registro indo-arábig y viceversa, e identificar las hipótesis que hacen y las explicaciones que ofrecen. Identificar los cambios que se producen a lo largo del proceso de aprendizaje durante el periodo de observación.

⁸⁶ Los trabajos de Gómez-Granell, (1981, 1985), Castaño, J. (1996) ilustran la complejidad cognitiva que supone para el niño representa hacerse a la multiplicación.

Descripción: En las tareas de conversión del registro verbal a indo-arábigo se dictan numerales y se pide a los niños que los escriban en el registro indo-arábigo. En las tareas de conversión del registro indo-arábigo al verbal se presentan representaciones en el registro indo-arábigo y se les pide que lo lean. Este tipo de tareas se presentan varias veces a lo largo del proceso de investigación variando el intervalo numérico: [1, 19], [1, 99], [1, 999], [1, 9999].

Este tipo de tareas muchas veces va aparecer combinada con tareas que incluyen conversiones entre representaciones modificadas en los registros de los Rv y Ri-a. (Rvm => R(i-a)m y viceversa) ver tareas tipo No 8.

Demandas cognitivas de la tarea: En la sección 5.2 “análisis de la tarea de conversión entre representaciones del SDN y asignación de significado” se hace un análisis detallado de estas demandas. Allí se mostró que la conversión de representaciones en el registro verbal a representaciones en el registro indo-arábigo requiere del niño lo propio para hacerse a la sintaxis aditiva-multiplicativa de las representaciones verbales, esto es, esquemas que le permitan aplicar operadores multiplicadores naturales (dos veces, tres veces, etc.), unidades compuestas, composiciones aditivas y esquemas para la coordinación de diferentes sucesiones ordenadas (la de mil en mil, la de cien en cien, la de diez en diez y la de uno en uno), ya que estos son los que permiten interpretar la representaciones verbales como un lugar en una sucesión ordenada.

6.9.5 Tareas tipo 5. Conversiones de representaciones de los registros verbal o indo-arábigo a representaciones del registro con tiras y cuadros (Rv => Rt-c o Ri-a => Rt-c) y viceversa (Rt-c => Rv o Rt-c => Ri-a)

Propósito: Estudiar las producciones que hacen los niños cuando convierten representaciones semióticas de los registros verbal o indo-arábigo al registro de tiras y cuadros.

Descripción: Se presenta una determinada cantidad de tiras y cuadros y el niño debe representar la cantidad equivalente de cuadros en caso de que las tiras se cambiaran por cuadros. También se hace la pregunta en sentido contrario, dada una totalidad homogénea de cuadros se pregunta cuántas tiras y cuántos cuadros quedan sueltos en caso de cambiar cada diez cuadros por una tira. Unas veces la resolución de las tareas de este tipo se

pueden hacer manipulando el material físico, otras veces apoyándose en gráficos y otras apoyándose exclusivamente en expresiones numérico-simbólicas (ejemplo, 3T y 5C).

Demandas cognitivas de la tarea. En el caso de la tarea de cuadros a tiras y cuadros sueltos (al cambiar cada diez cuadros por tiras y decir cuántas tiras se obtienen y cuántos cuadros sueltos quedan), si la tarea se realiza manipulando el material, el primer paso, el correspondiente a contar la cantidad de cuadros que representa la expresión “Z cuadros” supone establecer una relación entre la representación y la cantidad, en este caso no hay operación de transformación entre registros semióticos; pero una vez finalizada las acciones de cambios (cada diez cuadros se cambian por una tira) y se produce la expresión “X tiras e Y cuadros” se da la operación de tratamiento. Pero si la tarea no se realiza manipulando material sino que a partir de una representación en registro verbal o indo-arábigo de la totalidad inicial de cuadros se llega a expresiones “X tiras e Y cuadros” se podría decir que se da la operación de conversión entre el registro verbal (o el indo-arábigo) y el registro basado en tiras y cuadros ($R_v \Rightarrow R_{t-c}$ y $R_{i-a} \Rightarrow R_{t-c}$). En esta tarea, el paso de los “cuadros” a las “tiras y cuadros” supone pasar de una totalidad homogénea de unos a una totalidad descompuesta en dos partes: “la de las tiras” y “las de los cuadros” y ésta exige al niño: a) manejar un sistema de dos tipos de unidades diferentes y b) reconstruir la totalidad mediante la composición de las partes que en este caso solo puede expresar diciendo la cantidad de tiras y la cantidad de cuadros sueltos.

La tarea en sentido inverso, la de pasar de tiras y cuadros a cuadros, además de la operación de conversión en sentido contrario a como se acaba de describir ($R_{t-c} \Rightarrow R_v$ y $R_{t-c} \Rightarrow R_{i-a}$), se trata de un composición de partes para producir una totalidad, que se expresa si se sale del registro (el de tiras y cuadros) y se buscan representaciones equivalentes en otro registro, en este caso, a cualquiera de los dos registros del SDN.

6.9.6 Tareas tipo 6. Conversión entre representaciones del registro verbal (canónico R_v o modificado R_{vm}), registro indo-arábigo (canónico R_{i-a} o modificado $R_{(i-a)m}$) y registro con billetes (R_b)

Propósito: Estudiar las producciones que hacen los niños cuando convierten representaciones semióticas de los registros verbal o indo-arábigo al registro basado en billetes.

Descripción: Se presenta una determinada cantidad de billetes de denominaciones iguales a las potencias de diez según el intervalo numérico en el que se trabaje (\$1, \$10, \$100 y \$1000) y el niño debe representar la cantidad de dinero en el registro verbal o indo-arábigo. También se presenta la tarea inversa, pagar una cantidad de dinero representada en el registro verbal o indo-arábigo con billetes de \$1, \$10, \$100 o \$1000. El niño unas veces resuelve la tarea manipulando los billetes, otras veces se le sugiere que se apoye en dibujos y otras que intente hacer cuentas apoyándose en representaciones del registro indo-arábigo o en escrituras de niños, es decir, en R(i-a)m.

Demandas cognitivas de la tarea. El análisis de la tarea es exactamente el mismo que el realizado para los registros Rg-s y Rt-c. Cuando se agregan los billetes de \$100 y los de \$1000 la complejidad de la tarea se incrementa en la medida en que se tienen que coordinar tres y cuatro unidades diferentes, estas tareas involucran la operación cognitiva de conversión $R_v = R_b$, $R_{i-a} \Rightarrow R_b$, $R_b \Rightarrow R_v$ y $R_b \Rightarrow R_{i-a}$.

6.9.7 Tareas tipo 7. Conversión de representaciones del registro verbal modificado (R_{vm}) al registro R(i-a)m y viceversa

Propósito: Estudiar la capacidad del niño para realizar conversiones de representaciones en el registro verbal modificado a representaciones aditivas con cifras, este último registro se llamará registro indo-arábigo modificado e identificar la incidencia en los niños de esta forma de representar las cantidades para comprenderlas y realizar cuentas sencillas de composición.

Descripción: Se dictan a los niños numerales en el registro verbal y se le pide que lo escriban en su forma aditiva con cifras y viceversa. Se pide que pague cantidades de dinero con billetes de 1, 10, 100 y 1.000 que se expresan en representaciones aditivas con cifras. Este tipo de tareas se presenta en diferentes intervalos numéricos: [1, 99], [1, 999] y [1, 9999]. Para referirse en clase a representaciones en el registro verbal modificado, se le decía a los niños: escriban el número como lo hacen los niños. Ejemplo, escriba “trescientos y cuarenta y cinco”, como lo hacen los niños. Para solicitar la escritura en el R_{i-a} se decía “escriba como hacen los adultos”.

Demandas cognitivas de la tarea: Esta tarea exige del niño segmentar la expresión en el registro verbal en dos o más segmentos: el segmento nodo⁸⁷ y el segmento restante (este se puede volver a descomponer en dos segmentos: el nodo y lo restante) y escribir cada uno de estos segmentos en el registro indo-arábigo. Podría considerarse la “representación aditiva con cifras” como representaciones mixtas que combina elementos del registro verbal y del registro indo-arábigo, de manera tal que podría admitirse que esta tarea supone la operación de conversión entre representaciones de algunos de los dos registros del SDN y estas representaciones del registro aditivo en cifras y viceversa.

6.9.8 Tareas tipo 8. Tarea de Kamii modificada

Propósito: Estudiar si el niño identifica el valor relativo de las cifras en representaciones del registro indo-arábigo.

Descripción: Se pide al niño que de un montón separe una cantidad de fichas (entre 11 y 19, en algunos casos con cantidades mayores pero menores que 50) y que represente en el registro indo-arábigo la cantidad de elementos separados. Una vez escrito el numeral se muestra la cifra del lugar de las unidades y se le pide que separe la cantidad que esa cifra indica en ese número, después se le muestra la cifra de las decenas y se le pide que haga lo mismo, pero se le advierte que separe lo que indica esa cifra en ese número. En caso de incurrir en el error común de limitarse a encerrar la cantidad de elementos del valor absoluto de la cifra se hacen preguntas de control para identificar si efectivamente el error cometido se debe a ignorar el valor relativo de la cifra o simplemente se debe a una inadecuada interpretación de la consigna.

Demandas cognitivas de la tarea: Esta tarea exige del niño reconocer el valor relativo de las cifras en las representaciones en el registro indo-arábigo y coordinar los dos registros el verbal e indo-arábigo.

6.9.9 Tareas tipo 9. Anticipación de las unidades de orden superior

⁸⁷ Un nodo es la expresión que da cuenta de un número de unidades de la mayor potencia de diez. En el intervalo numérico [1, 99] los nodos son: 10, 20, 30, ..., 90; en el intervalo [1, 999] son: 100, 200, 300, ..., 900, y en el intervalo [1, 9999] son 1000, 2000, 3000, etc.

Propósito: Estudiar la capacidad del niño para anticipar a partir de las representaciones verbal o indo-arábigo la cantidad de unidades compuestas (de 10 o de 100) que pueden formarse.

Descripción: Se da una colección de elementos y se expresa su cantidad de elementos en algunos de los registros del SDN y se dice al niño que con esa colección se organizan todos los grupos de diez que es posible y se le pide que diga al final cuántos grupos de diez pueden formarse y cuántos elementos sueltos quedan. Se presentan situaciones semejantes en el intervalo [1, 999]

Demandas cognitivas de la tarea. En tareas de este tipo, si se parte del registro indo-arábigo requieren del niño comprender el valor relativo de la cifras en las representaciones de estos registros, si se parte de representaciones en el registro verbal requieren del niño manejar el carácter aditivo-multiplicativo de este registro, para poder segmentar las expresiones verbales y entender la correspondencia de cada segmento con valores de unidades de potencias de diez y las veces que se repiten estas.

6.9.10 Tareas tipo 10. Composición aditiva

Propósito: Estudiar las producciones que hacen los niños cuando resuelven tareas de composición utilizando uno cualquiera de los registros (los dos del SDN y los otros que se han creado en esta experiencia como recurso didáctico).

Descripción: Se presenta al niño situaciones en la que es necesario componer dos partes para obtener una totalidad. Ejemplo, A tiene X grupos de diez (o X tiras) e Y sueltos (o Y cuadros) y B tiene Z grupos de diez (o Z tiras) o W sueltos (o W cuadros), ¿cuánto reúnen A y B? El mismo problema se puede presentar utilizando otro de los registros trabajados en las experiencias didácticas. Unas veces la situación da lugar a que la reunión de las cantidades correspondientes a “los sueltos” (o a los cuadros) tiene más de diez elementos, hecho que conduce a tener una nueva unidad del orden superior.

Demandas cognitivas de la tarea. Las tareas de este tipo requieren poseer, de un lado, la idea de composición y, de otro, manejar el hecho de que si al hacer la composición de unidades de primer orden se obtienen diez o más de diez se forma una nueva unidad de orden superior que es necesario agregar a la reunión de las unidades de diez (a los grupos de diez o a la tiras o las decenas).

La tabla 8 resume los diez tipos de tareas que se presentan a los niños en las entrevistas.

Tabla 8
Las diez tareas estudiadas

TAREA	NOMBRE DE LA TAREA
Tipo No 1	De enumeración
Tipo No 2	Cuantificación mediante grupos de diez y sueltas
Tipo No 3	Organización y descripción de unidades compuestas
Tipo No 4	Conversión de representaciones del registro verbal a representaciones del registro indo-arábigo ($R_v \Rightarrow R_{i-a}$) y viceversa ($R_{i-a} \Rightarrow R_v$)
Tipo No 5	Conversiones de representaciones del registros verbal o indo-arábigo a representaciones del registro con tiras y cuadros ($R_v \Rightarrow R_{t-c}$ o $R_{i-a} \Rightarrow R_{t-c}$) y viceversa ($R_{t-c} \Rightarrow R_v$ o $R_{t-c} \Rightarrow R_{i-a}$)
Tipo No 6	Conversiones entre representaciones del registro verbal (canónico R_v o modificado R_{vm}), registro indo-arábigo (canónico R_{i-a} o modificado $R_{(i-a)m}$) y registro con billetes (R_b).
Tipo No 7	Conversión de representaciones del registro verbal modificado (R_{vm}) al registro $R_{(i-a)m}$ y viceversa
Tipo No 8	Tarea de Kamii modificada
Tipo No 9	Anticipación de las unidades de orden superior
Tipo No 10	Composición aditiva

7 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Primero se presenta el análisis de los resultados obtenidos en el componente cuantitativo y posteriormente el de la información del componente cualitativo. Estos dos análisis se presentan por separado, pero esto no significa que se hagan de forma independiente, en su momento se irán estableciendo las relaciones entre ellos. El primer componente mostrará tendencias de las producciones de los niños cuando realizan conversiones de representaciones del registro verbal al indo-arábigo, estas tendencias se tendrán presentes en el análisis cualitativo con el fin de intentar encontrar en el análisis de los cuatro casos información a partir de la cual se pueda ofrecer alguna explicación sobre los mecanismos de conversión.

7.1 ANÁLISIS CUANTITATIVO. RESULTADOS OBTENIDOS EN LAS PRUEBAS

En el grupo A, en el que se desarrolló la experiencia didáctica, se aplicaron tres pruebas (ver numeral 6.5.1) en tres momentos diferentes (noviembre-2010, febrero-2011 y junio-2011), en el grupo B dos, en dos momentos (febrero-2011 y junio-2011). En noviembre los niños del grupo A terminaban grado primero y en febrero los dos grupos iniciaban grado segundo. Del grupo A se estudiaron 27 niños y del B 20. Como ya se dijo, aunque los cursos estaban conformados por aproximadamente 40 niños, el número de niños estudiados se redujo después depurar la muestra estudiada según dos criterios: a) solo se estudiaron los niños que presentaron todas las pruebas de su grupo y b) aquellos niños del grupo A que se mantuvieron en el curso desde febrero-2010 a junio-2011 y en el grupo B no se incluyeron los niños que en el 2011 pasaron del grupo A al grupo B, para evitar el sesgo debido al proceso que se había adelantado con estos niños en el año anterior.

Antes de presentar los datos se definen algunos términos que se usarán en la descripción de los resultados.

Índice de ocurrencia (IO). Es el resultado de la división del número de escrituras producidas de un tipo entre el **total de tipos de escrituras (TPE)** producidas por todos los niños que presentaron la prueba. Como puede suceder que la escritura producida en una conversión particular contenga más de un tipo de escritura, TE no coincide con el número total de producciones que hacen los niños en una prueba. Por ejemplo, se pide convertir “dos mil cuatrocientos nueve” y un niño escribe “204009” esta producción

presenta dos tipos de escrituras no canónicas: e2 y e1, de manera que una única conversión da lugar a dos tipos de escrituras distintas.

Ejemplo 1: El IO de las escrituras tipo “e1” en relación con todas las escrituras producidas. Este índice resulta de dividir el número de ocurrencias del tipo “e1” entre la totalidad de todas las escrituras producidas por el grupo en la prueba.

Ejemplo 2: El IO de las escrituras tipo “e1” en relación con todas las escrituras producidas en conversiones “Rv => Ri-a de la forma a0c”, resulta de dividir el número de ocurrencias del tipo e1 en conversiones “Rv => Ri-a de la forma a0c” dividido entre TE (se contabilizan las escrituras de todos los tipos) cuando se realizaron las conversiones del tipo “Rv => Ri-a de la forma a0c”.

7.1.1 Conversiones Ra => Ri-a en [1, 999] al interior de cada grupo

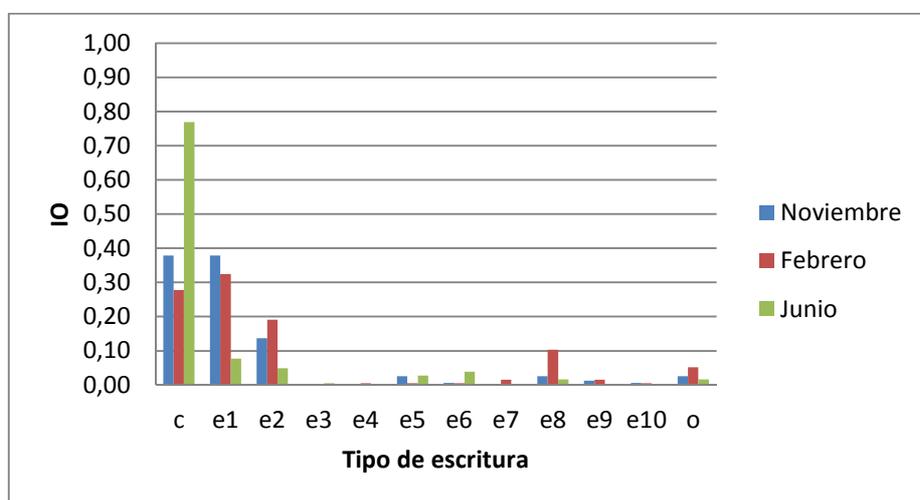
En la tabla 9 se muestran los IO de los dos grupos en las diferentes pruebas para las conversiones Rv => Ri-a en el intervalo numérico [100, 999].

Tabla 9
IO de los tipos de escrituras de ambos grupos en las diferentes pruebas, conversiones Rv => Ri-a en [100, 999]

	GRUPO B		GRUPO A		
	Febrero 2011	Junio 2011	Noviembre 2010	Febrero 2011	Junio 2011
c	0,56	0,80	0,38	0,28	0,77
e1	0,12	0,03	0,38	0,32	0,08
e2	0,14	0,09	0,14	0,19	0,05
e3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01
e4	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00
e5	0,00	0,01	0,03	0,01	0,03
e6	0,00	0,00	0,01	0,01	0,04
e7	0,00	0,00	0,00	0,02	0,00
e8	0,05	0,01	0,03	0,10	0,02
e9	0,08	0,03	0,01	0,02	0,00
e10	0,02	0,00	0,01	0,01	0,00
o	0,04	0,04	0,03	0,05	0,02
Total	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

En la tabla 9 y en la figura 18 correspondientes al Grupo A y a conversiones Rv => Ri-a en el intervalo [100, 999] se observa que el IO de escrituras canónicas (tipo c) se

incrementa notoriamente de noviembre a junio. Este hecho es explicable, ya que muestra la variación que se produce fruto de un proceso de enseñanza formal ya que el intervalo numérico [1, 999] se empezó a trabajar en el aula desde septiembre de 2010 (tres meses antes de finalizar grado primero).



Origen: Fuente propia.

Sujetos 27. TPE de nov. = 158, TPE de Feb. = 220 y TPE de junio = 301.

Figura 18. Los IO para cada tipo de escritura del Grupo A en tres momentos (nov., feb. y jun.). $R_v \Rightarrow R_i$ -a en [100, 999]

El IO de escrituras canónicas es menor en casi 10 centésimas en febrero 2011 (0.28) con relación a noviembre 2010 (0.38) y además este valor de 0.28 de febrero es un poco menor que el IO de escrituras tipo “e1” en la misma prueba de febrero (0.32). Estos datos podrían leerse como que los niños “desaprendieron” de noviembre a febrero. Este detalle quizá no sea nada fortuito, podría explicarse por la época del receso escolar de fin de año.⁸⁸ En la época de vacaciones generalmente los adultos liberan a los niños de las exigencias académicas, de manera que podría argumentarse que en febrero los niños hacen producciones que reflejan de forma “más fiel” lo que están en condiciones de producir como resultados de sus comprensiones, y no tanto por efectos de la evocación de las respuestas que en ese momento (en noviembre) se les estaba enseñando.

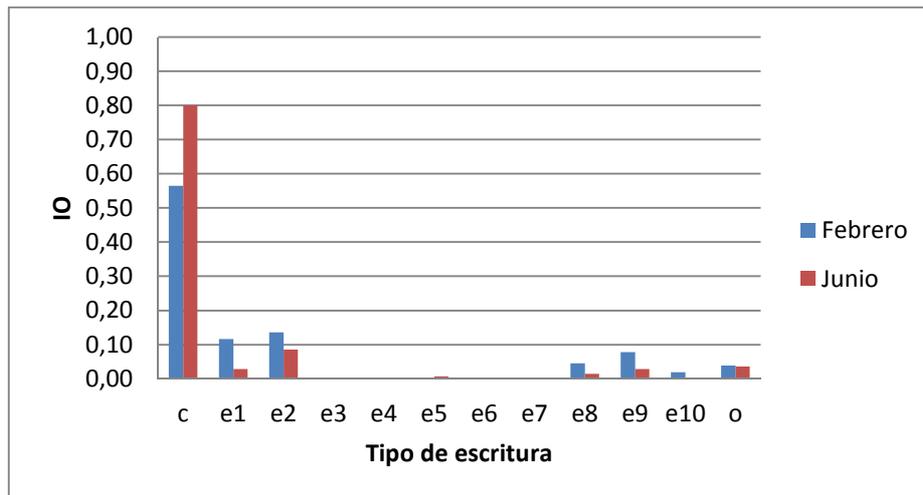
En noviembre y febrero, fechas en las que todavía muchos niños no han estabilizado el aprendizaje escolar, se aprecia la predominancia de conversiones que se rigen por la regla tipo “e1” (Ejemplo: abc se escribe como a00bc o a00b0c, a0c se escribe como a00c) sobre los demás tipos de escrituras no canónicas. El segundo mayor valor corresponde a conversiones que se rigen por la regla “e2” (Ejemplo: una representación de R_v del tipo

⁸⁸ En Colombia al finalizar el año hay un receso escolar de casi dos meses.

abc se escribe como a0bc en Ri-a. No se incluyen los casos a0c de Rv que terminan como ac, ya que se codifican como escritura e5, omisión de ceros intermedios).

La diferencia entre IO de e1 y IO de e2 decrece de noviembre a junio (en noviembre el IO de e1 es 0.38 y el IO de e2 es 0.14, lo que da una diferencia de 24 centésimas, mientras que en enero baja 13 centésimas y en junio es apenas de 3) y el decrecimiento de esta diferencia, al menos de noviembre a enero, no se da por un crecimiento de c, ya que precisamente ocurre lo contrario, en febrero decrecen las escrituras c con relación a noviembre; quizá este comportamiento indica que cuando el niño aún no tiene un dominio completo de las escrituras canónicas en el rango [1, 999] tiende a producir más escrituras no canónicas tipo e1 que e2 posiblemente porque las escrituras “e2” son el fruto de una mezcla entre la tendencia que resulta más “obvia” al niño para hacer estas conversiones y las enseñanzas que recibe del adulto (de la escuela y la casa) de eliminar los ceros. Sobre este hecho quizá obtengamos datos al estudiar los casos.

La gráfica 19 que aparece más adelante muestra el comportamiento del grupo B. Se incrementa el IO de escrituras canónicas de febrero a junio. Al final del proceso (junio) prácticamente no existe diferencia en el IO de escrituras canónicas entre los dos grupos (el IO de c en A es de 0.77 y en B es de 0.80). En las escrituras no canónicas e1 y e2 se aprecia una gran diferencia entre los dos grupos, mientras en el grupo A se observa un predominancia de escrituras e1 sobre las tipo e2 en noviembre y febrero, en el grupo B los IO de escrituras e2 son mayores que el IO de las de tipo e1 (IO de e1 en enero 0.12 y de e2 es 0.14 en enero, en junio es 0.03 y 0.09 para e1 y e2 respetivamente). Quizá este dato nuevamente sea indicador de lo comentado arriba, los niños del grupo B han recibido un proceso de enseñanza en el que se busca que al finalizar el año primero dominen las escrituras canónicas en el intervalo [1, 999], de manera que esto hace que aumenten el IO de e2 y disminuya el de e1; en cambio en el grupo A en el que más que fijarse la meta de lograr escrituras canónicas al finalizar el año, estaba el de incrementar el manejo de lo numérico en este intervalo apoyándose en formas de registro escrito más en correspondencia con el registro verbal, tienden a hacer las conversiones Rv => Ri-a según la regla e1 que según nuestra interpretación les resultan más apropiadas en tanto responden más a la sintaxis del registro verbal.



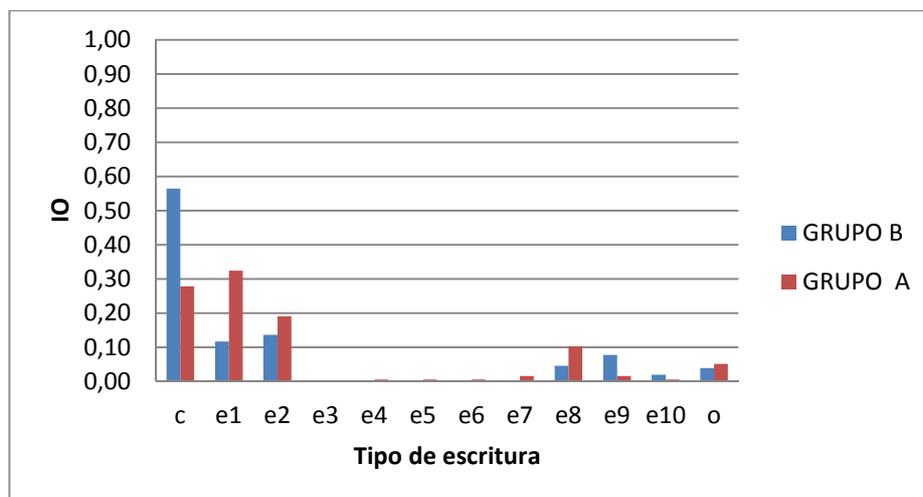
Origen: Fuente propia

Sujetos 20. TPE de feb. = 178 y TPE de junio = 235

Figura 19. IO del Grupo B en dos momentos (feb. y jun.). Rv => Ri-a en [100, 999]

7.1.2 Conversiones Ra => Ri-a en [1, 999] comparación de los dos grupos

En la figura 20 se comparan las producciones de los dos cursos en la prueba de febrero 2011 en el momento en que los niños inician segundo grado.



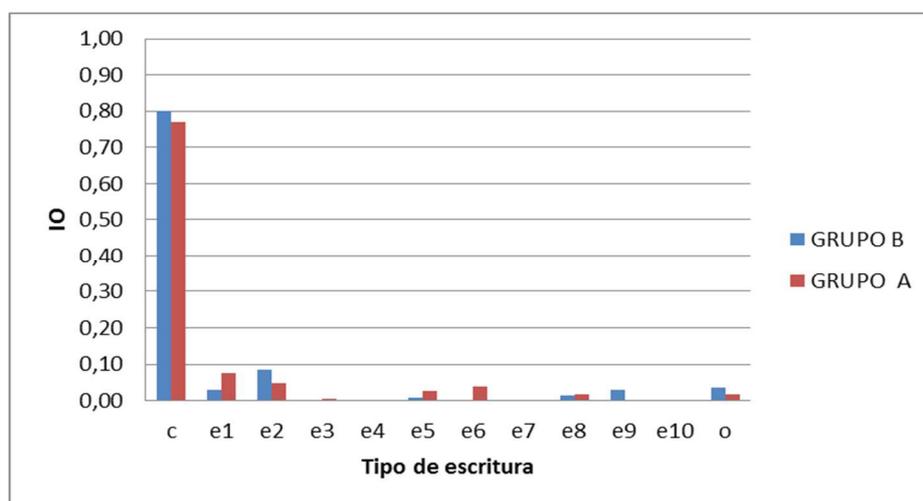
Origen: Fuente propia

Figura 20. IO del Grupos A y B prueba aplicada en febrero. Rv => Ri-a en [100, 999]

El IO del grupo B en escrituras canónica es notoriamente mayor que el del grupo A (de 30 centésimas). Esta diferencia es explicable, como ya se ha insinuado, en tanto que en la práctica de enseñanza común en la escuela se propone que al finalizar primero de primaria los niños dominen las representaciones en el registro indo-arábigo en el rango [1, 999], para lo que efectivamente trabajó la profesora de este curso, mientras que en el otro grupo si bien en septiembre se inició el desarrollo del pensamiento numérico en este rango, la meta no era entrenar a los niños para que produjeran representaciones indo-arábigas correctas de tres cifras.

En el grupo A las escrituras “e1” son notoriamente más frecuentes que las “e2” (por encima de 10 centésimas), mientras que en el grupo B los IO de estas dos escrituras son prácticamente iguales. Quizá, como se ha venido diciendo, esto tenga que ver con el hecho de que las escrituras “e2” son producciones “híbridas” que los niños realizan al intentar hacer conversiones $R_v \Rightarrow R_i-a$, combinando la sintaxis aditiva con la que los niños interpretan representaciones del registro verbal y la regla de “eliminar los ceros” que el profesor enseña.

En la gráfica 21 que se muestra más adelante, correspondiente a los datos de la prueba que se aplica en junio (tener presente que para el momento en el que se aplicó la prueba los dos grupos han cursado el primer semestre académico de segundo grado) muestra que los niños producen en su gran mayoría escrituras canónicas. Este hecho no es más que la muestra de que los niños han llegado a un punto en el que logran un manejo más o menos estable de la operación de conversión $R_v \Rightarrow R_i-a$, resultado que en gran parte es efecto del proceso de enseñanza escolar, sin embargo conviene no perder de vista que también tiene que ver con lo que se hace fuera de la escuela, este es un tema en el que la cotidianidad influye en los niños y en el que los adultos cuidadores de los niños intervienen intensamente.



Origen: Fuente propia

Figura 21. IO del Grupos A y B prueba aplicada en junio. Conversiones $R_v \Rightarrow R_i-a$ en [100, 999]

7.1.3 Análisis de resultados de conversiones $R_a \Rightarrow R_i-a$ en [1000, 9999]. Comparaciones entre los dos grupos

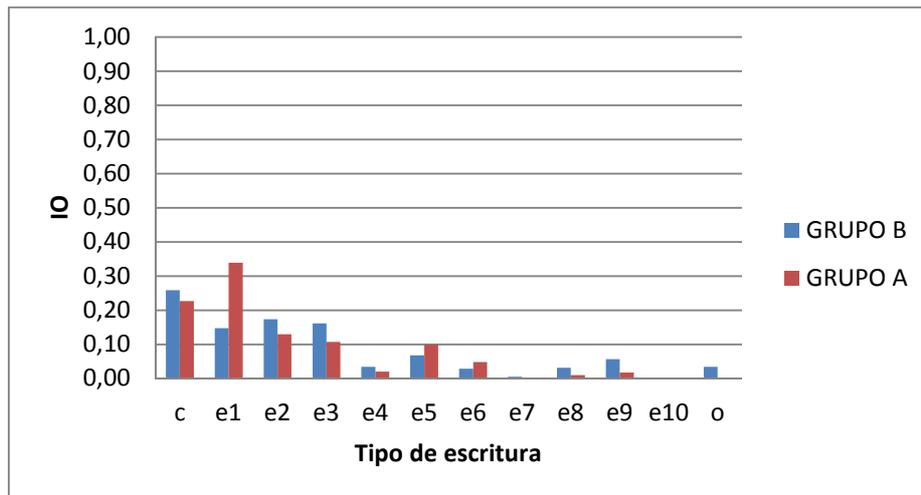
En este apartado se analizan las producciones de los dos grupos en la prueba de conversiones $R_a \Rightarrow R_{i-a}$ [1000, 9999], recuérdese que esta prueba fue aplicada únicamente una vez y que se hizo en el mes de junio-2011, momento de finalización de la experiencia didáctica.

La grafica 22 no muestra diferencias en las escrituras canónicas de un grupo a otro. El IO de escrituras c del grupo A es tres centésimas menor que IO correspondiente del grupo B; en cambio sí se observa alguna diferencia entre las escrituras no canónicas. En el grupo A la tendencia a producir escrituras del tipo “e1” es muy alta (un poco más de 21 centésimas) comparada con las de tipo “e2”. Los IO de los tipos de escrituras “e2”, “e3” e “e5” son semejantes. En el grupo B las escrituras “e1”, “e2” y “e3” son las de mayor IO con relación a las otras. Este grupo no muestra un tipo de escritura no canónica que supere a las demás, no se observa alguna tendencia como sucede con el grupo A.

Nuevamente en este rango numérico parece que se puede seguir sosteniendo que las escrituras “e2” y ahora, junto con las de tipo “e3”, son escrituras híbridas que el niño produce como combinación entre su tendencia a hacer las conversiones con la regla e1 que a él le resulta más apropiada y las reglas que le enseña el adulto.

Tabla 10
IO de los tipos de escrituras de ambos grupos en la prueba final, conversiones $R_v \Rightarrow R_{i-a}$ en [1000, 9999]

	GRUPO B	GRUPO A
	Junio 11	Junio 11
c	0,26	0,23
e1	0,15	0,34
e2	0,17	0,13
e3	0,16	0,11
e4	0,03	0,02
e5	0,07	0,10
e6	0,03	0,05
e7	0,01	0,00
e8	0,03	0,01
e9	0,06	0,02
e10	0,00	0,00
o	0,03	0,00
	1,00	1,00



Origen: Fuente propia

TPE grupo A = 392, TPE grupo B = 352

Figura 22. IO del Grupos A y B prueba aplicada en junio. Conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a en [100, 999]

Interesante reparar en la aparición de escrituras “e3” (recuérdese que responde a conversiones como $abcd \Rightarrow a1000bcd$, $a100bcd$, $a10bcd$ o $a1bcd$ y que incluye también los casos en que la regla vuelve a aplicarse para convertir el segmento correspondiente a la bcd). Obsérvese que estas escrituras no se dieron en las conversiones en intervalo [1, 999] en ninguno de los dos grupos, quizá su aparición tiene que ver con el hecho de discriminar en las representaciones verbales segmentos que corresponden al operador multiplicador, pero la pregunta es: ¿por qué el niño logra discriminar estas expresiones ahora y no lo hacía en el intervalo [1, 999]? Una posible explicación podría ser que expresiones como “dos mil”, “tres mil”, etc. en el R_v se encargan de mostrar con más claridad el operador que expresiones como “doscientos”, “trescientos”, etc.,⁸⁹ pero otra explicación posible, que vale la pena considerar, podría ser que en el momento en el que el niño está aprendiendo las conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a en [1000, 9999] es más sensible a identificar este operador multiplicador precisamente por sus progresos en el pensamiento multiplicativo y en la capacidad de reconocer unidades compuestas, lo que lo capacita para identificar expresiones como “cinco mil” como “varias veces una unidad de mil”. Sobre esto se buscará información en el análisis cualitativo.

⁸⁹ Son muchas más ocultas en quinientos, setecientos, novecientos. De la prueba con conversiones en [1, 999] de los siete casos solo hay una conversión “setecientos ocho” que incluye solo uno de estos tres casos. En la del intervalo [1, 9999] de los 15 casos solo hay uno “ocho mil quinientos seis”.

7.2 ANÁLISIS CUALITATIVO

En esta sección se describe y analiza la información correspondiente a las producciones de los cuatro casos de estudio. El análisis de esta información se realiza en dos niveles, uno de orden descriptivo y el otro interpretativo. A continuación se describe el procedimiento seguido y los apartados del documento en los que se encuentra la información correspondiente.

Transcripción de las entrevistas. En cada caso se transcriben las entrevistas para todas y cada una de las tareas estudiadas. Como se describió en el apartado de metodología las entrevistas fueron realizadas a lo largo de la experiencia didáctica, la primera de éstas se realizó en mayo de 2010 (entre el tercer y cuarto mes después de haber empezado el proceso en el aula) y la última entre mayo y junio de 2011 (el penúltimo y último mes, al cierre de la experiencia didáctica). Se realizaron entre 6 y 9 entrevistas a cada sujeto (caso uno 6, caso dos 9, caso tres 6 y caso cuatro 7). Las entrevistas duraron entre 40 y 60 minutos; su duración y cantidad variaron de acuerdo con diferentes factores: disponibilidad de los niños según el horario escolar, sus ritmos y sus propias ejecuciones; de manera que a veces se realizaron nuevas entrevistas porque se encontraban razones para ahondar en un aspecto particular identificado. No existe correspondencia uno a uno entre las entrevistas y cada una de las tareas descritas en el apartado No 6; en particular, se realizaron varias entrevistas para indagar sobre las conversiones entre representaciones de los dos registros Rv y Ri-a, sin embargo, sí se tuvo el cuidado de agotar la indagación sobre el total de las tareas en cada caso de estudio. Aunque no se forzó un paralelismo exacto en el contenido de las entrevistas de un sujeto a otro, se buscó indagar sobre los mismos aspectos más o menos en el mismo momento de la experiencia. La idea orientadora al planear y realizar las entrevistas a lo largo de la experiencia fue la de registrar cómo se iban dando cambios en la forma como los niños realizaban conversiones $Rv \Rightarrow Ri-a$ y las relaciones entre el progreso de los niños en la complejización de esta operación cognitiva y la construcción de significado de las representaciones que hacía.

Estas transcripciones aparecen en el anexo A en el CD inserto. Dentro de la carpeta anexo A el lector encuentra un archivo para cada uno de los cuatro casos.

Primer nivel de análisis: descripción detallada y primer análisis de cada caso. Se trata aquí de dar cuenta de dos acciones: a) describir las producciones de los niños en las

diferentes tareas en aquellos apartes de las entrevistas que se consideran relevantes para este estudio y b) realizar, en un primer nivel, el análisis de las ejecuciones de los niños en estas tareas; en este nivel se procura mantener un nivel descriptivo. Esta información la encuentra el lector en el anexo B en el CD inserto, en la carpeta anexo B.

Esta descripción y análisis se hace caso por caso y se focaliza en seis de las diez tareas. En este anexo el lector encontrará la información organizada así: primero la descripción y análisis de las tareas 1, 2 y 3 (enumeración, cuantificación mediante grupos de diez y sueltas, y organización y descripción de unidades compuestas); estas tareas se estudian una por una. Después aparece lo correspondiente a las tareas 4, 6 y 7 (conversiones entre representaciones de los registros R_v , R_{i-a} , R_{vm} , $R_{(i-a)m}$ y R_b), en este caso y a diferencia de las tres anteriores, la descripción y análisis se hace en bloque; la razón de fusionar estas tareas responde al hecho de que estas actividades están entrecruzadas y se dan a lo largo de la experiencia didáctica. Aunque se analiza gran parte de la información de estas seis tareas, la pretensión no es agotarla en su totalidad; se dejan de lado aquellos fragmentos que a juicio del autor son redundantes o que no resultan pertinentes para el análisis. Finalmente, las producciones de los niños en las cuatro restantes tareas (5, 7, 8, y 9) no se analizan para cada caso, solo se toman algunos fragmentos como ilustración de aspectos específicos del análisis y en estos casos su análisis no aparece en el anexo B, los análisis de estas partes se incorporan directamente en el cuerpo principal de este documento.

Segundo nivel de análisis: análisis intra e intersujetos. En este nivel se toma la información procesada en el anterior y se somete a un análisis de orden superior. Se realiza un análisis intrasujetos, estableciendo relaciones entre las diferentes producciones hechas por un mismo niño en diferentes momentos, tanto en una misma entrevista como de diferentes entrevistas y, junto a este análisis, se realiza otro, intersujetos, en el que se comparan las producciones de dos o más de los casos, con esto se busca de identificar regularidades y diferencias.

En la tabla 11 se muestra la edad y nivel de desempeño de los cuatro casos de estudio.

Tabla 11
Edad y nivel de desempeño de los sujetos de estudio

	Caso uno Niña A	Caso dos Niña MF	Caso tres Niña N	Caso cuatro Niño M
Edad al inicio (febrero de 2010)	6 años y 1 mes	6 años y 3 meses	6 años y 2 meses	6 años Y 3 meses
Desempeño inicial en matemática	Bajo	Medio	Medio	Alto

Origen: Fuente propia

7.2.1. Análisis de las actuaciones tareas tipo No 1 (de enumeración)

La tabla 12 describe las ejecuciones de los cuatro casos en la tarea enumeración (se entrega una colección de objetos y el entrevistador pregunta: ¿cuántos hay?)

Tabla 12
Descripción de las actuaciones de cada caso en la tarea Tipo No 1

Caso uno Niña A Nivel: bajo	Caso dos Niña MF Nivel: medio	Caso tres Niña N Nivel medio	Caso cuatro: Niño M Nivel: alto
Ubicación E1,A1 (1, 9) Mayo 2010 ^a La niña maneja los principios de enumeración. Enumera sin ayuda hasta 39. Cuando se le ayuda con la siguiente palabra “cuarenta” continúa tomando cada objeto mientras dice: cincuenta, sesenta,..., noventa”, por cada objeto tomado. Podría decirse que a partir de cuarenta centra la atención en la enunciación de la secuencia de palabras correspondientes a los nodos de decenas y termina haciendo corresponder a cada decena un objeto	Ubicación E conjunta, A1 (1, 6) Abril. 2010 Ubicación E1,A2 (36, 39) Abril 2010 La niña maneja los principios de enumeración. Enumera sin ayuda hasta 29. Después de 29 dice “veinte”, y continúa veintiuno, veintidós,..., Veintinueve, a partir de ahí vuelve a empezar en 20.	La niña maneja los principios de enumeración hasta 29. A partir de ahí, al dársele el nombre de una nueva decena, sigue enumerando correctamente hasta una nueva decena Ubicación E2,A1 (1, 6) 13 de Sept. 2010 La niña maneja los principios de enumeración. Enumera sin ayuda hasta 28. Después de 28 dice cuarenta, ..., cuarenta y nueve y pasa a 60	Ubicación E1,A2 (36, 39) Abril 2010 La niña maneja los principios de enumeración. Enumera sin ayuda hasta 29. Después de 29 dice “veinte”, y continúa veintiuno, veintidós,..., Veintinueve, A partir de ahí vuelve a empezar en 20.

^a E1,A1 (1, 9) hace referencia a entrevista No 1, actividad No 1 y los reglones 1 al 9.

Los niños manejan los principios de enumeración (ver sección 6.5.2, en análisis de este tipo de tareas). El que menos maneja la sucesión de palabras de contar lo hace hasta 29. Los dos sujetos de nivel medio aunque no recuerdan la nueva palabra nodo que sigue una vez que se les da construyen por sí solo la nueva serie (la palabra nodo y uno, la palabra nodo y dos,..., la palabra nodo y nueve). El sujeto uno (A), de nivel inicial bajo, es el único caso en el que a pesar de dársele la palabra nodo no sigue la sucesión de uno en uno, en lugar de eso, enuncia la sucesión de diez en diez. Sin embargo no puede afirmarse que esto se deba a que no ha comprendido la regla de enunciación (nodo uno, nodo dos, etc.) en ocasiones cuando se le apoyaba en el aula seguía de uno en uno, más allá de cuarenta. El sujeto cuatro, de nivel inicial alto, domina la habilidad de enunciar la sucesión de palabras de contar al menos hasta 99.

7.2.2 Análisis de las actuaciones tareas tipo No 2 (Cuantificación mediante grupos de diez y sueltas)

Para evitar sobrecargar la exposición aquí se omite el análisis de cada caso, estos se encuentran en el anexo B, en este apartado el lector encuentra el análisis intersujetos.

Los cuatro sujetos estudiados pueden ejecutar la instrucción de separar “X grupos de diez y Y sueltas” y son capaces de repetir un enunciado de este tipo; también, dan muestra de entender este procedimiento como método de cuantificación, entienden que para contestar la pregunta ¿cuántos hay? se organizan grupos de diez. La dificultad que se presenta a tres de los cuatro casos (los casos 1, 2 y 3) está en describir el resultado después de organizar los grupos de diez, mediante un enunciado de la forma ‘X grupos de diez y Y sueltos’. El caso uno, que parece ser el que presenta mayores dificultades en esta tarea, empieza haciendo centraciones, es decir, al describir la disposición obtenida, unas veces centra la atención en los grupos de diez y se olvida de las sueltas, o, al contrario, centra la atención en los elementos sueltos, pero se olvida de los grupos de diez. Aunque los casos dos y tres también hacen centraciones estas se superan rápidamente.

Estos tres casos, tienen en común, la dificultad que presentan para producir el enunciado ‘X grupos de 10’, en su lugar producen expresiones como ‘10 grupos’, ‘X grupo’ (omiten decir cuántos elementos tiene cada grupo), ‘X grupos de X’ o ‘10 grupos de X’, la diferencia del primer caso con los otros dos, consiste en que el caso uno, aunque

con el apoyo del entrevistador enuncia las dos partes, en una nueva situación vuelve a cometer los mismo errores.

El caso cuatro, el de nivel alto no tiene dificultad en esta tarea, aunque es ilustrativo destacar que en un primer intento en lugar de decir ‘tres grupos de diez y cuatro sueltas’ dice “*diez grupos de diez...*” pero el mismo se interrumpe antes de terminar la expresión y de inmediato se corrige y produce el enunciado correcto.

El caso uno parece mostrar una dificultad aún más elemental que el de la producción de enunciados para describir la disposición de grupos de diez y sueltas que se ha descrito, cuando a esta niña se le pregunta ¿cuántos palos hay? (unidades de uno), ve la configuración de grupos de diez y sueltas, muestra desconcierto y pregunta: ¿estos?, muestra los grupos de diez o los palos sueltos, como si no entendiera a qué colección se refiere el entrevistador (a la de los grupos de diez o a la de los palos sueltos). Esta misma conducta aparece en el caso dos aunque es superada más rápidamente que en el primero. Queda por verse con las otras tareas si efectivamente esta conducta tiene que ver con el hecho de que al separar los unos en dos colecciones (la de los grupos de diez y la de los sueltos) a la vista de los niños, desaparece un todo homogéneo que le cuesta describir porque exige tener presente dos tipos de unidades (las de los dieces y las de los unos) e indagar si esto tiene que ver con el significado que pueda asignarse a las representaciones numéricas en Rv y Ri-a.

Tabla 13
Análisis de ejecuciones tarea tipo 2. Cuadro comparativo de los cuatro casos

Aspectos de la tarea	Caso uno Niña A	Caso dos Niña MF	Caso tres Niña N	Caso cuatro Niño M
Reconocimiento de separar en G de 10 y S como método de cuantificación	No al comienzo. Sí al final	Sí desde el comienzo	Sí desde el comienzo	Sí desde el comienzo
Separación en G de 10 y S	Lo hace sin dificultad y desde el comienzo	Lo hace sin dificultad y desde el comienzo	Lo hace sin dificultad y desde el comienzo	Lo hace sin dificultad y desde el comienzo
Referencia de la pregunta ¿cuántos hay?	Al comienzo no entiende que se refiere al todo, pregunta si a los G o las S. Le cuesta superar la dificultad	Al comienzo no entiende que se refiere al todo, pregunta si a los G o las S. Supera la dificultad rápidamente	Desde el comienzo entiende y sin dificultad que la pregunta se refiere al todo.	Desde el comienzo entiende y sin dificultad que la pregunta se refiere al todo.

Descripción de los G de 10 y S	Hace centraciones	Al comienzo enuncia solo partes:	Al comienzo enuncia solo partes:	Produce el enunciado correcto. aunque en algún momento produce enunciados semejantes a los otros casos, que corrige de inmediato y por iniciativa propia
	Algunos enunciados: X G de 10 Y sueltas 10 G de X y Y S La dificultad prevalece	X G de 10 Y sueltas Y G de 10 (cambia X por Y). Al final produce el enunciado correcto	X G de 10 Y sueltas Y G de 10 (cambia X por Y). Al final produce el enunciado correcto	

Origen: Fuente propia

7.2.3 Análisis de las actuaciones tarea tipo No 3 (organización y descripción de unidades compuestas)

Debido a la dificultad bastante frecuente que presentaron los niños del grupo A (grupo en el que se desarrolló la experiencia didáctica) para producir enunciados de la forma X grupos de diez y Y sueltas que se requería en la tarea anterior, se decidió indagar por la capacidad de los niños de comprender y producir enunciados que incluyeran colecciones de unidades compuestas. Se trataba de estudiar las producciones de los niños, tanto para seguir instrucciones del tipo: separe 4 grupos de 3 (el niño tenía a la vista varios grupos de dos, de tres, hasta de cinco elementos), como para producir enunciado que describieran disposiciones de ese tipo. Precisamente en este apartado se trata de analizar las producciones de los cuatro casos. Para abreviar, a enunciados como ‘4 grupos de 3’, es decir de la forma ‘a grupos de b’ los representaremos como ‘a G de b’, la letra ‘a’ se reservará para indicar el número de grupos y la ‘b’ para la cantidad de unidades por grupo.

La tabla 14 compara las producciones de los cuatros casos en estas tareas de tipo No 3. Para efectos de la comparación se han distinguido los aspectos que muestra la tabla. El primero, comprensión inicial y básica de la tarea, hace referencia a lo que se observa la primera vez que se presenta la tarea, es lo que se puede inferir sobre la comprensión que tiene el niño cuando por primera vez se le dice: “separe a G de b”. El segundo, el de repetición, corresponde al enunciado que produce el niño inmediatamente después de que el entrevistador emite la instrucción, bien sea porque realice esta acción espontáneamente o como respuesta a la pregunta ¿qué fue lo que le dije? (o ¿qué es lo que va a hacer?). El tercero, el de recuerdo, se da cuando entre el enunciado producido por el entrevistado y

el dado por el entrevistador ocurren dos o más turnos de conversación. Los otros dos aspectos siguientes, de ejecución y descripción, corresponden a lo que indican estas palabras, el primero a lo que separa el niño y el segundo lo que enuncia cuando trata de describir lo recién separado (no importa que esto separado sea o no lo que se pidió separar). Por último se agregan dos aspectos que si bien no diferencian en nada a los cuatro niños (¿cuántos grupos hay? y ¿cuántas fichas hay?, la primera pregunta por el valor de 'a' y la segunda por el valor de 'b') son útiles para analizar si las dificultades de los niños responden a limitaciones para identificar los valores implicados en estas dos preguntas o está más bien en otro lugar.

Tabla 14

Análisis de ejecuciones tarea tipo 3 (separar ‘a G de b’). Cuadro comparativo de los cuatro casos

Aspectos de la tarea	Caso uno Niña A	Caso dos Niña MF	Caso tres Niña N	Caso cuatro Niño M
Comprensión inicial y básica de la tarea	Inicialmente aunque comprende que hay que separar grupos no entiende de cuáles, pero supera esta dificultad	Comprende que se trata de separar grupos. En e primer intento separa respetando la condición b, saca varios G. pero parece no saber cómo continuar	Inicialmente comprende que se trata de separar grupos. En lugar de separar a G de b separa 1 G de c (c diferente de b)	Inicialmente comprende que se trata de separar grupos. En el primer intento separa respetando la condición b, pero saca varios G. sin ningún control de “a”
Repetición de la Instrucción a	Sí	En lugar de decir a G de b en algunas ocasiones dice: a G de a b G de a	Sí	Sí
Recuerdo de la instrucción b	En unos caso sí en otros no	—	Invierte a G de b recuerda b G de a	Sí
Ejecución de la acción	A veces en lugar de a G de b organiza a G de a o b G de b	A veces en lugar de a G de b organiza b G de a	Invierte a G de b organiza b G de a	Sí Aunque en el primer intento realiza c G de b (c diferente de a)
Descripción de lo separado	Fracasa con mayor frecuencia. Varía la forma de descripción. Tiene a G de b dice: a G (olvida de b) b G de a (invierte) a G de a	Termina produciendo a G de b. Enunciados producidos en sus intentos: a G y cuenta 1, 2, ..., b. a G de b	Termina produciendo a G de b. Enunciados producidos en sus intentos: 1 G de a y 1 G de b, 1 G de a y b de esas...(fichas), b G...	Termina produciendo a G de b. Enunciados producidos en sus intentos a G, a G y b, a G y de b fichas.
¿Cuántos grupos?	Sí	Sí	Sí	Sí
¿Cuántas fichas en cada grupo?	Sí	Sí	Sí	Sí

Origen: Fuente propia

^a Se admite como acción de repetición el enunciado que produce el niño inmediatamente después de que la emite el entrevistador, bien sea que se realice espontáneamente o como respuesta a la pregunta ¿qué fue lo que le dije? (o ¿qué es lo que va a hacer?).

^b Se dice que recuerda cuando entre el enunciado producido por el entrevistado y el dado por el entrevistador ocurren dos o más turnos de conversación.

Al comienzo los niños dan muestra de entender la tarea de forma muy global, comprenden que se trata de separar grupos, pero no saben exactamente cómo hacerlo. La niña A no entiende de cuáles grupos hay que separar (no comprende eso: "... grupos de b"). La niña MF y el niño M (casos 2 y 4) desde el comienzo identifican que hay que separar grupos de b, pero se confunden como si no pudieran coordinar la otra dimensión (a), la niña separa algunos y se queda pensando como si no encontrara la forma de saber cuántos y el niño se limita a sacar los grupos de b uno tras otro como si simplemente se trata de sacar grupos de b. La niña N (caso 3) se limita a sacar un grupo cualquiera. En los cuatro casos los niños dan muestra de entender de qué se trata la tarea con una pequeña explicación del entrevistador aunque no la logren resolver, simplemente ellos entienden que hay que sacar una cantidad de grupos y que estos no son cualquiera, sino que son aquellos que tienen una cantidad de elementos.

Las dificultades de los niños se observan al ejecutar la instrucción y en producir el enunciado de la forma "a G de b" que describa los grupos que se han separado. Aunque los datos no brindan información suficiente como para afirmar que hay patrones de ejecución, sí se encuentran algunas ejecuciones típicas; en lugar de organizar a G de b hacen inversión y separan b G de a; esto se observa más claramente en las niñas de nivel inicial medio MF y N, en cambio, la niña A, de nivel inicial bajo, varía más en sus ejecuciones se encuentran otras formas: a G de a o b G de b (obsérvese que en ambos casos hace $a = b$). Nuevamente en esta tarea el niño M, de nivel alto, ejecuta correctamente las tareas. Estos datos permiten afirmar que los intentos fallidos de los niños de ejecutar la instrucción que se les da no están en que no entiendan el sentido global de la tarea, sino que la dificultad está en coordinar a y b. Las ejecuciones a G de a y b G de b de A, en sus intentos fallidos, que pueden considerarse como las más elementales, son muy dicientes en este sentido, podría afirmarse que A muestra que cada vez le presta atención a uno de los dos valores a o b y simplemente desconoce el otro. Parece que las dos niñas de nivel medio hacen una producción fruto de una comprensión más compleja, en sus ejecuciones están presentes a y b, pero hacen la inversión. Los datos obtenidos no dan para arriesgar un explicación sobre por qué estas niñas hacen inversión y no es objeto de esta investigación, para efectos de este trabajo basta simplemente, dejar constancia de que al ejecutar una instrucción como 'separe a G de b' algunos niños muestran sus esfuerzos por coordinar dos aspectos involucrados en la tarea: el número de grupos (a) y la cantidad de elementos por grupo (b) y que eso los lleva a producir soluciones parciales en la que hacen

centración y prestan atención a uno de los dos aspectos omitiendo el otro o que, a veces, intentan captar ambos, pero terminan invirtiendo.

Las descripciones que ellos hacen de los resultados de sus ejecuciones ofrecen información interesante sobre este hecho de no coordinación de los dos aspectos a y b. Son ilustrativos los intentos de los tres casos 2, 3 y 4 antes de ser capaces de describir correctamente mediante un enunciado de la forma a G de b las disposiciones de grupos que ellos separan. La niña del caso tres muestra sus esfuerzos y progresos hasta llegar a coordinar las dos dimensiones correspondientes a 'a' y a 'b' primero dice 1 G de a y 1 G de b, avanza un poco y dice 1 G de a y b de esas... (como si en ese momento no lograra encontrar un enunciado adecuado para las unidades simples) y por último dice: b G. A la niña MF le ocurre algo semejante produce a G y b, también produce enunciados del tipo b G. El caso cuatro, el del niño M, quien es el que más rápido supera sus dificultades, muestra una secuencia de ensayos bien interesante: primero produce a G, el mismo cae en la cuenta que ha dejado por fuera algo de la situación y se corrige, dice: a G y b (la misma forma que produce MF en algún momento) y después dice a G y de b, hasta que al final dice a G de b. Estos datos muestran, como se ha dicho, los esfuerzos y progresos de los niños para coordinar las dos dimensiones que están involucradas en la producción de un enunciado de la forma a G de b.

En esta tarea podría decirse que esta dificultad de coordinar las dos dimensiones a y b que están involucradas se evidencia, tanto en el plano de la ejecución (que mostraría el proceso de comprensión del enunciado 'a G de b') como en el de la enunciación (que mostraría el proceso de producción del enunciado a G de b). Pero también muestra una secuencia de esfuerzos que ilustra no solo el paso de menos coordinación a más coordinación de las dos variables, sino —y esto es lo más importante— muestra el progreso de una enunciación meramente aditiva a una multiplicativa; se pasa de enunciados cuya estructura es a G y b (se podría llamar aditiva) a una de la forma a G y b, a medio camino y por último, a enunciados de la forma a G de b, estos sí de estructura propiamente multiplicativa.

Antes de cerrar este apartado conviene establecer alguna relación entre los resultados de las tareas de tipo No 2 descritas en el apartado anterior y los que aquí se acaban de describir. Se empieza por explicitar algunas semejanzas y diferencias entre las tareas de estos dos tipos. La tabla 15 ilustra esta comparación

Tabla 15

Comparación entre tareas tipo No 2 y tipo No 3

TAREAS TIPO No 2	TAREAS TIPO NO 3
Cuantificación mediante grupos de diez y sueltas	Organización y descripción de unidades compuestas
Parte de una colección de unos que se separan en grupos de diez	Parte de colecciones de unidades compuestas (grupos, montones o torres) con cantidades diferentes de unos (de b) de las que se separa cierta cantidad de esas unidades (todas con el mismo b).
Resultado final: X G de 10 y Y S	Resultado final: a G de b
Estructura aditivo-multiplicativa susceptible de reducirse a una estructura aditiva X G y Y S (se olvida o se sobreentiende que son de diez)	Estructura multiplicativa. No es susceptible de reducción

Origen: Fuente propia

La ejecución de la acción en las tareas de tipo No 2 puede resultar de menor demanda cognitiva para el niño que en el caso de las tareas de tipo No 3, en la primera basta simplemente entender que hay que contar grupos de diez y al final se obtiene el resultado esperado; en cambio, en las de tipo No 3, tiene que prestar atención a dos dimensiones: el número de elementos por unidad (b) y después la cantidad de unidades de este tipo (a).

Igualmente la producción de un enunciado que describa las composiciones en el caso de las tareas de tipo 2 hace una demanda cognitiva mayor que las de tipo 3, en tanto la primera tiene una estructura aditivo-multiplicativa y la segunda solamente multiplicativa. En el primer caso, primero se debe enunciar (X G de 10) que equivale a lo que tiene que hacerse en las tareas de tipo 3 (a G de b) y después agregar los elementos sueltos. Sin embargo, el niño puede reducir esta estructura a una más simple de la forma X G y Y S, para ello le basta hacer caso omiso de la cantidad de unidades simples de los grupos, y esto se puede hacer porque precisamente el método de cuantificación permite sobreentenderlo, ya que a los niños se les enseñó que para contestar la pregunta ¿cuántos hay? había que hacer todos los grupos de diez y eso se practicó en el aula.

Al comparar las producciones de cada sujeto en las dos tareas se constata una correspondencia casi exacta en los niveles de desempeño en cada caso. El caso uno muestra en ambas tareas el nivel de desempeño más bajo, los casos 2 y 3 (nivel de desempeño inicial medio) muestran desempeños medios en ambas tareas y el caso 4, el nivel inicial alto, muestra desempeños más altos que los otros tres casos. Por otra parte aparecen las mismas dificultades de coordinación entre las dimensiones de las tareas en

la acción de la enunciación y se producen errores semejantes, tanto de centración y de inversión (en la tarea dos el caso 1 llega a enunciar 10 G de X y Y S, el caso 3 llega a decir: Y G de 10). La acción de ejecución en la tarea No 2 resulta más simple; obsérvese en la tabla de la tarea tipo No 2 que los cuatro casos pueden hacer la separación en grupos de diez y sueltas.

7.2.4 Análisis de las actuaciones tareas 4, 6 y 7 (Conversiones entre representaciones Rv, Ri-a, Rvm, R(i-a)m y Rb)

En este apartado se analizan las ejecuciones de los cuatro casos con relación a las diferentes conversiones que se estudian en este tipo de tareas.

7.2.4.1 Comparación de conversiones Rv => Ri-a realizadas por los cuatro casos

En las tablas 16 a 19 se registran los tipos de escrituras producidas por los cuatro casos al realizar conversiones Rv => Ri-a en diferentes momentos a lo largo de la experiencia didáctica. Estas tablas permiten apreciar las dinámicas de los cambios que se producen, en esta sección se trata de compararlas y posteriormente, cuando se estudien en detalle los procesos de los niños se podrán avanzar descripciones sobre los mecanismos de estos cambios y quizá ofrecer algunas explicaciones sobre ellos.

Antes de ver las tablas conviene recordar los tres tipos de escrituras no canónicas que se encuentran en ellas (explicadas en la sección 6.7). La escritura e1 corresponde a la conversión Rv => Ri-a en la que la representación original de Rv se convierte escribiendo el nodo inicial; en el intervalo numérico [100, 999] serían de las forma abc => a00bc, a0c => a00c o ab0 => a00b0 y en [1000, 9999] de la forma abcd => a000bcd si la representación inicial de Rv corresponde a una expresión completa y si la expresión es incompleta variará en su forma según sea representación original (con ceros intermedios a00d, a0cd, ab0d, con ceros finales ab00, abc0, o mixtas a0c0), pero con el mismo principio de las de intervalo [100, 999] se escribe el nodo a000 seguido de la conversión de la parte restante (la conversión de esta última parte puede o no ser canónica). La escritura e2 corresponde a conversiones que se hacen como en e1 pero omitiendo uno, dos o todos los ceros del nodo, sería de la forma abc => a0bc, en el intervalo numérico [100, 999] o abcd => a00bcd (o a0bcd) en el intervalo [1000, 9999] en el caso de las representaciones en RV completas y de forma análoga en los casos de representaciones incompletas, excluyendo las formas a00d y a0bd que se confunden con la omisión de

ceros intermedios y que se clasifican como escrituras e5; precisamente estas escrituras e5 en [100, 999] corresponden a conversiones de la forma a0c => ac y en [1000, 9999] a a00d => ad (o a0d) y a0cd => acd.

Tabla 16
Resumen de escrituras producidas por el caso UNO en conversiones Rv => Ri-a

Representación Inicial en Rv	Sept. 2010	Nov. 2010	Feb. 2011	Mayo 2011	Mayo 2011	Junio 2011	Prueba final
[100, 999] Completa	e2 c	c	c	c			c
[100, 999] Incompleta a0c	c	c	e1				c
[100, 999] Incompleta ab0	e2 c ^a		c				c
[200, 299] Completa	e1	e2		c	Produce las escrituras c consistentemente	c	c
[200, 299] Incompleta a0c				e5/e1		e5/c	c e1
[200, 299] Incompleta ab0							c
[300, 999] Completa	c e1	e1		e1/c		c	c
[300, 999] Incompleta a0c		ac00 ^b				(e5 o e1)/c	c e2
[300, 999] Incompleta ab0						e2/c	c
[1000, 9999] Completa						e2/c	Produce e1 consistente-mente
[1000, 9999] Incompleta ceros intermedios							
[1000, 9999] Incompleta con ceros al final							

Origen: Fuente propia

Notas. Para describir la forma de la representación inicial en Rv, como ya se ha comentado en este trabajo, se indica el intervalo que corresponde al número que la expresión verbal representa y, abusando de la notación, se escribe la forma que tomaría su representación cuando es convertida a una representación en Ri-a

^a Cuando aparecen dos o más escrituras en una misma celda significa que al convertir diferentes representaciones de ese tipo se produjeron escrituras de esos tipos. Cuando aparecen dos o más escrituras separadas por '/' significa que la de la izquierda se cambió por la de la derecha

^b Esta escritura es la omisión de cero (e5) y agrega dos ceros.

Tabla 17

Resumen de escrituras producidas por el caso DOS en conversiones Rv => Ri-a

Representación Inicial en Rv	Oct. 2010	Nov. 2010	Feb. 2011	Mayo 2011	Prueba final	
Completa	e2			c		
[100, 199]	Incompleta a0c	c		—		
	Incompleta ab0			—		
[200, 299]	Completa	Produce escrituras e2 consistentemente	Produce escrituras e1 consistentemente	Produce escrituras e1 consistentemente	c	Produce escritura c consistentemente
	Incompleta a0c				e5/c	
	Incompleta ab0				e5/c	
	Completa			c		
[300, 999]	Incompleta a0c			e5/c		
	Incompleta ab0		—	e5/c		
[1000, 9999]	Completa				Produce e1 consistentemente	
	Incompleta ceros intermedios					
	Incompleta con ceros al final					

Origen: Fuente propia

Tabla 18

Resumen de escrituras producidas por el caso TRES en conversiones Rv => Ri-a

	Representación Inicial en Rv	Oct. 2010	Nov. 2010	Feb. 2011	Mayo 2011	Prueba final
	Completa	e2			c	
[100, 199]	Incompleta a0c	c			—	
	Incompleta ab0				—	
[200, 299]	Completa	Produce escrituras e2 consistentemente	Produce escrituras e1 consistentemente	Produce escrituras e1 consistentemente	c	Produce escritura c consistentemente
	Incompleta a0c				e5/c	
	Incompleta ab0				e5/c	
	Completa				c	
[300, 999]	Incompleta a0c				e5/c	
	Incompleta ab0		—		e5/c	
[1000, 9999]	Completa					Produce e1 consistentemente
	Incompleta ceros intermedios					
	Incompleta con ceros al final					

Origen: Fuente propia

Tabla 19

Resumen de escrituras producidas por el caso CUATRO en conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a

Representación Inicial en R_v		Oct. 2010	Nov. 2010	Feb. 2011	May. 2011	Prueba final
[100, 199]	Completa	c e2/c	Produce escrituras c consistentemente			
	Incompleta a0c	c				
	Incompleta ab0	—				
[200, 299]	Completa	—				
	Incompleta a0c	c				
	Incompleta ab0	—				
[300, 999]	Completa	c				
	Incompleta a0c	e5/c				
	Incompleta ab0	c				
[1000, 9999]	Completa	c	e3		c	
	Incompleta ceros intermedios	e5 /c				
		e5 /e	e3 ^a		e2/c	
		5				
Incompleta con ceros al final		—		—		

Origen: Fuente propia

^a Corresponde a la conversión de una representación en R_v cuya expresión es incompleta de la forma a0c0

Análisis de las conversiones correspondientes al intervalo [100, 999]. La información de las cuatro tablas 16 a 19 permite hacer las constataciones siguientes:

- En septiembre y octubre de 2010, momento en el que en la experiencia didáctica aún no se había empezado a extender el manejo del número —y en particular la numeración— al intervalo [100, 999] se observa que los tres casos de los niveles I y II al realizar las conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a producen escrituras canónicas (c) para pocos tipos de representaciones en R_v , generalmente en el rango [100, 199], en los otros casos generalmente producen escrituras de los tipos e1 y e2. El caso cuatro, el de nivel III, aun cuando en todos las conversiones termina con escrituras tipo c para las diferentes formas

de la representación original en R_v , en algunos casos, en sus primeros intentos, antes de producir la escritura canónica realiza escrituras no canónicas (e2 y e5) que corrige por cuenta propia. Las niñas de los casos dos y tres son consistentes en el tipo de escrituras no canónicas que producen en esa primera entrevista, la niña del caso dos, realiza sus conversiones siguiendo la regla e2, mientras que la niña del caso tres utiliza la regla e1; en cambio la niña del caso uno produce los dos tipos de escrituras e1 y e2, la primera de estas para el intervalo [200, 299] y la segunda para [100, 199], en este último intervalo esta niña también produce algunas escrituras canónicas. Más adelante se examinará esta variación de regla de conversión, pues llama la atención que a veces se cambia incluso cuando se realizan conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a en las que la representación original tiene la misma forma y lo único que cambia es el intervalo numérico (en particular cuando la forma de la representación original es de la forma abc, es decir representaciones cuya expresión es completa).

- En los cuatro casos aumentan las conversiones que conducen a escrituras tipo c desde la primera a las últimas sesiones (se habla de sesión para hacer referencia a una entrevista o una prueba escrita), especialmente cuando se trata de conversiones de representaciones de R_v cuyas expresiones son completas, sin embargo en las últimas sesiones todavía siguen apareciendo escrituras no canónicas, incluso en los casos uno y tres todavía aparecen en la prueba final.

- La escritura e5 (la de omisión del cero intermedio $a0c \Rightarrow ac$) solo aparece en la primera entrevista en el niño caso cuatro (nivel alto) en los demás casos no aparece, estos niños empiezan a producir este tipo escrituras solo cuando en el aula se inicia de forma sistemática la enseñanza del número en el rango [100, 999] y en particular la enseñanza de las conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a; en otras palabras, en el momento en que se empieza a introducir la escritura convencional (o escritura de los adultos como se llamó en la aula) que precisamente supone la idea de eliminar ceros de los nodos.

- Las niñas de los casos uno y tres muestran intermitencia en sus producciones, resulta difícil identificar un patrón de cambio de una sesión a otra, tan solo parece lícito afirmar una constatación que puede resultar bastante evidente: en el caso de conversiones de representaciones en R_v cuyas expresiones son completas (de la forma abc) los niños llegan más pronto a la escritura canónica que en las otras formas. La niña del caso dos muestra con mayor claridad los cambios en la regla que utiliza de una sesión a otra:

empieza con e2, en la siguiente sesión pasa a e1, que mantiene en la siguiente y en la penúltima sesión produce escrituras canónicas al convertir expresiones verbales completas y e5 en las incompletas, hasta terminar con escrituras canónicas en la prueba final. La niña del caso tres no muestra una dinámica tan nítida como en el caso anterior, pero se puede afirmar que en la prueba de noviembre de 2010 realiza las conversiones aplicando la regla e1, excepto en algunas formas en el intervalo [100, 199], mantiene estas reglas en la siguiente sesión con una pequeña diferencia, consistente en que aumenta los casos en que produce escrituras canónicas, aunque para esas mismas formas todavía produce escrituras e1, en la tercera sesión sin abandonar escrituras e1, también produce e2 y e5, en la prueba final sigue produciendo además de escrituras canónicas, escrituras e1, e2 y e5; en una entrevista posterior a esta prueba se aprecia una mayor consolidación de las escrituras canónicas. El caso cuatro mantiene sus escrituras canónicas a partir de la segunda sesión de trabajo (al final de primero).

- Al interior de una misma sesión las producciones de cada caso muestran más consistencia, excepto en el uno. Esta niña presenta variaciones al convertir representaciones en Rv que tienen la misma forma, como ocurre en sesión de noviembre 2010 cuando la niña convierte representaciones de la forma abc en los intervalos [200, 299] y [300, 999] en la que en el primer caso se rige por la regla e2 y en el segundo por la regla e1, o en junio que produce escrituras e5 y e1 para representaciones de Rv cuyas expresiones son de la forma a0c. Sin embargo es importante advertir que la información de estas tablas no muestra la gran variedad que se encuentra en los diversos intentos que el niño realiza antes de llegar a una escritura que el juzga como final, esta variación se tendrá la oportunidad de analizar más adelante.

Análisis de las conversiones correspondientes al intervalo [1000, 9999]. Una aclaración inicial, estas conversiones se introdujeron en las entrevistas en las últimas sesiones, excepto en el caso cuatro en el que se indagaron desde la primera entrevista debido al alto desempeño que desde el comienzo mostró el niño en el intervalo [100, 999]. Al analizar los datos se constata:

- En la prueba final las niñas de los casos uno y dos producen escrituras de tipo e1 de forma consistente, la niña del caso tres produce escrituras canónicas para convertir expresiones completas y escrituras tipo e2 en las incompletas de la forma a00d, e5 en las

de forma a0cd y en una conversión en la que la representación de partida es de la forma abc0 produce una escritura del tipo e3. El caso cuatro produce escrituras canónicas.

- En este intervalo además de los tipos de escrituras del intervalo anterior aparecen las escrituras e9 y e3. La escritura tipo e9 no define propiamente una regla de conversión, simplemente se refiere al hecho de omitir una o varias partes de la representación de origen. La e3 la presenta la niña del caso tres y el niño del caso cuatro, esta escritura consiste en escribir el numeral correspondiente a la expresión verbal que hace las veces de coeficiente (u operador multiplicador) en la parte de la expresión verbal que define un orden decimal seguido de 1000, 100, 10 según corresponda al orden decimal (bien sea que se escriban todos, algunos o ninguno de los ceros de 1000, 1000 y 10); la forma de estas conversiones para el caso de expresiones completas de representaciones en Rv sería $abcd \Rightarrow a1000bcd$ (o $a100bcd$, $a10bcd$ o $a1bcd$, según sean los ceros que se omitan del '1000'). En el caso particular de este niño se trata de las conversiones que muestra la tabla 20, este caso será objeto de análisis detallado posteriormente.

Tabla 20
Conversiones Rv \Rightarrow Ri-a [1000, 9999] realizadas por el caso cuatro siguiendo la regla e3 (primera entrevista)

Representaciones en Rv	9040	9246	3246	3223	9040
Representaciones producidas	9140 9110040	91246	31246	31223	910040

Origen: Fuente propia

Nota. Para simplificar las representaciones en Rv se escriben en Ri-a.

Las descripciones hechas a partir de los datos de las tablas 16 a 19 brindan al lector un panorama general y global de las producciones de los cuatros casos. De estas descripciones hay algunas cuestiones que merecen ser ampliadas a partir de la información de las entrevistas que se irán analizando en los apartados que siguen.

7.2.4.2 Sobre la predominancia inicial de escrituras tipo e1 sobre las de tipo e2

¿El proceso realizado por los niños que se inician en la apropiación del SDN, cuando hacen conversiones Rv \Rightarrow Ri-a se rige por la sintaxis del registro verbal?

Además de esta regla y también desde el comienzo, los niños rigen sus conversiones por la regla e2.

Estos hallazgos no son nuevos, ya han sido descritos por trabajos anteriores en este campo. Los trabajos de Lerner, Sadovsky y Wolman, (1994) y de Power y Dal Martello (1990) apoyan la idea de que los niños tienden a convertir primero el término de la representación verbal que corresponde al nodo (e1). Orozco, Guerrero y Otálora (2007), aunque no entran a estudiar la dinámica de los posibles cambios que se producen en las escrituras no canónicas que producen los niños al hacer conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a, en los datos que ofrecen muestran una mayor frecuencia de las escrituras e1 que e2. Estos trabajos revelan que las escrituras que producen los niños cuando se le dictan numerales se rigen con mayor frecuencia por la relación que en ese estudio se llama yuxtaposición (que corresponde a escrituras que aquí se llaman escrituras e1 y e3. De estos dos tipos de escrituras, según estos mismos trabajos, las escrituras tipo e3 son muy escasas, razón por la que puede asumirse que estas relaciones de yuxtaposición corresponden casi en su totalidad a escrituras de tipo e1), en segundo lugar aparecen escrituras producidas según la relación de compactación (en el presente estudio corresponden a las escrituras del tipo e2); en grado primero del nivel de primaria (niños de 6 a 7 años de edad) las escrituras producidas según la relación de yuxtaposición (en este estudio regla e1) superan a las producidas según la relación de compactación (en este estudio e2) en 18 puntos porcentuales, en segundo grado 3.4 y en tercer grado 5.4.

Y de forma más específica, a favor de la supremacía inicial de escrituras e1, están los datos del presente trabajo que ya fueron analizados en la sección 7.1.1; allí se encontró que los niños del grupo A (en el que se desarrolló la experiencia didáctica) y los del grupo B (el grupo paralelo) producían con mucho mayor frecuencia escrituras e1 y e2 que las otras escrituras no canónicas, pero que había una diferencia importante entre los dos grupos. Los niños del grupo A producen con mayor frecuencia escrituras de tipo e1 que de tipo e2 en las tres momentos en los que se aplicaron las pruebas, que si bien esta diferencia decrece de la primera a la tercera, ésta es amplia, al menos en las dos primeras aplicaciones y si la diferencia se reduce bastante en la tercera aplicación simplemente obedece a que la cantidad de escrituras canónicas sube a cerca del 80%. En el grupo B hay una dinámica distinta y casi que contraria, los niños de este grupo cuando no producen escrituras canónicas en este tipo de conversiones, prácticamente aplican con la misma frecuencia la regla e2 que la e1 (e2 un poco mayor que e1 y la diferencia entre las frecuencias con la que se dan estas, no decrece como en el grupo A sino que aumenta de la primera a la segunda aplicación). Son precisamente los niños del grupo A a los que en

el proceso de enseñanza del SDN no se los somete a un entrenamiento para que aprendan a escribir de forma mecánica las representaciones indo-arábigas, los que muestran una mayor tendencia inicial a hacer conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a rigiéndose por la regla e1. En cambio los niños del grupo B que son los que siguen procesos de mecanización del aprendizaje de la escritura de numerales, muestran que disminuye el uso de la regla e1 y aumenta un poco el uso de la e2.

A juzgar por los datos que arroja el presente estudio podría pensarse junto con Lerner, Sadovsky y Wolman (1994) y de Power y Dal Martello que es razonable afirmar la tendencia inicial de los niños de hacer conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a en el intervalo [100, 999] según la regla e1. Sin embargo es necesario revisar algunas cuestiones antes de dar por sentada esta afirmación como conclusión; es necesario explicar por qué aparecen también desde muy temprano conversiones regidas por la regla e2. Específicamente las tablas 16 a 19 muestran dos hechos en los que las niñas hacen conversiones con las reglas e1 y e2 desde la primera sesión. Uno: en la tabla 16 puede verse que la niña del caso uno al realizar conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a de representaciones cuyas expresiones son completas aplica reglas diferentes según el intervalo numérico, en el intervalo [200, 299] aplica la regla e1 mientras que en [100, 199] aplica e2 y c. Dos: la niña del caso dos en la primera sesión realiza las conversiones aplicando la escritura e2 y no e1.

Intentar aclarar la aparición temprana de la regla e2 paralelamente a la regla e1, en ese momento en el que los niños empiezan a realizar conversiones de $R_v \Rightarrow R_i$ -a en el rango [100, 999] tiene importancia con relación a este tema particular de la definición de la supremacía inicial de la regla e1. Una forma de explicar las escrituras e2 podría ser aduciendo un ma nejo inadecuado de la regla de sobreescritura (Power y Dal Martello, 1990), los niños entienden que sobre los ceros del nodo (a00) se escribe el número de la parte restante de la representación verbal pero no logran controlar sobre cuantos ceros se sobreescibe, si bien en un primer análisis podría pensarse que esta explicación habla a favor de la predominancia inicial de la regla e1 en tanto hace de e2 un regla construida a partir de e1, al pensar con un poco más de cuidado, genera un problema y es lo que a continuación se pretende plantear. Se puede admitir que hacer conversiones con la regla e1 es aplicar la regla de concatenación en el sentido de Power y Dal Martello (ver nota pie de página 21) y la regla e2 como un intento fallido de corregir la regla de concatenación, algo como si el niño se dijera para sí, al hacer la conversión no es debido concatenar hay que sobreescribir. Con estas aclaraciones podría plantearse la preguntas

siguiente: ¿cómo explicar que siendo e2 una regla que se derivada de e1, aparezca, a la par con e1 y sin embargo se pretenda afirmar una tendencia inicial de los niños de regirse por la regla e1?, en otras palabras, ¿si se acepta que e2 es resultante de un inadecuado manejo del hecho de sobrescribir los ceros del nodo y siendo que este aparece precisamente porque los niños rigen sus conversiones por la regla e1, hecho que permitiría suponer que habría un momento anterior en el que se dan escrituras e1 precisamente porque los niños no se preocupan por sobrescribir, cómo explicar que en momentos iniciales los niños usen las reglas e1 y e2? Otra forma posible es entender que la regla e2 surge simplemente como los efectos de la enseñanza del adulto en tanto que éste insiste al niño que al escribir los numerales elimine los ceros de los nodos, pero esta explicación también tiene sus debilidades, cómo explicar que los niños que supuestamente son sensibles a la exigencia de eliminar los ceros, todavía dejan un cero; es decir, la pregunta es: ¿si eliminan un cero por qué no eliminan los dos? En lo que sigue se recurrirá a la información que brindan las entrevistas para tratar de entender cómo aparecen las escrituras e2.

Se tratará de ofrecer evidencia empírica para mostrar que la niña del caso uno, al realizar $R_v \Rightarrow R_i$ -a en el intervalo [100, 199] aplica la regla e2, no porque aplique mal la regla de sobrescritura ni porque intente eliminar ceros, sino por que toma como modelo las conversiones ciento uno \Rightarrow 101, cientos dos \Rightarrow 102,..., cientos nueve \Rightarrow 109, (Anexo A, caso uno, E2, (17, 96). Septiembre de 2010).⁹⁰ El fragmento que se presenta es continuación de un diálogo en el que se pedía a la niña que realizara conversiones en el intervalo [1, 99], conversiones en las que la niña producía con solvencia escrituras canónicas

17 E.: ¿hasta cuánto sabe escribir los números?

18 A.: hasta el... hasta el cien

19 E.: ¿hasta el cien? Escriba el cien [la niña escribe '100' en la hoja] ¡muy bien! ¡Eso! Escriba ciento veintiocho a ver... ciento veintiocho... ¿no sabe? [Ella hace señas que no con la cabeza] ¿No se lo han enseñado?

20 A.: no, todavía no

(...)

30 A.: ¡ciento uno! ¡Ya me acorde! Ciento uno, ciento dos...

⁹⁰ E2 hace referencia a la entrevista dos, (17, 96) define el número del reglón inicial y el final del fragmento del diálogo que se extrae. Finalmente se da la fecha de la entrevista.

- 31 E.: bueno, entonces escriba ciento uno,... ¿Cómo sería ciento uno? [la niña escribe '101'. Se da aclamación de aprobación por parte del E.]
- 32 A.: y ahí comienza... [escribe '102' en la hoja] ciento dos, ciento tres [escribe '103']
- 33 E.: bueno, y el ciento nueve,...
- 34 A.: ¿ciento nueve? [escribe '109']
- 35 E.: ¿y cómo sería el ciento diez?
- 36 A.: ¿ciento diez? Ya sé... tendría que hacer esto [escribe '1' en la hoja y empieza a mirar hacia arriba] sería... ¡ay! Otra vez no me acordé
- 37 E.: no, no trate de acordarse... piense cómo cree que es, ¿cómo cree que es? Si ciento nueve es así, ¿cómo sería el ciento diez?... ¿Cómo sería? [la niña se queda pensativa]... ¿Si usted cree que ciento nueve es así, si ciento nueve es así, como sería el ciento diez? [continúa pensativa, como tratando de recordar]
- 38 A.: [Después de varios segundos en los que se aprecia un esfuerzo de parte de la niña de pensar qué es lo que debe escribir, escribe en la hoja '11'] y dice: así [no lo dice con seguridad, pero no parece la actitud de quien ofrece una respuesta insegura porque no recuerda bien, sino de quien valora posibilidades y presenta la que la parece más razonable]
- 39 E.: ¿así? Bueno, aquí, escriba once
- 40 A.: ¿ciento once?
- 41 E.: no, ..., once no más [la niña escribe '11' en la hoja] bueno, vamos a leer estos números
- 42 A.: do..., eh..., cien [cuando el E señala '100'], doscientos [cuando señala '200']. [El entrevistador señala uno a uno otras representaciones en Ri-a de tres cifras recién escritas por la niña y ella las lee correctamente], ciento uno, ciento dos, ciento tres, ciento nueve. Cuando se le muestra '11' [la marca escrita como ciento diez] dice ciento diez.
- 43 E.: ¿cuánto? [señalando el último número que leyó la niña]
- 44 A.: ciento diez
- 45 E.: ¿y este? [señalando el '11' que había escrito cuando se le dictó 'once']
- 46 A.: ciento once
- 47 E.: no, ciento once, no
- 48 A.: ¡once! [la niña se corrige de inmediato. Parece ser que no lo hace por obedecer a la corrección del entrevistador sino porque realmente recuerda que esa marca la había escrito para once]

La niña recuerda que ciento uno se convierte como '101', tal como ella cree que se lo han enseñado y a partir de ahí copia el modelo hasta ciento nueve. En ciento diez no tiene claro cómo hacer. Su primer intento es '11'. El entrevistador pide a la niña que escriba once y pide que al frente de las dos marcas '11' recién hechas, escriba las dos representaciones verbales de origen (ciento diez y once).

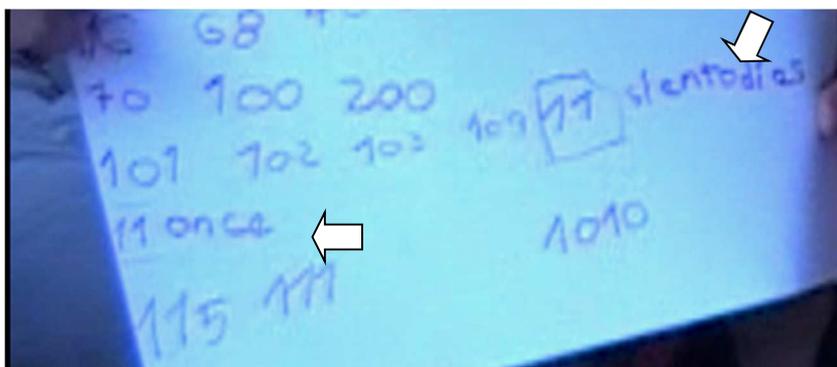


Figura 23. Comparación de la marca '11' como 'once' y como 'ciento diez', cada uno

- 57 E.: ... quiero que compare una cosa, aquí me dice que dice: 'ciento diez' [señalando el primer '11'] y aquí me dice que dice: 'once' [señalando el segundo '11'] le parece que están bien escritos ambos ¿o hay algún error en alguno?
- 58 A.: ¡noooo era así! [lo expresa de inmediato. Muestra una actitud de caer en la cuenta de algo, de inmediato toma se dispone a escribir]
- 59 E.: ¿Cómo sería?
- 60 A.: ciento diez [escribe '1010' en la hoja]

El fragmento extraído muestra que si bien la niña al convertir ciento diez ofrece una solución como '11' la rechaza cuando se le ayuda a caer en la cuenta que así se escribe once y en ese caso prefiere copiar el modelo que le ofrece las conversiones ciento uno => 101, ciento nueve => 109, lo que la lleva a considerar que cientos diez se convierte como 1010. Al lector puede parecerle que '1010' para 'ciento diez' aparece por el hecho de enfrenar a la niña a la comparación de las dos marcas '11' y que si esto no se hubiera hecho la niña ni habría reparado en ella, en parte esta objeción es aceptable; efectivamente la niña cambia porque el entrevistador busca montar el conflicto cognitivo, pero también es importante tener en cuenta que este conflicto se da porque la niña cuenta en su pensamiento con algo que podría llamarse principio de univocidad entre la correspondencia de las representaciones del registro verbal y las del registro indo-arábigo: a dos representaciones diferentes de Rv no les puede corresponder la misma representación en Ri-a; si la niña no contara con este principio ella no se habría visto en la obligación de modificar sus respuestas.⁹¹ Pero la parte que no parece aceptable de esta objeción es la de la respuesta misma ('1010'); al intentar la niña resolver el conflicto

⁹¹ Quizá también este principio debe existir en sentido contrario, sin embargo, parece que en un momento hacia la consolidación de la operación de conversión de representaciones de Rv a Ri-a muchas veces parece que los niños trabajaran con la idea de que una misma representación de Rv pudiera tener representaciones distintas con cifras, aunque reconocen que hay una que es la aceptada por los adultos.

podría haber ofrecido una solución distinta, si ofrece esta respuesta '1010' y no otra, posiblemente refleja algo de la comprensión de la niña sobre este asunto. Se ha dicho "posiblemente" porque es el investigador quien tiene que decidir si la acepta como evidencia que refleja algo del pensamiento del niño o no, o simplemente la considera como simple respuesta para evadir la situación. Decisión que en todo caso tiene que ser validada con otras evidencias y con controles razonables que haga a las mismas.

Esta misma niña, en la misma entrevista, aunque inicialmente convierte ciento once y ciento quince de forma canónica, cambia a la regla e2 cuando compara sus conversiones con '1010' que recién había hecho (Anexo A, caso uno, E2, (62, 88). Septiembre de 2010) y un poco más adelante (R. 188 a 199) cuando se le solicitan conversiones en el intervalo [200, 299] cambia la regla e2 y aplica e1 y la mantiene a pesar de que el entrevistador busca que la niña compare la regla que ha aplicado para convertir representaciones correspondientes al intervalo numérico [100, 199].

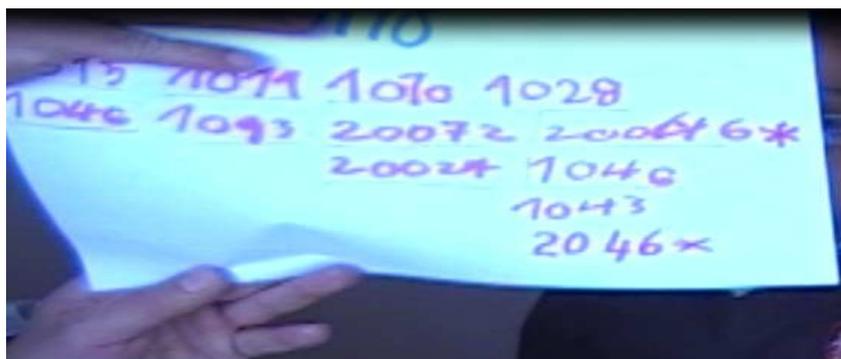


Figura 24. Cambio de escrituras e2 a e1 en conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a, caso uno

Parece que la niña sí percibe la diferencia de la reglas de conversión, pero no la cambia porque considera que '1093' y '1046' no es comparable con '20046', "porque es que este es ciento noventa y tres [indica '1093'], pero no puede, no puede, no lo tengo que cambiar[se refiere a '20046'] porque no, no hay... no está otra vez como esta [muestra '1043' que está debajo de '20046'] que yo lo hice otra vez"(Anexo A, caso uno, E3. R. 217). Un poco más adelante es más clara su decisión a favor de un conversión regida por la regla e1

220 E.: *hubo un niño al que yo le dicté números..., él estaba escribiendo los números con la regla roja [a0bc] así como usted lo está haciendo, ¿sí? Y le dicté doscientos cuarenta y seis y el niño me escribió así, [escribe '2046'] ¿qué piensa? Él lo escribió así [señala el '2046'] compárelo con la forma como usted lo escribió, ¿qué piensa usted?*

221 A.: *que está mal porque doscientos tiene que ir con dos ceritos*

(...)

222 E.: *entonces... listo, doscientos tiene dos, entonces no es así, entonces sigamos... doscientos ochenta y cinco, ¿sí? sígalo escribiendo con la regla roja*

223 A.: *¿ochenta y cinco? [escribe '20085']*

224 E.: *... bien..., entonces, el niño escribía doscientos ochenta y cinco así, [escribe '2085'], ¿usted qué piensa?*

225 A.: *doscientos ochenta y cinco... este está muy bien [señalando el '20085'], pero este está mal [señalando el mismo '2085'] porque no ve que tenía.... otra vez... usted tiene que corregirle al niño porque el niño debía hacer los dos ceritos*

Parece correcto afirmar que aunque la niña es capaz de apreciar la diferencia entre las dos reglas y además es capaz de mantenerla para producir algunas nuevas escrituras, inicialmente no le resulta incoherente que una de ellas (la e2) la aplique para las conversiones [100, 199] y la otra (e1) para las conversiones [200, 299].

A partir de los análisis hechos parece que se pueden hacer dos afirmaciones:

- Al menos en el momento inicial la regla e2 aparece no como una incorrecta aplicación de la regla de sobreescritura o del intento de eliminar ceros del nodo, más bien es resultado de copiar la forma de la escritura '101', '102,...', '109'. Es como si la niña entendiera que la parte "ciento" se convirtiera a Ri-a con '10'

- La niña abandona la regla e2 que aplica en [100, 1999] para tomar e1 en [200, 299]. Es como si al romperse la contigüidad entre las conversiones del primer rango con las del segundo, ya se rompe la asociación inicial con las escrituras a0c y se vuelve a la regla que le resulta más apropiada (unas veces c y otras e1).

- Vistas las cosas así e2 no es una derivación de e1 y menos es una regla en la que exista la intención de quitar ceros, más podría decirse que es lo contrario, si se comparan 10c y 1bc a esta última hay que ponerle cero para que corresponda a 'ciento', por eso debe quedar 10bc.

La niña del caso dos también ofrece evidencias en esta dirección (Ubicación: Anexo A, E4, (15, 23), octubre de 2010).

15.E.: *... muy bien. Y qué tal si escribimos ciento uno [escribe '101'], ¿así se escribe ciento uno?*

16.MF.: *creo*

17.E.: *¿quién le enseñó?*

18.MF.: *me lo inventé*

19.E.: *se lo inventó, muy bien. Así escriben los adultos ciento uno. Escriba ciento tres [escribe '103'], perfecto, ¿cuál sigue?*

20.MF.: *ciento cuatro*

21.E.: *ciento cuatro, escríbalo [escribe '14' pero se da cuenta de su error y corrige '104'] y ¿cuál sigue?*

22.MF.: *ciento cinco [escribe '105']*

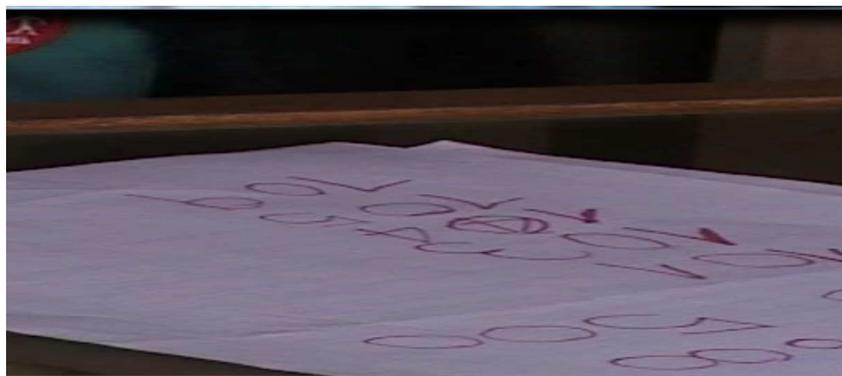


Figura 25. Conversiones de Rv => Ri-a en el intervalo [100, 109], caso dos

23.E.: *escriba ciento nueve. Perfecto los ha escrito todos muy bien. Escriba ciento diez [escribe '1010'] eso, escriba ciento doce [escribe '1012'], escriba ciento veinticinco [escribe '1025'], escriba ciento noventa y nueve [escribe '1099'], muy bien... Imagínese todo lo que me está escribiendo. Escriba doscientos siete [escribe '207']...*

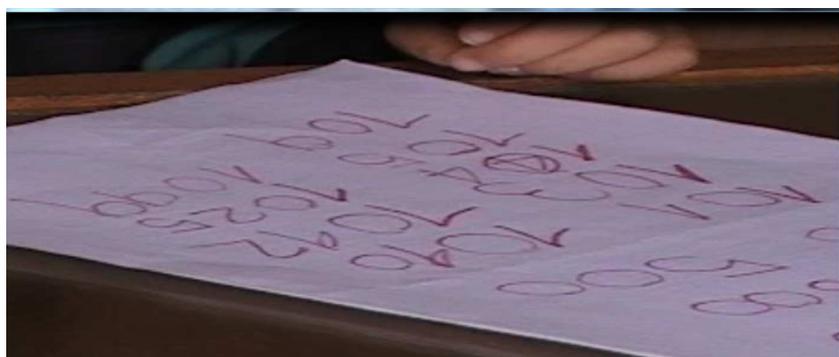


Figura 26. Escrituras e2 en conversiones de Rv => Ri-a, caso dos

De forma análoga a la niña del caso uno, esta niña deja ver —aunque con mayor claridad— que ella toma como referencia para realizar las conversaciones de Rv => Ri-a en [110, 999] las escrituras '101', '102',..., '109'. Si bien esta niña mantiene consistentemente para sus conversiones la regla e2 durante la totalidad de la primera entrevista, en la tabla 17 se observa en la segunda sesión que toma la regla e1 y la repite en la tercera. Podría interpretarse que si bien por alguna asociación que realizó en la sesión primera en ese momento realizó las conversiones solicitadas rigiéndose con la regla e2, pero después, cuando no tuvo a la mano esta asociación actúa como le resulta

más adecuado (quizá podría decirse aquí, más comprensible) para ese momento mientras no consolide lo suficiente el aprendizaje de las escrituras canónicas.

El análisis de estos dos casos, permite ratificar, lo afirmado en el caso uno, con relación a la regla e2.

- al menos cuando aparece para las conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a en [100, 999] no es una regla en la que exista la intención de quitar ceros, más bien, podría decirse que es lo contrario, si el niño compara '10c' y '1bc' a esta última hay que ponerle cero para que corresponda a 'ciento', por eso debe quedar 10bc

- al menos en los momentos iniciales cuando los niños hacen conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a en el intervalo [1, 999] no aparece como consecuencia de un mal manejo de la regla de sobreescritura o como alguna intención de eliminar ceros, sino que es fruto de seguir el modelo de la forma de numerales de la forma 'a0b' que son los primeros que aprenden los niños cuando empiezan la escritura de numerales más allá de cien. De esta forma queda demostrado que la aparición inicial de conversiones con esta regla e2 paralelamente a e1 no contradice el hecho de la primacía inicial de esta última regla.

- Es importante advertir al lector que si bien se puede aceptar que las escrituras tipo e2 inicialmente producidas por los niños han de leerse más que como una agregación de ceros que como omisión, esto no significa que ha de descartarse por completo la regla de sobreescritura. Si bien los niños hacen conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a de representaciones en R_v de la forma 1bc escribiendo 10bc en R_i -a, esto no quiere decir que extienden este modelo a toda forma abc, ya se ha visto que cambian sus reglas de conversión con alguna facilidad.

Antes de cerrar este tema de la primacía inicial de la regla e1, conviene dar una mirada a lo que sucede en [1000, 9999]. Los datos cuantitativos (tabla 10 y gráfica 22) muestran más o menos la misma tendencia ya encontrada en el intervalo [100, 999]. Por una parte en el grupo A son más frecuentes las conversiones bajo la regla e1 (IO de 0.34) que la e2 (IO de 0.12) mientras que en grupo B la diferencia de los IO entre las dos reglas es de apenas dos centésimas y el mayor valor corresponde a e2. Aunque estos datos favorecen la afirmación que se está tratando de sostener, conviene tener precaución debido a que en el grupo A la mayor frecuencia de las escrituras e1 sobre las e2 claramente puede asignarse al hecho de que en el proceso de enseñanza del número en el intervalo [100,

999] durante unos cuatro meses (febrero a mayo del grado segundo), se estimuló a los niños el uso representaciones del registro R(i-a)m y evidentemente esto no es otra cosa que aplicar la regla e1, mientras esto no se hacía en el otro grupo. De manera que este dato del grupo A por sí solo no es suficiente para ser usado a favor de la tesis de la primacía inicial de las escrituras e1, sin embargo que en el grupo B después de cuatro meses de enseñanza de la numeración en el rango [1000, 9999] todavía siguieran apareciendo niños que realizaban sus conversiones según la regla e1,⁹² sí puede entenderse como evidencia de esa tendencia de los niños de hacer conversiones según la regla e1. Adicionalmente en las tablas 16 y 17 se puede observar que las niñas de los casos uno y dos hacen consistentemente sus conversiones en este intervalo rigiéndose por la regla e1, la niña del caso tres no utiliza esta regla en este intervalo (en la tabla 18 mayo 2011 y prueba final en junio 2011), incluso cuando en esta misma sesión se ha visto que en el intervalo [100, 999] la ha usado en la conversiones en algunas de las formas de las representaciones verbales.

Por otra parte, el niño del caso cuatro, en la entrevista de septiembre 2010, cuando en el aula apenas se empezaba a abordar la enseñanza del número en el intervalo [100, 999] y habiendo dado muestra de hacer todas las conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a en este intervalo de forma canónica y con solvencia,⁹³ cuando se le dicta el primer numeral en el rango [1000, 9999] una de las primeras reacciones que tiene es preguntar *¿hago el número con los ceros que tiene?* y escribe '2000' (Anexo A, caso cuatro, E3, R.18. Septiembre de 2010).

17 E.:bueno le voy a poner uno más difícil, le voy a subir, escriba dos mil trescientos cuarenta y cinco [el E. pide que repita el número dictado, el niño dice entonando "dos mil trescientos" como si fuera la expresión completa y luego continúa, "cuarenta y cinco"]

18 M.: Escribe 2, mientras dice dos mil...,levanta el lápiz y la mirada para preguntar ¿hago el número con los ceros que tiene?, a lo que el E. responde justed verá, hágalo como crea, el niño lleva la punta del marcador a la derecha del '2' recién escrito y pregunta ¿doscientos...trescientos cuarenta y cuatro?, el E. corrige "cuarenta y cinco", piensa unos segundos y agrega lentamente '3', pero de inmediato repisa esta marca y escribe '0' y después, ya con un poco más de decisión agrega dos ceros más; la producción en ese momento es '2000'[en el momento en que el E. empieza a preguntar , ¿ya lo hizo? el niño da señales de que aún no ha terminado, pero el E. continúa y termina su pregunta. El E. pregunta, ¿así cree que se escribe?, a lo que el niño contesta con seguridad, "No, es que no la he hecho". Escribe nuevamente '2' mientras se dice "doscientos tiene dos ceros" ...El entrevistador pide al niño que diga lo que le pidió escribir, a lo que el niño contesta: dos

⁹² Mientras en el momento de aplicación de la prueba de conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a en este intervalo numérico en el grupo A no se había empezado la enseñanza sistemática del número en este intervalo, en el grupo B se había empezado en el segundo mes del año académico del grado segundo.

⁹³ El niño lo manifiesta que su madre le enseña la escritura de los números.

mil trescientos cuarenta y cinco, el niño termina de escribir las cifras que faltan, quedando '2345'. ...

El niño tiene claro que esta representación empieza con 2 (el escribe la marca '2' mientras dice dos mil) pero no sabe qué escribir a la derecha, por eso su pregunta ¿hago el número con los ceros que tiene? Su primera producción es '2000'; parece que él entiende que no tiene que escribir los ceros pero probablemente no ha resuelto en dónde escribir la parte restante trescientos cuarenta y cinco, quizá está definiendo sobre cuáles ceros escribirla. Este hecho puede ser interpretado como indicador de esa tendencia de empezar a hacer las conversiones con la regla e1, pero que es corregida de inmediato por el niño a partir de eso que ha aprendido en [100, 999], es decir, que no se escriben los ceros de cientos. Pero también podría interpretarse como una buena evidencia para mostrar que hay momentos en los que al realizar estas conversiones los niños recurren a un procedimiento de sobreescritura. Por ahora solo se dirá que en este episodio el niño muestra que en el tránsito de conversiones del intervalo [100, 999] al intervalo [1000, 9999] el niño toma las dos primera partes de la representación verbal 'dos mil' como una unidad y no dos partes separadas, de ahí su *pregunta ¿hago el número con los ceros que tiene?* y que esta primera acción, si no es reflexionada, lo lleva inmediatamente a aplicar la regla e1. En el segundo momento, cuando nuevamente escribe el 2 y se dice "*doscientos tiene dos ceros*" antes de escribir las otras cifras, puede ser interpretado como que el niño está tomando decisiones sobre los ceros, pero al preguntar al niño que diga en voz alta la

representación verbal, el niño termina resolviendo su confusión y decide hacer la conversión convirtiendo los operadores multiplicadores y omitiendo convertir los términos 'mil' y 'cientos'. En el apartado siguiente se examina lo que continúa de este diálogo cuando se intenta obtener alguna información sobre cómo transitan los niños de las conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a en el intervalo [100, 999] a estas mismas conversiones en el intervalo [1000, 9999].

7.2.4.3 Sobre la transferencia de lo que el niño hace en las conversiones en el intervalo [100, 999] a [1000, 9999]

En este apartado se estudiará si los niños extienden al intervalo [1000, 9999] lo que han aprendido de la operación de conversión $R_v \Rightarrow R_i$ -a en el intervalo [100, 999] y en caso de ser así, entender cómo lo hacen. Para ello se continuará estudiando lo que hace el niño del caso cuatro después de haber resuelto la perturbación que inicialmente le produjo la tarea de convertir dos mil trescientos cuarenta y cinco al registro indo-arábigo. Este caso

es un buen punto de partida porque, como ya se dijo, el niño produce con solvencia, escrituras canónicas en todas y cada una de las conversiones de representaciones verbales en el intervalo [100, 999], independiente de que estas correspondan o no a expresiones completas y de la forma particular de estas (abc, ab0 o a0c); en otras palabras, en el momento de esa primera entrevista este niño claramente tiene consolidada una forma de producir escrituras canónicas cuando realiza conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a en [100, 999]. Al estudiar las producciones de este niño en este nuevo intervalo [1000, 9999] se identifican dos momentos claramente diferenciados por la regla que utiliza para hacer las conversiones. En un primer momento cuando tiene que realizar conversiones de representaciones verbales cuyas expresiones son completas las hace de forma canónica, pero cuando tiene que convertir representaciones cuyas expresiones son incompletas (seis mil nueve y ocho mil veinticinco) no produce escrituras canónicas. En el segundo momento produce escrituras tipo e3 incluso para representaciones verbales completas. En este apartado se estudiarán las conversiones correspondientes al primer momento, en otro de los apartados de más adelante se estudiarán las del segundo momento.

Después de convertir el niño dos mil trescientos cuarenta y cinco en 2345 se pide que realice las conversiones de las representaciones: tres mil doscientos veintitrés, cuatro mil ochocientos treinta y cuatro, seis mil nueve, ocho mil veinticinco. La tabla muestra estas conversiones.

Tabla 21
Primer momento de conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a [1000, 9999] realizadas por el caso cuatro en la primera entrevista

Representaciones en R_v	2345	3223	4834	6009	8025	9040
Representaciones producidas	2000/ 2345	3223	4834	609	825	9140
Tipo de escritura	c	c	c	¿e2 o e5?	e5	e3

Origen: Fuente propia

Nota. Para simplificar las representaciones en R_v se escriben en R_i -a.

El niño lee cada uno de los numerales que ha escrito y los lee tal cual se le dictaron (la marca '609' la lee como 'seis mil nueve' y '825' como 'ocho mil veinticinco'). Para entender porque no son leídas las marcas '609' y '825' como 'seiscientos nueve' y 'ochocientos veinticinco', que es la forma esperada debido al dominio que había mostrado el niño en las conversiones del intervalo [1, 999], ha de tenerse en cuenta que las lecturas de estas marcas se hacen inmediatamente después de leer '2345', '3223' y '4834', de

manera que se produce una especie de efecto de inercia o de efecto por asociación debido a la relación de contigüidad: como se están leyendo marcas que empiezan en miles la que sigue también empieza por algo con ‘mil’.

En el siguiente segmento, después de haber escrito ‘9140’ para convertir ‘nueve mil cuarenta’ el entrevistador busca que el niño caiga en la cuenta que está utilizando una misma marca de Ri-a (‘609’) para dos representaciones distintas de Rv (seis mil nueve y seiscientos nueve), para esto pide que escriba ‘seiscientos nueve’ a la derecha de la marca ‘609’ que había escrito al convertir ‘seis mil nueve’

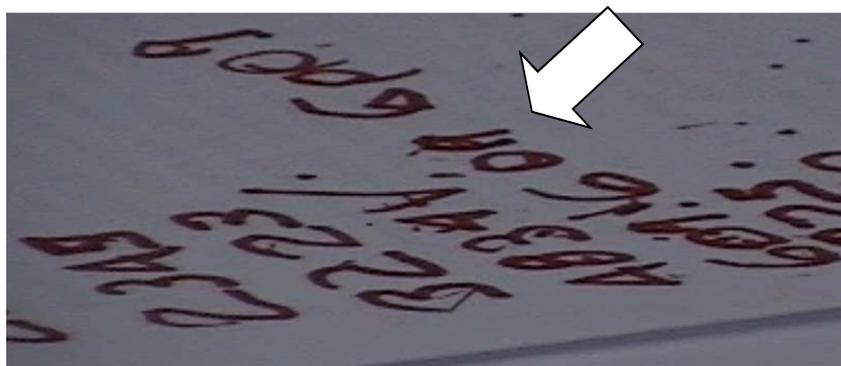


Figura 27. Comparación de las dos marca ‘609’, caso cuatro

37 E.: *muy bien, vamos a subirnos al que leyó como ‘seis mil nueve’, muéstrémelo [M. lo señala] ahí al frente de ese número va a escribir este que le voy a dictar, ‘seiscientos nueve’. [M. escribe el número ‘609’ a la derecha de la marca ‘609’ que había escrito para ‘seis mil nueve’] bueno entonces, compare los dos números*

38 M.: *‘seis mil nueve’ [indicando el ‘609’ de la izquierda], ‘seis mil nueve’ [indicando la marca ‘609’ de la derecha que había escrito para ‘seis cientos nueve’]*

39 E.: *sí, pero yo no le dije ‘seis mil nueve’, yo le dije que escribiera ‘seiscientos nueve’ [M. corrige y a la derecha escribe una tercera marca ‘6009’], bueno, entonces ¿en dónde dice ‘seiscientos nueve’?, muéstreme con el marcador*

40 M.: *[señala la marca ‘609’ de la izquierda que había escrito para ‘seis mil nueve’]*

41 E.: *¿y en dónde dice ‘seis mil nueve’?*

42 M.: *[señala la marca ‘6009’]*

43 E.: *¿está seguro?*

44 M.: *sí*

Cuando el niño escribe al lado ‘609’ para ‘seiscientos nueve’ y lo compara con la marca ‘609’ que antes había escrito para ‘seis mil nueve’, produce una tercera escritura, ‘6009’ que lee como ‘seis mil nueve’. Dos cosas merecen ser destacadas: una, aparece una nueva evidencia a favor del manejo del principio de correspondencia unívoca por parte de los niños que ya se ha comentado: dos representaciones diferentes de Rv (seis

mil nueve y seiscientos nueve) no pueden corresponder a diferentes representaciones en Ri-a. Dos, se podría decir que el niño tiene la idea de que al agregar un cero intermedio a '609' hace la diferencia entre 'seiscientos y....' y 'seis mil y...'. Obsérvese que es agregarlo antes de '9' y no a la derecha, seguramente no lo hace porque tiene claro que así sería noventa.

Una pregunta interesante que surge en este punto es, ¿cómo interpretar la producción de '609' para 'seis mil nueve'? En este caso el niño se limita a convertir seis mil como '6' y después nueve, pero no escribe '69', sino que agrega un cero que escribe entre las dos marcas '6' y '9', ¿por qué agrega este cero? Podría ser para distinguirlo de '69' correspondiente a 'sesenta y nueve' porque el niño aplica en este caso el principio de univocidad recién mencionado, pero surge la pregunta, ¿si hace esto por qué no cae en la cuenta de que así no lo va a distinguir de la marca '609' que usaría al convertir 'seis cientos nueve' al registro Ri-a?. Es indudable que detrás de esta opción por '609' para 'seis mil nueve' ha pasado por alto que así también escribe 'seis cientos nueve', entonces ¿qué pasa realmente? Podría decirse que no lo hace porque centra la atención en establecer la diferencia con '69', pero se olvida de hacerlo con '609', junto con otro hecho, que posiblemente ocurre aquí, que el niño aplique un principio que podría llamarse de extensión: seis mil nueve es un "número grande" (está muy arriba de la sucesión numérica) por eso no puede tener dos cifras, pero ¿por qué no lo escribe con más de tres cifras, precisamente para que lo distinga del que corresponde a 'seis cientos nueve'? Una posible respuesta sería decir algo como porque en ese nuevo nivel la diferencia del rango en la sucesión se torna más borrosa. Si se tiene en cuenta que al convertir 'ocho mil veinticinco' escribe '825', y no agrega un cero, parece más factible esta explicación de la extensión. Sin embargo la información que se tiene sobre este punto particular es insuficiente para ofrecer un respuesta al respecto, lo que sí se puede afirmar en este momento es precisamente que al hacer la conversión el niño no se limita a convertir los términos seis y nueve, así como en representaciones verbales de la forma abcd se limita a convertir cada término que no sea marca de un orden decimal (mil y ciento) que hay algo más a lo que presta atención que lo lleva a agregar un cero. Incluso podría descartarse que el niño maneja la idea de que las conversiones de representaciones verbales que empiezan con 'q mil' se convierten con numerales de cuatro cifras ya que al escribir '609' y '825' tiene a la vista las marcas '2345', '3225' y '4834' que bien podría haber tomado como referencia. Precisamente el episodio que sigue muestra que el niño no hace las

escrituras una independientemente de las otras, sino que establece relaciones al menos con la escritura anterior cuando encuentra, según su criterio, algunas relaciones de semejanza.

El episodio que sigue muestra la corrección que el niño hace de la escritura '825' que había hecho para 'ocho mil veinticinco'

45 E.: *aaah bueno, vamos a bajarnos al número del renglón de abajo, léalo*

46 M.: *'ochocientos veinticinco'*

47 E.: *y ¿cuál fue el que le dije que escribiera?*

48 M.: *eee... 'ocho mil veinticinco'*

49 E.: *aja*

50 M.: *y ahí dice 'ochocientos veinticinco' [señala la marca '825']*

51 E.: *escriba al frente 'ocho mil veinticinco'*

52 M.: *[escribe '80025'] le faltaba otro cero*

53 E.: *¿le faltaba otro cero?, ¿entonces ahora sí dice 'ocho mil veinticinco'?*

54 M.: *sí*

Para la conversión de 'ocho mil veinticinco' inicialmente aplica la regla e5 (escribe '825' es claro que omite el cero, se limita a convertir los términos 'ocho' y 'veinticinco') pero después de escribir '6009' y leer '825' como ocho mil veinticinco corrige y escribe '80025' ("*le faltaba otro cero*"). ¿Cómo interpretar esta producción?, ¿se llega a ella porque aplica la regla e2 o es consecuencia de otro tipo de relación? El niño no ha aplicado en esta sesión ninguna de las dos reglas e1 y e2, por lo que parece posible descartar que en esta conversión aplique e2, parece más aceptable pensar que el niño llega a ella porque imita la forma de '6009' que acaba de producir. Nuevamente ocurre aquí lo mismo que ya se ha observado con alguna frecuencia en los otros niños, en muchos casos los niños no son consistentes en la regla o reglas que aplican, las cambian cuando hacen asociaciones con escrituras recién realizadas y encuentran semejanzas aparentes, muchas veces las que se perciben visualmente como ocurre en este caso entre los dos ceros de 600 y 800. Interesante que incluso el niño de nivel inicial más alto exhiba esta misma falta de consistencia en un intervalo en el que él todavía no ha consolidado las escrituras canónicas, porque esto obliga a considerar que la falta de consistencia en los niños reflejan más las búsquedas, ensayos fallidos, asociaciones parciales y locales, comunes a los cuatro casos estudiados y no a diferencias particulares de los niños en sus capacidades de razonar.

Una vez descritas las producciones de este niño en sus intentos de convertir representaciones verbales a representaciones indo-arábigas en este nuevo intervalo numérico, se ofrece a modo hipotético un posible procedimiento que explique las producciones del niño del caso cuatro en el intervalo [100, 999] y después se analiza si este procedimiento es transferido al otro intervalo. El procedimiento hipotético para obtener escrituras canónicas en el intervalo [100, 999] puede describirse así:

- Identifica la primera parte de la izquierda de la representación verbal que es la que tiene la marca de la unidad decimal u orden decimal (esta parte es ‘ciento’ o termina en ‘cientos’), si es ‘ciento’ su conversión es: ciento \Rightarrow 1, si es una expresión compuesta que finaliza en cientos, esta parte se segmenta en dos, su prefijo y ‘cientos’ (por facilidad se escribe p-cientos), en este caso la conversión es: p-cientos \Rightarrow p. Hay un caso especial en el que la primera parte es ‘quinientos’ en este caso la conversión es: quinientos \Rightarrow 5. ¿Por qué el niño realiza la conversión p-cientos \Rightarrow p y no p-cientos \Rightarrow p00? Si se acepta la idea de la predominancia inicial de las escrituras e1 habría razones para pensar que si el niño no escribe a00bc es porque sigue una consigna del tipo: los ceros del ‘cientos’ no se escriben.

Tabla 22

Formas de convertir la primera parte de la representación verbal en [100, 999] del caso cuatro. Primera entrevista

Forma de la primera parte de la representación en Rv	Producto parcial de la conversión
Comienza con: ciento	1
Comienza con p-cientos	p
Comienza con quinientos	5

Origen: Fuente propia

- Después toma la parte restante e identifica si al convertir ésta se obtiene una representación en Ri-a de la forma ab, si es así se hace la conversión y se escribe a continuación y a la derecha de la cifra recién escrita, si no así, es decir, si corresponde a un cifra se escribe cero intermedio. A esta forma de realizar las conversiones se les llamará procedimiento ingenuo.

Podría ser que esta segunda parte del procedimiento no sea exactamente como se ha descrito, podría ser más bien que lo que funciona es la regla de sobreescritura, es decir, el niño se representa mentalmente ‘p-cientos’ como ‘p00’ y sobre estos ceros escribe la parte restante. Si el producto de la parte restante es de una cifra lo escribe sobre la marca

'0' de la derecha y si es de dos cifras sobre los dos ceros. O podría ser otro procedimiento distinto, independientemente de que en este estudio se tengan datos suficientes para decidir por algún procedimiento, interesa en este momento examinar si el niño extiende este procedimiento para realizar conversiones en el nuevo intervalo [1000, 9999].

Supóngase que efectivamente cuando se le pide al niño realizar conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ en [1000, 9999] intenta extender el procedimiento ingenuo a este nuevo intervalo. Si es así, podría decirse que el niño

- Identifica, como lo venía haciendo con expresiones de R_v en [100, 999], la primera parte de la izquierda de la representación verbal, en este caso 'p mil'. Igual que con 'p-cientos' convierte solo 'p' y omite convertir 'mil'. Desde el punto de vista de la aplicación del procedimiento no importa si se da una diferencia en la percepción auditiva de 'p mil' como dos palabras y a 'p-cientos' como una; desde el punto de vista semántico, en uno y otro caso, el niño identifica dos partes. En este caso también se diferencia el caso en que no hay 'p mil' sino 'mil' (en [100, 999] se dice 'ciento...') y se convierte como '1', así como antes la expresión 'ciento' se convertía como '1'. Aquí no hay casos especiales como quinientos.
- Después toma la parte restante y la convierte siguiendo el procedimiento ingenuo en [100, 999], el producto de esta última conversión se escribe a la derecha de lo recién escrito.

Este procedimiento ingenuo en [100, 999] parece ser relativamente fácil de extender a intervalo [1000, 9999], de manera que si el niño fuera consistente en su aplicación debería producir representaciones canónicas en R_i tanto para representaciones en R_v correspondientes a expresiones completas (abcd) como para representaciones incompletas siempre que estas tengan la parte correspondiente a p-cientos. Por ejemplo, cuatro mil trescientos dos (de la forma ab0d), primero obtiene 4 y enseguida a la derecha escribe el producto de la conversión de la parte restante que corresponde a un representación del intervalo [100, 999] y que ya sabe realizar. En cambio, cuando falta la parte ciento, por ejemplo, cuatro mil treinta y dos (de la forma a0cd, le falta la parte correspondiente a p-cientos') este procedimiento ingenuo lo debería llevar a producir un representación en R_i de la forma abc.

Al menos las primeras conversiones que realizó este niño que correspondían a representaciones verbales completas (de la forma abcd) parecen ratificar esta afirmación (las conversiones de dos mil trescientos cuarenta y cinco, tres mil doscientos veinte tres, cuatro mil ochocientos treinta y cuatro). De igual forma sucede con la conversión de seis mil nueve. En el supuesto de que el niño haya seguido el mismo procedimiento se podría decir que identificó ‘seis mil’ y lo convirtió como ‘6’ (omite convertir el mil, así como en p-cientos omite convertir el cientos), después identificó la parte restante ‘nueve’ y como sabe que produce una expresión de una única cifra en Ri-a escribió un cero intermedio, por eso escribió 609. De forma análoga procede con ocho mil veinticinco. Si esto fuera así, entonces podría decirse que efectivamente el niño con estas conversiones muestra que es consistente, que lo que ha hecho es extender el procedimiento ingenuo que aplicaba en [100, 999] a [1000, 9999]. Pero cuando se le pide convertir nueve mil cuarenta se produce un cambio fuerte, en lugar de realizar la conversión nueve mil cuarenta => 940 según lo esperado si fuera consistente en la aplicación del procedimiento ingenuo, ahora hace: nueve mil cuarenta => 9140. En este momento convierte cada parte de ‘p mil’ por separado, a pesar de haber cambiado la regla aún mantiene alguna semejanza con lo que hacía al convertir ‘p-cientos’, no escribe los ceros de mil así como no escribe los ceros de cientos. Este caso muestra la falta de consistencia del niño, ¿por qué se produce este quiebre?, ¿por qué ahora empieza a convertir cada parte de ‘p mil’ por separado si venía haciéndolo con si fuera una parte compuesta?

En las tablas 16 y 17 se observa que las niñas de los casos uno y dos tampoco transfieren los procedimientos que aplican a las conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a en el intervalo [100, 999] al intervalo [1000, 9999]. La niña del caso uno que en la prueba final produce escrituras canónicas al convertir representaciones verbales de la forma abc no produce escrituras canónicas al convertir representaciones verbales la forma abcd en el intervalo [1000, 9999] que se esperaría lo hiciera en caso de que aplicara el procedimiento ingenuo para hacer conversiones en [100, 999] y lo transfiriera al nuevo intervalo, en lugar de eso lo que hace es volver a aplicar la regla e1 que ya ha abandonado para las conversiones de representaciones verbales compuestas. Algo semejante ocurre en el caso dos, aquí aunque la niña produce escrituras canónicas para todas la conversiones en [100, 999] aplica la regla e1 en [1000, 9999]. La niña del caso tres transfiere en algunos casos, lo hace si se trata de representaciones verbales completas en el intervalo [100, 999] al intervalo [1000, 9999] y en otros aplica la regla e3.

Al estudiar los datos cuantitativos de la última prueba (junio 2011) se encuentra que los niños que en el intervalo [100, 999] producen escrituras canónica en todas las conversiones $R_v \Rightarrow R_i-a$, es decir, que se puede considerar que han consolidado el aprendizaje de estas conversiones en este intervalo (así como era la situación del niño del caso cuatro en la entrevista que se está examinando), se comportan de forma diferente a este caso cuatro. En la tabla aparecen las tipos de escrituras que producen los niños de cada uno de los grupos A y B, cuando hacen conversiones de representaciones de R_v de la forma $abcd$ y $a0cd$,

Tabla 23
Porcentajes escrituras en [1000, 9999] producidas por niños que hacen escrituras canónicas en [100, 999], en la prueba final (junio 2011)

Tipo de escritura	GRUPO A		GRUPO B	
	Forma de representación a convertir		Forma de representación a convertir	
	abcd	a0cd	abcd	a0cd
c	25,0	25,0	25,0	43,8
e1	28,6	28,6	12,5	12,5
e2	21,4	7,1	50,0	6,3
e3	10,7	14,3	0,0	0,0
e4	3,6	0,0	6,3	6,3
e5	0,0	14,3	0,0	31,3
otro	10,7	10,7	6,3	0,0

Origen: Fuente propia

La tabla 23 muestra que estos niños tan solo producen la cuarta parte de escrituras canónicas al convertir representaciones verbales cuyas expresiones son completas ($abcd$). Por otra parte al estudiar las escrituras $e5$ cuando la representación verbal es de la forma incompleta $a0cd$, en el grupo A el porcentaje es de 14,5% y en B de 31,3%, porcentajes también muy bajos como para aceptar la transferencia del método ingenuo. Si se toman ambos datos se pone en duda que los niños transfieran al intervalo [1000, 9999] el procedimiento ingenuo del intervalo [100, 999], en caso de que efectivamente lo sigan, ya que se esperaría que el porcentaje de escrituras canónicas para representaciones de R_v de la forma $abcd$ y el de escrituras $e5$ fueran relativamente altos.

Hay dos datos que llaman la atención en el grupo B. Para conversiones de representaciones de la forma $a0cd$ en el grupo B se tienen el 43.8% de escrituras canónicas y para las de la forma $abcd$ se tiene el 50% de escrituras $e2$ (que corresponden en su mayoría conversiones $abcd \Rightarrow a0bcd$ y muy pocas $abcd \Rightarrow a00bcd$). Parece que estos datos se pueden explicar diciendo que cuando estos niños convierten expresiones de la

forma abcd lo hacen con un regla simple agregar un cero después de a (a0bcd), de manera que cuando la aplican a representaciones verbales de la forma a0cd los lleva a escrituras canónicas. De los 8 niños que en la prueba final dan muestra de haber consolidado las escrituras canónicas al realizar conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a en [100, 999] 4 de ellos hacen estas conversiones $abcd \Rightarrow a0bcd$ y $a0cd \Rightarrow a0cd$. De manera que podría afirmarse que este porcentaje tan alto de conversiones de representaciones de la forma a0cd no es porque se domine alguna regla que resuelva correctamente la ausencia de la parte p-cientos sino que es una solución falsa debido a que parece que algunos niños deciden agregar un cero después de convertir la parte p mil.

Los datos recién expuestos y el análisis hecho permiten afirmar que no se da una transferencia clara del método ingenuo que se ha supuesto aplican los niños para hacer conversiones en el intervalo [100, 999] a las conversiones en el intervalo [1000, 9999]; más que transferencia ocurre que en el intervalo mayor los niños vuelven a aplicar las regla e1, incluso lo hacen aquellos niños que ya habían abandonado estas reglas para realizar las conversiones en el intervalo [100, 999]. También aparecen escrituras e2 y se puede poner en duda que los niños realizan esta escritura porque eliminan algunos ceros de nodo (p000) ya que se tienen casos, como ocurría en el intervalo [100, 999], se agrega a p un cero (p0) para que sea mil.

7.2.4.4 Sobre la aparición de escrituras de tipo e3

Se dijo que en las conversiones en el intervalo [1000, 9999] aparecen por primera vez escrituras de tipo e3. Este hecho también se aprecia en el análisis cuantitativo (sección 7.1.3) allí también se vio que este tipo de escritura no se da en las conversiones en [100, 999] pero sí en intervalo [1000, 9999] y que en ambos grupos A y B son más o menos tan frecuentes como las escrituras e2, ¿por qué aparecen solo en [1000, 9999] y no en [100, 999]? Si se aceptara que el primer paso que da el niño para realizar conversiones de este intervalo [1000, 9999] consiste en identificar la parte ‘p mil’ de la representación verbal y convertirla a R_i -a, la aparición de ‘91’ al convertir nueve mil cuarenta se entiende que la regla general que rige la conversión de esta parte es ‘p mil’ \Rightarrow ‘p1’, ¿por qué el niño toma por separado las dos partes ‘p’ y ‘mil’ de la representación verbal y no hacen como en las conversiones del intervalo anterior, que la parte ‘p-cientos’ la convertía como ‘p’?, ¿será que obedece exclusivamente al hecho de que expresiones como “dos mil”, “tres

mil”, etc. en las representaciones de Rv se encargan de mostrar con mayor claridad ‘p’ y ‘mil’ que en “doscientos”, “trescientos”, etc. o existe otra explicación?

Se revisará a continuación las conversiones realizadas por el niño bajo esta nueva regla. La tabla 24 muestra las conversiones que el niño realiza aplicando esta nueva regla.

Tabla 24
Primer momento de conversiones Rv => Ri-a [1000, 9999] realizadas por el caso cuatro en la primera entrevista

Representaciones en Rv	9040	9140	9246	3246	3223	9040
Representaciones producidas	9140	9110040	91246	31246	31223	910040
Tipo de escritura	e3	e3 y e1 ^a	e3	e3	e3	e1 en cientos

Origen: Fuente propia

Nota. Para simplificar las representaciones en Rv se escriben en Ri-a.

^a En una misma escritura aplica dos reglas diferentes: en el orden decimal de los miles aplica e3 y en de los cientos aplica e1

La conversión de nueve mil cuarenta se hace a reglón seguido de haber realizado ocho mil veinticinco como ‘825 ‘y antes de cambiarla a ‘80025’, hasta ese momento en esa entrevista, el niño había omitido convertir con alguna marca particular los términos que señalan las marcas de las unidades decimales (mil o cientos), sin embargo todavía mantiene la idea de no escribir los ceros del nodo, es decir, así como al convertir ‘p-cientos’ no escribe ‘p00’ ahora al convertir ‘p mil’ no es escribe ‘p1000’.

Después de haber cambiado ‘825’ que había escrito para convertir ‘ocho mil veinticinco’ por ‘80025’, se le pide escribir al frente de ‘9140’ (que el niño vuelve a leer tal como se le dictó: nueve mil cuarenta) nueve mil ciento cuarenta y el niño escribe ‘9110040’, ¿por qué esta escritura tan extraña en este niño? Si nueve mil cuarenta se escribe como ‘9140’ cómo escribir ‘nueve mil cientos cuarenta’ para que sea diferente a lo que se tiene como referencia, una posibilidad es mantener ‘91’ para ‘nueve mil’ como lo está haciendo y modificar la manera de hacer la conversión de ‘ciento cuarenta’ que bien podría haberse hecho como ‘140’, como ‘1040’ o como ‘10040’ (efectivamente se ha encontrado aunque con escasa frecuencia estas escrituras), el niño opta por la última, quizá por esa tendencia a regirse por la regla e1. Después se le pide que unos reglones abajo escriba nueve mil doscientos cuarenta y seis, tres mil doscientos cuarenta y seis y tres mil doscientos veintitrés (esta conversión ya se había pedido unas nueve conversiones

atrás) que escribe como 91246, 31246, 31223. Se le pide que compare '3223' y '31223' ambas reconocidas por el niño como conversiones de la misma representación 'tres mil doscientos veintitrés' y el niño dice que considera como correcta '3223'. Una vez hecha esta modificación de '31223' por '3233' se continúa con el siguiente diálogo (Anexo A, caso cuatro, E3)

88 E.: ¿en dónde dice arriba nueve mil cuarenta? Muéstreme con el marcador,...

89 M.: [señala la marca '9140' que había escrito al hacer la conversión de 'nueve mil cuarenta']

90 E.: ¿qué piensa ahora, está bien escrito?

91 M.: no

92 E.: escriba abajo nueve mil ciento cuarenta

93 M.: [escribe 910040]

94 E.: ¿está bien escrito?

95 M.: sí

96 E.: compare ese nueve mil ciento cuarenta [910040] con el tres mil trescientos veintitrés [3323] búsquelo y verá, mire como escribió tres mil trescientos veintitrés y mire como está escribiendo nueve mil ciento cuarenta, ¿corregiría alguno de los dos o no?, ¿están ambos bien escritos? [El niño guarda silencio]. Escribame nueve mil ochocientos veintitrés

97 M.: [escribe 9823correctamente].

El entrevistador le pide que identifique la marca que había escrito al convertir “nueve mil cuarenta” y el niño muestra '9140', pero ahora considera que no está bien. Cuando se le pide que escriba nueve mil ciento cuarenta escribe '910040'. Esta escritura aunque tiene cierta similitud con la que había hecho antes '9110040' es diferente. Efectivamente en '910040' elimina el '1' que corresponde a mil y que acaba de caer en la cuenta que sobra en su escritura al convertir 'tres mil doscientos veintitrés', pero mantiene el segmento 100, seguramente para convertir la parte 'ciento' de la expresión “nueve mil ciento cuarenta”.

En síntesis, en el segundo momento el niño empieza aplicando la regla e3 es su forma más “pura”: $abcd \Rightarrow a1bcd$ o $a0cd \Rightarrow a1cd$ pero después, al comienzo combina e3 con e1, $abcd \Rightarrow a1100cd$ y un poco después realiza $abcd \Rightarrow a100cd$; es decir, convierte 'a' y omite convertir 'mil', pero enseguida convierte 'ciento cuarenta' como '10040', es decir aplicando la regla e1. Estos hechos una vez más muestran que el proceso de apropiación de las escrituras canónicas para realizar las conversiones $R_v = R_i - a$ poco se parece a un proceso de mejora continua y creciente de las producciones, en lugar de eso se aprecian intentos fallidos en los que se ensayan formas nuevas y se regresa a formas superadas,

'910040' es el resultado de convertir 'ciento cuarenta' rigiéndose para la regla e1 que en el intervalo [100, 999] ya había sido superado de forma definitiva y muy posiblemente el niño lo hace porque en este intento tiene la intención de eliminar el '1' del mil, ya que recién había caído en la cuenta de eliminarlo cuando cambió '31223' por '3222'. Pero hay algo más que muestran estos hechos y que para este estudio resulta de importancia capital, si, como se acepta en este estudio, los ensayos que se hacen no son azarosos, ¿cómo explicar por qué se convierte 'p mil' como 'p' y 'mil?', parece razonable decir que este hecho tiene que ver tanto con la emisión oral que segmenta de manera más clara estas dos partículas a como ocurre con 'p-cientos', como también con el hecho de que el niño por la incertidumbre que le presenta la novedad de las situaciones renuncia a algunas de las reglas que ha construido y mantiene parcialmente algunas, de manera que resulta tan reduccionista afirmar que la escritura e3 se da en el intervalo [1000, 9999] y no en [100, 999] porque la marca de la representación verbal muestra con mayor claridad la separación entre las partes 'p' y 'mil' que en p-cientos, como también lo es que un momento en el que todavía no se ha consolidado un regla de conversión, este hecho no induce a escrituras no canónicas de la forma p1.... Ya se ha visto que los niños no transfieren en su totalidad el método ingenuo de [100, 999] al nuevo intervalo [1000, 9999], parece que más bien lo que buscan es diferenciar de alguna forma las escrituras que resultan de convertir representaciones que empiezan en 'p mil' de las que empiezan en 'p-cientos' y al carecer el niño del principio de posicionalidad encuentra una forma que en ese momento le permite establecer la diferencia y que conserva algunas reglas que ya conoce (por ejemplo no escribir los ceros, convertir la parte restante —la de los cientos— como lo sabe hacer, e incluso habría que mencionar que conserva también el hecho de ir escribiendo las cifras de izquierda a derecha). Pero, como le ocurre a este niño, puede ocurrir el extremo que por centrar la atención en resolver un problema de los miles resulte aplicando reglas ya superadas en los cientos.

En una entrevista de mayo de 2011 (diez meses después de la que se ha venido analizando) se pide realizar las conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a y una vez hecha esta se le pide pagar la cantidad correspondiente al número representado con billetes \$1000, \$100, \$100 y \$1 representada por ese número. La primera de estas tareas consistió en convertir dos mil cuatrocientos cincuenta y seis a una representación en R_i -a, el niño produce con solvencia la escritura canónica en R_i -a ('2457') y cuando se le pide que haga el pago muestra que puede decir la cantidad necesaria de billetes de que cada denominación para

realizar el pago. No es claro si el niño extrae esta información de la representación '2457' o se está apoyando también en 'dos mil cuatrocientos cincuenta y siete' y más aún si además se está apoyando en la sucesión numérica (o quizá más exactamente si se está apoyando en las cuatro sucesiones numéricas de mil en mil, de cien en cien, de diez en diez y de uno en uno), pero esto será materia de análisis posteriormente. Después de esta tarea se le pide escribir tres mil cuarenta y dos, el niño repite correctamente 'tres mil cuarenta y dos' y escribe '342'. Al preguntársele por la cantidad de billetes de cada denominación el niño contesta "3 de mil, 4 de diez y 2 de uno", para producir esta respuesta se observa que si bien el niño ve la marca '342' se apoya en la representación verbal. Se le pregunta ¿y de cien?, el niño contesta de inmediato que ninguno. El diálogo continúa así (Anexo A, caso cuatro, E5. Mayo 2011).

37 E.: bueno, escriba este número, tres mil cuarenta y dos [M. escribe '342'] se lo voy a repetir otra vez, tres mil cuarenta y dos. Antes de hacerlo, dígame cuantos billetes de mil me daría, de cien, de diez y de uno.

38 M.: sería tres de mil, cuatro de diez y dos de uno [el niño ve la marca '342' y se le ve repitiéndose para sí la representación verbal]

39 E.: ¿y de cien?

40 M.: ninguno. [toma los billetes, los cuenta y paga la cantidad indicada]

41 E.: listo, me pagaría eso, listo. Usted qué piensa ¿este número está bien escrito? [señala la marca '342'], léalo

42 M.: tres mil cuarenta y dos

43 E.: ¿usted piensa que este número está bien escrito?, ¿ahí dice tres mil cuarenta y dos?

44 M.: trescientos cuarenta y dos

45 E.: y entonces ahí cómo sería

46 M.: [escribe '3042', cuando ha escrito '30' dice: toca hacer un cero así y continúa escribiendo '42']

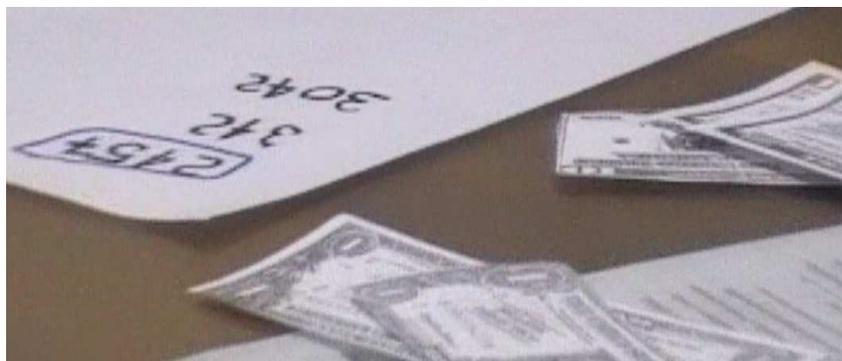


Figura 28. Escrituras de tres mil cuarenta y dos, caso cuatro

47 E.: ¿ahora sí está bien escrito?

48 M.: sí

- 49 E.: *ahora usted me explica, ¿por qué puso ese cero?*
- 50 M.: *porque si es así es trescientos cuarenta y dos [muestra '342']*
- 51 E.: *¿y entiende por qué va ese cero ahí?*
- 52 M.: *no*
- 53 E.: *vea échele cabeza y búsquele la explicación que usted es suficientemente inteligente, vea a ver, piense a ver por qué va ahí ese cero.*
- 54 M.: *para saber que es tres mil*
- 55 E.: *si, eso puede ser, esa es una razón, pero ¿tendría otra razón? De por qué ese cero ahí, [M. hace un sonido de negación] vea a ver y verá que si es capaz, piense en cómo me pagó y verá..., piense cómo me pagó los billetes. ¿cuántos billetes de mil me dio?*
- 56 M.: *mmmm... entonces le di tres de diez*
- 57 E.: *¿me dio tres de diez?*
- 58 M.: *no no no, tres de mil*
- 59 E.: *sí, siga*
- 60 M.: *cuatro de diez*
- 61 E.: *si*
- 62 M.: *y dos de uno*
- 63 E.: *entonces ¿por qué ese cero ahí?*
- 64 M.: *para saber que es tres mil*
- 65 E.: *si esa es una razón ¿pero ese cero no le da otra información? [M. niega con la cabeza] cuántos billetes de cien me dio*
- 66 M.: *cero*
- 67 E.: *y entonces ese cero qué le dice*
- 68 M.: *eeeeeee... que no iba cien*

Esta episodio si bien no ejemplifica una escritura que se rige por la regla e3 sino por e5 es ilustrativo porque permite ver que al hacer el pago el niño más que apoyarse en la representación de Ri-a ('342') a pesar de haberla obtenido él mismo, se apoya en la representación verbal y, además, aunque a partir de la representación tres mil cuarenta y dos sabe que no necesita entregar billetes de \$100, de primera intención no relaciona este hecho con la necesidad de escribir cero en el lugar de las centenas, decide escribir el cero porque o sino queda trescientos.... La marca '342' que el niño produce para convertir 'tres mil cuarenta y dos' será leída por el niño como 'tres mil cuarenta y dos' en esa situación a pesar de que él podría leerla como 'trescientos cuarenta y dos' en otro situación, podría decirse entonces que la marca '342' no funciona para ese niño con relativa independencia de las condiciones de su producción, por eso será leída para representar aquello para lo que se produjo, por eso solo hasta que se de una nueva situación o se modifique la inicial de tal forma que le permita al niño caer en la cuenta de que algo está fallando, por ejemplo

en este caso que está faltando al principio de univocidad de las conversiones $R_v = \Rightarrow R_i$ -a, se obligará a cambiarla. Obsérvese que su recurso de escribir cero después de '3', inicialmente no es para representar cero de cien sino para “*para saber que es tres mil*”, precisamente porque aún no maneja el principio de posicionalidad

7.2.4.5 Coexistencia de una gran habilidad para identificar regularidades y una relativa intermitencia en la aplicación de las reglas que rigen las conversiones

Aunque los niños muestran una sorprendente habilidad para comparar diferentes escrituras e identificar regularidades que son capaces de aplicar en nuevas conversiones, esta es relativa, también muestran inestabilidad, basta una nueva configuración o nuevas asociaciones para aparecer otra regla que podrán mantener para una nueva serie de números y que después cambiarán. Los hechos que se observan en este estudio nos muestran unos niños que se comportan como sujetos capaces de comparar información, identificar semejanzas y diferencias, encontrar regularidades y extraer inferencias entre hechos que por alguna razón asocian y relaciona, pero al ser escasos sus recursos de control de la validez de sus inferencias y de sus aplicaciones, las cambia cuando cambian las configuraciones, se hacen otras asociaciones y se establecen otras relaciones. Las tablas 16 a 19 muestran esos cambios no solo de una sesión a la otra, sino en una misma sesión, incluso, como ya se dijo, para casos en que las representaciones originales tienen las mismas formas.

La niña del caso uno ilustra con claridad (Anexo A, caso uno, E2, (97, 410). Septiembre de 2010) lo comentado en el párrafo anterior. Reconoce la regularidad con la que se hacen las conversiones $R_v = \Rightarrow R_i$ -a que dan origen a las representaciones que aparecen en color azul y las que dan origen a las escrituras de color rojo y las aplican coherentemente para producir nuevas conversiones cuando se le da consignas del tipo escribir un número determinado siguiendo la regla azul o la regla roja.

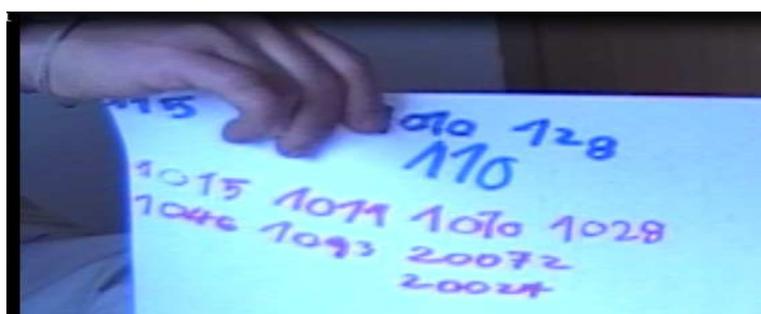


Figura 29. Diferentes reglas en conversiones $R_v = R_i$ -a, caso uno

Pero así como puede identificar una regla de conversión y aplicarla con relativa coherencia, también muestra que la cambia, basta a veces alguna asociación o una modificación en el aspecto que se tenía en cuenta al establecer la semejanza para empezar a hacer conversiones con reglas distintas, en este caso, doscientos veinte siete será ‘20027’ y esto es distinto a como se hacía con expresiones verbales que empiezan como “ciento”. Pero así como escribe ‘20027’, ‘20046’—porque doscientos es con dos ceros y no acepta que sea ‘2046’—, al dictársele “trescientos cuarenta y seis” y no tener las escrituras anteriores de referencia, escribe ‘346’, quizá porque aquí aplica lo que le han enseñado y es no escribir los ceros ‘cientos’, nuevamente mantiene esta regla para escribir otros números, pero en algún momento vuelve a cambiar, así como ocurrió con seiscientos cuarenta y seis (‘60046’).

7.2.4.6 Coordinación de distintas sucesiones numéricas y diferentes tipos de unidades

En los apartados 7.2.2 y 7.2.3 ya se tuvo la oportunidad de analizar las dificultades que representa para los niños empezar a trabajar con sistemas que exigen el manejo de dos tipos de unidades (los grupos de diez y sueltos), algo semejante ocurre cuando los niños se enfrentan a conversiones $R_v \Rightarrow R_b$ en los intervalos [100, 999] y [1000, 9999]. Este apartado se dedica a estudiar en detalle este problema.

La tarea de pagar una cantidad de dinero con billetes de \$100, de \$100, de \$10 y de \$1, semejante a la que ya se estudió con el niño del caso cuatro en 7.2.4.4, exige a los niños coordinar tres sucesiones numéricas, la de los cientos (100, 200, 300, ...), la de los dieces (10, 20, 30, ...) y la de los unos (1, 2, 3, ...), cuando estos aún no dominan por completo el principio de posición en el que se base las representaciones en R_i -a del SDN,⁹⁴ de manera que esta tarea permite desvelar otros detalles de la demanda cognitiva que hace al niño la comprensión de la operación de conversión de $R_v \Rightarrow R_i$ -a.

Al interior de este tipo de tareas se dan variantes según el tipo de conversión que se pida:

⁹⁴ Si el niño dominara el principio de posición las conversiones de R_i -a \Rightarrow R_b serían inmediatas, incluso cuando se pida de representaciones en R_v , ya que bajo el supuesto de dominio de este principio toda representación de R_v supone de inmediato su correspondientes representación en R_i -a y viceversa.

- Conversiones $R_v \Rightarrow R_b$ cuando se pide al niño pagar una cantidad de dinero usando una representación del registro verbal, por ejemplo pagar doscientos cuarenta y ocho. La conversión en sentido contrario cuando se pide algo como: 3 billetes de \$100, 2 de \$10 y 6 de \$, ¿cuántos dinero es? y se solicita un respuesta verbal.

- Conversiones $R_{i-a} \Rightarrow R_b$ y $R_b \Rightarrow R_{i-a}$ cuando se piden las mismas tareas que en el caso anterior pero aquí en lugar de dar las representaciones verbalmente se dan en el registro R_{i-a} .

- Debido a que en la experiencia didáctica se introdujeron los registros (o pseudoregistros) registro verbal modificado R_{vm} y registro indo-arábigo modificado $R(i-a)_m$ las tareas anteriores se modifican según se remplacen las representaciones en R_v y en R_{i-a} por representaciones en R_{vm} y $R(i-a)_m$.

La niña del caso uno ilustra que la operación de conversión $R_v \Rightarrow R_b$ no se agota en las relaciones que se establecen entre la representación de partida y la que se va construyendo. La información que se va a analizar (Anexo A, caso uno, E4, abril 2011) muestra las dificultades que tiene que superar esta niña para manejar sistemas de tres unidades distintas y, su correspondiente correlato, coordinar las tres sucesiones numéricas (de cien en cien, de diez en diez y de uno en uno) presentes en la tarea de pagar una cantidad de dinero que se representa por un número en el intervalo [100, 999]. A la niña se le pide pagar con billetes de \$100, de \$10 y \$1 la suma de trescientos y cuarenta y siete pesos (la cantidad se representa en R_{vm}). El primer intento de la niña consiste en pagar con billetes de \$1 y hace esto no porque no sepa o no caiga en la cuenta de que dispone de billetes de las otras denominaciones, ella tiene al frente los montones de las tres denominaciones, lo hace porque de esta forma está trabajando con un sistema homogéneo en el que hay un único tipo de unidades: las de uno. Quizá este hecho no sea más que la muestra de seguir un procedimiento más cómodo o más seguro cognitivamente para esa niña en ese momento en tanto le evita tener que lidiar con diferentes unidades, sin embargo, no es una reacción particular de esta niña, en aula de clase se pudo observar esta misma reacción por parte de varios niños cuando recién los niños se enfrentaron a este tipo de tareas. Precisamente en esta primera parte permite apreciar los tropiezos que para ella supone enfrentar sistemas heterogéneos de tres tipos de unidades; como se agotan los billetes de \$1 con ayuda del entrevistador la niña decide tomar los billetes de \$10. En un primer intento sigue contando a partir de treinta y nueve que era lo que había

logrado con los billetes de \$1 pero no dice cuarenta y nueve sino cuarenta al agregar el primer billete de \$10 y cincuenta al agregar el segundo, aquí la niña no logra coordinar la relación entre la unidad de diez (representada por el billete de \$10) y la sucesión verbal (el primer billete de \$10 es contado como uno). Por indicación del entrevistador empieza a contar de diez en diez, a partir de diez, los errores de la niña en la enumeración de los billetes de \$10 ilustran la dificultad de coordinar las tres sucesiones verbales (las de los cientos, la de los dieces y la de los unos).

51 E.: *hagamos una cosa, si quiere empiece a contar los de \$10 y no meta los de \$1, ¿sí? diez, veinte,...*

52 A.: *diez...*

53 E.: *sí, no coja por ahora los de \$1. Cuente los de \$10 a ver*

54 A.: *diez, veinte, ..., noventa, cien [cada vez que coloca un nuevo billete dice una palabra de la sucesión. Al llegar a cien piensa un poco], ¿ciento uno?*

55 E.: *nooo..*

56 A.: *ah...doscientos*

57 E.: *ciento y diez [lo dice enfatizando cada palabra], ciento diez*

58 A.: *ciento diez, ciento once*

59 E.: *ah...ah...*

60 A.: *ciento diez*

61 E.: *vamos de diez en diez. Ciento diez*

62 A.: *ciento diez... [se dice para sí, piensa un poco] ¿ciento veinte?*

63 E.: *muy bien*

64 A.: *ciento treinta, ciento cuarenta, ..., ciento ochenta y ciento noventa [esta sucesión la ha dicho de forma continua, se detiene un poco repite ciento noventa y piensa unos segundo] ¿doscientos?*

65 E.: *¡eso! ¡Qué bien! doscientos*

66 A.: *treinta y[como intentando saber qué sigue]*

67 E.: *doscientos y diez*

68 A.: *doscientos y diez [reafirmando con la cabeza], doscientos y once, doscientos y doce*

69 E.: *ah.. ah..*

70 A.: *¿doscientos y doce?*

71 E.: *doscientos y veinte*

(...)

76 A.: *doscientos cuarenta, doscientos cincuenta, . . ., doscientos noventa, [se repite para sí] doscientos noventa... [piensa por un instante], trescientos.*

77 E.: *¡muy bien!*

78 A.: *trescientos uno, trescientos dos.*

79 E.: *Ah...ah..., trescientos uno no, porque estamos de diez en diez*

- 80 A.: *trescientos...[en actitud de estar pensando qué sigue]*
- 81 E.: *¿trescientos y...?*
- 82 A.: *[La niña sigue pensando unos segundos más]... ¿trescientos y... nueve? [continúa pensando]*
- 83 E.: *Dígalo... trescientos y diez*
- 84 A.: *trescientos diez, trescientos y once, trescientos y doce, trescientos y trece*
- 85 E.: *¿y qué?*
- 86 A.: *trescientos y once*
- 87 E.: *ah... ah...*
- 88 A.: *¿trescientos trece?*
- 89 E.: *íbamos en, trescientos y ¿después?*
- 90 A.: *¿trescientos veinte?*
- 91 E.: *sí*
- 92 A.: *trescientos treinta, trescientos cuarenta*
- 93 E.: *sí*
- 94 A.: *trescientos y cuarenta, trescientos y cuarenta y uno, . . . , trescientos y ochenta, . . .*
- 95 E.: *Trescientos ochenta y..., ¿trescientos y veinte?...*

El paso de cien a ciento uno (R.55), la posterior corrección a doscientos (R.56) y el paso de ciento diez a cientos once, ilustran la dificultad que representa para la niña tomar la sucesión de unos y pensarla también como segmentada a la vez en cientos y en dieces. Obsérvese que el esquema de desaciertos y de intentos de corrección en cientos prácticamente se repite en doscientos y en trescientos.

El siguiente segmento de la entrevista se da después de intervenir de forma más directa para indicarle a la niña que utilice los billetes de las tres denominaciones y que empiece con los billetes de \$100, este episodio ilustra la dificultad que representa para la niña hacer dos operaciones cognitivas: primero, transformar la totalidad homogénea representada por 300 y 47 en 300 y 40 y 7 y, segundo, nuevamente, coordinar las tres sucesiones de cientos, dieces y unos, para componer esa totalidad 300 y 40 y 7.

- 130 A.: *[recoge los billetes de \$100 y vuelve a comenzar] cien, doscientos y trescientos*
- 131 E.: *¡ah! ¿Sí me entiende? [ella asiente con la cabeza] Ah bueno, muy bien, siga [recoge los billetes de \$100]*
- 132 A.: *trescientos*
- 133 E.: *¿y ahora qué hace? ¿cuánto le falta por pagarme?*
- 134 A.: *trescientos [se dice para sí] Ahora me falta pagar cua... , cuarenta y siete*
- 135 E.: *eso, págume los cuarenta y siete*

- 136 A.: *y así los completo*
- 137 E.: *¡eso! ¡Muy bien!*
- 138 A.: *ahora cojo los de diez*
- 139 E.: *¡Ah! Que niña tan inteligente*
- 140 A.: *diez, veinte, treinta, cuarenta [se detiene; da la impresión que lo hace porque ha completado cuarenta]*
- 141 E.: *ah! ¡Muy bien! Siga*
- 142 A.: *cincuenta, sesenta*
- 143 E.: *¿Sí? ¿cuánto me tiene que pagar? [mientras muestra la marca '47' en '300 y 47']*
- 144 A.: *¿cuarenta?*
- 145 E.: *lea [mientras sigue señalando '47']*
- 146 A.: *cuarenta y siete*
- 147 E.: *por eso y va en sesenta*
- 148 A.: *me pasé*
- 149 E.: *... hay que tener cuidado*
- 150 A.: *diez, veinte, ..., sesenta y setenta [vuelve a contar los billetes de diez que recién había contado]*
- 151 E.: *sí, y ¿cuánto me tiene que pagar?*
- 152 A.: *cua...cuarenta y siete*
- 153 E.: *¿y no se pasó?*
- 154 A.: *noo...[con seguridad], porque mire, acá están los trescientos [muestra los tres billetes de \$100 y la marca '300'] y aquí están los cuarenta y siete[muestra los 7 billetes de \$10 recién contado y la marca '47']*
- 155 E.: *a ver, ¿acá están los cuarenta y siete? [mientras recoge los 7 billetes de \$10 que la niña contó como setenta y se los entrega], bueno, cuéntenlos a ver si están los cuarenta y siete*
- 156 A.: *diez, veinte, ..., setenta...[expresa desconcierto, en voz baja dice]no*
- 157 E.: *entonces arréglo*
- 158 A.: *[vuelve a tomar uno a uno los billetes de \$10 del montón de siete]a ver... diez, veinte..., cuarenta [deja los tres restantes, se dice] son cuarenta*
- 159 E.: *¡ah! ¡Muy bien! Entonces quitamos estos de aquí [coge los billetes de \$10] y siga ahora cuarenta, ponga esos allá [le indica un lugar al lado de los de cien] ¿y ahora qué hace?*
- 160 A.: *cuarenta... ahora voy a buscar los de siete*
- 161 E.: *ah... ¿los de qué?*
- 162 A.: *ahora voy a contar...[indica el '7' de la marca '47', no sabe decir cuáles son los que va a contar]*
- 163 E.: *¿cuánto?*
- 164 A.: *uno, dos, ..., siete [mientras cuenta los billetes de \$1]*
- 165 E.: *eso, muy bien*

En este episodio que se acaba de mostrar es interesante apreciar la dificultad que supone para la niña separar cuarenta y siete como dos partes: una cuarenta y otra siete. Ella sabe que al contar billetes de \$10 completa cuarenta, pero cuando llega a este punto, inicialmente no cae en la cuenta que tiene que cambiar de sucesión (contar de uno en uno) y cambiar de unidades (dejar los billetes de \$10 y tomar los \$1), pero tiene claro que con los 4 billetes de \$10 ya ha pagado lo que representa la parte '4' de la marca '47' y que le falta pagar lo que corresponde a la parte '7', aunque, en el primer intento, no tiene en cuenta que son otras unidades (billetes de \$1), incluso comete el error de no separar las partes y sobre cuarenta continúa para completar 7 (que para ella son 'setenta', por venir contando de diez en diez).

En el siguiente episodio se aprecia que todavía en el recuento persiste la dificultad de coordinar las sucesiones verbal de cien en cien, de diez en diez y de uno en uno entre sí y en correspondencia con los valores de los billetes.

- 196 E.: *muy bien, muy bien, entonces vamos a ver, usted lleva la cuenta [el E. toma los billetes que la niña ha tomado para pagar la cantidad de \$347 y los va colocando sobre la mesa una a uno, empezando con los de \$100 y la niña es quien va contando]*
- 197 A.: *cien, doscientos y trescientos [cuando el E. pasa el cuarto de billete que es de \$1, piensa un poco y dice] ¿cuatrocientos?*
- 198 E.: *no, por qué es de diez*
- 199 A.: *trescientos [se dice para sí, piensa un poco] ¿veinte?*
- 200 E.: *si es de diez*
- 201 A.: *trescientos... ¿cuatrocientos?*
- 202 E.: *no es de 100*
- 203 A.: *entonces acá está [toma el billete de \$10 en su manos] y dice ¿diez?*
- 204 E.: *[el entrevistador vuelve a poner el billete de \$10 que la niña había tomado en sus manos al lado de los tres billetes de cien] si, ¿entonces cuánto sería? [mientras indica los cuatro billetes]*
- 205 A.: *[la niña piensa unos segundo mientras observa los billetes], ¿diez?*
- 206 E.: *no, este es de diez [se refiere al billete de \$10] pero así cuanto sería [mostrándole nuevamente los billetes de \$100 y el de \$10, se queda en silencio un momento esperando alguna respuesta de la niña, como no la hay dice] trescientos diez.*
- 207 A.: *[se queda pensado unos segundo mientras mira atentamente los billetes]*
- 208 E.: *[el entrevistador interrumpe el silencio de dice] trescientos y diez ¿no?*
- 209 A.: *la niña exclama ¡ah sí!... trescientos y diez, trescientos y once [cuando el E. coloca un nuevo billetes de \$10]*
- 210 E.: *¿cuánto?*
- 211 A.: *trescientos y diez, trescientos veinte [mientras indica el último billete de \$10 colocado]*

- 212 E.: *trescientos veinte [reafirma]*
- 213 A.: *trescientos cuarenta*
- 214 E.: *¿cuánto?*
- 215 A.: *mire trescientos diez [mientras muestra con sus dedos los tres billetes de \$100 y el primer billete de \$10 que había colocado], trescientos veinte, trescientos cuarenta*
- 216 E.: *veinte [muestra el segundo billete de \$10] , treinta [muestra el tercer billete]*
- 217 A.: *trescientos treinta, trescientos cuarenta [el E. le pasa un billete de \$1] trescientos cincuenta*
- 218 E.: *ah...ah*
- 219 A.: *trescientos... ¿acá vamos trescientos cuarenta?*
- 220 E.: *muy bien*
- 221 A.: *trescientos cuarenta y uno, trescientos cuarenta y dos,..., trescientos cuarenta y siete.*

En la misma entrevista inmediatamente después de terminar el pago de trescientos cuarenta y dos, se pide pagar trescientos y veintitrés (además de expresión oral se escribe la representación en R(i-a)m). Aunque se aprecian los progresos de la niña en cuanto a la coordinación de las tres sucesiones y el control del valor relativo de las unidades, aún persisten algunas dificultades.

- 1 E.: *me va a pagar 400 y 23, [escribe '400 y 23' mientras dice 'cuatrocientos veintitrés'] voy a poner esto allá, acá están los de 100, acá están los de 1 y acá están los de 10 [acomoda sobre la mesa tres montones de billetes, dispuestos en orden \$100, \$10 y \$1] y me va a pagar eso, ¿cuánto es que me va a pagar?*
- 2 A.: *Cuatrocientos y veintitrés [la niña lee '400 y 23']*
- 3 E.: *págueme*
- 4 A.: *entonces, 1[toma los billetes de \$1 empieza a contar, pero interrumpe en el primero]. No, mejor con los de cien*
- 5 E.: *claro que es mucho mejor con los de \$100, muy bien*
- 6 A.: *cien [cuenta un billete de \$100] ¿y uno? [al pasar el segundo billete de \$100, como preguntando al entrevistador que sigue]*
- 7 E.: *cien [corrigiendo]*
- 8 A.: *cien, doscientos, trescientos, cuatrocientos. Listo [sonríe, se le ve segura]*
- 9 E.: *muy bien, lo está haciendo muy bien*
- 10 A.: *son cuatrocientos [deja los cuatro billetes de \$100 a un lado aparte de los otros tres montones]: Acá voy a poner los... [mientras toma los billetes de \$10 e indica el '2' de la marca '23', parece que en ese momento no se acuerda de que es veinte] diez, veinte [se dice para sí, ahí ya están los veinte, mientras los deja al lado de los billetes de \$100 recién separados y toma los de \$1] ahora tres; uno, dos, tres [cuenta los billetes de \$1]. Listo, porque mire [cuenta los billetes de \$100] diez, veinte [el E. interrumpe]*
- 11 E.: *cien*

12 A.: *cien, doscientos, trescientos, cuatrocientos, faltan los de cuatrocientos [entrega los billetes de \$100 al E.], acá están los ... diez, veinte [entrega a E los de \$10] y acá están los de...[iba a tomar los de \$1, pero el E. interrumpe y pregunta]*

13 E.: *acá ¿cuánto vamos? [se refiere a los billetes de \$100 y de \$10 que hasta ese momento la niña le ha entregado]*

14 A.: *¿así? ¿cuántos... vamos? Espere, espere, espere [mientras le quita los billetes al E.]*

15 E.: *ya los había contado. [la niña cuenta el dinero para contestar cuánto dinero ha entregado con los billetes de \$100 y de \$10]....*

Una nueva entrevista hecha un mes después (Anexo A, caso uno, E5. Mayo de 2011) en la que se presenta la misma tarea ilustra los progresos que hace la niña. Puede pagar 400 y 23 con billetes de \$100, \$10 y \$1. Aunque va escribiendo y contando de 100 en 100; de 10 en 10 y de 1 en 1 hasta completar 400, 20 y 3 respectivamente, parece que puede anticipar a partir de la representación en R(i-a)m la cantidad de billetes de cada denominación para hacer el pago

55 E.:.... *Ahora ... me va a pagar cuatrocientos y veintitrés pesos*

56 A.: *¿cuatrocientos y veintitrés pesos?*

57 E.: *me va a pagar eso, ¿sí? El que acabó de escribir, me lo va a pagar con billetes de cien, de diez y de uno, podría decirme ¿cuántos billetes de cien me da?, ¿cuántos de diez y cuántos de uno, para pagarme?*

58 A.: *¿cuatrocientos veinti...?*

59 E.: *y 23, sí, dígame cuántos de cada uno me daría*

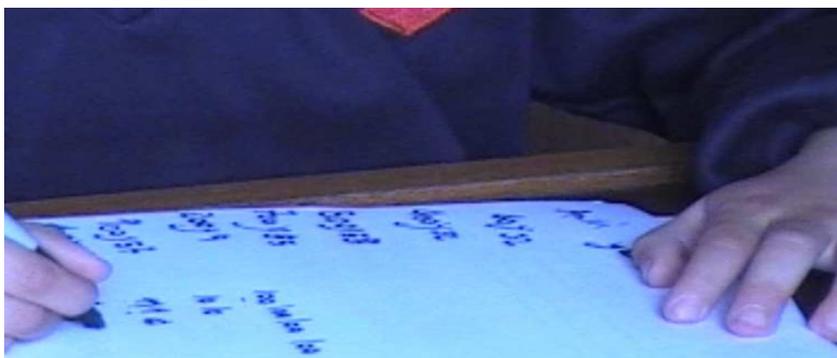


Figura 30. Pago de cuatrocientos veintitrés, caso uno

60 A.: *[escribe '100', '100', '100', '100']. sería acá... ¿cien billetes? cien billetes serían cuatrocientos [mientras muestra las cuatro marcas '100' recién escritos]*

61 E.: *bueno*

62 A.: *[escribe '10' y '10' y debajo '1', '1', '1'] serían acá... 4 billetes de cien y acá 2 billetes de diez y 3... y 3 billetes de uno, sería acá*

63 E.: *¡muy bien! Está perfecto*

64 A.: *cien, doscientos,..., cuatrocientos..., cuatrocientos diez, cuatrocientos veinte, cuatrocientos veintiuno, . . . , cuatrocientos veintitrés [contando lo que escrito en la hoja]*

- 65 E.: *escriba entonces cuánta plata hay ahí*
- 66 A.: *o sea...*
- 67 E.: *por toda*
- 68 A.: *¿por toda? cuatrocientos...*
- 69 E.: *más abajo para que lo podamos ver bien, ¿cuánto?*
- 70 A.: *[escribe '400 y 23'] y dice "cuatrocientos veintitrés"*

El siguiente segmento es de la misma entrevista (E5, Mayo 2011, actividad 2) y consiste en pagar trescientos cinco pesos, que corresponde a una representación verbal incompleta de la forma a0b. En la consigna que se le da a la niña se usan representaciones de Rvm y R(i-a)m. Para el momento en que se propone esta tarea la niña acaba de realizar conversión Rv => Rb de representaciones verbales de la forma abc, que realiza con facilidad, anticipa la cantidad de billetes de cada denominación a partir de la representación en R(i-a)m, además produce escrituras canónicas al hacer conversiones Rv => Ri-a para este tipo de conversiones verbales. Este episodio ilustra la dificultad que representa caer en la cuenta de no tener que utilizar billetes de \$10 y esto sucede aun cuando la niña utiliza la representación 300 y 5. En esta primera parte la niña no manipula los billetes, intenta resolverlo escribiendo en la hoja.

- 56 A.: *¿trescientos?*
- 57 E.: *Sí, trescientos y cinco pesos*
- 58 A.: *La niña escribe '300' y dice. y... y ¿qué?*
- 59 E.: *ya le dije... haga memoria... ¿se le olvidó?... [la niña guarda silencio] ¿Le ayudo?[la niña asiente con la cabeza. Bueno, trescientos y cinco pesos... [la niña escribe '300 y 5'] bueno, eso. Dígame lo mismo, cuántos billetes de \$100 me da, cuántos de \$10 y cuántos de \$1*
- 60 A.: *trescientos... trescientos y cinco [dobla la hoja mientras habla]*
- 61 E.: *no, no tape las hojitas*
- 62 A.: *¿está bien? [Refiriéndose a la marca '300 y 5']*
- 63 E.: *sí, trescientos y cinco está bien escrito*
- 64 A.: *¿cuánto...cuánto es que me da? [parece no entender cómo anticipar la cantidad de billete, razón por la que el E. modifica un poco la consigna]*
- 65 E.: *no, entonces no... págume eso,¿ cuántos billetes de \$100, cuántos de \$10 y cuántos de \$1, págume esa plata?*
- 66 A.: *[escribe '100', '100', '100'] serían trescientos ... [escribe '10' cinco veces] y dice diez, veinte,..., cincuenta sería... o sea y acá... acá da... en... en estos billetes de cien... da tresceitos...[alguien interrumpe]*
- 67 E.: *¿qué me decía?*
- 68 A.: *que estos billetes de cien son trescientos*
- 69 E.: *muy bien*

- 70 A.: *y acá estos billetes de diez, son cinco billetes de diez*
- 71 E.: *de diez...*
- 72 A.: *entonces en total sería... en todo esto sería...[muestras las marcas de '100' y de '10']*
- 73 E.: *sería ¿cuánto?*
- 74 A.: *trescientos y cincuenta*
- 75 E.: *muy bien, serían trescientos y cincuenta y yo le pedí ¿trescientos y cincuenta?*
- 76 A.: *no, trescientos y cinco [en tono de caer en la cuenta de estar pagando una cantidad no solicitada]*
- 77 E.: *ah bueno, arreglémoslo... arreglémoslo, si quiere volvámoslo a hacer aquí abajito*
- 78 A.: *¿volverlo a hacer acá abajo? [indica el lugar señalado por el E.]*
- 79 E.: *si cree que tiene que arreglarlo, si no cree que tiene que arreglarlo pues no importa... ¿tiene que arreglarlo o no tiene que arreglarlo?*
- 80 A.: *no. Solo tengo que decir*
- 81 E.: *entonces*
- 82 A.: *solo tengo que decir... [en actitud de estar pensando algo]*
- 83 E.: *que solo tiene ¿qué?*
- 84 A.: *[en murmullos] trescientos y cinco, .. cua... tre... [mientras señala con el marcado '300 y 5']... serían ¿trescientos y cinco?*
- 85 E.: *yo quiero que me pague trescientos y cinco*
- 86 A.: *seria... acá, le estoy diciendo yo... cien... digo*
- 87 E.: *vaya hablando duro para yo oírla*
- 88 A.: *cien, doscientos, trescientos*
- 89 E.: *trecientos [reafirmando]*
- 90 A.: *trecientos diez [señala con el marcador la primera marca '10'], trecientos diez [vuelve y señala con el primer '10'], trecientos veinte,..., trecientos cincuenta [mientras indica cada uno de las marcas '10']... ¿trescientos cincuenta?... , trecientos y cinco [dice en tono de reafirmar], trecientos y cinco*
- 91 E.: *ahí me está pagando trescientos y cinco ¿o me está pagando cuánto? Con eso que hizo ahí... ¿cuánto me está pagando?*
- 92 A.: *¡ay sí! [su tono de voz y expresión es como que si cayera en la cuenta de un error] trecientos y cinco*
- 93 E.: *ahí me está pagando ¿trescientos y cinco?*
- 94 A.: *no, cuenta cien, doscientos, trescientos, trecientos diez, trecientos cincuenta. Me quedó mal*

Debido a que la niña no logra superar la dificultad, el entrevistador propone utilizar los billetes (Anexo A, E5. (106, 179). Mayo 2011). En un comienzo aparece la misma dificultad anterior, la niña intenta pagar con billetes de \$100 y de \$10, en un segundo intento teniendo separados los tres billetes de \$100, toma los de \$10 y cuenta treinta y uno, treinta y dos, ... Ella misma se corrige y finalmente cae en la cuenta que no tiene

que utilizar billetes de \$10. (R. 120 a 196) “...*entonces no puedo pagar con estos porque estos son de diez*” (R. 139). Esta parte de la entrevista en la que aparece una situación que altera el modelo que se venía utilizando (primero se cuentan los billetes de \$100, después se pasa a los de \$10 y por último a los de \$1) y es necesario pasar directamente de los billetes de \$100 a los de \$1 (o lo que es lo mismo pasar de una sucesión numérica a otra no contigua) se pone en evidencia la demanda cognitiva de este tipo de tareas: coordinación de varios tipos de unidades y su relación con la coordinación de varias sucesiones numérica (las de cientos, la de dieces y la de unos). Como aún la niña no tiene destreza para manejar estas coordinaciones hará intentos fallidos: por ejemplo, cuenta los billetes de \$100 y toma los de \$10, cuenta cinco de estos y aunque reconoce que así paga trescientos y cincuenta y no trescientos y cinco, al comienzo no logra entender que basta dejar de lado los billetes de \$10 y pasar a los de \$1. En otro intento, seguramente por estar centrando su atención en el ‘5’ y precisamente por entender que debe bajar directamente a la sucesión de unos, toma los billetes de \$100 y los cuenta como si fueran de \$10, quizá esto no sea más que la manifestación de que es capaz de coordinar sucesiones contiguas pero que tiene dificultad cuando se trata de sucesiones no contiguas. Incluso en sus intentos de resolver sus conflictos produce conteos absurdos como, tomar los tres billetes de \$100 como treinta y pasar un billete de \$10 y decir “treinta y diez”, “treinta y veinte”, “treinta y treinta”, en este punto la niña misma se da cuenta del error y se corrige.

7.2.4.7 Las conversiones $R_v \Rightarrow R_b$ y $R_{vm} \Rightarrow R_b$ y multiplicidad de registros

El análisis de tareas como las del apartado anterior dejan ver, como se ha dicho, las dificultades que tienen los niños para coordinar varios tipos de unidades y su relación con la coordinación de varias sucesiones numérica (la de los miles, la de los de cientos, la de los dieces y la de los unos), pero además pone en evidencia un nuevo elemento al que hasta el momento no se ha hecho referencia y que es de gran importancia en este estudio, el papel que cumple la sucesión verbal numérica como soporte de las operaciones que realiza la niña al transformar una representación en otra. Cuando los niños realizan las conversiones $R_v \Rightarrow R_b$ se los ve haciendo otras transformaciones a la representación de partida distintas a las directamente vinculadas con las representaciones inicial y final, este hecho que se considera fundamental será objeto de análisis en este apartado, precisamente se trata aquí de ilustrar que estas transformaciones que a primera vista aparecen como adicionales a la operación $R_v \Rightarrow R_b$ juegan un papel fundamental para hacer posible la conversión, al menos en el momento en que los niños no han consolidado procedimientos

que los lleven a producir escrituras canónicas cuando realizan este tipo de conversiones. Es posible que en el momento en que un sujeto haya consolidado las escrituras canónicas para conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ a el proceso de conversión comprometa exclusivamente las dos representaciones y que solo consista en aplicar una regla que garantiza las transformaciones de las partes de la representación de partida a la partes de la representación nueva, es decir que el proceso de conversión pueda lograrse meramente mediante un proceso de transcodificación, sin que esto suponga que la mera transcodificación sea la que posibilita el significado y para acceder a comprensiones del número y la numeración.

Precisamente los episodios mostrados en el apartado anterior ilustran que la niña del primer caso al realizar conversiones $R_v \Rightarrow R_b$, se apoya, una y otra vez, en la sucesión verbal, aunque por momentos da la impresión de poder anticipar la cantidad de billetes necesarios de las diferentes denominaciones para pagar una cantidad dada de dinero. Estos hechos permiten pensar que la operación de conversión de una representación verbal a una representación en R_b no se realiza —al menos no en un comienzo como se ha dicho— de manera directa de R_v a R_b sino que se dan transformaciones al interior de R_v antes o paralelamente a las conversiones.

Para ilustrar lo anterior se analizan dos procedimientos que se pueden suponer como posibles para convertir una representación como p -cientos y qr de R_{vm} a una representación de R_b (p , como se ha dicho en anteriores ocasiones, es la parte que hace las veces de operador multiplicador —dos, tres, cuatro, seis,..., nueve; para abreviar no se repara en las dos excepciones: mil y quinientos— y ‘ qr ’ es la parte que representa un número del intervalo $[1, 99]$).

Primer procedimiento. El procedimiento más directo para realizar la conversión consistiría en hacer las correspondencia $p \Rightarrow p$ billetes de \$100, $q \Rightarrow q$ billetes de \$10 y $r \Rightarrow r$ billetes de \$1. El que un sujeto particular lo siga le exige identificar a ‘ p ’ (separar a ‘ p ’ de ‘ p -cientos’) e interpretar su significado como un operador multiplicador (indica el número de veces que se repite cien. ‘Cien’ ya es producto de una transformación, ‘ciento’ corresponde a ‘cien’ y este hace referencia al número cien) y anticipar a partir de ‘ qr ’ que son q de diez, es decir, poder anticipar la cantidad de dieces que hay en ‘ qr ’ y r como las unidades de uno.

Segundo procedimiento. Si el sujeto todavía no cuenta con los recursos cognitivos para realizar estas operaciones (cognitivas) tendrá que echar mano de otros procedimientos menos directos, pero que también llevan a conversiones exitosas. La niña de este caso uno muestra que no realiza la operación $R_{vm} \Rightarrow R_b$ de forma directa sino que se apoya en la sucesión verbal, en lugar de la conversión p-cientos \Rightarrow p primero cuenta cien, doscientos, ..., cuatrocientos, y en lugar de $qr \Rightarrow q$ y r , cuenta de diez en diez para obtener q billetes de \$10 y de uno en uno para obtener r billetes de \$1. Es posible que haga este rodeo al realizar la conversión de una o dos de estas partes y no necesariamente en las tres. En el marco de la teoría de Duval se pueden considerar estas transformaciones como operaciones de tratamiento (por ejemplo: p-cientos en cien, cien y cien es doscientos, cien, cien y cien es trescientos, ..., cien, cien, ..., cien, es p-cientos) ya que son transformaciones de la representación inicial dentro del mismo registro verbal. De manera que en lugar de darse la conversión $R_{vm} \Rightarrow R_b$ en este segundo procedimiento se da $R_{vm_1} \Rightarrow R_{vm_2} \Rightarrow \dots \Rightarrow R_b$ ⁹⁵ o para ser más exactos habría que descomponer a R_{vm_1} en partes y expresar las transformaciones de cada parte y sus conversiones.

Hay una cuestión que importa resolver con relación a lo que aquí se está diciendo y tiene que ver con una posible y razonable objeción: si la niña no sigue el primer procedimiento y sí el segundo, no significa que este último tenga que considerarse como necesario para la niña y, mucho menos, como un paso necesario en la génesis de la coordinación de representaciones de diferentes registros numéricos del SDN (tanto los canónicos como los que en esta experiencia se han utilizado como recurso didáctico) por parte de los niños para acceder a significados más complejos del signo numérico. Es posible que esta niña recurra a la sucesión numérica para realizar estas conversiones no tanto porque no disponga de recursos cognitivos que le permitan exhibir otro u otros procedimientos que respondan a elaboraciones más complejas, sino simplemente porque por la forma como se le presentó la tarea lo permitía e incluso hasta estimulaba que así se diera, de tal forma que cabe la posibilidad que en caso de haberse presentado la tarea de conversión $R_v \Rightarrow R_b$ con una consigna que indicara la necesidad de anticipar la conversión (anticipar la cantidad de billetes de cada denominación a partir de la información que brinda la representación en R_{vm}) la niña lo hubiera hecho. Es claro que la niña en otras tareas de conversión de $R_v \Rightarrow R_b$, incluso con representaciones de R_v de la forma abc vuelve a recurrir a las sucesiones numéricas, pero aún es mucho más claro

⁹⁵ los puntos suspensivos representan que puede haber más de una transformación de tratamiento.

cuando la representación verbal tiene la forma a0c. Más adelante se mostrarán otros datos que permiten suponer que los niños en algún momento inicial del manejo de las representaciones numéricas dan muestra de recurrir al segundo procedimiento y poco a poco ganan habilidad para hacer la anticipación. Este recurso a la sucesión numérica se va a apreciar de forma más nítida cuando se trata de conversiones $R_{vm} \Rightarrow R_b$ en las que la representación en R_v es de la forma a0c.

La niña del segundo caso a pesar de tener mayor habilidad que la niña del caso uno para coordinar las tres sucesiones numéricas y establecer relaciones adecuadas entre los tres tipos de unidades representadas en las tres denominaciones de billetes, en el momento en que se le enfrenta a estas conversiones R_{vm} (o R_v) $\Rightarrow R_b$, muestra que también tiene momentos en los que no logra las coordinaciones adecuadas. En una tarea en la que se pide que pague trescientos cuarenta y seis pesos con billetes de \$100, de \$10 y \$1 (Anexo A, caso dos, E6, (1,37). Mayo 2011), la consigna se da mediante una representación del registro verbal y con soporte oral⁹⁶ La niña toma unos pocos billetes del montón de \$100 y dice: “*cien, doscientos, trescientos*”, mientras va colocando uno a uno los tres billetes sobre la mesa, al finalizar dice “*acá están los trescientos*” y los coloca sobre la mesa a parte de los demás montones (R. 10). Se detiene, parece no tener claro con cuáles billetes seguir, se le aprecia pensativa por unos segundos, decide tomar 5 de \$1 y después toma 4 de \$10 (incluso al colocar el montón de billetes de \$1 sobre la mesa deja un espacio entre este y el montón de billetes de \$100, como si lo reservara para el de \$10, espacio en el que precisamente colocó estos últimos billetes). Podría decirse que la niña da muestra de ser capaz de anticipar la cantidad de billetes de cada denominación que tiene que tomar para pagar la cantidad solicitada, sin embargo al preguntarle el entrevistador ¿cuánto dinero pagó? dice; trescientos cuarenta y cinco, y cae en la cuenta que no ha pagado la cantidad solicitada (trescientos cuarenta y seis), trata de corregir y en lugar de tomar un billete de \$1 toma uno de \$10 —y lo hace consciente de que está tomando un billete de \$10, como si considerara que de esa forma corregía el error—, a partir de ahí duda, agrega otro de \$1 y después 2 de \$10 y cuenta los billetes uno y otra vez, corrigiéndose una y otra vez, hasta que logra cuadrar la cantidad de billetes que componen la cantidad solicitada. Lo interesante de este episodio consiste en que la niña empieza con una idea

⁹⁶ Para el momento de esta entrevista la niña realizaba conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a produciendo escrituras canónicas en caso de representaciones en R_v de la forma abc y cuando eran de la forma a0c producía escrituras e5 aunque podía corregirlas con relativa facilidad, ver tabla 17.

correcta de cuántos billetes de cada denominación tiene que dar para pagar el total pedido, como si mostrara que puede anticipar la conversión $R_v \Rightarrow R_b$, pero al confundirse, empiezan las vacilaciones y no sabe si en un momento tiene que tomar billetes de \$10 o de \$1 y para salir de este embrollo, recurre a la estrategia del conteo sobre las sucesiones numéricas: trescientos, trescientos diez, trescientos veinte y con esto logra la solución, pero no sin antes contar hasta trescientos sesenta porque en algún momento completó 6 billetes de \$10 (quizá porque se confundió con el hecho de que eran 6 billetes de \$1). Es este apoyo en la sucesión numérica para completar la conversión $R_v \Rightarrow R_b$ el que puede ser interpretado como la operación cognitiva de tratamiento definida por Duval.

Esta niña del caso dos en otra tarea consistente en pagar una cantidad quinientos veintisiete pesos, la cantidad a pagar se representa en $R(i-a)m$, es decir se escribe '500 y 27' (E6, (41, 50). Mayo 2011) muestra que es capaz de anticipar la cantidad billetes de las denominaciones de \$10 y de \$1, pero no es tan claro en el caso de los billetes de \$100, parece que la niña no anticipa que necesita entregar 5 billetes de \$100 para pagar quinientos a pesar de tener a la vista '500 y 27', sino que cuenta 100, 200, ..., 500. Posiblemente recurre a la sucesión verbal de cien en cien porque 'quinientos' no muestra de forma tan diáfana la parte 'p' de 'p-cientos' (quizá no habría hecho este rodeo en el caso de que se dijera 'cincocientos'), pero también habría que esgrimir, en contra de esta interpretación, que la niña tenía presente '500 y 27' que sí sugería el '5' de cien, al menos, tanto como los 2 billetes de \$10 sugerido por el '2' de '27', la pregunta es entonces, ¿por qué no lo usó? Se pueden ofrecer diferentes explicaciones que no es el caso entrar a analizar —en este estudio no se cuenta con suficiente información para argumentar una posición—, lo que parece evidente es la variedad de representaciones que la niña pone en juego al realizar una misma conversión y, de lo que merece destacarse, que en un momento centra su atención en una, como olvidándose de otra que tiene disponible, es más centra la atención en partes de una y al avanzar en la conversión usa partes de otras.

41 E.: *si yo le pidiera que me pagara esta cantidad de plata [E. escribe "500 y 27" en la hoja], lea ¿cuánto?*

42 MF.: *quinientos veintisiete*

43 E.: *¿dígame cuántos billetes de cien me daría?*

44 MF.: *¿de cien? [MF. se queda unos segundos en silencio y empieza a contar con ayuda de sus dedos] cien, doscientos, trescientos, cuatrocientos, quinientos... ¿quinientos?*

45 E.: *¿me daría quinientos billetes de cien?... ¿cuántos billetes de cien me daría? [pasa un segundo] ¿quinientos? [pasan dos segundos, MF. está jugando con el marcador] ¿Cuántos? [MF. guarda silencio por unos segundos y empieza a contar en voz baja] no*

mamita, de cien, de cien... Escúcheme bien, véame mamita ¿cuántos billetes de cien me daría para pagarme quinientos veintisiete?, ¿cuántos me tendría que dar?

46 MF.: *[dice un par de palabras que no se entienden] cinco*

47 E.: *muy bien, perfecto y ¿cuántos billetes de diez me completaría... más?*

48 MF.: *serían dos*

49 E.: *¡eso, ¿cuántos billetes de uno?*

50 MF.: *¿de uno?... serían siete*

Este mismo pasaje además del recurso a las sucesiones numéricas para realizar las conversiones, deja ver otro elemento sobre el manejo de diferentes registros cuando se hacen las conversiones, más exactamente se observa que no solo hay multiplicidad de registros sino además manejo simultáneo de ellos. Al analizar las ejecuciones de la niña podría decirse que esta tarea no es estrictamente una conversión $R(i-a)_m \Rightarrow R_b$, debido a que a pesar de tenerse el cuidado de presentar a la niña la representación inicial en el registro $R(i-a)_m$, ella espontáneamente la convierte al R_{vm} de tal forma que más bien la conversión $R(i-a)_m \Rightarrow R_b$ se trata de una cadena de conversiones: $R(i-a)_m \Rightarrow R_{vm} \Rightarrow R_b$. Sin embargo esto no debe interpretarse como una evidencia de que la niña no puede hacer la conversión de $R(i-a)_m$ a R_b directamente, y que por esta razón tiene que recurrir a R_{vm} como un registro intermediario, aunque bien podría serlo; otra forma de interpretar este hecho, podría ser que por el nivel logrado por esta niña del manejo de los sistema de representación numérica en el intervalo [1, 999] las representaciones en los dos registros $R(i-a)_m$ y R_{vm} están indisolublemente asociados de tal forma que al realizar la operación cognitiva de conversión de una representación en $R(i-a)_m$ en R_b irremediamente trabaja también con la respectiva representación en R_{vm} , de manera que de ser así, más que hablar de la cadena de conversiones señalada en los reglones de arriba, podría pensarse en un esquema de conversiones que refleje más simultaneidad entre $R(i-a)_m$ y R_{vm} .

La niña del caso tres (E5, (324,574). Mayo 2011) ilustra las dificultades que tiene para pagar cuatrocientos ocho, después de escribir '480' en lugar de '408' y al tratar de corregir escribe '48' dice que paga "... 100 billetes de 4, ósea, como le explico, 4 billetes de 100, 8 de 10..." (R. 99), en la misma entrevista después de volver a realizar conversiones $R_v \Rightarrow R_b$ de representaciones en R_v de la forma abc, se le pide pagar ochocientos nueve, después de tener los mismos intentos fallidos para convertir la representación verbal a representaciones de $R(i-a)_m$ y $R(i-a)$, en el primer caso escribe 8009 y en el segundo 89, dice que debe pagar con 8 de \$100 y 9 de \$1 (aunque al comienzo invierte y dice 1 de 9)

- 486 N.: de 100, 8
 487 E.: si
 488 N.: de 9, 1
 489 E.: ¿de 9, 1?
 490 N.: [afirma con la cabeza] porque si coloco 10...
 491 E.: ¿de 9, 1? Ojo porque...
 492 N.: a no, de 1 pago 9

7.2.4.7 Dificultad inicial para diferenciar entre el número de unidades compuestas y el total de unidades simples

Las dificultades de los niños para manejar sistemas compuestos por diferentes tipos de unidades también se evidencian en la dificultad inicial de diferenciar cuando se pregunta cuántos billetes y cuánto dinero son esos billetes, que no es otra cosa que distinguir entre cuántas unidades compuestas son y a cuántas unidades simples equivalen estas. Una vez que la niña ha completado los \$346 que se le habían solicitado pagar, es capaz de decir sin necesidad de contar los billetes de cada denominación cuántos billetes de \$100, cuántos de \$10 y cuántos de \$1 ha entregado de cada denominación, seguramente no es tanto porque lo recuerda sino porque ahora sí logra extraer esta información de la representación verbal; además contesta sin dificultad ¿cuánto pagó en total? es decir da cuenta de la cantidad de unidades de uno. Sin embargo en algún momento de esta parte de la entrevista muestra que tiene dificultad para diferenciar entre ¿cuántos billetes de \$10 son? y ¿cuánto dinero es (se completa con) esos billetes?: se le pregunta ¿cuántos billetes de \$10? y la niña dice cuarenta, . Y aunque se intenta aclararle la niña parece confundirse en ese momento.

22 E: *cuántos billetes de \$10 son?*

23 MF: *acá son cuarenta.*

24 E: *No, son 40 pesos, pero ¿cuántos billetes de \$10 son? [*

25 MF.: *La niña guarda silencio como si no entendiera la diferencia entre las dos preguntas: ¿cuántos billetes de \$10 son? y ¿cuántos pesos son? Pregunta al E. que si todos los billetes de diez [mostrando todos los billetes de \$10 que hay sobre la mesa]*

26 E. *le especifica que solo los que tiene en la mano*

27 *[La niña se limita a poner uno al lado del otro los cuatro billetes de \$10]. . . .Aquí se interrumpe el intento de que la niña diferencie las dos preguntas y el entrevistador vuelve sobre el dinero pagado, dice: bueno, ¿me está dando cuánta plata?*

El anterior hecho no es único, aparece en varias ocasiones, en esta misma entrevista se tiene otro ejemplo ¿dígame cuántos billetes de cien me daría? Y la niña contesta quinientos, aunque basta una pequeña intervención del entrevistador para corregir.

41 E.: *si yo le pidiera que me pagara esta cantidad de plata [E. escribe “500 y 27” en la hoja], lea ¿cuánto?*

42 MF.: *quinientos veintisiete*

43 E.: *¿dígame cuántos billetes de cien me daría?*

44 MF.: *¿de cien? [MF. se queda unos segundos en silencio y empieza a contar con ayuda de sus dedos] cien, doscientos, trescientos, cuatrocientos, quinientos... ¿quinientos?*

45 E.: *¿me daría quinientos billetes de cien?... ¿cuántos billetes de cien me daría? [pasa un segundo] ¿quinientos? [pasan dos segundos, MF. está jugando con el marcador] ¿Cuántos? [MF. guarda silencio por unos segundos y empieza a contar en voz baja] no ... de cien, de cien... Escúcheme bien, ¿cuántos billetes de cien me daría para pagarme quinientos veintisiete?, ¿cuántos me tendría que dar?*

46 MF.: *cinco*

47 E.: *muy bien, perfecto y ¿cuántos billetes de die me daría?*

48 MF.: *serían dos*

49 E.: *¡eso, ¿cuántos billetes de uno?*

50 MF.: *¿de uno?... serían siete*

El que al comienzo los niños tengan alguna dificultad para diferenciar cuando se les pregunta por el número de unidades compuestas y por el número de unidades simples a lo éstas equivalen no es otra cosa que la dificultad, se ha venido mencionado, de coordinar dos tipos unidades diferentes (las simples y las compuesta).

8 CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Las evidencias y el análisis del apartado anterior permiten afirmar que recién que el niño comienza a realizar conversiones de representaciones verbales numéricas a representaciones del registro indo-arábigo lo hace trasladando a estas últimas la sintaxis aditiva propia de las representaciones verbales⁹⁷. Pero las evidencias también muestran que el niño no aplica de “forma pura” la regla de conversión que se deriva de esta sintaxis sino que la combina de múltiples formas con otras reglas fruto de los aprendizajes que va alcanzado en sus experiencias no escolares y escolares. Además, que cualquiera que sea el resultado de las combinaciones que haga un niño particular, no las aplica de forma consistente, con frecuencia cambia la regla de conversión, debido a nuevas asociaciones o a otras relaciones que establece por la contigüidad con otras conversiones que recuerda o tiene a la vista. El proceso de consolidación del aprendizaje de las escrituras canónicas en Ri-a refleja las búsquedas, ensayos fallidos, asociaciones parciales y locales, por lo que este proceso poco se parece a una serie de cambios crecientes cuando se analiza a nivel micro, más bien refleja la dinámica que se produce como fruto de las tensiones que experimenta el niño al regirse por la sintaxis aditiva que le sugiere el registro verbal y al intentar aplicar lo que él va entendiendo a partir del uso de las representaciones numéricas en las diversas experiencias debido a su inserción en el mundo socio-cultural, incluidas las experiencias de aprendizaje formalizadas del aula escolar y un poco menos formalizadas en el ámbito familiar.

Este estudio ofrece evidencia de la tendencia de los niños a realizar conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a rigiéndose por la regla e1⁹⁸, tanto en el caso de representaciones verbales cuyas expresiones son completas como en las que son incompletas. Aunque desde el comienzo aparecen conversiones en el intervalo [100, 999] que producen escrituras e2, se mostró la predominancia inicial de la regla e1 sobre la regla e2 cuando se recién se empiezan a

⁹⁷ Ver análisis de la sintaxis de las representaciones verbales y representaciones indo-arábigas del registro SDN páginas 32 y 33.

⁹⁸ El hecho de que el niño realice una conversión $R_v = R_i$ -a rigiéndose por la regla e1 se interpreta como evidencia de estar trasladando al registro indo-arábigo la sintaxis aditiva del registro verbal. Por ejemplo la conversión cuarenta y cinco \Rightarrow 405, es evidencia de que el niño convierte cada parte y simplemente las concatena. Realmente podría entenderse que el niño realiza la cadena cuarenta y cinco \Rightarrow 40 y 5 \Rightarrow 405, posiblemente omite ‘y’ porque según como él entiende se diría “estas representaciones con cifras no tienen sino números”.

realizar conversiones $R_v \Rightarrow R_i$ -a en un nuevo intervalo numérico (sección 7.2.4.2).⁹⁹ El hecho de que el niño realice una conversión $R_v \Rightarrow R_i$ -a rigiéndose por la regla e1 se interpreta como evidencia de que este niño está trasladando al registro indo-arábigo la sintaxis aditiva del registro verbal. Es importante aclarar que aceptar el traslado de la sintaxis aditiva del registro verbal al registro indo-arábigo por parte del niño, no implica que se está afirmando que el niño se hace a un significado aditivo de las representaciones R_i -a de forma automática como simple consecuencia de convertir a R_i -a cada una de las partes componen la expresión tanto en R_v . Por ejemplo la representación ‘cuarenta y cinco’ sugiere un significado de una totalidad que se compone de dos partes, la parte ‘cuarenta’ y la parte ‘cinco’, pero si al niño no se le ofrecen adecuadas experiencias no caerá en la cuenta que ‘cuarenta y cinco’ es la composición de esas partes. El profesor de los primeros cursos está familiarizado con hechos en los que los niños, por ejemplo, cuando tienen que agregar 7 a 40, se les vé contar 41, 42, . . . , 47, como si no cayeran en la cuenta que ‘cuarenta’ y ‘siete’ es precisamente eso, ‘cuarenta y siete’. Si bien un niño que se comporta de esa manera muestra que todavía no asigna con completo sentido el significado aditivo que le sugiere la representación, de todas formas hay allí un cierto sentido aditivo. Si bien la representación de llegada al hacer la conversión puede enriquecer el significado de la representación de origen, el significado que transporta la representación verbal a la representación indo-arábigo no puede ser más que el que el niño asigna a esta representación en R_v , de manera que si el significado que el niño asigna a ‘cuarenta y cinco’ es más o menos el del nombre de un lugar en la sucesión verbal ese será el significado que traslada a la representación ‘405’ o ‘45’ (si es el caso de que produzca la escritura canónica). Es el juego mutuo de las conversiones en las dos direcciones en múltiples situaciones el que posibilita enriquecer el significado de estas dos representaciones, “...la actividad conceptual implica la coordinación de los registros de representación” Duval (1995/2004).

Pero las escrituras de tipo e1 no solo aparecen en el intervalo [100, 999], la evidencia que arroja este estudio al igual que otros, como se ha comentado en varios pasajes de este documento, muestra que cuando los niños recién empiezan a hacer conversiones en el

⁹⁹ Recuerde que en los datos cuantitativos se observa que la diferencia en la frecuencia de escrituras e1 y e2 aunque disminuye de la primera a la última prueba en ambos grupos, incluso en el grupo B, las escrituras e1 aparecen tan frecuentemente como las e2.

intervalo [1000, 9999] vuelven a producir escrituras e1; incluso, esto ocurre con niños que ya han consolidado la producción de escrituras canónicas en este intervalo [100, 999].

Por último con relación a este punto de las escrituras tipo e1, este estudio también aporta evidencias sobre la permanencia de la tendencia a hacer conversiones tipo e1 a pesar de los procesos de enseñanza, al analizar los datos de la figura 18 (sección 7.1.1) se dijo que los niños de ambos grupos disminuyen la cantidad de escrituras canónicas que producen en febrero de 2011 (momento de inicio del grado segundo) que la que producían en noviembre del 2010 (momento de finalización del grado primero), mientras que con las escrituras tipo e1 ocurría lo contrario, este hecho de “desaprendizaje” producido en la época de vacaciones de fin de año no puede leerse simplemente como olvido de lo que se les había enseñado —como efectivamente lo es—, sino ante todo como indicador de que permanece algo con relación a la comprensión del número que la enseñanza escolar para ese momento no había logrado transformar a pesar de los niños haber llegado a reproducir la respuestas que la escuela le exigía. Generalmente en la época de vacaciones los adultos liberan a los niños de las exigencias académicas, de manera que podría argumentarse que en febrero los niños hacen producciones que reflejan de forma “más fiel” lo que están en condiciones de producir como resultados de sus comprensiones y no tanto por efectos de la evocación de las respuestas que en ese momento se les estaban enseñando.

Este estudio también ofrece evidencias que sugieren interpretaciones diferentes sobre las razones por las cuales los niños producen escrituras e2 ($abc \Rightarrow a0bc$, $abcd \Rightarrow a00bcd$ o $a0bcd$); al menos en el momento en que los niños empiezan a hacer conversiones $Rv \Rightarrow Ri-a$ en los respectivos intervalos numéricos, la producción de escrituras tipo e2 (las $a0bc$ y $a0bcd$) aparece no como una incorrecta aplicación de la regla de sobreescritura o del intento de eliminar ceros del nodo, más bien es resultado de copiar la forma de la escritura ‘101’, ‘102, ...’, ‘109’, por ejemplo, ‘ciento veintitrés escribe ‘1023’. Es como si los niños entendieran que las representaciones verbales que comienzan con ‘ciento’ se escriben empezando con ‘10’, incluso, muchos niños extienden esta regla a ‘p-cientos’, de manera que consideran que, por ejemplo, doscientos ochenta y cuatro se escribe como ‘2084’. En el intervalo [1000, 9999] también se producen escrituras de la forma $a0bcd$, por ejemplo, tres mil cuatrocientos doce se convierte como 30412, “*para que sea mil*”. De acuerdo con estos datos parece entonces que las escrituras tipo e2 no son una derivación de las tipo e1 y menos es una regla en la que exista la intención de quitar ceros, más podría decirse que es lo contrario, se agrega un cero para distinguir las

representaciones en R_i -a de [100,999] de las de [1,99] y las de [1000, 9999] de las [100, 999]. Hechos como este muestran las precauciones que se hacen necesarias al interpretar información que se basa exclusivamente en registrar las producciones de los niños al realizar las conversiones sin tomar las precauciones necesarias para identificar las diferentes razones que los llevan al producirlas, ya que en un caso como éste, si bien la producción de tipo e2 es la misma, las relaciones que el niño establece entre las partes de las representaciones verbales o relaciones con otras escrituras que parece ser orientan a los niños en muchas de sus conversiones, sugieren que convendría considerar sus diferencias.

Otra evidencia que arroja este estudio es la coexistencia en el niño de una gran habilidad para identificar regularidades y una relativa intermitencia en la aplicación de las reglas que rigen las conversiones (sección 7.2.4.5). Aunque los niños muestran una sorprendente habilidad para comparar diferentes escrituras e identificar regularidades que son capaces de aplicar en nuevas conversiones, ésta es relativa, también muestran inestabilidad, basta una nueva configuración o nuevas asociaciones para aparecer otra regla que podrán mantener para una nueva serie de números y que después cambiarán. Los hechos que se observan en este estudio nos muestran unos niños que se comportan como sujetos capaces de comparar información, identificar semejanzas y diferencias, encontrar regularidades y extraer inferencias entre hechos que por alguna razón asocian y relacionan, pero al ser escasos sus recursos de control de la validez de sus inferencias y de sus aplicaciones, las cambian cuando cambian las configuraciones, hacen otras asociaciones y establecen otras relaciones.

Dos aclaraciones son necesarias, primera, aceptar lo recién dicho no significa la inexistencia de invariantes que organicen y orienten la diversidad y las contingencias en las búsquedas del niño y segunda, tampoco, supone una adhesión a algún tipo de asociacionismo para explicar el aprendizaje de las conversiones entre los registros numéricos, precisamente el reconocer y poder mostrar la existencia de invariantes desde los cuáles los niños organizan sus experiencias con las representaciones numéricas es reconocer la función estructurante del individuo.

Con relación al primero de los dos puntos enunciados en el párrafo anterior este estudio permite destacar:

- Una y otra vez se observa que los niños se rigen por el principio de univocidad: a dos representaciones diferentes de Rv les corresponden representaciones diferentes de Ri-a¹⁰⁰; de manera que cada vez que caen en la cuenta que la representación indo-arábica obtenida al convertir una representación verbal resulta exactamente igual a otra que corresponde a una representación verbal que ya han convertido, se imponen la condición de modificar una de ellas, generalmente cambian la del rango superior por ser esta en la que tienen menos seguridad haberla escrito correctamente. Este principio de univocidad es el que los lleva a corregir una producción como ‘ac’ cuando omiten el cero intermedio al convertir representaciones verbales de la forma ‘a0c’, porque ‘ac’ corresponde a una representación verbal del intervalo [10, 99] ya conocida, y es el mismo principio cuando modifican la escritura ‘acd’ producida al convertir una representación de la forma a0cd del intervalo [1000, 9999]. Por sus ejecuciones los niños dan muestra de poseer este principio, sin embargo esto no garantiza su permanente actualización, se necesita que ellos comparen las dos representaciones verbales y la representación indo-arábica para caer en la cuenta de estar infringiéndolo, unas veces lo hacen espontáneamente, dependiendo quizá, entre otros factores, del dominio que tengan de las conversiones en el rango menor y otras necesitarán de la ayuda de otro que los enfrente a los datos y les ayude a caer en la cuenta de que está faltando a este principio.

- Otro invariante organizador de la ejecuciones de los niños al realizar conversiones $Rv = \rightarrow Ri-a$ que está presente a lo largo de proceso de apropiación de las escrituras canónicas en Ri-a es precisamente con lo que se empezó esta sección, el traslado que hace el niño de la sintaxis aditiva propia de las representaciones verbales a las representaciones indo-arábicas.

- Este estudio sugiere la relación entre la capacidad de los niños para coordinar varios tipos de unidades y la posibilidad de complejizar el significado que los niños asignan a las representaciones numéricas. En las secciones 7.2.2. y 7.2.3 se analizaron las dificultades a las que se enfrenta el niño cuando trabaja con sistemas que tienen dos tipos de unidades. En el caso de la cuantificación de las colecciones mediante grupos de diez y sueltas esta investigación aporta evidencia sobre un hecho central en el apropiación del número y del sistema de numeración: una vez que una totalidad homogénea de unidades

¹⁰⁰ A partir de estudio no se tiene información suficiente para afirmar que el principio no solo es unívoco sino biunívoco, es decir, que además, considera que una misma representación verbal no pueda tener dos representaciones indo-arábicas distintas. Posiblemente sea así.

de unos se descompone en dos colecciones (la de los grupos de diez y las de los elementos sueltos) los niños hacen centraciones y confunden los componentes de la situación antes de lograr producir un enunciado preciso; si enuncian la cantidad de grupos de diez dejan de enunciar los elementos sueltos, si enuncian la cantidad de elementos sueltos se olvidan de los grupos de diez, si logran prestar cuidado tanto a los grupos de diez y los elementos sueltos aplican a la cantidad de grupos de diez lo que es para la cantidad de sueltas, y otros tanteos más antes de llegar a la enunciación correcta. En la sección 7.2.3 se describió algo semejante en la tarea de la descripción de varios montones de la misma cantidad de elementos cada uno. Esta tarea permitió identificar una secuencia de esfuerzos que ilustra no solo el paso de menos coordinación a más coordinación de las dos dimensiones que componen esta tarea (número de colecciones y número de elementos), sino —y esto es lo más importante— el progreso de una enunciación meramente aditiva a una multiplicativa; se pasa de enunciados cuya estructura podría considerarse aditiva: a G y b ¹⁰¹, a una de la forma a G y de b que puede considerarse como a medio camino y, por último, a enunciados de la forma a G de b , estos sí de estructura propiamente multiplicativa (tabla 14). En la misma dirección, en las tareas de conversión $R_v \Rightarrow R_b$ y $R_v \Rightarrow R_t$ -c¹⁰² los niños muestran en sus primeros intentos sus preferencias por trabajar en un sistema homogéneo de unidades de uno (pagar solo con billetes de \$1 o solo con cuadros) y al trabajar con sistemas heterogéneos muestran las dificultades que tiene para coordinar los diferentes tipos de unidades. Pero no solo eso, las tareas de conversión de $R_v \Rightarrow R_b$ muestran que además las dificultades que tienen para coordinar varias sucesiones numéricas (de mil en mil, de cien en cien, de diez en diez y de uno en uno), inicialmente los niños no anticipan la cantidad de billetes de cada denominación a partir de alguna de las dos representaciones (la verbal o indo-arábica) se les ve contando billetes de cien (cien, doscientos,...) para determinar cuántos billetes necesitan para completar la cantidad expresada por una representación ‘p-cientos ...’ o incluso de mil en mil para ‘p-mil ...’ y más adelante, a pesar de que al utilizar la representación indo-arábica anticipan la cantidad de billetes, se les ve apoyarse nuevamente en el representación verbal. Podría decirse que los niños necesitan de un tiempo más o menos largo antes de poder usar las representaciones indo-arábicas con cierta autonomía. Parece ser que la posibilidad de asignar significado aditivo-multiplicativo a las representaciones numéricas tiene que ver con la capacidad del niño de trabajar con sistemas que le exijan coordinar varios tipos de

¹⁰¹ a G y b se refiere a que los niños dicen: “hay a grupos y b fichas”.

¹⁰² Para ilustración de estas últimas puede verse en Anexo A, caso uno, E2, (497,772). Mayo 2010.

unidades, como se analizó en la sección 4.2. Sin embargo este trabajo no alcanza a dar información suficiente para ver más claramente la relación entre esta capacidad de coordinar unidades de diferentes tipos de unidad y la posibilidad de realizar comprensivamente las conversiones $R_v \Rightarrow R_{i-a}$, sería muy útil en trabajos posteriores diseñar tareas que permitieran identificar cómo se dan estas relaciones cuando los niños intentan resolverlas.

Las tareas de conversión $R_v \Rightarrow R_b$, $R_{vm} \Rightarrow R_b$, $R_{i-a} \Rightarrow R_b$, no solo dejan ver el papel que cumple la sucesión verbal numérica como soporte de las operaciones que realizan los niños al transformar una representación en otra, también, aportan evidencia valiosa sobre la multiplicidad de registros que coordinan los niños al resolver estas tareas. Cuando los niños realizan las conversiones $R_v \Rightarrow R_b$ se los ve haciendo otras transformaciones a la representación de partida distintas a las directamente vinculadas con la representación inicial y la final. Al apoyarse los niños en la sucesión numérica para dar cuenta del número de billetes de cada denominación que se necesita para pagar una cantidad de dinero puede considerarse que no se limitan a la conversión $R_{vm} \Rightarrow R_b$ sino que realmente lo que hacen es $R_{vm_1} \Rightarrow R_{vm_2} \Rightarrow \dots \Rightarrow R_b^{103}$ o para ser más exactos habría que descomponer a R_{vm_1} en partes y expresar las transformaciones de cada parte y sus respectivas conversiones. En el marco de la teoría de Duval se pueden considerar estas transformaciones como operaciones de tratamiento (por ejemplo: p-cientos en cien, cien y cien es doscientos, cien, cien y cien es trescientos, ..., cien, cien, ..., cien, es p-cientos).

Este estudio aporta evidencia que permiten ilustrar que estas transformaciones no son adicionales a la operación $R_v \Rightarrow R_b$ sino que son partes constituyentes de esta operación, en el caso de los niños que están en un momento en el que todavía no han consolidado procedimientos que los lleven a producir escrituras canónicas cuando realizan este tipo de conversiones (sección 7.2.4.7).

Pero además del recurso a las sucesiones numéricas para realizar las conversiones, los niños dejan ver que no solo trabajan con múltiples registros sino además que hacen manejos simultáneos de ellos. En tareas de conversión $R_{(i-a)m} \Rightarrow R_b$ algunos niños dejan ver que no solo no hacen una única conversión sino que trabajan simultáneamente con

¹⁰³ los puntos suspensivos representan que puede haber más de una transformación de tratamiento.

representaciones del registro $R(i-a)_m$ y R_{vm} . Cuando los niños logran una adecuada coordinación de dos de los registros numéricos, en este caso R_{vm} y $R(i-a)_m$ las representaciones en los dos registros están indisolublemente asociadas, de tal forma que al realizar la operación cognitiva de conversión de una representación en $R(i-a)_m$ en R_b irremediamente trabajan también con la respectiva representación en R_{vm} . Más que hablar de la cadenas de conversiones tendría que pensarse en un esquema de conversiones que refleje más simultaneidad entre $R(i-a)_m$ y R_{vm} .

En síntesis este estudio aporta evidencia que permite apreciar la dinámica del manejo de diferentes registros numéricos (los convencionales y los utilizados como recursos didácticos) y de manejo de las operaciones de conversión por parte del niño. Esta dinámica es compleja y no se reduce al aprendizaje de un algoritmo como pretende la escuela. Es posible que en el momento en que un sujeto ha consolidado las escrituras canónicas para conversiones $R_v \Rightarrow R_{i-a}$ el proceso de conversión comprometa exclusivamente las dos representaciones y que solo consista en aplicar un algoritmo que garantiza las transformaciones de las partes de la representación de partida a la partes de la representación nueva, bajo estas condiciones el proceso de conversión puede lograrse meramente mediante un proceso de transcodificación, pero en el caso del niño, que recién empieza a apropiarse de esas representaciones es un proceso más constructivo y más creativo, en el que implica su pensamiento numérico, es decir su actividad conceptual.

En la sección 4.2.1 al analizar las demandas cognitivas de la operación de conversión $R_v \Rightarrow R_{i-a}$ se insistía que lo primero que esta operación exige al niño es interpretar la representación de R_v como un todo, cualquiera que sea la interpretación que él pueda darle. Precisamente el reconocimiento de este hecho permite distinguir la operación de conversión— tal como se entiende en este estudio apoyados en Duval— de un proceso de transcodificación como es entendida desde una perspectiva de procesamiento. Si bien desde ambas perspectivas se entiende que el niño al convertir o transcodificar una representación del registro verbal procede convirtiendo las partes en las que descompone la representación total, en la manera de entender de este autor se da una diferencia que puede ser fundamental y es esto lo que se tratará de explicar a continuación.

En el primer caso estas partes se conciben como unidades semánticas, según el modelo del signo numérico que en este estudio se ha asumido (sección 4.1, figura 14) estas unidades están determinadas por los interpretantes inmediato y mediato que los niños

actualicen para interpretar la representación. Ejemplo, al interpretar la marca ‘trescientos ochenta y seis’ si el niño cuenta —y además actualiza— entre sus esquemas con el interpretante o los interpretantes que le posibiliten asignar el sentido de ‘trescientos’ y ‘ochenta y seis’ segmenta esa marca (o representamen) en dos partes ‘trescientos’ y ‘ochenta y seis’ y estas dos partes, cada una con significado completo, es convertida a alguna representación de Ri-a (‘300’ y ‘86’), con esas nuevas representaciones compone la representación 30086 de Ri-a que es la representación que en este registro representa a trescientos ochenta y seis. Cada una de esas unidades semánticas en las que descompuso la representación verbal transporta sus significados a esas nuevas marcas (‘300’ y ‘86’) y además, en tanto que el niño había interpretado como totalidad la representación original transporta a la nueva marca ‘30086’ en Ri-a ese significado original. Lo anterior sin desmedro de que la representación final en Ri-a pueda enriquecer el significado inicial y que al darse una conversión en sentido inverso enriquezca a la original¹⁰⁴, y que este proceso se repita para fortalecer el significado, eso es lo que se puede apreciar en los procesos de aprendizaje que muestran como en cámara lenta la dialéctica entre simiosis inyectiva y proyectiva a la que se refiere Vasco (2007).

Desde la perspectiva de la transcodificación también hay codificación de partes para componer la totalidad del nuevo código, pero la identificación de partes no se deriva de un proceso de significación, o al menos eso no es claro, sino más bien de procesos más ligados a la percepción, en este caso depende de la forma como percibe el niño las emisiones sonoras, de ahí que en sus estudios sobre importancia tomar precauciones sobre estos hechos: diferencias en la emisión oral y sus implicaciones en la recepción, entre las marcas sonoras ‘p mil’ y ‘p-cientos’ son factores determinantes en el procesamiento. Podría decirse que en el primer caso el proceso de conversión es: representación total => partes (unidades semánticas) => total en el proceso de transcodificación sería: partes => todo.

Finalmente unos comentarios de las posibles implicaciones de los resultados de esta investigación en la enseñanza a los niños. Si como se ha mostrado en este estudio el registro verbal numérico es el que comanda las construcciones iniciales de los niños,

¹⁰⁴ A medida que el niño avanza en el manejo de las conversiones entre los dos registros, se hace más fuerte que la conversión no se en una única dirección sino que se dé ambas direcciones, es decir que se llegue a un estado de real coordinación de los dos registros. Así como se comentó lo que hacen los niños con los dos registros Rvm y R(i-a)m.

conviene responder a este hecho. Resulta poco beneficioso a los niños que desde muy temprano en la escuela se busque que ellos produzcan escrituras canónicas en Ri-a y peor aún que se pretenda que hagan cuentas con representaciones de este registro mediante los algoritmos estandarizados. Las prácticas tradicionales de enseñanza del SDN ofrecen un pobre apoyo a los niños para que logren comprender la sintaxis que encierran las reglas de producción de representaciones de los registros numéricos. Se les enseñan las secuencias numéricas paso a paso, de esta forma, en el mejor de los casos, ellos logran hacerse a la idea de que esas representaciones corresponden a un lugar en esas sucesiones. Las situaciones que se les ofrecen para que hagan uso de estas representaciones —que sería una gran posibilidad para que construyeran otros significados— son reducidas y cuando se los enfrenta a problemas se les enseñan los algoritmos estandarizados de las operaciones, porque la escuela no concibe que un niño haga cuentas recurriendo a sus propios procedimientos. Si el niño traslada la sintaxis del registro verbal a las representaciones del registro indo-arábigo, como parece derivarse de esta investigación, la escuela debería, por una parte, estimular el uso del registro verbal e introducir escrituras con cifras que se acerquen a escrituras aditivas, estimular su uso en múltiples y variadas situaciones, es decir, estimular a los niños para que hagan cuentas mediante procedimientos que ellos van creando como fruto de las comprensiones que van ganando del número y de los registros numéricos. Escrituras como las de los seudoregistros trabajados en la experiencia didáctica de esta investigación serían una posible alternativa. Representaciones como 300 y 45 ayudan a los niños a asignar sentido a la representación verbal como una composición ‘trescientos’ y ‘cuarenta y cinco’, esto facilita institucionalizar en el aula un significado que facilite el intercambio entre pares y el trabajo autónomo. Al contrario una enseñanza que desconoce estos hechos, pone al niño en una posición más pasiva, de simple receptor.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFIA-

- Anderson, J. R. (2001). *Aprendizaje y memoria: un enfoque integral*. México: McGraw-Hill.
- Benveniste, E. (1987). *Problemas de lingüística general II* (7ª edición). México: Siglo XXI. (Obra original publicada en 1974).
- Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas* (trad. J. Centeno, B. Melendo y J. Murillo). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115. Recuperado de:
<http://claroline.emate.ucr.ac.cr/claroline/backends/download.php/QnJvdXNzZWV1X0ZybmRlbWVudHMucGRm?cidReset=true&cidReq=SP1363>
- Feldman, C. F. (1990). El pensamiento a partir del lenguaje: la construcción lingüística de las representaciones cognitivas (trad. C. Ginard). En J. Brunner & H. Hasten (Eds.), *La elaboración del sentido. La construcción del mundo por el niño* (pp. 125-138). Barcelona: Paidós. (Obra original publicada en 1987).
- Castaño, J. (1996). La construcción del pensamiento multiplicativo simple. Hojas pedagógicas. Serie lo numérico. No 3. *Revista Alegría de Enseñar*, 24 (Material inserto en el número de abril-junio).
- Castaño, J. (2008). Conversión de registros de representación numérica y construcción de significado. (Tesis Inédita). Universidad Autónoma de Barcelona.
- Castaño, J., Forero, A. & Oicata, A. (2007). Colegios públicos de excelencia para Bogotá. Orientaciones para la discusión curricular por campos de conocimiento. Bogotá, Colombia: Secretaría de Educación Distrital.
- Clark, H. H., & Clark, E. V. (1977). *Psychology and language*. New York: Harcourt-Brace Jovanovich.
- Collette, J-P (1985). *Historia de las matemáticas*. Tomo I (trad. P. González). México: Siglo XXI (Obra original publicada en 1973).
- Cubero, R. (2005). *Perspectivas constructivistas. La intersección entre el significado, la interacción y el discurso*. Barcelona: Crítica y Fundamentos.
- Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates Mathematics*. Londres-Nueva York: Oxford University Press.
- Dehaene, S., & Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical Cognition*, 1, 83-120.
- Deladalle, G. (1996). *Leer a Peirce hoy*. (trad. L. Varela). Barcelona: Gedisa (Obra original publicada en 1990). doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

- Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de la matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo* (trad. M. Vega, 2a. ed.). Cali: Universidad del Valle (Obra original publicada en francés en 1999).
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (trad. M. Vega). Cali: Universidad del Valle (Obra original publicada en francés en 1995).
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131. Recuperado de:
<http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/162>
- Eco, U. (1988). *Signo* (trad F. Serra, Trad.). Barcelona: Labor. (Obra original publicada en 1973).
- Fodor, J. A. (1986). *La modularidad de la mente: un ensayo sobre la psicología de las facultades*. (trad. J. F. García-Albea). Madrid: Morata. (Obra original publicada en 1983).
- Fodor, J. A., García-Albea, J. E., & Zulaica, J. F. (1985). El lenguaje del pensamiento. Madrid: Alianza.
- Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en didáctica de las matemáticas. *EMA*, 7(2), 127-170. Recuperado de
<http://funes.uniandes.edu.co/1151/>.
- García-Carpintero, M. (1996). *Las palabras, las ideas y las cosas. Una presentación de la filosofía del lenguaje*. Barcelona: Ariel.
- Gardner, H. (1988). *La nueva ciencia de la mente. Historia de la revolución cognitiva*. (trad. I. Wolfson). Barcelona: Paidós (Obra original publicada en 1985).
- Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Gelman, R., & Meck, E. (1986). The notion of principle: The case of counting. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 29-56). Londres: Lawrence Erlbaum Associates.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355. Recuperado de:
http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm#signi_sistemicos
- Godino, J. (2003). Teoría de las funciones semióticas: un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática. Recuperado de:
http://www.fceia.unr.edu.ar/~sreyes/funciones_semioticas.pdf

- Godino, J., Font, V., Contreras, A., & Wilhelmi, M. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Relime*, 9(1), 117-150.
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/558/>
- Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in Mathematics Education research (pp. 517-545). En A. Kelly & R. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*. Mahwah, NJ-Londres: LEA.
- Gómez-Granell, C. (1985). La representación gráfica de la multiplicación aritmética: una experiencia de aprendizaje. *Infancia y Aprendizaje: Journal for the Study of Education and Development*, (31-32), 229-240
- Gómez-Granell, C. (1981). Procesos cognitivos en el aprendizaje de la multiplicación. *Infancia y Aprendizaje: Journal for the Study of Education and Development*, (15) 109-120-
- Ifrah, G. (1998). *Historia universal de las cifras. La inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo*. Madrid: Espasa.
- Inhelder, B., & De Campora, D. (1996). Hacia el constructivismo psicológico: ¿estructuras?, ¿procedimientos?. Los dos indisociables. En B. Inhelder & G. Cellérier (Eds.), *Los senderos de los descubrimientos del niño* (pp. 22-56). Barcelona: Paidós.
- Kieran, C., & Filloy, Y. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica (trad. L. Puig). *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.
- Kaput, J. (1998). *Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows*. Recuperado de: http://www.google.com.co/search?client=firefox-a&rls=org.mozilla%3Aes-ES%3Aofficial&channel=s&hl=es-ES&source=hp&biw=&bih=&q=J+Kaput++Journal+of+Mathematical+Behavior%2C+1998++kaputcenter.umassd.edu&btnG=Buscar+con+Google&oq=&aq=&aqi=&aql=&gs_l=
- Karmiloff-Smith, A. (1994). Más allá de la modularidad. La ciencia cognitiva desde la perspectiva del desarrollo (trad. J. C. Gómez y M. Núñez). Madrid: Alianza (Obra original publicada en 1992).
- Lerner, D., Sadovsky, P., & Wolman, S. (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En C. Parra & I. Sainz (Comps.), *Didáctica de las matemáticas* (5ª reimpresión, pp. 95-184). Buenos Aires: Paidós.

- Lyons, J. (1980). *Semántica*. (trad. R. Cerdà, 2ª Ed.). Barcelona: Teide. (Obra original publicada en 1977).
- Magariños de Morentín, J. A. (1985). *El signo: las fuentes teóricas de la Semiología: Saussure, Peirce y Morris*, Buenos Aires: Hachette.
- Martí, E. (1999). “Esto no es dibujo”. Las primeras distinciones sobre sistemas notacionales. En *El aprendizaje estratégico: enseñar a aprender desde el currículo* (pp. 239-250). Barcelona: Santillana.
- Martí, E. (2003). *Representar el mundo externamente. La adquisición infantil de los sistemas externos de representación*. Madrid: Machado.
- McCloskey, M. (1992). Cognitive mechanisms in numerical processing: Evidence from acquired dyscalculia. *Cognition*, 44(1), 107-157.
- McCloskey, M., Alimónosa, D., & Sokol, S. M. (1991). Facts, rules and procedures in normal calculation: Evidence from multiple single-patient studies of impaired arithmetic fact retrieval. *Brain and Cognition*, 17(2), 154-203.
- McCloskey, M., Caramazza, A., & Basili, A. (1985). Cognitive mechanisms in number processing and calculation: Evidence from dyscalculia. *Brain and Cognition*, 4, 171-196. Recuperado de:
http://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=13&ved=0CG0QFjAM&url=http%3A%2F%2Fwww.researchgate.net%2Fpublication%2F20746103_Cognitive_mechanisms_in_number_processing_and_calculation_evidence_from_dyscalculia%2Ffile%2F9fcfd50b79a4284a68.pdf&ei=GgluU82TOOLgsASPw4GwCg&usg=AFQjCNFi0iaWx5rElj5dBaQXgI8HUzbXgg&sig2=XDsTnW39lWkiTVKQUvrhCg
- Miura, I., Kim, C., Chang, C., & Okamoto, Y. (1988). Effect of language characteristics on children’s cognitive representation of number: Cross-national comparisons. *Child Development*, 59, 1445-1450.
- Miura, I., Okamoto, Y., Kim, C., Steere, M., & Fayol, M. (1993). First-graders’ cognitive representation of number and understanding of place value: Cross-National comparisons—France, Japan, Korea, Sweden, and the United States. *Journal of Educational Psychology*, 85(1), 24-30.
- Newell, A., & Simon, H. (1972). *Human problem solving* (14). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Ogden, C. K., & Richards, I. A. (1964). *El significado del significado* (trad. E. Prieto). Buenos Aires: Paidós (Obra original publicada en 1923).
- Orozco, M., & Hederich, C. (1997). *Construcción de la operación multiplicativa y del sistema de notación en base 10: una relación posible*. Santiago de Cali: Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados en Psicología, Cognición y Cultura, Universidad del Valle.

- Orozco, M., & Hederich, C. (2002). *Errores de los niños al escribir numerales dictados*. Recuperado de: <http://www.univalle.edu.co/~cognitivo>
- Orozco, M., Guerrero, D., & Otálora, Y. (2007). Los errores sintácticos al escribir numerales en rango superior. *Infancia y aprendizaje*, 30(2), 147-162. Recuperado de: <http://objetos.univalle.edu.co/files/>
- Peirce, C. (1987). *Obra lógico-semiótica* (A. Sercovich, Ed.; trad. R. Alcalde & M. Prelooker). Madrid: Taurus. [El número de párrafo precedido de "C.P." corresponde a la edición de los trabajos de Peirce, *Collected Papers*, editados por la Universidad de Harvard en 1931].
- Piaget, J. (1969). *El nacimiento de la inteligencia en el niño* (trad. L. Fernández García). Madrid: Aguilar. (Obra original publicada en 1936).
- Piaget, J. (1969). *Seis estudios de psicología* (trad J. Marfá). Madrid: Aguilar. (Obra original publicada en 1964).
- Piaget, J. (1983). *Psicología de la inteligencia* (trad. J. C. Foix) Buenos Aires: Psique. (Obra original publicada en 1974).
- Piaget, J. (1983). *Psicología y epistemología* (trad. A. M. Battro, 4ª ed.) Buenos Aires: Eméce. (Obra original publicada en 1970).
- Ponce, E. (1992). El método clínico de la psicología genética. *Unidad 3. Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa. OEA-ILCE*. México. Recuperado de:
http://scholar.google.com/scholar?start=20&q=el+metodo+clinico+piagetiano&hl=es&as_sdt=0,5#
- Ponce, H., & Wolman, S. (2010). Numeración oral-numeración escrita. Tres perspectivas de análisis que abordan esta relación. *Educación, Lenguaje y Sociedad*, 7(7), 207-226. Recuperado de:
<http://www.biblioteca.unlpam.edu.ar/pubpdf/ieles/v07a11ponce.pdf>
- Power, R., & Dal Martello, M. (1990). The dictation of Italian numerals. *Language and cognitive processes*, 5, 237-254. doi: 10.1080/01690969008402106
- Pozo, I. (2010). *Teorías cognitivas del aprendizaje* (10ª reimpresión). Madrid: Morata.
- Pylyshyn, Z. W. (1988). *Computación y conocimiento: hacia una fundamentación de la ciencia cognitiva*. Madrid: Debate.
- Saussure, F. (1945). *Curso de lingüística general* (24ª ed.). Buenos Aires: Losada. Recuperado de:
http://www.filos.unam.mx/LICENCIATURA/Pagina_FyF_2004/introduccion/Saussure-Curso_Linguistica_General.pdf

- Scheuer, N., Sinclair, A., Merlo de Rivas, S., & Tièche, C. (2000). Cuando ciento setenta y uno se escribe 10071: niños de 5 a 8 años produciendo numerales. *Infancia y Aprendizaje*, 23(2), 31-50.
- Silvestri, A., & Blanck, G. (1993). *Vigotski: Bajtin la organización semiótica de la conciencia*. Barcelona. Anthropos.
- Simon, H. A., & Newell, A. (1971). Human problem solving: The state of the theory in 1970. *American psychologist*, 26(2), 145-159.
- Sierpinska, A. y Ierman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.
- Terigi, Fl., & Wolman, S. (2007). Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 59-83. Recuperado de: <http://www.rieoei.org/rie43a03.pdf>.
- Tolchinsky, L., & Karmiloff-Smith, A. (1993). Las restricciones del conocimiento notacional. *Infancia y Aprendizaje: Journal for the Study of Education and Development*, 62-63, 19-54. Recuperado de:
<http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=48427>
- Tolchinsky, L. (2007). The multiple functions of external representations: Introduction. En E. Teubal, J. Dockrell, & L. Tolchinsky (Eds.). *Notational knowledge. Developmental and Historical Perspectives* (pp. 1 -10). Rotterdam-Taipei: Sense Publishers.
- Vasco, C. E., Zellweger, S., & Sáenz-Ludlow, A. (2009). García de la Madrid: Ideas and signs in the Iberian Gray Zone (1650-1850) that follows the Black Hole (1350-1650). In J. Deely and L. G. Sbrocchi (Eds.), *Semiotics 2008 "Specialization, Semiosis, Semiotics"* [Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the Semiotic Society of America. 16-19 October 2008] (pp. 91-111). New York-Ottawa-Toronto: LEGAS.
- Vasco, C. E. (2007). Historical evolution of number systems and numeration systems. En E. Teubal, J. Dockrell, & L. Tolchinsky (Eds.). *Notational knowledge. Developmental and Historical Perspectives* (pp. 13-43). Rotterdam-Taipei: Sense Publishers.
- Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. (trad. J. D. Godino). *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 10(2-3), 133-170. Recuperado de:
http://ipes.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf
- Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for Mathematics Education. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 167-181.

Villarroel, R., Jiménez J. E., Rodríguez, C., Peake, C., & Bisschop, E. (2013). El rol de la escritura de números en niños con y sin dificultades de aprendizaje en matemáticas. *European Journal of Education and Psychology*, 6(2), 105-115. doi: 10.1989/ejep.v6i2.107. Recuperado de:

<http://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=8&ved=0CF0QFjAH&url=http%3A%2F%2Fwww.ejep.es%2Findex.php%2Fjournal%2Farticle%2Fdownload%2F107%2F136&ei=LblrU6PBNIPjsATf9YHYCA&usg=AFQjCNF12qA7Zj0GZ-g1J0hxR3X0aHs4Vg&sig2=9IU01647IKOzmVjPgGROlg&bvm=bv.66111022,d.cWc>

Vygotsky, L. (1964). *Lenguaje y pensamiento* (trad. M.M. Rotge). Buenos Aires: Pléyade. (Obra original publicada en 1934).

Wittgenstein, L. (1999). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Altaya (Obra original publicada en 1958). Disponible en:

<http://www.uruguaypiensa.org.uy/imgnoticias/765.pdf>

Zecchetto, V. (2002). *La danza de los signos. Nociones de semiótica general*. Quito: Abya-Yala. Recuperado de:

<http://repository.unm.edu/bitstream/handle/1928/10563/La%20danza%20de%20los%20signos.pdf>

9 ANEXOS

9.1 ANEXO A TRANSCRIPCIONES EN CD

9.2 ANEXO B ANÁLISIS DE LOS CUATRO CASOS EN CD