



Departamento de Ingeniería Estructural y Mecánica  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y de  
Telecomunicación

TESIS DOCTORAL

SÍNTESIS CINEMÁTICA DIMENSIONAL  
ÓPTIMA DE MECANISMOS MEDIANTE UN  
MÉTODO GENERAL BASADO EN EL  
GRADIENTE EXACTO

Autor: D. Pablo García Fernández

Director: Dr. D. Ramón Sancibrián Herrera

Santander, diciembre 2010





Departamento de Ingeniería Estructural y Mecánica  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y de  
Telecomunicación

TESIS DOCTORAL

SÍNTESIS CINEMÁTICA DIMENSIONAL  
ÓPTIMA DE MECANISMOS MEDIANTE UN  
MÉTODO GENERAL BASADO EN EL  
GRADIENTE EXACTO

Autor: D. Pablo García Fernández

Director: Dr. D. Ramón Sancibrián Herrera

Santander, diciembre 2010



## Agradecimientos

En la etapa final de la redacción de esta Tesis doctoral en la que me encuentro, quisiera recordar a todas las personas que, de una u otra forma, han contribuido a su realización.

En el ámbito académico he contado con la inestimable ayuda del Grupo de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Cantabria, cuyos miembros me han mostrado la importancia de contar con grupo que dé soporte a la actividad individual tanto en la labor investigadora como docente. Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todos ellos, comenzando por el director de esta Tesis, Ramón Sancibrián, sin cuyos conocimientos e ideas habría sido imposible su consecución. A Fernando Viadero, por el impulso para su realización y por sus precisas observaciones. A Ana de Juan, por su motivación, apoyo y magníficas ideas. A Alfonso Fernández, por sus clarificadoras explicaciones técnicas y por su disposición a ayudar en todo lo que fuera posible. A José Luis Niembro, por su rigor técnico y por su esfuerzo en la corrección del documento final. Y al resto de miembros del grupo, Carlos Hoppe, Juan Osorio, Miguel Iglesias, Jesús Pascual, Carlos de Miguel, Carlos Aguilar, José F. López-Agudo y Manuel Ángel Andrés, por su ayuda y apoyo siempre que lo he necesitado. También quiero expresar mi agradecimiento a Ángel Sedano, cuyas aportaciones técnicas han sido de inestimable ayuda.

En el plano personal, quisiera manifestar mi agradecimiento a mis Padres por su dedicación e infinita generosidad. A mis tías *Cuquina* y *Marinievas* por su cariño y sacrificios. Y al resto de mi familia por su constante apoyo.

Y al resto, que son muchos y no por ello menos importantes, quiero mostrar igualmente mi profundo agradecimiento.



A mi familia



# Resumen

La presente Tesis aborda el problema de diseño cinemático dimensional de mecanismos a través del desarrollo de un método de síntesis óptima para la resolución de los problemas básicos de la síntesis cinemática: generación de trayectorias, generación de funciones y guiado de sólido rígido.

En este trabajo se presentan las bases teóricas en las que se basa el método propuesto, que es aplicable a cualquier configuración de mecanismo. Se trata de un método de optimización local basado en el gradiente que se formula matricialmente. Además es susceptible de considerar diversos tipos de restricciones, definidas mediante ecuaciones de igualdad o de desigualdad. La optimización del mecanismo se plantea como la minimización de una función cuadrática del error de síntesis. Dicho error se define como la diferencia entre los parámetros deseados para el comportamiento cinemático del mecanismo y los realmente generados por este.

Un aspecto fundamental del método lo constituye la obtención analítica de la matriz Jacobiana del error de síntesis respecto de las variables de diseño. Dicha determinación se realiza a través de las ecuaciones de restricción del problema, y constituye una característica destacable del método. Además de presentar ventajas numéricas, respecto de su obtención mediante aproximación numérica, permite considerar de forma automática, restricciones adicionales sobre las variables de diseño.

Una vez establecida la metodología general, se desarrollan los algoritmos para la resolución de los tres problemas de síntesis cinemática citados y se presentan diversos ejemplos de aplicación.



# ÍNDICE

<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
1.1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.2. OBJETIVO DE LA TESIS.....	2
1.3. ESTRUCTURA DEL DOCUMENTO.....	3
<b>CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES .....</b>	<b>7</b>
2.1. PROBLEMAS DE LA SÍNTESIS DE MECANISMOS .....	7
2.2. RESEÑA HISTÓRICA DE LA SÍNTESIS DE MECANISMOS .....	8
2.3. MÉTODOS DE SÍNTESIS CINEMÁTICA DIMENSIONAL .....	10
2.4. SÍNTESIS DIMENSIONAL ÓPTIMA DE MECANISMOS .....	14
2.4.1. <i>Introducción</i> .....	14
2.4.2. <i>Planteamiento del problema de optimización</i> .....	15
2.5. ESTADO DEL ARTE DE LA SÍNTESIS DIMENSIONAL DE MECANISMOS .....	17
2.6. MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN .....	21
2.6.1. <i>Métodos deterministas</i> .....	29
2.6.2. <i>Métodos probabilísticos</i> .....	46
<b>CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE SÍNTESIS ÓPTIMA PROPUESTA.....</b>	<b>51</b>
3.1. INTRODUCCIÓN.....	51
3.2. FORMULACIÓN GENERAL DEL PROBLEMA DE SÍNTESIS .....	52
3.2.1. <i>Modelización cinemática del mecanismo.</i> .....	52
3.2.2. <i>Especificaciones de diseño.</i> .....	54
3.2.3. <i>Función objetivo</i> .....	57
3.2.4. <i>Resolución del problema de minimización</i> .....	58
3.3. OBTENCIÓN ANALÍTICA DE LAS MATRICES JACOBIANAS.....	66
3.3.1. <i>Matriz Jacobiana general</i> .....	66
3.3.2. <i>Matriz Jacobiana para el cálculo del coeficiente de tamaño del paso</i> .....	68
3.4. TRATAMIENTO DE RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD .....	69
3.4.1. <i>Tratamiento de variables holgura como variables dependientes</i> .....	72
3.4.2. <i>Tratamiento de variables holgura como variables de diseño</i> .....	73
3.4.3. <i>Consideraciones sobre las alternativas</i> .....	74
3.5. CRITERIO DE PARADA .....	76
<b>CAPÍTULO 4. FORMULACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE SÍNTESIS .....</b>	<b>79</b>
4.1. APLICACIÓN AL PROBLEMA DE GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS.....	79
4.1.1. <i>Parámetros funcionales</i> .....	79
4.1.2. <i>Estrategias para la mejora de la convergencia</i> .....	80

---

4.1.3. Algoritmo con estrategias de mejora.....	82
4.1.4. Ejemplo de formulación para el mecanismo cuadrilátero articulado.....	85
4.1.5. Generación de trayectorias sin coordinación con la barra de entrada..	101
4.1.6. Ejemplos de validación.....	105
4.2. APLICACIÓN AL PROBLEMA DE GENERACIÓN DE FUNCIONES .....	122
4.2.1. Introducción .....	122
4.2.2. Planteamiento del algoritmo .....	123
4.2.3. Ejemplo de formulación del problema de generación de funciones.....	125
4.2.4. Ejemplos de validación.....	130
4.3. APLICACIÓN AL PROBLEMA DE GUIADO DE SÓLIDO RÍGIDO .....	141
4.3.1. Introducción .....	141
4.3.2. Estrategias para el tratamiento del error de orientación.....	142
4.3.3. Algoritmo de síntesis óptima de GSR con coordinación con la barra de entrada .....	145
4.3.4. Algoritmo de síntesis óptima de GSR sin coordinación.....	146
4.3.5. Ejemplo de formulación problema guiado SR.....	149
4.3.6. Ejemplos de validación.....	155
<b>CAPÍTULO 5. EJEMPLOS DE APLICACIÓN PRÁCTICA .....</b>	<b>163</b>
5.1. INTRODUCCIÓN.....	163
5.2. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE FUNCIONES .....	163
5.2.1. Mecanismo de dirección que cumpla la condición de Ackermann.....	163
5.2.2. Mecanismo de suspensión trasera progresiva para motocicleta.....	173
5.3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS ..	189
5.3.1. Mecanismo equivalente a perfil de leva .....	189
5.4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE SÍNTESIS DE GUIADO DE SÓLIDO RÍGIDO .....	196
5.4.1. Suspensión de triángulos superpuestos (STS) .....	196
5.4.2. Mecanismo de alimentación de máquinas.....	205
<b>CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>213</b>
6.1. APORTACIONES Y CONCLUSIONES .....	213
6.2. LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN.....	216
<b>ANEXO I: NOMENCLATURA.....</b>	<b>219</b>
<b>ANEXO II: BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>221</b>

# Capítulo 1. Introducción

## 1.1. Introducción

El diseño de máquinas es una actividad que el hombre lleva realizando casi desde los primeros tiempos de su existencia, muy anterior incluso al establecimiento del propio concepto de *máquina*.

Según Reuleaux una máquina se puede definir como *una combinación de sólidos resistentes, con movimiento relativo definido, dispuestos de forma que por medio de ellos se puedan transformar las fuerzas mecánicas en trabajo*. Sin embargo ésta no es la única definición de máquina que se puede encontrar, ya que el concepto de la misma generalmente estará sujeto a diversos factores tecnológicos, sociales, económicos, estéticos, etc.

El diseño de una máquina es un proceso en el que intervienen distintas áreas científico-tecnológicas (e incluso artísticas): mecánica, electricidad, electrónica, ciencia de materiales, termodinámica, ergonomía, economía, estética, etc. No obstante el estudio mecánico es de suma importancia ya que va a ser el nexo de actuación del resto de disciplinas y por tanto, responsable en gran medida de las prestaciones técnicas de la máquina.

Para llevar a cabo dicho estudio es suficiente considerar el *mecanismo* o *mecanismos* que componen la máquina, entendiendo como tal, la abstracción y representación de los aspectos puramente mecánicos de ésta. Por tanto, uno de los primeros pasos en el diseño de una máquina consiste en el *diseño del mecanismo o mecanismos* de la misma.

El diseño de un mecanismo se puede dividir en dos aspectos diferenciados: análisis y síntesis.

- La síntesis es un proceso creativo en el que se definen las características mecánicas de los distintos elementos del mecanismo, así como la conexión entre ellos, de manera que el mecanismo cumpla los requerimientos establecidos a priori.

- El análisis consiste en determinar el comportamiento de un mecanismo sintetizado para comprobar que cumple con los requisitos impuestos por el diseñador.

Algunos autores consideran el análisis una parte del estudio de mecanismos independiente del diseño y por tanto, síntesis y diseño son empleados como sinónimos. Sin embargo, debido a que en muchas ocasiones el proceso de síntesis está basado en la habilidad, intuición o experiencia del diseñador y no en reglas exactas, el proceso de diseño se convierte en un proceso iterativo a partir de un diseño inicial. Tras cada iteración se debe verificar la validez del nuevo mecanismo mediante un análisis para, en base a los resultados de éste, proponer modificaciones sobre el diseño actual.

En muchas ocasiones resulta imposible que un cierto tipo de mecanismo cumpla de manera exacta todos los requerimientos exigidos, al tiempo que la adopción de otro tipo de mecanismo resulta inviable por motivos técnicos o económicos. En estos casos se debe llevar a cabo una síntesis aproximada en la que, mediante un criterio de optimización, se logre el mecanismo que más se aproxime a la solución buscada. Este tipo de síntesis es conocido como *síntesis óptima*. A pesar de los numerosos métodos de síntesis óptima desarrollados hasta la fecha, se trata de un campo de investigación en el que quedan numerosos problemas por resolver como, por ejemplo, el desarrollo de metodologías generales para los distintos problemas de síntesis.

## 1.2. Objetivo de la tesis

Los mecanismos están presentes en muchos elementos cotidianos como ocurre en un automóvil, juguetes, electrodomésticos, etc. Normalmente el diseño de estos mecanismos comienza por su diseño cinemático (también conocido como diseño geométrico). Una vez elegido un determinado tipo de mecanismo (síntesis de tipo), se han de establecer los tamaños de sus elementos para que el mecanismo sea capaz de realizar el movimiento requerido (síntesis dimensional). Incluso para mecanismos con pocos elementos la obtención de las dimensiones apropiadas de éstos es una tarea difícil y depende en gran medida de la experiencia del analista. La constante salida al mercado de nuevos productos, con tiempos de desarrollo cada vez más breves, hace necesario la creación de herramientas de diseño más eficientes. Si bien, en lo que respecta a la síntesis de mecanismos, existen algunas de estas herramientas, su campo de aplicación es bastante limitado, al tiempo que su eficacia se ve fuertemente comprometida al aumentar la complejidad del problema.

El objetivo de esta tesis es el desarrollo de un método general de síntesis dimensional óptima para resolver los distintos problemas cinemáticos: generación de trayectorias, generación de funciones y guiado de sólido rígido.

A partir de este objetivo principal pueden enunciarse otros secundarios como requerimientos exigibles a dicho método:

- El método va a ser implementado en un algoritmo informático, cuyos tiempos de ejecución deben mantenerse lo más bajos posible, de manera que el analista pueda estudiar diversas alternativas en un plazo de tiempo razonable, dentro de la fase de diseño de un producto.
- El método propuesto está basado en desarrollos previos del Área de Ingeniería Mecánica de la ETSIIT de la Universidad de Cantabria [Sancibrián *et al.*, 2004, Sancibrián *et al.*, 2006], y se puede clasificar como un método de primer orden, o de gradiente, por hacer uso de la primera derivada de la función objetivo. Otra finalidad adicional del presente trabajo, consiste en el desarrollo de una metodología para el cálculo analítico de las derivadas de dicha función. Según las investigaciones de autores como, por ejemplo, [Mariappan y Krishnamurty, 1996] la formulación exacta de estas derivadas aporta claras ventajas en cuanto a robustez, precisión y velocidad de convergencia de los algoritmos, frente a su aproximación mediante diferencias finitas.
- Debe ser capaz de integrar restricciones tanto de igualdad como de desigualdad.
- Asimismo, debe poder tratar tanto problemas en los que se exige la coordinación entre las posiciones del elemento de entrada y las de precisión, como aquellos otros donde esta condición de diseño no es necesaria.

### 1.3. Estructura del documento

Incluyendo este primer Capítulo de introducción la presente tesis se ha estructurado en seis capítulos.

En el segundo Capítulo se presenta la Síntesis cinemática de mecanismos como una de las disciplinas de la Teoría de Máquinas y Mecanismos. Se

definen los problemas que trata de resolver, y se hace una breve reseña histórica de su desarrollo. Dentro de los distintos tipos de síntesis cinemática que pueden realizarse, esta tesis está centrada en la denominada síntesis cinemática dimensional. En este capítulo se resumen algunos métodos clásicos aplicados a dicho tipo de síntesis, haciendo especial hincapié en los métodos de síntesis óptima con el fin de facilitar la comparación con el presentado en este trabajo. Por último, a modo de resumen de la situación actual de la síntesis cinemática dimensional de mecanismos, se comentan algunos de los trabajos científicos más significativos que se han publicado en las últimas décadas.

El Capítulo 3 desarrolla la metodología de síntesis propuesta. Se expone en primer lugar la modelización cinemática del mecanismo y sus especificaciones de diseño. Seguidamente, se formula la función objetivo del problema de optimización como una función cuadrática del error de síntesis, justificando sus ventajas frente a otras formulaciones. A continuación se plantea la resolución del problema de optimización como una minimización de la función objetivo, basada en la linealización del error de síntesis y en la matriz Jacobiana en forma analítica. La obtención analítica de esta matriz se apoya en la distinción entre variables de diseño y variables dependientes y su relación a través de las ecuaciones de restricción. Se ha dedicado un apartado específico para explicar la derivación de la matriz Jacobiana.

Asimismo, en este Capítulo, se desarrolla el tratamiento de las ecuaciones de restricción de tipo desigualdad. Se proponen dos alternativas dependiendo de que la restricción afecte a parámetros constantes o variables durante el movimiento del mecanismo. Por último se comentan diversos criterios de parada aplicables al algoritmo, destacando el utilizado en los ejemplos presentados.

En el Capítulo 4 se presenta la aplicación de la metodología a los tres problemas clásicos de síntesis: generación de trayectorias, generación de funciones y guiado de sólido rígido. Cada uno de estos problemas requiere de ciertas consideraciones en cuanto a la implementación de la metodología en un algoritmo de síntesis específico. Estas consideraciones hacen referencia fundamentalmente a la mejora de la convergencia y a la definición del vector de error de síntesis. Asimismo, en los casos de generación de trayectorias (extrapolable al de guiado), se desarrolla la estrategia para abordar el problema de síntesis sin coordinación entre la barra de entrada y el punto trazador. La evaluación de los algoritmos propuestos para cada problema se realiza a través de su aplicación a una serie de ejemplos teóricos.

En el Capítulo 5 se presentan ejemplos de aplicación del método propuesto sobre problemas reales de ingeniería, con objeto de mostrar sus cualidades prácticas.

Finalmente el Capítulo 6 recoge las conclusiones más reseñables del trabajo realizado, así como las líneas futuras de investigación que ha abierto el desarrollo de esta Tesis Doctoral

En anexos finales se recoge la nomenclatura utilizada en los desarrollos matemáticos, así como las referencias bibliográficas citadas en los distintos apartados de este texto.



## Capítulo 2. Antecedentes

### 2.1. Problemas de la síntesis de mecanismos

El matemático y físico André Marie Ampère (1775-1836) definió la cinemática como “*el estudio de los mecanismos y de los métodos para crearlos*”. La segunda parte de esta definición hace referencia a lo que hoy se conoce como síntesis cinemática de mecanismos. Es decir al diseño de un mecanismo que sea capaz de generar un determinado movimiento preestablecido.

Las tareas que trata la síntesis cinemática de mecanismos pueden agruparse en dos categorías:

- 1.- Síntesis estructural: Se encarga de determinar el tipo y número de elementos (barras, levas, engranajes, etc.), pares cinemáticos, grados de libertad, la configuración de la cadena cinemática, etc.
- 2.- Síntesis dimensional: Busca determinar las dimensiones cinemáticas y posición inicial de un tipo de mecanismo dado, para satisfacer el movimiento requerido.

Los tres problemas clásicos que estudia la síntesis cinemática de mecanismos son:

1. Generación de trayectorias: tiene por objeto mover un punto perteneciente a cierto elemento del mecanismo a lo largo de una trayectoria preestablecida. Una variante de este problema consiste en hacer pasar el punto del mecanismo únicamente por una serie ordenada de puntos concretos denominados *puntos de precisión*.
2. Generación de funciones: trata de coordinar las barras entrada y salida del mecanismo en un número especificado de posiciones, o bien de forma continua.
3. Guiado de sólido rígido: consiste en situar un elemento del mecanismo en una serie de posiciones dadas, conocidas como *posiciones de precisión*.

Estos problemas han sido extensamente tratados por muchos investigadores (especialmente en mecanismos planos), habiéndose desarrollado numerosos

métodos o técnicas de resolución. Estas técnicas pueden clasificarse en dos categorías: técnicas de síntesis exacta y técnicas de síntesis aproximada.

En la síntesis exacta el mecanismo cumple perfectamente los requerimientos en todos los puntos/posiciones de precisión. Sin embargo, este tipo de solución sólo es posible cuando el número de ecuaciones de diseño es inferior o igual al número de parámetros de diseño. En el caso de que el número de ecuaciones sea inferior al número de parámetros de diseño, algunos de éstos pueden ser elegidos libremente para que el sistema sea determinado.

Cada punto de precisión define una ecuación de diseño. Como el número de éstas ha de ser menor que el de parámetros de diseño, y éste a su vez es un número pequeño en los mecanismos habituales, el número de puntos de precisión que se pueden prescribir para síntesis exactas resulta igualmente un número pequeño.

Los métodos de síntesis aproximada se emplean en aquellos problemas donde se definen más puntos de precisión que los necesarios para la síntesis exacta y por lo tanto, la solución exacta no existe. Este tipo de problemas se conocen como problemas sobrestringidos. Mediante un algoritmo de optimización se determina el mecanismo que mejor cumple un determinado objetivo a lo largo del conjunto de posiciones. Normalmente este objetivo suele plantearse como la minimización de una cierta función de error.

## **2.2. Reseña histórica de la síntesis de mecanismos**

El término síntesis hace referencia a la composición de un todo por la reunión de sus partes. Desde el punto de vista del diseño de máquinas, Franz Reuleaux (1829-1905) la define como la transformación de unas exigencias de diseño en un mecanismo [Reuleaux, 1876].

Si bien la síntesis es lo opuesto del análisis, ambas ramas están íntimamente ligadas. Muy frecuentemente el la síntesis consiste en un proceso de prueba-error, en que los resultados y conclusiones del análisis sirven de base para la propuesta de modificaciones sobre el mecanismo original. Esta interrelación hace patente el hecho de que los avances en la síntesis de mecanismos hayan estado ligados con otros en las técnicas de análisis.

Desde la antigüedad el hombre ha diseñado máquinas para satisfacer ciertas necesidades (movimiento de cargas pesadas, la molienda, etc.). Sin embargo el diseño de estas máquinas y mecanismos no contaba con reglas y herramientas definidas, sino que estaba basado en la habilidad e intuición del inventor, constituyendo más un arte que una ciencia.

El primer estudio técnico sobre síntesis de mecanismos se debe al ingeniero inglés James Watt (1736-1819). Watt estudió el movimiento del punto intermedio del acoplador de un cuadrilátero articulado.

Un primer esbozo del concepto de síntesis de mecanismos se debe a Robert Willis (1800-1875) que sostenía que debía de haber un método sistemático para el diseño de mecanismos para un determinado propósito. Sin embargo el concepto de síntesis de mecanismos, cuya definición ya se ha mencionado, se debe a Reuleaux. Los trabajos de Reuleaux se limitaron a la síntesis de tipo, es decir, la determinación del tipo de mecanismo (elementos y pares cinemáticos) para una tarea determinada. A él se deben la clasificación de pares cinemáticos en superiores e inferiores y una notación simbólica para la representación de cadenas cinemáticas [Reuleaux, 1876].

Otra contribución importante en el campo de la síntesis se debe a Samuel Roberts (1827-1913) que demostró que un punto del acoplador describe una curva de sexto orden y que existen tres cuadriláteros diferentes que pueden describir la misma curva del acoplador.

Martin Grübler (1851-1935) presentó en 1883 los criterios de movilidad de un mecanismo en función de las relaciones entre elementos y pares, definiendo así la síntesis de número, que junto con la de tipo, constituyen la denominada síntesis estructural.

Por otra parte, el precursor de la escuela rusa, Pafnuty Lvovich Chebyshev, (1821-1894) descubrió, simultáneamente con Roberts, la triple generación de la curva del acoplador. También a él se deben la teoría de polinomios para ajuste de curvas (que utilizó en generar diversos mecanismos), la obtención de leyes para la formación de cadenas cinemáticas y algunos mecanismos generadores de trayectorias rectilíneas. Dentro también de la escuela rusa, Bloch introduce los números complejos en la síntesis de mecanismos planos y Kislitsin números duales para mecanismos espaciales.

Simultáneamente en Alemania Ludwig Burmester (1840-1927) desarrolla importantes métodos geométricos en la síntesis dimensional, fundamentalmente de guiado de sólido.

En la segunda mitad el siglo XX se desarrolla fuertemente la escuela americana, que se caracteriza por el uso del computador en la resolución de los

problemas de síntesis. Uno de los principales exponentes de esta escuela es el doctor Ferdinand Freudenstein (1926-2006), conocido como “*el padre de la cinemática moderna*”. A él se debe, entre otros muchos desarrollos, el establecimiento de la relación entre los giros de las manivelas del cuadrilátero articulado y su aplicación a la síntesis dimensional de generación de funciones. Otros nombres destacados de esta escuela son, por ejemplo, George N. Sandor y Erdman que desarrollan una metodología analítica de síntesis basada en ecuaciones vectoriales de cierre de cadenas abiertas de dos elementos (diadas); Denavit y Hartenberg definen una serie de parámetros y matrices homogéneas para la formulación del problema de síntesis en mecanismos espaciales.

### 2.3. Métodos de síntesis cinemática dimensional

Los diferentes métodos de síntesis cinemática pueden clasificarse atendiendo al tipo de resolución que emplean. Así, podemos clasificarlos en: métodos gráficos, analíticos y numéricos. A continuación se resumen algunos de los métodos más destacados de cada tipo, no sólo por su utilidad intrínseca sino porque, en su día, algunos de ellos dieron pie a nuevos planteamientos de investigación. Además de en los trabajos de sus propios autores, una buena recopilación de los diversos métodos se puede encontrar en obras ya clásicas como [Nieto, 1978] y [Norton, 2005], entre otras.

- *Métodos gráficos:*

Los métodos geométricos de síntesis cinemática se emplean fundamentalmente en problemas de síntesis plana con pocos puntos de precisión, ya que en mecanismos espaciales o con muchos de puntos de precisión, resultan demasiado complejos. Su principal ventaja es que suelen ser de aplicación relativamente rápida. Si bien presentan la limitación de exactitud por los errores de dibujo, este aspecto puede ser mejorado gracias a su implementación en programas de dibujo asistido por computador.

*Método de la figura superpuesta (Overlay)*

Es un método de síntesis por tanteo gráfico cuya invención se atribuye al científico checo Antonin Svoboda (1907-1980) [Svoboda, 1948]. Este método se

aplica generalmente a la síntesis de generación de funciones (también se puede aplicar a la generación de trayectorias) con o sin derivadas de precisión y cualquier tipo de mecanismo independientemente del número de barras que lo constituyan. Para funciones de hasta cinco puntos de precisión resulta un método rápido y seguro. El principal problema que presenta, es que no siempre es posible obtener una solución.

La metodología consiste en hacer coincidir una serie de referencias dibujadas sobre un papel transparente llamado *overlay*, desplazándole sobre otras referencias situadas en una papel fijo.

Inicialmente se escogen las longitudes del acoplador y de la manivela de entrada, así como las posiciones de éste último que se dibujan sobre un papel. Desde los puntos extremos del elemento de entrada en cada posición se trazan arcos con radio igual a la longitud seleccionada para el acoplador. En otro papel transparente (*overlay*) se dibujan las posiciones deseadas para la manivela de salida y se trazan arcos de diversos radios desde su pivote fijo. Se mueve un papel sobre otro hasta lograr que los arcos del primero coincidan con alguno de los del *overlay* a la altura de uno de sus arcos. El radio de este arco del *overlay* define la longitud de la manivela de salida, y la distancia entre pivotes fijos, la longitud del elemento fijo.

### Método del polo

Este método puede aplicarse a la generación de funciones y al guiado de sólido rígido para el cuadrilátero articulado hasta cuatro puntos de precisión. El movimiento de un elemento sobre el plano fijo queda definido por el movimiento de dos de sus puntos. Para el problema de guiado, el método consiste en la obtención de los polos entre cada dos posiciones de precisión. A partir de los puntos que definen las posiciones de precisión y los citados polos se determinan las articulaciones fijas y móviles del cuadrilátero, de manera que éstas últimas se muevan por una circunferencia común a todas las posiciones. Para el problema de generación de funciones se eligen las articulaciones fijas y un punto como polo. A partir de estos puntos y de los ángulos de coordinación de las manivelas, se determinan las articulaciones móviles.

### Método de la inversión

Este método es de aplicación en los problemas de generación de funciones y de trayectorias. Se basa en considerar una inversión cinemática del cuadrilátero en la que una de las manivelas del cuadrilátero actúa como fija. La

construcción gráfica para la determinación de las articulaciones móviles se lleva a cabo desde el punto de vista de un observador situado sobre dicha manivela.

### Método de la reducción de posiciones

Se trata de una técnica que permite de una manera sencilla aumentar el número de posiciones de síntesis en los tres tipos de problemas: guiado, generación de funciones y generación de trayectorias. El método se basa en hacer coincidir un polo del movimiento entre dos posiciones con una articulación fija.

#### • *Métodos analíticos:*

Estos métodos plantean las ecuaciones que definen el problema mediante diversas herramientas matemáticas (vectores, números complejos, matrices, cuaternios, etc.). La solución del problema es exacta y se presenta normalmente en forma cerrada. La mayoría de estos métodos son de aplicación al cuadrilátero articulado, aunque en algunos casos es posible su extensión a otro tipo de mecanismos. Si bien los métodos analíticos son menos intuitivos que los gráficos, resultan más adecuados para su implementación en computador dada su naturaleza algebraica.

### Ecuación de Freudenstein

La ecuación de Freudenstein [Freudenstein, 1955] sirve para la síntesis de generación de funciones en el cuadrilátero articulado, si bien se pueden obtener ecuaciones análogas para otros mecanismos distintos.

Para la obtención de esta expresión se parte de la ecuación vectorial del lazo cerrado del mecanismo y se desarrolla en dos ecuaciones algebraicas. Entre ambas ecuaciones se elimina el ángulo del acoplador, quedando una ecuación que relaciona los ángulos de las manivelas.

En la aplicación de esta ecuación a la síntesis de generación de funciones con tres posiciones angulares de precisión, se particulariza para cada pareja de posiciones coordinadas, obteniendo un sistema de tres ecuaciones cuyas incógnitas son las longitudes de las barras. Dando un valor arbitrario a una de ellas, el resto se obtienen en función de ésta.

El número de posiciones de precisión puede ser mayor de tres, añadiendo nuevos parámetros de diseño que actúen como incógnitas. Así mismo se pueden realizar síntesis con derivadas de precisión introduciendo las derivadas de la ecuación de Freudenstein.

#### Método de Bloch

Este método sirve para la síntesis de generación de funciones con derivadas de precisión. Se debe al especialista ruso en cinemática S. Bloch, que introdujo el uso de números complejos en la síntesis cinemática.

A diferencia de la ecuación de Freudenstein, este método, plantea la ecuación vectorial de lazo del cuadrilátero, así como sus derivadas, en notación compleja.

#### Métodos basados en la Teoría de Burmester.

En la Teoría de Burmester [Burmester, 1888] se define la *curva de puntos circulares* como el lugar geométrico de los puntos del plano móvil que, para cuatro posiciones de éste, están sobre una circunferencia; y la *curva de centros* como el lugar geométrico de los centros de dichas circunferencias. Desde el punto de vista de la síntesis de mecanismos, el interés de obtener estas curvas es utilizar la curva de puntos circulares para situar las articulaciones móviles, y las de centros como articulaciones fijas.

Si bien la Teoría de Burmester es de tipo geométrico, la obtención de las curvas de Burmester resulta más práctica desde un punto de vista analítico, habiéndose desarrollado varios métodos, normalmente para su implementación en computador. Este procedimiento permite visualizar dichas curvas y elegir la solución más apropiada dentro de las infinitas posibles.

#### • *Métodos numéricos:*

Los métodos numéricos de síntesis presentan como principales ventajas respecto de los gráficos y analíticos una mayor generalidad y funcionalidad. Mayor generalidad en cuanto a que pueden ser aplicados a distintos tipos de mecanismos y problemas; y mayor funcionalidad por admitir un número más

elevado, tanto de puntos de precisión (algunos teóricamente infinitos), como de variables de diseño.

Algunos de los métodos numéricos aplicados a la síntesis dimensional de mecanismos son de aplicación a la síntesis exacta. Cuando el número de puntos de precisión es elevado (mayor de cinco para el mecanismo de cuatro barras), no es posible obtener una solución en forma cerrada de las ecuaciones, siendo necesario recurrir a algoritmos iterativos como por ejemplo los métodos numéricos de continuación [Yao y Ángeles, 2000a], [Erdman *et al.*, 2001]. Pero la mayoría de los métodos numéricos desarrollados en este campo son métodos de síntesis óptima [Ángeles *et al.*, 1988], [Avilés *et al.*, 1997], [Cabrera *et al.*, 2002], [Martín *et al.*, 2007], [Shen *et al.*, 2009] etc.

## 2.4. Síntesis dimensional óptima de mecanismos

### 2.4.1. Introducción

El objetivo de todo proceso de optimización es encontrar una solución para un determinado problema de manera que satisfaga de la mejor manera posible una serie de requerimientos preestablecidos. Si bien todo proceso de diseño trata de buscar la mejor solución, o solución óptima, la complejidad de ciertos problemas puede hacer que ésta no sea evidente, siendo necesaria la aplicación de metodologías científicas para alcanzarla, sin que sea preciso evaluar todas las soluciones posibles. Estas metodologías se denominan *técnicas o métodos de optimización*. Se dividen en deterministas, o de programación matemática, y probabilísticos.

Una de las primeras contribuciones se debe a Cauchy, que desarrolló un método para la búsqueda de máximos y mínimos de funciones, así como un método de búsqueda basado en el gradiente. Sin embargo, no es hasta mediados del siglo XX cuando se produce un importante impulso con el desarrollo de numerosos algoritmos, gracias al estímulo de aportaciones importantes como el método Simplex de Dantzig (1947), y la rápida evolución de la informática, que posibilitó la aplicación práctica de estas técnicas a problemas reales.

Actualmente los métodos de optimización encuentran aplicación en multitud de ámbitos de la actividad humana, tales como ingeniería, economía, logística, control de la producción, etc. La presente tesis constituye un ejemplo de aplicación de las técnicas de optimización al diseño cinemático óptimo de

mecanismos atendiendo a sus dimensiones, es decir, a la síntesis dimensional de mecanismos.

El propósito de este apartado es introducir el problema general de optimización en el contexto de la síntesis dimensional de mecanismos, repasando los conceptos fundamentales que maneja y resumiendo aquellos algoritmos de optimización empleados en la síntesis de mecanismos.

### 2.4.2. Planteamiento del problema de optimización

En matemáticas el término *optimización* hace referencia al estudio de problemas en los que se trata de buscar el mínimo o máximo de una función eligiendo sistemáticamente los valores de las variables dentro de un rango permitido.

La función a minimizar o maximizar se denomina *función objetivo*

$$f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (2-1)$$

Esta función se define sobre el vector  $\mathbf{x}$ , que engloba todas las variables del problema y recibe el nombre de *vector de variables de diseño* o simplemente *vector de diseño*. Este vector está definido en el espacio de diseño  $C$

$$\mathbf{x} \in C \subseteq \mathbb{R}^n \quad (2-2)$$

y puede estar sujeto a una serie de restricciones tanto de igualdad como de desigualdad

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= a, & g : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ g(\mathbf{x}) &< a, & g : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ g(\mathbf{x}) &> a, & g : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2-3)$$

El conjunto de vectores que verifican las ecuaciones de restricción se conoce como *espacio factible*, y cada uno de ellos constituye una solución factible del problema.

En muchas ocasiones el problema se plantea exclusivamente como un problema de minimización, sin pérdida de generalidad, ya que la maximización de la función  $f(\mathbf{x})$  equivale a la minimización de  $-f(\mathbf{x})$ . De igual manera las restricciones de desigualdad pueden ser únicamente del tipo  $g(\mathbf{x}) \leq a$ , puesto que cualquier restricción del tipo  $g(\mathbf{x}) \geq a$  puede ser escrita como  $-g(\mathbf{x}) \leq -a$ .

- *Las variables de diseño*

Cualquier sistema o componente se puede definir a través de una serie de cantidades que caracterizan su comportamiento. Algunas de estas cantidades son tomadas como variables durante el proceso de diseño, son las denominadas *variables de diseño*. Estas se representan colectivamente como un vector  $\mathbf{x}$ , (*vector de diseño*).

En los problemas de síntesis dimensional las variables de diseño son de tipo geométrico tales como longitud de las barras, ángulos de posición de barras, coordenadas de pares fijos, etc. Un aspecto importante en el planteamiento del problema de optimización es el tipo de coordenadas elegido para expresar dichas variables. En los trabajos de esta tesis se han empleado, entre otras, las denominadas *coordenadas naturales*, que surgieron de los trabajos de [Jalón *et al.*, 1981], [Serna *et al.*, 1982], y que están plenamente desarrolladas por J. García de Jalón y E. Bayo en [García de Jalón y Bayo, 1994]. Definen el mecanismo a nivel cinemático mediante una serie de puntos y vectores situados normalmente en los pares cinemáticos. No obstante, este tipo de coordenadas no son las únicas utilizadas, ya que en ocasiones es necesario añadir otros parámetros geométricos del mecanismo mediante coordenadas adicionales, normalmente referentes a ángulos relativos entre elementos o distancias. Este tipo de coordenadas se suele denominar *coordenadas mixtas*, [García de Jalón, 2007].

- *La función objetivo*

Dentro de todas las soluciones aceptables existirá una que sea la mejor y que recibe el nombre de *solución óptima*. El proceso de optimización consiste en encontrar dicha solución óptima. De esta manera es necesario establecer un criterio para comparar soluciones y seleccionar la mejor. El criterio con respecto del cual un diseño es optimizado se expresa como una función de las variables de diseño y se conoce como *función objetivo*. La solución óptima será aquella cuyos valores de las variables de diseño hagan mínimo (o máximo, dependiendo del planteamiento del problema) el valor de dicha función.

Uno de los más importantes aspectos a tener en cuenta en todo proceso de optimización, y por tanto, también en la síntesis dimensional óptima de mecanismos, es la elección de la función objetivo. Esta función recoge el criterio del diseñador para determinar cuando un mecanismo es mejor que otro. La mayoría de las funciones objetivo empleadas en la síntesis

dimensional óptima se formulan en base al error de síntesis del mecanismo. Este error es la diferencia entre los valores geométricos deseados para la síntesis y aquellos que proporciona un mecanismo dado.

- ***El espacio y las restricciones de diseño***

En los problemas de optimización con variables continuas tales como el propio de síntesis dimensional, el conjunto de valores de todas las variables de diseño puede ser visualizado como un espacio n-dimensional, siendo n es el número de dichas variables. Este espacio es conocido como *espacio de diseño*, y cada eje del mismo representa una variable de diseño. El espacio de diseño es, en primera aproximación infinito, es decir, las variables pueden tomar cualquier valor. Sin embargo, en aplicaciones prácticas, las variables están sujetas a una serie de restricciones, conocidas como *restricciones de diseño*, las cuales limitan los valores de las variables a aquellos que puedan producir soluciones aceptables. En el caso de la síntesis cinemática dimensional, estas restricciones representan limitaciones geométricas: el tamaño de una barra, el rango de giro de una articulación, el ángulo de presión, etc.; o funcionales: velocidad máxima de un punto, ventaja mecánica, etc.

## **2.5. Estado del arte de la síntesis dimensional de mecanismos**

La situación actual de la síntesis dimensional se caracteriza por el uso del computador, tanto para la implementación de nuevos métodos numéricos, como para la resolución de métodos analíticos o gráficos.

Dentro de los métodos analíticos, se pueden mencionar entre otros los realizados por el profesor McCarthy y colaboradores [MacCarthy, 2000], [Pérez y McCarthy, 2005]. Estos trabajos pueden verse como una generalización de forma analítica de la teoría de Burmester para su aplicación a mecanismos planos y espaciales. En este último caso, los mecanismos esféricos y robots con menos de seis grados de libertad han sido los principalmente tratados por el autor. La síntesis de mecanismos se plantea haciendo uso de las propiedades geométricas de las cadenas cinemáticas

abiertas, formulando ecuaciones algebraicas que deben satisfacerse en una serie de posiciones, dando como resultado las dimensiones de la cadena. Para la formulación de dichas ecuaciones hace uso de elementos de álgebra de Clifford.

J. Ángeles, es otro destacado autor en el campo de la teoría de máquinas y mecanismos. Cuenta, dentro del campo de la síntesis cinemática, con interesantes desarrollos analíticos. También ha trabajado en síntesis óptima. Así, por ejemplo en [Ángeles *et al.*, 1988], emplea técnicas de continuación para la resolución de un problema de generación de trayectoria para mejorar las características de convergencia. Igualmente propone un método para la obtención independiente de los ángulos de entrada, mediante la condición de mínima distancia entre un punto deseado y otro generado de la trayectoria para todos los ángulos de entrada posibles. También ha estudiado la influencia del número de puntos de precisión sobre el error de síntesis [Hayes *et al.*, 1999]

La capacidad creciente de los computadores ha hecho posible la aplicación de técnicas de optimización de manera práctica. Varios de los recientes desarrollos plantean la síntesis aproximada de mecanismos como un problema de optimización no lineal. Los métodos para la resolución son tanto de tipo directo como basados en el gradiente. Dentro de estos últimos, resultan de interés, respecto del ámbito de esta tesis, los trabajos de Mariappan y Krishnamurty [Mariappan y Krishnamurty, 1992], [Mariappan y Krishnamurty, 1996]. Estos investigadores proponen un método formulado matricialmente para el cálculo exacto del gradiente, tanto de la función objetivo como de las restricciones. Igualmente estudian las ventajas de este conocimiento exacto del gradiente frente a aproximaciones numéricas del mismo. La conclusión a la que llegan es que el uso del gradiente exacto mejora la eficiencia y exactitud de los algoritmos, al tiempo que reduce el tiempo de convergencia, al evitar el gran número de evaluaciones de función implicados en la aproximación del gradiente por diferencias finitas.

Los trabajos de diversos autores han tratado la aplicación y adaptación de métodos de optimización ya conocidos en la síntesis dimensional. Así, por ejemplo, Fallahi *et al.* [Fallahi *et al.*, 1981] aplican el método del gradiente reducido a ciertos tipos de mecanismos para la generación de funciones.

Ángeles *et al.* [Ángeles *et al.*, 1988] desarrollan un método basado en mínimos cuadrados aplicándolo a la síntesis de generación de trayectoria del mecanismo plano de cuatro barras. El método permite la formulación del problema como no restringido que presenta unas características de convergencia interesantes evitando defectos de rama, pero queda penalizado por el excesivo número de operaciones que debe realizar. Además, la aplicación del método a otros tipos de mecanismos no resulta sencilla.

Problemas presentes en la síntesis de mecanismos tales como bifurcación, defecto de circuito, factor de escala, etc., han sido tratados en otros muchos

trabajos. Ullah y Kota [Ullah y Kota, 1997] desarrollan un método de síntesis óptima de generación de trayectorias basado en la descripción de la trayectoria deseada mediante Descriptores de Fourier. Una de las ventajas de este planteamiento es que permite la optimización de la trayectoria con independencia del tamaño, orientación y posición de la misma. Otro aspecto interesante que no requiere un mecanismo inicial, lo que hace que el planteamiento resulte útil para aplicarlo, como así hacen los autores, dentro de un esquema de optimización global, ya que no se encuentra condicionado por la posición, dentro del espacio factible, del mecanismo inicial. Vasiliu et al. [Vasiliu y Yannou, 2001] aprovechan las ventajas de la descripción de la trayectoria deseada a partir de series de Fourier para desarrollar un método de síntesis basado en redes neuronales. El uso de redes neuronales resulta una forma de automatizar el clásico procedimiento de síntesis en base a catálogos de mecanismos. Mediante un proceso de aprendizaje, la red neuronal recoge de una manera compacta las posibles trayectorias que puede generar un determinado tipo de mecanismo. El uso de coeficientes de Fourier para la descripción de la trayectoria reduce notablemente los datos necesarios para la descripción de lo misma, de forma que pueda ser introducida en la red neuronal.

Uno de los principales inconvenientes de este tipo de planteamientos es su aplicación exclusiva a trayectorias cerradas. Una alternativa, aún no muy desarrollada, para estos casos podría ser el uso de splines en lugar de series de Fourier.

Una de las principales desventajas de muchos métodos de optimización es que únicamente logran alcanzar un mínimo de la función objetivo sin garantizar que éste sea el mínimo absoluto. Es decir, son métodos de optimización local, cuya aplicación se restringe a que se parta de una solución inicial suficientemente buena.

Una posible estrategia para aplicar estos métodos en un esquema de optimización global consiste en su aplicación a partir de distintos puntos de partida. Si la solución final de una parte mayoritaria de las soluciones resulta ser la misma, se puede concluir que dicha solución es el mínimo global. Este planteamiento además de ser poco eficiente, tampoco garantiza al cien por cien el haber alcanzado la solución óptima.

Numerosos trabajos se han desarrollado con el objetivo de encontrar alternativas de optimización global a la anteriormente comentada. Normalmente estas alternativas se basan en la combinación de un método de búsqueda de tipo probabilístico con otro método de búsqueda local.

Así, por ejemplo, tenemos el trabajo de J.A. Cabrera, A. Simón y M. Prado, [Cabrera *et al.*, 2002]. Los autores proponen la síntesis óptima de mecanismos

mediante la técnica evolutiva de los algoritmos genéticos. La implementación del método resulta relativamente sencilla y, aunque el método es aplicado al problema de generación de trayectorias, puede ser aplicado fácilmente a otro tipo de problemas de síntesis. Para un número suficientemente grande de iteraciones la solución obtenida es aproximadamente la misma (solución global), con independencia de la población inicial. Además el error de la población final es relativamente pequeño y comparable con algunos métodos basados en el gradiente. En posteriores trabajos desarrollan un nuevo algoritmo evolutivo y lo aplican a una síntesis con restricciones multiobjetivo [Cabrera *et al.*, 2007].

Con posterioridad al trabajo de Cabrera *et al.*, los AG y otras estrategias evolutivas han sido aplicados a la síntesis de mecanismos por otros investigadores de muy diversas formas. Por ejemplo, en [Laribi *et al.*, 2004] los AG se combinan con lógica difusa. Igor Fernández y colaboradores, combinan los AG con un método de síntesis basado en Elementos Finitos [Fernández-Bustos *et al.*, 2005]. Bulatovic y Dordevic [Bulatović y Dordević, 2009] usa un algoritmo de Evolución Diferencial (ED) junto con el método de las desviaciones de la variable controlada para llevar a cabo una síntesis de trayectoria para un cuadrilátero articulado.

Otro trabajo destacable dentro del planteamiento de la optimización global, en este caso para trayectorias planas cerradas, es el de F.T. Sánchez Marín y A. Pérez González [Sánchez y Pérez, 2003], continuación de la tesis del primero de los autores [Sánchez, 2000]. Los autores proponen una combinación de un método de búsqueda grosera con otro de búsqueda fina. Mediante la búsqueda grosera se obtienen una serie de mínimos locales del espacio de diseño discretizado. Estos mínimos discretos son tratados mediante el método de búsqueda fina para obtener el mínimo real asociado. El menor de éstos será el mínimo global. Para la obtención de los mínimos discretos se propone una reducción del espacio de diseño consistente en varios pasos: se hace una discretización del espacio de diseño y se eliminan aquellos puntos que proporcionan mecanismos muy desproporcionados y los que proporcionan mecanismos cognados. Asimismo se hace que la función objetivo sea independiente de la posición, orientación y tamaño de la trayectoria. Igualmente, se eliminan los mecanismos por inversión cinemática mediante la inclusión de valores negativos en ciertas variables, evitando la pérdida de posibles soluciones. Por último se desechan aquellas soluciones que presentan puntos de corte en la trayectoria y aquellas sin ningún elemento manivela, por su escasa aplicación práctica.

Estos mismos autores proponen en otro de sus trabajos [Sánchez y Pérez, 2004] una metodología para la optimización global de trayectorias abiertas. La estrategia de optimización combina igualmente una búsqueda vasta, tipo estadístico, con otra refinada, basada en el gradiente. Una optimización secundaria permite el segmento de la curva generada que mejor se adapta a la

deseada. El método se muestra eficaz en su aplicación al cuadrilátero articulado para aquellas curvas deseadas que es posible generar mediante dicho mecanismo.

Un interesante y original método de síntesis dimensional óptima de aplicación general a mecanismos con pares inferiores es debido a Rafael Avilés et al. [Avilés *et al.*, 1985], [Avilés *et al.*, 1997]. Se parte de un mecanismo inicial discretizado por elementos de dos nodos tipo barra. Para el cálculo del error se obliga al mecanismo a satisfacer las condiciones de síntesis, mediante la deformación elástica virtual de sus elementos. La deformada del mecanismo para una posición de síntesis dada es aquella que hace mínima la suma de los cuadrados de las deformaciones de los elementos. La modificación de los parámetros que definen mecanismo se hace en base a la minimización de la suma anterior para el conjunto de posiciones de síntesis. En otros trabajos posteriores [Fernández-Bustos *et al.*, 2005] una evolución de este método se combina con algoritmos genéticos para la crear una estrategia de búsqueda global.

Otro método también de tipo general es el desarrollado por Jiménez et al. [Jiménez *et al.*, 1997]. Este método hace uso de coordenadas naturales para su formulación. De esta manera las variables de diseño aparecen explícitamente en las ecuaciones de restricción simplificando el cálculo de las derivadas de la función objetivo. El método distingue entre restricciones geométricas que definen el comportamiento cinemático del mecanismo, y restricciones funcionales, que recogen los requerimientos de diseño.

Cabe señalar que en los últimos años ha cobrado un notable interés la síntesis de mecanismos “*compliant*” (aquellos que su movilidad depende de la flexibilidad de ciertos componentes) [Howell, 2001], [Kota *et al.*, 2005] de micromecanismos [Ananthasuresh, 2003] y de robots [Lenarcic y Galletti, 2004]. Las especiales características de los este tipo de mecanismos (especialmente los primeros) hacen que la síntesis dimensional de los mismos incluya aspectos fuera del ámbito de la presente tesis.

## 2.6. Métodos de optimización

En este apartado se pretende hacer un breve resumen de los métodos de optimización más frecuentemente utilizados para la resolución de diversos problemas de ingeniería, con especial atención a aquellos que han sido aplicados con éxito en la síntesis cinemática de mecanismos. La bibliografía en

este tema es muy variada. La aquí utilizada ha sido elegida por tratar el tema desde un enfoque práctico, pudiendo destacar, por ejemplo: [Fox, 1971], [Reklaitis *et al.*, 1983], [Rao, 1996], [Frandsen *et al.*, 1999], [Belegundu y Chandrupatla, 1999], [Venkataraman, 2002], [Arora, 2004], [Ravindran *et al.*, 2006] y [Nocedal y Wright, 2006].

A pesar de que han sido numerosos los métodos de optimización desarrollados hasta la fecha, no existe ninguno que sea de aplicación general para todos los tipos de problemas de optimización existentes. Cada método se adapta mejor a la resolución de un determinado tipo de problema, en función de diversos factores que lo caracteriza, como son:

- Tipo de variable: Las variables de diseño pueden tomar valores discretos o continuos dentro de un cierto rango.
- Existencia o no de restricciones: Se distinguen problemas con restricciones o sin restricciones. Dentro de los problemas con restricciones éstas pueden ser de igualdad, de desigualdad o mixtas.
- Tipo de ecuaciones de la función objetivo y de las restricciones: Las ecuaciones que define la función objetivo y las restricciones pueden ser lineales o no lineales. Un problema de optimización será lineal si tanto las ecuaciones de restricción como la de la función objetivo lo son.
- Diferenciabilidad de la función objetivo y de las funciones de restricción: Un problema se clasifica como diferenciable cuando ambos tipos de funciones lo son.
- Tipo de espacio factible: Un problema de optimización se dice que es convexo cuando las restricciones son funciones convexas y la función objetivo es convexa si el problema es de minimización, o cóncava cuando el problema es de maximización. Una función es convexa cuando un segmento que une dos puntos cualesquiera de la misma está por encima de ella.

Ciertas combinaciones de estos y otros factores se producen de forma habitual dando lugar a tipologías especiales de problemas de optimización como, por ejemplo, los problemas de

- Programación lineal (LP): Función objetivo y restricciones lineales.
- Programación cuadrática (QP): Función objetivo cuadrática y restricciones lineales.
- Programación no lineal (NLP): Función objetivo y/o restricciones no lineales.

- Programación mixta entera (MINLP): Algunas variables son enteras y otras reales.
- Programación dinámica: Parte de las restricciones son ecuaciones diferenciales.

Dentro del campo de la síntesis dimensional de mecanismos, el problema de optimización más general es un problema no lineal, no convexo y de variable continua. La mayoría de los métodos de optimización no lineal consisten en algoritmos iterativos que partiendo de un punto del espacio de diseño  $\mathbf{x}_0$  generan una secuencia de iteraciones en cada una de las cuales se obtiene una solución  $\mathbf{x}_k$  que proporciona un menor valor de la función objetivo (algunos algoritmos admiten puntualmente valores mayores) hasta alcanzar un valor suficientemente pequeño de ésta.

Los métodos de optimización no lineal se pueden clasificar en dos grandes grupos; deterministas y estadísticos. En los primeros, la evolución de la secuencia está perfectamente definida y en consecuencia proporcionan siempre la misma solución a partir de idénticos parámetros iniciales. Por el contrario, en los métodos estadísticos la evolución de la solución depende de valores aleatorios, y por tanto, el resultado varía de una ejecución a otra.

Otra clasificación importante se basa en su capacidad para resolver problemas con o sin restricciones. Existen métodos, tanto deterministas como estadísticos, para resolver problemas restringidos o sin restricciones. Estos métodos se dividen en dos grandes grupos: los directos, que tratan las restricciones de manera explícita; y los indirectos, que transforman el problema restringido en una secuencia de problemas no restringidos.

### **Optimización global y local**

Una solución globalmente óptima, o más sencillamente, un óptimo global es aquella que produce el mínimo valor posible de la función objetivo dentro del espacio factible de búsqueda (cuando la optimización se plantea como un problema de minimización). Por su parte, se habla de óptimo local cuando la solución es la mejor posible únicamente en su entorno próximo, si bien pueden existir otras soluciones mejores fuera de ese entorno.

Excepto en problemas convexos, la mayoría de los métodos de optimización no lineal no garantizan que el óptimo alcanzado sea un óptimo global del problema. En el mejor de los casos, queda asegurado únicamente que se trata de un óptimo local en el entorno del punto inicial. La búsqueda del óptimo global se puede enfocar de maneras distintas:

- Ejecutar el algoritmo desde distintos puntos iniciales y comprobar que llevan al mismo óptimo. No se asegura que dicho valor sea el óptimo global, pero se asegura una probabilidad mayor de que lo sea.
- Reformular el problema para que sea convexo.
- Usar un método de optimización global, si bien estos algoritmos son excesivamente lentos o no dan garantía de mínimo global de la solución alcanzada. Si bien se denominan así a los métodos que exploran una zona amplia del espacio de diseño, el mínimo global puede quedarse fuera de la misma.

### Convergencia

Como ya se ha mencionado anteriormente, la mayoría de los métodos de programación no lineal son algoritmos numéricos iterativos que proporcionan una secuencia de soluciones que convergen hacia la solución óptima. Excepto en ciertos tipos de problemas, el número de iteraciones necesario para alcanzar la solución óptima con una determinada precisión es desconocido a priori, siendo habitual establecer un criterio de detención del algoritmo basado en el monitorizado del error en cada iteración. Asimismo, la selección del tamaño del paso constituye una tarea compleja, de cuya solución depende, en grado considerable, la efectividad de aplicación de uno u otro método.

Una de las principales medidas de las prestaciones de un algoritmo es su ratio de convergencia. Cuanto mayor sea dicho ratio más rápida será la convergencia del algoritmo. Se dice que una secuencia  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$  converge a  $\mathbf{x}^*$  con ratio  $p$  y constante  $M$  si se cumple que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^p} = \frac{e_{k+1}}{e_k} = M \quad (2-4)$$

Siendo  $e_k$  el error en la iteración  $k$ , y  $M$  una constante positiva.

- Si  $p=1$  se dice que la convergencia es lineal. El error es multiplicado por  $M$  en cada iteración.
- Si  $1 < p < 2$ , la convergencia es superlineal.
- Si  $p=2$  la convergencia es denominada cuadrática. Aproximadamente, en cada iteración se duplica el número de dígitos correctos.

Además de la velocidad de convergencia de un algoritmo también se deben tener en cuenta otras características como son su precisión y su robustez (aplicabilidad a distintos problemas).

### Criterio de optimalidad

Como se ha visto anteriormente, el proceso de optimización consiste en encontrar el mínimo o máximo de la función objetivo. A continuación se verán las condiciones necesarias y suficientes para que un punto del espacio de diseño sea mínimo o máximo de una función. Estas condiciones van a permitir, por una parte, reconocer las soluciones, y por otra, constituyen la base inspiradora de muchos métodos de optimización.

#### Problemas sin restricciones

Sea  $f(\mathbf{x})$  una función de  $n$  variables. Consideremos la aproximación de esta función en el entorno del punto de diseño  $\bar{\mathbf{x}}$  por una expresión cuadrática proveniente del desarrollo en serie de Taylor hasta el término de segundo orden.

$$f(\mathbf{x}) \simeq f(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla f(\bar{\mathbf{x}})^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla^2 f(\bar{\mathbf{x}}) \Delta \mathbf{x} \quad (2-5)$$

Donde  $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})$  es el gradiente y  $\nabla^2 f(\bar{\mathbf{x}})$  el Hessiano de la función en  $\bar{\mathbf{x}}$ , definidos como

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad y \quad \nabla^2 f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

En un problema de optimización sin restricciones, la condición necesaria para que  $\bar{\mathbf{x}}$  sea el mínimo (o máximo) de la función es que

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad (2-7)$$

Es decir, que el gradiente se anule en dicho punto, ya que de otro modo  $f(\mathbf{x})$  puede tanto aumentar como disminuir dependiendo de los signos del gradiente y de  $\Delta \mathbf{x}$ . Si se cumple esta condición se dice que  $\bar{\mathbf{x}}$  es un *punto estacionario*, pudiendo corresponder bien a un mínimo o a un máximo de la función.

La condición de que  $\bar{\mathbf{x}}$  sea mínimo o máximo va a depender del signo de la variación de la función en el entorno de  $\bar{\mathbf{x}}$ . Sustituyendo (2-7) en (2-5), se tiene

$$\Delta f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}) \simeq \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla^2 f(\bar{\mathbf{x}}) \Delta \mathbf{x} \quad (2-8)$$

Si  $\nabla^2 f(\bar{\mathbf{x}})$  es positiva definida,  $\Delta f(\mathbf{x}) > 0$  cualquiera que sea el signo de  $\Delta \mathbf{x}$ , y por lo tanto es condición suficiente para que  $\bar{\mathbf{x}}$  sea un mínimo.

Si  $\nabla^2 f(\bar{\mathbf{x}})$  es negativa definida,  $\Delta f(\mathbf{x}) < 0$  y por lo tanto es condición suficiente para que  $\bar{\mathbf{x}}$  sea un máximo.

Si  $\nabla^2 f(\bar{\mathbf{x}})$  es indefinida  $\bar{\mathbf{x}}$  es un punto de ensilladura (punto de inflexión en el caso de un espacio bidimensional).

Estas condiciones sólo nos aseguran que se ha encontrado un mínimo o máximo, normalmente local. Si se cumple que  $\mathbf{x}^T \cdot \nabla^2 f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} \geq 0$  para todo  $\mathbf{x}$ , entonces se dice que la función es convexa y tiene un mínimo único que es el mínimo global. En caso contrario será preciso diseñar estrategias para verificar que el mínimo/máximo alcanzado es el global.

### Problemas con restricciones. Condiciones de Kuhn-Tucker

En el problema de optimización sin restricciones se ha visto que la condición necesaria que debe cumplir un punto  $\mathbf{x}^*$  para ser óptimo es que el gradiente de la función objetivo se anule en dicho punto. Sin embargo, en los problemas con restricciones esta condición no es necesaria, ya que debido a las restricciones normalmente el óptimo no tiene por qué ser un punto estacionario.

Las condiciones necesarias para que un punto  $\mathbf{x}^*$  sea el óptimo de este problema se conocen como condiciones de Kuhn-Tucker. Dichas condiciones constituyen una generalización del método de los multiplicadores de Lagrange, el cual considera únicamente restricciones de igualdad, mientras las condiciones K-T se aplican a restricciones de igualdad y de desigualdad.

Considérese el problema de optimización no lineal diferenciable, con restricciones tanto de desigualdad como de igualdad

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a} & g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, J \\ & h_k(\mathbf{x}) = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, K \end{array} \quad (2-9)$$

Una restricción de desigualdad  $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$  se dice que es activa o saturada en un punto  $\mathbf{x}'$  si  $g_i(\mathbf{x}') = 0$ . En caso contrario se considera inactiva o no saturada.

Si el problema tiene un mínimo local en el punto  $\mathbf{x}^*$  y los gradientes de las restricciones activas son linealmente independientes en ese punto, entonces el gradiente de la función objetivo en el mismo, cambiado de signo, puede ser expresado como combinación lineal de los gradientes en  $\mathbf{x}^*$  de las restricciones de desigualdad activas y de igualdad.

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{act} u_j \nabla g_j(\mathbf{x}^*) + \sum_{k=1}^K v_k \nabla h_k(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (2-10)$$

Esto es válido sólo para

$$u_j > 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (2-11)$$

Considérese que en el punto de diseño hay una serie de restricciones activas. Si  $\mathbf{S}$  es una dirección factible debe formar un ángulo obtuso con los gradientes de las restricciones activas. Esto es

$$\mathbf{S}^T \nabla g(\mathbf{x}) < 0 \quad (2-12)$$

Por otro lado  $\mathbf{S}$  debe proporcionar una disminución del valor de la función. Si nos encontramos en el óptimo no debe existir ninguna dirección posible de movimiento que cumpla ambas condiciones, lo cual sólo se cumple para valores positivos de  $u_j$ .

Por simplicidad considérese únicamente que hay dos restricciones activas. Entonces la ecuación (2-10) queda. Figura 2-1

$$-\nabla f(\mathbf{x}^*) = u_1 \nabla g_1(\mathbf{x}^*) + u_2 \nabla g_2(\mathbf{x}^*) \quad (2-13)$$

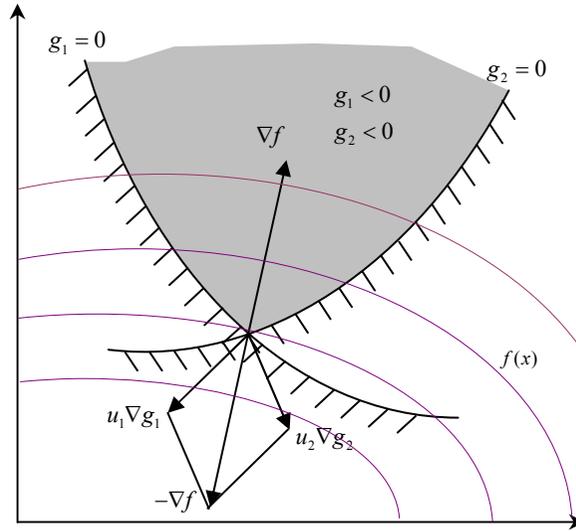
Premultiplicando ambos términos por  $\mathbf{S}^T$

$$-\mathbf{S}^T \nabla f(\mathbf{x}^*) = u_1 \mathbf{S}^T \nabla g_1(\mathbf{x}^*) + u_2 \mathbf{S}^T \nabla g_2(\mathbf{x}^*) \quad (2-14)$$

A partir de un punto de diseño  $\mathbf{x}$  para que un desplazamiento en una dirección  $\mathbf{S}$  produzca una disminución del valor de la función objetivo, dicha dirección debe tener alguna componente en la dirección contraria al vector gradiente en el punto, ya que dicho gradiente marca el sentido de máximo crecimiento de la función, esto es, el producto escalar del vector de dirección y el gradiente debe ser negativo.

$$\mathbf{S}^T \nabla f(\mathbf{x}) < 0 \quad (2-15)$$

Como  $\mathbf{S}^T \nabla g < 0$ , valores positivos de  $u_j$  hacen que  $\mathbf{S}^T \nabla f > 0$ , lo cual es imposible ya que entonces  $\mathbf{S}$  sería una dirección que hace aumentar la función. Por lo tanto, se demuestra que el punto es el óptimo, al no existir movimiento posible que disminuya la función, manteniendo la solución dentro del espacio factible.



**Figura 2-1. Condiciones de K-T para caso de dos restricciones activas. Caso bidimensional.**

Se puede obtener una expresión más general de (2-10) que incluya también las restricciones no activas. Si se añade la condición

$$u_j g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (2-16)$$

los multiplicadores correspondientes a las restricciones inactivas serán nulos y la ecuación (2-10) puede escribirse como

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^J u_j \nabla g_j(\mathbf{x}^*) + \sum_{k=1}^K v_k \nabla h_k(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (2-17)$$

Ahora, además de los valores positivos, hay que incluir el caso de  $u_j=0$ , y la expresión (2-11) se transforma en

$$u_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (2-18)$$

Además deben cumplirse las condiciones de factibilidad, es decir que la solución esté dentro del espacio de diseño factible.

$$\begin{aligned} g_j(\mathbf{x}^*) &\leq 0 \quad ; \quad j=1, 2, \dots, J \\ h_k(\mathbf{x}^*) &= 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (2-19)$$

Por tanto, en su forma más habitual, las condiciones de Kuhn-Tucker se pueden resumir como

$$\begin{aligned}
\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^J u_j \nabla g_j(\mathbf{x}^*) + \sum_{k=1}^K v_k \nabla h_k(\mathbf{x}^*) &= 0 \\
g_j(\mathbf{x}^*) &\leq 0 \quad ; \quad j=1, 2, \dots, J \\
h_k(\mathbf{x}^*) &= 0 \quad ; \quad k=1, 2, \dots, K \\
u_j g_j(\mathbf{x}^*) &= 0 \quad ; \quad j=1, 2, \dots, J \\
u_j &\geq 0
\end{aligned} \tag{2-20}$$

Estas condiciones son expresiones de primer orden cuya verificación es necesaria para la existencia de un máximo, mínimo o punto de ensilladura de la función objetivo. Las condiciones de segundo orden proporcionan las condiciones suficientes de optimalidad, permitiendo determinar si el punto  $\mathbf{x}^*$  se trata de un mínimo. Estas condiciones se aplican sobre el Hessiano de la Lagrangiana que debe cumplir:

$$\mathbf{z}' \nabla_x^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \mathbf{z} > 0 \quad \forall \mathbf{z} \mid \begin{bmatrix} \nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) \\ \nabla_x \mathbf{g}_{act}(\mathbf{x}^*) \end{bmatrix} \mathbf{z} = \mathbf{0} \tag{2-21}$$

De modo que el Hessiano de la Lagrangiana respecto a  $\mathbf{x}$  es positivo definido para todos los vectores  $\mathbf{z}$  ortogonales a los gradientes de las restricciones activas en  $\mathbf{x}^*$ . Estos vectores dan origen al plano tangente a dichas restricciones. Como condición necesaria basta con que el Hessiano sea positivo semi-definido.

### 2.6.1. Métodos deterministas

- *Métodos basados en el gradiente*

Dentro de este grupo se engloban todos aquellos métodos que en el proceso de búsqueda de la solución óptima requieren calcular el valor de las derivadas de la función objetivo y/o de las restricciones. Si dichas funciones tienen una expresión analítica explícita, la obtención analítica de las derivadas parciales respecto de las variables de diseño, no presenta dificultades especiales. En el caso en que las funciones sean muy complejas, o no se puedan presentar de forma explícita, el cálculo de las derivadas se realiza numéricamente, presentando el problema adicional de la precisión y rapidez de obtención de las mismas.

La estructura de la iteración de los métodos basados en el gradiente se compone normalmente de dos partes:

1. Obtención de una dirección  $\mathbf{d}$ , según la cual disminuye el valor de la función objetivo. Esto es,  $\mathbf{d}^T \nabla f < 0$
2. Determinación del paso  $\alpha$  en dicha dirección, tal que  $f(\mathbf{x}_{k+1}) < f(\mathbf{x}_k)$ ; siendo  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}$

### Métodos para problemas no restringidos

Una vez determinada la dirección de descenso, una estrategia para obtener el paso conocida como de *búsqueda lineal*, consiste en plantear un problema de optimización unidimensional respecto  $\alpha$ , de tal forma que haga mínimo el valor de la función objetivo en la dirección dada.

$$\min_{\alpha > 0} f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k) \quad (2-22)$$

Generalmente la resolución exacta de este problema es costosa y no suele ser necesaria. En su lugar, el algoritmo prueba un número limitado de pasos de prueba, hasta que encuentra una solución suficientemente aproximada.

Otra estrategia, conocida como de *región de confianza*, resulta de aproximar la función objetivo  $f(\mathbf{x})$ , por otra función más simple  $m(\mathbf{x})$ , pero cuyo comportamiento es similar en un entorno del punto actual  $\mathbf{x}_k$ . Este entorno recibe el nombre de región de confianza. Normalmente la región de confianza es una hiperesfera de radio  $\Delta$ .

Se calcula el paso de prueba  $\mathbf{p}$  de manera que minimice la función dentro de la región de confianza

$$\min_{\mathbf{p}} m_k(\mathbf{x}_k + \mathbf{p}) \quad / \|\mathbf{p}\| < \Delta \quad (2-23)$$

Si se cumple que  $f(\mathbf{x}_k + \mathbf{p}) < f(\mathbf{x}_k)$  el paso es aceptado. En caso contrario la región de confianza se reduce y se vuelve a probar con otro paso.

Frecuentemente se toma como función  $m_k$  una cuadrática definida por los dos primeros términos del desarrollo de  $f$  en serie de Taylor en  $\mathbf{x}_k$

$$f(\mathbf{x}_k + \mathbf{p}) \simeq m_k(\mathbf{x}_k + \mathbf{p}) = f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{p}^T \nabla f(\mathbf{x}_k) + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \mathbf{p} \quad (2-24)$$

Donde  $\nabla f(\mathbf{x}_k)$  y  $\mathbf{H}(\mathbf{x}_k)$  son, respectivamente, el gradiente y el Hessiano de  $f$  en  $\mathbf{x}_k$ .

Una de las claves, en los algoritmos de región de confianza, es la estrategia para elegir el tamaño de dicha región en cada iteración. Una forma de llevarlo a cabo se basa en el factor de ganancia  $r$ , que mide la relación entre la mejora real y la mejora predicha.

$$r = \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} + \mathbf{p})}{m(\mathbf{x}) - m(\mathbf{x} + \mathbf{p})} \quad (2-25)$$

Un valor grande de  $r$  indica que la aproximación es buena y la región de confianza puede ser expandida en la siguiente iteración. Si  $r$  es pequeña, la región de confianza debe ser reducida para la siguiente iteración.

Como se deduce de la anterior explicación, los dos planteamientos difieren en el orden en que se eligen la dirección y el tamaño del paso de cada iteración. Mientras que en la búsqueda lineal inicialmente se fija la dirección de búsqueda y posteriormente se calcula el paso apropiado, en la estrategia de la región de confianza primero se elige la máxima distancia (el radio de la región) y luego se busca la dirección y la distancia de mejora dentro de la región definida.

### Método del descenso máximo

Uno de los primeros y más conocidos métodos de este tipo, aunque no el más efectivo, es el del descenso máximo (*steepest descent*) o método de Cauchy. El interés del mismo radica en que sirve de base a otros métodos basados en el gradiente. En este método la dirección de búsqueda en cada iteración es el vector gradiente en ese punto cambiado de signo.

$$\mathbf{d}_{k+1} = -\nabla f(\mathbf{x}_k) \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (2-26)$$

El valor de  $\alpha$  puede ser fijo o variable en cada iteración. Esta última opción es la que resulta más fiable, y puede ser resuelta mediante un método para una sola variable que busque el valor de  $\alpha_k$  que haga mínima la función  $f(\mathbf{x}_{k+1})$ .

Las características de convergencia del método de Cauchy pueden ser mejoradas notablemente con una ligera modificación que lo convierte en el denominado método de los gradientes conjugados o método de Fletcher-Reeves. La base de este método consiste en plantear la dirección de búsqueda como una combinación de los vectores gradiente actual y anterior, según la expresión

$$\mathbf{d}_{k+1} = -\nabla f(\mathbf{x}_k) + \beta_k \cdot \mathbf{d}_k \quad (2-27)$$

donde

$$\beta_k = \frac{\|-\nabla f(\mathbf{x}_k)\|^2}{\|-\nabla f(\mathbf{x}_{k-1})\|^2} \quad (2-28)$$

De esta manera, la transición en las direcciones de búsqueda en las sucesivas iteraciones es más suave.

Aplicado este algoritmo sobre funciones cuadráticas se llega a su minimización en  $n$  o menos iteraciones, siendo  $n$  el número de variables de la función objetivo. En el caso de aplicarlo a funciones no cuadráticas, no siempre queda garantizada la convergencia, siendo necesario reiniciar el algoritmo después de  $n$  iteraciones.

### Método de Newton y Métodos cuasi-Newton

Se trata de un método basado en el gradiente de los denominados de *segundo orden*, que son aquellos que hacen uso de las segundas derivadas de la función objetivo.

Los métodos de segundo orden determinan la dirección de búsqueda a partir del vector gradiente y de la matriz Hessiana de la función objetivo, siendo esta última aquella matriz cuyos coeficientes son las derivadas parciales segundas de la función objetivo, respecto de las variables de diseño.

$$\mathbf{H} = \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial^2 f(\{\mathbf{x}\})}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2-29)$$

La estrategia que emplea este tipo de métodos consiste en aproximar la función objetivo en el entorno del punto de diseño correspondiente a la iteración actual mediante un desarrollo en serie de Taylor hasta el término de segundo orden.

$$f(\mathbf{x}) \simeq f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}_k) \Delta \mathbf{x} \quad (2-30)$$

En el mínimo, el gradiente de la función así aproximada es nulo

$$\nabla f(\mathbf{x}) \simeq \nabla f(\mathbf{x}_k) + \nabla^2 f(\mathbf{x}_k) \Delta \mathbf{x} = 0 \quad (2-31)$$

El método de Newton toma esta aproximación para definir la dirección de búsqueda, por lo que el esquema de soluciones en las diferentes iteraciones es

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \nabla^2 f(\mathbf{x}_k)^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (2-32)$$

En los métodos del tipo denominado cuasi-Newton la matriz Hessiana inversa es sustituida por una aproximación de la misma,  $[\mathbf{B}]$ , obtenida a partir de las primeras derivadas de  $f(\mathbf{x})$ , quedando el esquema de sucesivas aproximaciones de la solución como

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \lambda [\mathbf{B}_k] \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (2-33)$$

donde  $\lambda$  es un término constante.

La matriz inversa Hessiana aproximada,  $[\mathbf{B}]$ , varía en cada iteración. Se puede obtener según la fórmula recursiva

$$[\mathbf{B}_{k+1}] = [\mathbf{B}_k] + [\Delta \mathbf{B}_k] \quad (2-34)$$

siendo precisamente la forma de obtener  $[\Delta \mathbf{B}_{k+1}]$  lo que diferencia los distintos métodos del tipo cuasi-Newton existentes. Por ejemplo, la fórmula de Davidson-Fletcher-Powell (DFP) propone

$$[\Delta \mathbf{B}_k] = \frac{\Delta \mathbf{x}_{k-1} (\Delta \mathbf{x}_{k-1})^T}{(\Delta \mathbf{x}_{k-1})^T \Delta \mathbf{g}_{k-1}} - \frac{(\mathbf{B}_{k-1} \Delta \mathbf{g}_{k-1})(\mathbf{B}_{k-1} \Delta \mathbf{g}_{k-1})^T}{(\mathbf{B}_{k-1} \Delta \mathbf{g}_{k-1})^T \Delta \mathbf{g}_{k-1}} \quad (2-35)$$

siendo

$$\Delta \mathbf{g}_{k-1} = \nabla f(\mathbf{x}_k) - \nabla f(\mathbf{x}_{k-1}) \quad (2-36)$$

O también, la muy utilizada de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS), que aunque generalmente se expresa como actualización del Hessiano, también se puede hacer respecto de la actualización del Hessiano inverso.

$$[\Delta \mathbf{B}_k] = \frac{\Delta \mathbf{x}_{k-1} (\Delta \mathbf{x}_{k-1})^T}{(\Delta \mathbf{x}_{k-1})^T \Delta \mathbf{g}_{k-1}} \left( 1 + \frac{(\Delta \mathbf{g}_{k-1})^T \mathbf{B}_{k-1} \Delta \mathbf{g}_{k-1}}{(\Delta \mathbf{x}_{k-1})^T \Delta \mathbf{g}_{k-1}} \right) - \frac{\mathbf{B}_{k-1} \Delta \mathbf{g}_{k-1} (\Delta \mathbf{x}_{k-1})^T}{(\Delta \mathbf{x}_{k-1})^T \Delta \mathbf{g}_{k-1}} - \frac{\Delta \mathbf{x}_{k-1} (\Delta \mathbf{g}_{k-1})^T \mathbf{B}_{k-1}}{(\Delta \mathbf{x}_{k-1})^T \Delta \mathbf{g}_{k-1}} \quad (2-37)$$

### Método de Gauss-Newton

Es el método más simple para resolver problemas de mínimos cuadrados sin restricciones. Se trata de una modificación del método de Newton que no usa segundas derivadas.

La formulación general de un problema de mínimos cuadrados es de la forma

$$\min_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} f^T(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) \quad (2-38)$$

En lugar de aproximar la función objetivo,  $F(\mathbf{x})$ , el método se basa en aproximar la función simple  $f(\mathbf{x})$ . Esta aproximación consiste en la linealización de dicha función mediante su desarrollo en serie de Taylor hasta la primera derivada.

$$f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} \quad (2-39)$$

Donde  $\mathbf{J}$  es la matriz Jacobiana de  $f$ .

Por tanto, la función objetivo aproximada queda como

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &\approx \frac{1}{2} f^T(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \\ &= F(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{x}^T \mathbf{J}^T f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{x}^T (\mathbf{J}^T \mathbf{J}) \Delta\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2-40)$$

Aplicando la condición de óptimo  $dF(\mathbf{x})/d\mathbf{x} = 0$ , resulta la dirección de búsqueda

$$\mathbf{d} = \Delta\mathbf{x} = -(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{f} \quad (2-41)$$

En general, la matriz inversa no se calcula explícitamente, sino que el incremento de las variables se computa resolviendo el problema lineal

$$(\mathbf{J}^T \mathbf{J}) \Delta\mathbf{x} = -\mathbf{J}^T \mathbf{f} \quad (2-42)$$

Este método tiene un comportamiento similar al de Newton-Raphson, siempre y cuando las funciones  $f_i$  tengan pequeña curvatura. Esto se debe a que la diferencia entre ellos aparece únicamente en el término cuadrático, correspondiendo la matriz  $(\mathbf{J}^T \mathbf{J})$  con la matriz Hessiana de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ .

$$H(\mathbf{x}) = \mathbf{J}^T \mathbf{J} + \sum_{i=1}^m f_i H_i(\mathbf{x}) \quad (2-43)$$

Bajo tales circunstancias ambos métodos presentan convergencia cuadrática.

### Método de Levenberg-Marquardt

Este algoritmo fue propuesto por Levenberg en 1944 y posteriormente revisado con modificaciones por Marquardt en 1963. Actualmente es uno de los métodos más usados para la resolución de problemas de optimización no lineal, y en especial, de mínimos cuadrados de escala media.

Este método intenta combinar las ventajas del método del descenso más rápido y el de Gauss-Newton. Para ello Levenberg propone un método de Gauss-Newton modificando la diagonal de la matriz pseudo-Hessiana ( $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ ) con un término de amortiguamiento, de manera que la dirección de búsqueda se obtiene de la solución del sistema lineal

$$(\mathbf{J}^T\mathbf{J} + \mu\mathbf{I})\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{J}^T\mathbf{f} \quad ; \quad \mu > 0 \quad (2-44)$$

Donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad, y  $\mu$  el parámetro de amortiguamiento.

Para valores grandes de  $\mu$ , el paso  $\Delta\mathbf{x} \approx -\frac{1}{\mu}\nabla\mathbf{F}$ , es pequeño y prácticamente en la dirección del método de máximo descenso. Esto resulta conveniente cuando la iteración actual está lejos de la solución, dadas las buenas características de convergencia global de método del máximo descenso en tales situaciones.

Si el amortiguamiento es pequeño, entonces domina el término ( $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ ), y por tanto el paso es semejante al del método de Newton-Gauss, lo que es conveniente en las etapas finales para lograr una convergencia aproximadamente cuadrática.

El parámetro de amortiguamiento  $\mu$  controla tanto la dirección de búsqueda como el tamaño del paso. El valor del mismo se actualiza en cada iteración en base al factor de ganancia  $r$ , descrito en (2-25).

Marquardt mejora este método incorporando una estimación local de la curvatura, reemplazando la matriz identidad por la estimación de la matriz Hessiana, y dando lugar así al método de Levenberg-Marquardt.

$$(\mathbf{J}^T\mathbf{J} + \mu(\mathbf{J}^T\mathbf{J}))\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{J}^T\mathbf{f} \quad ; \quad \mu > 0 \quad (2-45)$$

En el algoritmo original de Levenberg, cuando  $\mu$  es alto y nos encontramos en un valle correspondiente a un mínimo local, el pequeño tamaño del paso que

implica el valor del amortiguamiento hace que el algoritmo quede “atascado” en dicho mínimo local. Con esta modificación, el tamaño del paso es mayor y se puede eludir el mínimo local.

### Métodos para problemas con restricciones

Las técnicas existentes para la resolución del problema no lineal con restricciones pueden dividirse en dos categorías: los métodos indirectos y los directos. Los segundos tratan las restricciones de forma explícita, mientras que los indirectos transforman el problema con restricciones en un problema o secuencia de problemas no restringidos, definiendo una nueva función a minimizar como suma de función objetivo original, más una función de las ecuaciones de restricción.

#### **Método de los multiplicadores de Lagrange**

Dentro de los métodos indirectos, uno de los métodos clásicos es el de los multiplicadores de Lagrange. Este método convierte el problema de minimizar la función  $f(\mathbf{x})$  sujeta a  $m$  restricciones de igualdad  $h_j(\mathbf{x})=0$ , en un problema sin restricciones de la función

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(\mathbf{x}) \quad (2-46)$$

que recibe el nombre de función Lagrangiana. Está formada por la función objetivo y la combinación lineal de las ecuaciones de restricción. Los coeficientes  $\lambda_j$  se denominan multiplicadores de Lagrange.

La idea del método se basa en que un valor de  $\mathbf{x}$  que haga mínima la función Lagrangiana, al tiempo que verifique las ecuaciones de restricción, también es el mínimo de  $f(\mathbf{x})$ . De esta manera el problema se reduce al siguiente sistema de  $m+n$  ecuaciones con  $m+n$  incógnitas (las  $n$  variables y  $m$  multiplicadores de Lagrange).

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0 & ; \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j} = 0 \equiv h_j(\mathbf{x}) = 0; & j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (2-47)$$

Si el problema presenta  $t-m$  restricciones de desigualdad  $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$ , el método de los multiplicadores de Lagrange puede ser aplicado mediante el uso de variables de holgura (*slack*). La desigualdad se satisface si se cumple que

$$h_j(\mathbf{x}, s_j) \equiv g_j(\mathbf{x}) + s_j^2 = 0; \quad j = (m+1), 2, \dots, t \quad (2-48)$$

donde  $s_j$  es la variable de holgura, desconocida a priori.

Aplicando el método de Lagrange se define la función a minimizar como

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^t \lambda_j h_j(\mathbf{x}, s_j) \quad (2-49)$$

La resolución se obtiene de aplicar las condiciones de punto estacionario

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s})}{\partial x_i} &= 0 & ; & \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s})}{\partial \lambda_j} &= 0 \equiv h_j(\mathbf{x}) = 0; & \quad j = 1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s})}{\partial s_j} &= 0 \equiv 2\lambda_j s_j = 0; & \quad j = (m+1), 2, \dots, t \end{aligned} \quad (2-50)$$

### Métodos de la función de penalización

Los métodos denominados de penalización son una extensión de los multiplicadores de Lagrange. Transforman el problema con restricciones en una secuencia de problemas no restringidos, mediante la inclusión en la función objetivo de un término positivo por cada restricción no satisfecha. Este término de penalización se hace mayor a medida que nos aproximamos al óptimo, de manera que hace tender, al algoritmo de minimización, hacia zonas del espacio factible. Los métodos que, partiendo de soluciones fuera de la región factible, se dirigen hacia ella se denominan métodos exteriores, mientras que los que se mantienen siempre en el interior de ésta se denominan interiores o de barrera.

Considérese el problema básico de optimización con restricciones de desigualdad en la forma

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} & \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a} & \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0; \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (2-51)$$

Para métodos de penalización exteriores, la función de penalización más común es la cuadrática, quedando el problema en la minimización sin restricciones de la función

$$\Phi(\mathbf{x}, r_k) = f(\mathbf{x}) + r_k \sum_{j=1}^m (g_j(\mathbf{x}))^2 \quad (2-52)$$

donde  $r_k$  es el factor de penalización en la iteración  $k$ . Repitiendo la minimización de  $\Phi$  para una secuencia de  $r_k$ , la solución converge al mínimo de  $f(\mathbf{x})$ .

El algoritmo de resolución es el siguiente: Se comienza por un diseño inicial  $\mathbf{x}$  y un cierto valor de  $r$ . Se busca un valor  $\mathbf{x}_m$  que minimiza  $\Phi$ . Se comprueba que  $\mathbf{x}_m$  verifica las restricciones. Si es así,  $\mathbf{x}_m$  es la solución, si no, se elige un nuevo  $r$  mayor que el anterior y se vuelve a buscar el mínimo de  $\Phi$  a partir de  $\mathbf{x}_m$ .

El hecho de que  $r_k$  aumente con las iteraciones puede acarrear problemas de convergencia al tender la matriz Hessiana a estar mal condicionada. Una de las posibles estrategias para evitarlo es imponer un valor máximo al factor de penalización.

En métodos de punto interior la función más comúnmente usada es

$$\Phi(\mathbf{x}, r_k) = f(\mathbf{x}) - r_k \sum_{j=1}^m \frac{1}{g_j(\mathbf{x})} \quad (2-53)$$

La convergencia hacia la solución se logra, en este caso, para valores decrecientes de  $r_k$ .

### Método de la función Lagrangiana aumentada

Este método trata de evitar el mal condicionamiento de la matriz Hessiana propio de los métodos de la función de penalización, estableciendo un valor máximo para el factor de penalización. La función objetivo que propone es el resultado de combinar el método de los multiplicadores de Lagrange con una función de penalización cuadrática. Considerando únicamente el caso de restricciones de igualdad dicha función es de la forma

$$A(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, r) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(\mathbf{x}) + r \sum_{j=1}^m (h_j(\mathbf{x}))^2 \quad (2-54)$$

Si el valor de los multiplicadores de Lagrange están en su valor óptimo  $\lambda_j^*$ , entonces el valor  $\mathbf{x}^*$  que minimiza la Lagrangiana aumentada, también lo hará con  $f(\mathbf{x})$ , para cualquier valor del factor de penalización  $r$ . Como los valores óptimos  $\lambda_j^*$  no son conocidos se utiliza un método iterativo para la resolución del problema. En la primera iteración ( $k=1$ ) se toman los valores  $\lambda_j^k=0$  y un valor arbitrario de  $r^k$ . Se minimiza  $A$  respecto  $\mathbf{x}$ . En la siguiente iteración se actualizan los valores de  $\lambda_j^k$  y  $r^k$ . Para plantear esta actualización se aplica la condición de punto estacionario de la función Lagrangiana  $L$ , y de la función Lagrangiana aumentada  $A$ , dadas respectivamente por las ecuaciones (2-55) y (2-56).

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2-55)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m (\lambda_j + 2r_k h_j) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2-56)$$

Comparando los términos de la derecha,

$$\lambda_j^* = \lambda_j + 2r_k h_j \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2-57)$$

Podemos usar esta ecuación para establecer una fórmula de actualización de  $\lambda_j^k$

$$\lambda_j^{k+1} = \lambda_j^k + 2r_k h_j \mathbf{x}^k \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2-58)$$

El valor de  $r^k$  se actualiza según

$$r_{k+1} = c r_k \quad c > 1 \quad (2-59)$$

Si el valor de  $r^k$  excede un valor máximo prefijado  $r^{max}$ , se toma  $r^k = r^{max}$ .

Como puede verse el algoritmo converge sin la necesidad de que  $r^k$  aumente indefinidamente. El mal condicionamiento del problema es menor que el método con función de penalización cuadrática, por lo que la elección del punto de inicio es menos crítica.

### Método del gradiente reducido generalizado, GRG

Este es uno de los métodos directos más utilizados para el problema con restricciones. Proviene del método del gradiente reducido [Frank y Wolfe, 1956] para problemas no lineales con restricciones lineales, que fue extendido

por Abadie y Carpentier (1969) [Abadie y Carpentier, 1969] para su aplicación a restricciones no lineales.

El método puede verse como una adaptación del algoritmo del descenso más pronunciado al caso del problema restringido, tomando como dirección de optimización el gradiente proyectado sobre la región factible.

Como otros algoritmos de optimización no lineal, parte de una solución factible conocida como punto inicial. El algoritmo identifica una dirección que haga disminuir el valor objetivo sin infringir ninguna restricción, y modifica la solución una cantidad según dicha dirección. El proceso se repite hasta que el algoritmo alcanza un punto, en el cual no existe una dirección factible para moverse que mejore el valor de la función objetivo.

El método clasifica las variables en independientes (o no básicas) y dependientes (o básicas) y transforma el problema restringido en otro sin restricciones en base a las variables independientes

Considérese el problema de optimización no lineal

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(\mathbf{x}) \\ & \text{sujeto a} && h_k = 0; \quad k = 1, 2, \dots, m \\ & && x_i^{(l)} \leq x_i \leq x_i^{(u)}; \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2-60)$$

Por simplicidad se consideran únicamente restricciones de igualdad. Si el problema tiene ecuaciones de desigualdad, éstas pueden ser escritas como de igualdad con la adición de las correspondientes variables holgura, incluyéndose estas últimas entre las  $n$  variables del problema.

El conjunto de las  $n$  variables se divide en dos subconjuntos  $Y$  y  $Z$  tales que

$$\mathbf{x} = \begin{cases} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{cases} \quad \begin{array}{l} n - m \quad \text{variables independientes o no básicas} \\ m \quad \text{variables dependientes o básicas} \end{array} \quad (2-61)$$

Diferenciando las funciones objetivo y de restricción

$$\begin{aligned} df(\mathbf{x}) &= \nabla_{\mathbf{Y}}^T f \cdot d\mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{Z}}^T f \cdot d\mathbf{Z} \\ dh_k(\mathbf{x}) &= \nabla_{\mathbf{Y}}^T h_k \cdot d\mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{Z}}^T h_k \cdot d\mathbf{Z}; \quad k = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (2-62)$$

donde  $\nabla_{\mathbf{Y}}$  y  $\nabla_{\mathbf{Z}}$  son los gradientes respecto de las variables independientes y dependientes respectivamente.

Para el conjunto de ecuaciones de restricción

$$d\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial y_{n-m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial y_{n-m}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_{n-m} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial z_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial z_m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dz_1 \\ \vdots \\ dz_m \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}]d\mathbf{Y} + [\mathbf{D}]d\mathbf{Z} \quad (2-63)$$

Suponiendo que inicialmente se cumplen las restricciones para un vector de diseño  $\mathbf{X}$ , ( $h(\mathbf{X})=0$ ), cualquier cambio en las variables de diseño  $d\mathbf{X}$ , se corresponde con  $d\mathbf{h}=0$  para mantener la factibilidad de la nueva solución. Por tanto, de la ecuación anterior se puede despejar la variación de las variables dependientes,  $d\mathbf{Z}$  para un cambio en las independientes,  $d\mathbf{Y}$ .

$$d\mathbf{Z} = -[\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{C}]d\mathbf{Y} \quad (2-64)$$

Sustituyendo en la ecuación (2-62), se obtiene el cambio en la función objetivo debido a un cambio en las variables.

$$\begin{aligned} df(\mathbf{X}) &= \nabla_{\mathbf{Y}}^T f d\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Z}}^T f [\mathbf{D}]^{-1} [\mathbf{C}] d\mathbf{Y} \\ &= \left\{ \nabla_{\mathbf{Y}}^T f - \nabla_{\mathbf{Z}}^T f [\mathbf{D}]^{-1} [\mathbf{C}] \right\} d\mathbf{Y} \end{aligned} \quad (2-65)$$

o bien

$$\frac{df}{d\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) = \nabla_{\mathbf{Y}}^T f - \nabla_{\mathbf{Z}}^T f [\mathbf{D}]^{-1} [\mathbf{C}] = \mathbf{G}_R \quad (2-66)$$

donde  $\mathbf{G}_R$  se denomina *gradiente reducido generalizado*, *GRG*. Este gradiente se puede usar para determinar la dirección de búsqueda de una solución mejorada para las variables independientes. Por ejemplo, si se emplea el método de máximo descenso, la dirección de búsqueda es

$$\mathbf{S} = -\mathbf{G}_R \quad (2-67)$$

y el nuevo valor de la variable independientes

$$\mathbf{Y}^q = \mathbf{Y}^{q-1} + \alpha \mathbf{S} \quad (2-68)$$

El valor de  $\alpha$  se elige de manera que haga mínima la función objetivo en la dirección de búsqueda. Para cada valor de  $\alpha$  las variables dependientes,  $\mathbf{Z}$ , deben ser actualizadas según la ecuación (2-64). Debido a que para un valor finito de  $d\mathbf{Y}$  esta ecuación constituye una aproximación lineal, las restricciones

pueden no cumplirse, esto es  $d\mathbf{h} \neq 0$ . Para mantener la factibilidad de la solución actualizada, se ha de verificar

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) + d\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2-69)$$

donde  $\mathbf{x} = (\mathbf{Y} + d\mathbf{Y}, \mathbf{Z} + d\mathbf{Z})^T$ .

Sustituyendo esta ecuación en (2-63) y despejando, se obtiene

$$d\mathbf{Z} = [\mathbf{D}]^{-1} (-\mathbf{h}(\mathbf{x}) - [\mathbf{C}]d\mathbf{Y}) \quad (2-70)$$

El valor de  $d\mathbf{Z}$  se obtiene resolviendo esta expresión de manera iterativa. Se comienza tomando como valor aproximado de  $\mathbf{Z}$  el de la iteración general anterior,  $\mathbf{Z}^q \approx \mathbf{Z}^{q-1}$ . Sustituyendo en (2-70) se obtiene una nueva estimación de  $d\mathbf{Z}$

Mediante esta ecuación se actualiza el valor de  $\mathbf{Z}$

$$\mathbf{Z}^q = \mathbf{Z}^{q-1} + d\mathbf{Z} \quad (2-71)$$

El proceso se repite, actualizando  $h(\mathbf{x})$ , hasta que  $d\mathbf{Z}$  sea suficientemente pequeño. En caso de no alcanzarse la convergencia habrá que probar con un valor menor de  $\alpha$ .

Una vez que se tienen todas las variables para la iteración general  $q$ , se vuelve a repetir el proceso calculando el nuevo gradiente reducido según (2-66). El proceso llegará a la convergencia cuando el módulo del gradiente sea suficientemente pequeño,  $\|\mathbf{G}_R\| < \epsilon$ .

### • *Métodos de búsqueda directa*

Los métodos de búsqueda directa no utilizan información de derivadas. Su convergencia suele ser más lenta que los basados en el gradiente, sin embargo son apropiados para problemas no continuos o con funciones no derivables. Además toleran la presencia de ruido tanto en la función objetivo como en las de restricción.

### Método de direcciones conjugadas de Powell

Se trata de uno de los métodos de búsqueda directa más utilizados. Por ser un método de direcciones conjugadas presenta convergencia cuadrática. Esto quiere decir que aplicado sobre una función cuadrática, se alcanza la convergencia en un número máximo de iteraciones igual al de variables, independientemente del punto de partida.

Si bien el método de Powell (1964) es apropiado para funciones cuadráticas, también es válido para funciones no lineales, en general, siempre y cuando nos encontremos en las proximidades del mínimo (donde la función objetivo se puede aproximar por una forma cuadrática), [Fox, 1971].

Un conjunto de vectores o direcciones  $\{\mathbf{S}_i\}$  se dice que son conjugadas (o más precisamente **A**-conjugadas) si se cumple que

$$\mathbf{S}_i^T \mathbf{A} \mathbf{S}_j = 0 \quad \forall i \neq j, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2-72)$$

La ventaja de las direcciones conjugadas radica en el hecho de que la minimización de esta función respecto de una dirección  $\mathbf{S}_i$  no afecta a la minimización respecto otra dirección  $\mathbf{S}_j$ , conjugada de ésta. Esto puede demostrarse de modo simple:

Considérese una función cuadrática de  $n$  variables

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}^T \mathbf{x} + C \quad (2-73)$$

El gradiente

$$\nabla Q = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \quad (2-74)$$

Si se minimiza según una dirección  $u$ , entonces la dirección del gradiente según dicha dirección ha de ser cero.

$$\nabla Q \cdot u = 0 \quad (2-75)$$

Si ahora se minimiza según otra dirección  $v$ , para que no interfiera con la minimización anterior, el cambio del gradiente

$$\delta(\nabla Q) = \mathbf{A} v \quad (2-76)$$

debe ser también perpendicular a  $u$ . Y por tanto, según (2-76)

$$u^T \mathbf{A}v = 0 \quad (2-77)$$

Por lo tanto se puede lograr la minimización de una función cuadrática en un ciclo de sucesivas minimizaciones según  $n$  direcciones conjugadas. En caso de tratarse de una función general no lineal, será necesario repetir varias veces el ciclo de minimizaciones unidireccionales.

Si  $Q$  es diferenciable dos veces, la obtención de conjunto de direcciones conjugas a partir de  $\mathbf{A}$  es una tarea relativamente sencilla. Si embargo si las derivadas no son fáciles de obtener, el método de Powell permite llegar a dicho conjunto de direcciones conjugadas gradualmente a partir de los propios resultados de búsqueda.

El método parte de un conjunto de vectores linealmente independientes  $\mathbf{h}_i$  y un punto inicial  $\mathbf{x}_0$ . Se obtiene una secuencia de puntos  $\mathbf{P}_i$  que son los mínimos de sucesivas búsquedas unidireccionales, según cada uno de los vectores. Se crea el vector  $\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_0$  que representa, en cierto sentido, la dirección promedio de los pasos intermedios. El nuevo punto de aproximación de la solución  $\mathbf{x}_1$  se obtiene de la minimización de  $Q(\mathbf{x})$  según dicho vector. Como este vector es una buena dirección y además, también resulta conjugada del resto (propiedad que no se demuestra aquí), sustituye a una de ellas (a la  $\mathbf{h}_1$ ) en la siguiente iteración.

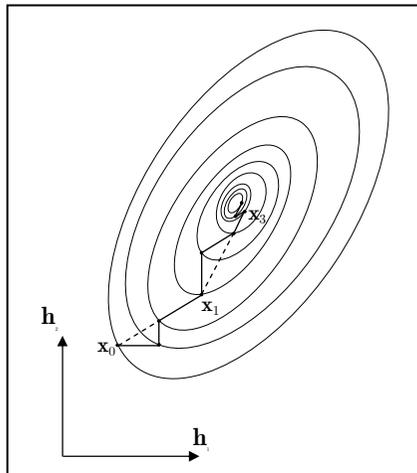


Figura 2-2. Evolución de la solución en el método de Powell

### Método de Nelder-Mead

Este método también se denomina como método *simplex*, pero no hay que confundirle con el método clásico de programación lineal.

En un problema con  $n$  variables, el método considera un politopo de  $n+1$  puntos del espacio de diseño  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n+1}$ . Estos puntos se ordenan según

$$f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}_2) \leq \dots \leq f(\mathbf{x}_{n+1}) \quad (2-78)$$

Siendo, por tanto,  $\mathbf{x}_{n+1}$  la peor de las soluciones actuales. En la siguiente iteración se sustituye esta peor solución por una nueva, generada mediante la reflexión de la misma respecto del centroide,  $\mathbf{c}$ , del politopo de los  $n$  puntos restantes.

$$\mathbf{x}_r = \mathbf{c} + \alpha(\mathbf{c} + \mathbf{x}_{n+1}) \quad (2-79)$$

Siendo  $\alpha$  valor positivo denominado coeficiente de reflexión, y el centroide calculado según

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i / n \quad (2-80)$$

Si la nueva solución  $\mathbf{x}_r$  es mejor que la solución  $\mathbf{x}_{n+1}$ , pero peor que la mejor,  $\mathbf{x}_1$ , es decir,  $f(\mathbf{x}_r) < f(\mathbf{x}_{n+1})$ , la nueva solución  $\mathbf{x}_r$  sustituye a la  $\mathbf{x}_{n+1}$ .

Si la nueva solución  $\mathbf{x}_r$  es mejor que la mejor solución anterior  $\mathbf{x}_1$ , entonces se puede intentar mejorar aún más, mediante la expansión del nuevo politopo. Así se genera una nueva solución de prueba  $\mathbf{x}_e$  tal que

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{c} + \beta(\mathbf{x}_r - \mathbf{c}) \quad (2-81)$$

$\beta$  es el coeficiente de expansión, tal que  $\beta < 1$ .

Se evalúa la función objetivo en este punto y resulta que  $f(\mathbf{x}_e) < f(\mathbf{x}_r)$  entonces  $\mathbf{x}_e$  reemplaza a  $\mathbf{x}_{n+1}$ .

Si  $f(\mathbf{x}_r) > f(\mathbf{x}_{n+1})$ , quiere decir que el politopo es demasiado grande y necesita ser contraído. Se define un nuevo punto  $\mathbf{x}_e$ , tal que

$$\mathbf{x}_e = \begin{cases} \mathbf{c} + \gamma(\mathbf{x}_r - \mathbf{c}) & \text{si } f(\mathbf{x}_n) \leq f(\mathbf{x}_r) \leq f(\mathbf{x}_{n+1}) \\ \mathbf{c} - \gamma(\mathbf{x}_r - \mathbf{c}) & \text{si } f(\mathbf{x}_r) > f(\mathbf{x}_{n+1}) \end{cases} \quad (2-82)$$

Siendo denominado  $\gamma$  como coeficiente de contracción,  $0 < \gamma < 1$ .

Si  $f(\mathbf{x}_e) < \min(f(\mathbf{x}_r), f(\mathbf{x}_{n+1}))$ , entonces, se acepta la contracción y  $\mathbf{x}_e$  reemplaza a  $\mathbf{x}_{n+1}$ . En caso contrario se lleva a cabo una nueva contracción o un encogimiento del politopo.

El encogimiento consiste en modificar los  $n$  peores vértices, es decir,  $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{n+1}$  según el esquema

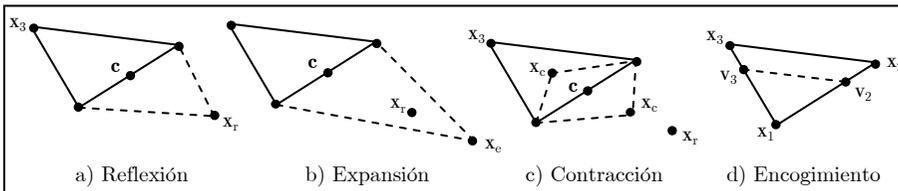
$$\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_1 + \sigma(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1), \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (2-83)$$

De manera que los nuevos vértices (sin ordenar) pasan a ser  $\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n+1}$ .

Los valores habituales de los diferentes coeficientes son  $\alpha=1$ ,  $\beta=2$ ,  $\gamma=0.5$  y  $\sigma=0.5$ .

En la siguiente iteración se ordenan los  $n+1$  puntos y se repite el proceso anterior.

La Figura 2-3 muestra gráficamente las operaciones del método de Nelder-Mead.



**Figura 2-3. Esquema de operaciones del método de Nelder-Mead**

## 2.6.2. Métodos probabilísticos

Estos métodos no están basados en reglas matemáticas deterministas, sino en criterios de probabilidad. Suele considerarse que implican una carga computacional mayor que los métodos deterministas. Sin embargo, las interesantes cualidades que presentan, unido al aumento de capacidad de los ordenadores, han hecho de ellos un importante foco de estudio en los últimos años. Una de sus principales ventajas reside en su mejor capacidad de exploración del espacio de diseño, por lo que son frecuentemente aplicados en aquellos problemas de optimización global. Asimismo, tienen aplicación sobre un amplio espectro de problemas, puesto que suelen requerir únicamente la evaluación de la función, así como admitir simultáneamente distintos tipos de variables. Si bien estos métodos se adaptan bien a problemas sin restricciones o con restricciones en el rango admisible por las variables, también es posible

su adaptación a ciertos problemas restringidos haciendo uso del concepto de función de penalización.

Dentro de los métodos probabilísticos se pueden diferenciar dos familias: aquellos que trabajan con una única solución inicial, y los que utilizan un conjunto de soluciones potenciales denominado *población*.

### • *Algoritmos basados en una solución*

Estos métodos se basan en hacer evolucionar una solución inicial mediante perturbaciones aleatorias de las variables de diseño. Uno de los métodos de uso más extendido en diversas aplicaciones prácticas es el denominado Recocido Simulado [Kirkpatrick *et al.*, 1983].

#### Recocido Simulado

El nombre original de este método es Simulated Annealing (SA), y recibe distintas traducciones, además de la elegida, como son Solidificación Simulada o Enfriamiento Simulado.

El método trata de reproducir el fenómeno de recristalización de materiales metálicos en el proceso de solidificación hasta un estado de mínima energía. Para lograr dicho estado se eleva suficientemente la temperatura del material y después se realiza un enfriamiento lento que permita una estructura cristalina ordenada y por tanto de mínima energía interna.

En el método del SA el vector de variables de diseño describe el estado del sistema. El valor de la función objetivo para dicho estado representa la energía interna del sistema. La solución óptima es aquella que presente mínima energía. Partiendo de un estado inicial, en cada paso se propone una modificación aleatoria de la solución actual. Dicha modificación se acepta, y pasa a ser la nueva solución actual, si supone una disminución de la función de error (menor energía). En caso contrario, puede ser aceptada con una cierta probabilidad (criterio de Metrópolis [Métropolis *et al.*, 1953]), decreciente a medida que avanza el proceso, dada por

$$P(\Delta f) = e^{-\frac{\Delta f}{T}} \quad (2-84)$$

Donde  $\Delta f$  es la variación de la función de error, y  $T$  es un parámetro de control denominado *temperatura* por analogía con el fenómeno de enfriamiento. La posible aceptación de soluciones peores a la actual hace que el algoritmo pueda escapar de ciertos mínimos locales.

El algoritmo comienza con un valor alto de temperatura de manera que se permita casi cualquier salto aunque supongan un incremento importante de energía. A medida que avanza el proceso la temperatura se va reduciendo según alguna estrategia preestablecida. De esta manera, en las primeras iteraciones se explora el espacio de diseño, mientras que en las etapas finales se explota aquella parte del espacio donde parece más probable que se encuentre la solución óptima.

### • *Algoritmos basados en población*

Estos métodos tratan de imitar procesos naturales tales como la evolución de las especies o comportamientos sociales.

Una de las principales familias de este tipo de algoritmos basados en población la constituyen los algoritmos evolutivos. Se trata de algoritmos de optimización metaheurística inspirados en conceptos derivados de la evolución biológica: reproducción, mutación, selección natural, etc. Los posibles candidatos a solución del problema de optimización forman parte de una *población* que evoluciona, mediante *operadores genéticos*, en sucesivas poblaciones cada vez más adaptadas al *medio*, representado éste por la función objetivo.

Dentro de este grupo de métodos se pueden mencionar los algoritmos de Programación evolutiva [Fogel *et al.*, 1966], Estrategias evolutivas [Rechenberg, 1965] y Programación genética [Smith, 1980], [Koza, 1992], y quizás el más ampliamente utilizado, el método de los Algoritmos Genéticos, AG [Holland, 1975], que se describe brevemente a continuación.

#### *Algoritmos genéticos*

El primero de ellos, AG, está basado en la emulación de los procesos de evolución de las especies: Cada individuo (solución posible) se define por un código numérico denominado cromosoma que recoge las variables de diseño. El medio natural se representa mediante una función objetivo. Si el objetivo es maximizar esta función, cuanto mayor sea el valor de la función para un

determinado individuo, se considera que dicho individuo está mejor adaptado al medio. Se parte de una población inicial de individuos que va evolucionando sucesivamente en nuevas poblaciones mediante transformaciones (operadores) de sus cromosomas. Las principales de estas transformaciones son:

- **Mutación:** Parte del cromosoma de un individuo puede cambiar aleatoriamente con una cierta probabilidad. Esta probabilidad es mayor en las primeras iteraciones (favoreciendo la exploración del espacio de diseño) y decrece a medida que estas avanzan para centrarse en una zona de dicho espacio (explotación).
- **Cruce:** Dos individuos de una población cruzan sus cromosomas para formar individuos de la nueva población.
- **Selección:** Se favorece estadísticamente que los individuos más aptos permanezcan para la siguiente generación.

A los individuos que proporcionan un mayor valor de la función objetivo se les asigna mayor probabilidad de supervivencia y de cruce (“supervivencia del más fuerte”), de forma que puedan transmitir a sus descendientes sus características positivas. La exploración del espacio de diseño se lleva a cabo mediante modificaciones aleatorias (mutaciones) de ciertos individuos. Si dichas mutaciones resultan beneficiosas tendrán alta probabilidad de ser transmitidas a los descendientes. De esta forma, tras un número suficiente de generaciones (iteraciones), se alcanza una población final que en conjunto es mejor, más apta, que la de partida. Dentro de esta población final deberá encontrarse el individuo óptimo o próximo al óptimo.

Otra familia de métodos basados en poblaciones la constituyen aquellos algoritmos basados en *inteligencia de enjambre*. A diferencia de los métodos evolutivos que estaban basados en criterios de evolución biológica, los de inteligencia de enjambre tratan de imitar el comportamiento colectivo de ciertos agentes. Dentro de este grupo se pueden destacar el algoritmo de Colonia de hormigas [Dorigo, 1992], y el de Enjambre de partículas [Kennedy y Eberhart, 1995].

#### Algoritmo de colonia de hormigas

Se basa en el comportamiento de las hormigas en su búsqueda de comida por el camino más corto. Durante su desplazamiento una hormiga deja en su camino un rastro de feromona. Una vez depositada la feromona se va evaporando con el tiempo. Si una hormiga encuentra un rastro tiene tendencia a seguirlo con una probabilidad mayor cuanto más intensidad tenga éste.

Al iniciar la búsqueda de alimento las hormigas se mueven aleatoriamente al no existir rastro previo de feromona. Aquellas que llegan al alimento por el camino más corto regresan antes al hormiguero haciendo aumentar la densidad por unidad de longitud en dicho camino. La mayor intensidad de feromona en el trayecto más corto hace que éste sea probabilísticamente más deseable para las siguientes hormigas, con lo que la mayoría lo elige y así se incrementa cada vez más la densidad de feromona en el mismo haciendo que la probabilidad de que una nueva hormiga elija el camino más corto aumenta progresivamente. Por el contrario, en los caminos menos transitados, la evaporación de la feromona hace que cada vez sean menos transitados, y finalmente abandonados. De esta manera el recorrido de la colonia converge al más corto de los posibles. Esto viene representado gráficamente en la Figura 2-4.

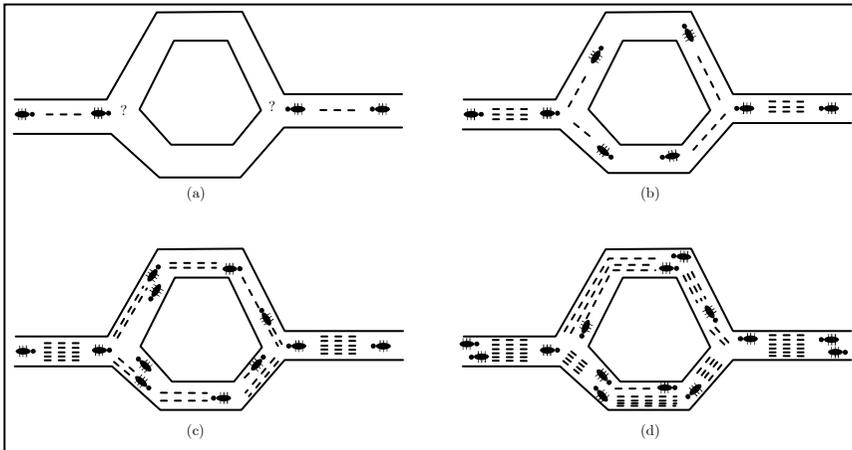


Figura 2-4. Esquema del algoritmo de colonia de hormigas

#### *Algoritmo de enjambre de partículas*

Este algoritmo de optimización igualmente basado en población trata de imitar el comportamiento social de bandadas de aves o peces en su búsqueda de comida. Los individuos de la población son conocidos también como *partículas* (de aquí el nombre del método). En cada iteración, las partículas de la población cambian su posición en función de su propia experiencia y de la experiencia de las partículas de su entorno próximo. La experiencia consiste en el conocimiento de la mejor posición alcanzada por la propia partícula y la mejor posición alcanzada por el enjambre o por un subconjunto del mismo. Esta información es utilizada por la partícula para cambiar su posición y su velocidad o tasa de cambio, actuando las mejores soluciones, tanto individual como colectiva, como focos de atracción de las partículas.

## Capítulo 3. Metodología de síntesis óptima propuesta

### 3.1. Introducción

En el presente capítulo se va a describir un nuevo método de síntesis dimensional óptima de mecanismos aplicable a los tres problemas de síntesis cinemática: generación de trayectoria, generación de funciones y guiado de sólido rígido.

Cualquiera de los tres problemas de síntesis se formula como un problema de programación no lineal de la forma

$$\begin{aligned} \text{Minimizar:} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeto a:} \quad & h_i(\mathbf{x}) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & g_j(\mathbf{x}) \leq 0; \quad j = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (3-1)$$

donde  $f(\mathbf{x})$  es la función objetivo y  $\mathbf{x}$  el vector de variables de diseño sujetas a una serie de restricciones de igualdad y de desigualdad. El valor  $\mathbf{x}^*$  que, cumpliendo dichas restricciones, hace mínima la función objetivo, es el óptimo y por tanto, la solución del problema de síntesis.

El método propuesto puede clasificarse como de primer orden o del gradiente y plantea el problema de síntesis mediante puntos o posiciones de precisión. La originalidad del mismo se basa en la formulación matricial del problema de optimización, así como en la metodología propuesta para la obtención analítica del matriz Jacobiana.

## 3.2. Formulación general del problema de síntesis

### 3.2.1. Modelización cinemática del mecanismo.

- *Variables de diseño*

Los parámetros geométricos que definen cinemáticamente el mecanismo, constituyen las variables de diseño del problema de síntesis cinemática dimensional. La naturaleza de estos parámetros depende de la formulación utilizada a la hora de definir el mecanismo y el tipo de problema a tratar, pero típicamente suelen corresponder a longitudes de elementos y a posiciones y orientaciones de ciertos elementos que componen el mecanismo. Para su tratamiento matemático, las variables de diseño se agrupan en el vector de diseño  $\mathbf{z}$ .

- *Coordenadas generalizadas y restricciones cinemáticas*

El conjunto de parámetros que se emplean para definir la posición de un mecanismo se denominan coordenadas generalizadas. El conjunto de coordenadas generalizadas se recoge en el vector  $\mathbf{q}$ .

Existen distintos tipos de coordenadas generalizadas. Una primera clasificación de los mismos se basa en su distinción según las variables que se consideran sean dependientes o independientes entre sí. Si bien un mismo mecanismo se puede definir con cualquiera de ellos, la formulación resultante vendrá condicionada en términos de eficiencia y facilidad de implementación por el tipo de coordenadas elegido y la aplicación a la que vaya destinado.

La elección de un sistema de coordenadas independientes permite el uso de un número mínimo de coordenadas (y por tanto coincidente con el número de grados de libertad del mecanismo). Sin embargo, para el caso de cadenas cinemáticas cerradas, pueden no definir unívocamente la posición del mecanismo, lo cual limita su uso a ciertas aplicaciones particulares.

Si por el contrario se emplean coordenadas dependientes, el número necesario de las mismas será mayor que el de grados de libertad. Las coordenadas dependientes determinan unívocamente la posición de todos los elementos, proporcionando una formulación de carácter más general y sencilla de adaptar a distintas cadenas cinemáticas, por lo que han sido las elegidas para el desarrollo del método de síntesis propuesto en esta tesis.

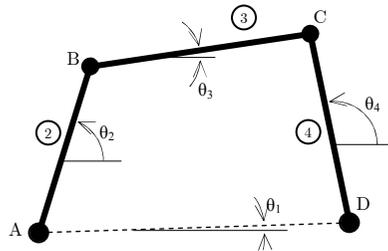
Desde un punto de vista del problema de síntesis cinemática, las variables dependientes proporcionan información directa sobre algún parámetro de

interés para la formulación del problema. Por tanto, es el diseñador el que debe seleccionarlas tanto en tipo como en número.

Las coordenadas dependientes se relacionan entre sí y con las variables de diseño a través de unas ecuaciones de restricción. Estas ecuaciones definen el comportamiento cinemático del mecanismo por lo que conocen como ecuaciones de restricción cinemáticas. El número de ecuaciones de restricción cinemáticas es igual a la diferencia entre el número de coordenadas generalizadas y el de grados de libertad. Para su tratamiento matemático se agrupan en un vector  $\mathbf{C}$ . Son generalmente restricciones de igualdad, y de carácter no lineal o fuertemente no lineal. De forma compacta se pueden escribir como

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{z}) = 0 \quad (3-2)$$

La forma de estas ecuaciones depende del tipo de coordenadas generalizadas utilizadas. Si bien la metodología propuesta admite, a priori, cualquier tipo de formulación, las empleadas en el desarrollo de esta tesis han sido las derivadas del uso de coordenadas mixtas y de coordenadas naturales. En primero de los casos, el conjunto de ecuaciones de restricción cinemáticas lo constituyen las ecuaciones de cierre de los lazos del mecanismo. Cuando se han utilizado las coordenadas naturales las ecuaciones que definen el comportamiento cinemático del mecanismo son las de condición de sólido rígido de los elementos y las correspondientes a algunos pares cinemáticos [García de Jalón y Bayo, 1994].



**Figura 3-1. Distintas coordenadas generalizadas para cuadrilátero**

Así, por ejemplo para el mecanismo de la Figura 3-1 las ecuaciones cinemáticas utilizando coordenadas mixtas  $\{\theta_2, \theta_3, \theta_4\}$  vendrán dadas por la condición  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} - \overline{AD} = 0$ , y por lo tanto serán

$$\begin{aligned} z_2 \cos(\theta_2) + z_3 \cos(\theta_3) + z_4 \cos(\theta_4) - z_1 \cos(\theta_1) &= 0 \\ z_2 \sin(\theta_2) + z_3 \sin(\theta_3) + z_4 \sin(\theta_4) - z_1 \sin(\theta_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3-3)$$

En el caso de utilizar las coordenadas naturales  $\{x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D\}$  y considerando los puntos A y D fijos, las ecuaciones serán:

$$\begin{aligned}(x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - z_2^2 &= 0 \\(x_C - x_B)^2 - (y_C - y_B)^2 - z_3^2 &= 0 \\(x_D - x_C)^2 - (y_D - y_C)^2 - z_4^2 &= 0\end{aligned}\tag{3-4}$$

Por estar constituido el mecanismo exclusivamente por pares rotación, las ecuaciones provienen únicamente de la condición de sólido rígido de las barras.

Se ha de puntualizar que la denominación de *coordenadas mixtas* aquí empleada no corresponde con la utilizada en [García de Jalón y Bayo, 1994]. A pesar de su proximidad a las denominadas coordenadas relativas en la citada referencia, se ha preferido llamarlas mixtas porque la referencia angular está definida, por simplicidad de la formulación resultante, en forma absoluta.

### 3.2.2. Especificaciones de diseño.

#### • *Restricciones de síntesis y error de síntesis*

Los requisitos de diseño impuestos al funcionamiento del mecanismo se recogen en una serie de *parámetros funcionales*  $\delta$ , que sirven para medir el error de síntesis. Estos parámetros son coordenadas geométricas, en general, adicionales a las utilizadas para definir el comportamiento cinemático del mecanismo. Si bien estas nuevas coordenadas pueden incluirse en el vector de coordenadas generalizadas, es preferible considerarlas separadamente para facilitar la formulación general del problema de síntesis.

Los parámetros funcionales dan lugar a nuevas restricciones denominadas *de síntesis*, ya que son debidas precisamente a los requerimientos del problema de síntesis. A diferencia de las cinemáticas estas restricciones incluyen los parámetros funcionales, relacionándolos con las coordenadas generalizadas y las variables de diseño. Al igual que las cinemáticas, las ecuaciones de restricción de síntesis son restricciones de igualdad.

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}, \mathbf{z}, \delta) = \mathbf{0}\tag{3-5}$$

Se definen dos tipos de parámetros funcionales: los deseados y los generados. Los primeros son aquellos fijados por el diseñador como requisitos del mecanismo diseñado. Los generados son aquellos, equivalentes a los primeros, obtenidos por un mecanismo concreto. Se define así el vector de parámetros deseados  $\delta_d$ , y el vector de parámetros generados  $\delta_g$ . El error de síntesis se puede formular como la diferencia entre ambos vectores.

$$\epsilon = \epsilon(\delta_g) = (\delta_g - \delta_d) \quad (3-6)$$

La forma habitual de definir los parámetros funcionales es mediante puntos de precisión (o también llamados puntos de aproximación para indicar que no se trata de una síntesis exacta). Los puntos de precisión son una serie de coordenadas espaciales por las que debe pasar, generalmente en un cierto orden, un punto prefijado de un elemento del mecanismo. También se suele hablar de posiciones de precisión cuando se especifica, única o adicionalmente, la orientación del elemento (problemas de guiado de sólido rígido y generación de funciones). Los parámetros funcionales se definen entonces como las coordenadas de dichas posiciones espaciales.

Los vectores generados y deseados globales son

$$\delta_g^T = [\delta_g^1 \quad \delta_g^2 \quad \dots \quad \delta_g^i \quad \dots \quad \delta_g^{npos}] \quad (3-7)$$

$$\delta_d^T = [\delta_d^1 \quad \delta_d^2 \quad \dots \quad \delta_d^i \quad \dots \quad \delta_d^{npos}] \quad (3-8)$$

Siendo los  $\delta_{g,d}^i$  los correspondientes a cada posición de precisión

Por su parte, el error de síntesis para una posición genérica “ $i$ ” será

$$\epsilon^i = \epsilon(\delta_g^i) = (\delta_g^i - \delta_d^i) \quad (3-9)$$

y para todas las posiciones de precisión

$$\epsilon(\delta_g) = \left\{ \begin{array}{l} \epsilon(\delta_g^1) = \delta_g^1 - \delta_d^1 \\ \epsilon(\delta_g^2) = \delta_g^2 - \delta_d^2 \\ \dots \\ \epsilon(\delta_g^{npos}) = \delta_g^{npos} - \delta_d^{npos} \end{array} \right\} \quad (3-10)$$

Hay que introducir una ecuación de restricción de síntesis por cada parámetro funcional generado. Como normalmente se considera más de un parámetro en cada posición (por ejemplo, las coordenadas  $x_g^i$  e  $y_g^i$  en el problema de trayectorias), las ecuaciones de restricción de síntesis en una posición forman un vector en la forma

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}^i, \mathbf{z}, \delta_g^i) = 0 \quad (3-11)$$

El conjunto de ecuaciones de síntesis para todas las posiciones será

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}, \mathbf{z}, \delta_g) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}(\mathbf{q}^1, \mathbf{z}, \delta_g^1) \\ \mathbf{S}(\mathbf{q}^2, \mathbf{z}, \delta_g^2) \\ \dots \\ \mathbf{S}(\mathbf{q}^{n_{pos}}, \mathbf{z}, \delta_g^{n_{pos}}) \end{array} \right\} = 0 \quad (3-12)$$

Adoptando el planteamiento basado en posiciones de precisión, el conjunto de ecuaciones de restricción cinemáticas para una posición genérica se agrupa en el vector

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}^i, \mathbf{z}) = 0 \quad (3-13)$$

Y para todas las posiciones de precisión se tiene

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{z}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C}(\mathbf{q}^1, \mathbf{z}) \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}^2, \mathbf{z}) \\ \dots \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}^{n_{pos}}, \mathbf{z}) \end{array} \right\} = 0 \quad (3-14)$$

Ambos tipos de ecuaciones de restricción se pueden referir conjuntamente como un único vector. Para una posición genérica se define como

$$\Phi(\mathbf{q}^i, \mathbf{z}, \delta_g^i) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C}(\mathbf{q}^i, \mathbf{z}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{q}^i, \mathbf{z}, \delta_g^i) \end{array} \right\} = 0 \quad (3-15)$$

El número total de ecuaciones de restricción cinemáticas es igual a la diferencia entre el número de coordenadas generalizadas y el número de grados de libertad, multiplicada por el número de posiciones de precisión. Si se conocen las variables de diseño, constantes para todas las posiciones, se puede resolver el sistema obteniendo las coordenadas generalizadas para cada posición de precisión. Por tanto se puede decir que las coordenadas del mecanismo son función de las variables de diseño,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{z})$ .

Una vez conocido  $\mathbf{z}$  y  $\mathbf{q}$ , el conjunto de restricciones de síntesis da lugar a otro sistema determinado en el que se obtiene el vector  $\delta_g$ . Por tanto, el vector de parámetros generados  $\delta_g$  es, función de  $\mathbf{z}$  y  $\mathbf{q}$ ,  $\delta_g = \delta_g(\mathbf{q}(\mathbf{z}), \mathbf{z})$ . En consecuencia se puede poner

$$\varepsilon = \varepsilon(\delta_g(\mathbf{q}(\mathbf{z}))) \quad (3-16)$$

• **Restricciones adicionales**

Opcionalmente, se pueden considerar otro tipo de restricciones que afectan al diseño de mecanismos como, por ejemplo, la limitación de la longitud de una barra, acotación del ángulo de presión, el cumplimiento de condiciones de Grashof, etc. Este tipo de restricciones suelen dar lugar a ecuaciones de desigualdad.

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\delta}_g) \leq 0 \quad (3-17)$$

Si las ecuaciones de restricción adicionales son de tipo igualdad se añaden directamente a las cinemáticas y de síntesis. Si por el contrario son de tipo desigualdad requieren un tratamiento previo para su adaptación al planteamiento general de la estrategia de optimización. Dicho tratamiento se describe en un apartado posterior de esta tesis.

### 3.2.3. Función objetivo.

La adecuación del mecanismo a los requerimientos de diseño se mide mediante la evaluación de la función objetivo para las variables de diseño que definen el mecanismo. Se pueden definir infinidad de funciones objetivo que, en general, dependen del error de síntesis  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . La función objetivo seleccionada para el método es una función cuadrática del error de síntesis  $\boldsymbol{\varepsilon}$  que se denomina función de error de síntesis (*FES*) de la forma

$$FES = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{pos}} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}_g^i) \right)^T \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}_g^i) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}_g)^T \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}_g) \quad (3-18)$$

Si el problema de síntesis exige que la aproximación a ciertas posiciones de precisión tenga mayor importancia que otras, se puede incluir una matriz de ponderación  $\boldsymbol{\Gamma}$ , de manera que la FES quedaría como

$$FES = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{pos}} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}_g^i) \right)^T \cdot \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}_g^i) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}_g)^T \cdot \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}_g) \quad (3-19)$$

donde  $\boldsymbol{\Gamma}$  es una matriz diagonal constante, cuyos los términos son los pesos de cada posición de precisión.

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \Gamma_{n_{pos}} \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

La función cumple el requisito exigido por el método de ser derivable. Dentro del campo de la síntesis cinemática óptima de mecanismos la definición de la función objetivo en forma cuadrática ha sido ampliamente utilizada con éxito por diversos investigadores, [Sutherland y Roth, 1975], [Ángeles *et al.*, 1988], [Akhraş y Ángeles, 1990], [Vallejo *et al.*, 1995], [Collard *et al.*, 2010], etc.

En algunos casos esta función cuadrática se plantea en función del error residual de las ecuaciones de restricción en lugar del error de síntesis [Ángeles y Bernier, 1987], [Jiménez *et al.*, 1997]. Sin embargo se demuestra [Santoro, 1989], [Hayes *et al.*, 1999] que para un número suficiente de posiciones de precisión los resultados de ambas formulaciones son similares. No obstante, la formulación en base al error residual es más sensible a la elección del mecanismo inicial, y puede llegar a producir soluciones sin correspondencia física al no quedar asegurado el ensamblado del mecanismo.

En la implementación del algoritmo se puede sustituir el factor  $\frac{1}{2}$  por  $1/n^{\circ}_{\text{posiciones}}$  con objeto de hacer que la magnitud de FES no se vea influida por el número de posiciones de precisión consideradas. No obstante, por simplicidad y conveniencia matemática, los desarrollos posteriores se hacen en base a (3-18).

### 3.2.4. Resolución del problema de minimización

La definición de la función objetivo en forma cuadrática, convierte el problema de optimización en una minimización no lineal de mínimos cuadrados respecto del error de síntesis. Este error, en primera instancia, depende de las coordenadas generalizadas, y de los parámetros funcionales deseados, por lo que el problema se puede escribir como

$$\text{Minimizar} \quad FES = \frac{1}{2} \varepsilon(\delta_g(\mathbf{q}(\mathbf{z})))^T \varepsilon(\delta_g(\mathbf{q}(\mathbf{z}))) \quad (3-21)$$

$$\text{Sujeto a} \quad \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{z}, \delta_g) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{z}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{q}, \mathbf{z}, \delta_g) \end{Bmatrix} = 0 \quad (3-22)$$

Las restricciones pueden ser eliminadas sustituyéndolas en la ecuación función objetivo (3-21). Las ecuaciones de restricción proporcionan, de forma implícita, la relación  $\delta_g = \delta_g(\mathbf{q}, \mathbf{z})$ , mientras que las ecuaciones cinemáticas lo hacen entre las coordenadas generalizadas y las variables de diseño como  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{z})$ . Agrupando las coordenadas generalizadas y los parámetros funcionales generados en un vector  $\mathbf{w}^T = \{\mathbf{q}^T, \delta_g^T\}$  denominado como vector de variables dependientes, el problema queda establecido como una optimización sin restricciones a las variables de diseño, que se puede escribir de la forma

$$\text{Minimizar} \quad FES = f(\mathbf{w}(\mathbf{z})) = \frac{1}{2} \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z}))^T \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z})) \quad (3-23)$$

Este tipo de problemas cuentan con varios métodos de resolución específicos que aprovechan la forma cuadrática de la función objetivo para mejorar su eficiencia. El más simple de estos métodos es el de Gauss-Newton, el cual presenta además otras interesantes propiedades; es monótonamente convergente [Wilde, 1982], produce puntos estacionarios que son mínimos y no máximos o puntos de inflexión (excepto si la matriz Jacobiana es de rango deficiente), y en las proximidades de la solución converge cuadráticamente. Haciendo uso de su simplicidad, en aras de la claridad expositiva, los desarrollos de la metodología propuesta se basan en la utilización de este método para la resolución del problema (3-23). No obstante, se puede hacer, sin mayor dificultad ni pérdida de generalidad, en base a otros métodos más elaborados y robustos como, por ejemplo, el método de Levenberg-Marquardt.

El método de Gauss-Newton se basa en una linealización del error de síntesis. En el óptimo se cumple la condición de punto estacionario, es decir que el gradiente de la función objetivo respecto de las variables de diseño sea nulo. Esto es:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{w}(\mathbf{z})) &= \frac{1}{2} \nabla \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z}))^T \cdot \{\varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z}))\} + \frac{1}{2} \{\varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z}))\}^T \cdot \nabla \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z})) = \\ &= \nabla \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z}))^T \cdot \{\varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z}))\} = 0 \end{aligned} \quad (3-24)$$

Que se puede escribir como

$$\mathbf{J}^T \cdot \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z})) = 0 \quad (3-25)$$

Donde  $\mathbf{J}^T$  es matriz Jacobiana del error respecto las variables de diseño. En este caso,  $\nabla \varepsilon(\mathbf{z}) = \mathbf{J}$

El vector  $\mathbf{z}^*$  que verifique la ecuación (3-25) será la solución óptima del problema no restringido. Como  $\mathbf{z}$  no aparece de forma explícita y el problema es no lineal es necesario un proceso de resolución iterativo.

Se introduce una aproximación en serie de Taylor del error de síntesis,  $\varepsilon(\mathbf{z})$  hasta la derivada de primer orden.

$$\varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z})) = \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z}))_k + \nabla \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z}))_k \cdot \Delta \mathbf{z} \quad (3-26)$$

El subíndice  $k$  indica que el vector o matriz debe ser evaluado con los valores actuales de las variables de diseño  $\mathbf{z}_k$ . Estos valores actuales se corresponden con los de un mecanismo propuesto inicial, o con los de la iteración actual.

Sustituyendo (3-26) en (3-25)

$$\mathbf{J}^T \cdot [\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}(\mathbf{z}))_k + \nabla \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}(\mathbf{z}))_k \cdot \Delta \mathbf{z}] = 0 \quad (3-27)$$

Que constituye un sistema de ecuaciones lineal

$$[\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k] \Delta \mathbf{z} = -\mathbf{J}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}(\mathbf{z}))_k \quad (3-28)$$

Despejando

$$\Delta \mathbf{z} = -[\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k]^{-1} \mathbf{J}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}(\mathbf{z}))_k \quad (3-29)$$

Desde un punto de vista numérico no es necesario el cálculo explícito de la inversa de la matriz cuadrada  $[\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k]$ , existiendo diversos métodos para la obtención de  $\Delta \mathbf{z}$  como solución del sistema lineal (3-28).

### • *Dirección de búsqueda del óptimo*

El vector  $\Delta \mathbf{z}$ , es el incremento que, respecto del valor actual, debe darse a las variables de diseño para llegar a la solución óptima. Sin embargo como se ha partido de una aproximación de primer orden, la solución no se alcanza directamente, sino que debe lograrse en un proceso iterativo en el que la ecuación (3-29) da lugar a la fórmula recursiva para la obtención de las sucesivas aproximaciones del óptimo.

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - [\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k]^{-1} \mathbf{J}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}(\mathbf{z}))_k \quad (3-30)$$

Una vez obtenidas las nuevas variables de diseño  $\mathbf{z}_{k+1}$  se introducen en las ecuaciones de restricción formando un sistema de ecuaciones determinado

$$\Phi(\mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1}) = 0 \quad (3-31)$$

Obteniendo el valor de las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$ , y de los parámetros funcionales generados  $\boldsymbol{\delta}_g$ .

$$\mathbf{w}^T = \left\{ \mathbf{q}_{k+1}^T \quad \boldsymbol{\delta}_{g, k+1}^T \right\} \quad (3-32)$$

Este proceso se repite hasta que se satisfaga el criterio de parada establecido por el diseñador.

Dependiendo de la complejidad de la función objetivo y de la proximidad al óptimo puede resultar que el incremento de las variables de diseño resulte muy grande y sea imposible que se verifiquen las restricciones para valores factibles de  $\mathbf{q}$  y  $\delta_g$ . Para evitar esto es conveniente que el incremento de  $\mathbf{z}$  sea una fracción del calculado según (3-29), de tal forma que las variables de la nueva iteración se calculen según

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + \alpha_k \cdot \Delta \mathbf{z}_k \quad (3-33)$$

El incremento  $\Delta \mathbf{z}_k$ , calculado según (3-29), puede verse como la dirección de búsqueda del valor óptimo, si bien no es un vector unitario. El tamaño del paso vendrá dado por el módulo de  $\Delta \mathbf{z}_k$  y el factor  $\alpha_k$ , al que denominamos como coeficiente de tamaño del paso de la iteración  $k$ .

#### • *Optimización del coeficiente de tamaño del paso*

El éxito del método de búsqueda lineal depende de la efectividad de elección tanto de la dirección de búsqueda  $\Delta \mathbf{z}_k$  como del como del coeficiente del tamaño de paso  $\alpha_k$ . En lo que respecta a este último factor, se puede optar por considerar un valor constante para todas las iteraciones. Sin embargo, desde un punto de vista de aplicación general del método, esta estrategia no resulta la más apropiada: valores pequeños de  $\alpha$  llevan a tiempos de ejecución del algoritmo demasiado largos. Por el contrario, si el valor es demasiado grande se puede ver comprometida la convergencia, especialmente en las proximidades del óptimo. En consecuencia la mayoría de los métodos de búsqueda lineal existentes utilizan un coeficiente de tamaño de paso variable, determinando su valor óptimo bien de forma exacta o aproximada.

Aprovechando la formulación analítica que utiliza el método propuesto, se plantea llevar a cabo la determinación del coeficiente  $\alpha$  en cada iteración como una optimización local de la función de error de síntesis, similar al utilizado para la obtención de la dirección de búsqueda, pero en este caso dependiente de una sola variable  $\alpha_k$ .

A continuación se muestra la metodología propuesta para la determinación del valor óptimo del coeficiente de tamaño de paso:

Se denomina  $\hat{\mathbf{z}}$  al vector candidato a ser el nuevo valor de las variables de diseño en la siguiente iteración, es decir  $\mathbf{z}_{k+1}$ . El valor de  $\hat{\mathbf{z}}$  depende de  $\alpha_k$  en la forma

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{z}_k + \alpha_k \cdot \Delta \mathbf{z}_k, \quad \alpha > 0 \quad (3-34)$$

El problema de optimización se fórmula como una minimización monovariable

$$\text{Minimizar} \quad f(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}(\alpha))) = f(\alpha) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\alpha)^T \boldsymbol{\varepsilon}(\alpha) \quad (3-35)$$

Al igual que en el caso general, la dirección de optimización se obtiene mediante la condición de óptimo del problema

$$\begin{aligned} \{\nabla f(\alpha)\} &= \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{\varepsilon}(\alpha)^T \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}(\alpha)\} + \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\varepsilon}(\alpha)\}^T \cdot \nabla \boldsymbol{\varepsilon}(\alpha) = \\ &= \nabla \boldsymbol{\varepsilon}(\alpha)^T \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}(\alpha)\} = 0 \end{aligned} \quad (3-36)$$

Que se puede escribir como

$$\mathbf{J}(\alpha)^T \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}(\alpha)\} = 0 \quad (3-37)$$

Donde  $\mathbf{J}(\alpha)$  es la matriz Jacobiana, que en este caso dependen del coeficiente de tamaño del paso.

Para despejar la variación del coeficiente de tamaño de paso se introduce una aproximación en serie de Taylor hasta la primera derivada del término de error de síntesis.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\alpha) = \boldsymbol{\varepsilon}(\alpha)_k + \nabla \boldsymbol{\varepsilon}(\alpha)_k \Delta \alpha \quad (3-38)$$

Sustituyendo en (3-37) se tiene

$$\begin{aligned} \nabla f(\alpha) &= \mathbf{J}(\alpha)^T \cdot \left[ \boldsymbol{\varepsilon}(\alpha)_k + \nabla \boldsymbol{\varepsilon}(\alpha)_k \Delta \alpha \right] = \\ &= \mathbf{J}(\alpha)^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\alpha)_k + \mathbf{J}(\alpha)^T \cdot \mathbf{J}(\alpha)_k \Delta \alpha = 0 \end{aligned} \quad (3-39)$$

Despejando el incremento del coeficiente de tamaño del paso

$$\Delta \alpha = - \left[ \mathbf{J}^T(\alpha)_k \mathbf{J}(\alpha)_k \right]^{-1} \mathbf{J}^T(\alpha)_k \boldsymbol{\varepsilon}(\alpha)_k \quad (3-40)$$

La expresión (3-40) da lugar a la fórmula recursiva que permite calcular sucesivas aproximaciones del valor óptimo de  $\alpha$ .

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \beta \left[ \mathbf{J}^T(\alpha)_k \mathbf{J}(\alpha)_k \right]^{-1} \mathbf{J}^T(\alpha)_k \boldsymbol{\varepsilon}(\alpha)_k \quad (3-41)$$

Donde  $\beta$  es una constante  $<1$ , que actúa a modo de “amortiguamiento” numérico sobre el incremento del coeficiente de tamaño de paso, de forma similar a como lo hace el propio  $\alpha$  sobre el incremento de las variables de diseño.

Con el nuevo valor  $\alpha_{j+1}$  se obtiene  $\hat{\mathbf{z}}_{j+1}$  sustituyendo en (3-34), resolviendo a continuación el sistema de ecuaciones de restricción

$$\Phi(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}_{k+1}), \hat{\mathbf{z}}_{k+1}) = 0 \quad (3-42)$$

Obteniendo el valor de las variables dependientes

$$\mathbf{w}^T = \left\{ \mathbf{q}_{k+1}^T \quad \boldsymbol{\delta}_{g, k+1}^T \right\} \quad (3-43)$$

El proceso iterativo para calcular el valor óptimo del coeficiente  $\alpha$  comienza con un valor nulo de éste. A medida que se va repitiendo se observa como decrece el valor de la función de error de síntesis, *FES*. El proceso se detiene cuando se alcance un  $\alpha$  que haga mínima la *FES*. Dicho valor de  $\alpha$  será el valor óptimo del coeficiente de tamaño de paso para la iteración general  $k$ , y el valor de las variables de diseño para la siguiente iteración,  $\mathbf{z}_{k+1}$  será igual a  $\hat{\mathbf{z}}$  correspondiente a dicho  $\alpha$ . Esto es

$$\sigma \geq f(\mathbf{z}_{k+1}) - f(\mathbf{z}_k) \quad (3-44)$$

### • *Diagrama de flujo del proceso de optimización*

El procedimiento de síntesis óptima planteado se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Se establecen los parámetros funcionales deseados como puntos/posiciones de precisión y las correspondientes posiciones coordinadas del elemento de entrada.
2. Se define un mecanismo inicial,  $\mathbf{z}_0$ , cuyo comportamiento se estime próximo al deseado.

Comienza el proceso iterativo:

3. Se formulan las ecuaciones de restricción en base a  $\alpha$  según (3-34). Se genera el movimiento del mecanismo, obteniendo las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}_k$ , y los parámetros funcionales generados  $\boldsymbol{\delta}_{g,k}$ , para cada posición de precisión.

4. Con los parámetros funcionales generados se evalúa la FES( $\mathbf{z}$ ) según (3-23) y se comprueba el criterio de convergencia. Si se cumple se acaba el proceso y el mecanismo óptimo es el actual. En caso contrario el mecanismo debe ser modificado, según los pasos siguientes
5. Se calcula  $\Delta\mathbf{z}$  a partir de la matriz Jacobiana, según la expresión (3-29).
6. Se obtiene el valor óptimo del coeficiente de tamaño de paso  $\alpha$  en un proceso de optimización unidimensional similar al general (multivariable).
  - a) Se parte de un valor  $\alpha=0$
  - b) Se reformulan las ecuaciones de restricción en función de la única variable  $\alpha$ , sustituyendo dichas variables por su valor candidato según (3-34).
  - c) Se obtienen los vectores de coordenadas generalizadas y parámetros funcionales para todas las posiciones de precisión.
  - d) Se calcula el nuevo valor de  $\alpha$  según (3-41) y con él se evalúa la FES( $\alpha$ ) y se comprueba si es el valor mínimo. Si no es así se vuelven a resolver la ecuaciones de restricción para el nuevo valor de  $\alpha$ , obteniendo los nuevos valores de  $\mathbf{q}$  y  $\delta_g$ . El proceso se repite hasta que se cumpla la condición de mínimo.
7. El valor de las nuevas variables de diseño  $\mathbf{z}_{k+1}$  se obtienen a partir de la optimización del valor de  $\alpha$  según la expresión (3-34)
8. El proceso se repite hasta que se alcanza la convergencia según el criterio de parada aplicado.

Este proceso queda reflejado esquemáticamente en el diagrama de flujo de la Figura 3-2

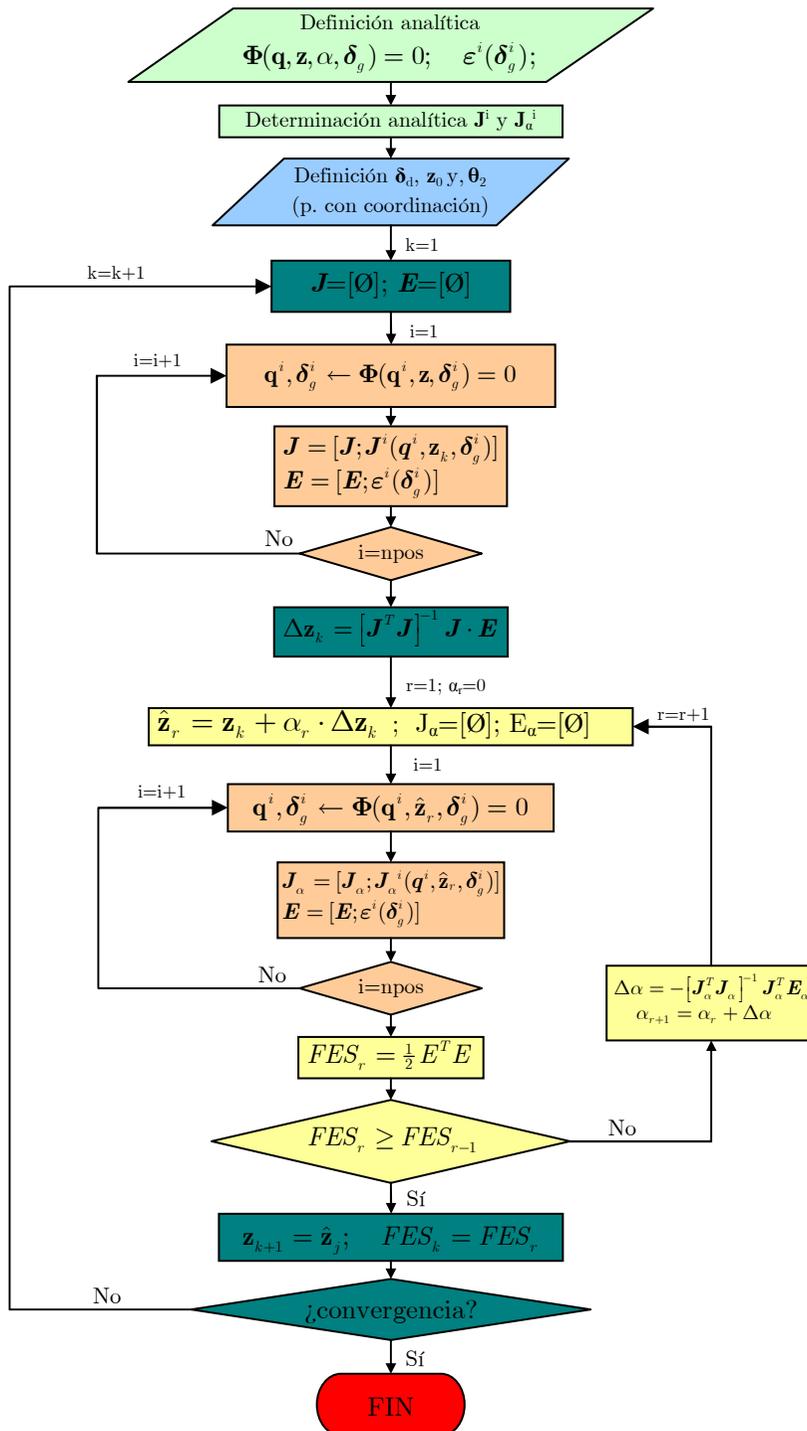


Figura 3-2. Diagrama de flujo del proceso de optimización

### 3.3. Obtención analítica de las matrices Jacobianas

#### 3.3.1. Matriz Jacobiana general

Para realizar el cálculo de la variación de las variables de diseño es necesario el cálculo de la matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$ . Como ya se ha comentado anteriormente, la obtención analítica de esta matriz presenta numerosas ventajas frente a su cálculo aproximado mediante métodos numéricos. En el presente trabajo se presenta una metodología para la obtención analítica de la matriz Jacobiana basada en la distinción establecida entre variables dependientes y variables independientes y la relación matemática que se puede establecer entre éstas y el error de síntesis a través de las ecuaciones de restricción cinemáticas y de síntesis. En la formulación utilizada la matriz Jacobiana representa el gradiente del error de síntesis respecto de las variables de diseño.

$$\mathbf{J} = \left[ \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z}))}{\partial \mathbf{z}} \right] \quad (3-45)$$

Por la regla de la cadena de derivación se puede escribir como el producto de dos términos.

$$\mathbf{J} = \left[ \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z}))}{\partial \mathbf{w}} \right] \left[ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} \right] \quad (3-46)$$

El primero de los multiplicandos es la derivada del error de síntesis, cuya expresión se recoge en (3-10), respecto del vector de variables dependientes formado por las coordenadas generalizadas y parámetros funcionales para todas las posiciones de precisión, según (3-47)

$$\mathbf{w}^T = \left[ \mathbf{q}^{1T} \quad \mathbf{q}^{2T} \quad \dots \quad \mathbf{q}^{nposT} \quad \boldsymbol{\delta}_g^{1T} \quad \boldsymbol{\delta}_g^{2T} \quad \dots \quad \boldsymbol{\delta}_g^{nposT} \right] \quad (3-47)$$

Donde  $npos$  es el número de posiciones de precisión. Por tanto, el primer término de (3-46) será:

$$\left[ \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z}))}{\partial \mathbf{w}} \right]^T = \left[ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{\delta}_g} \right]^T = \left[ \mathbf{0} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{\delta}_g} \right]^T \quad (3-48)$$

Ya que  $\varepsilon$  no depende directamente de las coordenadas generalizadas.

El número de filas de esta matriz es igual al de posiciones de precisión. El número de columnas de la submatriz nula es igual al número de coordenadas generalizadas multiplicado por el número de posiciones de precisión. El

número de columnas de la submatriz derecha será igual al número de posiciones de precisión multiplicado por el número de coordenadas que definen el parámetro funcional en cada posición de precisión.

El segundo miembro de (3-46) puede ser obtenido a partir de la condición nula de la derivada de las ecuaciones de restricción respecto de las variables de diseño. Aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\left[ \frac{d \Phi(\mathbf{w}(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{d \mathbf{z}} \right] = \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{w}} \right] \left[ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} \right] + \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right] = 0 \quad (3-49)$$

De donde despejando

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} \right] = - \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right] = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \quad (3-50)$$

De una forma más desarrollada, el término A, para una posición de precisión genérica  $i$ , será

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{z}_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{z}_k} \\ \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{z}_k} \end{bmatrix} \quad (3-51)$$

y el término B, para una posición de precisión

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{w}_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{w}_k} \\ \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{w}_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{q}_k} & \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \tilde{\delta}_{gk}} \\ \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{q}_k} & \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \tilde{\delta}_{gk}} \end{bmatrix} \quad (3-52)$$

Por lo tanto la matriz Jacobiana queda

$$\mathbf{J}_k = - \left[ \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z}))}{\partial \mathbf{w}} \right] \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right] \quad (3-53)$$

Cabe destacar que la matriz Jacobiana así calculada se ha obtenido bajo la condición de que las derivadas de las ecuaciones de restricción respecto de las variables de diseño sea nula según (3-49). Esto implica que si se parte de un

mecanismo factible, para pequeñas variaciones de las variables de diseño las ecuaciones de restricción se siguen cumpliendo. Como consecuencia, la dirección de búsqueda (3-29) basada en esta matriz Jacobiana mantiene implícitamente la condición del cumplimiento de las ecuaciones de restricción para pequeñas variaciones de  $\mathbf{z}$ . Al plantear el algoritmo de síntesis una búsqueda lineal basada en dicha dirección se evitan, entre otros, el problema del desensamblado del mecanismo y la generación de mecanismos fuera de la región factible durante las iteraciones del proceso de optimización, siempre que el tamaño del paso sea suficientemente pequeño.

### 3.3.2. Matriz Jacobiana para el cálculo del coeficiente de tamaño del paso

El cálculo analítico de esta matriz es semejante al caso general pero con una sola variable independiente. La matriz Jacobiana se define como

$$\mathbf{J}(\alpha) = \left[ \frac{d\varepsilon(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}))}{d\alpha} \right] \quad (3-54)$$

Igualmente, aplicando la regla de derivación de la cadena

$$\mathbf{J}(\alpha) = \left[ \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}))}{\partial \mathbf{w}} \right] \left[ \frac{d\mathbf{w}}{d\alpha} \right] \quad (3-55)$$

El primer término coincide con el correspondiente en la ecuación (3-48) del caso general.

El segundo término de (3-55) se obtiene derivando las ecuaciones de restricción respecto de  $\alpha$ .

$$\left[ \frac{d\Phi(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}), \hat{\mathbf{z}})}{d\alpha} \right] = \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}), \hat{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{w}} \right] \left[ \frac{d\mathbf{w}}{d\alpha} \right] + \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}), \hat{\mathbf{z}})}{\partial \alpha} \right] = 0 \quad (3-56)$$

Despejando

$$\left[ \frac{d\mathbf{w}}{d\alpha} \right] = - \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}), \hat{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}), \hat{\mathbf{z}})}{\partial \alpha} \right] = -\bar{\mathbf{B}}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \quad (3-57)$$

Por tanto, la matriz Jacobiana queda

$$\mathbf{J}(\alpha)_k = - \left[ \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}})_k)}{\partial \mathbf{w}} \right] \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}})_k, \hat{\mathbf{z}}_k)}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}})_k, \hat{\mathbf{z}}_k)}{\partial \alpha} \right] \quad (3-58)$$

De forma más desarrollada, el término  $\bar{\mathbf{A}}$ , para una posición de precisión, será

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}})_k, \hat{\mathbf{z}}_k)^i}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_k, \hat{\mathbf{z}}_k)^i}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}})_k, \hat{\mathbf{z}}_k)^i}{\partial \alpha} \end{bmatrix} \quad (3-59)$$

y el término  $\bar{\mathbf{B}}$

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}})_k, \hat{\mathbf{z}}_k)^i}{\partial \mathbf{w}_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_k, \hat{\mathbf{z}}_k)^i}{\partial \mathbf{w}_k} \\ \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}})_k, \hat{\mathbf{z}}_k)^i}{\partial \mathbf{w}_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_k, \hat{\mathbf{z}}_k)^i}{\partial \mathbf{q}_k} & \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_k, \hat{\mathbf{z}}_k)^i}{\partial \delta_{gk}} \\ \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}})_k, \hat{\mathbf{z}}_k)^i}{\partial \mathbf{q}_k} & \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}})_k, \hat{\mathbf{z}}_k)^i}{\partial \delta_{gk}} \end{bmatrix} \quad (3-60)$$

### 3.4. Tratamiento de restricciones de desigualdad

En el planteamiento de un gran número de problemas de optimización es frecuente la necesidad de incorporar restricciones de desigualdad de diversa índole. En síntesis cinemática de mecanismos un caso típico de aplicación de dichas restricciones consiste en la limitación del tamaño de los elementos para asegurar la funcionalidad del mecanismo. Normalmente dichos tamaños constituyen las variables de diseño del problema de síntesis. Nos encontramos entonces ante uno de los casos más simples de optimización con restricciones, en el que éstas hacen referencia a los límites de las variables de diseño.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar:} & \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeto a:} & \quad a \leq x_i \leq b \end{aligned} \quad (3-61)$$

Sin embargo las restricciones de desigualdad pueden usarse para definir otros requerimientos de diseño más complejos como, por ejemplo, limitar el espacio de trabajo del mecanismo, restringir la velocidad o aceleración máxima de un elemento, etc.

La resolución de este tipo de problemas se puede abordar en ciertas ocasiones mediante métodos de optimización sin restricciones, verificando posteriormente si la solución obtenida está dentro de los rangos permitidos de las variables o no. Sin embargo este planteamiento sólo proporciona una solución si la función objetivo presenta un mínimo local dentro de la región factible. Aún así, exige la ejecución del algoritmo de síntesis desde varios puntos iniciales para poder asegurar la existencia o no de dicho mínimo. Por tanto este planteamiento puede ser computacionalmente costoso y no asegura la obtención de una solución.

Para la obtención de una solución factible de forma general, es recomendable el uso de métodos de resolución específicos para optimización con restricciones. El tratamiento de las restricciones de desigualdad es abordado por estos métodos de dos formas distintas:

- Explícitamente, mediante las denominadas variables holgura (en inglés se denominan variables *slack* o *surplus* según deban ser positivas o negativas respectivamente).
- Implícitamente, a través de métodos que hacen uso del concepto de *restricciones activas*.

Mediante el uso de variables holgura, las ecuaciones de restricción de desigualdad se transforman en igualdades. Por ejemplo, la restricción

$$g(\mathbf{x}) \leq b \quad (3-62)$$

puede escribirse como

$$g(\mathbf{x}) + h = b; \quad h > 0 \quad (3-63)$$

donde  $h$  es la variable holgura, a la que se exige la condición adicional de ser positiva. Esta condición se puede evitar si se usa  $h^2$  como sumando holgura. De esta manera la ecuación se cumple para cualquier valor real de  $h$ , (si bien se incrementa la complejidad de la restricción y haciendo que esta sea, en cualquier caso, no lineal).

$$g(\mathbf{x}) + h^2 = b; \quad \forall h \quad (3-64)$$

Cuando la variable holgura es cero, la restricción se cumple en igualdad y se dice que está *activa*. Para cualquier otro valor real de  $h > 0$ , la restricción es una desigualdad estricta y se dice que la restricción está *inactiva*.

Los métodos basados en las restricciones activas tratan únicamente ecuaciones de igualdad y por tanto sólo consideran las restricciones activas en cada iteración, requiriendo de procedimientos para su identificación.

La gran ventaja del uso de variables holgura, y por la cual a sido elegido para su aplicación en el método de optimización desarrollado en este trabajo, es que permite tratar todas las restricciones, ya sean de igualdad o de desigualdad, de una manera uniforme sin tener que reestructurar el algoritmo base. En contrapartida, además de aumentar las dimensiones del problema, la inclusión de variables holgura en las desigualdades implican que estas restricciones están activas siempre y por tanto tienen que ser derivadas en cada iteración. Sin embargo, la determinación analítica de las derivadas que establece el método propuesto, hace que el cómputo del valor de dichas derivadas en cada iteración suponga un menor esfuerzo computacional que el correspondiente a la identificación de las restricciones activas en cada iteración.

La inclusión de una ecuación de restricción adicional obliga a incrementar en igual número el número de variables dependientes. A este respecto se pueden plantear dos alternativas: Considerar la variable holgura como variable dependiente, o incluirla en el vector de diseño pasando la variable de diseño relacionada a variable dependiente. A continuación se exponen los detalles de implementación y consideraciones sobre cada una de dichas alternativas.

Por claridad del desarrollo, y sin pérdida de generalidad, se considera una única variable dependiente  $q$ , y una sola ecuación de restricción de desigualdad referente al valor mínimo de una variable de diseño

$$z_h \geq z_{h,\min} \quad (3-65)$$

Aplicando la variable holgura

$$\begin{aligned} z_h - h^2 &= z_{h,\min} \quad \text{o bien} \\ z_h - h^2 - z_{h,\min} &= 0 \end{aligned} \quad (3-66)$$

### 3.4.1. Tratamiento de variables holgura como variables dependientes

Por simplicidad, considérese que el problema tiene una única variable dependiente  $q$  y el error de síntesis se define a partir de la misma.

$$\varepsilon = (q - q_d) \quad (3-67)$$

Al existir una única ecuación de restricción, la matriz Jacobiana para una posición de precisión se puede expresar como

$$\mathbf{J}_i = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} \quad (3-68)$$

Desarrollando dicha matriz para las funciones de error y desigualdad dadas, tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon}{\partial q} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial \varepsilon}{\partial h} \end{bmatrix} = [1 \quad 0] \\ \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial h} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial q} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial h} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [1/r \quad 0] \\ \mathbf{J}_i &= -[1/r \quad 0] \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_n} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-69)$$

Se observa en este ejemplo que la matriz Jacobiana no depende de la variable holgura, haciendo que la dirección de búsqueda sea insensible a la restricción de desigualdad. Para evitar esto cuando la variable holgura se considere dentro del vector de variables dependientes se hace necesario incluirla de algún modo dentro de la definición del error de síntesis.

A tal fin se propone el término dado por la expresión siguiente

$$P(h) = \Gamma(\|h\| - h) \quad (3-70)$$

Este término se suma al error de síntesis convencional a modo de función de penalización, dando lugar a un error aumentado.

$$\varepsilon = (q - q_d) + \Gamma(\|h\| - h) \quad (3-71)$$

Si se cumple la restricción de desigualdad relativa a  $h$ , el término es nulo. Sin embargo, para valores negativos de la variable holgura, es proporcional al doble del valor absoluto de la misma, mediante el factor de ponderación  $\Gamma$ .

Con la adición de este nuevo término en el error de síntesis, se consigue que el primer término de la matriz Jacobiana dependa de  $h$ , y con el la propia matriz Jacobiana.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon}{\partial q} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial \varepsilon}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Gamma \left( \frac{\partial \|h\|}{\partial h} - 1 \right) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & \Gamma \left( \frac{\partial \|h\|}{\partial h} - 1 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & -\Gamma \left( \frac{\partial \|h\|}{\partial h} - 1 \right) \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_i &= - \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & -\Gamma \left( \frac{\partial \|h\|}{\partial h} - 1 \right) \end{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_2} - \Gamma \left( \frac{\partial \|h\|}{\partial h} - 1 \right) \right) & \dots & \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_n} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-72)$$

Debido a que el método presentado en este trabajo está basado en el cálculo analítico de la matriz Jacobiana, en la elección del término de penalización  $P(h)$ , se debe hacer bajo la premisa de que sea derivable.

### 3.4.2. Tratamiento de variables holgura como variables de diseño

Asimismo, cabe la posibilidad de considerar las variables holgura dentro del vector de variables independientes o de diseño. Como se debe cumplir la igualdad entre el número total de restricciones y el de variables dependientes es preciso considerar una variable dependiente adicional por cada restricción de desigualdad.

Siguiendo con el ejemplo anterior, al introducir la variable holgura  $h$  en el vector de diseño es necesario promocionar  $z_n$  a variable dependiente, puesto que, por una parte,  $h$  y  $z_n$  no pueden ser simultáneamente variables de diseño, y por otra, para mantener la igualdad entre restricciones y variables dependientes.

$$\mathbf{w}^T = [\mathbf{q} \quad z_h] \quad (3-73)$$

La matriz Jacobiana para una posición de precisión se calcularía según la expresión (3-53), cuyos términos expandidos se muestran a continuación

$$\begin{aligned} J_i &= -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} &= [1 \quad 0] \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{w}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial q} & \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \\ \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} & \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} \end{bmatrix}; \quad \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h}}{\left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} & \frac{-\frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h}}{\left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} \\ -\frac{\frac{\partial \Phi_h}{\partial q}}{\left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} & \frac{\frac{\partial \Phi_i}{\partial q}}{\left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_{h-1}} & \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_{h+1}} & \dots & \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_n} & \frac{\partial \Phi_i}{\partial h} \\ \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_{h-1}} & \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_{h+1}} & \dots & \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_n} & \frac{\partial \Phi_h}{\partial h} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{\frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h}}{\left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} & \frac{-\frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h}}{\left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} \end{bmatrix} \\ J_i &= \begin{bmatrix} \frac{\frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_1}}{\left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} + \frac{-\frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_1}}{\left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} & \dots & \frac{\frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_i}{\partial h}}{\left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} + \frac{-\frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial h}}{\left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-74)$$

Se puede observar que la matriz Jacobiana, y por tanto también la dirección de búsqueda, está afectada por la restricción de desigualdad.

### 3.4.3. Consideraciones sobre las alternativas

Los desarrollos mostrados se basan en el ejemplo de que la desigualdad afecta a un parámetro,  $z_k$ , cuyo valor se mantiene constante durante la iteración. Sin embargo, en muchos problemas es necesario establecer restricciones de desigualdad que afecten a parámetros cuyo valor cambia en cada posición de precisión como, por ejemplo, la limitación del ángulo de presión entre dos barras. En estos casos la consideración de la variable holgura como independiente, no resulta una alternativa directamente aplicable, al existir tantos valores de la variable holgura como posiciones de precisión. Una posible forma de solventar esta deficiencia consiste en introducir el parámetro variable

dentro de la función objetivo en un término que penalice el no cumplimiento de la desigualdad. Para más información véase [de-Juan *et al.*, 2009].

Por su parte, la consideración de las variables holgura como dependientes presenta la desventaja de tener que seleccionar un valor adecuado para el factor de ponderación  $\Gamma$  de la función de penalización. Para forzar el cumplimiento de la restricción se han de tomar valores grandes de este factor (en teoría sería necesario un valor  $\infty$ ). Sin embargo esto puede producir problemas numéricos y se recomienda utilizar un valor pequeño de  $\Gamma$  en las primeras iteraciones e ir aumentándolo geométricamente a medida que el algoritmo se aproxima a la solución óptima. La implementación de esta solución se puede hacer de forma sencilla según (3-71), o mediante un error de síntesis en forma de vector de dos términos, de los cuales el primero se corresponde con el error estructural y el segundo con la función de penalización. Para el ejemplo, dicho vector se escribe como

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} (\mathbf{q}) - (\mathbf{q}_d) \\ \Gamma (\|h\| - h) \end{bmatrix} \quad (3-75)$$

El algoritmo general se puede escribir como:

---

```

 $\mathbf{z}_0 \leftarrow [\mathbf{z}'_0 \ h_0]$  (mecanismo inicial)
while (no se cumpla criterio parada) do
   $k \leftarrow 1$ ;  $\mathbf{J} \leftarrow 0$ ;  $\mathbf{E} \leftarrow 0$ ;
  for  $i = 1$  to  $n_{pos}$ 
     $\mathbf{q}_i \leftarrow \text{solve}(f(\mathbf{z}_k, \theta_{2,i})=0)$ 
     $\mathbf{J}_i, \mathbf{E}_i \leftarrow \mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i), \mathbf{E}_i(\mathbf{q}_i)$ 
     $\mathbf{J} \leftarrow [\mathbf{J}; \mathbf{J}_i]$ 
     $\mathbf{E} \leftarrow [\mathbf{E}; \mathbf{E}_i]$ 
  end for
   $\Gamma \leftarrow \frac{\|\mathbf{E}(1,:)\|}{\|\mathbf{E}(2,:)\|} \cdot r^k$ 
   $\mathbf{E}(2,:) \leftarrow \mathbf{E}(2,:) \cdot \Gamma$ 
   $\Delta \mathbf{z} = -[\mathbf{J}^T \mathbf{J}]^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{E}$ 
   $\alpha^k \leftarrow$  (optimización valor de  $\alpha$ )
   $\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k + \alpha^k \cdot \Delta \mathbf{z}$ 
   $k \leftarrow k + 1$ 
end while

```

---

Como ventajas de esta primera alternativa cabe destacar que con ella se pueden tratar indistintamente restricciones que afecten a parámetros constantes o bien dependientes de la posición de precisión que ocupe el mecanismo. Asimismo, puede elegirse como punto inicial del algoritmo tanto un mecanismo que esté dentro de la zona factible (punto interior), o bien

fuera de ésta (punto exterior). En este último caso, hay que dejar un número suficiente de iteraciones para que la solución óptima alcance la región factible.

### 3.5. Criterio de parada

El método de optimización presentado admite diversos tipos de criterios para detención de las iteraciones, pudiendo coexistir varios de ellos de forma simultánea.

Por tratarse de un método basado en el gradiente se le pueden aplicar los métodos clásicos desarrollados para este tipo de algoritmos. A continuación se resumen los más frecuentemente utilizados. De forma general, establecen que las iteraciones terminan si se llega a:

- **Tamaño de paso mínimo**

$$\begin{aligned}
 \|X_i - X_{i+1}\| &< \varepsilon_a && \text{en forma absoluta} \\
 \frac{\|X_i - X_{i+1}\|}{\|X_i\|} &< \varepsilon_r && \text{relativa} \\
 \|X_i - X_{i+1}\| &< \varepsilon_a + \varepsilon_r \|X_i\| && \text{y mixta}
 \end{aligned} \tag{3-76}$$

- **Mínima variación de la función objetivo**

$$\begin{aligned}
 \|f(X_i) - f(X_{i+1})\| &< \varepsilon_a && \text{en forma absoluta} \\
 \frac{\|f(X_i) - f(X_{i+1})\|}{\|f(X_i)\|} &< \varepsilon_r && \text{relativa} \\
 \|f(X_i) - f(X_{i+1})\| &< \varepsilon_a + \varepsilon_r \|f(X_i)\| && \text{y mixta}
 \end{aligned} \tag{3-77}$$

- **Número máximo de iteraciones**

$$i < n_{\max} \tag{3-78}$$

- **Valor mínimo de la función objetivo**

$$f(X_i) < \varepsilon \tag{3-79}$$

- **Valor mínimo del gradiente de la función objetivo para problemas sin restricciones, o de la función Lagrangiana si es un problema restringido.**

$$\begin{aligned} \|\nabla f(X_i)\| &< \varepsilon \\ \|\nabla L(X_i)\| &< \varepsilon \end{aligned} \quad (3-80)$$

De forma general estos criterios detienen el algoritmo cuando la solución obtenida, sin llegar a ser la óptima, está suficientemente cercana a ésta de forma que, desde un punto de vista técnico, la diferencia entre ambas es despreciable.

El criterio del número máximo de iteraciones trata de evitar la ejecución de algoritmos demasiado lentos en su velocidad de convergencia o incluso un número infinito de iteraciones en aquellos casos en los que la convergencia no se alcanza nunca.

En los ejemplos desarrollados en esta tesis se ha combinado el criterio del número máximo de iteraciones, por los motivos anteriormente señalados, con el de la variación mínima de la función objetivo. Este último criterio se aplica en su forma mixta, exigiéndose su cumplimiento en dos iteraciones consecutivas. De esta manera se evita detenciones prematuras debidas a incrementos puntuales de la función de error. La forma mixta permite evitar iteraciones innecesarias cuando el algoritmo se estanca, y al mismo tiempo detenerlo cuando se llega a una solución suficientemente buena aunque no sea la óptima. Esta condición se formula según la expresión

$$\begin{aligned} \text{if } (i > 2) \quad \& \quad \|FES_{i-1} - FES_i\| < \varepsilon_a + \varepsilon_r \|FES_i\| \quad \& \\ \|FES_{i-2} - FES_{i-1}\| < \varepsilon_a + \varepsilon_r \|FES_{i-1}\| \end{aligned} \quad (3-81)$$

Sin atender a la aplicación a la que se destine el algoritmo de síntesis, se pueden considerar unos valores genéricos para el error absoluto  $\varepsilon_a=10^{-6}$ , y para el error relativo  $\varepsilon_r=10^{-3}$  que corresponde a una variación del 0,1% de FES respecto de la iteración anterior.



## Capítulo 4. Formulación de los problemas de síntesis

### 4.1. Aplicación al problema de generación de trayectorias

#### 4.1.1. Parámetros funcionales

En mecanismos planos, la definición de la trayectoria deseada mediante puntos de precisión supone especificar las coordenadas de dichos puntos, así como el orden en el que deben ser alcanzados por el mecanismo durante su movimiento. En este caso, se han elegido coordenadas cartesianas para definir los puntos de precisión. Por lo tanto, los parámetros funcionales deseados  $\delta_d$  se constituyen en una serie ordenada de pares de coordenadas  $\{x,y\}$  correspondientes a cada punto.

$$\delta_d^T = [\delta_d^{1T} \quad \delta_d^{2T} \quad \dots \quad \delta_d^{iT} \dots \quad \delta_d^{n_{pos}T}] = [x_d^1 \ y_d^1 \ x_d^2 \ y_d^2 \ \dots \ x_d^i \ y_d^i \ \dots \ x_d^{n_{pos}} \ y_d^{n_{pos}}] \quad (4-1)$$

El error de síntesis para una posición genérica  $i$  será

$$\epsilon(\delta_g^i) = (\delta_g^i - \delta_d^i) = \begin{Bmatrix} x_g^i - x_d^i \\ y_g^i - y_d^i \end{Bmatrix} \quad (4-2)$$

y para todas las posiciones de precisión

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}_g) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^1(\boldsymbol{\delta}_g^1) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}_g^2) \\ \dots \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}_g^{npos}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_g^1 - x_d^1 \\ y_g^1 - y_d^1 \\ x_g^2 - x_d^2 \\ y_g^2 - y_d^2 \\ \dots \\ x_g^{npos} - x_d^{npos} \\ y_g^{npos} - y_d^{npos} \end{Bmatrix} \quad (4-3)$$

Por su parte, la función de error de síntesis tendrá la forma

$$\begin{aligned} FES &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}_g)^T \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}_g) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{npos} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}_g^i)^T \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}_g^i) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{npos} [(x_g^i - x_d^i)^2 + (y_g^i - y_d^i)^2] \end{aligned} \quad (4-4)$$

El segundo término en el que se descompone la matriz Jacobiana según (3-48), es igual a:

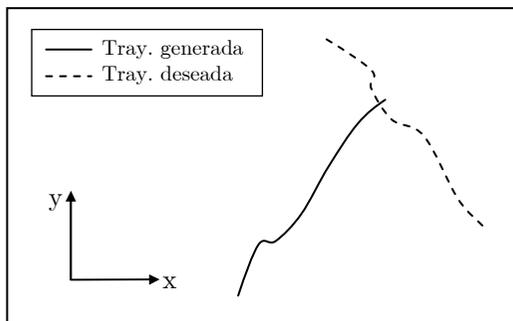
$$\left[ \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\delta}_g} \right]^T = \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial x_g^1} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial y_g^1} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial x_g^2} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial y_g^2} \dots \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial x_g^{npos}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial y_g^{npos}} \right] \quad (4-5)$$

#### 4.1.2. Estrategias para la mejora de la convergencia

En el problema bidimensional de generación de trayectorias, así como en el de guiado de sólido rígido, se pueden introducir una serie de estrategias dentro del algoritmo de resolución con objeto de mejorar la convergencia del método, especialmente en aquellos casos en los que las posiciones de precisión del mecanismo inicial se encuentran bastante alejadas de las deseadas. Las estrategias propuestas consisten en realizar únicamente un reposicionamiento y escalado del mecanismo inicial en las primeras iteraciones. Desde un punto de vista conceptual estas iteraciones sólo difieren de las normales en que no utilizan todas las variables de diseño posibles del mecanismo, sino un determinado subconjunto de ellas.

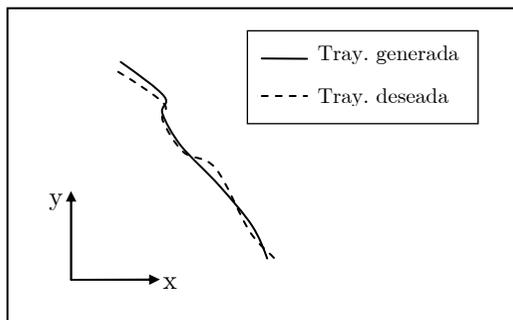
- *Traslación y giro*

Puede darse el caso de que la trayectoria generada por el mecanismo inicial sea semejante a la deseada pero que, sin embargo, se encuentre desplazada e incluso girada respecto de ésta, como el ejemplo mostrado en la Figura 4-1.



**Figura 4-1. Trayectoria deseada y generada inicial**

El procedimiento de optimización se puede modificar para que en las primeras iteraciones únicamente se modifiquen aquellas variables de diseño que definen la posición y orientación del mecanismo. Dependiendo de los parámetros considerados, estas variables hacen referencia bien a las posiciones de los pares fijos, o bien a la posición de uno de ellos y el ángulo de orientación de la barra fija,  $\{x_0, y_0, \theta_1\}$ . Una vez que las trayectorias han alcanzado una posición relativa suficientemente próxima, Figura 4-2, según un criterio de convergencia similar al general, se continúa con las iteraciones considerando ahora la totalidad de variables de diseño del mecanismo.



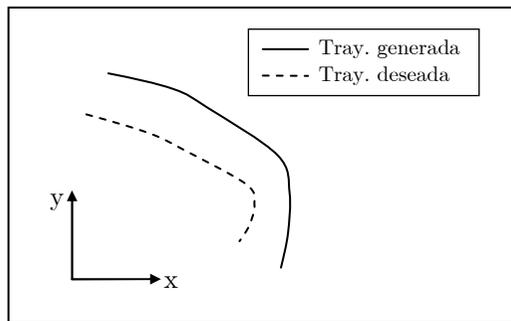
**Figura 4-2. Trayectorias con posición relativa optimizada**

El valor inicial de la función de error de síntesis es muy grande. Sin embargo esto es debido fundamentalmente a la mala disposición relativa entre las curvas. Por tanto con las iteraciones iniciales se reduce fuertemente el error con tiempos de ejecución cortos, al trabajar con un número reducido de

variables. Una vez que la fuente principal de error ha sido eliminada el algoritmo puede concentrarse en aproximar la forma de la curva, obteniendo tiempos totales de convergencia más cortos que si se considerasen todas las variables desde el principio.

- *Escalado*

Igualmente las curvas generadas y deseadas pueden diferir en cuanto a tamaño relativo aunque tengan forma similar, como se muestra en el ejemplo de la Figura 4-3. En este caso se plantea la introducción de un factor de escala sobre las dimensiones de todas las barras del mecanismo. Este factor de escala se considera como una variable de diseño más, con la particularidad de que después de multiplicar las variables relativas al tamaño del mecanismo por la variable de escala, ésta última toma valor unidad en el comienzo de la siguiente iteración.



**Figura 4-3. Trayectorias antes del escalado**

#### 4.1.3. Algoritmo con estrategias de mejora

1. Se establece la trayectoria deseada mediante las coordenadas de los puntos de precisión, así como las posiciones del elemento de entrada que corresponden a cada punto,  $\delta_d$ ,  $\theta_2$  respectivamente.
2. Se estiman las dimensiones de los elementos del mecanismo y se establecen como variables de diseño únicamente aquellas que definen la posición y orientación del mecanismo más la variable de factor de escala. El valor inicial del factor de escala se establece en la unidad. Se denominará  $\mathbf{z}_{teg}$  al vector de variables de diseño, donde el subíndice

hace referencia a *traslación, escalado y giro*, “*teg*”. El vector  $\mathbf{z}_{teg,0}$  hace referencia a su valor inicial.

Comienza el proceso iterativo:

3. Se formulan las ecuaciones de restricción según la expresión (3-15), siendo ahora  $\mathbf{z}_{teg,k}$  las variables independientes. Se genera el movimiento del mecanismo, obteniendo las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}_k$ , y los parámetros funcionales generados  $\delta_{g,k}$ , para cada posición de precisión.
4. Con los parámetros funcionales generados se evalúa la FES según (3-23) y se comprueba el criterio de convergencia, pero con  $\mathbf{z}_{teg}$ . Si se cumple se continúa el proceso a partir del mecanismo actual, considerando ya la totalidad de las variables de diseño según el diagrama de la Figura 3-2. Si no se cumple el criterio de convergencia se calcula el incremento de las variables  $\mathbf{z}_{teg}$ .
5. Se obtiene el valor óptimo del coeficiente de tamaño de paso en un proceso de optimización unidimensional similar al general (multivariable).
  - a) Se parte de un valor  $\alpha=0$
  - b) Se reformulan las ecuaciones de restricción en función de la única variable  $\alpha$ .
  - c) Se obtienen los vectores de coordenadas generalizadas y parámetros funcionales para todas las posiciones de precisión.
  - d) Se calcula el nuevo valor de  $\alpha$  según (3-41) y con él se evalúa la  $FES(\alpha)$  y se comprueba si es el valor mínimo. Si no es así se vuelven a resolver la ecuaciones de restricción para el nuevo valor de  $\alpha$ , obteniendo los nuevos valores de  $\mathbf{q}$  y  $\delta_g$ . El proceso se repite hasta que se cumpla la condición de mínimo.

El valor de las nuevas variables de diseño  $\mathbf{z}_{k+1}$  se obtienen a partir del  $\alpha$  óptimo según la expresión (3-33). Se retorna el coeficiente de escala a valor uno y el proceso se repite desde el punto 3 hasta que se alcance la convergencia planteada en el punto 4.

Este proceso queda reflejado esquemáticamente en el siguiente pseudocódigo

---

**Desarrollos analíticos**

$\mathbf{z}$  (variables de diseño)

$\mathbf{z}_{teg}$  (variables de diseño iteraciones *teg*)

$\Phi$  (ecuaciones de restricción)

$$\varepsilon^i = \left\{ \left( x_g^i - x_d^i \right); \left( y_g^i - y_d^i \right) \right\};$$

$\mathbf{J}_{teg}^i(\Phi^i, \varepsilon^i, \mathbf{z}_{teg})$ ; (jacobiano iteraciones *teg*)

$\mathbf{J}^i(\Phi^i, \varepsilon^i, \mathbf{z})$ ; (jacobiano general)

$\mathbf{J}_\alpha^i(\Phi^i, \varepsilon^i, \alpha)$ ; (jacobiano general opt. tamaño paso)

**Desarrollos numéricos**

$$\delta_d^i \leftarrow \left\{ x_d^i \ Y_d^i \right\} \quad i = 1, 2, \dots, npos \quad (\text{posiciones de precisión})$$

$\mathbf{z}_0$  (mecanismo inicial)

**• Iteraciones *teg***

$k \leftarrow 1$ ;

**while** (no se cumpla criterio parada general) **do**

$\mathbf{J}_{teg} \leftarrow 0$ ;  $\mathbf{E}_{teg} \leftarrow 0$ ;

**for**  $i=1$  **to**  $npos$

$\mathbf{q}_i, \delta_g^i \leftarrow \text{solve}(f(\mathbf{z}_k, \Delta\theta_2^i)=0)$

$\mathbf{J}_{teg} \leftarrow [\mathbf{J}_{teg}; \mathbf{J}_{teg}^i(\mathbf{q}_i, \delta_g^i)]$ ;  $\mathbf{E}_{teg} \leftarrow [\mathbf{E}_{teg}; \varepsilon^i(\mathbf{q}_i, \delta_g^i)]$ ;

**end for**

$$\Delta\mathbf{z} = -[\mathbf{J}_{teg}^T \mathbf{J}_{teg}]^{-1} \mathbf{J}_{teg}^T \mathbf{E}$$

$$\mathbf{z}_{k+1} \leftarrow \mathbf{z}_k + \alpha_k \cdot \Delta\mathbf{z}$$

$k \leftarrow k + 1$

**end while**

**• Iteraciones generales**

**while** (no se cumpla criterio parada general) **do**

$\mathbf{J} \leftarrow 0$ ;  $\mathbf{E} \leftarrow 0$ ;

**for**  $i=1$  **to**  $npos$

$\mathbf{q}_i, \delta_g^i \leftarrow \text{solve}(f(\mathbf{z}_k, \Delta\theta_2^i)=0)$

$\mathbf{J} \leftarrow [\mathbf{J}; \mathbf{J}(\mathbf{q}_i, \delta_g^i)]$ ;  $\mathbf{E} \leftarrow [\mathbf{E}; \varepsilon^i(\mathbf{q}_i, \delta_g^i)]$ ;

**end for**

$$\Delta\mathbf{z} \leftarrow -[\mathbf{J}^T \mathbf{J}]^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{E};$$

$r \leftarrow 1$ ;

---

```

while (no se cumpla criterio parada  $\alpha$ ) do
   $\mathbf{J}_\alpha \leftarrow 0$ ;  $\mathbf{E}_\alpha \leftarrow 0$ ;
  for  $i=1$  to  $n_{pos}$ 
     $\mathbf{q}_i, \delta_g^i \leftarrow solve(f(\mathbf{z}_k, \Delta\theta_2^i)=0)$ 
     $\mathbf{J}_\alpha \leftarrow [\mathbf{J}_\alpha; \mathbf{J}_\alpha^i(\mathbf{q}_i, \delta_g^i)]$ ;  $\mathbf{E}_\alpha \leftarrow [\mathbf{E}_\alpha; \varepsilon_\theta^i(\mathbf{q}_i, \delta_g^i)]$ ;
  end for
   $\alpha = \alpha + \beta \left( -[\mathbf{J}_\alpha^T \mathbf{J}_\alpha]^{-1} \mathbf{J}_\alpha^T \mathbf{E}_\alpha \right)$ ;
   $r = r + 1$ ;
end while
 $\mathbf{z} = \mathbf{z} + \alpha \cdot \Delta\mathbf{z}$ ;
 $iter = iter + 1$ ;
end while

```

---

#### 4.1.4. Ejemplo de formulación para el mecanismo cuadrilátero articulado

En este apartado se desarrolla la formulación del método de síntesis dimensional óptima para el problema de generación de trayectorias de un mecanismo tipo cuadrilátero articulado. Se trata de encontrar las dimensiones del mecanismo (variables de diseño  $\mathbf{z}$ ) que hagan mínima la diferencia entre la trayectoria deseada y generada.

El mecanismo está formado por elementos binarios modelizados mediante un vector, cuyo módulo representa su longitud, y el ángulo la orientación respecto del sistema de referencia absoluto. De esta manera la posición de un elemento queda establecida por las coordenadas del punto origen del vector y su ángulo de orientación, según puede verse en la Figura 4-4. El elemento acoplador está formado por tres vectores formando un triángulo, cuyo vértice P representa el punto del acoplador que debe seguir la trayectoria deseada.

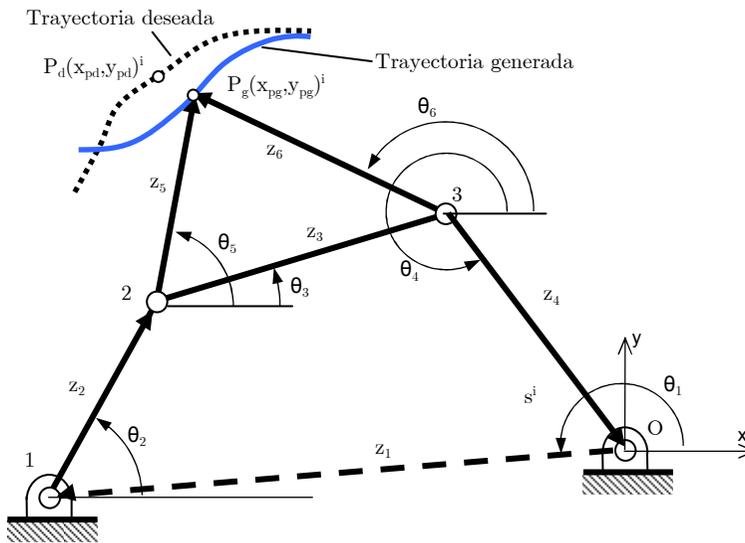


Figura 4-4. Esquema del mecanismo cuadrilátero articulado

Se definen los puntos de la trayectoria,  $\{x_d^i, y_d^i\}$ , en el orden en que deben ser recorridos, así como las posiciones angulares del elemento de entrada,  $\theta_2$ , que corresponden con cada punto de precisión. En la Tabla 4-1 se expresan estos requisitos de diseño.

Posición barra de entrada	Posición punto P	
$\theta_2$	$x_d$	$y_d$
$\theta_2^1$	$x_d^1$	$y_d^1$
$\theta_2^2$	$x_d^2$	$y_d^2$
...	...	...
$\theta_2^{npos}$	$x_d^{npos}$	$y_d^{npos}$

Tabla 4-1: Requisitos de diseño planteamiento en posiciones absolutas.

Donde  $npos$  es el número de posiciones de precisión definidas sobre la trayectoria deseada.

El vector de variables de diseño  $\mathbf{z}$ , recoge las dimensiones de todas las barras,  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ ; la posición y orientación de la barra fija (y así las del mecanismo),  $x_0, y_0, \theta_1$ . En total se tienen nueve variables de diseño.

$$\mathbf{z}^T = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \ z_5 \ z_6 \ \theta_1 \ x_0 \ y_0] \quad (4-6)$$

Los ángulos de orientación de las barras móviles son coordenadas generalizadas, y tomarán un valor distinto para cada punto de precisión. El vector de coordenadas generalizadas para una posición de precisión genérica “ $i$ ”.

$$\mathbf{q}^{iT} = \left[ \theta_2^i \ \theta_3^i \ \theta_4^i \ \theta_5^i \ \theta_6^i \right] \quad (4-7)$$

Como el mecanismo es de un grado de libertad, sólo una de las coordenadas será independiente. En este caso se elige como coordenada independiente  $\theta_2$  puesto que su valor está prefijado para cada punto de precisión. Por tanto, serán necesarias cuatro ecuaciones de restricción cinemáticas que relacionen las coordenadas independientes con la dependiente. Estas restricciones se pueden obtener de las ecuaciones de lazo cerrado del cuadrilátero y del elemento acoplador

$$\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4 = 0 \quad (4-8)$$

$$\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_5 + \mathbf{z}_6 = 0 \quad (4-9)$$

Para un posición genérica “ $i$ ” las ecuaciones de restricción se formulan como

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{z})^i = \left\{ \begin{array}{l} z_1 \cos \theta_1^i + z_2 \cos \theta_2^i + z_3 \cos \theta_3^i + z_4 \cos \theta_4^i \\ z_1 \sin \theta_1^i + z_2 \sin \theta_2^i + z_3 \sin \theta_3^i + z_4 \sin \theta_4^i \\ z_3 \cos \theta_3^i - z_5 \cos \theta_5^i + z_6 \cos \theta_6^i \\ z_3 \sin \theta_3^i - z_5 \sin \theta_5^i + z_6 \sin \theta_6^i \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (4-10)$$

Para el conjunto de ecuaciones de restricción cinemáticas para todas las posiciones de precisión será

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{z}) = \left\{ \begin{array}{l} C(\mathbf{q}^1, \mathbf{z})^1 \\ C(\mathbf{q}^2, \mathbf{z})^2 \\ \dots \\ C(\mathbf{q}^{npos}, \mathbf{z})^{npos} \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (4-11)$$

Conocidas las variables de diseño y la posición del elemento de entrada correspondiente a cada punto de precisión  $\theta_2^i$ , el sistema es determinado, pudiéndose obtener el resto de coordenadas generalizadas en cada posición.

Las coordenadas de los puntos de precisión a lo largo de la trayectoria constituyen los parámetros funcionales deseados. Así para una posición de precisión genérica se escribirán

$$\delta_d^{iT} = \begin{bmatrix} x_d^i & y_d^i \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

y para todas las posiciones de precisión,

$$\delta_d^T = \begin{bmatrix} \delta_d^1 & \delta_d^2 & \dots & \delta_d^{npos} \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

De forma análoga los parámetros funcionales generados para una posición definida del elemento de entrada serán las coordenadas del punto P del acoplador.

$$\delta_g^{iT} = \begin{bmatrix} x_g^i & y_g^i \end{bmatrix} \quad (4-14)$$

y el vector total de parámetros funcionales generados queda como

$$\delta_g^T = \begin{bmatrix} \delta_g^1 & \delta_g^2 & \dots & \delta_g^{npos} \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

El error de síntesis para una posición genérica “i” será por tanto

$$\epsilon^i(\delta_g^i) = \delta_g^i - \delta_d^i = \begin{Bmatrix} x_g^i - x_d^i \\ y_g^i - y_d^i \end{Bmatrix} \quad (4-16)$$

y el de todas las posiciones de precisión,

$$\epsilon(\delta_g) = \begin{Bmatrix} \epsilon^1(\delta_g^1) \\ \epsilon^2(\delta_g^2) \\ \dots \\ \epsilon^{npos}(\delta_g^{npos}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_g^1 - x_d^1 \\ y_g^1 - y_d^1 \\ x_g^2 - x_d^2 \\ y_g^2 - y_d^2 \\ \dots \\ x_g^{npos} - x_d^{npos} \\ y_g^{npos} - y_d^{npos} \end{Bmatrix} \quad (4-17)$$

Los parámetros funcionales generados son dos nuevas incógnitas adicionales por cada posición de precisión. Es necesario, por tanto, definir dos ecuaciones de restricción (de síntesis) para poder resolver dichas incógnitas. Estas ecuaciones se pueden establecer a partir de la relación entre el punto origen de

la barra fija y el punto P del acoplador a través de los elementos del cuadrilátero. Para una posición genérica, quedan de la forma

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}^i, \mathbf{z}, \delta_g^i)^i = \begin{Bmatrix} x_g^i - z_1 \cos \theta_1^i - z_2 \cos \theta_2^i - z_5 \cos \theta_5^i - x_0 \\ y_g^i - z_1 \sin \theta_1^i - z_2 \sin \theta_2^i - z_5 \sin \theta_5^i - y_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4-18)$$

El conjunto de restricciones de síntesis vendrá expresado por

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}, \mathbf{z}, \delta_g) = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{q}^1, \mathbf{z}, \delta_g^1)^1 \\ \mathbf{S}(\mathbf{q}^2, \mathbf{z}, \delta_g^2)^2 \\ \dots \\ \mathbf{S}(\mathbf{q}^{npos}, \mathbf{z}, \delta_g^{npos}) \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4-19)$$

La función objetivo será la diferencia entre los puntos de la trayectoria generada por el mecanismo en las posiciones fijadas del elemento de entrada y los puntos de la trayectoria deseada.

$$FES = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{npos} [(x_g^i(\theta_2^i) - x_d^i(\theta_2^i))^2 + (y_g^i(\theta_2^i) - y_d^i(\theta_2^i))^2] \quad (4-20)$$

La separación de variables en dependientes ( $\mathbf{z}$ ) e independientes ( $\mathbf{w}^T = \{\mathbf{q}_i, \delta_{gi}^i\}$ ) que propone el método, permite reformular el problema de síntesis como una optimización sin restricciones según la expresión (3-23).

Tomando como método de resolución el de Gauss-Newton, obtenemos la fórmula para el cálculo de  $\Delta \mathbf{z}$  según (3-29), que por conveniencia se repite a continuación.

$$\Delta \mathbf{z} = -[\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k]^{-1} \mathbf{J}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}(\mathbf{z}))_k \quad (4-21)$$

Como paso previo para obtener  $\Delta \mathbf{z}$  se debe calcular la matriz Jacobiana. La expresión (3-53) nos proporciona la forma de la misma. Recordando dicha expresión se tiene

$$\mathbf{J}_k = - \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{w}(\mathbf{z}))}{\partial \mathbf{w}} \right] \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right] \quad (4-22)$$

En base a las variables utilizadas en el ejemplo se determina la expresión analítica de cada una de los tres términos cuyo producto permite formar la matriz Jacobiana para una posición de precisión.

El primer término se puede calcular directamente. Teniendo en cuenta que  $\mathbf{w}^{iT} = [\mathbf{q}^{iT}, \boldsymbol{\delta}_g^{iT}] = [\theta_3^i, \theta_4^i, \theta_5^i, \theta_6^i, x_g^i, y_g^i]$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}^{iT} = [(x_g^i - x_d^i) \ (y_g^i - y_d^i)]$ , para una posición genérica “ $i$ ” tendrá la forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{w}(\mathbf{z}))}{\partial \mathbf{w}^i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

y para todas las posiciones,  $\mathbf{w}^T = [\mathbf{q}^{1T} \ \mathbf{q}^{2T} \ \dots \ \mathbf{q}^{n\text{pos}T} \ \boldsymbol{\delta}_g^{1T} \ \boldsymbol{\delta}_g^{2T} \ \dots \ \boldsymbol{\delta}_g^{n\text{pos}T}]$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\boldsymbol{\varepsilon}^{1T} \ \boldsymbol{\varepsilon}^{2T} \ \dots \ \boldsymbol{\varepsilon}^{n\text{pos}T}]$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}(\mathbf{z}))}{\partial \mathbf{w}} \right] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{q}^T} & \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\delta}_g^T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\delta}_g^T} \end{bmatrix} = \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{n\text{pos} \times q} & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{2 \times n\text{pos}} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4-24)$$

A continuación se determina el siguiente término de la matriz Jacobiana

$$\left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \quad (4-25)$$

Para cada posición de precisión se tiene, recordando (3-52)

$$\left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{w}_k} \right]^{-1} = \left[ \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{w}_k} \right]^{-1} = \left[ \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{q}_k} \quad \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \boldsymbol{\delta}_{gk}}}{\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{q}_k} \quad \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \boldsymbol{\delta}_{gk}}} \right]^{-1} \quad (4-26)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de restricción cinemáticas definidas en (4-10), el vector de parámetros deseados para la posición “ $i$ ” (4-12), y el vector de coordenadas generalizadas para una posición (4-7), los dos primeros términos de (4-26) serán de la forma

$$\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{q}_k} = \begin{bmatrix} -z_3 \sin \theta_3^i & -z_4 \sin \theta_4^i & 0 & 0 \\ z_3 \cos \theta_3^i & z_4 \cos \theta_4^i & 0 & 0 \\ -z_3 \sin \theta_3^i & 0 & z_5 \sin \theta_5^i & z_6 \sin \theta_6^i \\ z_3 \cos \theta_3^i & 0 & -z_5 \cos \theta_5^i & -z_6 \cos \theta_6^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-27)$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \delta_{gk}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-28)$$

Según las ecuaciones de restricción formuladas en (4-18), el resto de términos de (4-26) serán

$$\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{q}_k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & z_5 \sin \theta_5^i & 0 \\ 0 & 0 & -z_5 \cos \theta_5^i & 0 \end{bmatrix} \quad (4-29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \delta_{gk}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-30)$$

Combinando (4-27) (4-28) (4-29) y (4-30) el segundo término de la matriz Jacobiana, para una posición genérica, queda finalmente como

$$\left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{w}_k} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} -z_3 \sin \theta_3^i & -z_4 \sin \theta_4^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_3 \cos \theta_3^i & z_4 \cos \theta_4^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z_3 \sin \theta_3^i & 0 & z_5 \sin \theta_5^i & -z_6 \sin \theta_6^i & 0 & 0 \\ z_3 \cos \theta_3^i & 0 & -z_5 \cos \theta_5^i & z_6 \cos \theta_6^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_5 \sin \theta_5^i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -z_5 \cos \theta_5^i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-31)$$

Finalmente, el tercer término de (4-22) es la derivada del conjunto de ecuaciones de restricción respecto de las variables de diseño. Para una posición genérica, se puede descomponer en dos términos como aparece en la ecuación (3-51) que, por conveniencia, se repite a continuación

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{z}_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{z}_k} \\ \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{z}_k} \end{bmatrix} \quad (4-32)$$

Desarrollando el primero de los términos queda

$$\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{z}_k} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1^i & \cos \theta_2^i & \cos \theta_3^i & \cos \theta_4^i & 0 & 0 & -z_1 \sin \theta_1^i & 0 & 0 \\ \sin \theta_1^i & \sin \theta_2^i & \sin \theta_3^i & \sin \theta_4^i & 0 & 0 & z_1 \cos \theta_1^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_3^i & 0 & -\cos \theta_5^i & \cos \theta_6^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta_3^i & 0 & -\sin \theta_5^i & \sin \theta_6^i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-33)$$

Y el segundo

$$\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{z}_k} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_1^i & -\cos \theta_2^i & 0 & 0 & -\cos \theta_5^i & 0 & z_1 \sin \theta_1^i & -1 & 0 \\ -\sin \theta_1^i & -\sin \theta_2^i & 0 & 0 & -\sin \theta_5^i & 0 & -z_1 \cos \theta_1^i & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4-34)$$

Combinando (4-33) y (4-34), la ecuación (4-32) queda finalmente

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{q}_k, \mathbf{z}_k)^i}{\partial \mathbf{z}_k} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1^i & \cos \theta_2^i & \cos \theta_3^i & \cos \theta_4^i & 0 & 0 & -z_1 \sin \theta_1^i & 0 & 0 \\ \sin \theta_1^i & \sin \theta_2^i & \sin \theta_3^i & \sin \theta_4^i & 0 & 0 & z_1 \cos \theta_1^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_3^i & 0 & \cos \theta_5^i & \cos \theta_6^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta_3^i & 0 & \sin \theta_5^i & \sin \theta_6^i & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \theta_1^i & -\cos \theta_2^i & 0 & 0 & -\cos \theta_5^i & 0 & z_1 \sin \theta_1^i & -1 & 0 \\ -\sin \theta_1^i & -\sin \theta_2^i & 0 & 0 & -\sin \theta_5^i & 0 & -z_1 \cos \theta_1^i & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4-35)$$

Hay que tener en cuenta que para el cálculo de la matriz Jacobiana según (4-22) es necesario calcular los términos (4-31) y (4-35) para todas las posiciones de precisión, invirtiendo el correspondiente a (4-31).

• *Cálculo del coeficiente de tamaño de paso*

Como se ha mostrado anteriormente, el cálculo de este coeficiente se hace en base a la minimización de la expresión (3-35). En este proceso de optimización la única variable independiente es el coeficiente de tamaño de paso. Se crean unas variables de diseño “locales” a partir las variables de diseño y el valor actual del coeficiente  $\alpha$ , según la expresión

$$\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \\ \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \\ \hat{z}_5 \\ \hat{z}_6 \\ \hat{\theta}_1 \\ \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + \alpha \cdot d_1 \\ z_2 + \alpha \cdot d_2 \\ z_3 + \alpha \cdot d_3 \\ z_4 + \alpha \cdot d_4 \\ z_5 + \alpha \cdot d_5 \\ z_6 + \alpha \cdot d_6 \\ \theta_1 + \alpha \cdot d_7 \\ x_0 + \alpha \cdot d_8 \\ y_0 + \alpha \cdot d_9 \end{bmatrix} \quad (4-36)$$

Dentro del proceso de optimización de  $\alpha$ , las restricciones cinemáticas en una posición genérica serán

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{z}})^i = \begin{Bmatrix} \hat{z}_1 \cos \hat{\theta}_1 + \hat{z}_2 \cos \theta_2^i + \hat{z}_3 \cos \theta_3^i + \hat{z}_4 \cos \theta_4^i \\ \hat{z}_1 \sin \hat{\theta}_1 + \hat{z}_2 \sin \theta_2^i + \hat{z}_3 \sin \theta_3^i + \hat{z}_4 \sin \theta_4^i \\ \hat{z}_3 \cos \theta_3^i - \hat{z}_5 \cos \theta_5^i + \hat{z}_6 \cos \theta_6^i \\ \hat{z}_3 \sin \theta_3^i - \hat{z}_5 \sin \theta_5^i + \hat{z}_6 \sin \theta_6^i \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4-37)$$

Y las de síntesis

$$\mathbf{S}(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}), \hat{\mathbf{z}})^i = \begin{Bmatrix} x_{pg}^i - \hat{z}_1 \cos \hat{\theta}_1 - \hat{z}_2 \cos \theta_2^i - \hat{z}_5 \cos \theta_5^i - \hat{x}_0 \\ y_{pg}^i - \hat{z}_1 \sin \hat{\theta}_1 - \hat{z}_2 \sin \theta_2^i - \hat{z}_5 \sin \theta_5^i - \hat{y}_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4-38)$$

Por tanto, el conjunto de restricciones para una posición genérica  $i$  queda como

$$\Phi(\mathbf{w}_k, \hat{\mathbf{z}}_k)^i = \begin{Bmatrix} \hat{z}_1 \cos \hat{\theta}_1 + \hat{z}_2 \cos \theta_2^i + \hat{z}_3 \cos \theta_3^i + \hat{z}_4 \cos \theta_4^i \\ \hat{z}_1 \sin \hat{\theta}_1 + \hat{z}_2 \sin \theta_2^i + \hat{z}_3 \sin \theta_3^i + \hat{z}_4 \sin \theta_4^i \\ \hat{z}_3 \cos \theta_3^i - \hat{z}_5 \cos \theta_5^i + \hat{z}_6 \cos \theta_6^i \\ \hat{z}_3 \sin \theta_3^i - \hat{z}_5 \sin \theta_5^i + \hat{z}_6 \sin \theta_6^i \\ x_{pg}^i - \hat{z}_1 \cos \hat{\theta}_1 - \hat{z}_2 \cos \theta_2^i - \hat{z}_5 \cos \theta_5^i - \hat{x}_0 \\ y_{pg}^i - \hat{z}_1 \sin \hat{\theta}_1 - \hat{z}_2 \sin \theta_2^i - \hat{z}_5 \sin \theta_5^i - \hat{y}_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4-39)$$

Las sucesivas aproximaciones del valor óptimo de  $\alpha$  se obtienen mediante la fórmula (3-41). La aplicación de esta expresión requiere el cálculo de la matriz Jacobiana dada en (3-58) y que se repite a continuación

$$\mathbf{J}(\alpha)_k = - \left[ \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}})_k)}{\partial \mathbf{w}} \right] \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}})_k, \hat{\mathbf{z}}_k)}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}})_k, \hat{\mathbf{z}}_k)}{\partial \alpha} \right] \quad (4-40)$$

El primer término coincide con el correspondiente de la expresión (3-53), por lo que no es necesario repetir el cálculo. Bastará con utilizar la expresión (4-24) para una posición de precisión genérica.

El segundo término de (4-40), la derivada de las restricciones cinemáticas respecto de las variables dependientes, se calcula a partir de (3-60) para una posición genérica. Cada uno de los cuatro términos de esta expresión queda

$$\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_k, \hat{\mathbf{z}}_k)^i}{\partial \mathbf{q}_k} = \begin{bmatrix} -\hat{z}_3 \sin \theta_3^i & -\hat{z}_4 \sin \theta_4^i & 0 & 0 \\ \hat{z}_3 \cos \theta_3^i & \hat{z}_4 \cos \theta_4^i & 0 & 0 \\ -\hat{z}_3 \sin \theta_3^i & 0 & \hat{z}_5 \sin \theta_5^i & \hat{z}_6 \sin \theta_6^i \\ \hat{z}_3 \cos \theta_3^i & 0 & -\hat{z}_5 \cos \theta_5^i & -\hat{z}_6 \cos \theta_6^i \end{bmatrix} \quad (4-41)$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_k, \hat{\mathbf{z}}_k)^i}{\partial \delta_{gk}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-42)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{w}_k, \hat{\mathbf{z}}_k)^i}{\partial \mathbf{q}_k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \hat{z}_5 \sin \theta_5^i & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{z}_5 \cos \theta_5^i & 0 \end{bmatrix} \quad (4-43)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{w}_k, \hat{\mathbf{z}}_k)^i}{\partial \delta_{gk}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-44)$$

Ensamblando las cuatro matrices anteriores se obtiene el segundo término de  $\mathbf{J}(\alpha)_k$ , para una posición.

$$\left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}_k, \hat{\mathbf{z}}_k)^i}{\partial \mathbf{w}_k} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} -\hat{z}_3 \sin \theta_3^i & -\hat{z}_4 \sin \theta_4^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{z}_3 \cos \theta_3^i & \hat{z}_4 \cos \theta_4^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{z}_3 \sin \theta_3^i & 0 & \hat{z}_5 \sin \theta_5^i & \hat{z}_6 \sin \theta_6^i & 0 & 0 \\ \hat{z}_3 \sin \theta_3^i & 0 & -\hat{z}_5 \sin \theta_5^i & -\hat{z}_6 \sin \theta_6^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{z}_5 \sin \theta_5^i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{z}_5 \sin \theta_5^i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (4-45)$$

Por último, el tercer término de (4-40) que representa las derivadas de las restricciones respecto del coeficiente de tamaño de paso, se calcula, para una posición genérica, a partir de (3-59). Los dos términos de esta expresión toman la forma

$$\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{z}})^i}{\partial \alpha_k} = \begin{bmatrix} d_{1k} \cos \hat{\theta}_1 - d_{7k} \hat{z}_1 \sin \hat{\theta}_1 + d_{2k} \cos \theta_2^i + d_{3k} \cos \theta_3^i + d_{4k} \cos \theta_4^i \\ d_{1k} \sin \hat{\theta}_1 + d_{7k} \hat{z}_1 \cos \hat{\theta}_1 + d_{2k} \sin \theta_2^i + d_{3k} \sin \theta_3^i + d_{4k} \sin \theta_4^i \\ d_{3k} \cos \theta_3^i - d_{5k} \cos \theta_5^i + d_{6k} \cos \theta_6^i \\ d_{3k} \sin \theta_3^i - d_{5k} \sin \theta_5^i + d_{6k} \sin \theta_6^i \end{bmatrix} \quad (4-46)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{q}^i, \hat{\mathbf{z}}, \delta_g^i)^i}{\partial \alpha_k} = \begin{bmatrix} -d_{1k} \cos \hat{\theta}_1 + d_{7k} \hat{z}_1 \sin \hat{\theta}_1 - d_{2k} \cos \theta_2^i - d_{5k} \cos \theta_5^i - d_{8k} \\ -d_{1k} \sin \hat{\theta}_1 - d_{7k} \hat{z}_1 \cos \hat{\theta}_1 - d_{2k} \sin \theta_2^i - d_{5k} \sin \theta_5^i - d_{9k} \end{bmatrix} \quad (4-47)$$

Ensamblando ambas matrices, el tercer término de (4-40) queda

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{w}_k, \hat{\mathbf{z}}_k)^i}{\partial \alpha_k} = \begin{bmatrix} d_{1k} \cos \hat{\theta}_1 - d_{7k} \hat{z}_1 \sin \hat{\theta}_1 + d_{2k} \cos \theta_2^i + d_{3k} \cos \theta_3^i + d_{4k} \cos \theta_4^i \\ d_{1k} \sin \hat{\theta}_1 + d_{7k} \hat{z}_1 \cos \hat{\theta}_1 + d_{2k} \sin \theta_2^i + d_{3k} \sin \theta_3^i + d_{4k} \sin \theta_4^i \\ d_{3k} \cos \theta_3^i - d_{5k} \cos \theta_5^i + d_{6k} \cos \theta_6^i \\ d_{3k} \sin \theta_3^i - d_{5k} \sin \theta_5^i + d_{6k} \sin \theta_6^i \\ -d_{1k} \cos \hat{\theta}_1 + d_{7k} \hat{z}_1 \sin \hat{\theta}_1 - d_{2k} \cos \theta_2^i - d_{5k} \cos \theta_5^i - d_{8k} \\ -d_{1k} \sin \hat{\theta}_1 - d_{7k} \hat{z}_1 \cos \hat{\theta}_1 - d_{2k} \sin \theta_2^i - d_{5k} \sin \theta_5^i - d_{9k} \end{bmatrix} \quad (4-48)$$

Los distintos términos de (4-40) se calculan a partir de las expresiones (4-24) (4-45) y (4-48) para todas las posiciones de precisión.

El problema de generación de trayectorias con coordinación se puede plantear igualmente en términos relativos a los incrementos del ángulo de posición de la barra de entrada en lugar de hacerlo en forma absoluta, según se muestran en la siguiente tabla

Posición relativa barra de entrada	Posición punto P	
	$\mathbf{x}_d$	$\mathbf{y}_d$
$\Delta\theta_2$	$\mathbf{x}_d^1$	$\mathbf{y}_d^1$
0	$\mathbf{x}_d^2$	$\mathbf{y}_d^2$
$\Delta\theta_2^2$	...	...
...	$\mathbf{x}_d^{\text{npos}}$	$\mathbf{y}_d^{\text{npos}}$

**Tabla 4-2. Requisitos de diseño planteamiento en posiciones relativas.**

La posición de la barra de entrada se define como  $\theta_2 = \theta_{20} + \Delta\theta_2$ . Donde  $\theta_{20}$  es el ángulo de posición de la barra de entrada correspondiente al primer punto de precisión y  $\Delta\theta_2$  representa el incremento del ángulo respecto a esa posición inicial. Este ángulo constituye una variable de diseño, por lo que el vector de diseño queda como

$$\mathbf{z}^T = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \ z_5 \ z_6 \ \theta_1 \ x_0 \ y_0 \ \theta_{20}] \quad (4-49)$$

La coordenada independiente será en este caso  $\Delta\theta_2$ , mientras que las variables dependientes siguen siendo las mismas  $\mathbf{w}^{iT} = [\theta_3^i, \theta_4^i, \theta_5^i, \theta_6^i, x_g^i, y_g^i]$ . Las ecuaciones de restricción se pueden poner en forma general como

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k)^i = & \\
= & \left\{ \begin{array}{l} (z_1 + \alpha \cdot d_{1k}) \cos \theta_1 + (z_2 + \alpha \cdot d_{2k}) \cos(\theta_{20} + \Delta\theta_2^i) + (z_3 + \alpha \cdot d_{3k}) \cos \theta_3^i + (z_4 + \alpha \cdot d_{4k}) \cos \theta_4^i \\ (z_1 + \alpha \cdot d_{1k}) \sin \theta_1 + (z_2 + \alpha \cdot d_{2k}) \sin(\theta_{20} + \Delta\theta_2^i) + (z_3 + \alpha \cdot d_{3k}) \sin \theta_3^i + (z_4 + \alpha \cdot d_{4k}) \sin \theta_4^i \\ (z_3 + \alpha \cdot d_{3k}) \cos \theta_3^i - (z_5 + \alpha \cdot d_{5k}) \cos \theta_5^i + (z_6 + \alpha \cdot d_{6k}) \cos \theta_6^i \\ (z_3 + \alpha \cdot d_{3k}) \sin \theta_3^i - (z_5 + \alpha \cdot d_{5k}) \sin \theta_5^i + (z_6 + \alpha \cdot d_{6k}) \sin \theta_6^i \\ x_{pg}^i - (z_1 + \alpha \cdot d_{1k}) \cos \theta_1 - (z_2 + \alpha \cdot d_{2k}) \cos((\theta_{20} + \alpha \cdot d_{10k}) + \Delta\theta_2^i) - (z_5 + \alpha \cdot d_{5k}) \cos \theta_5^i - (x_0 + \alpha \cdot d_{8k}) \\ y_{pg}^i - (z_1 + \alpha \cdot d_{1k}) \sin \theta_1 - (z_2 + \alpha \cdot d_{2k}) \sin((\theta_{20} + \alpha \cdot d_{10k}) + \Delta\theta_2^i) - (z_5 + \alpha \cdot d_{5k}) \sin \theta_5^i - (y_0 + \alpha \cdot d_{9k}) \end{array} \right\} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{4-50}$$

Para el cálculo de la matriz Jacobiana general se debe tomar  $\alpha=0$ , y el vector de diseño dado por (4-49). Por su parte, para obtener la forma analítica de la matriz Jacobiana para la determinación del coeficiente de tamaño de paso, la única variable de diseño a considerar es  $\alpha$ .

### • *Traslado, giro y escalado*

Durante las iteraciones iniciales únicamente se modifican aquellas variables relativas a la posición del mecanismo y a su escala. Es decir, las variables de diseño consideradas en estas primeras iteraciones y distinguidas con el subíndice *teg* (traslado escalado y giro) son,

$$\mathbf{z}_{teg}^T = \left[ \theta_1 \quad x_0 \quad y_0 \quad E \right] \tag{4-51}$$

Donde E es el factor de escala. Los parámetros funcionales y las coordenadas generalizadas siguen siendo los descritos por (4-7) y (4-15). La FES es la descrita por (4-20), pero las restricciones tienen que ser modificadas incluyendo el factor de escala. Así, las ecuaciones de restricción cinemáticas para una posición de precisión genérica *i* serán

$$\mathbf{C}_{teg}(\mathbf{q}, \mathbf{z})^i = \left\{ \begin{array}{l} (z_1 \cos \theta_1^i + z_2 \cos \theta_2^i + z_3 \cos \theta_3^i + z_4 \cos \theta_4^i) \cdot E \\ (z_1 \sin \theta_1^i + z_2 \sin \theta_2^i + z_3 \sin \theta_3^i + z_4 \sin \theta_4^i) \cdot E \\ (z_3 \cos \theta_3^i - z_5 \cos \theta_5^i + z_6 \cos \theta_6^i) \cdot E \\ (z_3 \sin \theta_3^i - z_5 \sin \theta_5^i + z_6 \sin \theta_6^i) \cdot E \end{array} \right\} = \mathbf{0} \tag{4-52}$$

Y las ecuaciones de síntesis

$$\mathbf{S}_{teg}(\mathbf{q}^i, \mathbf{z}, \delta_g^i) = \begin{Bmatrix} x_{pg}^i - z_1 E \cos \theta_1^i - z_2 E \cos \theta_2^i - z_5 E \cos \theta_5^i - x_0 \\ y_{pg}^i - z_1 E \sin \theta_1^i - z_2 E \sin \theta_2^i - z_5 E \sin \theta_5^i - y_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4-53)$$

Por tanto, el conjunto de ecuaciones de restricción en una posición genérica queda en la forma

$$\Phi_{teg}(\mathbf{q}, \mathbf{z})^i = \begin{Bmatrix} (z_1 \cos \theta_1^i + z_2 \cos \theta_2^i + z_3 \cos \theta_3^i + z_4 \cos \theta_4^i) \cdot E \\ (z_1 \sin \theta_1^i + z_2 \sin \theta_2^i + z_3 \sin \theta_3^i + z_4 \sin \theta_4^i) \cdot E \\ (z_3 \cos \theta_3^i - z_5 \cos \theta_5^i + z_6 \cos \theta_6^i) \cdot E \\ (z_3 \sin \theta_3^i - z_5 \sin \theta_5^i + z_6 \sin \theta_6^i) \cdot E \\ x_{pg}^i - z_1 E \cos \theta_1^i - z_2 E \cos \theta_2^i - z_5 E \cos \theta_5^i - x_0 \\ y_{pg}^i - z_1 E \sin \theta_1^i - z_2 E \sin \theta_2^i - z_5 E \sin \theta_5^i - y_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4-54)$$

La dirección de variación de las variables de diseño se calcula mediante la expresión (3-29) particularizada para las variables de diseño de traslación, escalado y giro. Esto es

$$\Delta \mathbf{z}_{teg} = - \left[ \mathbf{J}_{teg, k}^T \mathbf{J}_{teg, k} \right]^{-1} \mathbf{J}_{teg, k}^T \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}))_k \quad (4-55)$$

La matriz Jacobiana se calcula mediante una expresión semejante a la (3-53) referida a las variables *teg*

$$\mathbf{J}_{teg, k} = - \left[ \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}))}{\partial \mathbf{w}} \right] \cdot \left[ \frac{\partial \Phi_{teg}(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}), \mathbf{z}_{teg})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \cdot \left[ \frac{\partial \Phi_{teg}(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}), \mathbf{z}_{teg})}{\partial \mathbf{z}_{teg}} \right] \quad (4-56)$$

El primer término, para una posición genérica *i*

$$\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}))^i}{\partial \mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-57)$$

El segundo término

$$\left[ \frac{\partial \Phi_{teg}(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_{tegk})^i}{\partial \mathbf{w}_k} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} -z_3 E \sin \theta_3^i & -z_4 E \sin \theta_4^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_3 E \sin \theta_3^i & z_4 E \sin \theta_4^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z_3 E \sin \theta_3^i & 0 & z_5 E \sin \theta_5^i & -z_5 E \sin \theta_5^i & 0 & 0 \\ z_3 E \sin \theta_3^i & 0 & -z_5 E \sin \theta_5^i & z_5 E \sin \theta_5^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_5 E \sin \theta_5^i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -z_5 E \sin \theta_5^i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (4-58)$$

Y el tercero, también para una posición genérica

$$\frac{\partial \Phi_{teg}(\mathbf{q}_k, \mathbf{z}_{teg,k})^i}{\partial \mathbf{z}_{teg,k}} = \begin{bmatrix} -z_1 E \sin \theta_1^i & 0 & 0 & -z_2 E \sin \theta_2^i & z_1 \cos \theta_1^i + z_2 \cos \theta_2^i + z_3 \cos \theta_3^i + z_4 \cos \theta_4^i \\ z_1 E \cos \theta_1^i & 0 & 0 & z_2 E \cos \theta_2^i & z_1 \cos \theta_1^i + z_2 \cos \theta_2^i + z_3 \cos \theta_3^i + z_4 \cos \theta_4^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 \cos \theta_3^i - z_5 \cos \theta_5^i + z_6 \cos \theta_6^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 \sin \theta_3^i - z_5 \sin \theta_5^i + z_6 \sin \theta_6^i \\ z_1 E \sin \theta_1^i & -1 & 0 & z_2 E \cos \theta_2^i & -z_1 \cos \theta_1^i - z_2 \cos \theta_2^i - z_5 \cos \theta_5^i \\ -z_1 E \cos \theta_1^i & 0 & -1 & -z_2 E \sin \theta_2^i & -z_1 \sin \theta_1^i - z_2 \sin \theta_2^i - z_5 \sin \theta_5^i \end{bmatrix} \quad (4-59)$$

Al igual que en el caso general, para el cálculo de la matriz Jacobiana hay que determinar los términos dados por (4-57), (4-58) y (4-59) para todas las posiciones de precisión.

También dentro de estas iteraciones *teg* es necesario determinar el coeficiente de tamaño de paso. Las variables de diseño se ven modificadas por el parámetro  $\alpha$

$$\hat{\mathbf{z}}_{teg} = \begin{bmatrix} \theta_1 + \alpha \cdot d\theta_1 \\ x_0 + \alpha \cdot dx_0 \\ y_0 + \alpha \cdot dy_0 \\ E + \alpha \cdot dE \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{E} \end{bmatrix} \quad (4-60)$$

Las ecuaciones de restricción se pueden escribir como

$$\Phi_{teg}(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}_{teg}), \hat{\mathbf{z}}_{teg})^i = \begin{Bmatrix} (z_1 \cos \hat{\theta}_1^i + z_2 \cos \theta_2^i + z_3 \cos \theta_3^i + z_4 \cos \theta_4^i) \cdot \hat{E} \\ (z_1 \sin \hat{\theta}_1^i + z_2 \sin \theta_2^i + z_3 \sin \theta_3^i + z_4 \sin \theta_4^i) \cdot \hat{E} \\ (z_3 \cos \theta_3^i - z_5 \cos \theta_5^i + z_6 \cos \theta_6^i) \cdot \hat{E} \\ (z_3 \sin \theta_3^i - z_5 \sin \theta_5^i + z_6 \sin \theta_6^i) \cdot \hat{E} \\ x_{pg}^i - z_1 \hat{E} \cos \theta_1^i - z_2 \hat{E} \cos \theta_2^i - z_5 \hat{E} \cos \theta_5^i - \hat{x}_0 \\ y_{pg}^i - z_1 \hat{E} \sin \theta_1^i - z_2 \hat{E} \sin \theta_2^i - z_5 \hat{E} \sin \theta_5^i - \hat{y}_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4-61)$$

La matriz Jacobiana también depende del parámetro  $\alpha$

$$\mathbf{J}(\alpha)_{teg} = - \left[ \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}_{teg}))}{\partial \mathbf{w}} \right] \left[ \frac{\partial \Phi_{teg}(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}_{teg}), \hat{\mathbf{z}}_{teg})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \Phi_{teg}(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}_{teg}), \hat{\mathbf{z}}_{teg})}{\partial \alpha} \right] \quad (4-62)$$

El primer término, para una posición genérica  $i$

$$\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}))^i}{\partial \mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-63)$$

El segundo

$$\left[ \frac{\partial \Phi_{teg}(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}_{teg})^i}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} -z_3 \sin(\theta_3) \hat{E} & -z_4 \sin(\theta_4) \hat{E} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_3 \cos(\theta_3) \hat{E} & z_4 \cos(\theta_4) \hat{E} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z_3 \sin(\theta_3) \hat{E} & 0 & z_5 \sin(\theta_5) \hat{E} & -z_6 \sin(\theta_6) \hat{E} & 0 & 0 \\ z_3 \cos(\theta_3) \hat{E} & 0 & -z_5 \cos(\theta_5) \hat{E} & z_6 \cos(\theta_6) \hat{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_5 \sin(\theta_5) \hat{E} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -z_5 \cos(\theta_5) \hat{E} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-64)$$

Y el tercero, para la posición genérica  $i$

$$\frac{\partial \Phi_{teg}(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}_{teg})^i}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} -z_1 \sin(\hat{\theta}_1) \cdot d\theta_1 \cdot \hat{E} + (z_1 \cos(\hat{\theta}_1) + z_2 \cos(\theta_2) + z_3 \cos(\theta_3) + z_4 \cos(\theta_4)) dE \\ z_1 \cos(\hat{\theta}_1) \cdot d\theta_1 \cdot \hat{E} + (z_1 \sin(\hat{\theta}_1) + z_2 \sin(\theta_2) + z_3 \sin(\theta_3) + z_4 \sin(\theta_4)) dE \\ (z_3 \cos(\theta_3) - z_5 \cos(\theta_5) + z_6 \cos(\theta_6)) dE \\ (z_3 \sin(\theta_3) - z_5 \sin(\theta_5) + z_6 \sin(\theta_6)) dE \\ z_1 \sin(\hat{\theta}_1) \cdot d\theta_1 \cdot \hat{E} - (z_1 \cos(\hat{\theta}_1) + z_2 \cos(\theta_2) + z_5 \cos(\theta_5)) dE - dx_0 \\ -z_1 \cos(\hat{\theta}_1) \cdot d\theta_1 \cdot \hat{E} - (z_1 \sin(\hat{\theta}_1) + z_2 \sin(\theta_2) + z_5 \sin(\theta_5)) dE - dy_0 \end{bmatrix} \quad (4-65)$$

#### 4.1.5. Generación de trayectorias sin coordinación con la barra de entrada.

La metodología propuesta puede ser aplicada igualmente a la resolución del problema de generación de trayectorias en el que no se exige una correspondencia entre las posiciones de precisión y aquellas ocupadas por el elemento de entrada. Esto se conoce comúnmente como el problema de generación de trayectorias sin coordinación.

Desde el punto de vista de optimización el problema resulta más complejo que el caso coordinado. Si bien la falta de coordinación implica un número menor de restricciones y por tanto una formulación más sencilla, este mismo hecho hace que el espacio de búsqueda sea mucho mayor. De hecho, muchos problemas de síntesis cinemática no requieren la coordinación entre los parámetros funcionales y la posición de la barra de entrada, sin embargo son planteados artificialmente bajo esta condición para facilitar su resolución. En contrapartida las soluciones alcanzables quedan limitadas por la imposición de esa coordinación.

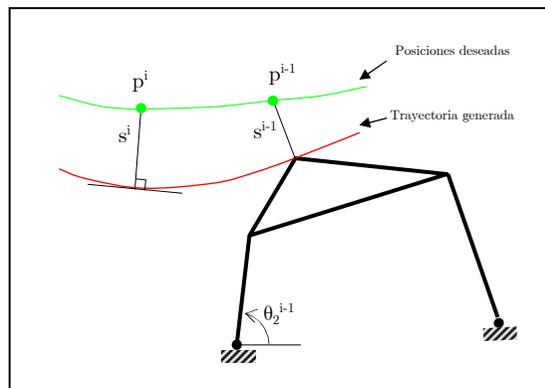
La metodología propuesta para abordar el problema de síntesis de trayectoria sin coordinación consta de dos fases: En la primera de ellas se optimiza el valor de la coordenada conductora para la posición de diseño actual. La segunda fase consiste en la optimización de las variables de diseño del mecanismo.

Existen diversas alternativas en cuanto a la elección de la coordenada conductora. Se han considerado dos alternativas a este respecto: el ángulo de la manivela de entrada, o una de las coordenadas del punto trazador.

Sin embargo, la segunda opción no resulta aplicable para cualquier forma de la trayectoria deseada (considérese, por ejemplo, en una trayectoria con un

tramo con  $x$  constante). Por tanto se considera una manivela como elemento de entrada, y la coordenada conductora será su ángulo de orientación.

Como ya se ha dicho anteriormente el proceso de optimización se realiza en dos etapas: la primera de ellas va a consistir en optimizar el ángulo de orientación para cada punto de precisión deseado. Esta optimización se puede hacer en base al error estructural, tal y como se definió en (4-2) y que es una medida de la distancia entre el punto deseado y el generado. La optimización de la coordenada conductora consiste, por tanto, en obtener el valor de la coordenada conductora que minimice esta distancia para cada punto de precisión, como se muestra en la Figura 4-5



**Figura 4-5. Optimización del ángulo de posición del elemento de entrada**

Para llevar a cabo esta optimización se puede aplicar el método general anteriormente presentado, pero sobre una única variable de diseño  $\theta_2^i$  (o  $\Delta\theta_2^i$  para el caso incremental). Partiendo de un valor inicial aproximado de la misma se itera hasta encontrar el valor que minimice la función de error basada en el error estructural en una posición. Es decir, hasta que el punto del acoplador alcance la posición  $q^i$  que hace mínima la distancia entre el punto deseado y la trayectoria generada,  $s^i$ .

El valor inicial de  $\theta_2^i$  para las iteraciones puede ser el de la posición anterior  $\theta_2^{i-1}$  o, el obtenido a partir de una distribución uniforme del ángulo total barrido por la manivela entre el número de puntos de precisión. El ángulo total barrido por la manivela en su movimiento generador de la trayectoria se puede determinar como aquél que proporciona una longitud de trayectoria igual a la deseada.

Una vez obtenido el ángulo óptimo de la manivela de entrada para una posición de precisión, el valor es utilizado como dato en la segunda etapa que trata la optimización de las variables de diseño del mecanismo según el esquema general.

El pseudocódigo del algoritmo es el siguiente:

---

### Desarrollos analíticos

$\mathbf{z}$  (variables de diseño)

$\mathbf{z}_{teg}$  (variables de diseño iteraciones *teg*)

$\Phi$  (ecuaciones de restricción)

$$\varepsilon^i = \left\{ x_g^i - x_d^i; y_g^i - y_d^i \right\};$$

$\mathbf{J}_{teg}^i(\Phi^i, \varepsilon^i, \mathbf{z}_{teg})$ ; (jacobiano iteraciones *teg*)

$\mathbf{J}^i(\Phi^i, \varepsilon^i, \mathbf{z})$ ; (jacobiano general)

$\mathbf{J}_\alpha^i(\Phi^i, \varepsilon^i, \alpha)$ ; (jacobiano general opt. tamaño paso)

$\mathbf{J}_\theta^i(\Phi^i, \varepsilon^i, \Delta\theta_2^i)$ ; (jacobiano optimización ángulo de entrada)

$\mathbf{J}_{\theta,\alpha}^i(\Phi^i, \varepsilon^i, \Delta\theta_2^i)$ ; (jacobiano optimización ángulo de entrada en opt. tamaño paso)

### Desarrollos numéricos

$$\delta_d^i \leftarrow \left\{ x_d^i \ y_d^i \right\} \quad i = 1, 2, \dots, npos \quad (\text{posiciones de precisión})$$

$\mathbf{z}_0$  (mecanismo inicial)

#### • Iteraciones *teg*

$k \leftarrow 1$ ;

**while** (no se cumpla criterio parada general) **do**

$$\mathbf{J}_{teg} \leftarrow 0; \mathbf{E}_{teg} \leftarrow 0;$$

**for**  $i=1$  **to**  $npos$

$v \leftarrow 1$ ;

**while** (no se cumpla criterio parada  $\theta_2^i$ ) **do**

$$\mathbf{J}_\theta \leftarrow 0; \mathbf{E}_\theta \leftarrow 0;$$

**for**  $i=1$  **to**  $npos$

$$\mathbf{q}_i, \delta_g^i \leftarrow \text{solve}(f(\mathbf{z}_k, \Delta\theta_2^i)=0)$$

$$\mathbf{J}_\theta \leftarrow \left[ \mathbf{J}_\theta; \mathbf{J}_\theta^i(\mathbf{q}_i, \delta_g^i) \right]; \quad \mathbf{E}_\theta \leftarrow \left[ \mathbf{E}_\theta; \varepsilon^i(\mathbf{q}_i, \delta_g^i) \right];$$

**end for**

$$\Delta\theta_2^i = \Delta\theta_2^i + \alpha_v \left( -[\mathbf{J}_\theta^T \mathbf{J}_\theta]^{-1} \mathbf{J}_\theta \mathbf{E}_\theta \right)$$

$v \leftarrow v + 1$

**end while**

$$\mathbf{q}_i, \delta_g^i \leftarrow \text{solve}(f(\mathbf{z}_k, \Delta\theta_2^i)=0)$$

$$\mathbf{J}_{teg} \leftarrow \left[ \mathbf{J}_{teg}; \mathbf{J}_{teg}^i(\mathbf{q}_i, \delta_g^i) \right]; \quad \mathbf{E}_{teg} \leftarrow \left[ \mathbf{E}_{teg}; \varepsilon^i(\mathbf{q}_i, \delta_g^i) \right];$$

**end for**

$$\Delta\mathbf{z} = -[\mathbf{J}_{teg}^T \mathbf{J}_{teg}]^{-1} \mathbf{J}_{teg}^T \mathbf{E}_{teg}$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + \alpha_k \cdot \Delta\mathbf{z}$$

$k \leftarrow k + 1$

**end while**

• *Iteraciones generales*

```

while (no se cumpla criterio parada general) do
  J ← 0; E ← 0;
  for i=1 to npos
    Jθ ← 0; Eθ ← 0; v ← 1;
    while (no se cumpla criterio parada θ2i) do
      qi, δgi ← solve(f(zk, Δθ2i)=0)
      Jθ ← [Jθ; Jθi(qi, δgi)]; Eθ ← [Eθ; εi(qi, δgi)];
      Δθ2i = Δθ2i + αv (-[JθTJθ]-1 JθEθ)
      v ← v + 1
    end while
    qi, δgi ← solve(f(zk, Δθ2i)=0)
    J ← [J; J(qi, δgi)]; E ← [E; εi(qi, δgi)];
  end for
  Δz = -[JTJ]-1 JTε;
  r ← 1; α ← 0;
  while (no se cumpla criterio parada α) do
    Jα ← 0; Eα ← 0; Δθ2i ← Δθ2i-1;
    for i=1 to npos
      Jθ ← 0; Eθ ← 0; v ← 1;
      while (no se cumpla criterio parada θ2i) do
        qi, δgi ← solve(f(ẑk, Δθ2i)=0)
        Jθ,α ← [Jθ,α; Jθ,αi(qi, δgi)]; Eθ,α ← [Eθ,α; εi(qi, δgi)];
        Δθ2i = Δθ2i + αv (-[JθTJθ]-1 JθEθ)
        v ← v + 1
      end while
      qi, δgi ← solve(f(ẑk, Δθ2i)=0)
      Jα ← [Jα; Jαi(qi, δgi)]; Eα ← [Eα; εθi(qi, δgi)];
    end for
    α = α + β (-[JαTJα]-1 JαTEα);
    r = r + 1;
  end while
  z = z + α · Δz;
  iter = iter + 1;
end while

```

---

De forma análoga al problema coordinado, también es posible añadir mejoras al proceso general en forma de iteraciones previas de traslación, escalado y giro. Éstas también se realizan en las mismas dos etapas anteriormente indicadas para las iteraciones generales, como queda reflejado en el pseudocódigo anterior.

### 4.1.6. Ejemplos de validación

Se presentan a continuación una serie de ejemplos numéricos con objeto de contrastar la validez y prestaciones de los algoritmos desarrollados para la resolución del problema de generación de trayectorias.

Todos los ejemplos se basan en el diseño de un mecanismo tipo cuadrilátero articulado cuyo punto del acoplador debe seguir bien una trayectoria rectilínea o bien una trayectoria en “L”.

Cada una de las trayectorias se resuelve tanto desde un planteamiento con coordinación entre la barra de entrada y el punto trazador (problema coordinado), como bajo un planteamiento sin coordinación (problema no coordinado). En la resolución de cada problema se aplica tanto el *algoritmo básico*, como el algoritmo que incorpora las estrategias de traslado, escalado y giro (*algoritmo teg*).

Asimismo se presentan ejemplos de verificación de las estrategias propuestas para el tratamiento de las restricciones de desigualdad.

Por tratarse de ejemplos puramente teóricos no se especifican, en ningún caso, unidades para las dimensiones de los mecanismos.

- *Trayectoria recta*

La trayectoria deseada está formada por 20 posiciones de precisión distribuidas uniformemente sobre una recta horizontal entre los valores  $x$  comprendidos entre 10 y 0, según el sentido del recorrido. Para el planteamiento del problema coordinado se considera que las posiciones de la barra de entrada se distribuyen de forma uniforme en un ángulo de  $90^\circ$ .

Los distintos algoritmos han sido sintonizados con los siguientes parámetros:  $\beta=0.005$ ,  $\varepsilon_r=0.0001$  y  $\varepsilon_a=0.0001$ . La parada de iteraciones de cálculo del coeficiente de tamaño de paso  $\alpha$  se realiza cuando la iteración actual es mayor que la anterior,  $FES(r) > FES(r-1)$ .

En la Figura 4-6 se muestra la trayectoria deseada y el mecanismo de partida junto con su trayectoria generada para el caso coordinado.

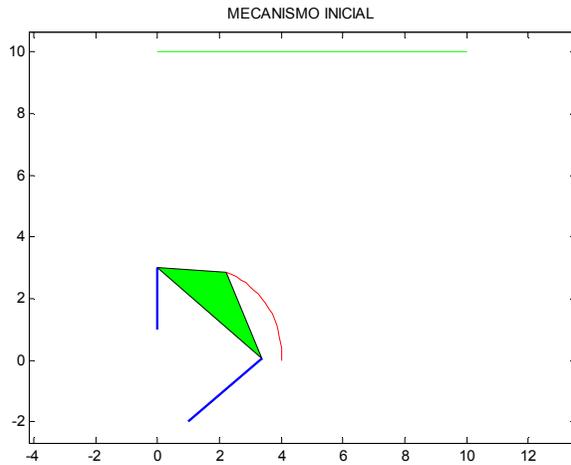


Figura 4-6. Trayectoria recta deseada y mecanismo inicial.

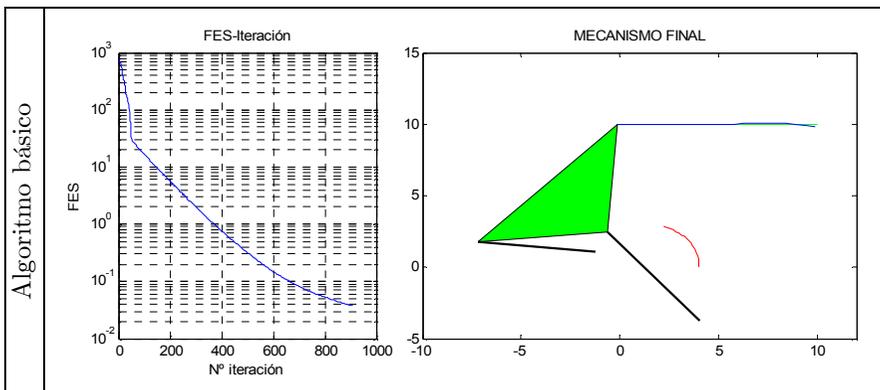
Resultados problema coordinado

En la siguiente tabla se recogen los valores iniciales de las variables de diseño junto con el diseño óptimo logrado tanto por el algoritmo básico como por el algoritmo con estrategias de mejora de la convergencia.

VARIABLES DE DISEÑO	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$\theta_1$	$\theta_{20}$	$x_0$	$y_0$
Valores iniciales	3.16	2.00	4.47	3.16	2.24	3.00	1.89	0.00	1.00	-2.00
Valores óptimos algoritmo básico	7.16	6.04	6.60	7.77	10.84	7.53	2.40	1.46	4.08	-3.72
Valores óptimos algoritmo <i>teg</i>	9.80	6.34	8.23	9.31	10.82	7.69	2.26	1.48	5.08	-6.02

Tabla 4-3. Ejemplo trayectoria recta con coordinación: variables diseño.

En la Figura 4-7 se muestran gráficamente los diseños óptimos y la evolución de la función objetivo en las distintas iteraciones. En color verde aparece la trayectoria deseada, en rojo la generada por el mecanismo inicial y en azul la del mecanismo final.



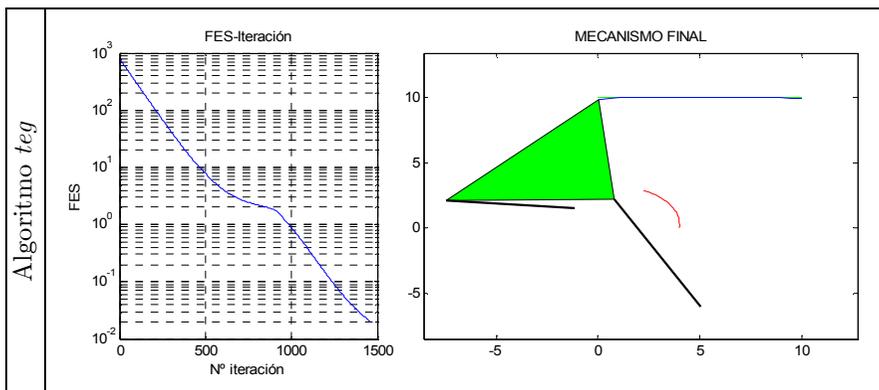


Figura 4-7. Ejemplo trayectoria recta con coordinación: evolución FES y mecanismo final.

Finalmente, la siguiente tabla recoge el valor resultante de la función objetivo y del error máximo de síntesis. Igualmente, como una medida del esfuerzo computacional que ha supuesto la ejecución de cada algoritmo, se muestra el número de evaluaciones de la función objetivo y el número de iteraciones.

	FES inicial	FES final	$\epsilon$ máximo inicial	$\epsilon$ máximo final	Nº iteraciones	Nº evaluac. FES
Algoritmo básico	794.96	0.038	11.66	0.15	908	3936
Algoritmo <i>teg</i>	794.96	0.021	11.66	0.11	1459	4339

Tabla 4-4. Error y esfuerzo computacional ejemplo trayectoria recta con coordinación

Resultados problema no coordinado

Los valores iniciales de las variables de diseño, junto con los obtenidos por el algoritmo básico y el que implementa estrategias de mejora de la convergencia, se muestran en la siguiente tabla.

VARIABLES DE DISEÑO	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$\theta_1$	$\theta_{20}$	$x_0$	$y_0$
Valores iniciales	3.16	2.00	4.47	3.16	2.24	3.00	1.89	0.00	1.00	-2.00
Valores óptimos algoritmo básico	6.25	5.20	4.66	10.08	8.50	3.87	2.35	1.17	4.28	-1.06
Valores óptimos algoritmo <i>teg</i>	17.26	11.73	25.06	17.66	12.70	16.61	2.56	0.64	11.41	-16.00

Tabla 4-5. Ejemplo trayectoria recta sin coordinación: variables diseño.

La evolución de la función objetivo a lo largo del proceso de síntesis, junto con el esquema del mecanismo final obtenido se muestran en la Figura 4-8. La

representación del mecanismo final viene acompañada de la de las trayectorias deseada (verde), inicial (rojo) y final (azul).

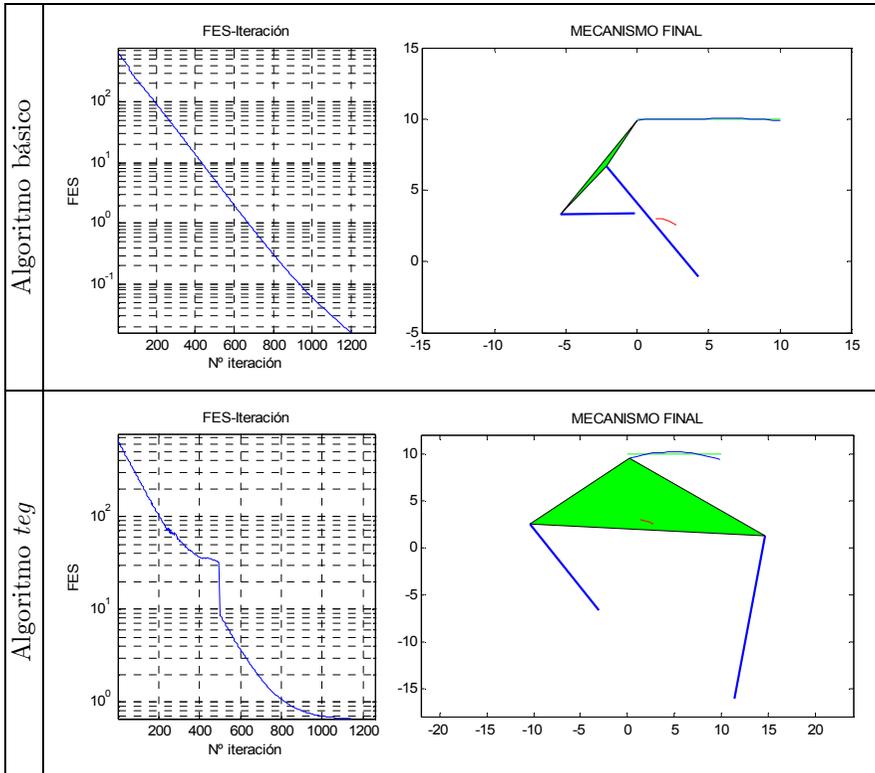


Figura 4-8. Ejemplo trayectoria recta sin coordinación: evolución FES y mecanismo final.

La calidad de las soluciones obtenidas se puede evaluar numéricamente a través de los valores de la función objetivo y del error máximo de síntesis. El esfuerzo computacional requerido por cada algoritmo de síntesis se puede evaluar mediante el número de evaluaciones de la función objetivo. Todos estos valores quedan recogidos en la tabla siguiente.

	FES inicial	FES final	$\epsilon$ máximo inicial	$\epsilon$ máximo final	Nº iteraciones	Nº evaluac. FES
Algoritmo básico	662.52	0.0159	10.3796	0.10708	1202	4818
Algoritmo Teg	662.52	0.6603	10.3796	0.55668	1143	3075

Tabla 4-6. Error y esfuerzo computacional ejemplo trayectoria recta sin coordinación.

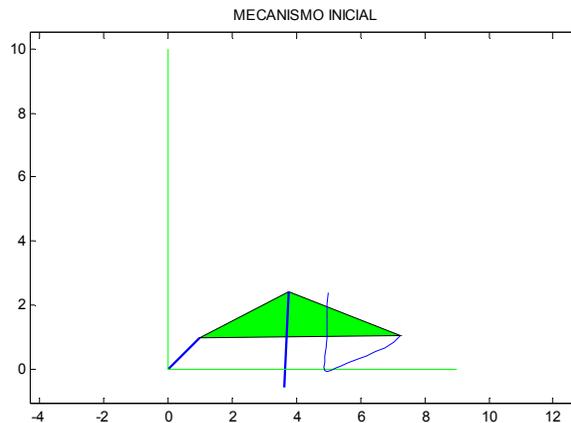
• *Trayectoria en "L"*

La trayectoria deseada está formada por dos segmentos de recta, uno vertical y otro horizontal formando una *L* de lados iguales. Se compone de 21 puntos de precisión: 10 puntos en cada segmento de recta que forman la *L*, y un punto más en el vértice entre ambos segmentos. La longitud de cada segmento es de 10 unidades de longitud.

Para el planteamiento del problema coordinado se ha considerado un ángulo barrido por la barra de entrada de  $225^\circ$  recorrido en sentido horario. A lo largo de dicho ángulo se distribuyen de forma uniforme las posiciones de la barra de entrada correspondientes a los puntos de precisión.

Los parámetros de ajuste de los distintos algoritmos de resolución son los mismos que para el caso de trayectoria recta, esto es:  $\beta=0.005$ ,  $\varepsilon_r=0.0001$  y  $\varepsilon_a=0.0001$ .

En la Figura 4-9 se muestra la trayectoria deseada y el mecanismo de partida junto con su trayectoria generada para el caso coordinado.



**Figura 4-9. Trayectoria en L deseada y mecanismo inicial.**

Resultados algoritmos con coordinación

La siguiente tabla recoge los valores iniciales de las variables de diseño, y los valores finales obtenidos tanto por el algoritmo de síntesis básico como por el algoritmo *teg*.

VARIABLES DE DISEÑO	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$\theta_1$	$\theta_{20}$	$x_0$	$y_0$
Valores iniciales	3.64	1.4	3.13	2.98	6.26	3.74	2.99	-1.57	3.6	-0.55
Valores óptimos algoritmo básico	7.35	2.92	5.34	5.80	11.09	5.75	2.35	-1.92	-0.26	-2.98
Valores óptimos algoritmo <i>teg</i>	12.27	5.17	9.38	9.71	19.36	9.97	2.33	-1.92	-5.68	-4.93

Tabla 4-7. Ejemplo trayectoria en  $L$  con coordinación: variables diseño.

La evolución de la función objetivo y el mecanismo final obtenido junto con las trayectorias inicial (rojo), final (azul) y deseada (verde) se muestran en la Figura 4-10.

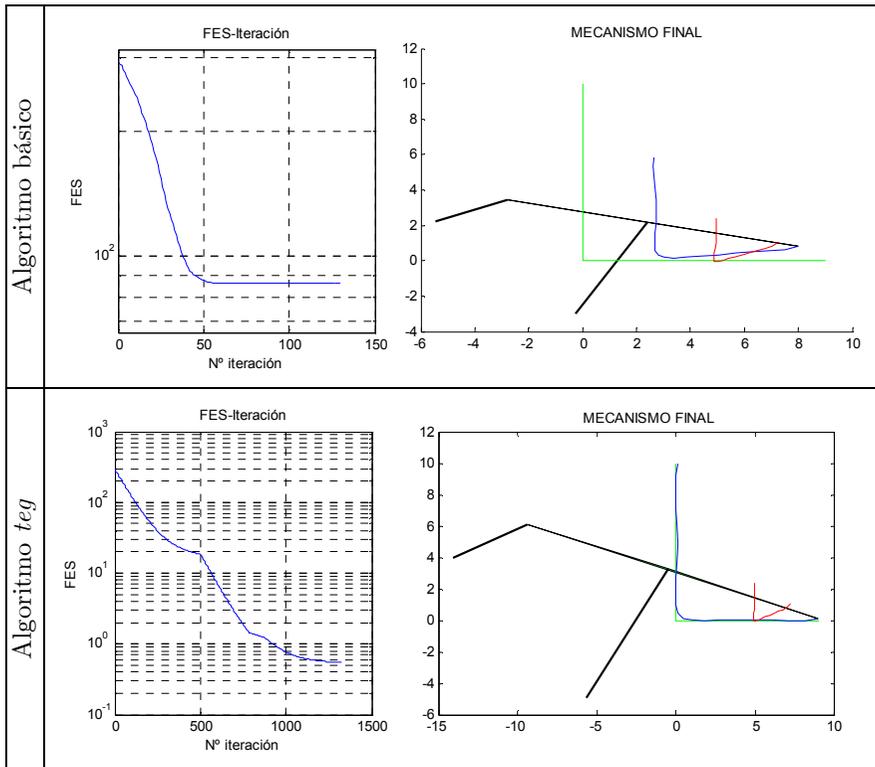


Figura 4-10. Resultados gráficos ejemplo trayectoria en "L" con coordinación

Finalmente, la tabla siguiente recoge los valores de la función objetivo y el error de síntesis, así como el número de iteraciones y evaluaciones de la función objetivo hasta que cada algoritmo de síntesis alcanza el criterio de convergencia.

	FES inicial	FES final	$\epsilon$ máximo inicial	$\epsilon$ máximo final	Nº iteraciones	Nº evaluac. FES
Algoritmo básico	293.60	86.45	9.08	4.96	58	306
Algoritmo <i>teg</i>	293.60	0.547	9.08	0.47	863	3300

**Tabla 4-8. Error y esfuerzo computacional ejemplo trayectoria en “L” con coordinación**

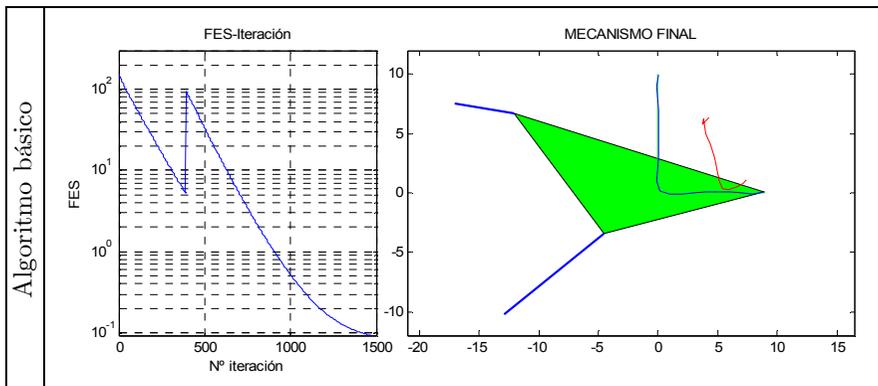
Resultados algoritmos sin coordinación

Los resultados relativos a los valores óptimos de las variables de diseño, así como sus valores iniciales quedan recogidos en la siguiente tabla.

VARIABLES DE DISEÑO	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$\theta_1$	$\theta_{20}$	$x_0$	$y_0$
Valores iniciales	3.64	1.4	3.13	2.98	6.26	3.74	2.99	-1.57	3.6	-0.55
Valores óptimos algoritmo básico	18.21	5.04	12.68	10.80	22.06	13.87	1.80	-3.03	-12.89	-10.22
Valores óptimos algoritmo <i>teg</i>	9.80	4.69	9.28	6.90	19.50	10.59	2.81	-2.41	-5.57	-1.70

**Tabla 4-9. Ejemplo trayectoria en L con coordinación: variables diseño.**

En la Figura 4-11 se muestran gráficamente los resultados referentes a la evolución del valor de la función objetivo a lo largo del proceso iterativo de síntesis, así como un esquema del mecanismo final obtenido por cada uno de los algoritmos, junto con las trayectorias deseada (verde), inicial (rojo) y final (azul).



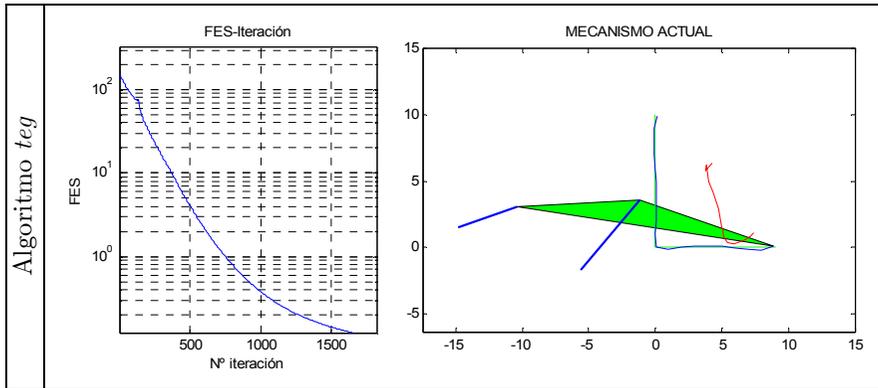


Figura 4-11. Resultados gráficos ejemplo trayectoria en "L" sin coordinación

Por último, el valor del error de síntesis máximo en cualquiera de las posiciones de precisión, el valor de la función objetivo, el número de iteraciones y el número de evaluaciones de la función objetivo se muestran en la siguiente tabla.

	FES inicial	FES final	$\epsilon$ máximo inicial	$\epsilon$ máximo final	Nº iteraciones	Nº evaluac. FES
Algoritmo básico	153.42	0.093328	5.6389	0.18399	1471	1323260
Algoritmo <i>teg</i>	153.42	0.1216	5.6389	0.2049	1653	1624168

Tabla 4-10. Error y esfuerzo computacional ejemplo trayectoria en "L" sin coordinación

### • Ejemplos que incluyen restricciones de desigualdad

Por último, dentro de este apartado dedicado al problema de síntesis de trayectoria, se presentan dos ejemplos que incluyen una restricción de desigualdad. En el primero de ellos, dicha restricción se refiere a la limitación del tamaño máximo de la barra 2, mientras que en el segundo lo hace sobre el ángulo de transmisión entre las barras 2 y 3.

Ambos ejemplos vuelven a considerar la generación de una trayectoria recta por un mecanismo del tipo cuadrilátero articulado con coordinación entre la barra de entrada y los puntos de precisión de la trayectoria, tal y como se hizo en el primero de los ejemplos de este apartado.

### Limitación del tamaño máximo de la barra 2

Por ser  $z_2$  un parámetro que se mantiene constante durante el movimiento del mecanismo se puede utilizar cualquiera de los planteamientos expuestos. El primero de ellos trata la variable holgura, derivada de transformar la ecuación de desigualdad en otra de igualdad, como variable de diseño, mientras que el segundo planteamiento la considera entre las variables dependientes e incluye un término de penalización en el error de síntesis para valores negativos de dicha variable holgura. Sirva el ejemplo que a continuación se desarrolla para contrastar ambos planteamientos.

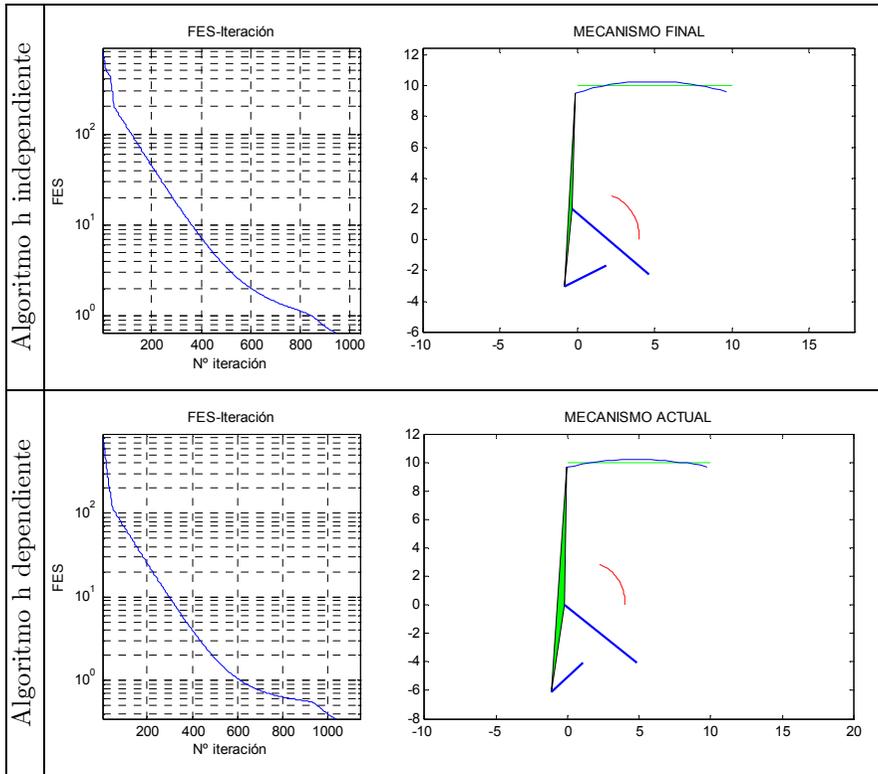
El problema del ejemplo plantea la generación de una trayectoria recta por un punto del elemento acoplador de un cuadrilátero articulado existiendo una coordinación entre las posiciones del elemento de entrada y las del punto de salida. Se exige además que la longitud de la barra 2 no pueda exceder de un valor  $z_2^{\max}=3$ . Los datos tanto de trayectoria deseada como de mecanismo inicial y posiciones del elemento de entrada son las mismas del caso sin restricción sobre la barra 2 anteriormente tratado. En aquel caso el mecanismo óptimo alcanzado por el algoritmo de síntesis asignaba una longitud para la barra 2 de aproximadamente 6 unidades. Por tanto la nueva restricción introducida debe proporcionar una solución distinta.

En la tabla siguiente se muestran los valores iniciales de las variables de diseño y los óptimos obtenidos con cada uno de los planteamientos.

VARIABLES DE DISEÑO	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$\theta_1$	$\theta_{20}$	$x_0$	$y_0$
Valores iniciales	3.16	2	4.47	3.16	2.24	3	1.89	0	1	-2
Valores óptimos alg. h indep.	2.84	3	5.10	6.57	12.67	7.57	2.97	2.04	4.64	-2.25
Valores óptimos alg. h dep.	3.78	3	6.28	6.58	16.09	9.81	3.18	2.35	4.83	-4.13

**Tabla 4-11. Ejemplo trayectoria recta con coordinación  $z_2^{\max}$  limitada: variables de diseño**

En la Figura 4-11 se muestran gráficamente los diseños óptimos y la evolución de la función objetivo en las distintas iteraciones. En color verde aparece la trayectoria deseada, en rojo la generada por el mecanismo inicial y en azul la del mecanismo final.



**Figura 4-12. Ejemplo trayectoria recta con coordinación  $z_2^{\max}$  limitada: evolución FES y mecanismo final.**

Finalmente, la siguiente tabla recoge los valores de la función objetivo y el error de síntesis, así como el número de iteraciones y evaluaciones de la función objetivo hasta que cada algoritmo de síntesis ha alcanzado el criterio de convergencia.

	FES inicial	FES final	$\epsilon$ máximo inicial	$\epsilon$ máximo final	Nº iteraciones	Nº evaluac. FES
Alg. Variable holgura indep.	794.96	0.655	11.66	0.4996	947	3879
Alg. Variable holgura dependiente	794.96	0.346	11.66	0.3625	1038	4300

**Tabla 4-12. Error y esfuerzo computacional ejemplo trayectoria recta con coordinación  $z_2^{\max}$  limitada.**

Ambos tratamientos de la restricción de desigualdad han logrado mantener la longitud de la barra 2 dentro del límite establecido. Los valores finales de la función objetivo son similares para ambos algoritmos, si bien, debido a la

fuerte restricción adicional impuesta resultan peores que los alcanzados con el problema no restringido.

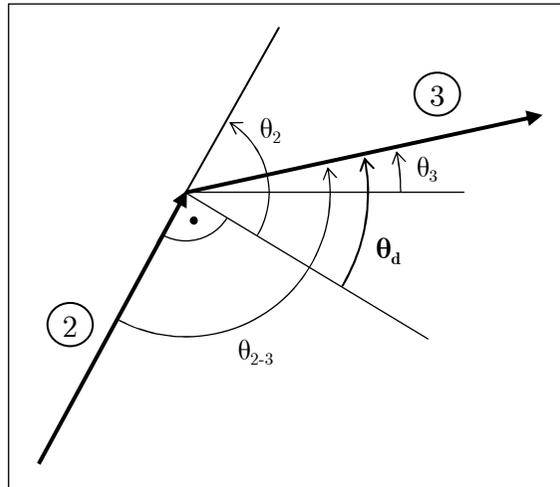
### Limitación del ángulo de transmisión entre las barras 2 y 3

Como este ángulo es función de la posición del mecanismo en cada instante, el tratamiento de la correspondiente ecuación de desigualdad que surge como consecuencia de su limitación entre unos determinados valores, sólo puede hacerse con el método propuesto que considera la variable holgura como dependiente.

Desde el punto de vista de la transmisión de esfuerzos entre barras, el ángulo de transmisión debe mantenerse lo más cerca posible de su valor ideal  $90^\circ$  [Balliy Chand, 2002]. Por tanto, la restricción de desigualdad se plantea en términos del ángulo de desviación respecto de ese valor ideal en la forma

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta_{20} + \Delta\theta_2) + \theta_3\right) + h = \cos(\theta_{d, \max}) \quad (4-66)$$

El ángulo de desviación se calcula según el esquema de la Figura 4-13.



**Figura 4-13. Ángulo de desviación**

La definición de la restricción en base al coseno del ángulo de desviación permite que una única restricción sirva para limitar tanto valores negativos como positivos de dicho ángulo.

El error de síntesis se define con un tercer término que penaliza los valores negativos de la variable holgura

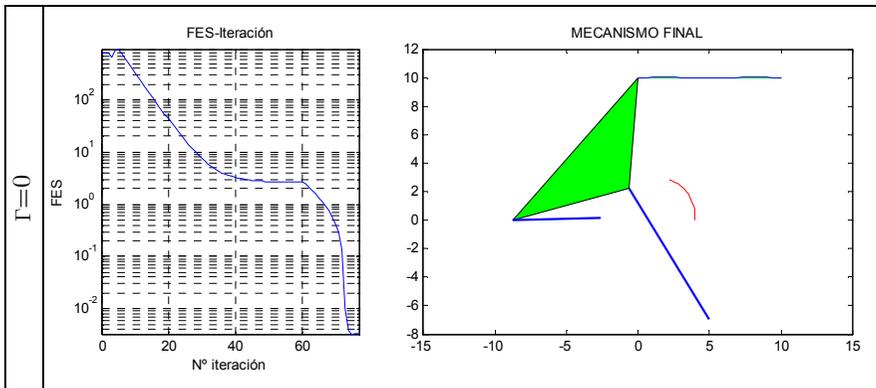
$$\varepsilon^T = \left[ x_g - x_d \quad y_g - y_d \quad \Gamma \cdot (\|h\| - h) \right] \quad (4-67)$$

Siendo  $\Gamma$  un coeficiente de ponderación.

Inicialmente se plantea el problema sin la restricción sobre el ángulo de desviación. Esto se formula aplicando un valor nulo al coeficiente  $\Gamma$ . Los resultados son los siguientes.

VARIABLES DE DISEÑO	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$\theta_1$	$\theta_{20}$	$x_0$	$y_0$
Valores iniciales	3.16	2	4.47	3.16	2.24	3	1.89	0	1	-2
Valores óptimos	10.33	6.15	8.39	10.76	13.23	7.74	2.39	1.59	4.95	-6.94

**Tabla 4-13. Ejemplo trayectoria recta con restricción en ángulo de transmisión. Variables de diseño. Caso  $\Gamma=0$ .**



**Figura 4-14. Resultados gráficos ejemplo trayectoria recta con restricción en ángulo de transmisión. Caso  $\Gamma=0$ .**

FES inicial	FES final	$\varepsilon$ máximo inicial	$\varepsilon$ máximo final	$\theta_d$ máximo inicial	$\theta_d$ máximo final	Nº iterac.	Nº evaluac. FES
794.96	0.0032	11.6619	0.033733	-40.82	-75.68	77	922

**Tabla 4-14. Ejemplo trayectoria recta con restricción en ángulo de transmisión. Resultados numéricos caso  $\Gamma=0$**

Como puede verse el ángulo de desviación máximo que presenta el mecanismo óptimo es elevado. Por tanto, se hace necesaria la aplicación de la restricción de desigualdad.

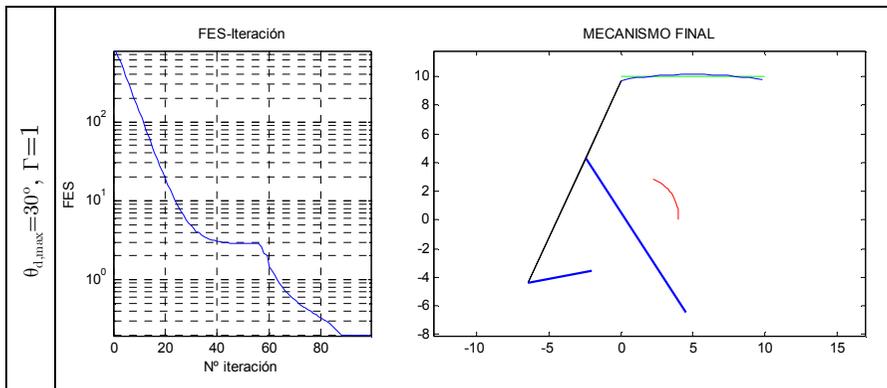
Se estudian dos valores máximos del ángulo de desviación: 30° y 45°. El primero de ellos hace que el mecanismo inicial se sitúe en un punto interior de la región factible, mientras que el valor de 45° lo sitúa fuera de dicha región. En ambos casos se prueban distintos valores del coeficiente de ponderación  $\Gamma$  para evaluar su influencia sobre la solución obtenida. A continuación se resumen los resultados obtenidos.

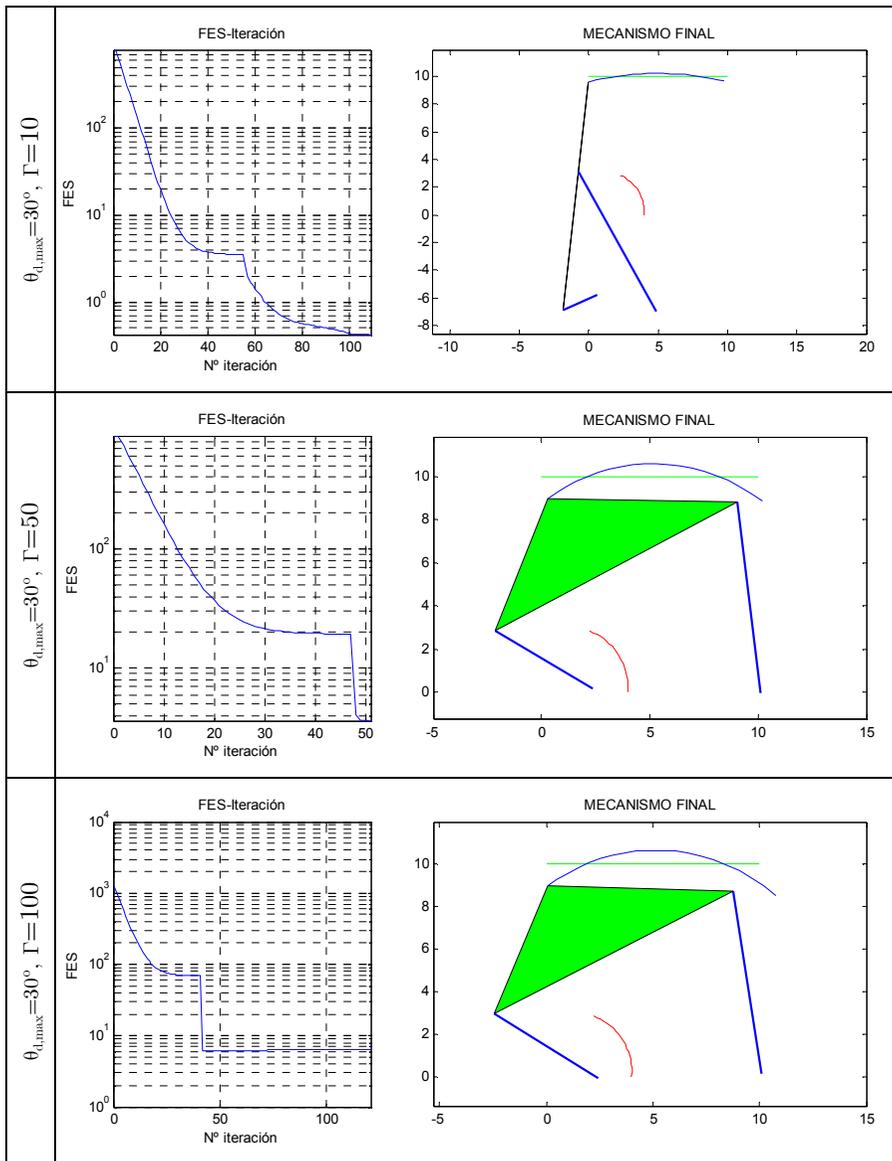
La siguiente tabla recoge los valores óptimos de las variables de diseño para cada uno de los casos. Los valores iniciales de dichas variables son los que aparecen en la Tabla 4-13.

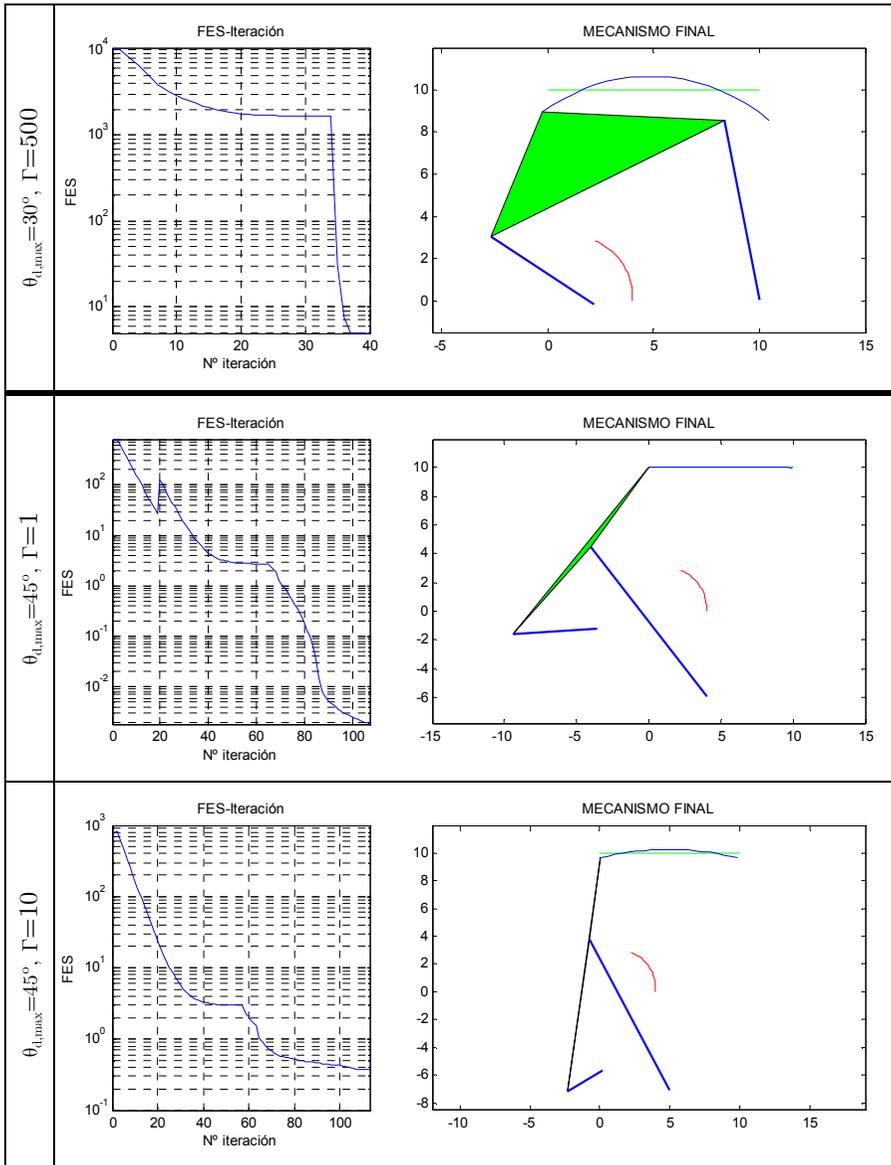
		Variables de diseño										
		$\Gamma$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$\theta_1$	$\theta_{20}$	$x_0$	$y_0$
Val. óptimos $\theta_{l,\max}=30^\circ$	1	7.11	4.51	9.58	12.77	15.54	5.97	2.72	1.77	4.49	-6.43	
	10	4.41	2.67	10.04	11.49	16.58	6.54	2.88	1.98	4.84	-6.95	
	50	7.71	5.27	12.66	8.91	6.60	8.74	3.12	1.03	10.10	-0.03	
	100	7.70	5.75	12.62	8.70	6.49	8.72	3.17	1.01	10.11	0.13	
	500	7.80	5.84	12.30	8.61	6.37	8.59	3.17	0.98	9.99	0.07	
Val. óptimos $\theta_{l,\max}=45^\circ$	1	8.93	5.89	8.18	13.14	14.96	6.79	2.59	1.64	4.02	-5.90	
	10	4.97	2.92	11.04	12.31	16.92	5.89	2.85	2.09	5.00	-7.08	
	50	5.19	3.09	10.86	12.29	16.71	5.85	2.83	2.08	5.01	-6.94	
	100	8.64	5.44	12.25	8.69	6.15	8.20	3.23	0.94	10.86	0.94	
	500	8.66	5.48	12.25	8.66	6.13	8.22	3.23	0.94	10.86	0.98	

Figura 4-15. Trayectoria recta con limitación ángulo de transmisión. Valores óptimos variables de diseño.

La evolución del proceso de síntesis, así como el mecanismo óptimo y las trayectorias deseada (verde), inicial (rojo) y final (azul), para los diferentes valores del ángulo limitado y del coeficiente de ponderación, se muestran en la Figura 4-16.







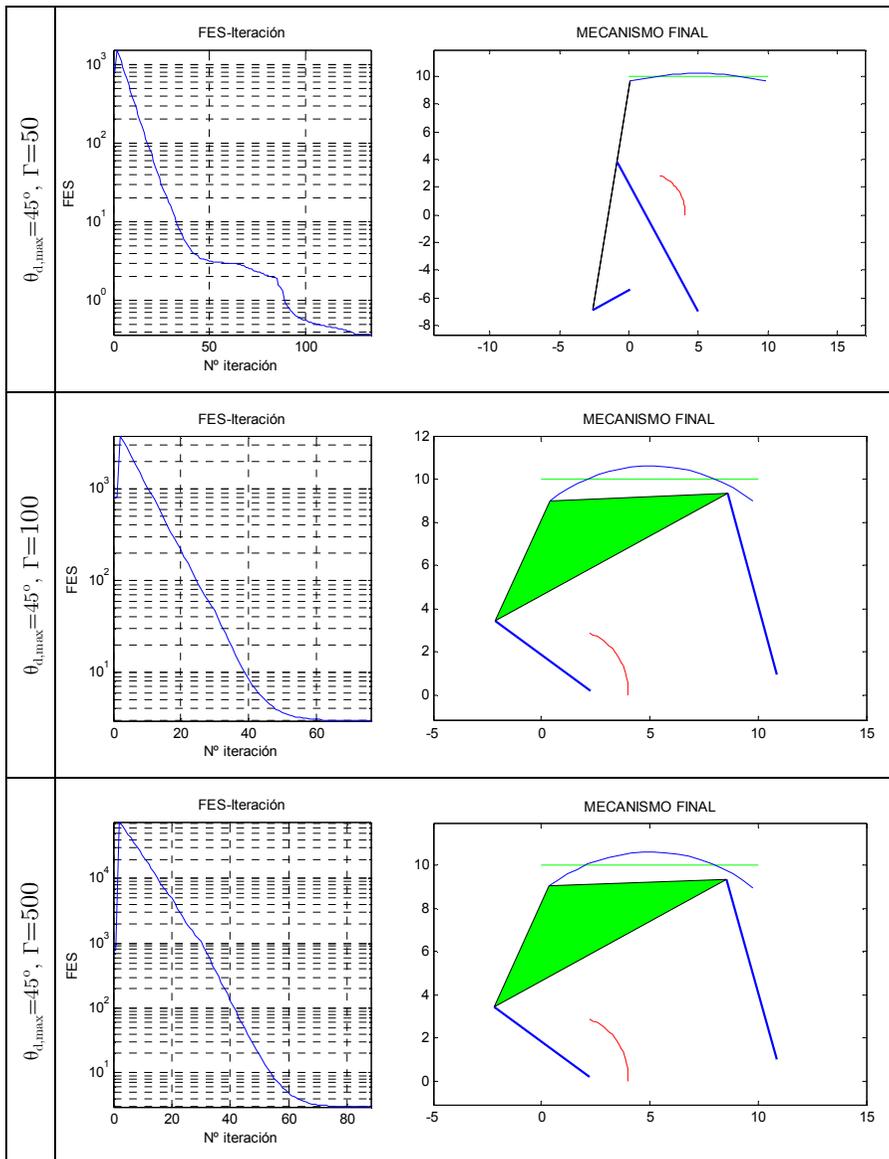


Figura 4-16. Ejemplo trayectoria recta con restricción en ángulo de transmisión a  $30^\circ$  y  $45^\circ$ . Resultados gráficos varios  $\Gamma$ .

Finalmente, en la tabla siguiente se presentan los resultados relativos al valor de la función objetivo, error máximo de síntesis y ángulo de desviación.

FES inicial	FES final	$\epsilon$ máximo inicial	$\epsilon$ máximo final	$\theta_d$ máximo inicial	$\theta_d$ máximo final	Nº iterac.
795.00	0.194	11.66	0.273	-40.815	-35.77	99
798.82	0.420	11.66	0.405	-40.815	-30.12	109
891.42	3.618	11.66	1.127	-40.815	-31.04	51
1180.81	6.308	11.66	1.674	-40.815	-30.71	121
10441.34	4.902	11.66	1.52	-40.815	30.00	40
794.96	0.002	11.66	0.030	-40.815	-45.84	107
794.96	0.376	11.66	0.382	-40.815	-38.03	113
794.96	0.364	11.66	0.377	-40.815	-38.34	134
794.96	2.948	11.66	1.055	-40.815	45.02	76
794.96	2.972	11.66	1.059	-40.815	45.01	88

**Tabla 4-15. Ejemplo trayectoria recta con restricción en ángulo de transmisión a 30° y 45°. Resultados numéricos varios  $\Gamma$ .**

• *Discusión de resultados*

En el ejemplo de generación de trayectoria recta, tanto el algoritmo básico como aquel que incluye iteraciones previas de traslación, escalado y giro obtienen soluciones similares. Si bien, en el caso coordinado, el algoritmo *teg* logra un menor valor final de la función objetivo, también el esfuerzo computacional para lograrlo es mayor. En el caso sin coordinación, el algoritmo *teg* parece terminar prematuramente en una solución peor que la lograda por el algoritmo básico.

Por su parte, en la trayectoria en “L” el algoritmo *teg*, para el problema con coordinación, se muestra netamente superior al algoritmo básico, que no logra alcanzar una solución adecuada. Si embargo, en el problema no coordinado ambos algoritmos alcanzan soluciones similares tanto en el valor final de la función objetivo, como en el esfuerzo computacional realizado.

Respecto de los ejemplos que incluyen restricciones adicionales de diseño, se puede observar que los dos tipos de algoritmo propuesto resultan de similar eficacia en el caso de que las dichas restricciones afecten a un parámetro constante.

Para el caso de limitación del ángulo de transmisión, sólo es aplicable el algoritmo que considera las variables holguras como dependientes. Su

comportamiento es igualmente satisfactorio, especialmente para valores bajos del coeficiente que pondera el término de penalización.

## 4.2. Aplicación al problema de generación de funciones

### 4.2.1. Introducción

El problema de generación de funciones consiste en definir un mecanismo que presente una determinada coordinación entre el movimiento de la barra de entrada y la de salida.

Normalmente esta relación funcional se especifica de manera discreta para una serie de posiciones de precisión definidas por la barra de entrada.

El problema se puede plantear como el diseño de un mecanismo que sitúe las barras de entrada en dos grupos de posiciones específicas.

$$\begin{array}{c|c}
 \mathbf{q}_e & \mathbf{q}_s \\
 \hline
 q_{e,1} & q_{s,1} \\
 q_{e,2} & q_{s,2} \\
 \vdots & \vdots \\
 q_{e,n} & q_{s,n}
 \end{array} \quad (4-68)$$

También se puede plantear la relación funcional de forma incremental, de manera que para una variación de la coordenada de entrada le corresponda otra determinada variación de la coordenada de salida, en un cierto intervalo de movimiento del mecanismo.

$$\Delta q_s = f(\Delta q_e) \quad (4-69)$$

El planteamiento general de la síntesis de este caso no difiere en gran medida del utilizado para resolver el problema de generación de trayectorias con coordinación, constandingo el problema actual de un único parámetro funcional ( $\delta = q_s$ ). El error de síntesis se puede definir como la diferencia entre el parámetro funcional deseado y el generado por el mecanismo para cada

posición prescrita del elemento de entrada. Para una posición genérica  $i$ , se puede escribir como

$$\varepsilon^i(\delta_g^i) = (\delta_g^i - \delta_d^i) \quad (4-70)$$

Para todas las posiciones

$$\varepsilon(\delta_g) = \begin{Bmatrix} \varepsilon^1(\delta_g^1) \\ \varepsilon^1(\delta_g^2) \\ \dots \\ \varepsilon^{npos}(\delta_g^{npos}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_g^1 - \delta_d^1 \\ \delta_g^2 - \delta_d^2 \\ \dots \\ \delta_g^{npos} - \delta_d^{npos} \end{Bmatrix} \quad (4-71)$$

Como función objetivo se considera igualmente la ecuación cuadrática en base al error estructural

$$FES = \frac{1}{2} \varepsilon(\delta_g)^T \varepsilon(\delta_g) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{npos} \varepsilon^i(\delta_g^i)^T \varepsilon^i(\delta_g^i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{npos} (\delta_g^i - \delta_d^i)^2 \quad (4-72)$$

En el planteamiento incremental del problema, el error de síntesis se plantea como la diferencia entre las variaciones posición de las barras de entrada y de salida

$$\varepsilon^i(\delta_g^i) = ((\delta_g^i - \delta_g^1) - (\delta_d^i - \delta_d^1)) = (\Delta\delta_g^i - \Delta\delta_d^i) \quad (4-73)$$

Y la función objetivo

$$FES = \frac{1}{2} \varepsilon(\delta_g)^T \varepsilon(\delta_g) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{npos} \varepsilon^i(\delta_g^i)^T \varepsilon^i(\delta_g^i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{npos} (\Delta\delta_g^i - \Delta\delta_d^i)^2 \quad (4-74)$$

## 4.2.2. Planteamiento del algoritmo

La principal diferencia del algoritmo para la resolución del problema de generación de funciones respecto del de trayectorias con coordinación es la consideración de un único parámetro funcional. Normalmente este parámetro corresponde al ángulo de posición de una barra del mecanismo (barra de salida) como función del ángulo de otra barra (barra de entrada). En tal caso no son necesarias las iteraciones de traslado, escalado y giro. Estas iteraciones sólo serán de utilidad cuando el parámetro de entrada o el de salida tengan unidades lineales.

Como se ha comentado anteriormente, el problema puede establecer la coordinación entre las barras de entrada y salida en forma absoluta o en forma incremental. En este segundo caso el algoritmo difiere del primero únicamente en la consideración de una variable de diseño adicional correspondiente a la posición inicial de una barra, es decir, la posición absoluta de una de las barras del mecanismo para la primera posición de precisión. En el siguiente pseudocódigo se muestra el esquema del algoritmo para el caso incremental.

---

### Desarrollos analíticos

$\mathbf{z}$  (variables de diseño)

$\Phi$  (ecuaciones de restricción)

$$\varepsilon^i = \{\Delta\theta_{s,g}^i - \Delta\theta_{s,d}^i\};$$

$\mathbf{J}^i(\Phi^i, \varepsilon^i, \mathbf{z});$  (jacobiano general)

$\mathbf{J}_\alpha^i(\Phi^i, \varepsilon^i, \alpha);$  (jacobiano determinación tamaño de paso)

### Desarrollos numéricos

$$\{\Delta\theta_{e,d}^i\} \quad i = 1, 2, \dots, npos \quad (\text{posiciones rel. elemento de entrada})$$

$$\delta_d^i \leftarrow \{\Delta\theta_{s,d}^i\} \quad i = 1, 2, \dots, npos \quad (\text{posiciones rel. elemento de salida})$$

$$k \leftarrow 1$$

**while** (no se cumpla criterio parada general) **do**

$$\mathbf{J} \leftarrow 0; \mathbf{E} \leftarrow 0;$$

**for** i=1 **to** npos

$$\mathbf{q}_i, \delta_g^i \leftarrow \text{solve}(f(\mathbf{z}_k, \Delta\theta_{e,d}^i)=0)$$

$$\mathbf{J} \leftarrow [\mathbf{J}; \mathbf{J}^i(\mathbf{q}_i, \delta_g^i)]; \quad \mathbf{E} \leftarrow [\mathbf{E}; \varepsilon^i(\mathbf{q}_i, \delta_g^i)];$$

**end for**

$$\Delta\mathbf{z} \leftarrow -[\mathbf{J}^T \mathbf{J}]^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{E}; \quad \alpha \leftarrow 0; \quad r \leftarrow 1;$$

**while** (no se cumpla criterio parada  $\alpha$ ) **do**

$$\mathbf{J}_\alpha \leftarrow 0; \mathbf{E}_\alpha \leftarrow 0;$$

**for** i=1 **to** npos

$$\mathbf{q}_i, \delta_g^i \leftarrow \text{solve}(f(\hat{\mathbf{z}}_k, \Delta\theta_{e,d}^i)=0)$$

$$\mathbf{J}_\alpha \leftarrow [\mathbf{J}_\alpha; \mathbf{J}_\alpha^i(\mathbf{q}_i, \delta_g^i)]; \quad \mathbf{E}_\alpha \leftarrow [\mathbf{E}_\alpha; \varepsilon^i(\mathbf{q}_i, \delta_g^i)];$$

**end for**

$$\Delta\alpha \leftarrow -[\mathbf{J}_\alpha^T \mathbf{J}_\alpha]^{-1} \mathbf{J}_\alpha^T \mathbf{E}_\alpha$$

$$r \leftarrow r + 1;$$

**end while**

$$\mathbf{z}_{k+1} \leftarrow \mathbf{z}_k + \alpha_k \cdot \Delta\mathbf{z}$$

$$k \leftarrow k + 1$$

**end while**

---

### 4.2.3. Ejemplo de formulación del problema de generación de funciones

Al igual que en el problema de trayectorias, se ha tomado el mecanismo cuadrilátero articulado como ejemplo sobre el que desarrollar la formulación de la metodología propuesta.

El problema de generación de funciones se plantea para este mecanismo como la coordinación entre las coordenadas angulares entre los dos elementos que presentan articulación fija. El elemento acoplador se puede modelizar como una única barra binaria. El esquema del mecanismo se muestra en la Figura 4-17.

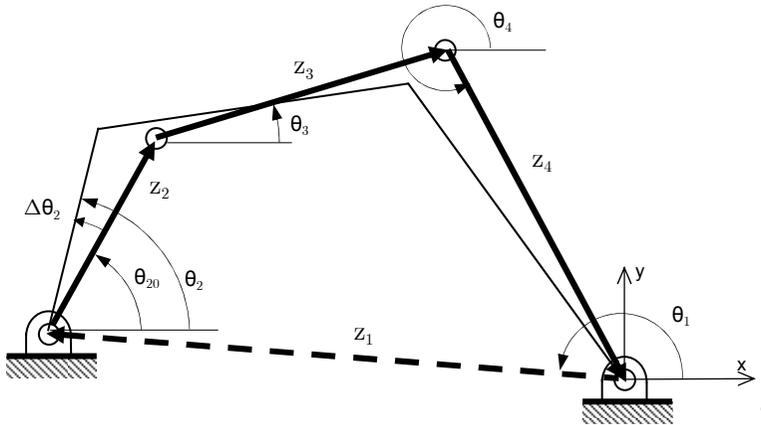


Figura 4-17. Esquema del mecanismo 4b para formulación problema GF

Se toma el elemento 2 como elemento conductor del movimiento, siendo por tanto  $\theta_2$  la coordenada independiente. El vector de diseño está compuesto por las longitudes de las barras, y la posición angular de la barra fija.

$$\mathbf{z}^T = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \ \theta_1] \quad (4-75)$$

Se define una serie de valores para dicha coordenada, en el orden en que deben alcanzarse. Los requerimientos de diseño establecen una correspondencia entre cada coordenada  $\theta_2^i$  y  $\theta_4^i$ . Así, los requisitos de diseño quedan establecidos tal y como se recogen en la siguiente tabla.

Posición barra conductora	Posición barra de salida
$\theta_2$	$\theta_4$
$\theta_2^1$	$\theta_4^1$
$\theta_2^2$	$\theta_4^2$
...	...
$\theta_2^{n\text{pos}}$	$\theta_4^{n\text{pos}}$

**Tabla 4-16. Requisitos de diseño ejemplo formulación problema GF**

La posición angular de la barra 4 constituye el único parámetro funcional del problema. Para todas las posiciones de precisión se tiene

$$\delta_g^T = \left[ \theta_{4,g}^1 \quad \theta_{4,g}^2 \quad \dots \quad \theta_{4,g}^{n\text{pos}} \right] \quad (4-76)$$

El error de síntesis se define como la diferencia entre las posiciones generada y deseada de la barra 4, para cada posición de precisión.

$$\varepsilon(\delta_g^i) = \left( \theta_{4,g}^i - \theta_{4,d}^i \right) \quad (4-77)$$

Y para el conjunto de posiciones de precisión

$$\varepsilon(\delta_g) = \left\{ \begin{array}{c} \theta_{4,g}^1 - \theta_{4,d}^1 \\ \theta_{4,g}^2 - \theta_{4,d}^2 \\ \dots \\ \theta_{4,g}^{n\text{pos}} - \theta_{4,d}^{n\text{pos}} \end{array} \right\} \quad (4-78)$$

Para la determinación en cada posición de precisión del parámetro funcional correspondiente, se establece una ecuación. Se puede escribir como

$$S^i(\delta_g^i, \mathbf{z}) = \left( -z_4 \cos \theta_4^i - z_1 \cos \theta_1 - z_2 \cos \theta_2 \right)^2 + \left( -z_4 \sin \theta_4^i - z_1 \sin \theta_1 - z_2 \sin \theta_2 \right)^2 - z_3^2 \quad (4-79)$$

Debido a que  $\theta_4$  es al mismo tiempo un parámetro funcional y una variable generalizada, la ecuación que relaciona  $\theta_2^i$  con  $\theta_4^i$  se puede considerar tanto una restricción cinemática como de síntesis, siendo ésta la única que considera el problema.

$$\Phi^i(\delta_g^i, \mathbf{z}) \equiv S^i(\delta_g^i, \mathbf{z}) \quad (4-80)$$

Para todas posiciones de precisión

$$\Theta(\mathbf{z}, \delta_g) = \begin{Bmatrix} \Phi^1(\delta_g^i, \mathbf{z}) \\ \Phi^1(\delta_g^i, \mathbf{z}) \\ \dots \\ \Phi^{npos}(\delta_g^i, \mathbf{z}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi^1(\mathbf{w}^1(\mathbf{z}), \mathbf{z}) \\ \Phi^2(\mathbf{w}^2(\mathbf{z}), \mathbf{z}) \\ \dots \\ \Phi^{npos}(\mathbf{w}^{npos}(\mathbf{z}), \mathbf{z}) \end{Bmatrix} \quad (4-81)$$

La función objetivo se define como un problema de mínimos cuadrados a partir del error (4-78).

$$FES = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{npos} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\boldsymbol{\delta}_g) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}_g) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{npos} [(\theta_{4,g}^i - \theta_{40,g}) - (\theta_{4,d}^i - \theta_{40,d})]^2 \quad (4-82)$$

La condición de mínimo nos proporciona la dirección de búsqueda según la ecuación (3-29), donde la matriz Jacobiana se calcula según

$$\mathbf{J} = - \left[ \frac{d \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^i(\mathbf{z}))}{d \mathbf{w}} \right] \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}^i(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}^i(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right] \quad (4-83)$$

La expresión analítica del primer término para el ejemplo propuesto se calcula directamente. Teniendo en cuenta el vector de variables dependientes  $\mathbf{w}^i = [\delta_g^i] = [\theta_4^i]$ , y la definición del error según la fórmula (4-77). Para una posición genérica tiene la forma

$$\left[ \frac{d \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^i(\mathbf{z}))}{d \mathbf{w}^i} \right] = [1] \quad (4-84)$$

Para el conjunto de posiciones

$$\left[ \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}(\mathbf{z}))}{\partial \mathbf{w}} \right] = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{Bmatrix}_{npos \times 1} \quad (4-85)$$

El segundo de término de la matriz Jacobiana se calcula a partir de la ecuación de restricción (4-79). Para una posición genérica resulta

$$\left[ \frac{\partial \Phi(w^i(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial w} \right]^{-1} = \left[ 1 / \left( 2(-z_4 \cos \theta_4^i - z_1 - z_2 \cos \theta_2^i) \cdot z_4 \sin \theta_4^i - \right. \right. \quad (4-86)$$

$$\left. \left. -(-z_4 \sin \theta_4^i - z_2 \sin \theta_2^i) \cdot z_4 \cos \theta_4^i \right) \right]$$

Por último, el tercer término de  $\mathbf{J}$ , para una posición “ $i$ ” se puede escribir como

$$\left[ \frac{\partial \Phi(w^i(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right] = \begin{bmatrix} -2 \cdot (-z_4 \cos \theta_4^i - z_1 \cos \theta_1 - z_2 \cos \theta_2^i) \cdot \cos \theta_1 - 2 \cdot (-z_4 \sin \theta_4^i - z_1 \sin \theta_1 - z_2 \sin \theta_2^i) \cdot \sin \theta_1 \\ -2 \cdot (-z_4 \cos \theta_4^i - z_1 \cos \theta_1 - z_2 \cos \theta_2^i) \cdot \cos \theta_2^i - 2 \cdot (-z_4 \sin \theta_4^i - z_1 \sin \theta_1 - z_2 \sin \theta_2^i) \cdot \sin \theta_2^i \\ -2 \cdot z_3 \\ -2 \cdot (-z_4 \cos \theta_4^i - z_1 \cos \theta_1 - z_2 \cos \theta_2^i) \cdot \cos \theta_4^i - 2 \cdot (-z_4 \sin \theta_4^i - z_1 \sin \theta_1 - z_2 \sin \theta_2^i) \cdot \sin \theta_4^i \\ 2z_1 \cdot (-z_4 \cos \theta_4^i - z_1 \cos \theta_1 - z_2 \cos \theta_2^i) \cdot \sin \theta_1 - 2z_1 \cdot (-z_4 \sin \theta_4^i - z_1 \sin \theta_1 - z_2 \sin \theta_2^i) \cdot \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (4-87)$$

Obtenida la matriz Jacobiana para el total de las posiciones de precisión  $\mathbf{J}$ , la dirección de búsqueda se calcula como  $d\mathbf{z} = -[\mathbf{J}^T \mathbf{J}] \mathbf{J}^T \varepsilon$ .

### • *Cálculo del coeficiente de tamaño de paso*

Como se ha explicado en el capítulo 3, el cálculo del coeficiente de tamaño de paso  $\alpha$ , se plantea como un subproblema de optimización donde la única variable de diseño es dicho coeficiente. Dentro de este subproblema de optimización el mecanismo queda definido mediante unas variables locales que se denominan como “candidatas” formadas a partir del valor de las variables de diseño para la iteración general actual, y el valor de  $\alpha$  actualizado en cada subiteración, según la expresión (3-33). En el ejemplo presentado, dichas variables candidatas se formulan como

$$\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \\ \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \\ \hat{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + \alpha \cdot dz_1 \\ z_2 + \alpha \cdot dz_2 \\ z_3 + \alpha \cdot dz_3 \\ z_4 + \alpha \cdot dz_4 \\ \theta_1 + \alpha \cdot d\theta_1 \end{bmatrix} \quad (4-88)$$

La ecuación de restricción para una posición genérica del cuadrilátero

$$\begin{aligned} \Phi(\hat{\mathbf{z}}, \delta_g^i) = & \left( -\hat{z}_4 \cos \theta_4^i - \hat{z}_1 \cos \hat{\theta}_1 - \hat{z}_2 \cos \theta_2^i \right)^2 + \\ & + \left( -\hat{z}_4 \sin \theta_4^i - \hat{z}_1 \sin \hat{\theta}_1 - \hat{z}_2 \sin \theta_2^i \right)^2 - \hat{z}_3^2 \end{aligned} \quad (4-89)$$

Y los distintos términos que forman la matriz Jacobiana para una posición,

$$\mathbf{J} = - \left[ \frac{d\varepsilon(\mathbf{w}(\alpha))}{d\mathbf{w}} \right] \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\alpha), \hat{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\alpha), \hat{\mathbf{z}})}{\partial \alpha} \right] \quad (4-90)$$

Tienen la forma

$$\left[ \frac{d\varepsilon^i(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}))}{d\mathbf{w}^i} \right] = [1] \quad (4-91)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}^i(\hat{\mathbf{z}}), \hat{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} = & \left[ 1 / \left( 2 \left( -\hat{z}_4 \cos \theta_4^i - \hat{z}_1 \cos \hat{\theta}_1 - \hat{z}_2 \cos \theta_2^i \right) \cdot \hat{z}_4 \sin \theta_4^i - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( -\hat{z}_4 \sin \theta_4^i - \hat{z}_1 \sin \hat{\theta}_1 - \hat{z}_2 \sin \theta_2^i \right) \cdot \hat{z}_4 \cos \theta_4^i \right) \right] \end{aligned} \quad (4-92)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}^i(\hat{\mathbf{z}}), \hat{\mathbf{z}})}{\partial \alpha} \right] = & \left[ 2 \left( -\hat{z}_4 \cos \theta_4^i - \hat{z}_1 \cos \hat{\theta}_1 - \hat{z}_2 \cos \theta_2^i \right) \cdot \right. \\ & \cdot \left( -d\hat{z}_4 \cos \theta_4^i - d\hat{z}_1 \cos \hat{\theta}_1 + \hat{z}_1 \sin \hat{\theta}_1 - d\hat{z}_2 \cos \theta_2^i \right) + \\ & + 2 \left( -\hat{z}_4 \sin \theta_4^i - \hat{z}_1 \sin \hat{\theta}_1 - \hat{z}_2 \sin \theta_2^i \right) \cdot \\ & \left. \left( -d\hat{z}_4 \sin \theta_4^i - d\hat{z}_1 \sin \hat{\theta}_1 - \hat{z}_1 \cos \hat{\theta}_1 - d\hat{z}_2 \sin \theta_2^i \right) - 2 \hat{z}_3 dz_3 \right] \end{aligned} \quad (4-93)$$

Finalmente en este ejemplo, cabe destacar que el uso de coordenadas mixtas permite la formulación del problema con una única ecuación de restricción cinemática. Si se hubiesen empleado coordenadas naturales habría sido necesario plantear tres ecuaciones de restricción cinemática en la forma (3-4). Asimismo los ángulos de las barras de entrada y salida habría que introducirlos en las ecuaciones de síntesis u obtenerlos de forma indirecta.

#### 4.2.4. Ejemplos de validación

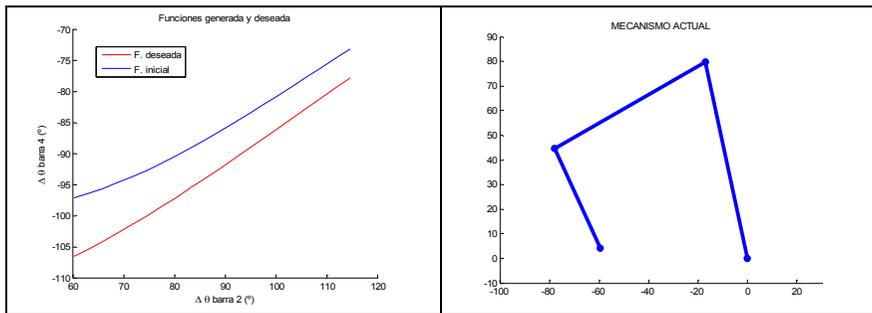
Para mostrar la validez de los algoritmos presentados para la resolución del problema de generación de funciones se han considerado dos mecanismos: cuadrilátero articulado y mecanismo Watt tipo II. Sobre el primero de ellos se aplica tanto el algoritmo para la resolución del problema de coordinación entre las posiciones angulares absolutas, como aquél para posiciones angulares relativas. El mecanismo Watt II se utiliza para mostrar la aplicabilidad de la metodología propuesta a una síntesis multiobjetivo. El problema consiste en la coordinación simultánea de las posiciones angulares de la barra de entrada con las de otras dos barras del mecanismo que se consideran como los elementos de salida. Adicionalmente se establece una restricción de desigualdad, limitando el ángulo de desviación máximo entre la barra de entrada y la contigua a lo largo del movimiento del mecanismo.

- *Cuadrilátero articulado*

##### Posiciones absolutas

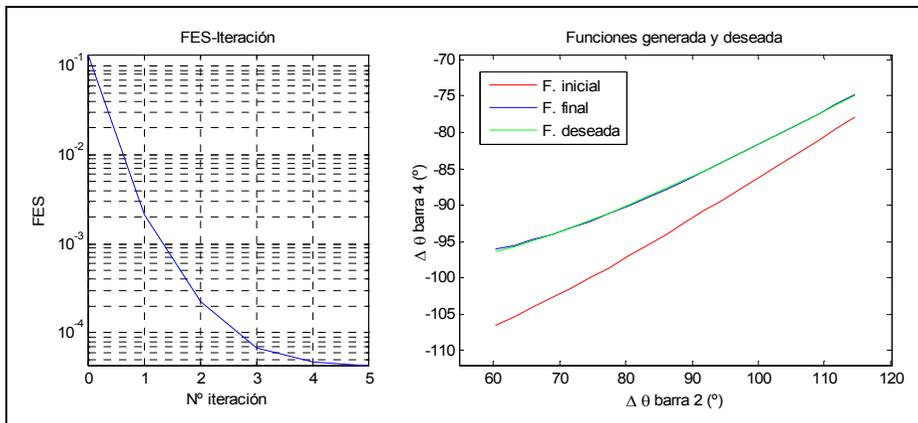
En este primer ejemplo se presenta un problema de generación de funciones especificado para posiciones absolutas tanto de la barra de entrada como la de salida, en la forma (4-68). El mecanismo se define según el esquema de la Figura 4-17, siendo la barra 2 el elemento de entrada y la barra 4 el de salida. Se consideran un total de 20 posiciones de precisión espaciadas, para la barra de entrada, cada 0.05 radianes. El algoritmo de síntesis se ha sintonizado con  $\beta=0.1$  para el cálculo del coeficiente de tamaño de paso, y con constantes  $\varepsilon_a=1.0e-4$ ,  $\varepsilon_r=1.0e-4$ .

En la Figura 4-18 se muestra la función deseada (verde) y la generada (rojo) por el mecanismo inicial, junto con una representación de éste.



**Figura 4-18. Ejemplo 4b GF posiciones absolutas. Mecanismo inicial y trayectorias inicial y deseada.**

La evolución del proceso de síntesis a través de la variación del valor de la función objetivo se muestra en la parte izquierda de la Figura 4-19. En su parte derecha se representan las funciones deseada (verde), generada inicial (rojo) y generada final (azul)



**Figura 4-19. Ejemplo 4b GF posiciones absolutas. Evolución proceso de síntesis y función óptima.**

Los valores de las variables de diseño tanto del mecanismo inicial como del resultante tras el proceso de síntesis se recogen en la Tabla 4-17.

Variables de diseño	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$\theta_1$
Valores iniciales	59.65	44.34	70.29	81.50	3.07
Valores óptimos	59.13	38.46	70.71	84.57	3.15

**Tabla 4-17. Ejemplo 4b GF posiciones absolutas. Variables de diseño.**

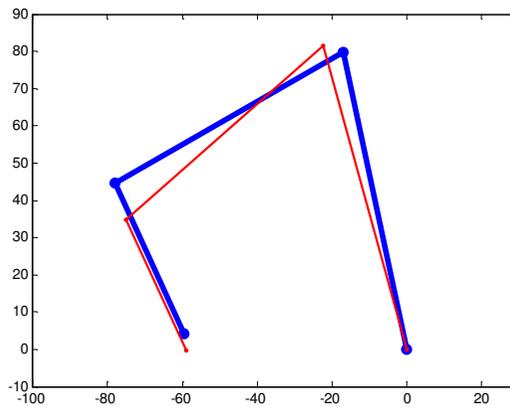
Los resultados numéricos en cuanto al valor de la función objetivo y el error máximo de síntesis para todas las posiciones de precisión se muestran en la tabla siguiente. Igualmente se muestran en dicha tabla el número de

iteraciones y de evaluaciones de la función objetivo hasta que el algoritmo ha alcanzado la convergencia según el criterio de parada.

FES inicial	FES final	$\epsilon$ máximo inicial	$\epsilon$ máximo final	Nº iteraciones	Nº evaluac. FES
0.135	4.32E-05	10.23°	0.273°	5	730

**Tabla 4-18. Ejemplo 4b GF posiciones absolutas. Valor de la función objetivo, error de síntesis y esfuerzo computacional.**

Por último, se muestra en la Figura 4-20 un esquema del mecanismo óptimo (azul) junto con el mecanismo de partida para el proceso iterativo. En este caso, ambos dibujos corresponden a la posición final.



**Figura 4-20. Ejemplo 4b GF posiciones absolutas. Mecanismo inicial y óptimo.**

### Posiciones relativas

El planteamiento de la coordinación entre la barra de entrada y la de salida en términos de incrementos relativos del ángulo girado por cada una de las barras respecto de su posición inicial se lleva a cabo definiendo el error de síntesis como

$$\epsilon = \Delta\theta_{4,g} - \Delta\theta_{4,d} \quad (4-94)$$

Donde  $\Delta\theta_4$  hace referencia a la variación del ángulo de orientación de la barra 4 respecto de su valor para la primera posición de precisión  $\theta_{40}$ . Si se quiere obtener directamente el valor de  $\Delta\theta_4$  es preciso considerarla como variable dependiente junto con su valor inicial.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_{40} & \Delta\theta_4 \end{bmatrix} \quad (4-95)$$

Por tanto, son necesarias dos ecuaciones de restricción de tipo cinemático que se formulan como

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{z}) = \left\{ \begin{array}{l} (-z_1 \cos(\theta_{40} + d\theta_4) - z_1 \cos(\theta_1) - z_2 \cos(\theta_{20} + d\theta_2))^2 + (-z_1 \sin(\theta_{40} + d\theta_4) - z_1 \sin(\theta_1) - z_2 \sin(\theta_{20} + d\theta_2))^2 - z_3^2 \\ (-z_1 \cos(\theta_{40}) - z_1 \cos(\theta_1) - z_2 \cos(\theta_{20}))^2 + (-z_1 \sin(\theta_{40}) - z_1 \sin(\theta_1) - z_2 \sin(\theta_{20}))^2 - z_3^2 \end{array} \right\} = 0 \quad (4-96)$$

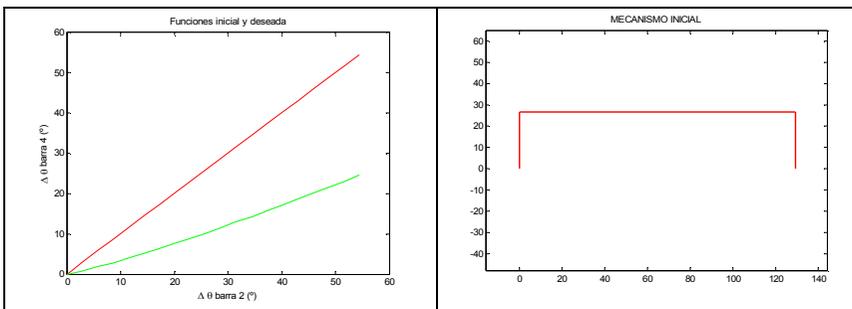
Como puede verse, la segunda ecuación es semejante a la primera pero válida únicamente para la posición inicial.

El vector de variables de diseño incluye, al igual que el caso anterior, la longitud de todas las barras. Por el contrario, no considera la orientación de la barra fija, pero sí la orientación inicial de la barra 2.

$$\mathbf{z}^T = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & \theta_{20} \end{bmatrix} \quad (4-97)$$

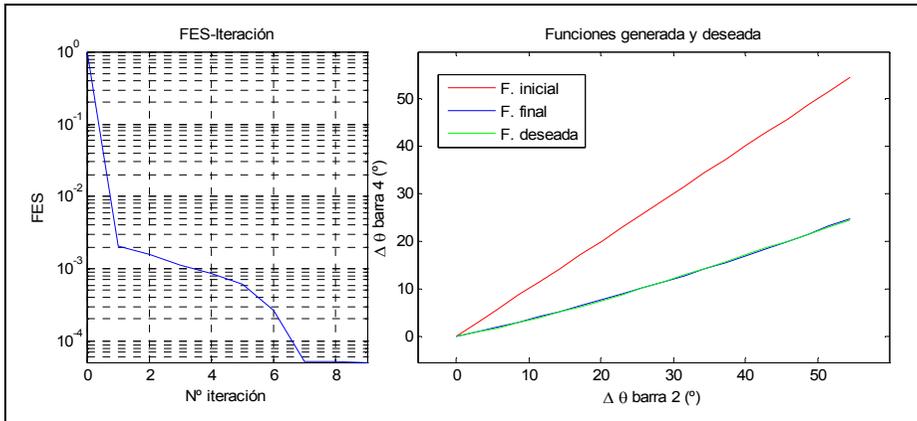
Nuevamente se consideran 20 posiciones de precisión cada 0,05 radianes de la barra de entrada. Los parámetros de sintonización del algoritmo son idénticos al caso anterior. A continuación se detallan los resultados obtenidos.

En la Figura 4-21 se muestran la función deseada (verde) y la generada (rojo) por el mecanismo inicial, el cual se esquematiza en la parte derecha de la figura.



**Figura 4-21. Ejemplo 4b GF posiciones relativas. Mecanismo inicial y trayectorias inicial y deseada.**

La evolución del valor de la función objetivo junto con la comparativa gráfica entre las funciones deseada, generada inicial y generada final se muestran en la Figura 4-22.



**Figura 4-22. Ejemplo 4b GF posiciones relativas. Evolución proceso de síntesis y función óptima.**

En este caso, como ya se ha explicado, el ángulo de orientación de la barra fija es sustituido como variable de diseño por el ángulo inicial de la barra de entrada. Los valores de las variables de diseño se recogen en la siguiente tabla

VARIABLES DE DISEÑO	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$\theta_{20}$
Valores iniciales	129.5	26.8	129.5	26.8	1.57
Valores óptimos	115.3	14.4	143.7	40.2	0.70

**Tabla 4-19. Ejemplo 4b GF posiciones relativas. Variables de diseño.**

Los resultados numéricos en cuanto a valor de función objetivo y error de síntesis máximo se muestran en la siguiente tabla. El esfuerzo de cálculo queda reflejado en el número de iteraciones y especialmente en el número de evaluaciones de la función objetivo. Ambos valores también están recogidos en la siguiente tabla.

FES inicial	FES final	$\epsilon$ máximo inicial	$\epsilon$ máximo final	Nº iteraciones	Nº evaluac. FES
1.0148	5.1E-05	29.9661°	0.2284°	9	609

**Tabla 4-20. Ejemplo 4b GF posiciones relativas. Valor de la función objetivo, error de síntesis y esfuerzo computacional.**

Por último, en la Figura 4-23 se representan los mecanismo inicial (rojo) y óptimo (azul) para la última posición de precisión.

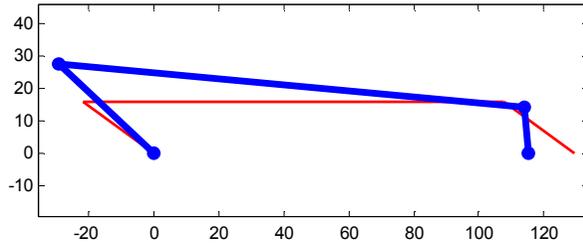


Figura 4-23. Ejemplo 4b GF posiciones relativas. Mecanismo inicial y óptimo.

• *Mecanismo Watt tipo II*

La definición del mecanismo Watt se ha realizado siguiendo el esquema de la Figura 4-24. El elemento ternario móvil se define como tres barras binarias formando un triángulo. Por su parte, el elemento fijo está definido a través de las barras 1 y 9.

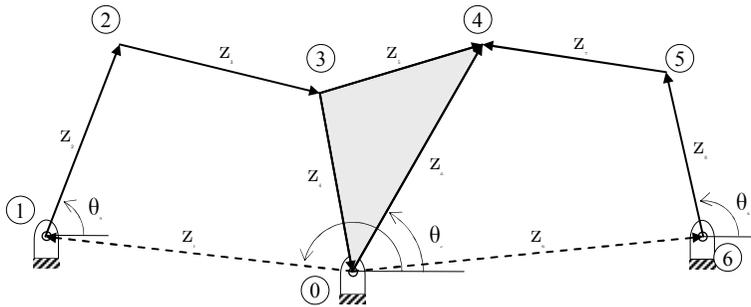


Figura 4-24. Esquema mecanismo Watt II

Las variables de diseño están constituidas por las longitudes de todas las barras, los ángulos de orientación de las barras 1 y 9, y el ángulo de la barra 2 para la primera posición de precisión.

$$\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \ z_5 \ z_6 \ z_7 \ z_8 \ z_9 \ \theta_1 \ \theta_9 \ \theta_{20}] \quad (4-98)$$

El problema se define como la coordinación simultánea de las posiciones relativas a la posición de partida de las barras 6 y 8 respecto de la 2. Adicionalmente se introduce una restricción sobre el ángulo de desviación entre las barras 2 y 3.

La definición de los requisitos de diseño en términos relativos hace que cada ángulo de orientación de cada barra de lugar a dos variables: una que hace referencia al valor de dicho ángulo en la posición inicial, y otra a la variación respecto de dicho valor. Por su parte, la restricción de desigualdad sobre un parámetro variable durante el movimiento del mecanismo hace que sea necesario utilizar la metodología anteriormente expuesta que considera la variable holgura correspondiente como dependiente. En consecuencia, las variables dependientes quedan como

$$\mathbf{q}^T = \left[ \theta_{30} \ \Delta\theta_3 \ \theta_{50} \ \Delta\theta_5 \ \theta_{60} \ \Delta\theta_6 \ \theta_{80} \ \Delta\theta_8 \ h \right] \quad (4-99)$$

Y las ecuaciones de restricción

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{z}) = \left. \begin{array}{l} z_1 \cos(\theta_{10}) + z_2 \cos(\theta_{20} + \Delta\theta_2) + z_3 \cos(\theta_{30} + \Delta\theta_3) + z_5 \cos(\theta_{50} + \Delta\theta_5) \\ z_1 \cos(\theta_{10}) + z_2 \cos(\theta_{20}) + z_3 \cos(\theta_{30}) + z_5 \cos(\theta_{50}) \\ z_1 \sin(\theta_{10}) + z_2 \sin(\theta_{20} + \Delta\theta_2) + z_3 \sin(\theta_{30} + \Delta\theta_3) + z_5 \sin(\theta_{50} + \Delta\theta_5) \\ z_1 \sin(\theta_{10}) + z_2 \sin(\theta_{20}) + z_3 \sin(\theta_{30}) + z_5 \sin(\theta_{50}) \\ [-z_5 \cos(\theta_{50} + \Delta\theta_5) + z_6 \cos(\theta_{60} + \Delta\theta_6)]^2 + [-z_5 \sin(\theta_{50} + \Delta\theta_5) + z_6 \sin(\theta_{60} + \Delta\theta_6)]^2 - z_4^2 \\ [-z_2 \cos(\theta_{20}) + z_6 \cos(\theta_{60})]^2 + [-z_2 \sin(\theta_{20}) + z_6 \sin(\theta_{60})]^2 - z_4^2 \\ [-z_6 \cos(\theta_{60} + \Delta\theta_6) - z_9 \cos(\theta_{90}) - z_8 \cos(\theta_{80} + \Delta\theta_8)]^2 + [-z_6 \sin(\theta_{60} + \Delta\theta_6) - z_9 \sin(\theta_{90}) - z_8 \sin(\theta_{80} + \Delta\theta_8)]^2 - z_7^2 \\ [-z_6 \cos(\theta_{60}) - z_9 \cos(\theta_{90}) - z_8 \cos(\theta_{80})]^2 + [-z_6 \sin(\theta_{60}) - z_9 \sin(\theta_{90}) - z_8 \sin(\theta_{80})]^2 - z_7^2 \\ \cos(\pi/2 - (\theta_{20} + \Delta\theta_2) + (\theta_{30} + \Delta\theta_3)) - h - \cos(\theta_{d,\max}) - 0 \end{array} \right\} = 0 \quad (4-100)$$

La función de error de síntesis incluye la variable holgura en la forma

$$\varepsilon^T = \left[ \Delta\theta_{s,g} \ -\Delta\theta_{s,d} \quad \Delta\theta_{6,g} \ -\Delta\theta_{6,d} \quad \Gamma \cdot (\|h\| - h) \right] \quad (4-101)$$

La primera simulación se realiza sin considerar la restricción sobre el ángulo de desviación. Esto se puede llevar a cabo de dos maneras diferentes, bien aplicando un coeficiente de ponderación  $\Gamma$  igual a 0, o estableciendo un valor máximo permitido para dicho ángulo suficientemente grande. En ambos casos los resultados obtenidos, y que se muestran a continuación, han sido idénticos. Estos resultados han sido obtenidos con tamaño de paso constantes igual a 0.1, por lo que el número de iteraciones y de evaluaciones de la función objetivo FES son coincidentes. El criterio de parada se ha establecido con las constantes  $\varepsilon_a = 10^{-10}$  y  $\varepsilon_r = 10^{-3}$ .

La siguiente tabla muestra los valores de las variables de diseño iniciales y las obtenidas tras el proceso de optimización.

VARIABLES DE DISEÑO	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$z_7$	$z_8$	$z_9$	$\theta_{10}$	$\theta_{90}$	$\theta_{20}$
Valores iniciales	7.80	6.16	9.01	3.83	6.08	4.15	6.73	9.62	5.25	3.14	0.00	1.68
Valores óptimos	8.01	7.02	8.80	3.77	5.18	4.39	6.80	9.49	5.18	3.41	-0.246	1.66

Tabla 4-21. Ejemplo Watt II GF sin desigualdad. Variables de diseño

La Figura 4-25 muestra en forma gráfica el error sobre el ángulo de desviación y el error estructural para las diferentes posiciones de precisión. Las gráficas en color rojo corresponden a los valores iniciales, y en color azul a los del mecanismo óptimo. Igualmente en dicha gráfica se muestra la evolución de la función objetivo hasta que el algoritmo alcanza el criterio de parada.

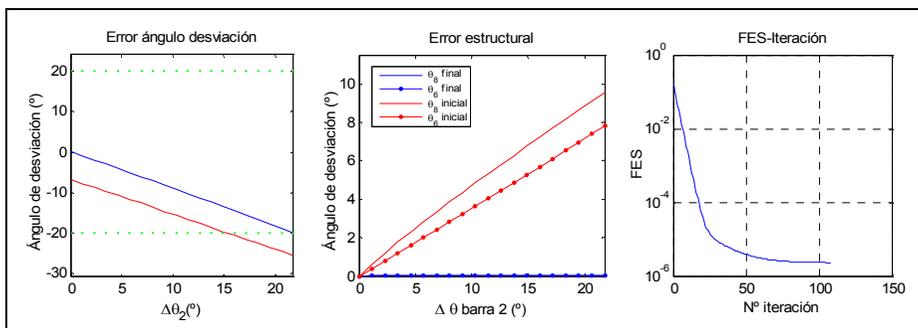


Figura 4-25. Ejemplo Watt II GF sin desigualdad. Resultados gráficos.

Finalmente se muestra en la siguiente tabla los valores numéricos de la función objetivo, el error de síntesis y el ángulo de desviación.

FES inicial	FES final	$\epsilon(\theta_8)$ máx. inicial	$\epsilon(\theta_6)$ máx. inicial	$\epsilon(\theta_8)$ máx. final	$\epsilon(\theta_6)$ máx. final	$\theta_{desviación}$ permitido	$\theta_{desviación}$ máximo inicial	$\theta_{desviación}$ máximo final	Nº iter
0.163	2.3E-06	9.6°	7.8°	0.05°	0.01°	-	-25.50 °	-22.83 °	108

Tabla 4-22. Ejemplo Watt II GF sin desigualdad. Valor de la función objetivo, error de síntesis y esfuerzo computacional.

Si se incluye en la definición del problema la condición de que el ángulo de desviación entre las barras 2 y 3 no supere los 20°, la solución anterior no sería válida. Por lo tanto es necesario introducir una restricción de desigualdad en la formulación del problema, tal y como se ha explicado anteriormente. A continuación se muestran los resultados obtenidos tras la aplicación de dicha restricción. En la tabla contigua se muestran los resultados en cuanto a valores de las variables de diseño.

Variables de diseño	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$z_7$	$z_8$	$z_9$	$\theta_{10}$	$\theta_{90}$	$\theta_{20}$
Valores iniciales	7.80	6.16	9.01	3.83	6.08	4.15	6.73	9.62	5.25	3.14	0.00	1.68
Valores óptimos	8.08	7.01	8.72	3.77	5.21	4.40	6.80	9.49	5.19	3.44	-0.251	1.63

Tabla 4-23. Ejemplo Watt II GF con desigualdad. Variables de diseño.

La Figura 4-26 muestra los valores referentes al ángulo de desviación, error estructural y evolución de la función objetivo.

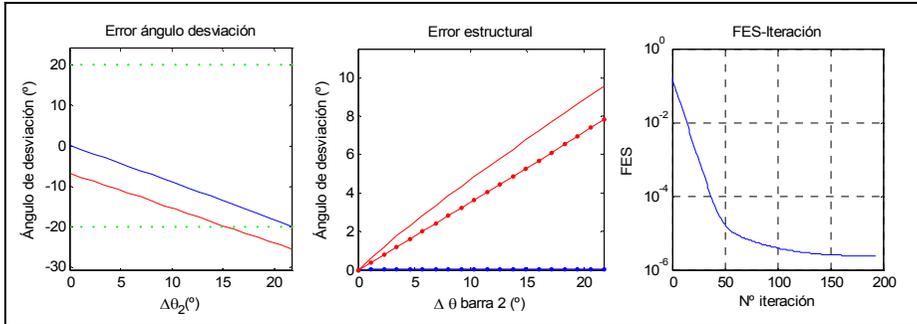


Figura 4-26. Ejemplo Watt II GF con desigualdad. Resultados gráficos.

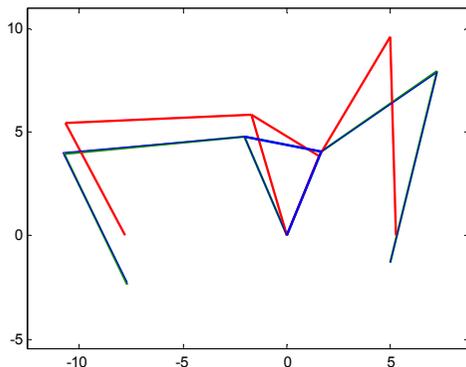
Los resultados numéricos de la función objetivo, error estructural y ángulo de desviación se recogen en la tabla siguiente.

FES inicial	FES final	$\epsilon(\theta_s)_{\text{máx. inicial}}$	$\epsilon(\theta_6)_{\text{máx. inicial}}$	$\epsilon(\theta_8)_{\text{máx. final}}$	$\epsilon(\theta_6)_{\text{máx. final}}$	$\theta_{\text{desviación permitido}}$	$\theta_{\text{desviación máximo inicial}}$	$\theta_{\text{desviación máximo final}}$	Nº iter
0.163	2.34E-06	9.6°	7.8°	0.051°	0.008°	20 °	-25.50 °	-20.00 °	194

Tabla 4-24. Ejemplo Watt II GF con desigualdad. Valor de la función objetivo, error de síntesis y esfuerzo computacional.

El diseño obtenido para el mecanismo satisface la condición sobre el ángulo máximo de desviación, el cual se alcanza en el extremo del recorrido sin superar el valor máximo fijado. El incremento del valor de la función objetivo como consecuencia de la introducción de la restricción adicional resulta insignificante desde un punto de vista práctico.

La Figura 4-27 muestra los mecanismo inicial (rojo), óptimo sin restricción sobre el ángulo de desviación (verde), y óptimo restringido (azul).



**Figura 4-27. Ejemplo Watt II GF con restricción. Mecanismo inicial y finales**

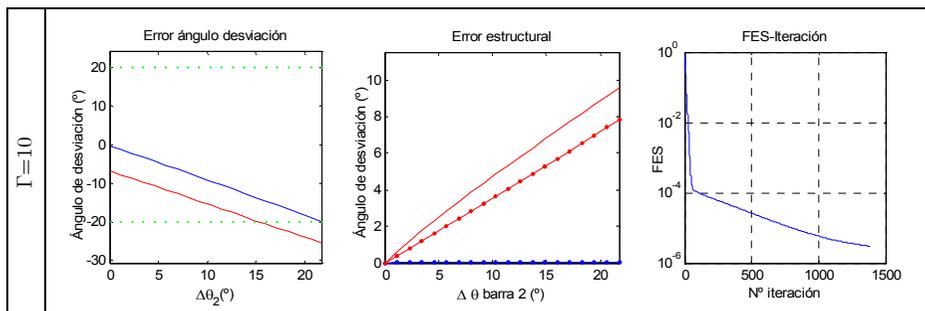
Se han probado distintos valores del factor de ponderación  $\Gamma$  sobre el término del error correspondiente a la restricción de desigualdad para estudiar su efecto sobre la convergencia del algoritmo. Los valores ensayados son 1, 10, 100 y 500. Los resultados para  $\Gamma=1$  son los mostrados anteriormente. A continuación se resumen los resultados obtenidos con el resto de valores.

La Tabla 4-25 muestra los valores óptimos de las variables de diseño para cada valor del coeficiente de ponderación  $\Gamma$ .

Variables de diseño		$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$z_7$	$z_8$	$z_9$	$\theta_{10}$	$\theta_{90}$	$\theta_{20}$
$\Gamma$	1	8.08	7.01	8.72	3.77	5.21	4.40	6.80	9.49	5.19	3.44	-0.251	1.63
	10	7.96	7.12	8.70	3.76	5.28	4.40	6.81	9.47	5.20	3.44	-0.252	1.63
	100	7.38	7.02	9.29	3.73	5.28	4.41	6.83	9.46	5.17	3.49	-0.380	1.71
	500	7.54	7.11	9.09	3.74	5.29	4.43	6.83	9.46	5.17	3.48	-0.334	1.68

**Tabla 4-25. Ejemplo Watt II. Valores óptimos de las variables de diseño para distintos  $\Gamma$ .**

La Figura 4-28 muestra los valores referentes al ángulo de desviación, error estructural y evolución de la función objetivo.



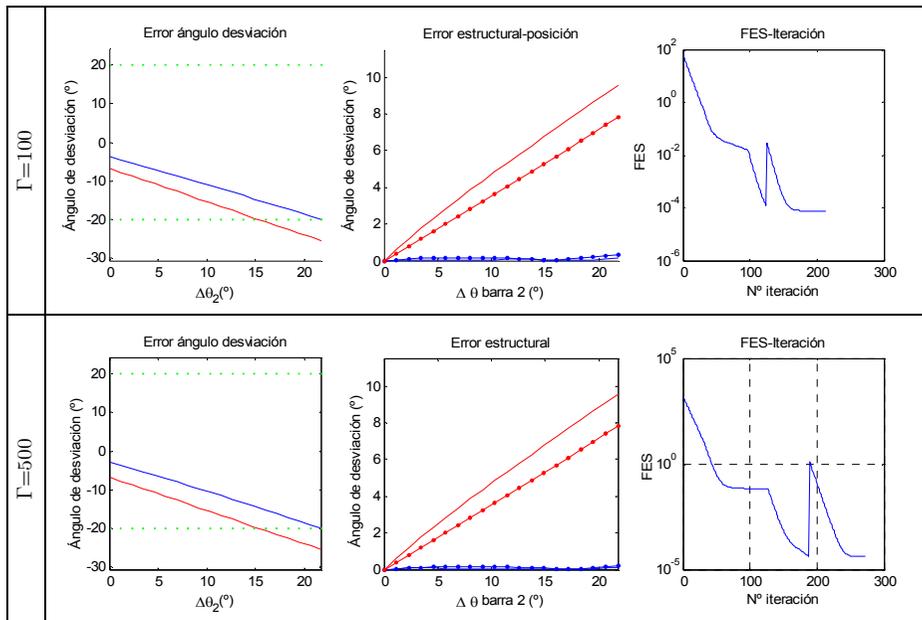


Figura 4-28. Ejemplo Watt II GF con desigualdad. Resultados gráficos para distintos  $\Gamma$ .

Los resultados numéricos de la función objetivo, error estructural y ángulo de desviación se recogen en la tabla siguiente.

$\Gamma$	FES inicial	FES final	$\epsilon(\theta_8)_{\text{máx. inicial}}$	$\epsilon(\theta_6)_{\text{máx. inicial}}$	$\epsilon(\theta_8)_{\text{máx. final}}$	$\epsilon(\theta_6)_{\text{máx. final}}$	$\theta_{\text{desviación permitido}}$	$\theta_{\text{desviación máximo inicial}}$	$\theta_{\text{desviación máximo final}}$	Nº iter
1	0.163	2.3E-06	9.6°	7.8°	0.051°	0.008°	20°	-25.5 °	-20.0 °	194
10	0.797	3.0E-06	9.6°	7.8°	0.054°	0.018°	20°	-25.5°	-20.0°	1387
100	63.58	7.3E-05	9.6°	7.8°	0.136°	0.328°	20°	-25.5°	-20.0°	214
500	1585.7	4.1E-05	9.6°	7.8°	0.103°	0.187°	20°	-25.5°	-20.0°	273

Tabla 4-26. Ejemplo Watt II GF con desigualdad. Valor de la función objetivo, error de síntesis y esfuerzo computacional. Varios  $\Gamma$ .

- *Discusión de resultados*

En el ejemplo basado en el cuadrilátero articulado, el planteamiento de la generación de funciones tanto en posiciones absolutas como en relativas se resuelve eficazmente.

De mayor complejidad resulta la síntesis del mecanismo Watt II. La generación simultánea de dos funciones se resuelve satisfactoriamente. Cuando se incluye la restricción sobre el ángulo de presión entre dos barras, el error final únicamente sufre un ligero incremento. Los mejores resultados se obtienen para valores bajos del factor de ponderación del término de penalización correspondiente al incumplimiento de la restricción adicional. El esfuerzo computacional es aproximadamente igual que el correspondiente al caso sin restricción, salvo para un factor de ponderación 10 que multiplica su valor por 7.

### **4.3. Aplicación al problema de guiado de sólido rígido**

#### **4.3.1. Introducción**

El problema de guiado de sólido rígido, GSR, consiste en encontrar un mecanismo en el cual uno de sus elementos pueda alcanzar una serie ordenada de puntos y orientaciones predefinidas a las que denominamos, en su conjunto, posiciones de precisión. Al igual que en el problema de generación de trayectorias, ciertas aplicaciones pueden requerir que cada punto de precisión corresponda con una determinada posición del elemento de entrada (problema coordinado), mientras que en otras sea indiferente la posición del elemento de entrada respecto del elemento guiado (problema no coordinado). En este trabajo se desarrolla la aplicación del método de síntesis óptima propuesto para ambos casos.

Para mecanismos planos, el problema de guiado añade al de generación de trayectoria un nuevo parámetro funcional que hace referencia a la orientación del elemento guiado. Debido a la semejanza entre ambos problemas, los desarrollos que se exponen en este apartado se centran principalmente en mostrar las diferencias que el nuevo parámetro introduce en la formulación del algoritmo respecto del presentado en el apartado 4.1.

### 4.3.2. Estrategias para el tratamiento del error de orientación

Cada posición de precisión queda definida por tres parámetros funcionales. Los dos primeros hacen referencia a la localización y el tercero a la orientación del elemento guiado.

$$\begin{aligned} \delta_d^T &= \left[ \delta_d^{1T} \quad \delta_d^{2T} \quad \dots \quad \delta_d^{iT} \quad \dots \quad \delta_d^{nposT} \right] = \\ &= \left[ x_d^1 \quad y_d^1 \quad \theta_d^1 \quad x_d^2 \quad y_d^2 \quad \theta_d^2 \quad \dots \quad x_d^i \quad y_d^i \quad \theta_d^i \quad \dots \quad x_d^{npos} \quad y_d^{npos} \quad \theta_d^{npos} \right] \end{aligned} \quad (4-102)$$

El error para una posición genérica se puede establecer de diversas formas. La más simple viene dada por la expresión

$$\epsilon^i(\delta_g^i) = (\delta_g^i - \delta_d^i) = \begin{Bmatrix} x_g^i - x_d^i \\ y_g^i - y_d^i \\ \Gamma(\theta_g^i - \theta_d^i) \end{Bmatrix} \quad (4-103)$$

Sin embargo, esta formulación tiene el inconveniente de la coexistencia de unidades lineales y angulares, con la consiguiente diferencia de escalas entre ambas. Si bien la constante  $\Gamma$  puede actuar como un factor corrector de escala, su ajuste depende de cada problema particular, dificultando la aplicación general de esta solución.

Otro tipo de alternativa consiste en definir el error de síntesis en términos adimensionales. Por ejemplo, la expresión siguiente plantea dicha función en términos relativos a los valores deseados.

$$\epsilon^i(\delta_g^i) = (\delta_g^i - \delta_d^i) = \begin{Bmatrix} \frac{x_g^i - x_d^i}{x_d^i} \\ \frac{y_g^i - y_d^i}{y_d^i} \\ \frac{\theta_g^i - \theta_d^i}{\theta_d^i} \end{Bmatrix} \quad (4-104)$$

El planteamiento del error según la expresión (4-104) resuelve el problema de la escala sin recurrir la necesidad de incluir nuevos factores. Sin embargo puede presentar problemas numéricos si alguno de los valores deseados es nulo. Esto se puede solventar mediante un cambio de sistema de referencia, pero complica y ralentiza el algoritmo. Una solución intermedia consiste en plantear el error en términos relativos respecto de unos valores de referencia no nulos. Éstos pueden ser, por ejemplo, las tolerancias lineales y angulares admisibles.

$$\epsilon^i(\delta_g^i) = (\delta_g^i - \delta_d^i) = \begin{Bmatrix} \frac{x_g^i - x_d^i}{Tol_{posición}} \\ \frac{y_g^i - y_d^i}{Tol_{posición}} \\ \frac{\theta_g^i - \theta_d^i}{Tol_{orientación}} \end{Bmatrix} \quad (4-105)$$

La obtención de dichas tolerancias es relativamente sencilla a partir de la aplicación y de los procedimientos de fabricación del mecanismo diseñado, pudiendo ser iguales para un gran número de mecanismos. Asimismo este procedimiento aporta al algoritmo un mejor comportamiento numérico al poder establecer como uno de los criterios de parada que la función de error se aproxime a la unidad en lugar de a un valor nulo.

Otra estrategia aplicable a este caso consiste en definir la función de error de síntesis FES, (función objetivo), como suma proporcional de una FES de posición y otra FES de orientación, tal y como queda reflejado en la expresión contigua. En coherencia con los desarrollos anteriores, cada una de estas FES parciales se define como la suma cuadrática del error de síntesis en cada posición de precisión.

$$\begin{aligned} FES &= \Psi \cdot FES_p + (1 - \Psi) \cdot FES_o = \\ &= \Psi \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{npos} \epsilon_p^{iT} \epsilon_p^i + (1 - \Psi) \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{npos} \epsilon_o^{iT} \epsilon_o^i \end{aligned} \quad (4-106)$$

$\epsilon_p^i$  y  $\epsilon_o^i$  representan respectivamente el error de posición y el error de orientación. El factor de proporcionalidad  $\psi$ , se define en tanto por uno. Definidos en los términos relativos anteriormente expuestos, se pueden escribir

$$\epsilon_p^i = \begin{Bmatrix} \frac{x_g^i - x_d^i}{Tol_p} \\ \frac{y_g^i - y_d^i}{Tol_p} \end{Bmatrix}; \quad \epsilon_o^i = \begin{Bmatrix} \theta_g^i - \theta_d^i \\ Tol_o \end{Bmatrix} \quad (4-107)$$

Estableciendo la condición de mínimo, se puede obtener la dirección de búsqueda

$$\begin{aligned}
\frac{d(FES)}{dz} &= 0; \\
\Psi (\mathbf{J}_p^T \boldsymbol{\varepsilon}_p) + (1 - \Psi) (\mathbf{J}_o^T \boldsymbol{\varepsilon}_o) &= 0 \\
\Psi \mathbf{J}_p^T \left( (\boldsymbol{\varepsilon}_p)_k + \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_p}{dz} \Big|_k \Delta \mathbf{z} \right) + (1 - \Psi) \mathbf{J}_o^T \left( (\boldsymbol{\varepsilon}_o)_k + \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_o}{dz} \Big|_k \Delta \mathbf{z} \right) &= 0 \\
\Psi \mathbf{J}_p^T (\boldsymbol{\varepsilon}_p)_k + \Psi \mathbf{J}_p^T \mathbf{J}_p \Big|_k \Delta \mathbf{z} + (1 - \Psi) \mathbf{J}_o^T (\boldsymbol{\varepsilon}_o)_k + (1 - \Psi) \mathbf{J}_o^T \mathbf{J}_o \Big|_k \Delta \mathbf{z} &= 0 \\
\left[ \Psi \mathbf{J}_p^T \mathbf{J}_p \Big|_k + (1 - \Psi) \mathbf{J}_o^T \mathbf{J}_o \Big|_k \right] \Delta \mathbf{z} &= - \left[ \Psi \mathbf{J}_p^T (\boldsymbol{\varepsilon}_p)_k + (1 - \Psi) \mathbf{J}_o^T (\boldsymbol{\varepsilon}_o)_k \right] \\
\Delta \mathbf{z} &= - \left[ \Psi \mathbf{J}_p^T \mathbf{J}_p + (1 - \Psi) \mathbf{J}_o^T \mathbf{J}_o \right]^{-1} \left[ \Psi \mathbf{J}_p^T \boldsymbol{\varepsilon}_p + (1 - \Psi) \mathbf{J}_o^T \boldsymbol{\varepsilon}_o \right]
\end{aligned} \tag{4-108}$$

Esta formulación resulta semejante a la obtenida a partir de una variación de la expresión (4-105) en la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i (\boldsymbol{\delta}_g^i) = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\Psi} \frac{(x_g^i - x_d^i)}{Tol_p} \\ \sqrt{\Psi} \frac{(y_g^i - x_d^i)}{Tol_p} \\ \sqrt{1 - \Psi} \frac{(\theta_g^i - \theta_d^i)}{Tol_o} \end{array} \right\} \tag{4-109}$$

Sin embargo las direcciones de búsqueda resultantes no son iguales en ambos casos. En la primera formulación, donde el error de síntesis engloba conjuntamente los términos debidos a la posición y a la orientación, la dirección de búsqueda sigue la forma general

$$\Delta \mathbf{z} = - \left[ \mathbf{J}^T \mathbf{J} \right]^{-1} \mathbf{J}^T \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4-110}$$

El término  $\mathbf{J}^T \boldsymbol{\varepsilon}$  corresponde exactamente con la matriz  $\left[ \Psi \mathbf{J}_p^T \boldsymbol{\varepsilon}_p + (1 - \Psi) \mathbf{J}_o^T \boldsymbol{\varepsilon}_o \right]$  de la segunda alternativa. Sin embargo, el primer término  $\left[ \mathbf{J}^T \mathbf{J} \right]^{-1}$ , no es idéntico a  $\left[ \Psi \mathbf{J}_p^T \mathbf{J}_p + (1 - \Psi) \mathbf{J}_o^T \mathbf{J}_o \right]^{-1}$  de la formulación alternativa.

### 4.3.3. Algoritmo de síntesis óptima de GSR con coordinación con la barra de entrada

Desde el punto de vista de la optimización el problema con coordinación es más sencillo de resolver que su equivalente no coordinado debido fundamentalmente, como ya se apuntó en el problema de trayectorias, a que el espacio de búsqueda es menor. En este apartado se presenta el algoritmo para la resolución para mecanismos planos del problema de guiado de sólido rígido con coordinación entre el elemento guiado y el elemento de entrada. De la forma habitual, se asume que dicho elemento de entrada es una manivela.

El algoritmo consta de los siguientes pasos:

1. Se establece un sistema de referencia y se definen respecto de él las posiciones de precisión en el orden en que deben alcanzarse según (4-102).
2. Se plantean analíticamente las ecuaciones de restricción respecto del mismo sistema de referencia anterior. Se define la FES bien según (3-23) y el error según (4-105), o mediante (4-106) y (4-107).
3. Se define un mecanismo inicial  $\mathbf{z}_0$  el cual puede obtenerse bien a partir de métodos de búsqueda global, diseños previos o síntesis grafo-analíticas con un número reducido de puntos de precisión.
4. Dependiendo de lo cerca que se encuentre el mecanismo inicial de la solución óptima (evaluado mediante la función de error de síntesis) se pueden realizar inicialmente una serie de iteraciones “*teg*” para ajustar la posición, orientación y la escala del mecanismo. En dichas iteraciones se considera de forma exclusiva las variables de diseño que controlan la traslación, escalado y giro del mecanismo. La aplicación de dichas iteraciones previas puede mejorar la convergencia general del algoritmo, al igual que sucedía en el problema de generación de trayectorias.
5. Cuando se cumpla el criterio de parada de las iteraciones de traslación, escalado y giro, se pasa a las iteraciones generales, donde interviene la totalidad de variables de diseño.

Tanto en las iteraciones *teg* como en las generales, el incremento en las respectivas variables de diseño se calcula en base a una búsqueda lineal que determina el tamaño óptimo del paso en la dirección calculada según (4-110) o (4-108).

A continuación se presenta el pseudocódigo del algoritmo en el caso de utilizar la alternativa correspondiente a la ecuación (4-108). Por claridad, las iteraciones de traslado, escalado y giro no han sido recogidas, puesto que su esquema es idéntico a las iteraciones generales salvo por las variables de diseño consideradas.

---

#### Desarrollos analíticos

$\mathbf{z}$  (variables de diseño)

$\Phi$  (ecuaciones de restricción)

$$\varepsilon_p^i = \{x_d - x_g; y_d - y_g\}; \quad \varepsilon_o^i = \{\theta_d - \theta_g\}$$

$$\mathbf{J}_p^i(\Phi^i, \varepsilon_p^i); \quad \mathbf{J}_o^i(\Phi^i, \varepsilon_o^i);$$

#### Desarrollos numéricos

$$\delta_d^i \leftarrow \{x_d^i \ y_d^i \ \theta_d^i\} \quad i = 1, 2, \dots, npos \quad (\text{posiciones de precisión})$$

**while** (no se cumpla criterio parada) **do**

$$k \leftarrow 1; \mathbf{J}_p \leftarrow 0; \mathbf{J}_o \leftarrow 0; \varepsilon_p \leftarrow 0; \varepsilon_o \leftarrow 0;$$

**for**  $i=1$  **to**  $npos$

$$\mathbf{q}_i, \delta_g^i \leftarrow \text{solve}(f(\mathbf{z}_k, \theta_2^i)=0)$$

$$\mathbf{J}_p \leftarrow [\mathbf{J}_p; \mathbf{J}_p^i(\mathbf{q}_i, \delta_g^i)]; \quad \mathbf{J}_o \leftarrow [\mathbf{J}_o; \mathbf{J}_o^i(\mathbf{q}_i, \delta_g^i)]$$

$$\varepsilon_p \leftarrow [\varepsilon_p; \varepsilon_p^i(\mathbf{q}_i, \delta_g^i)]; \quad \varepsilon_o \leftarrow [\varepsilon_o; \varepsilon_o^i(\mathbf{q}_i, \delta_g^i)]$$

**end for**

$$\Delta \mathbf{z} = -[\Psi \mathbf{J}_p^T \mathbf{J}_p + (1-\Psi) \mathbf{J}_o^T \mathbf{J}_o]^{-1} [\Psi \mathbf{J}_p^T \varepsilon_p + (1-\Psi) \mathbf{J}_o^T \varepsilon_o]$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + \alpha_k \cdot \Delta \mathbf{z}$$

$$k \leftarrow k + 1$$

**end while**

---

### 4.3.4. Algoritmo de síntesis óptima de GSR sin coordinación

El planteamiento del algoritmo para la resolución de este problema es semejante al formulado para el problema de generación de trayectorias. De igual análoga, se toma una manivela o un balancín como elemento de entrada, siendo su ángulo de posición la coordenada conductora del movimiento del mecanismo.

Se propone llevar a cabo la optimización en dos fases. En la primera de ellas, se realiza la optimización sin considerar la orientación en las posiciones de precisión, es decir, esta fase consiste en una optimización de trayectoria. Una vez lograda una aproximación suficientemente buena de la trayectoria, se pasa a la segunda fase del proceso, donde se acomete una optimización de guiado de sólido rígido propiamente dicha, esto es, considerando tanto las posiciones y orientaciones deseadas de forma conjunta. Gracias a la optimización inicial

de trayectoria, la optimización de la segunda etapa no requiere la aplicación de estrategias de escalado, giro y traslación.

La optimización inicial de trayectoria se lleva a cabo según el esquema presentado en el apartado 4.1.5. Tal y como allí fue descrito, para cada posición de precisión se realiza una optimización previa del ángulo de entrada. De igual forma, en la optimización de la segunda fase del proceso, se calcula el valor óptimo de la coordenada conductora antes de evaluar la matriz Jacobiana y el error de síntesis correspondiente a dicha posición de precisión. Con la matriz Jacobiana y el error correspondientes a todas las posiciones de precisión se determina el incremento de las variables de diseño para la iteración actual.

Con respecto de la optimización de trayectoria, la optimización de la segunda etapa del proceso se realiza en base al error de síntesis según fue definido, por ejemplo, en (4-105), y con respecto del error estructural (4-2).

Por simplicidad, se reproduce a continuación únicamente el pseudocódigo correspondiente a la segunda etapa del proceso de síntesis. La primera etapa se realiza según el algoritmo presentado en el apartado 4.1.5.

---

#### Desarrollos analíticos

$\mathbf{z}$  (variables de diseño)

$\mathbf{z}_{teg}$  (variables de diseño iteraciones *teg*)

$\Phi$  (ecuaciones de restricción)

$$\varepsilon^i = \left\{ \left( \frac{x_g^i - x_d^i}{Tol_{pos}} \right); \left( \frac{y_g^i - y_d^i}{Tol_{pos}} \right); \left( \frac{\theta_g^i - \theta_d^i}{Tol_{ori}} \right) \right\};$$

$\mathbf{J}^i(\Phi^i, \varepsilon^i, \mathbf{z})$ ; (jacobiano general)

$\mathbf{J}_\alpha^i(\Phi^i, \varepsilon^i, \alpha)$ ; (jacobiano general opt. tamaño paso)

$\mathbf{J}_\theta^i(\Phi^i, \varepsilon^i, \Delta\theta_2^i)$ ; (jacobiano optimización ángulo de entrada)

$\mathbf{J}_{\theta,\alpha}^i(\Phi^i, \varepsilon^i, \Delta\theta_2^i)$ ; (jacobiano optimización ángulo de entrada en opt. tamaño paso)

#### Desarrollos numéricos

$\delta_d^i \leftarrow \{x_d^i, y_d^i, \theta_d^i\}$   $i = 1, 2, \dots, npos$  (posiciones de precisión)

$\mathbf{z}_0$  (mecanismo inicial)

**while** (no se cumpla criterio parada general) **do**

$\mathbf{J} \leftarrow 0$ ;  $\mathbf{E} \leftarrow 0$ ;

```

for i=1 to npos
   $\mathbf{J}_\theta \leftarrow 0; \mathbf{E}_\theta \leftarrow 0; v \leftarrow 1;$ 
  while (no se cumpla criterio parada  $\theta_2^i$ ) do
     $\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\delta}_g^i \leftarrow \text{solve}(f(\mathbf{z}_k, \Delta\theta_2^i)=0)$ 
     $\mathbf{J}_\theta \leftarrow [\mathbf{J}_\theta; \mathbf{J}_\theta^i(\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\delta}_g^i)]; \quad \mathbf{E}_\theta \leftarrow [\mathbf{E}_\theta; \boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\delta}_g^i)];$ 
     $\Delta\theta_2^i = \Delta\theta_2^i + \alpha_v \left( -[\mathbf{J}_\theta^T \mathbf{J}_\theta]^{-1} \mathbf{J}_\theta \mathbf{E}_\theta \right)$ 
     $v \leftarrow v + 1$ 
  end while
   $\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\delta}_g^i \leftarrow \text{solve}(f(\mathbf{z}_k, \Delta\theta_2^i)=0)$ 
   $\mathbf{J} \leftarrow [\mathbf{J}; \mathbf{J}(\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\delta}_g^i)]; \quad \mathbf{E} \leftarrow [\mathbf{E}; \boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\delta}_g^i)];$ 
end for
 $\Delta\mathbf{z} = -[\mathbf{J}^T \mathbf{J}]^{-1} \mathbf{J}^T \boldsymbol{\varepsilon};$ 
 $r \leftarrow 1; \quad \alpha \leftarrow 0;$ 
while (no se cumpla criterio parada  $\alpha$ ) do
   $\mathbf{J}_\alpha \leftarrow 0; \mathbf{E}_\alpha \leftarrow 0; \Delta\theta_2^i \leftarrow \Delta\theta_2^{i-1};$ 
  for i=1 to npos
     $\mathbf{J}_\theta \leftarrow 0; \mathbf{E}_\theta \leftarrow 0; v \leftarrow 1;$ 
    while (no se cumpla criterio parada  $\theta_2^i$ ) do
       $\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\delta}_g^i \leftarrow \text{solve}(f(\hat{\mathbf{z}}_i, \Delta\theta_2^i)=0)$ 
       $\mathbf{J}_{\theta,\alpha} \leftarrow [\mathbf{J}_{\theta,\alpha}; \mathbf{J}_{\theta,\alpha}^i(\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\delta}_g^i)]; \quad \mathbf{E}_{\theta,\alpha} \leftarrow [\mathbf{E}_{\theta,\alpha}; \boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\delta}_g^i)];$ 
       $\Delta\theta_2^i = \Delta\theta_2^i + \alpha_v \left( -[\mathbf{J}_\theta^T \mathbf{J}_\theta]^{-1} \mathbf{J}_\theta \mathbf{E}_\theta \right)$ 
       $v \leftarrow v + 1$ 
    end while
     $\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\delta}_g^i \leftarrow \text{solve}(f(\hat{\mathbf{z}}_i, \Delta\theta_2^i)=0)$ 
     $\mathbf{J}_\alpha \leftarrow [\mathbf{J}_\alpha; \mathbf{J}_\alpha^i(\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\delta}_g^i)]; \quad \mathbf{E}_\alpha \leftarrow [\mathbf{E}_\alpha; \boldsymbol{\varepsilon}_\theta^i(\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\delta}_g^i)];$ 
  end for
   $\alpha = \alpha + \beta \left( -[\mathbf{J}_\alpha^T \mathbf{J}_\alpha]^{-1} \mathbf{J}_\alpha^T \mathbf{E}_\alpha \right);$ 
   $r = r + 1;$ 
end while
 $\mathbf{z} = \mathbf{z} + \alpha \cdot \Delta\mathbf{z};$ 
 $iter = iter + 1;$ 
end while

```

El algoritmo se puede implementar igualmente definiendo la función de error de síntesis según la expresión (4-106). Tomando como base el algoritmo anterior únicamente es necesario cambiar la definición del error a una forma semejante a la expresada en (4-107), y la fórmula de cálculo del incremento de las variables de diseño por la mostrada en (4-108).

### 4.3.5. Ejemplo de formulación problema guiado SR

En este apartado se desarrolla la formulación de problema de guiado de sólido rígido aplicado al mecanismo cuadrilátero articulado, donde el elemento guiado es el acoplador. El mecanismo se define en la misma forma en que se hizo para el problema de generación de trayectorias. El elemento acoplador se construye mediante tres barras binarias formando un triángulo.

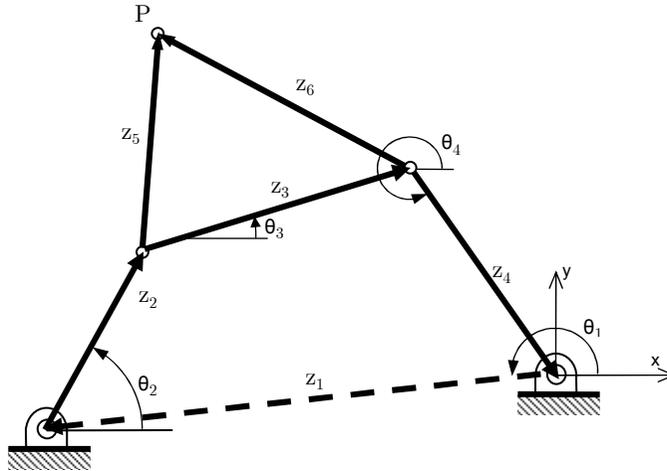


Figura 4-29. Esquema mecanismo 4b para la formulación problema de guiado

Se definen una serie de posiciones del acoplador en el orden en que deben alcanzarse. Cada una de estas posiciones se especifica mediante las coordenadas de un punto y la orientación de dicho elemento acoplador. Asumiendo que el presente ejemplo trata el problema con coordinación, a cada posición del acoplador le corresponde otra del elemento de entrada. Por tanto, los requerimientos del problema se pueden expresar según la Tabla 4-27.

Posición barra conductora	Posición elemento guiado		
	$x_P$	$y_P$	$\theta_3$
$\theta_2^1$	$x_d^1$	$y_d^1$	$\theta_3^1$
$\theta_2^2$	$x_d^2$	$y_d^2$	$\theta_3^2$
...	...	...	...
$\theta_2^{n_{pos}}$	$x_d^{n_{pos}}$	$y_d^{n_{pos}}$	$\theta_3^{n_{pos}}$

Tabla 4-27. Requisitos de diseño problema de guiado SR

Las variables de diseño están compuestas por las dimensiones de todas las barras ( $z_1, z_2, \dots, z_6$ ), y por la posición de las articulaciones fijas. Una vez especificado el tamaño de la barra 1, sólo hacen falta tres coordenadas ( $x_0, y_0,$

$\theta_1$ ) para definir dichas articulaciones. Todas estas variables dan lugar al vector de diseño

$$\mathbf{z} = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, \theta_1, x_0, y_0\} \quad (4-111)$$

Para definir la posición de mecanismo se eligen como coordenadas generalizadas los ángulos de orientación de cada barra. Esto es:

$$q^{iT} = [\theta_2^i \ \theta_3^i \ \theta_4^i \ \theta_5^i \ \theta_6^i] \quad (4-112)$$

Se toma  $\theta_2$  como coordenada independiente a la hora de generar el movimiento del mecanismo. Las ecuaciones de restricción (cinemáticas) que relacionan el resto de coordenadas generalizadas con la independiente son idénticas a las del ejemplo de generación de trayectorias con este mismo mecanismo. Para una posición genérica vienen dadas por la expresión (4-10).

En cada posición de precisión se consideran tres parámetros funcionales: las coordenadas del punto P perteneciente al elemento acoplador, y la posición angular de este mismo elemento. Esto es

$$\delta_i^T = \{x_P^i, y_P^i, \theta_3^i\} \quad (4-113)$$

Estos parámetros funcionales añaden dos incógnitas más ( $\theta_3$  ya ha sido considerado dentro de las coordenadas dependientes). Las ecuaciones de restricción también coinciden con las del problema de trayectorias, recogidas en (4-18). El vector de variables dependientes queda como

$$\mathbf{w} = \{\theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6 \ x_P \ y_P\} \quad (4-114)$$

El error de síntesis se divide en un error de posición y otro de orientación. Cada uno de estos errores se define en términos relativos respecto de unos valores de tolerancia según (4-107). Para una posición genérica del mecanismo de ejemplo se pueden escribir como

$$\epsilon_p^i = \begin{Bmatrix} \frac{x_{P,g}^i - x_{P,d}^i}{Tol_{posición}} \\ \frac{y_{P,g}^i - y_{P,d}^i}{Tol_{posición}} \end{Bmatrix}; \quad \epsilon_o^i = \left\{ \frac{\theta_{3,g}^i - \theta_{3,d}^i}{Tol_{orientación}} \right\} \quad (4-115)$$

Estos dos errores se combinan según (4-106), dando lugar a la función de error de síntesis. La dirección de búsqueda viene dada por (4-108), donde es

necesario calcular las matrices Jacobianas de posición y de orientación  $J_p$  y  $J_o$  respectivamente. Para una posición genérica

$$\mathbf{J}_p^i = \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_p^i}{d\mathbf{z}} = - \left[ \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_p^i(\mathbf{w}(\mathbf{z}))}{d\mathbf{w}} \right] \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}^i(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}^i(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right] \quad (4-116)$$

$$\mathbf{J}_o^i = \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_o^i}{d\mathbf{z}} = - \left[ \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_o^i(\mathbf{w}(\mathbf{z}))}{d\mathbf{w}} \right] \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}^i(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}^i(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right] \quad (4-117)$$

El primer término de  $\mathbf{J}_p$

$$\left[ \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_p^i(\mathbf{w}(\mathbf{z}))}{d\mathbf{w}} \right] = \frac{1}{\text{Tot}_{\text{posición}}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-118)$$

El primer término de  $\mathbf{J}_o$

$$\left[ \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_o^i(\mathbf{w}(\mathbf{z}))}{d\mathbf{w}} \right] = \frac{1}{\text{Tot}_{\text{orientación}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-119)$$

Los otros dos términos son comunes para ambas matrices

$$\left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}^i(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} -z_3 \sin(\theta_3) & -z_4 \sin(\theta_4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_3 \cos(\theta_3) & z_4 \cos(\theta_4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z_3 \sin(\theta_3) & 0 & z_5 \sin(\theta_5) & -z_6 \sin(\theta_6) & 0 & 0 \\ z_3 \cos(\theta_3) & 0 & -z_5 \cos(\theta_5) & z_6 \cos(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_5 \sin(\theta_5) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -z_5 \cos(\theta_5) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-120)$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}^i(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) & \cos(\theta_3) & \cos(\theta_4) & 0 & 0 & -z_1 \sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \sin(\theta_2) & \sin(\theta_3) & \sin(\theta_4) & 0 & 0 & z_1 \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_3) & 0 & -\cos(\theta_5) & \cos(\theta_6) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\theta_3) & 0 & -\sin(\theta_5) & \sin(\theta_6) & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\theta_1) & -\cos(\theta_2) & 0 & 0 & -\cos(\theta_5) & 0 & z_1 \sin(\theta_1) & -1 & 0 \\ -\sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2) & 0 & 0 & -\sin(\theta_5) & 0 & -z_1 \cos(\theta_1) & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4-121)$$

• *Cálculo del coeficiente de tamaño de paso*

En este subproblema de optimización se calcula el valor óptimo del coeficiente de tamaño de paso  $\alpha$ . Durante el proceso se consideran unas variables locales que son función de las variables de diseño en la iteración general actual y del valor de  $\alpha$ , según

$$\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \\ \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \\ \hat{z}_5 \\ \hat{z}_6 \\ \hat{\theta}_1 \\ \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + \alpha \cdot d_1 \\ z_2 + \alpha \cdot d_2 \\ z_3 + \alpha \cdot d_3 \\ z_4 + \alpha \cdot d_4 \\ z_5 + \alpha \cdot d_5 \\ z_6 + \alpha \cdot d_6 \\ \theta_1 + \alpha \cdot d_7 \\ x_0 + \alpha \cdot d_8 \\ y_0 + \alpha \cdot d_9 \end{bmatrix} \quad (4-122)$$

La actualización del valor del coeficiente  $\alpha$  en cada subiteración se hace según la expresión

$$d\alpha = - \left[ \Psi \mathbf{J}_{\alpha,p}^T \mathbf{J}_{\alpha,p} + (1-\Psi) \mathbf{J}_{\alpha,o}^T \mathbf{J}_{\alpha,o} \right]^{-1} \left[ \Psi \mathbf{J}_{\alpha,p}^T \boldsymbol{\varepsilon}_p + (1-\Psi) \mathbf{J}_{\alpha,o}^T \boldsymbol{\varepsilon}_o \right] \quad (4-123)$$

Donde las matrices  $\mathbf{J}_{\alpha,p}$  y  $\mathbf{J}_{\alpha,o}$  se calculan de acuerdo a la ecuaciones siguientes

$$\mathbf{J}_{\alpha,p} = - \left[ \frac{d \varepsilon_p(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}))}{d \mathbf{w}} \right] \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}), \hat{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}), \hat{\mathbf{z}})}{\partial \alpha} \right] \quad (4-124)$$

$$\mathbf{J}_{\alpha,o} = - \left[ \frac{d \varepsilon_o(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}))}{d \mathbf{w}} \right] \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}), \hat{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}), \hat{\mathbf{z}})}{\partial \alpha} \right] \quad (4-125)$$

Estas expresiones sólo difieren en el primero de los términos, siendo, cada uno de ellos, iguales a los recogidos por las expresiones (4-118) y (4-119) respectivamente. Las expresiones de los dos términos comunes son

$$\left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}), \hat{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} -\hat{z}_3 \sin(\theta_3) & -\hat{z}_4 \sin(\theta_4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{z}_3 \cos(\theta_3) & \hat{z}_4 \cos(\theta_4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{z}_3 \sin(\theta_3) & 0 & \hat{z}_5 \sin(\theta_5) & -\hat{z}_6 \sin(\theta_6) & 0 & 0 \\ \hat{z}_3 \cos(\theta_3) & 0 & -\hat{z}_5 \cos(\theta_5) & \hat{z}_6 \cos(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{z}_5 \sin(\theta_5) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{z}_5 \cos(\theta_5) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

(4-126)

$$\left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\hat{\mathbf{z}}), \hat{\mathbf{z}})}{\partial \alpha} \right] = \begin{bmatrix} dz_1 \cos(\hat{\theta}_1) - \hat{z}_1 \sin(\hat{\theta}_1) \cdot d\theta_1 + dz_2 \cos(\theta_2) + dz_3 \cos(\theta_3) + dz_4 \cos(\theta_4) \\ dz_1 \sin(\hat{\theta}_1) + \hat{z}_1 \cos(\hat{\theta}_1) \cdot d\theta_1 + dz_2 \sin(\theta_2) + dz_3 \sin(\theta_3) + dz_4 \sin(\theta_4) \\ dz_3 \cos(\theta_3) - dz_5 \cos(\theta_5) + dz_6 \cos(\theta_6) \\ dz_3 \sin(\theta_3) - dz_5 \sin(\theta_5) + dz_6 \sin(\theta_6) \\ -dz_8 - dz_1 \cos(\hat{\theta}_1) + \hat{z}_1 \sin(\hat{\theta}_1) \cdot d\theta_1 - dz_2 \cos(\theta_2) - dz_5 \cos(\theta_5) \\ -dz_9 - dz_1 \sin(\hat{\theta}_1) - \hat{z}_1 \cos(\hat{\theta}_1) \cdot d\theta_1 - dz_2 \sin(\theta_2) - dz_5 \sin(\theta_5) \end{bmatrix}$$

(4-127)

• *Traslado, escalado y giro*

Si el mecanismo inicial no está suficientemente próximo a la solución óptima, se pueden plantear una serie de iteraciones iniciales con un número reducido de variables de diseño. Estas variables son aquellas que controlan la posición y orientación del mecanismo, así como un factor de escala que afecta por igual al tamaño de todas las barras. Esto es:

$$\mathbf{z}_{teg}^T = [\theta_1 \quad x_0 \quad y_0 \quad E]$$

(4-128)

Tanto estas variables como las ecuaciones de restricción coinciden con las presentadas en el ejemplo de formulación del problema de generación de trayectorias. Dichas ecuaciones vienen dadas por expresión (4-54).

La dirección de variación de las variables de diseño se calcula mediante la expresión (4-108), aplicada sobre las variables de diseño definidas en (4-128).

$$d\mathbf{z}_{teg} = - \left[ \Psi \mathbf{J}_{teg,p}^T \mathbf{J}_{teg,p} + (1-\Psi) \mathbf{J}_{teg,o}^T \mathbf{J}_{teg,o} \right]^{-1} \left[ \Psi \mathbf{J}_{teg,p}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{teg,p} + (1-\Psi) \mathbf{J}_{teg,o}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{teg,o} \right] \quad (4-129)$$

Las dos matrices Jacobianas se determinan según

$$\mathbf{J}_{teg,p} = - \left[ \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_p(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}))}{d\mathbf{w}} \right] \left[ \frac{\partial \Phi_{teg}(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}), \mathbf{z}_{teg})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \Phi_{teg}(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}), \mathbf{z}_{teg})}{\partial \mathbf{z}_{teg}} \right] \quad (4-130)$$

$$\mathbf{J}_{teg,o} = - \left[ \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_o(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}))}{d\mathbf{w}} \right] \left[ \frac{\partial \Phi_{teg}(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}), \mathbf{z}_{teg})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \Phi_{teg}(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}), \mathbf{z}_{teg})}{\partial \mathbf{z}_{teg}} \right] \quad (4-131)$$

Los dos primeros términos de ambas expresiones coinciden con los de las ecuaciones (4-118) y (4-119) respectivamente. Los otros dos términos, comunes para ambas matrices, tienen la forma

$$\left[ \frac{\partial \Phi_{teg}(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}), \mathbf{z}_{teg})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} -z_3 \sin(\theta_3)E & -z_4 \sin(\theta_4)E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_3 \cos(\theta_3)E & z_4 \cos(\theta_4)E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z_3 \sin(\theta_3)E & 0 & z_5 \sin(\theta_5)E & -z_6 \sin(\theta_6)E & 0 & 0 \\ z_3 \cos(\theta_3)E & 0 & -z_5 \cos(\theta_5)E & z_6 \cos(\theta_6)E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_5 \sin(\theta_5)E & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -z_5 \cos(\theta_5)E & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (4-132)$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi_{teg}(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}), \mathbf{z}_{teg})}{\partial \mathbf{z}_{teg}} \right] = \begin{bmatrix} -z_1 \sin(\theta_1)E & 0 & 0 & z_1 \cos(\theta_1) + z_2 \cos(\theta_2) + z_3 \cos(\theta_3) + z_4 \cos(\theta_4) \\ z_1 \cos(\theta_1)E & 0 & 0 & z_1 \sin(\theta_1) + z_2 \sin(\theta_2) + z_3 \sin(\theta_3) + z_4 \sin(\theta_4) \\ 0 & 0 & 0 & z_3 \cos(\theta_3) - z_5 \cos(\theta_5) + z_6 \cos(\theta_6) \\ 0 & 0 & 0 & z_3 \sin(\theta_3) - z_5 \sin(\theta_5) + z_6 \sin(\theta_6) \\ z_1 \sin(\theta_1)E & -1 & 0 & -z_1 \cos(\theta_1) - z_2 \cos(\theta_2) - z_5 \cos(\theta_5) \\ -z_1 \cos(\theta_1)E & 0 & -1 & -z_1 \sin(\theta_1) - z_2 \sin(\theta_2) - z_5 \sin(\theta_5) \end{bmatrix} \quad (4-133)$$

Para el cálculo del tamaño del paso en las iteraciones  $teg$  se definen las variables locales según la siguiente expresión

$$\hat{\mathbf{z}}_{teg} = \begin{bmatrix} \theta_1 + \alpha \cdot d\theta_1 \\ x_0 + \alpha \cdot dx_0 \\ y_0 + \alpha \cdot dy_0 \\ E + \alpha \cdot dE \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{E} \end{bmatrix} \quad (4-134)$$

La variación de  $\alpha$  en cada subiteración se determina según

$$d\alpha = - \left[ \Psi \mathbf{J}_{teg,\alpha,p}^T \mathbf{J}_{teg,\alpha,p} + (1-\Psi) \mathbf{J}_{teg,\alpha,o}^T \mathbf{J}_{teg,\alpha,o} \right]^{-1} \left[ \Psi \mathbf{J}_{teg,\alpha,p}^T \boldsymbol{\varepsilon}_p + (1-\Psi) \mathbf{J}_{teg,\alpha,o}^T \boldsymbol{\varepsilon}_o \right] \quad (4-135)$$

Donde las matrices Jacobianas se determinan como

$$\mathbf{J}_{teg,\alpha,p} = - \left[ \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_p(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}))}{d\mathbf{w}} \right] \left[ \frac{\partial \Phi_{teg}(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}), \mathbf{z}_{teg})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \Phi_{teg}(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}), \mathbf{z}_{teg})}{\partial \alpha} \right] \quad (4-136)$$

$$\mathbf{J}_{teg,\alpha,o} = - \left[ \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_o(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}))}{d\mathbf{w}} \right] \left[ \frac{\partial \Phi_{teg}(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}), \mathbf{z}_{teg})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \Phi_{teg}(\mathbf{w}(\mathbf{z}_{teg}), \mathbf{z}_{teg})}{\partial \alpha} \right] \quad (4-137)$$

El primer término de cada matriz corresponde con las expresiones (4-118) y (4-119) respectivamente. El segundo y tercero de los términos, son comunes para ambas matrices y resultan iguales a los de las expresiones (4-64) y (4-65).

### 4.3.6. Ejemplos de validación

De forma semejante al caso de generación de trayectoria, en este apartado dedicado al planteamiento y resolución del problema de guiado, se han realizado una serie de ejemplos teóricos para la comprobación, tanto del algoritmo para la resolución del problema con coordinación entre la barra de entrada y las posiciones del acoplador, como para el algoritmo de resolución del problema no coordinado.

El problema de guiado también es susceptible de aplicar las estrategias de mejora de la convergencia consistentes en establecer unas iteraciones iniciales que consideran únicamente variables de diseño que afectan a la posición, orientación y escala del mecanismo. La efectividad de dichas estrategias también ha sido evaluada tanto para el problema coordinado como para el no coordinado.

En todos los ejemplos se considera el cuadrilátero articulado como mecanismo objeto del problema de síntesis cinemática, cuya formulación se ha mostrado en el apartado anterior.

### Ejemplos problema con coordinación

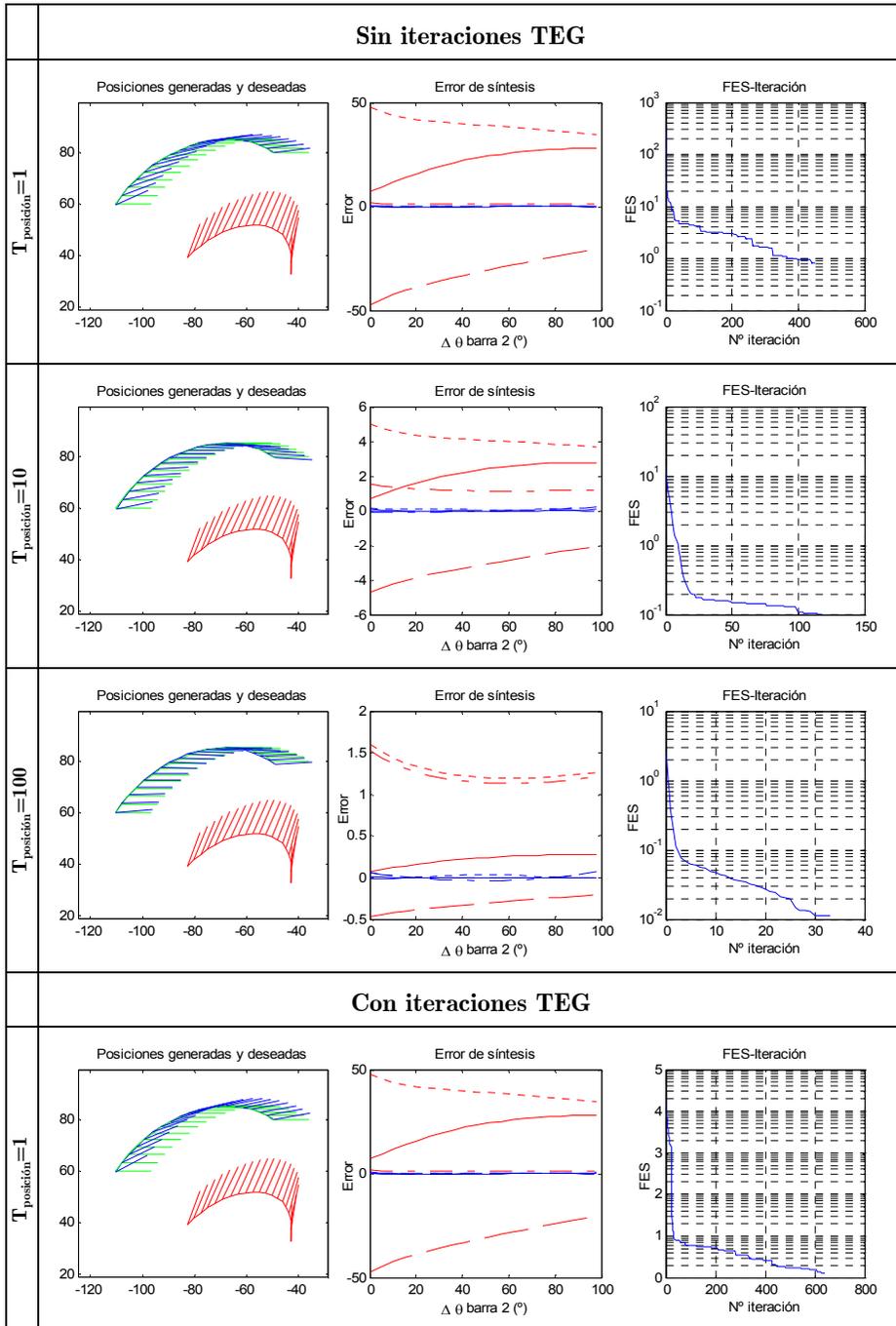
Con objeto de estudiar la sensibilidad de la solución frente a las tolerancias de posición y orientación, se ha ejecutado el algoritmo para diferentes valores de dichos parámetros. Como dicha sensibilidad depende de los valores relativos entre ambos parámetros, se fija la tolerancia de orientación en valor 1, mientras que se prueban distintos valores de la tolerancia de posición. A continuación se presentan los resultados obtenidos.

La tabla siguiente muestra los valores iniciales de las variables de diseño y los óptimos para los distintos valores de la tolerancia de posición  $t_{po}$ , tanto resueltos con el algoritmo básico como por el algoritmo con estrategias de mejora de la convergencia.

Variables de diseño		z1	z2	z3	z4	z5	z6	t1	t20	x0	y0	
Valores iniciales		55.18	32.31	93.10	110.55	36	75.83	3.28	0.74	15	-5	
Valores óptimos	Sin TEG	T <sub>po</sub> =1	76.30	33.47	100.34	109.10	45.52	118.16	2.47	0.98	8.51	-37.36
		T <sub>po</sub> =10	85.10	36.99	101.20	97.89	24.01	114.53	2.37	0.99	1.05	-33.15
		T <sub>po</sub> =100	95.24	42.15	78.34	75.78	30.90	84.66	2.77	1.01	19.38	-22.88
	Con TEG	T <sub>po</sub> =1	70.86	34.58	77.71	88.30	41.26	93.93	2.51	1.01	0.73	-30.82
		T <sub>po</sub> =10	79.44	36.98	78.91	80.74	30.94	94.76	2.50	1.01	4.49	-28.68
		T <sub>po</sub> =100	93.75	42.32	77.43	74.49	30.61	81.95	2.78	1.01	16.69	-21.02

Tabla 4-28. Ejemplo guiado con coordinación. Variables de diseño.

La Figura 4-30 muestra los resultados gráficos de las posiciones de precisión, el error de síntesis y la evolución de la función objetivo. Las posiciones de precisión se muestran en color verde las deseadas, en rojo las iniciales, y en azul las resultantes del proceso de optimización. En color rojo se muestran los valores iniciales del error de síntesis, mientras que los valores óptimos vienen representados en color azul. Las líneas continuas hacen referencia al error de posición, mientras que las de trazo discontinuo corresponden al error de orientación.



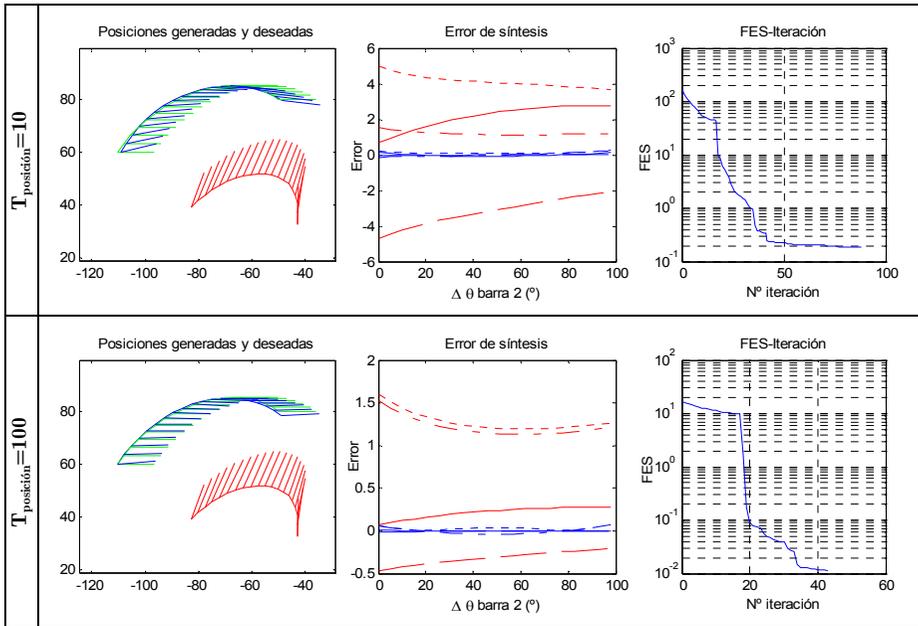


Figura 4-30. Ejemplo guiado con coordinación. Resultados gráficos.

Por último la siguiente tabla recoge los resultados numéricos referentes a los valores de función objetivo, error de síntesis global y el error de síntesis sólo de orientación. Asimismo se muestra el número de iteraciones y de evaluaciones de la función objetivo como medida del esfuerzo computacional que ha representado la ejecución de cada algoritmo.

	$T_{po}$	FES	FES	$\epsilon$	$\epsilon$ máximo	$\epsilon$	$\epsilon$ máximo	Nº iter.	Nº evaluac. FES
		inicial	final	máximo inicial	inicial orientación	máximo final	final orientación		
Algoritmo básico	1	15799.3	1.28	47.18	1.53	0.50	0.49	641	2543
	10	172.8	0.18	4.72	1.53	0.231	0.23	89	367
	100	16.59	0.01	1.53	1.53	0.07	0.07	44	177
Algoritmo TEG	1	309.09	0.83	47.18	1.53	0.48	0.41	454	1889
	10	11.33	0.10	4.72	1.53	0.20	0.20	119	546
	100	2.6	0.01	1.53	1.53	0.07	0.07	34	199

Tabla 4-29. Ejemplo guiado con coordinación. Valores función objetivo y error.

### Ejemplos problema sin coordinación

Se plantea un problema semejante al anterior con la única diferencia de que no se exige la coordinación entre la barra de entrada y las posiciones del elemento guiado. Para la resolución del mismo se aplica los algoritmos desarrollados para el problema no coordinado. Igualmente se fija el valor de la tolerancia de orientación en la unidad, y se prueban distintos valores para la

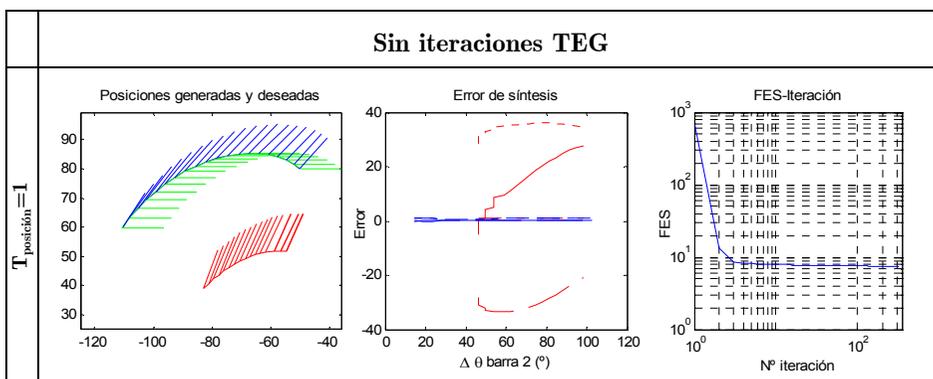
tolerancia de posición. Esto se hace tanto para el algoritmo básico como para el *teg*. Los resultados se muestran en el mismo orden y forma que el caso anterior.

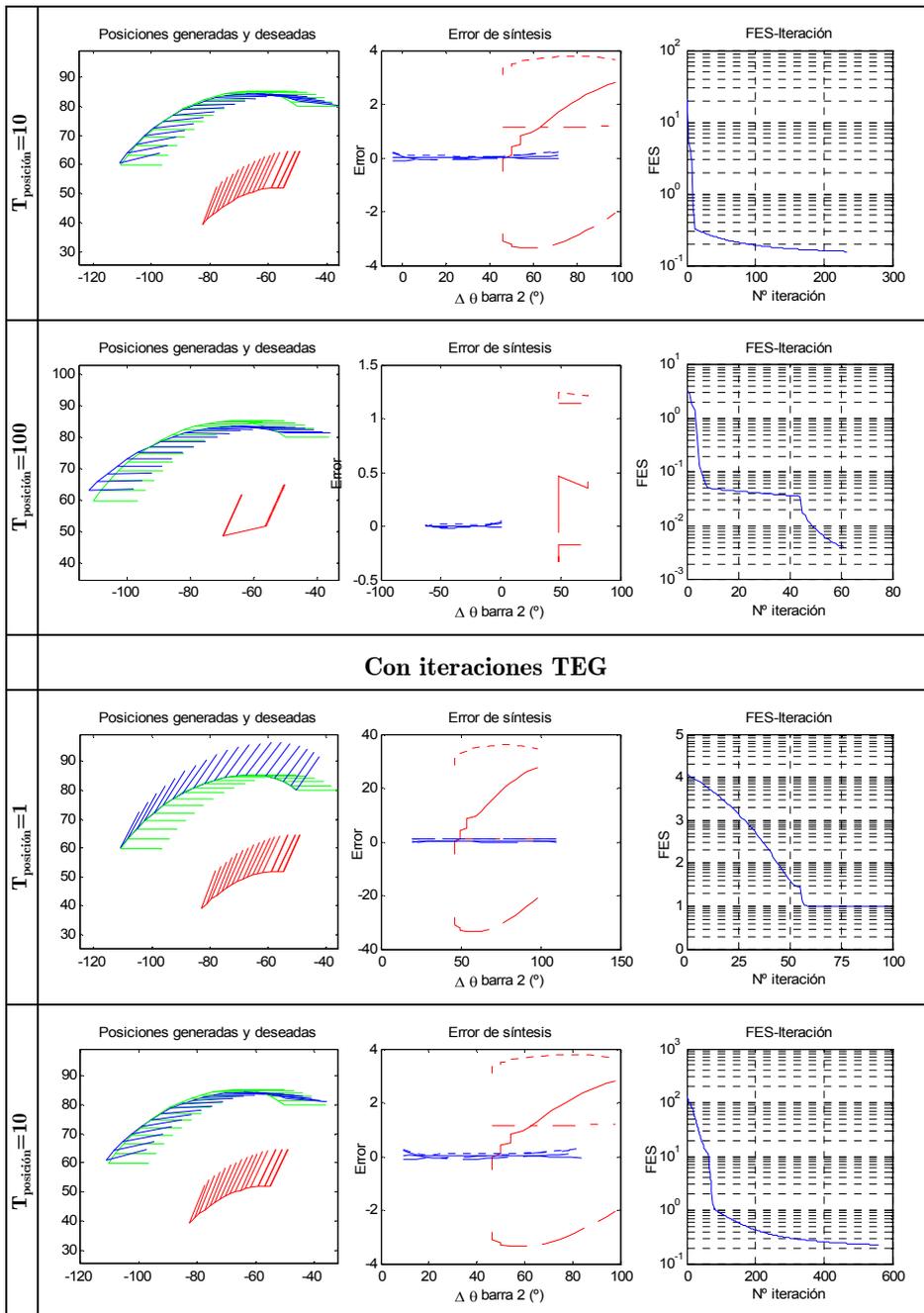
La tabla siguiente muestra los valores iniciales de las variables de diseño y los óptimos para los distintos valores de la tolerancia de posición *tpo*.

Variables de diseño		z1	z2	z3	z4	z5	z6	t1	t20	x0	y0	
Valores iniciales		55.18	32.31	93.10	110.55	36	75.83	3.28	0.74	15	-5	
Valores óptimos	Sin TEG	T <sub>po</sub> =1	60.48	41.47	88.10	112.00	41.81	80.80	3.00	0.85	8.34	-3.14
		T <sub>po</sub> =10	71.74	46.88	84.75	87.70	21.51	96.12	2.53	1.29	0.076	-23.61
		T <sub>po</sub> =100	86.38	59.85	80.47	78.63	25.98	81.43	2.91	2.40	14.98	-21.63
	Con TEG	T <sub>po</sub> =1	69.39	40.71	115.89	138.27	45.41	95.15	3.07	0.76	14.73	-4.40
		T <sub>po</sub> =10	81.62	48.47	109.73	99.38	19.94	108.10	2.53	1.15	-0.85	-30.49
		T <sub>po</sub> =100	81.19	58.79	75.69	74.71	26.92	78.79	2.94	4.25	12.11	-18.41

Tabla 4-30. Ejemplo guiado sin coordinación. Variables de diseño.

La Figura 4-31 muestra los resultados gráficos de las posiciones de precisión, el error de síntesis y la evolución de la función objetivo. Las posiciones de precisión se muestran en color verde las deseadas, en rojo las iniciales, y en azul las resultantes del proceso de optimización. Los valores iniciales del error de síntesis se muestran en color rojo, mientras que en color azul se muestran los valores óptimos. Las líneas continuas hacen referencia al error de posición, mientras que las de trazo discontinuo lo hacen al error de orientación.





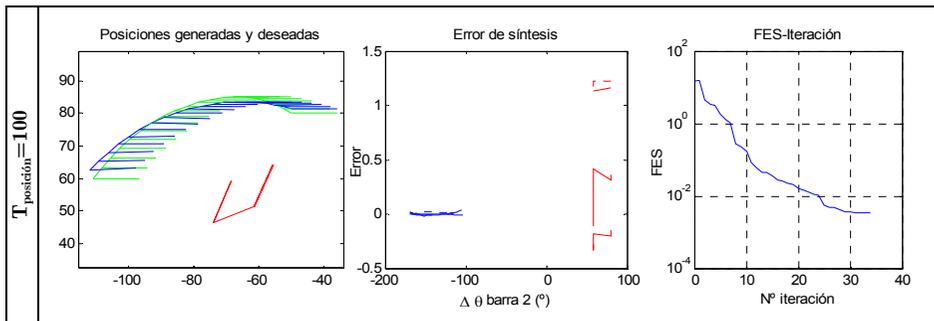


Figura 4-31. Ejemplo guiado sin coordinación. Resultados gráficos.

Finalmente, la siguiente tabla recoge los resultados numéricos referentes a los valores de función objetivo, error de síntesis global y el error de síntesis sólo de orientación. También se muestra el número de iteraciones y de evaluaciones de la función objetivo.

	Tpo	FES inicial	FES final	ε máximo inicial	ε máximo inicial orientación	ε máximo final	ε máximo final orientación	Nº iteraciones	Nº evaluac. FES
Algoritmo básico	1	11771.4	9.841	33.47	1.2118	1.1095	1.1095	99	55073
	10	130.9	0.228	3.35	1.21	0.25623	0.25623	560	470043
	100	14.3	0.003	1.16	1.1599	0.030138	0.030138	35	61607
Algoritmo TEG	1	1193.1	7.373	33.47	1.2118	0.98582	0.98582	318	330760
	10	21.5	0.157	3.35	1.21	0.22519	0.22519	234	260686
	100	3.4	0.004	1.14	1.145	0.034204	0.034204	62	80187

Tabla 4-31. Ejemplo guiado sin coordinación. Valores función objetivo y error.

• *Discusión de resultados*

Los resultados del problema con coordinación resultan, en general, de mejor calidad que los obtenidos para el caso no coordinado. En ambos casos, un valor alto de la tolerancia de posición conlleva, numéricamente, mejores resultados que los obtenidos para valores bajos. Sin embargo, este mejor resultado numérico se debe a la mejora del error de orientación frente al de posición y a la mayor ponderación relativa del primero sobre el segundo. En consecuencia, el error de posición es peor que para valores bajos de la tolerancia de posición.

En cualquiera de los casos presentados, el algoritmo con iteraciones previas *teg* no parece mostrarse mejores que el algoritmo básico. Tanto en el valor final del error como en el esfuerzo computacional empleado, los resultados de

ambos algoritmos no muestran una tendencia clara que permita decantarse por uno de los dos.

## Capítulo 5. Ejemplos de aplicación práctica

### 5.1. Introducción

En este capítulo se presentan una serie de ejemplos de aplicación del método y de los algoritmos propuestos a la resolución de problemas reales de diseño mecánico dentro del ámbito industrial. Como problemas reales que son, el diseño de los mecanismos implicados está sujeto a restricciones de distinta naturaleza. La formulación de estas restricciones y su implementación en los algoritmos de síntesis se expone para cada uno de los casos.

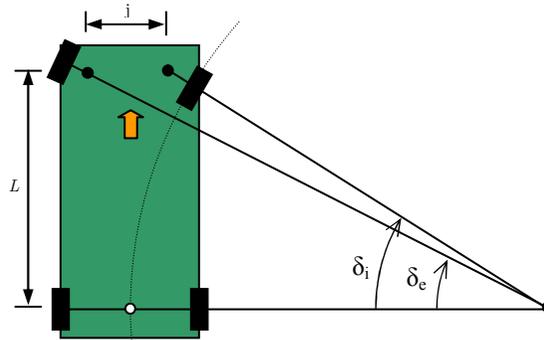
Los ejemplos se han dividido en función del tipo de problema cinemático que abordan: generación de trayectoria, generación de funciones y guiado de sólido rígido. Se ha tratado de buscar ejemplos de interés, que incluyan cadenas cinemáticas de distinto tipo. En el problema de generación de trayectorias sólo se presenta un ejemplo, al entender que los ejemplos relativos al problema de guiado son más generales.

### 5.2. Ejemplos de aplicación de síntesis de generación de funciones

#### 5.2.1. Mecanismo de dirección que cumpla la condición de Ackermann

Uno de los principales requerimientos de cualquier mecanismo de dirección es proporcionar una correlación entre los ángulos girados por las ruedas directrices. Cuando un vehículo describe una trayectoria circular, las ruedas exteriores e interiores trazan curvas de distinto radio. Para que esto sea posible sin que se produzcan deslizamientos de las ruedas, el sistema de dirección debe proporcionar ángulos de giro distintos a las ruedas directrices

exterior e interior, de manera que los ejes de ambas se corten sobre la prolongación del eje trasero, según queda reflejado en la Figura 5-1. La relación entre estos ángulos girados por cada rueda se conoce como relación o principio de Ackermann.



**Figura 5-1. Condición de Ackermann**

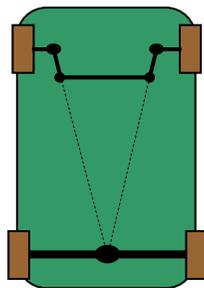
Si  $L$  es la batalla del vehículo y  $j$  la distancia entre los centro de pivoteamiento de las ruedas directrices, la relación de Ackermann se puede expresar como

$$\cot(\delta_{ext}) - \cot(\delta_{int}) = \frac{j}{L} \quad (5-1)$$

Donde  $\delta_{ext}$  y  $\delta_{int}$  representan los ángulos girados por la rueda exterior e interior respectivamente.

Uno de los primeros mecanismos de dirección utilizados que permitía un giro diferencial de las ruedas directrices fue el eslabonamiento plano de cuatro barras. Basándose en este mecanismo, en 1818 Rudolf Ackermann patentó una geometría de dirección que cumple de modo aproximado dicho principio. Esta geometría consiste en un mecanismo de cuatro barras donde las líneas de prolongación de los balancines (brazos de dirección) intersectan sobre el eje trasero, de manera que la barra que los conecta tiene menor longitud que el eje, como se muestra en la Figura 5-2. En el caso de que los balancines estén por delante del eje, entonces la barra de conexión será de mayor tamaño que el eje.

Se ha de tener en cuenta que el mecanismo de 4 barras aplicado como mecanismo de dirección sólo cumple la condición de Ackermann de forma exacta en tres posiciones (en la posición de dirección alineada y otra posición en cada sentido de giro), por lo que su diseño ha de basarse en herramientas de síntesis óptima, con los que se logran mejores resultados que la patente de Ackermann, tanto en valores de error promedio como máximo.



**Figura 5-2. Geometría Ackermann**

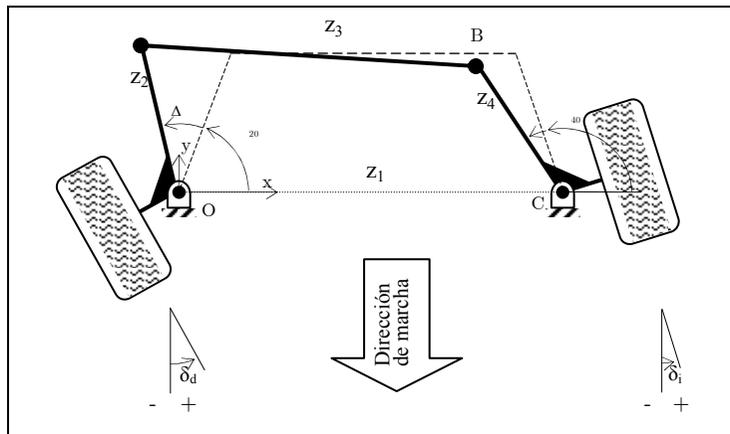
En este apartado se presenta, a modo de ejemplo de aplicación, la síntesis óptima de un mecanismo 4R plano que cumpla la condición de Ackermann bajo distintas restricciones de diseño. Este problema resulta de especial interés en el diseño de aquellos vehículos con bajas velocidades de funcionamiento tales como maquinaria agrícola, carretillas elevadoras, dumpers, etc.

Si bien los sistemas de dirección de los vehículos de calle no cumplen exactamente la relación de Ackermann (con objeto de compensar, entre otros, los efectos dinámicos y elásticos que afectan al comportamiento en curva), si se utiliza como base en las primeras etapas de diseño. En cualquier caso, los ejemplos presentados se pueden plantear sin mayor inconveniente para cualquier otra relación de variación de ángulos que resulte de interés.

### • *Planteamiento del problema*

El eslabonamiento de cuatro barras aplicado como mecanismo de dirección consta de una barra fija  $z_1$  que está constituida por el chasis del vehículo. Los brazos de dirección  $z_2$  y  $z_4$  están unidos rígidamente o constituyen parte de la mangueta donde va sujeta la rueda. La articulación de esta mangueta respecto del chasis (puntos O y C) constituyen los ejes de giro de las ruedas en su movimiento direccional. Los dos brazos de dirección están conectados por la barra de dirección  $z_3$ .

Los ángulos de dirección girados por las ruedas se miden respecto de la posición neutra, que es aquella en la que las ruedas se encuentran alineadas y paralelas con la dirección de marcha recta. Se han asignado el signo positivo para giros de dirección a izquierdas y negativo para giros a derechas. Los ángulos de dirección de la rueda derecha e izquierda, corresponderán a la variación de los ángulos de posición de los balancines respecto de su valor en la posición neutra  $\theta_{20}$  y  $\theta_{40}$  respectivamente.



**Figura 5-3. Mecanismo dirección de 4 barras.**

Si bien cinemáticamente el mecanismo de dirección de cuatro barras no es exactamente un mecanismo entrada-salida, el diseño del mismo se puede plantear como una síntesis de generación de funciones tomando una de las ruedas como elemento de entrada y considerando a la otra como elemento de la salida, de tal forma que la relación entre los giros de ambas ruedas corresponda con la condición de Ackermann en cualquier posición del recorrido.

Como la condición de Ackermann (función deseada) depende numéricamente de la batalla y del ancho de vía, se elijen unos valores para estos parámetros dentro de los rangos habituales en vehículos de calle. Se toma la rueda derecha como elemento de entrada y se fija su ángulo máximo de giro, el cual se alcanzará cuando dicha rueda sea la interna con la dirección girada al máximo. En una dirección ideal que cumpla Ackermann la rueda izquierda tendrá entonces un ángulo dado por la ecuación (5-1). Debido a la evidente simetría que debe tener el sistema de dirección, este ángulo de la rueda izquierda corresponderá con el valor mínimo de giro de la rueda derecha (cuando actúe como rueda exterior y la dirección girada al máximo). De esta manera una vez fijado el rango de giro de la rueda derecha (entrada) se pueden tomar distintos puntos de precisión a lo largo del mismo. Los correspondientes valores de salida (posición rueda izquierda) se calculan igualmente a través de la ecuación (5-1), pero prestando atención a su condición de rueda exterior o interior a lo largo del recorrido. Si se asume que el giro completo del mecanismo se inicia en la posición de la dirección completamente girada a la derecha y termina en la posición opuesta, la función deseada desde la posición inicial hasta la posición neutra (en este intervalo la rueda derecha es la interior), se puede calcular según la expresión

$$\tan(\delta_i) = \frac{L \cdot \tan \delta_d}{L + l \cdot \tan \delta_d} \quad i = 1 \dots \left(\frac{n_{pos}}{2} - 1\right) \quad (5-2)$$

Y, a partir de dicha posición neutra, hasta la final con la dirección completamente girada a izquierdas (siendo en este caso la rueda derecha la exterior), según

$$\tan(\delta_i) = \frac{L \cdot \tan \delta_d}{L - l \cdot \tan \delta_d} \quad i = \left(\frac{n_{pos}}{2} + 1\right) \dots n_{pos} \quad (5-3)$$

En la posición neutra evidentemente  $\delta_{i, \text{Ackermann}} = 0$ , que corresponde con la ecuación (5-4).

$$\tan(\delta_i) = 0 \quad i = \frac{n_{pos}}{2} \quad (5-4)$$

Las variables de diseño quedan establecidas como las longitudes de las barras móviles, y los ángulos de las barras de dirección en la posición neutra.

$$\mathbf{z}^T = [z_2 \ z_3 \ z_4 \ \theta_{20} \ \theta_{40}] \quad (5-5)$$

La simetría que ha de cumplir el mecanismo permite plantear un vector de diseño reducido. Por ejemplo aquel que considera la longitud de uno de los balancines y su ángulo en la posición neutra de la dirección.

$$\mathbf{z}^T = [z_2 \ \theta_{20}] \quad (5-6)$$

Como se ha elegido la rueda derecha como elemento de entrada, el ángulo  $\theta_2$  resulta la variable conductora, y el ángulo  $\theta_4$  queda como única variable dependiente.

$$\mathbf{q} = [\theta_4] \quad (5-7)$$

El error de síntesis se define como

$$\varepsilon^i = \left( \delta_{i,g}^i - \delta_{i, \text{Ackermann}}^i \right) \quad (5-8)$$

La variación del ángulo  $\theta_2$  corresponde con el ángulo girado por la rueda derecha, mientras que la variación de  $\theta_4$  corresponde con el de la rueda izquierda. En virtud de esta correspondencia y de los sentidos de giro asignados a las ruedas (ver Figura 5-3), el error estructural se puede expresar como

$$\varepsilon^i = \left( (\theta_4 - \theta_{40}) - \delta_{i, \text{Ackermann}}^i \right) \quad (5-9)$$

No resulta necesario, por tanto, definir variables dependientes adicionales para la evaluación del error.

La ecuación de restricción que permite obtener la variable dependiente en cada posición se puede escribir haciendo uso de coordenadas naturales según la condición  $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = z_3^2$ . En este caso, al no ser una variable de diseño,  $z_3$  se ha de formular de forma indirecta como  $z_1 - 2 \cdot z_2 \cdot \cos(\theta_2)$ , o bien definir una ecuación adicional de la forma  $z_3 = z_1 - 2 \cdot z_2 \cdot \cos(\theta_2)$ . La formulación mostrada corresponde a la primera opción.

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = & (z_1 + z_2 \cos \theta_4 - z_2 \cos(\theta_{20} + \Delta \theta_2))^2 + \\ & + (z_2 \sin \theta_4 - z_2 \sin(\theta_{20} + \Delta \theta_2))^2 - (z_1 - 2 \cdot z_2 \cos(\theta_{20} + \Delta \theta_2))^2 = 0 \end{aligned} \quad (5-10)$$

Cuya matriz Jacobiana correspondiente en su forma analítica es

$$J^T = \begin{bmatrix} -1/(-2 \cdot (z_1 + z_2 \cdot \cos(\theta_4) - z_2 \cdot \cos(\theta_{20} + \Delta \theta_2)) \cdot z_2 \cdot \sin(\theta_4) + 2 \cdot (z_2 \cdot \sin(\theta_4) - z_2 \cdot \sin(\theta_{20} + \Delta \theta_2)) \cdot z_2 \cdot \cos(\theta_4)) \cdot \\ (2 \cdot (z_1 + z_2 \cdot \cos(\theta_4) - z_2 \cdot \cos(\theta_{20} + \Delta \theta_2)) \cdot z_2 \cdot \sin(\theta_{20} + \Delta \theta_2) - 2 \cdot (z_2 \cdot \sin(\theta_4) - z_2 \cdot \sin(\theta_{20} + \Delta \theta_2)) \cdot z_2 \cdot \\ \cos(\theta_{20} + \Delta \theta_2) - 4 \cdot (z_1 - 2 \cdot z_2 \cdot \cos(\theta_{20})) \cdot z_2 \cdot \sin(\theta_{20})) \\ -1/(-2 \cdot (z_1 + z_2 \cdot \cos(\theta_4) - z_2 \cdot \cos(\theta_{20} + \Delta \theta_2)) \cdot z_2 \cdot \sin(\theta_4) + 2 \cdot (z_2 \cdot \sin(\theta_4) - z_2 \cdot \sin(\theta_{20} + \Delta \theta_2)) \cdot z_2 \cdot \cos(\theta_4)) \cdot \\ (2 \cdot (z_1 + z_2 \cdot \cos(\theta_4) - z_2 \cdot \cos(\theta_{20} + \Delta \theta_2)) \cdot (\cos(\theta_4) - \cos(\theta_{20} + \Delta \theta_2)) + 2 \cdot (z_2 \cdot \sin(\theta_4) - z_2 \cdot \sin(\theta_{20} + \Delta \theta_2)) \cdot \\ (\sin(\theta_4) - \sin(\theta_{20} + \Delta \theta_2))) + 4 \cdot (z_1 - 2 \cdot z_2 \cdot \cos(\theta_{20})) \cdot \cos(\theta_{20})) \end{bmatrix} \quad (5-11)$$

### • Ejemplos y resultados

A pesar del reducido número de variables de diseño este mecanismo presenta importantes dificultades a la hora de resolver el problema de síntesis. Por una parte muestra numerosos mínimos locales lo que obliga a realizar un número elevado de pruebas con distintos valores iniciales para encontrar el mínimo global de cada configuración. Asimismo, como puede verse en el trabajo de Simionescu y Beale [Simionescu y Beale, 2002], la longitud de los balancines tiene una influencia mucho menor que el ángulo inicial.

En el primero de los ejemplos mostrados se excluye  $z_2$  de las variables de diseño, fijando su valor en 0,16m. Por lo tanto la única variable independiente es el ángulo inicial  $\phi_{20}$ . La obtención de la función deseada (función de Ackermann) se ha obtenido para una relación  $j/L=1/1,9$ , y un ángulo máximo de giro de la rueda interior de  $40^\circ$ . El número de puntos de precisión considerado ha sido de 60. La representación gráfica de los resultados

obtenidos, así como la evolución del proceso de síntesis se muestran en la Figura 5-4.

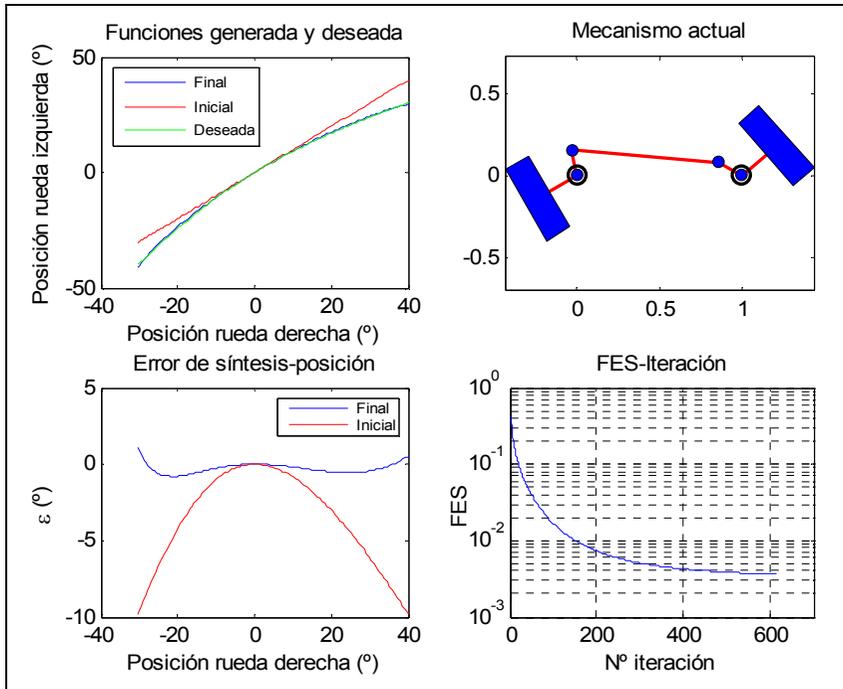


Figura 5-4. Gráficas de resultados síntesis Ackermann variable única  $\theta_{20}$

La Tabla 5-1 recoge los resultados numéricos.

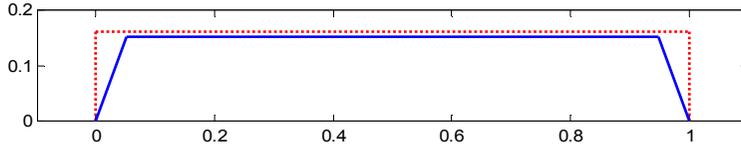
<b>VARIABLES DE DISEÑO</b>	$\theta_{20}$
Valores iniciales (m)	1.570796
Valores optimizados (m)	1.237653
<b>FES inicial:</b>	0.41406
<b>FES final:</b>	0.0036444
<b>Error síntesis inicial máximo (°):</b>	9.7985
<b>Error síntesis final máximo (°):</b>	1.1134

Tabla 5-1. Resultados numéricos síntesis Ackermann variable  $\theta_{20}$

Los resultados corresponden a un algoritmo de paso fijo  $\alpha=0,05$  y un mecanismo inicial con  $z_1=j=1,0\text{m}$ ,  $z_2=0,16\text{m}$  y  $\theta_{20}=90^\circ$ . El valor óptimo de  $\theta_{20}$  obtenido es, expresado en grados,  $70,9123^\circ$ , mientras que la aproximación de Ackermann proporciona un valor de  $75,2564^\circ$ . Sin embargo es comparable al obtenido por Simionescu y Beale. Estos autores denominan al ángulo inicial como  $\theta_0$  y lo miden de forma que resulta ser el complementario del aquí

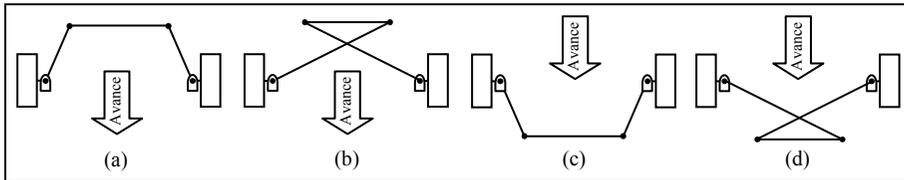
utilizado  $\theta_{20}$ , por lo que el valor óptimo que obtuvieron, entorno a  $109,7^\circ$  para 60 posiciones de precisión, corresponde con un ángulo  $\theta_{20}$  de  $70,3^\circ$ .

Por último, en la Figura 5-5 se presenta un esquema de los mecanismos inicial y final.



**Figura 5-5. Mecanismos inicial y final Ackermann, variable  $\theta_{20}$**

A continuación se realiza un análisis donde se estudia la convergencia del algoritmo bajo diferentes configuraciones y dimensiones del mecanismo de partida. Todos los análisis se han realizado para un vehículo tipo con batalla  $L$  igual a 2000mm y distancia entre ejes de dirección  $j$  de 1500mm. El ángulo de giro máximo de la dirección es de  $40^\circ$  medidos sobre la rueda interior. Según la relación de Ackermann este ángulo de la rueda interior se corresponde con un ángulo de  $27,25^\circ$  de la rueda exterior. El movimiento de la dirección se inicia desde su posición máxima de giro a derecha y termina en la posición máxima a izquierdas. Por tanto, atendiendo a los sentidos de giro asignados, el rango de movimiento de la rueda conductora (derecha) es  $[-40^\circ \dots 0^\circ \dots 27,25^\circ]$ . Las cuatro configuraciones posibles para el mecanismo cuadrilátero articulado vienen resumidas en la Figura 5-6.



**Figura 5-6. Configuraciones del mecanismo de dirección**

Las configuraciones *a* y *c* son las que tienen interés práctico y corresponden al mecanismo de tipo “trailing” (por detrás del eje entre ruedas), y al mecanismo “leading” (por delante del eje entre ruedas). En base a estas configuraciones se han realizado ejecuciones del algoritmo de síntesis con los distintos mecanismos iniciales. Estos mecanismos de partida tienen unos valores de  $\theta_{20}$  comprendidos entre  $70^\circ$  y  $110^\circ$  para la configuración *trailing*, y entre  $250^\circ$  y  $290^\circ$  para la configuración *leading*. Los valores de  $z_2$  considerados para cada valor de  $\theta_{20}$  son 0,16, 0,3, 0,5, 1,6m. Por tanto se han probado un total de 40 mecanismos iniciales diferentes, obteniendo cinco soluciones distintas denominadas como *A*, *B*, *C*, *D* y *E*. Los valores de las variables de diseño que corresponden a cada una estas soluciones vienen recogidas en la siguiente tabla.

	$z_2$ (m)	$z_3$ (m)	$\theta_{20}$ (rad)	FES	Error <sub>max</sub> (°)
A	0.109	1.4	1.11	0.0031851	1.41
B	30.6	10.9	1.73	0.266	13.43
C	33.2	20.4	1.90	0.267	13.45
D	0.0037	1.5	4.21	0.0014981	1.90
E	-0.294	9.8	4.86	0.265	13.40

**Tabla 5-2. Datos mecanismos Ackermann óptimos locales**

La Tabla 5-3, que se muestra a continuación, resumen los mecanismos óptimos a los que ha convergido cada una de las distintas simulaciones. Las simulaciones se han llevado a cabo con un algoritmo de paso fijo de valor 0,01. Las casillas con “-“ indican casos en los que el algoritmo no ha alcanzado la convergencia.

		$z_2$				
		$\theta_2$	0,16	0,3	0,5	1.6
Configuración tipo (a)	70	A	A	A	A	-
	80	A	A	A	A	A
	90	A	A	A	A	A
	100	B	B	B	B	B
	110	C	C	C	C	C
Configuración tipo (c)	250	D	D	D	D	D
	260	E	E	A	A	A
	270	A	A	A	A	A
	280	D	D	D	D	-
	290	-	-	-	-	-

**Tabla 5-3. Convergencia de los distintos mecanismos iniciales**

Los resultados mostrados ponen en evidencia la dependencia del algoritmo respecto del mecanismo inicial. Esto resulta normal por tratarse de un método de búsqueda local en un problema fuertemente no lineal. Desde un punto de vista de aplicación práctica, de los cinco mínimos locales obtenidos sólo dos de ellos tienen dimensiones y error máximo, a priori, aceptables. En sintonía con el trabajo de Collard [Collard *et al.*, 2010], de estos dos mejores resultados uno corresponde a la configuración *trailing* y otro tiene configuración tipo *leading*. El primero de ellos, mecanismo A, es el que presenta el mínimo absoluto (en términos de error máximo) y unas dimensiones más proporcionadas que conllevan, entre otros, un mejor ángulo de transmisión. En la Figura 5-7 se muestran gráficamente los resultados y proceso de optimización de una de las simulaciones que converge en el mecanismo A. Concretamente se trata de la realizada con  $z_2=0,3$  y  $\theta_{20}=80^\circ$ .

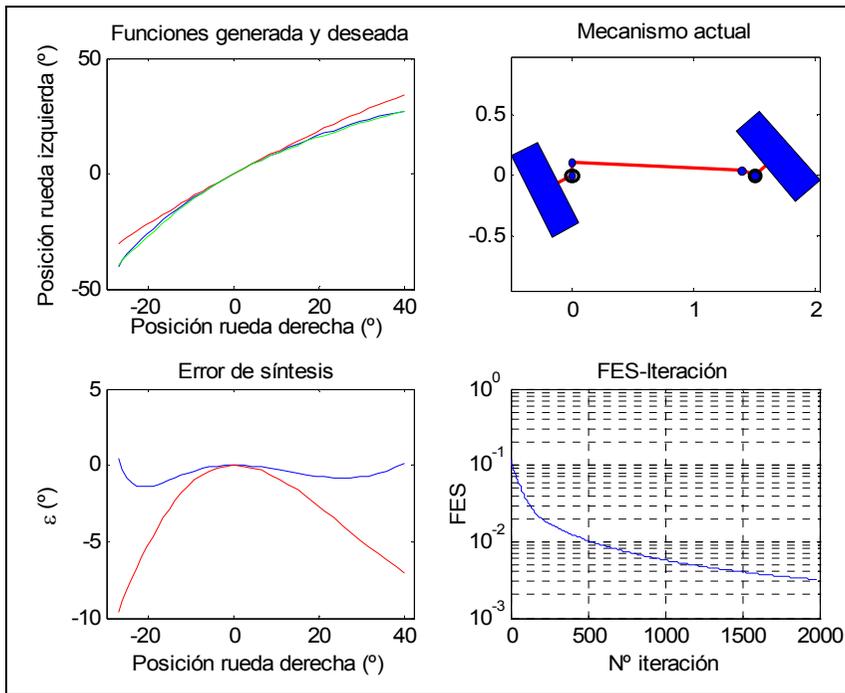


Figura 5-7. Evolución síntesis y resultados Ackermann variables  $z_2$  y  $\theta_{20}$

El mecanismo de partida (en color rojo) junto con el obtenido tras el proceso de síntesis (color azul) se muestran en la Figura 5-8.

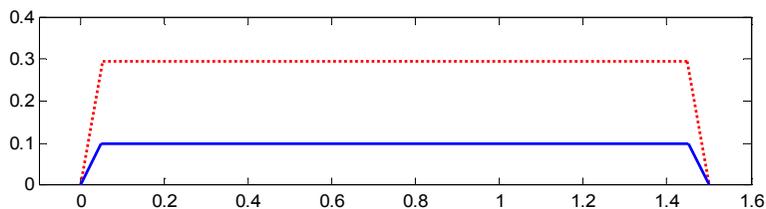


Figura 5-8. Mecanismo inicial y final A síntesis Ackermann variables  $z_2$  y  $\theta_{20}$

Si bien las configuraciones  $b$  y  $d$  (ver Figura 5-6) no tienen aplicación práctica, se han estudiado con el fin de obtener el mecanismo óptimo absoluto desde un punto de vista puramente cinemático. A este respecto cabe señalar, que precisamente el mecanismo encontrado con mínimo error tiene la configuración  $d$ . Esto concuerda con los resultados de Yao y Ángeles [Yao y Ángeles, 2000b]. En nuestro caso, los valores que corresponden a este mecanismo quedan resumidos en la Tabla 5-4.

Dimensiones (m)	$z_2$	$z_3$	$\theta_{20}$ (rad)
		2.6	-2.48
Función error de síntesis	9.1749e-005		
Error máximo (°)	0.22801		

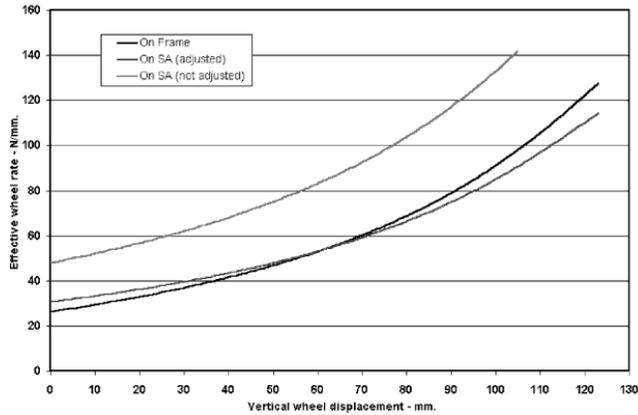
Tabla 5-4. Valores numéricos del mecanismo A

### 5.2.2. Mecanismo de suspensión trasera progresiva para motocicleta.

En los últimos tiempos, el diseño de suspensiones traseras de motocicletas se ha caracterizado por el desarrollo de configuraciones de amortiguador único situado próximo al eje de pivotamiento del brazo oscilante de la suspensión. Este tipo de diseño permite aumentar el recorrido de la suspensión y al mismo tiempo reducir el tamaño y recorrido del conjunto muelle-amortiguador.

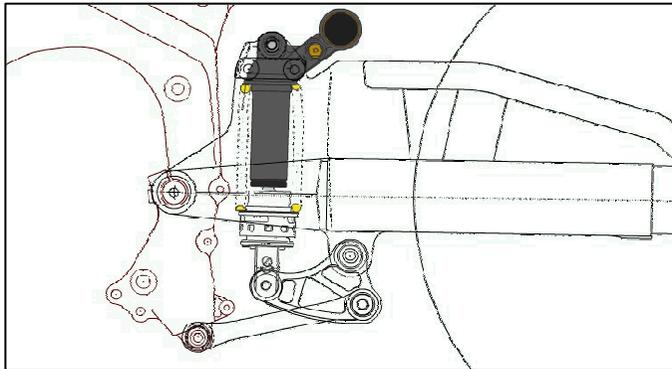
En los diseños más evolucionados la conexión del amortiguador se realiza a través de barras adicionales formado un mecanismo complejo que permite reducir aún más el recorrido del muelle-amortiguador y, principalmente, que la suspensión muestre un comportamiento no lineal en su recorrido aumentando así su rango óptimo de desempeño (una suspensión suave al principio de su recorrido permite absorber los pequeños baches sin pérdida de tracción. Para grandes baches o saltos la suspensión tiene un comportamiento más duro para evitar llegar al tope de su recorrido). Este comportamiento no lineal se logra gracias a la cinemática del propio mecanismo de suspensión y no, como en los sistemas tradicionales, mediante la adopción de elementos muelle y amortiguador con respuesta no lineal propia, que resultan más grandes, pesados y costosos. Algunos ejemplos de estudios sobre este tema son, por ejemplo, [Hwang y Shih, 1987] y [Vitale y Virzi Mariotti, 2007].

En la Figura 5-9 se muestra un ejemplo de variación de la rigidez de la suspensión en el recorrido de ésta para tres modelos de motocicleta distintos.



**Figura 5-9. Ejemplo comportamiento no lineal suspensión**

Uno de estos sofisticados mecanismos de suspensión es el desarrollado por el fabricante de motos Honda, al que denomina como *Pro-Link*. El esquema de este tipo de suspensión se muestra en la Figura 5-10.



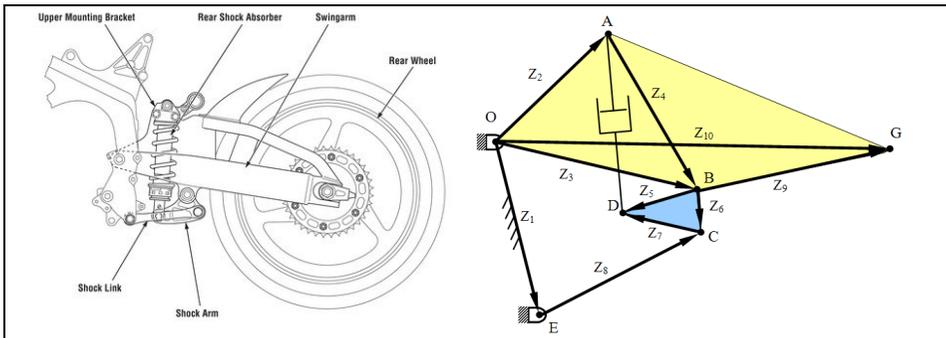
**Figura 5-10. Mecanismo suspensión Honda Pro-Link**

En base a este mecanismo se proponen tres ejemplos de aplicación práctica al problema de generación de funciones de la metodología de síntesis óptima presentada en esta tesis:

1. El primer ejemplo consiste en la optimización del mecanismo para que cumpla con una determinada curva fuerza-recorrido.
2. Optimización de la curva fuerza-recorrido y minimización del tamaño del mecanismo de la suspensión.
3. Optimización de un mecanismo con distinta topología para que cumpla la misma curva objetivo.

• *Planteamiento general del problema*

Desde el punto de vista cinemático el mecanismo Honda Pro-Link es una cadena Watt tipo I. En la Figura 5-11b esta configuración cinemática queda representada por los pares A, B, C, D y E, y los elementos del 1 al 6. Debido a la formulación de las ecuaciones cinemáticas cada uno de los elementos ternarios se modeliza como tres elementos binarios de longitudes  $z_2, z_3, z_4, z_5, z_6,$  y  $z_7$  respectivamente. El punto G pertenece al elemento ternario OAB (basculante trasero) y representa el centro de la rueda. Como su distancia vertical al punto de contacto de la rueda con el suelo es constante e igual al radio de la rueda se utiliza su coordenada  $y_G$  para generar el movimiento del mecanismo. Por su parte, la barra 1 representa el chasis de la moto que se considera fijo a efectos del movimiento relativo de la suspensión.



**Figura 5-11. Implementación y esquema cinemático mecanismo Pro-Link**

Considerando fija la longitud del basculante trasero ( $z_{10}$ ) así como la posición de su articulación respecto del chasis, el vector de variables de diseño queda constituido por 10 variables.

$$\mathbf{z}^T = \left[ x_E \quad y_E \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \quad z_5 \quad z_6 \quad z_7 \quad z_8 \quad z_9 \right] \quad (5-12)$$

La relación de palanca (traducción libre del término inglés “*leverage ratio*”) consiste en la relación entre la fuerza que actúa en el extremo libre del brazo oscilante (“*swingarm*”) y la fuerza compresiva sobre el muelle-amortiguador (“*shock absorber*”). Es similar a la definición de ventaja mecánica de un mecanismo. Esta relación de palanca se relaciona con la rigidez efectiva de la suspensión. Como ya se ha comentado, en el diseño de la suspensión se busca que esta rigidez aumente progresivamente con el recorrido de la suspensión. Si se asume un comportamiento lineal tanto del muelle como del amortiguador el comportamiento progresivo de la suspensión se debe únicamente a la cinemática de su mecanismo. En este caso se puede caracterizar el

comportamiento de la suspensión como la relación entre el recorrido de la suspensión y la variación de la distancia entre los puntos de anclaje del conjunto muelle-amortiguador, DA. Por tanto se ha definido el error en términos de variación de dicha distancia respecto de la altura de la rueda, según la ecuación (5-13).

$$\varepsilon = \left( \{DA_g^i - DA_g^0\} - \Delta DA_d \right) \quad (5-13)$$

Donde  $DA^0$  representa la distancia en la posición neutra de la suspensión.

Las variables dependientes incluyen la distancia DA junto con el resto de coordenadas de pares cinemáticos móviles.

$$\mathbf{W}^T = \left[ x_A \ y_A \ x_B \ y_B \ x_C \ y_C \ x_D \ y_D \ x_G \ DA \right] \quad (5-14)$$

Por tanto el conjunto de ecuaciones de restricción se compone de nueve ecuaciones de tipo cinemático y una de síntesis que define el parámetro funcional DA. Utilizando coordenadas naturales la expresión de dichas ecuaciones viene dado por (5-15).

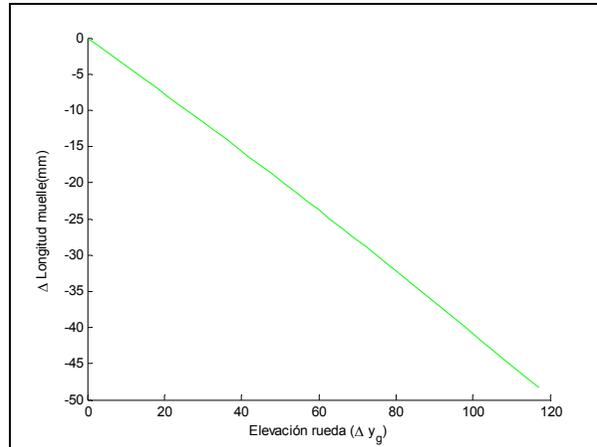
$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} (x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2 - z_2^2 = 0 \\ (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - z_4^2 = 0 \\ (x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2 - z_3^2 = 0 \\ (x_G - x_B)^2 + (y_G - y_B)^2 - z_9^2 = 0 \\ (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 - z_6^2 = 0 \\ (x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2 - z_8^2 = 0 \\ (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 - z_7^2 = 0 \\ (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 - z_5^2 = 0 \\ (x_G - x_O)^2 + (y_G - y_O)^2 - z_{10}^2 = 0 \\ (x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2 - (DA)^2 = 0 \end{array} \right. \quad (5-15)$$

### • *Ejemplos y resultados*

#### Síntesis sin restricciones adicionales

El primero de los problemas planteados trata de resolver el diseño del mecanismo con la topología Pro-Link para que cumpla con una determina

curva de variación de compresión del conjunto muelle-amortiguador. Esta curva objetivo viene representada en la Figura 5-12.



**Figura 5-12. Curva deseada de variación longitud muelle-amortiguador**

El recorrido total de la suspensión, medido como elevación de la rueda respecto del chasis a partir de la posición neutra, es de 117mm. Considerando una longitud fija de 565,14mm de longitud del brazo oscilante, dicho recorrido corresponde con una rotación de  $11,6^\circ$  del mencionado brazo. Se han considerado 40 posiciones de precisión uniformemente espaciadas, es decir, una posición cada 3mm de elevación del punto G.

En el criterio de convergencia de las iteraciones se sintonizado con un error absoluto  $\delta_a=10^{-4}$  y un error relativo  $\delta_r=10^{-4}$ .

En la Figura 5-13 se muestra el resultado de optimización para tamaño de paso fijo de valor 0,01.

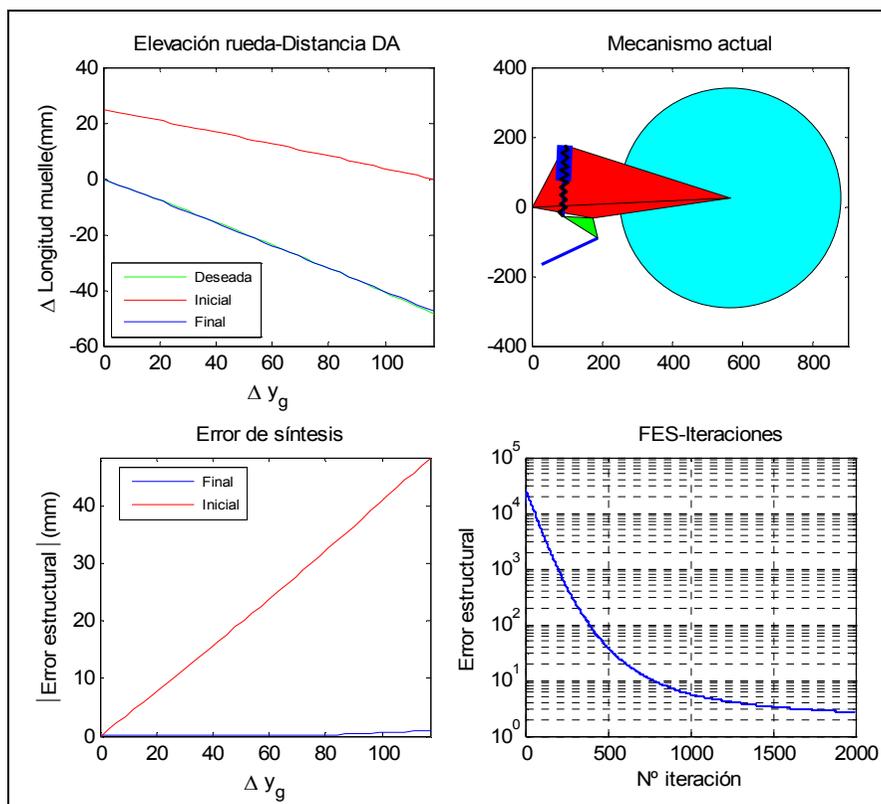


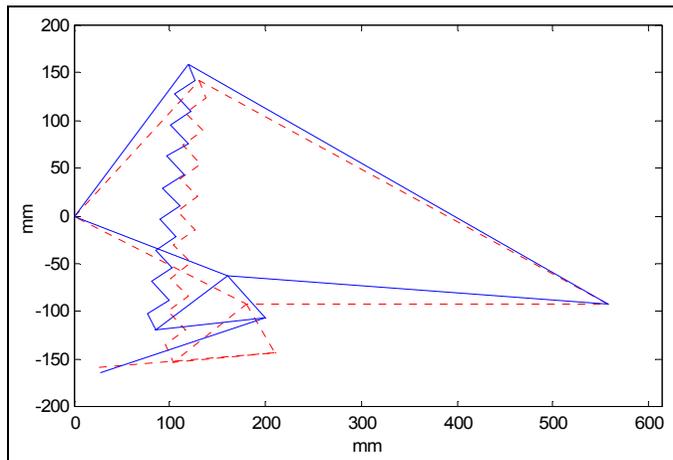
Figura 5-13. Resultados gráficos de la optimización

Las variables de diseño iniciales y finales junto con los valores de la función de error y error de síntesis (error estructural) quedan recogido en la Tabla 5-5.

VARIABLES DE DISEÑO (mm)	xe	ye	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8	z9
Valores iniciales	26.50	-158.70	201.95	177.56	217.07	80.87	84.26	106.72	183.46	396.40
Valores optimizados	25.88	-165.02	198.45	174.37	226.06	91.13	59.54	117.19	181.48	397.15
FES inicial	3546.4892									
FES final	0.81104									
Error inicial máximo	23.406									
Error final máximo	0.56963									

Tabla 5-5. Valores de las variables de diseño y errores

Los mecanismos inicial y optimizado pueden verse de forma gráfica en la Figura 5-14.



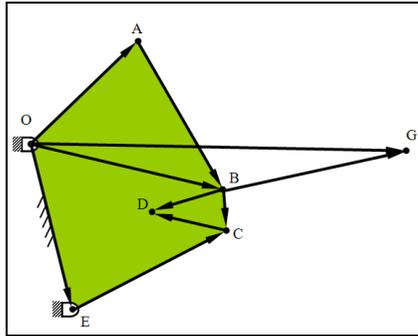
**Figura 5-14. Mecanismos inicial y óptimo Prolink**

En este ejemplo se muestra como el método de síntesis ha logrado encontrar un mecanismo que mejora notablemente las características cinemáticas demandadas respecto del mecanismo inicial. Además la función objetivo alcanzada tiene un valor muy bajo, al igual que el error estructural máximo a lo largo del recorrido de la suspensión. Resultados similares se han obtenido con otros mecanismos de partida y valores de tamaño de paso tanto fijo como variable, si bien las soluciones obtenidas no son idénticas. Esto puede deberse muy probablemente a la existencia de varios mínimos locales próximos al global.

### **Síntesis con minimización del tamaño área proyectada del mecanismo**

En este segundo ejemplo se plantea la optimización con un doble objetivo. Al igual que el caso anterior, se debe lograr una determinada curva de variación de compresión del muelle-amortiguador. Simultáneamente se exige que el tamaño del mecanismo sea lo menor posible.

Como la longitud del brazo oscilante  $OG$  no se considera como variable de diseño, el tamaño el mecanismo se puede evaluar de forma equivalente a través del área comprendida entre los pares  $OABCE$ .



**Figura 5-15. Medida del tamaño del mecanismo**

De esta forma, la evaluación del error de síntesis se plantea según la ecuación (5-16)

$$\varepsilon = \left( \{DA_g^i - DA_g^0\} - \Delta DA_d \right) + \beta \cdot A_T \quad (5-16)$$

El primero de los sumandos es el mismo de la ecuación (5-13) y mide la diferencia entre las curvas generadas y deseadas. El segundo de los términos  $A_T$ , representa el área del mecanismo que se quiere minimizar. De esta manera el valor de este área afecta de forma directa al error de síntesis. El término  $\beta$  actúa como factor de ponderación y escala entre ambos sumandos.

#### Análisis de sensibilidad respecto $\beta$

Debido a que el valor de  $\beta$  tiene una importancia fundamental en el comportamiento del algoritmo de síntesis, se ha realizado un estudio de sensibilidad de este término con objeto de determinar su valor óptimo. Los valores ensayados están comprendidos entre 0 y 1000. Los resultados que se muestran a continuación pertenecen a los obtenidos a partir de mecanismo inicial con las variables de diseño de la Tabla 5-6, si bien se han obtenido resultados semejantes para otros mecanismos iniciales.

xe	ye	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8	z9
21.20	-158.70	163.41	227.65	211.98	128.92	83.95	107.75	188.10	342.62

**Tabla 5-6. Variables de diseño del mecanismo inicial (en milímetros)**

Para facilitar el análisis de los resultados se muestran tanto el valor global de la función objetivo (FES), como la contribución a la misma de cada uno de los dos sumandos que componen el error de síntesis definido según (5-16). Así el valor denominado *FES estructural* mide la adecuación del mecanismo obtenido de la síntesis únicamente atendiendo a la función deseada. Por su parte, la cuantificación del área que ocupa el mecanismo queda reflejada en el término *Área promedio*. Otros datos adicionales como el valor máximo a lo largo del

recorrido de la suspensión del área o del error de síntesis, son igualmente reflejados en la Tabla 5-7.

$\beta$	0	0.01	0.1	0.5	1	5	10	100	1000
FES inicial	0.69917	737905.72	140063797	3599420281	14446133077	3.6201E+11	1.4485E+12	1.4489E+14	1.4491E+16
FES final	0.35327	1791983.5	145329715	3592187187	14331991328	3.5764E+11	1.4302E+12	1.4301E+14	1.4301E+16
Error total inicial máximo	0.9233	412.265	4120.7316	20602.8421	41205.4974	206026.74	412053.293	4120531.25	41205310.8
Error total final máximo	0.42425	320.8021	2827.3723	13957.7187	27838.5746	138908.029	277747.829	2776870.04	27768095.2
Error total promedio inicial	0.0088047	410.8051	4107.9716	20539.823	41079.6372	205398.151	410796.293	4107962.85	41079628.4
Error total promedio final	0.26089	299.08	2692.9651	13391.5595	26750.0918	133631.912	267233.781	2672218.65	26721987.7
FES estruct. inicial	11.4018	913698.059	357054.858	238988.516	219960.4932	204105.086	202176.399	200457.574	200406.194
FES estruct. final	8.5259	34672.0816	19855.1926	41265.3435	43251.9494	44634.7908	44840.1143	45034.8882	45124.8081
Error estr. inicial máximo	0.9233	0.9233	0.9233	0.9233	0.9233	0.9233	0.9233	0.9233	0.9233
Error estr. final máximo	0.42425	60.7746	52.1722	77.1985	78.9164	79.6456	79.7522	80.1447	80.1534
Error estr. promedio inicial	0.0088047	0.0088047	0.0088047	0.0088047	0.0088047	0.0088047	0.0088047	0.0088047	0.0088047
Error estr. promedio final	0.09467	38.2106	-26.517	-36.6727	-37.4037	-37.8767	-37.9453	-38.0083	-38.0387
Área max. inicial	41205.3106	41205.3106	41205.3106	41205.3106	41205.3106	41205.3106	41205.3106	41205.3106	41205.3106
Área max. final	41212.9856	27981.489	28273.7226	27915.4374	27838.5746	27781.6058	27774.7829	27768.7004	27768.0952
Área promedio inicial	41079.6284	41079.6284	41079.6284	41079.6284	41079.6284	41079.6284	41079.6284	41079.6284	41079.6284
Área promedio final	41055.1071	26086.9442	27194.8211	26856.4643	26787.4955	26733.9576	26727.1727	26722.5666	26722.0258

Tabla 5-7. Resultados numéricos análisis sensibilidad de  $\beta$

Debido a que el propio factor  $\beta$  incide sobre la evaluación del error, las distintas medidas del mismo se representan en forma de variación en tanto por ciento respecto de los valores iniciales.

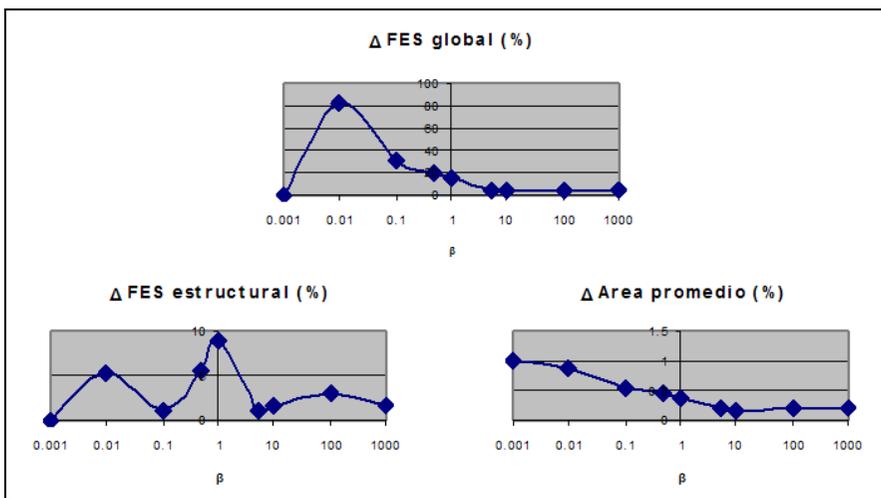


Figura 5-16. Resultados para distintos valores de  $\beta$

Para valores de  $\beta$  iguales o mayores a 5 se logra una disminución de la función de error global, Figura 5-16. Se consigue igualmente una reducción del área ocupada por el mecanismo. Por su parte, el error estructural presenta una

mayor dispersión de resultados, sin embargo, para valores de  $\beta$  entre 5 y 10, también se observa una notable reducción. Por tanto, se estima que el valor más adecuado para el factor de ponderación-escala es aproximadamente 5. Este es el valor que se fija para el resto de pruebas.

*Influencia de la elección del mecanismo inicial*

Igualmente se han realizado pruebas con distintos mecanismos iniciales. En la Tabla 5-8 se recogen las variables de estos mecanismos iniciales, así como el mecanismo obtenido tras el proceso de optimización. Para todos los casos se ha tomado un valor  $\beta=0,2$ .

Nº Mecanismo	Variables de diseño (mm)	xe	ye	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8	z9
1	Iniciales	19.0	-159	159	183	201	67.0	81.1	136	212	404
	Optimizadas	16.7	-173	160	176	191	99.4	66.6	132	205	394
2	Iniciales	20.2	-143	175	151	188	55.5	88.4	94.1	171	424
	Optimizadas	18.6	-155	170	152	198	84.7	52.5	108	166	416
3	Iniciales	28.0	-115	185	223	254	141	34.7	126	181	348
	Optimizadas	26.5	-109	186	223	250	141	59.7	119	180	348
4	Iniciales	29.4	-182	173	169	238	50.9	66.2	84.0	132	418
	Optimizadas	29.7	-185	172	170	240	63.5	52.9	87.4	132	417
5	Iniciales	21.7	-149	208	163	254	24.8	108	121	216	427
	Optimizadas	23.4	-151	207	163	236	28.2	98.5	126	217	429
6	Iniciales	24.6	-130	200	220	250	114	18.5	102	178	354
	Optimizadas	24.6	-130	200	220	250	114	18.4	102	178	354
7	Iniciales	22.0	-175	192	200	233	85.9	35.8	54.5	157	375
	Optimizadas	22.0	-175	192	200	233	85.9	35.8	54.5	157	375
8	Iniciales	20.3	-130	155	183	227	83.8	80.9	144	206	411
	Optimizadas	14.5	-150	157	174	226	116	69.4	138	198	399
9	Iniciales	30.1	-155	160	230	225	148	75.6	93.0	140	352
	Optimizadas	28.6	-152	157	220	227	143	94.9	94.8	150	351
10	Iniciales	26.7	-162	182	179	236	91.4	84.7	46.1	138	399
	Optimizadas	23.4	-161	173	174	250	101	80.1	65.1	141	392

**Tabla 5-8. Mecanismos Prolink iniciales y optimizados**

La Tabla 5-9 muestra los resultados numéricos de cada optimización. Los valores de área vienen expresados en mm<sup>2</sup>.

Nº Mecanismo	FES inicial	FES final	Error inicial máx.	Error final máximo	Área max. inicial	Área max. final	Área promedio inicial	Área promedio final
1	0.0011268	2.98E-06	0.01679	0.00085793	33789.0176	34779.3921	31790.5205	34000.3198
2	0.024273	8.95E-07	0.061133	0.00045731	29515.1485	28123.5566	28487.3477	27964.4577
3	0.065062	1.53E-06	0.11436	0.00061276	34652.1512	36638.7113	34498.2073	36318.0589
4	0.0069607	4.58E-08	0.033282	0.00013611	31710.3	30587.6906	31156.3987	30298.892
5	0.027671	0.0029727	0.066116	0.027117	34624.7242	32835.636	32323.047	29781.2222
6	0.42558	0.43986	0.18729	0.19056	34788.1589	34798.9712	34415.445	34431.3728
7	0.060111	0.060111	0.068308	0.068308	35341.9651	35341.9651	34622.3015	34622.3015
8	0.0015354	4.24E-06	0.011054	0.0010191	29732.9446	32704.3528	27461.7995	31680.9173
9	0.016447	1.29E-05	0.076502	0.0017729	36507.5033	38280.6448	36128.5509	38154.7494
10	0.014897	3.24E-05	0.046501	0.0028211	34887.9357	33390.774	34387.7816	33027.2466

**Tabla 5-9. Resultados optimización distintos mecanismo iniciales**

Se observa una notable influencia del mecanismo inicial en la calidad de la solución obtenida, especialmente en lo que respecta al objetivo de reducción de área. En todos los casos excepto el 6 y 7 se logra una notable reducción del valor de la función objetivo, si bien no siempre se ve acompañada por una reducción del área ocupada por el mecanismo respecto de su valor inicial, como ocurre en los casos 1, 3 y 6 a 9. Esto podría corregirse con un aumento del factor  $\beta$ , si bien muy probablemente a costa de un incremento del error estructural.

En la Figura 5-17 se muestran los resultados del caso con mejores resultados. Concretamente se trata del caso 4, que presenta el menor valor final de la función objetivo, así como una disminución del área del mecanismo.

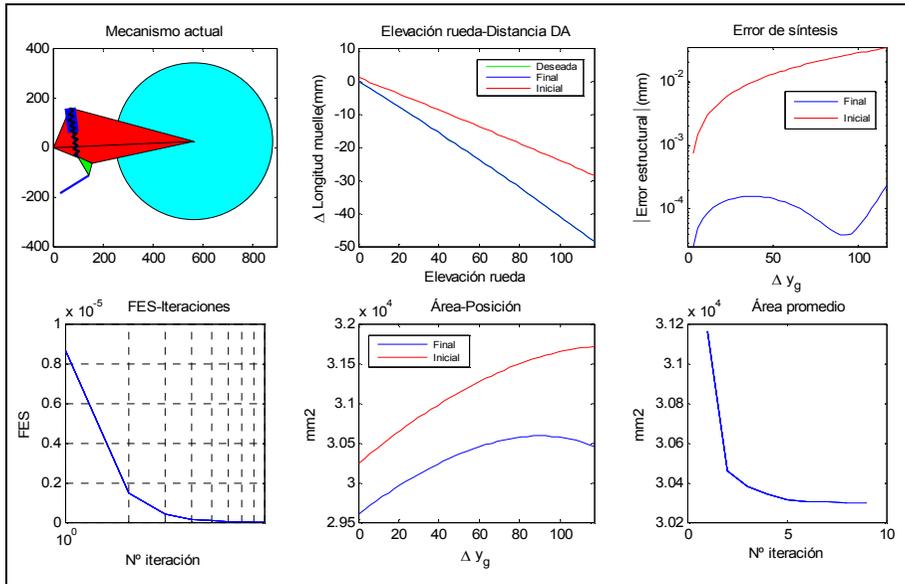


Figura 5-17. Resultados para mecanismo inicial N° 4

### Síntesis de mecanismo equivalente con distinta topología

Como último de los ejemplos de aplicación de la metodología de síntesis óptima presentada se plantea el problema de reproducir la curva de compresión muelle-amortiguador que genera un determinado mecanismo con topología Unit Pro-Link, mediante un mecanismo con topología distinta. En este caso se propone utilizar el mecanismo que el constructor de motocicletas Suzuki denomina Full Floater (ver Figura 5-18).

Desde un punto de vista práctico, el cambio de mecanismo para generar la misma función puede tener diversas motivaciones, desde las puramente técnicas hasta las económicas como son el pago de derechos explotación de ciertas patentes.

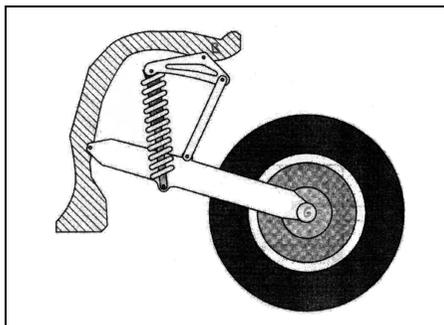


Figura 5-18. Mecanismo de suspensión Suzuki *Full Floater*

El mecanismo utilizado por Suzuki para lograr un comportamiento progresivo de la suspensión trasera de sus motocicletas consiste, al igual que el mecanismo de Honda, en una cadena cinemática de seis barras. Concretamente se trata de una cadena Stephenson tipo I. Ver Figura 5-19 .

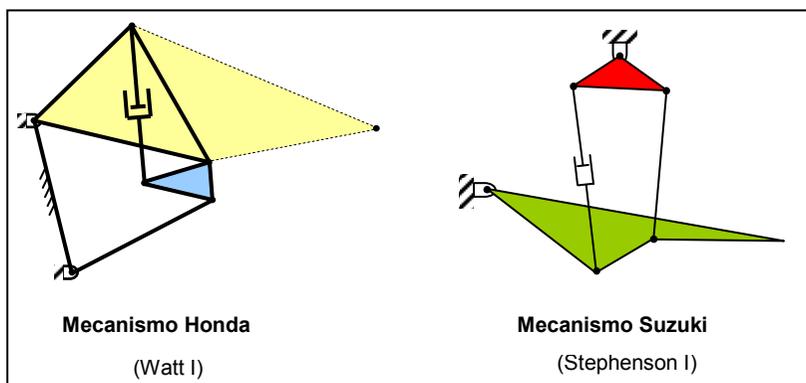


Figura 5-19. Comparativa mecanismos Honda y Suzuki

La definición del mecanismo Suzuki se realiza de acuerdo a nomenclatura de pares y elementos de la Figura 5-20. Se consideran 10 variables de diseño.

$$\mathbf{Z}^T = [x_B \quad y_B \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \quad z_6 \quad z_7 \quad z_8 \quad z_9] \quad (5-17)$$

Y las variables dependientes incluyen el parámetro funcional  $EA$  correspondiente a la distancia entre los extremos del muelle-amortiguador.

$$\mathbf{W}^T = [x_A \quad y_A \quad x_C \quad y_C \quad x_D \quad y_D \quad x_E \quad y_E \quad x_G \quad EA] \quad (5-18)$$

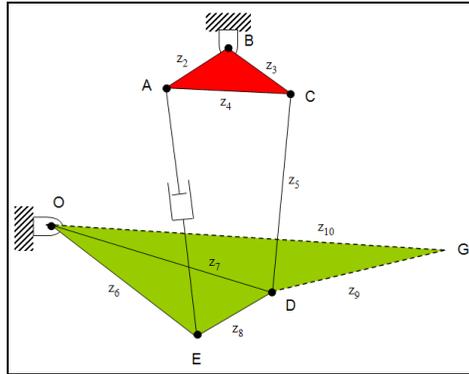


Figura 5-20. Esquema cinemático de mecanismo Suzuki

Las ecuaciones de restricción se definen en coordenadas naturales.

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - z_2^2 = 0 \\ (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 - z_3^2 = 0 \\ (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 - z_4^2 = 0 \\ (x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 - z_5^2 = 0 \\ (x_E - x_O)^2 + (y_E - y_O)^2 - z_6^2 = 0 \\ (x_D - x_O)^2 + (y_D - y_O)^2 - z_7^2 = 0 \\ (x_E - x_D)^2 + (y_E - y_D)^2 - z_8^2 = 0 \\ (x_G - x_D)^2 + (y_G - y_D)^2 - z_9^2 = 0 \\ (x_G - x_O)^2 + (y_G - y_O)^2 - z_{10}^2 = 0 \\ (x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2 - (EA)^2 = 0 \end{array} \right. \quad (5-19)$$

El error de síntesis se define como la diferencia entre las variaciones de longitud del muelle-amortiguador de los mecanismos Suzuki y Honda, constituyendo la de este último la curva deseada.

$$\varepsilon = (EA - EA_O) - (DA - DA_O) \quad (5-20)$$

Se muestran a continuación los resultados obtenidos para dos mecanismos iniciales distintos. Como factor de variación de tamaño de paso del algoritmo se ha tomado un valor 0,1 en ambos casos.

Nº Mecanismo	Variables de diseño (mm)	$x_B$	$y_B$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$z_7$	$z_8$	$z_9$
1	Iniciales	160	200	98.8	89.4	122	263	184	254	106	352
	Óptimos	159	198	59.8	105	154	272	197	236	106	351
2	Iniciales	170	210	121	94.9	132	243	179	243	120	350
	Óptimos	170	213	74.4	114	164	248	198	221	121	352

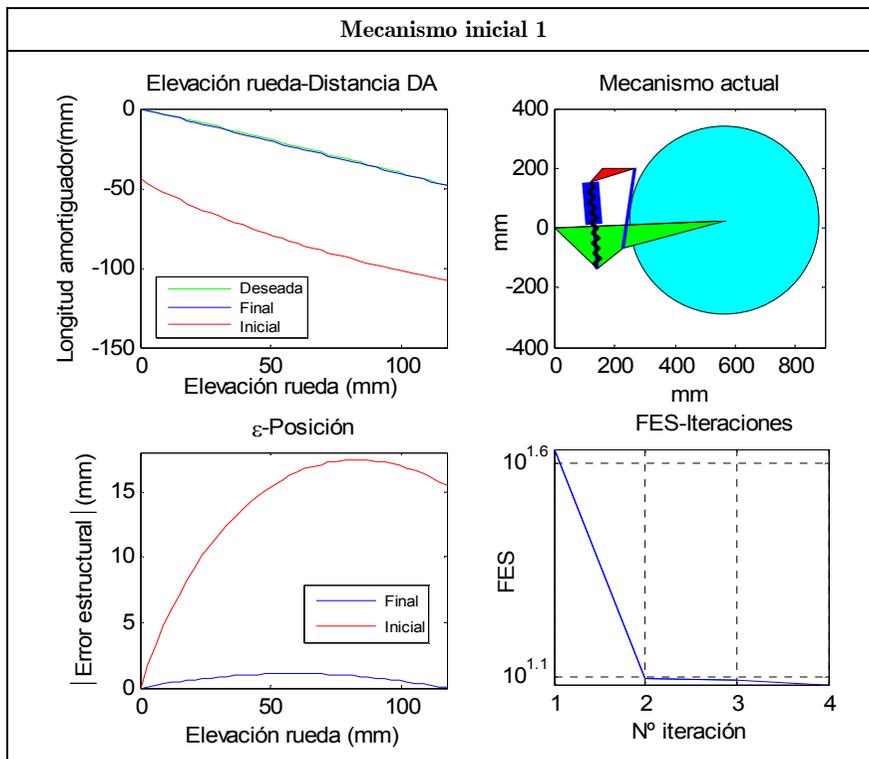
Tabla 5-10. Valores iniciales y óptimos de las variables de diseño

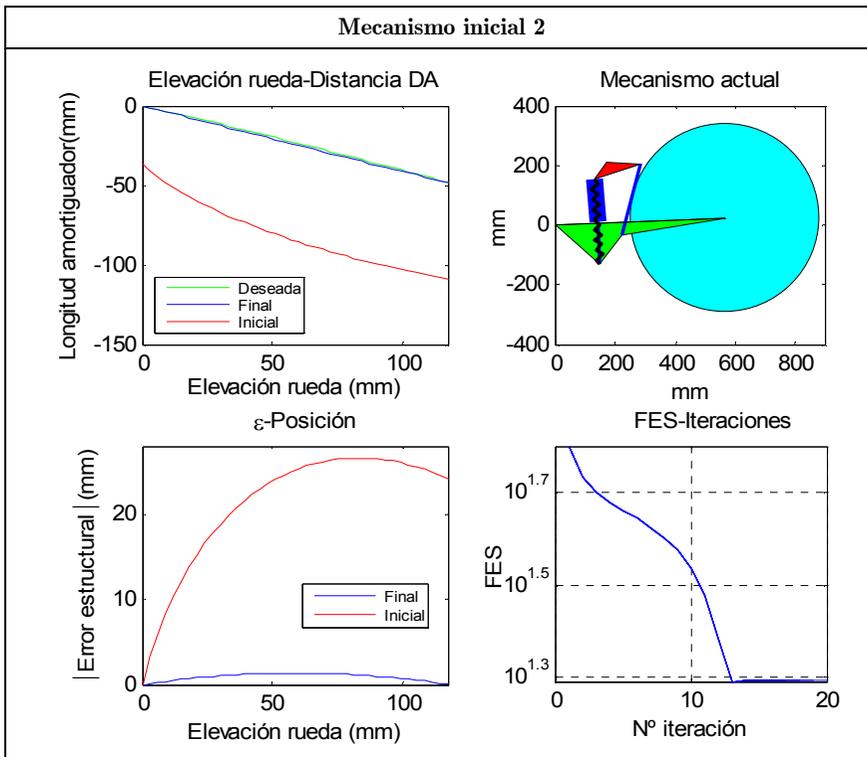
En la siguiente tabla siguiente se muestran los valores de la función objetivo, el error y el número de iteraciones.

	Mec. 1	Mec. 2
FES inicial:	4119.7179	9900.3491
FES final:	12.3255	19.6048
Error inicial máximo:	17.4306	26.5908
Error final máximo:	1.0887	1.3662
Número de iteraciones:	4	20

**Tabla 5-11. Función objetivo y error estructural de los mecanismos optimizados**

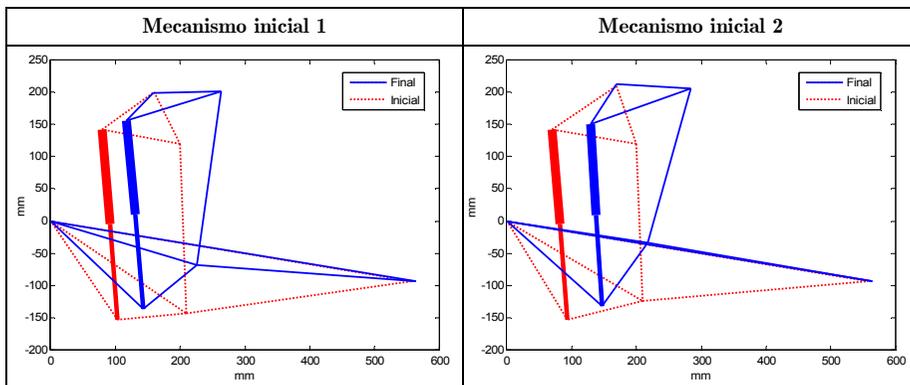
La Figura 5-21 muestra gráficamente los resultados de la optimización.





**Figura 5-21. Resultados gráficos optimización suspensión Suzuki.**

Una comparativa entre los mecanismos de partida (rojo) y los obtenidos tras el proceso de optimización (azul) se muestran en la Figura 5-22.



**Figura 5-22. Mecanismos iniciales y finales suspensión Suzuki.**

Los resultados muestran que el algoritmo de síntesis logra alcanzar soluciones distintas dependiendo del mecanismo de partida. Sin embargo, ambas soluciones presentan unos valores finales, tanto de la función objetivo como

del error estructural máximo, muy similares entre si, y considerablemente inferiores a sus respectivos valores iniciales. Por tanto, a expensas de otras consideraciones técnicas adicionales, las dos soluciones se consideran satisfactorias.

### **5.3. Ejemplos de aplicación de síntesis de generación de trayectorias**

#### **5.3.1. Mecanismo equivalente a perfil de leva**

Los mecanismos que utilizan levas para producir ciertos tipos de movimiento son ampliamente utilizados en el diseño de máquinas. Se propone la síntesis de un mecanismo de cuatro barras en el que un punto del acoplador reproduzca el perfil de una leva. La sustitución de una leva por un mecanismo equivalente puede tener interesantes ventajas: menores rozamientos y desgaste, se evita el uso de muelles y así posibles fenómenos vibratorios asociados a ellos, etc.

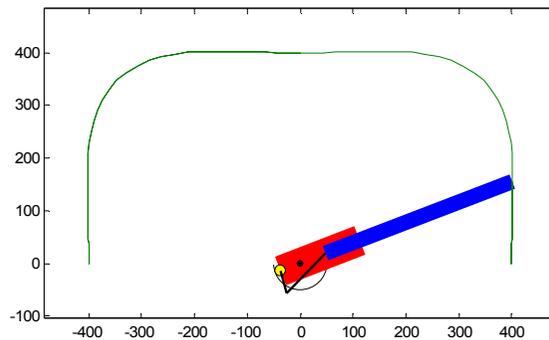
En este ejemplo se plantea el diseño de un nuevo sistema limpiaparabrisas de tipo monobrazo para automóvil, tomando como base el sistema empleado por Mercedes-Benz en algunos de sus modelos.

Este sistema se puede considerar compuesto por dos mecanismos interconectados. El primero de ellos es el encargado de realizar el movimiento oscilatorio del brazo. Cinemáticamente se trata de un mecanismo tipo Watt, con la particularidad de que un elemento ternario tiene los pares alineados. Su configuración trata de lograr un ángulo barrido cercano a  $180^\circ$ , sin que el mecanismo alcance posiciones singulares. Véase la Figura 5-23.



**Figura 5-23. Mecanismo de oscilación sistema limpiaparabrisas**

El segundo mecanismo es el encargado del movimiento telescópico alternativo de la escobilla respecto del brazo. Desde un punto de vista cinemático es un mecanismo biela-manivela. El eje de la manivela lleva solidaria una rueda dentada que engrana interiormente sobre otra fija. El movimiento oscilatorio de arrastre del brazo proporciona el movimiento del engranaje. Gracias a la relación de radios 5 a 1 entre las ruedas, el mecanismo telescópico realiza dos ciclos por cada oscilación del brazo. Un esquema del mecanismo telescópico se muestra en la Figura 5-24.



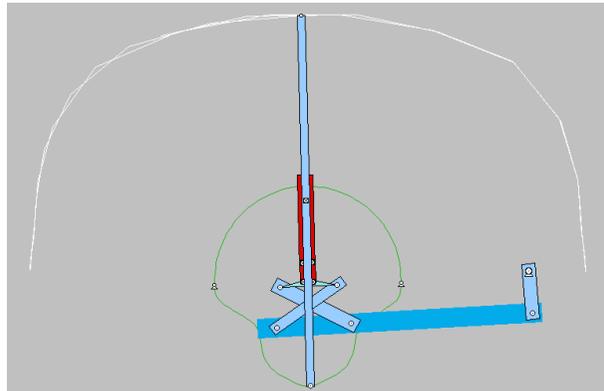
**Figura 5-24. Esquema mecanismo telescópico mediante engranajes.**

El elemento azul representa la escobilla, cuyo punto extremo describe la trayectoria marcada en color verde. Por su parte, el elemento rojo es el cuerpo de limpiaparabrisas y únicamente tiene movimiento oscilatorio. La rueda amarilla y el arco representan el engranaje que mueve el mecanismo biela-manivela.

Como puede deducirse a partir de la figura la principal ventaja de este tipo de sistemas es que logran adaptar el recorrido del extremo de la escobilla al contorno del parabrisas maximizando el área limpiada.

El diseño del nuevo sistema mantiene el mecanismo de barrido y sustituye el encargado del movimiento telescópico por un sistema no basado en engranajes.

En primer lugar, dicho mecanismo se sustituye por un sistema de leva, donde el brazo telescópico (convenientemente modificado) actúa como seguidor. El esquema es el mostrado en la Figura 5-25.



**Figura 5-25. Mecanismo leva alternativo**

El perfil de leva viene representado en color verde. Solamente es útil la parte inferior entre los dos puntos marcados.

En una segunda fase del diseño se trata de sustituir la leva por un mecanismo tipo cuadrilátero articulado en el que un punto del acoplador describa una trayectoria lo más próxima posible al perfil de leva anterior. De esta manera, conectando el brazo telescópico al acoplador del cuadrilátero se conseguiría una trayectoria similar de su extremo libre.

### Planteamiento del problema

Al tratarse de un mecanismo ya estudiado como es el cuadrilátero articulado la formulación del problema no se repetirá aquí. Baste con recordar las variables de diseño

$$\mathbf{z}^T = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \ z_5 \ z_6 \ \theta_1 \ \theta_{20} \ x_0 \ y_0] \quad (5-21)$$

### Ejemplos y resultados

Se han realizado ejemplos utilizando tanto el algoritmo de síntesis con coordinación entre los puntos de precisión y la posición del elemento de entrada como sin ella. A continuación se muestran los resultados para los dos mecanismos iniciales distintos.

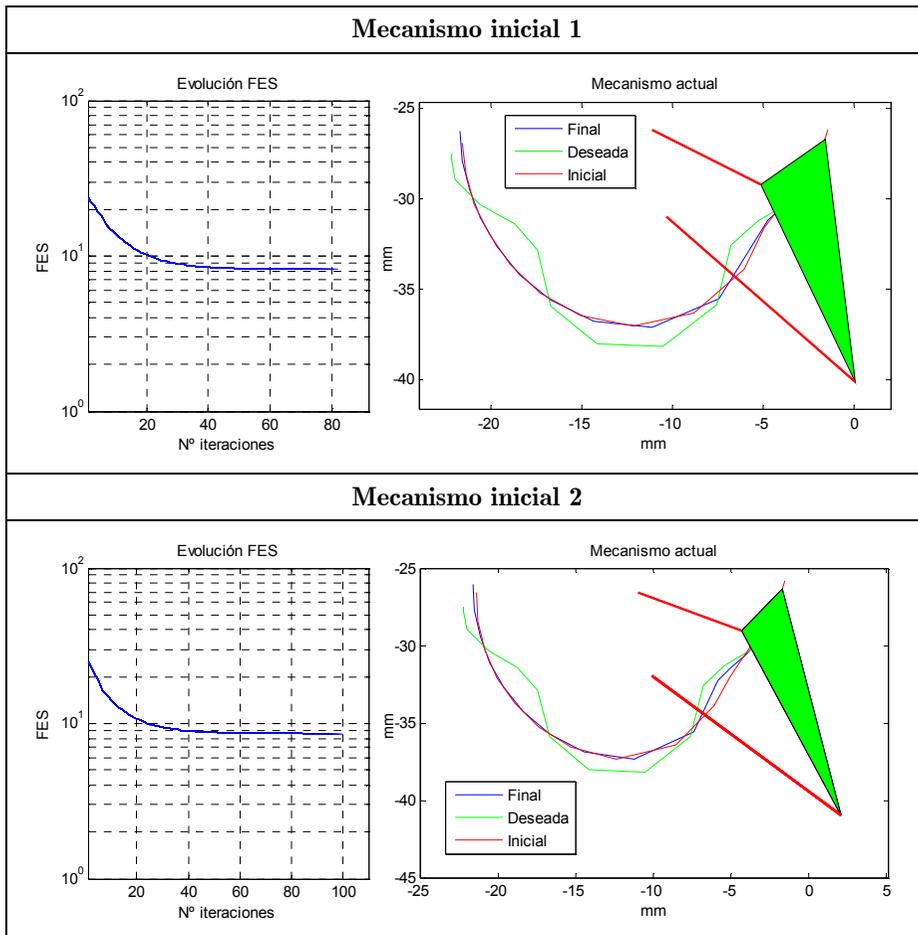
- *Resultados algoritmo con coordinación*

En la siguiente tabla se muestran los resultados numéricos para cada uno de los mecanismos iniciales.

Mecanismo inicial 1										
VARIABLES DE DISEÑO (mm)	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$\theta_1$	$x_0$	$y_0$	$\theta_{20}$
Valores iniciales	4.07	6.25	9.73	11.85	4.70	11.31	1.74	-2.86	-10.37	-30.27
Valores optimizados	4.89	6.70	12.07	13.80	4.35	13.52	1.74	-2.91	-10.31	-31.02
FES inicial	23.8318									
FES final	8.1944									
Nº iteraciones	82									
Mecanismo inicial 2										
VARIABLES DE DISEÑO (mm)	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$\theta_1$	$x_0$	$y_0$	$\theta_{20}$
Valores iniciales	5.25	6.62	5.58	5.64	4.12	9.20	1.56	-2.94	-11.05	-31.96
Valores optimizados	5.43	7.11	13.52	15.13	3.80	15.05	1.74	-3.02	-10.09	-31.93
FES inicial	25.0161									
FES final	8.5891									
Nº iteraciones	100									

**Tabla 5-12. Resultados numéricos con coordinación. Mecanismo limpiaparabrisas.**

En la Figura 5-26 se representa esquemáticamente los mecanismos finales obtenidos y la evolución del valor de la función objetivo durante el proceso iterativo de optimización. Junto con cada mecanismo se muestra la trayectoria deseada (verde), la inicial (roja), y la finalmente obtenida por el mecanismo solución (azul).



**Figura 5-26. Gráficas resultados con coordinación. Mecanismo limpiaparabrisas.**

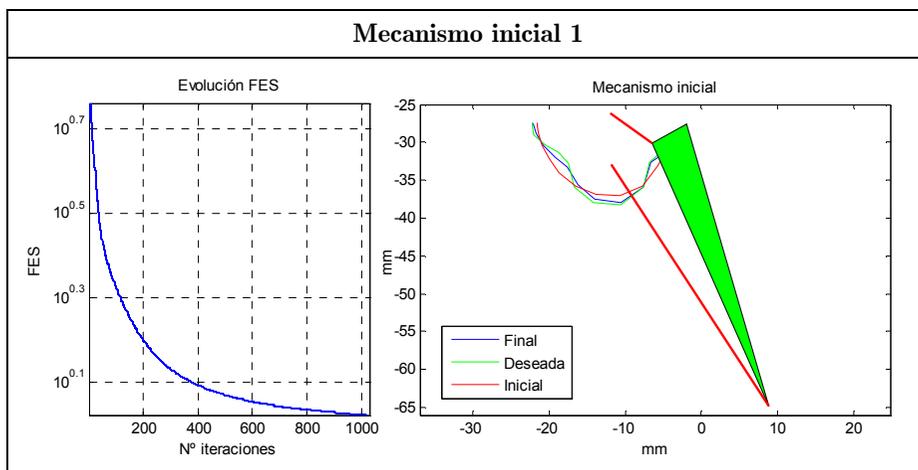
- *Resultados algoritmo sin coordinación*

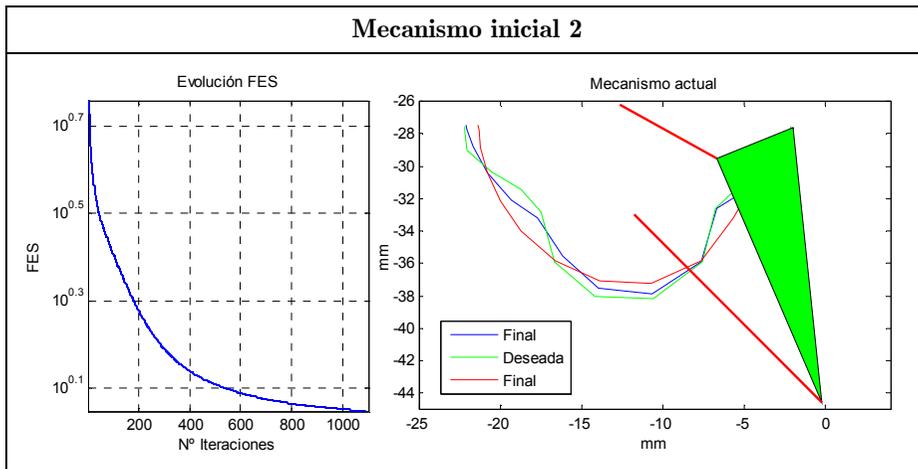
Los resultados obtenidos para los dos mismos mecanismos iniciales pero aplicando el algoritmo sin coordinación se muestran a continuación. En primer lugar la siguiente tabla recoge los valores de variables de diseño y función objetivo, iniciales y optimizados.

Mecanismo inicial 1										
Variables de diseño (mm)	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$\theta_1$	$x_0$	$y_0$	$\theta_{20}$
Valores iniciales	4.07	6.25	9.73	11.85	4.70	11.31	1.74	-2.86	-10.37	-30.27
Valores optimizados	6.71	6.72	38.11	38.12	5.12	38.82	1.60	-2.83	-11.77	-32.91
FES inicial	5.7345									
FES final	1.0523									
Nº iteraciones	1019									
Mecanismo inicial 2										
Variables de diseño (mm)	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$\theta_1$	$x_0$	$y_0$	$\theta_{20}$
Valores iniciales	5.25	6.62	5.58	5.64	4.12	9.20	1.56	-2.94	-11.05	-31.96
Valores optimizados	6.71	6.72	38.11	38.12	5.12	38.82	1.60	-2.83	-11.77	-32.91
FES inicial	5.7198									
FES final	1.115									
Nº iteraciones	1091									

**Tabla 5-13. Resultados numéricos sin coordinación. Mecanismo limpiaparabrisas.**

Los mecanismos finales obtenidos y la evolución del valor de la función objetivo se muestran en la Figura 5-27, junto con las trayectorias deseadas (verde), iniciales (roja), y optimizadas (azul).

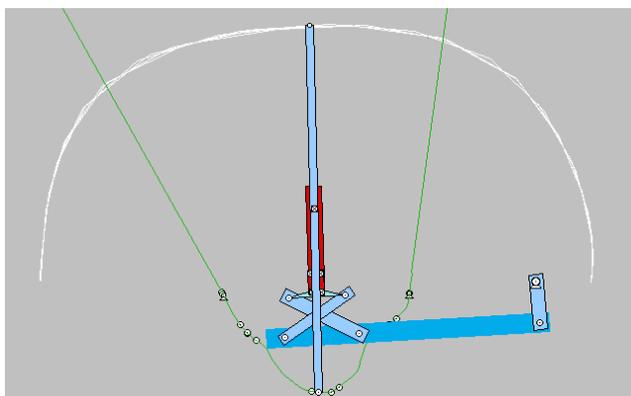




**Figura 5-27. Gráficas resultados sin coordinación. Mecanismo limpiaparabrisas.**

Los mecanismos obtienen una mejor aproximación de la parte derecha de la trayectoria. Debido a la simetría que presenta la trayectoria, el mecanismo resultante debería tener una configuración simétrica. Muy posiblemente el mecanismo de cuatro barras sea incapaz de realizar esta trayectoria tan compleja. No obstante se puede ver que el algoritmo sin coordinación llega a una solución mejor que el algoritmo con ella.

Si se aplica la trayectoria generada por el mecanismo solución al modelo de simulación podemos observar que la trayectoria del extremo del brazo limpiaparabrisas describe una solución aproximada a la requerida. Ver Figura 5-28.



**Figura 5-28. Aplicación de la trayectoria generada por el cuadrilátero**

## 5.4. Ejemplos de aplicación de síntesis de guiado de sólido rígido.

### 5.4.1. Suspensión de triángulos superpuestos (STS)

Uno de los mecanismos de suspensión para automóviles más ampliamente utilizado es el conocido como de *triángulos superpuestos*, *doble trapecio*, o muy frecuentemente, por su nombre en inglés, *double-whisbone*. Presenta como principal ventaja la posibilidad de múltiples ajustes en cuanto a los parámetros cinemáticos de la suspensión. Consta de dos barras con forma triangular que se articulan sobre el chasis por par de rotación y sobre la mangueta mediante un par esférico. Un esquema del mecanismo se muestra en la Figura 5-29.

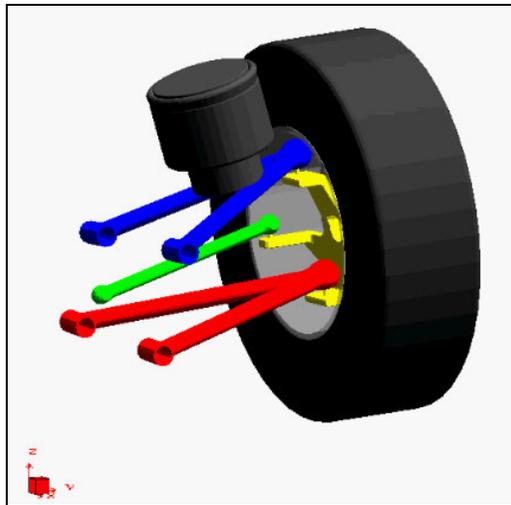


Figura 5-29. Mecanismo suspensión triángulos superpuestos

Si bien, normalmente, este mecanismo es de tipo espacial, en su versión más simple es un mecanismo plano de cuatro barras (respecto de un plano transversal al vehículo) como se muestran en la Figura 5-30.

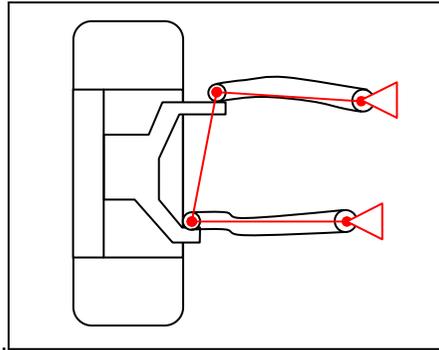


Figura 5-30. Cuadrilátero equivalente

• *Planteamiento del problema*

Desde el punto de vista del comportamiento del vehículo en curva, se buscan unos determinados esquemas de variación del ángulo de inclinación de la rueda (ángulo de camber) y del ancho de vía, a lo largo del movimiento de compresión-extensión de la suspensión. Estos requerimientos se trasladan al modelo cinemático como la generación de una determinada trayectoria por el punto de contacto de la rueda con el suelo, y a una variación prefijada de la orientación de la rueda o elemento equivalente.

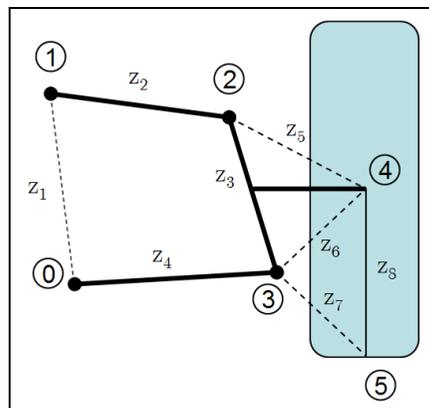


Figura 5-31. Esquema cinemático plano suspensión triángulos superpuestos

En la Figura 5-31 se muestra el esquema cinemático del mecanismo de suspensión tal y como ha sido definido para su implementación en el algoritmo de síntesis. La modelización se ha realizado mediante coordenadas naturales, que además de las coordenadas de los pares, incluyen también las de otros

puntos de interés como el centro de la rueda, punto 4, y el punto de contacto de la rueda con el suelo. El punto 5 es el punto trazador de la trayectoria deseada. Junto con el punto 4 definen el elemento 8 cuya orientación es equivalente a la de la rueda.

Las variables de diseño consideradas son 10. Corresponden a las longitudes de las barras móviles y las coordenadas de los puntos de anclaje del mecanismo al chasis del vehículo.

$$\mathbf{Z}^T = [z_2 \quad z_3 \quad z_4 \quad z_5 \quad z_6 \quad z_7 \quad x_0 \quad y_0 \quad x_1 \quad y_1] \quad (5-22)$$

Las variables dependientes son las coordenadas de los pares móviles y de los puntos 4 y 5. Como el movimiento del mecanismo se realiza a través de la elevación de la rueda, la coordenada  $y_5$  no queda incluida entre las variables dependientes al ser la coordenada conductora.

$$\mathbf{W}^T = [x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad x_4 \quad y_4 \quad x_5] \quad (5-23)$$

Las ecuaciones de restricción quedan en la forma dada por la ecuación (5-24).

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - z_2^2 &= 0 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 - z_3^2 &= 0 \\ (x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2 - z_4^2 &= 0 \\ (x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2 - z_5^2 &= 0 \\ (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 - z_6^2 &= 0 \\ (x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2 - z_7^2 &= 0 \\ (x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2 - z_8^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5-24)$$

Se han considerado varias opciones para la definición del error de síntesis. Todas ellas tienen en común la definición de dicho error en forma de vector de dos componentes. El primero de ellos hace referencia al error de posición, mientras que el segundo mide el error de orientación. Así por ejemplo, se planteó inicialmente un error de síntesis dado por la ecuación

$$\epsilon^T = \left\{ (x_5 - x_d) / tol_{pos} ; \left( \tan^{-1} \left( \frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4} \right) - t_d \right) / tol_{ori} \right\} \quad (5-25)$$

El error de posición se define en base únicamente a la coordenada “x” del punto 5 ya que la coordenada “y”, al ser conductora, es igual en las posiciones generadas y deseadas.

El principal inconveniente de esta formulación del error es que al tener términos con distinto tipo de unidades (lineales y angulares) surge el problema de la escala. Esto se suele resolver normalmente mediante factores de escala, o como en este ejemplo, haciendo los términos adimensionales. En cualquier caso esta solución requiere un estudio adicional para el ajuste de los factores.

La opción finalmente adoptada aprovecha la circunstancia de que  $z_8$  (radio de la rueda) es constante. Por lo tanto, se puede plantear una medida indirecta de la orientación de la rueda a través de la proyección horizontal de  $z_8$ . Entonces, el error de síntesis queda definido como

$$\epsilon^T = \left[ x_5 - x_d ; (x_5 - x_4) - P_d \right] \quad (5-26)$$

Donde  $P_d$  representa la proyección deseada para la distancia entre los puntos 4 y 5.

Como ambos términos del vector tienen unidades de longitud y de similar magnitud, no resulta necesaria la adopción de factores de escala.

### • *Ejemplos y resultados*

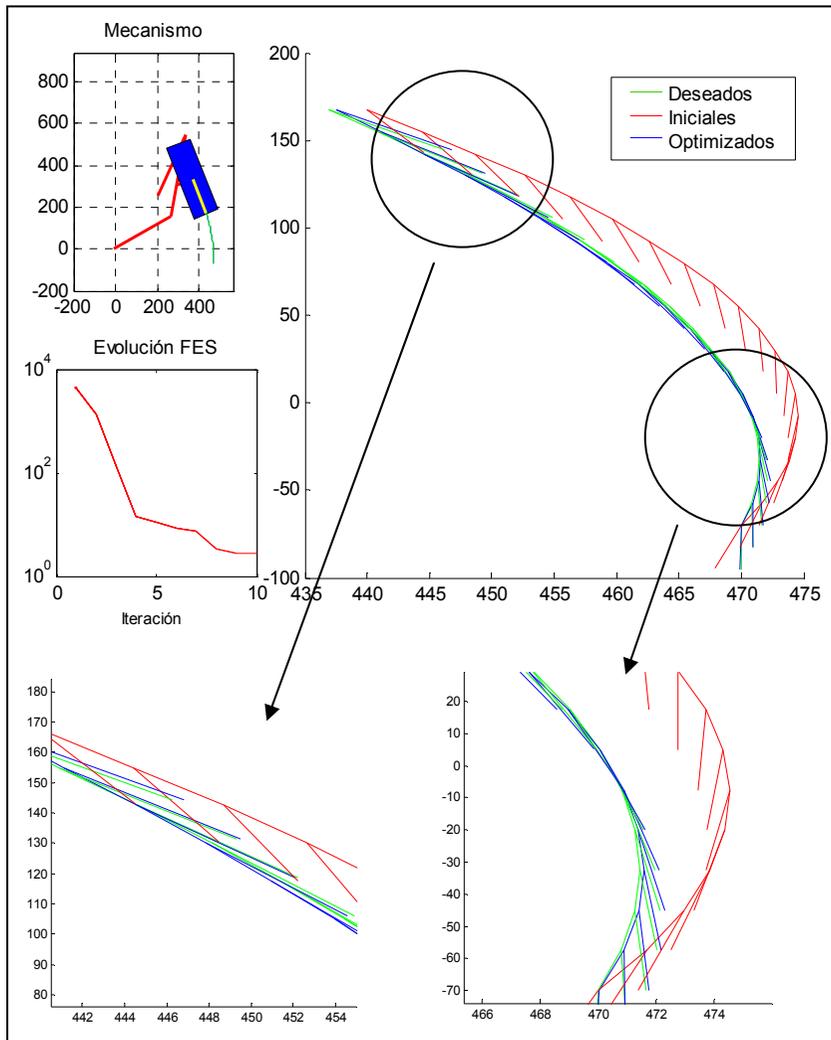
Se presentan a continuación los resultados de la optimización realizada sobre el mecanismo de suspensión. Se han definido un total de 20 posiciones de precisión. El factor de tamaño de paso se ha fijado en 0,5. Para el criterio de parada se ha considerado  $\epsilon_a = \epsilon_r = 10^{-4}$ .

Los resultados numéricos de error aparecen reflejados en la Tabla 5-14. Igualmente se muestran los valores de las variables de diseño tanto del mecanismo inicial como del optimizado. Todas las cotas están expresadas en milímetros.

VARIABLES DE DISEÑO	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$z_7$	$x_0$	$y_0$	$x_1$	$y_1$
Valores iniciales	353.55	387.07	312.57	210.86	217.63	167.63	0	20	145	270
Valores optimizados	320.28	395.11	319.29	212.08	207.91	171.77	-12.17	-1.33	204.31	252.02
FES inicial	1306.7441									
FES final	2.6966									
Error inicial máximo	33.6868									
Error final máximo	1.2259									
Nº iteraciones	10									

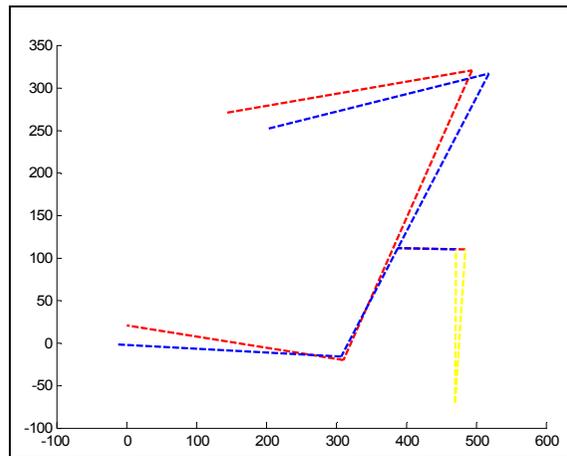
Tabla 5-14. Resultados numéricos síntesis suspensión triángulos superpuestos.

La evolución del proceso de síntesis junto con la representación gráfica de las posiciones de precisión se muestran en la Figura 5-32.



**Figura 5-32. Evolución algoritmo síntesis y posiciones de precisión STS**

Finalmente, en la Figura 5-33 se representan esquemáticamente los mecanismos de partida (rojo) y el óptimo (azul).

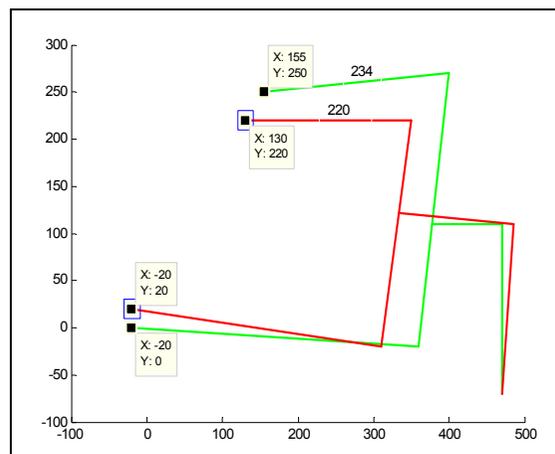


**Figura 5-33. Mecanismo STS inicial y final ejemplo 1**

A pesar de la relativamente importante diferencia entre las posiciones de precisión iniciales y las deseadas, el algoritmo de optimización logra alcanzar una solución suficientemente próxima a la deseada en todos los puntos.

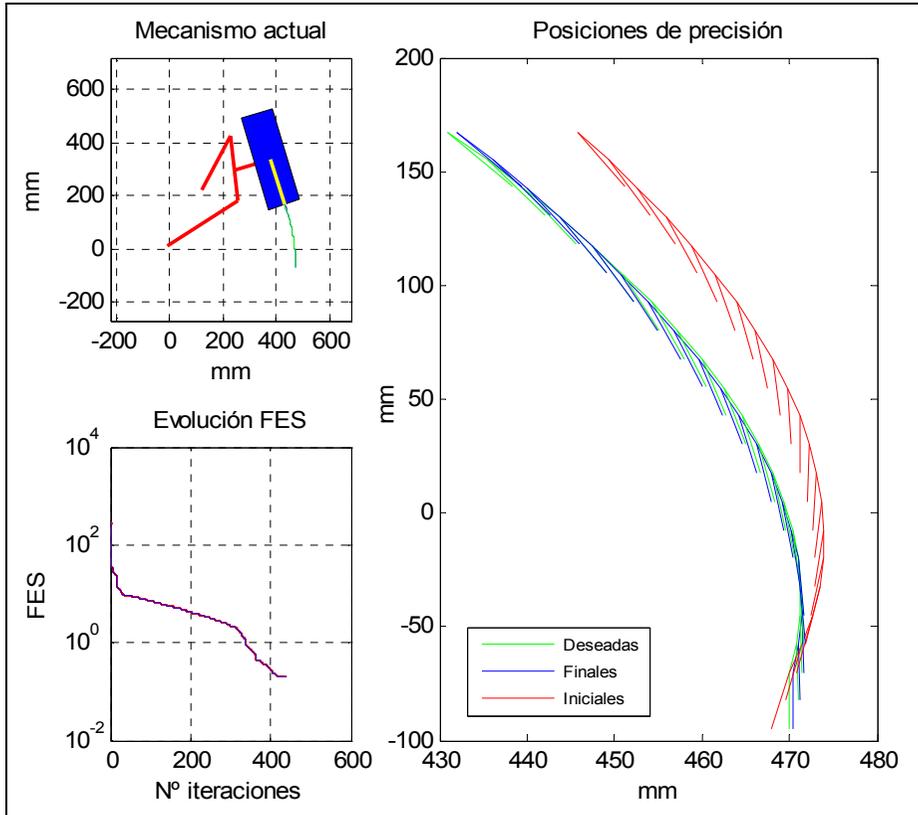
En un segundo ejemplo, se estudia el efecto de añadir ciertas restricciones adicionales al caso anterior. Estas restricciones consisten en la limitación del tamaño máximo del triángulo superior,  $z_2$ , y en acotar de las posiciones que pueden ocupar las articulaciones fijas.

Se parte de un mecanismo auxiliar para generar las posiciones de precisión deseadas. La Figura 5-34 muestra este mecanismo (en color verde) junto con el inicial de las iteraciones (rojo).



**Figura 5-34. Mecanismo STS inicial y final ejemplo 2**

En un primer ensayo se “relajan” las restricciones de manera que el mecanismo pueda evolucionar libremente hacia el ideal (mecanismo auxiliar). Los resultados mostrados en la Figura 5-35 muestran como el algoritmo alcanza la solución ideal.



**Figura 5-35. Resultados con restricciones relajadas**

A continuación se ajustan las restricciones de manera que impidan que el algoritmo pueda llegar al mecanismo ideal. El tamaño de la barra 2 se limita a 230 mm y los pivotes fijos se permite una variación de  $\pm 10$  mm tanto en  $x$  como en  $y$  respecto de la posición inicial. Los resultados se muestran en la Figura 5-36.

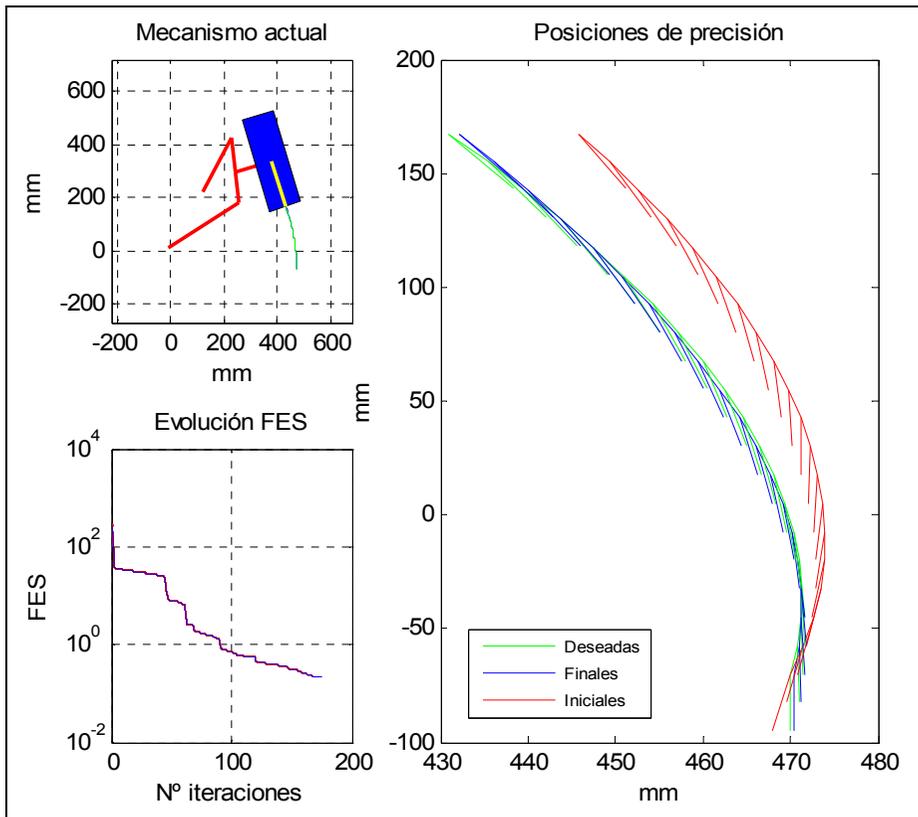


Figura 5-36. Resultados con restricciones ajustadas

El mecanismo inicial (rojo) y el obtenido finalmente tras el proceso de síntesis (azul) se muestran en la Figura 5-37.

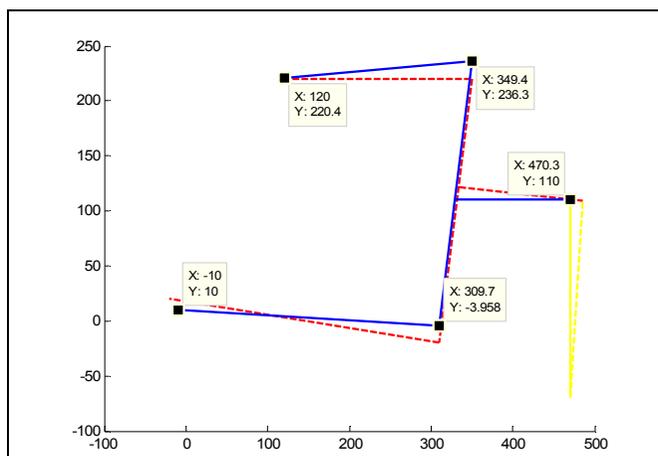
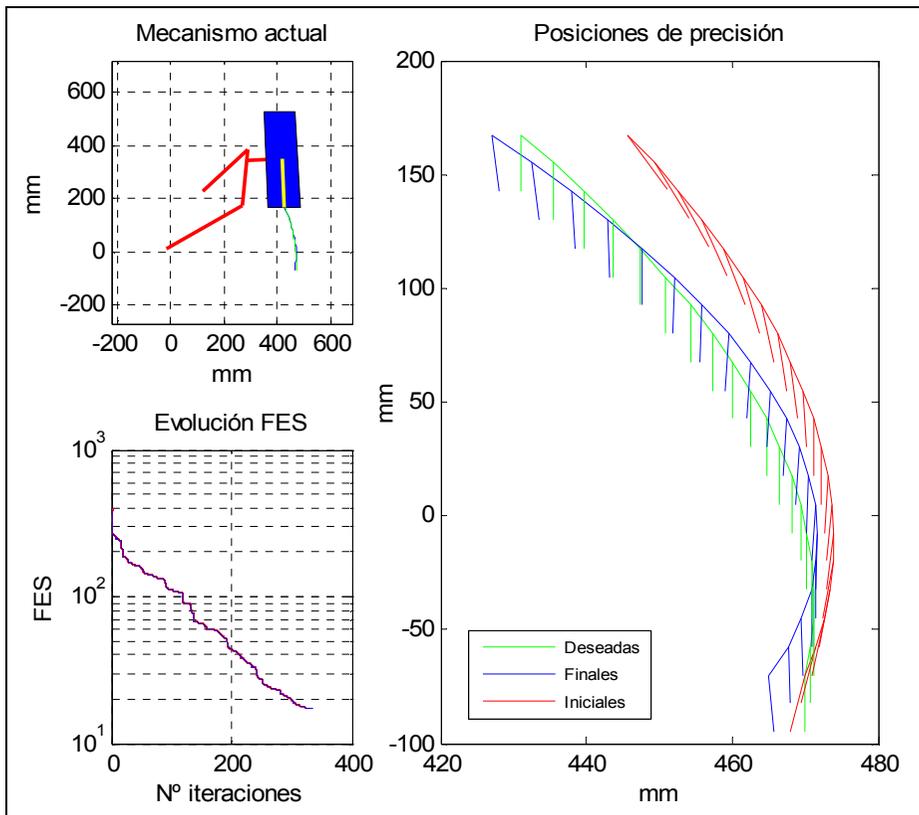


Figura 5-37. Mecanismo inicial y optimizado, restricciones ajustadas

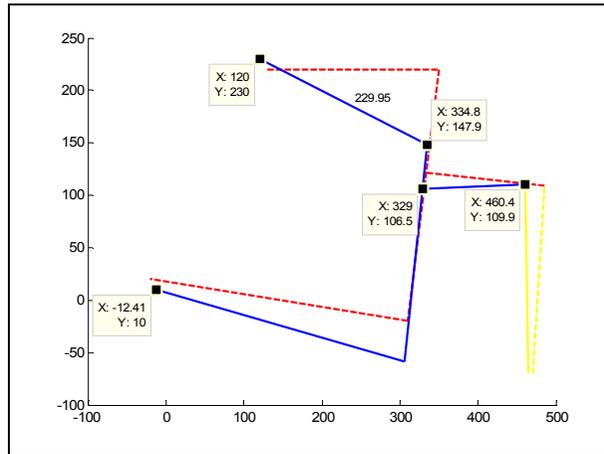
En el último caso presentado se toman las orientaciones deseadas verticales para todas las posiciones de precisión.

En la Figura 5-38 se muestra la evolución del valor de la función objetivo durante las iteraciones, el mecanismo finalmente obtenido, y las posiciones de precisión iniciales, finales y deseadas.



**Figura 5-38. Resultados con restricciones ajustadas y orientaciones deseadas verticales**

Un esquema del mecanismo inicial (rojo), y del obtenido finalmente tras el proceso de síntesis (azul) se muestran en la Figura 5-39.



**Figura 5-39. Mecanismo inicial y optimizado, restricciones ajustadas y orientaciones deseadas verticales**

En todos los ejemplos con restricciones realizados el algoritmo alcanza una solución aceptable, incluso cuando las orientaciones deseadas son verticales. En ningún caso se ha producido la violación de una restricción.

#### 5.4.2. Mecanismo de alimentación de máquinas

Uno de los tradicionales cuellos de botella en los procesos productivos ha sido el suministro de los materiales a las máquinas y la posterior retirada de las piezas fabricadas por ellas. Las máquinas actuales cuentan en muchas ocasiones con sistemas de alimentación automática con los que logran un aumento de productividad y precisión. El ejemplo que se presenta a continuación trata sobre el diseño de uno de estos sistemas consistente en un mecanismo de elevación de piezas. La pieza es transportada por este mecanismo desde una posición de recogida hasta otra de depósito siguiendo una trayectoria que evite los obstáculos. La pieza transportada se mantiene en el mecanismo sin ningún sistema de amarre y únicamente debido a la gravedad y la forma del elemento sobre el que se apoya. Por tanto es necesario igualmente que dicho elemento de soporte mantenga su orientación en durante todo el recorrido.

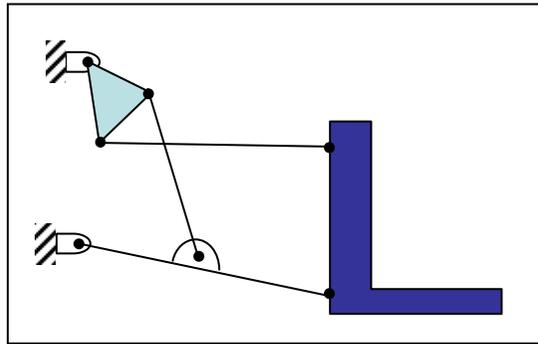


Figura 5-40. Mecanismo de alimentación

• *Planteamiento general del problema*

El mecanismo está compuesto de 6 elementos que forman una cadena cinemática de Stephenson tipo I. En la Figura 5-41 se muestra el esquema cinemático del mecanismo utilizado para su implementación en el método de síntesis óptima.

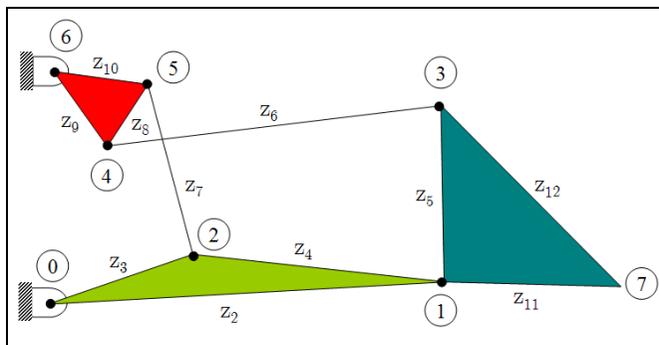


Figura 5-41. Esquema cinemático mecanismo de alimentación

Con objeto de mostrar la adaptación del método de síntesis propuesto se ha optado en este caso por modelizar cinemáticamente el mecanismo mediante ecuaciones de lazo cerrado. Como se ha hecho en otros ejemplos, cada elemento ternario se modeliza como 3 elementos binarios formando un triángulo.

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} z_9 \cos(\theta_9) + z_{10} \cos(\theta_{10}) - z_8 \cos(\theta_8) = 0 \\ z_9 \sin(\theta_9) + z_{10} \sin(\theta_{10}) - z_8 \sin(\theta_8) = 0 \\ z_2 \cos(\theta_2) + z_4 \cos(\theta_4) - z_3 \cos(\theta_3) = 0 \\ z_2 \sin(\theta_2) + z_4 \sin(\theta_4) - z_3 \sin(\theta_3) = 0 \\ z_2 \cos(\theta_2) + z_5 \cos(\theta_5) + z_7 \cos(\theta_7) + z_9 \cos(\theta_9) - z_1 \cos(\theta_1) = 0 \\ z_2 \sin(\theta_2) + z_5 \sin(\theta_5) + z_7 \sin(\theta_7) + z_9 \sin(\theta_9) - z_1 \sin(\theta_1) = 0 \\ z_3 \cos(\theta_3) + z_6 \cos(\theta_6) - z_{10} \cos(\theta_{10}) - z_1 \cos(\theta_{11}) = 0 \\ z_3 \sin(\theta_3) + z_6 \sin(\theta_6) - z_{10} \sin(\theta_{10}) - z_1 \sin(\theta_{11}) = 0 \\ z_5 \cos(\theta_5) + z_{12} \cos(\theta_{12}) - z_{11} \cos(\theta_{11}) = 0 \\ z_5 \sin(\theta_5) + z_{12} \sin(\theta_{12}) - z_{11} \sin(\theta_{11}) = 0 \\ x_0 + z_2 \cos(\theta_2) + z_{11} \cos(\theta_{11}) - x_7 = 0 \\ y_0 + z_2 \sin(\theta_2) + z_{11} \sin(\theta_{11}) - y_7 = 0 \end{array} \right. \quad (5-27)$$

Las variables de diseño son 16: las longitudes de todas las barras, la posición y orientación de la barra fija, y el valor inicial de la coordenada conductora.

$$\mathbf{Z}^T = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \ z_5 \ z_6 \ z_7 \ z_8 \ z_9 \ z_{10} \ z_{11} \ z_{12} \ x_0 \ y_0 \ \theta_1 \ \theta_{10}^0] \quad (5-28)$$

El vector de variables dependientes lo constituyen los ángulos de orientación de las barras móviles, salvo  $\theta_{10}$  que actúa de coordenada conductora, y las coordenadas del punto trazador de la trayectoria.

$$\mathbf{W}^T = [\theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6 \ \theta_7 \ \theta_8 \ \theta_9 \ \theta_{11} \ \theta_{12} \ x_7 \ y_7] \quad (5-29)$$

El error de síntesis se define como un vector de tres componentes. Los dos primeros hacen referencia al error de trayectoria en coordenadas “x” e “y”. El tercero mide el error de orientación como la diferencia entre la proyección horizontal generada por la barra 5 y la proyección deseada  $P_d$ .

$$\varepsilon = \left\{ \begin{array}{l} x_7 - x_d \\ y_7 - y_d \\ z_5 \cos(\theta_5) - P_d \end{array} \right\} \quad (5-30)$$

De forma semejante al mecanismo de suspensión de triángulos superpuestos, el error de orientación se hace de forma indirecta a través de la proyección sobre el eje  $x$  de una de las barras que componen el elemento guiado  $z_5$ , y cuya longitud se mantiene constante. De esta forma los tres componentes del vector de error tienen unidades de longitud. Si se desea que la barra 5 sea una

variable de diseño, se puede utilizar una longitud fija característica. El valor de dicha longitud se calcula de forma que el tercer miembro del vector tenga un valor promedio en el recorrido de magnitud similar al de los otros dos.

### • *Ejemplos y resultados*

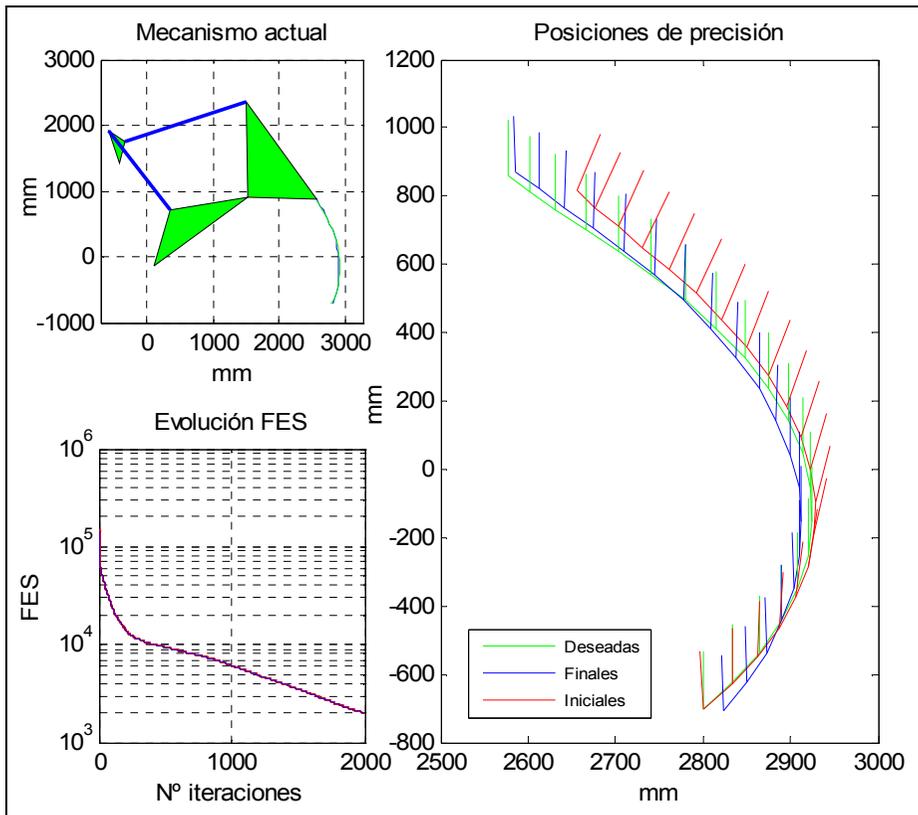
Para todos los casos presentados se han considerado 20 posiciones de precisión. Para el primero de los ejemplos se tomó un mecanismo auxiliar que genera la trayectoria objetivo. Sin embargo, las orientaciones deseadas no se toman las generadas por dicho mecanismo auxiliar sino que se exige que el elemento 5 permanezca vertical en todo el recorrido. Esto hace que no haya una solución exacta del problema, como suele suceder en la práctica. El valor del parámetro  $\beta$  para el cálculo del coeficiente de tamaño de paso en el algoritmo ha sido 0.3 en todos los casos.

La Tabla 5-15 muestra los resultados numéricos obtenidos en el primer ejemplo.

VARIABLES DE DISEÑO (mm)	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_6$	$z_7$	$z_8$	$z_9$	$z_{10}$	$z_{11}$	$z_{12}$	$x_0$	$y_0$	$\theta_1$	$\theta_{10}^0$
Valores iniciales	1700	1960	885	1250	1590	1820	372	471	492	990	1730	-20.0	15	1.67	-0.197
Valores óptimos	1640	1770	882	1180	1520	1940	290	348	507	1050	1840	98.7	-129	1.89	-0.0197
FES inicial	146202.6742														
FES final	1999.2391														
Nº Iteraciones	2000														

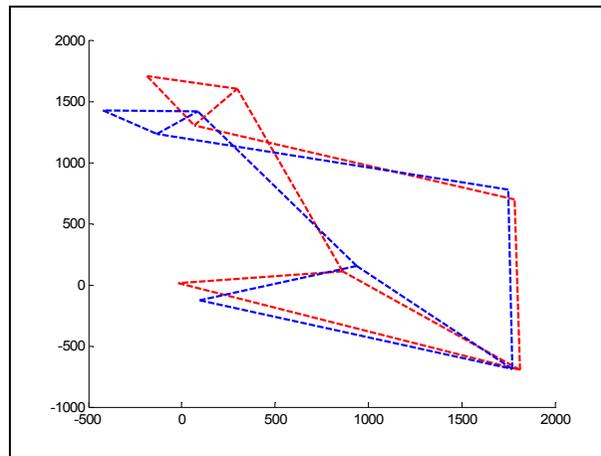
**Tabla 5-15. Resultados numéricos ejemplo 1 de mecanismo alimentador**

Los resultados gráficos de las posiciones de precisión, así como la evolución del proceso de síntesis quedan recogidos en la Figura 5-42.



**Figura 5-42. Evolución síntesis y posiciones precisión ejemplo 1 de mecanismo alimentador**

En la Figura 5-43 se representa esquemáticamente el mecanismo inicial (rojo) y el resultante del proceso de optimización (azul).



**Figura 5-43. Mecanismo inicial y optimizado ejemplo 1 de mecanismo alimentador**

Si bien las orientaciones logradas por el mecanismo final se aproximan bastante a las deseadas, no pasa lo mismo en cuanto a la trayectoria. Esto puede deberse a que la imposición de la condición de verticalidad para el elemento 5 en todas las posiciones resulta una condición demasiado fuerte, o que, a pesar de tener el mismo tipo de unidades, la formulación del error pondera más fuertemente la orientación que la posición. En cualquier caso la introducción de un factor de ponderación entre los dos requisitos permitiría controlar mejor la solución obtenida aunque su ajuste implica un esfuerzo adicional por parte del analista. La aplicación de este factor de ponderación no se desarrolla en este ejemplo puesto que es semejante al visto en el caso del mecanismo de suspensión progresiva para motocicleta con reducción de área.

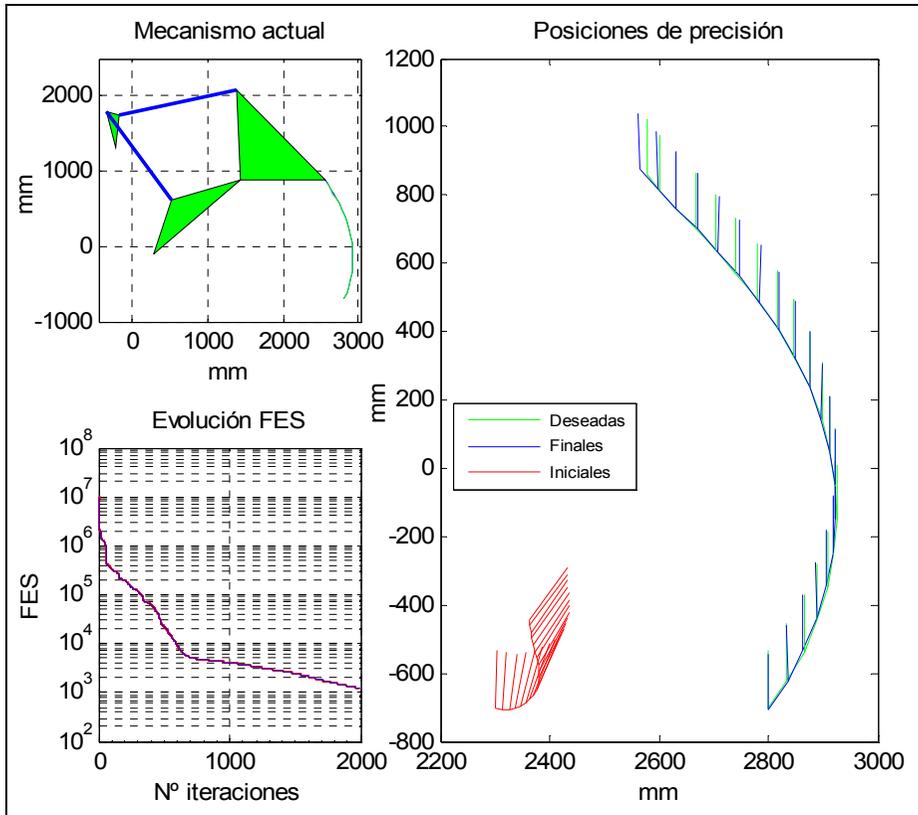
En un segundo ejemplo se presenta un mecanismo inicial cuyas posiciones de precisión generadas están más diferenciadas que en el caso anterior. Las posiciones de precisión son las mismas que las del ejemplo anterior.

Los resultados numéricos de las variables de diseño, así como del valor de la función objetivo (FES) y el número de iteraciones se muestra en la Tabla 5-16.

Variables de diseño (mm)	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_6$	$z_7$	$z_8$	$z_9$	$z_{10}$	$z_{11}$	$z_{12}$	$x_0$	$y_0$	$\theta_1$	$\theta_{10}^0$
Valores iniciales	1610	1410e	806	883	1160	1460	1500	421	335	242	1000	1550	50.0	0.00	1.48
Valores óptimos	1490	1490	747	937	1200	1470	1590	191	436	505	1140	1680	291	-97.6	1.92
FES inicial	10046542.4266														
FES final	1231.6378														
Nº Iteraciones	2000														

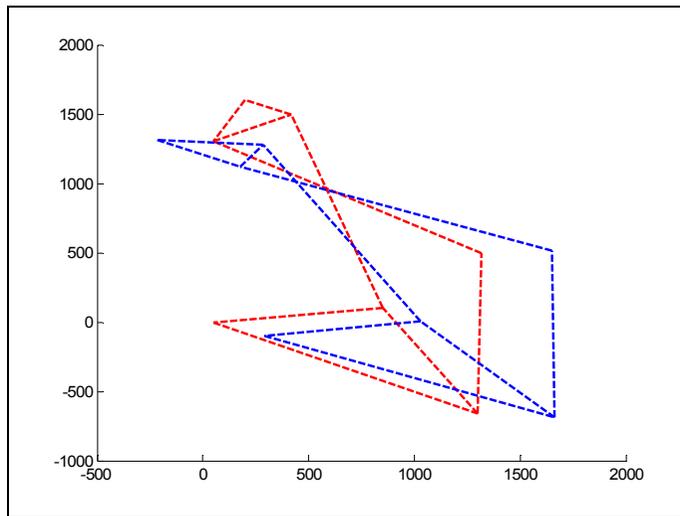
**Tabla 5-16. Resultados numéricos ejemplo 2 de mecanismo alimentador**

En la Figura 5-44 se muestran los resultados gráficos en cuanto a evolución del valor de la función objetivo, mecanismo final y posiciones de precisión.



**Figura 5-44. Resultados ejemplo 2 de mecanismo alimentador**

El mecanismo inicial (rojo) y el óptimo (azul) vienen representados en la Figura 5-45.



**Figura 5-45. Mecanismo inicial y optimizado ejemplo 2 de mecanismo alimentador**

En la parte derecha de la Figura 5-45 se observa la notable diferencia que existe entre las posiciones de precisión deseadas (verde) e iniciales (rojo), tanto en posición como en orientación. Tras el proceso de síntesis, las posiciones alcanzadas por el mecanismo óptimo (azul) resultan próximas a las deseadas. Incluso se puede ver que la solución final es mejor que la obtenida en el ejemplo anterior a pesar de que, en aquel caso, las posiciones iniciales estaban más próximas a las deseadas. Este hecho pone en evidencia, una vez más, la fuerte dependencia del mecanismo inicial en la convergencia del método. También cabe señalar que la calidad de la solución obtenida demuestra que no es necesario ningún tipo de coeficiente de ponderación entre los términos del vector de error como se había supuesto anteriormente a raíz de los resultados del ejemplo previo. Por último, se puede considerar que la formulación propuesta para la medida del error de orientación en base a la proyección horizontal de la barra 5 resulta perfectamente válida.

## Capítulo 6. Conclusiones y líneas futuras de investigación

### 6.1. Aportaciones y conclusiones

En esta Tesis se recogen los trabajos dedicados al desarrollo de una nueva metodología para la resolución de problemas de síntesis cinemática dimensional de mecanismos mediante técnicas numéricas de optimización local.

El principal objetivo de la tesis exige que dicha metodología tenga carácter general, entendiendo este aspecto desde diversos puntos de vista. Por una parte, debe ser aplicable a cualquier tipo de mecanismo con independencia de sus dimensiones, cadena cinemática y tipo de coordenadas utilizado para su modelización matemática. Igualmente, el carácter general también hace referencia a que pueda aplicarse a la resolución de los distintos problemas de síntesis cinemática (generación de trayectorias, generación de funciones y guiado de sólido rígido), con la consideración de restricciones tanto de igualdad como de desigualdad.

En este contexto, las aportaciones de esta Tesis son las siguientes:

- Se ha propuesto un método para la formulación matricial del problema de síntesis basado en la minimización de una función del error de síntesis y la obtención de éste a través de las ecuaciones de restricción. Las referencias bibliográficas aportadas demuestran que la minimización del error de síntesis resulta más adecuada que el del valor residual de las ecuaciones de restricción.
- La resolución del problema de síntesis se realiza mediante un método de optimización local basado en el gradiente. Según diversos investigadores, la utilización de un gradiente exacto mejora notablemente las prestaciones del algoritmo. En este trabajo se ha desarrollado una formulación para la obtención en forma analítica del gradiente de la función objetivo, de manera sencilla, a partir de las ecuaciones de restricción y del error de síntesis.
- De igual forma, la formulación propuesta para obtener la expresión analítica del gradiente hace que la dirección de búsqueda derivada del mismo mantenga el cumplimiento de las ecuaciones de restricción para pequeños incrementos de

las variables de diseño. Por tanto, si se cumple esta condición, se evita que durante el proceso iterativo de optimización se obtengan soluciones intermedias donde el mecanismo no pueda ensamblarse.

- La metodología propuesta admite la consideración de cualquier tipo de restricción geométrica sobre el diseño del mecanismo. Este tipo de restricciones se formulan generalmente como inecuaciones. Se propone el tratamiento de estas inecuaciones haciendo uso de la técnica de la *variable holgura*, en dos formas distintas. La primera de ellas es válida para restricciones que afecta a parámetros constantes del mecanismo, mientras que la segunda se debe aplicar cuando dicho parámetro adopta diferentes valores dependiendo de su posición.

- Un problema poco tratado hasta ahora es la síntesis, tanto de generación de trayectorias como de guiado de sólido rígido, sin la exigencia de coordinación entre las posiciones de la barra de entrada y las de precisión. Sin embargo, desde un punto de vista de diseño resulta ser un problema más frecuente que el correspondiente con coordinación. En este trabajo se presenta una estrategia para el tratamiento de este tipo de problemas de forma sencilla y coherente con la metodología general.

- La comparación entre las posiciones de precisión deseadas y generadas está fuertemente influida por la posición y escala relativas entre ambos conjuntos. Algunos autores tratan de definir funciones de error que sean insensibles a tales defectos, a costa de aumentar su complejidad. Sin embargo, en este trabajo se ha optado por mantener la definición sencilla del error de síntesis y definir unas estrategias para reducir de forma rápida estos defectos, tratando de mejorar la convergencia del algoritmo.

- Si bien los ejemplos presentados corresponden a mecanismos planos, la extrapolación de la metodología propuesta a la síntesis de mecanismos espaciales resulta relativamente sencilla. La principal dificultad de esta extrapolación proviene más de obtener una adecuada representación de los resultados, que de la propia adaptación matemática de la formulación.

Los aspectos metodológicos anteriormente destacados han sido probados en diversos problemas tanto teóricos como de aplicación práctica. Las conclusiones más importantes que pueden extraerse de los resultados obtenidos son las siguientes:

- Un problema clásico de los métodos de optimización basados en el gradiente es la influencia que tiene la elección del punto inicial de diseño en la solución obtenida, especialmente cuando son aplicados a problemas como la síntesis cinemática de mecanismos, donde el espacio de diseño presenta numerosos

mínimos locales. El método propuesto, por tanto, también presenta este inconveniente. No obstante permite alcanzar soluciones mejores que las de partida, y en muchos casos incluso si éstas se encuentran relativamente alejadas del óptimo.

- Las estrategias propuestas para el tratamiento de las restricciones de desigualdad se muestran efectivas tanto, en el caso de que afecten a parámetros constantes, como a otros dependientes de la posición. En este segundo caso la evolución de la función objetivo resulta, como era de esperar, menos continua. Sin embargo, el algoritmo llega igualmente a una solución que cumple con las restricciones.

- Las estrategias para la mejora de la convergencia en los problemas de trayectorias y guiado tienen un comportamiento desigual. Si bien, en la mayoría de los casos mejoran la velocidad de convergencia, en otros resulta al contrario (principalmente en el problema no coordinado), aunque en contrapartida la solución obtenida es mejor. Esto puede ser debido simplemente a que la solución proporcionada por los algoritmos, con o sin la implementación de dichas estrategias, siguen caminos distintos en su evolución.

- El método aplicado de síntesis emplea una estrategia de búsqueda lineal. Se ha considerado tanto un coeficiente de tamaño de paso fijo como variable. En este último caso, el valor final de dicho coeficiente se obtiene mediante una optimización monovariable. La optimización del coeficiente de tamaño de paso supone, por tanto, un mayor número de evaluaciones de la función objetivo en cada iteración. Sin embargo, este hecho se ve compensado porque el número total de iteraciones se reduce notablemente. En contrapartida, el algoritmo con paso constante, y una vez ajustado el valor adecuado del mismo, se muestra más estable que el correspondiente de paso variable.

- En varios de los ejemplos presentados se utilizan coeficientes de ponderación, bien en la definición del vector de error de síntesis, o de la función objetivo. La determinación del valor óptimo de dichos coeficientes puede suponer para el analista un trabajo adicional. Sin embargo, se muestra que, para obtener soluciones satisfactorias, no es necesario tener un valor concreto de dichos coeficientes sino el orden de magnitud de los mismos.

- Una exigencia adicional sobre la metodología planteada es que su aplicación conlleve un esfuerzo computacional suficientemente bajo como para que pueda ser utilizada como una herramienta más en el diseño industrial. En los ejemplos se ha mostrado el número de evaluaciones de la función objetivo como medida del esfuerzo computacional. Esta medida resulta más objetiva que el tiempo de ejecución, ya que éste depende de diversos factores como el tipo de máquina en la que se ejecute, la forma de programación, etc. Sin

embargo, a nivel práctico, resulta más apropiado hacerlo en función del tiempo. A este respecto cabe comentar que todos los algoritmos han sido programados y ejecutados en el entorno Matlab. Los tiempos de ejecución de los distintos ejemplos van desde unos pocos segundos hasta unos veinte minutos, en los casos más complejos, ejecutados en un PC con procesador Pentium IV a 2.66 MHz.

## 6.2. Líneas futuras de investigación

Los trabajos realizados en esta Tesis presentan diversas vías de investigación encaminadas a ampliar la funcionalidad de la metodología propuesta desde diversos aspectos, como son:

- Generalización de la metodología a mecanismos espaciales. Como se ha comentado anteriormente esta línea no reviste una especial dificultad de formulación. En este sentido, se cuenta actualmente con algún desarrollo parcial.
- Aplicación a trayectorias cerradas. La conducción del mecanismo puede exigir que el elemento de entrada sea una manivela. Este requisito se puede implementar a través de ecuaciones de restricción, que deben desarrollarse para cada tipo de cadena cinemática.
- Estudio de alternativas sobre la determinación del coeficiente de tamaño de paso. La sensibilidad que muestra el algoritmo ante el valor de dicho coeficiente hace necesario un estudio en profundidad de la determinación de su valor óptimo. Esto resulta aún más interesante para el caso en que dicho valor sea variable en cada iteración, debido a que el algoritmo que implementa esta característica se ha mostrado superior al de valor fijo en cuanto a velocidad de convergencia. En la bibliografía sobre optimización numérica se pueden encontrar diversas alternativas para llevar a cabo dicha determinación.
- Síntesis con objetivos de orden superior. En diversos problemas de diseño es necesaria la consideración de restricciones, no sólo de posición, sino también de velocidad e incluso, con vistas al diseño dinámico, de aceleraciones. La consideración de este tipo de restricciones se puede realizar incluyendo en la formulación presentada el factor tiempo a través de las derivadas temporales de las variables que definen el problema.
- Detección de singularidades. Durante la ejecución del algoritmo de síntesis se pueden producir soluciones intermedias que presenten singularidades en su

movimiento. La posibilidad de detección de mecanismos que presentan singularidades puede permitir el diseño de estrategias, para evitar o corregir éstas de manera que no afecten a la validez de la solución final obtenida. Un primer tipo de singularidad a tratar puede ser el cambio de rama en un punto de bifurcación. Normalmente, este fenómeno se debe a un error en la simulación del movimiento del mecanismo, más que a su comportamiento real, ya que las inercias impiden dicho cambio de rama. Sin embargo, se puede dar en una metodología de síntesis como la propuesta, que no considera efectos dinámicos.

- Hibridación del método propuesto con métodos probabilísticos. Sólo bajo determinadas circunstancias, la metodología propuesta es capaz de alcanzar el óptimo global y en cualquier caso, no existe la seguridad de haberlo alcanzado. Para lograr un método de optimización global, que además no dependa del mecanismo inicial, se puede pensar en hibridar la metodología presentada con otros métodos como, por ejemplo, el de los algoritmos genéticos. El método estadístico se encargaría de realizar una exploración vasta del espacio de diseño, mientras que el método local propuesto haría una explotación del mismo, utilizando las soluciones del anterior como puntos de partida para su refinamiento.

- Aproximación del error de segundo orden. El método de optimización se basa en una aproximación de primer orden del error de síntesis. Una aproximación de segundo orden podría mejorar las prestaciones del método. Se requiere entonces el cálculo, no sólo de la matriz Jacobiana, sino también la matriz Hessiana. Si bien esto supone normalmente un mayor coste computacional, el hecho de poder obtener también, dicha matriz Hessiana de forma analítica, puede hacer que este esfuerzo no resulte excesivo.

- Desarrollo de una interface gráfica para la ejecución del algoritmo. El desarrollo de una herramienta informática que permita la introducción mixta (numérica y gráficamente) de los parámetros que definen el problema de síntesis, permitiría una ejecución más rápida de los distintos ensayos. Asimismo, este tipo de aplicaciones resulta fundamental, si se quiere utilizar la metodología propuesta como una herramienta de diseño a nivel práctico.



## ANEXO I: Nomenclatura

- $\mathbf{x}$  : Vector de variables de diseño genérico  
 $\mathbf{x}^*$  : Vector óptimo de variables de diseño  
 $f(\mathbf{x})$  : Función objetivo  
 $h(\mathbf{x})$  : Ecuación de restricción de igualdad  
 $g(\mathbf{x})$  : Ecuación de restricción de desigualdad  
 $\mathbf{z}$  : Vector de variables de diseño  
 $z$  : Variable de diseño geométrica  
 $\Delta\mathbf{z}$  : Dirección de búsqueda / incremento variables de diseño  
 $\mathbf{q}$  : Vector de coordenadas generalizadas  
 $\mathbf{C}$  : Ecuaciones de restricción cinemáticas  
 $\mathbf{S}$  : Ecuaciones de restricción de síntesis  
 $\Phi$  : Vector de ecuaciones de restricción  
 $\delta_d$  : Vector de parámetros funcionales deseados  
 $\delta_g$  : Vector de parámetros funcionales generados  
 $\varepsilon$  : Vector de error de síntesis  
 $\varepsilon_a$  : Error absoluto  
 $\varepsilon_r$  : Error relativo  
 $FES$  : Función de Error de Síntesis  
 $\mathbf{w}$  : Vector de variables dependientes  
 $\mathbf{J}_i$  : Matriz Jacobiana en la posición de precisión  $i$   
 $\mathbf{J}$  : Matriz Jacobiana para el conjunto de posiciones de precisión  
 $i$  : Índice de posición de precisión, restricción o elemento  
 $k$  : Índice de la iteración  
 $\alpha$  : Coeficiente de tamaño del paso  
 $x, y$  : Coordenadas lineales de una posición de precisión  
 $\theta$  : Coordenada angular de una posición de precisión  
 $\theta$  : Ángulo de posición de un elemento/posición de precisión generación de funciones  
 $E$  : Factor de escala de variables de diseño  
 $\mathbf{E}$  : Matriz de error  
 $Tol_{\text{posición}}$  : Tolerancia para coordenadas de posición (lineales)  
 $Tol_{\text{orientación}}$  : Tolerancia para coordenadas de orientación (angulares)  
 $\Psi$  : Factor de ponderación proporcional (en tanto por uno)  
 $h$  : Variable holgura  
 $P()$  : Función de penalización  
 $\Gamma$  : Coeficiente de ponderación  
 $n_{\text{pos}}$  : Número de posiciones de precisión  
 $teg$  : Traslado, escalado y giro



## ANEXO II: Bibliografía

ABADIE, J. y CARPENTIER, J., 1969. Generalization of Wolfe reduced gradient method to the case of non-linear constraints. In: R. FLETCHER, ed, *Optimization*. New York: Academic Press, pp. 37-47.

AKHRAS, R. y ANGELES, J., 1990. Unconstrained nonlinear least-square optimization of planar linkages for rigid-body guidance. *Mechanism and Machine Theory*, 25(1), 97-118.

ANANTHASURESH, G.K., 2003. Optimal synthesis methods for MEMS. Boston: Kluwer Academic Publishers.

ANGELES, J., ALIVIZATOS, A. y AKHRAS, R., 1988. An unconstrained nonlinear least-square method of optimization of RRRR planar path generators. *Mechanism and Machine Theory*, 23(5), 343-353.

ANGELES, J. y BERNIER, A., 1987. The Global Least-Square Optimization of Function-Generating Linkages. *Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design*, 109(2), 204-209.

ARORA, J.S., 2004. Introduction to optimum design. 2 edn. San Diego, California: Elsevier Academic Press.

AVILÉS, R., GOIZALDE AJURIA, M.B., VALLEJO, J. y HERNÁNDEZ, A., 1997. A procedure for the optimal synthesis of planar mechanisms based on non-linear position problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(8), 1505-1524.

AVILÉS, R., AJURIA, M.B. y GARCÍA DE JALÓN, J., 1985. A fairly general method for optimum synthesis of planar mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 20(4), 321-328.

BALLI, S.S. y CHAND, S., 2002. Transmission angle in mechanisms (Triangle in mech). *Mechanism and Machine Theory*, 37(2), 175-195.

BELEGUNDU, A.D. y CHANDRUPATLA, T.R., 1999. Optimization concepts and applications in engineering. Upper Saddle River New Jersey: Prentice-Hall.

BULATOVIĆ, R.R. y DORDEVIĆ, S.R., 2009. On the optimum synthesis of a four-bar linkage using differential evolution and method of variable controlled deviations. *Mechanism and Machine Theory*, 44(1), 235-246.

BURMESTER, L., 1888. Textbook of Kinematics, First Volume, Planar Motion.

CABRERA, J.A., NADAL, F., MUÑOZ, J.P. y SIMON, A., 2007. Multiobjective constrained optimal synthesis of planar mechanisms using a new evolutionary algorithm. *Mechanism and Machine Theory*, 42(7), 791-806.

CABRERA, J.A., SIMON, A. y PRADO, M., 2002. Optimal synthesis of mechanisms with genetic algorithms. *Mechanism and Machine Theory*, 37(10), 1165-1177.

COLLARD, J., DUYSINX, P. y FISETTE, P., 2010. Optimal synthesis of planar mechanisms via an extensible-link approach. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, , 1-13.

DE-JUAN, A., SANCIBRIAN, R. y VIADERO, F., 2009. Optimal Synthesis of Steering Mechanisms Including Transmission Angles. In: M. CECCARELLI, ed, *Proceedings of EUCOMES 08*. Springer Netherlands, pp. 175-181.

DORIGO, M., 1992. *Optimization, Learning and Natural Algorithms (in Italian)*, Dissertation/Thesis, Politecnico di Milano.

ERDMAN, A.G., SANDOR, G.N. y KOTA, S., 2001. Mechanism design : analysis and synthesis. 4th edn. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall.

FALLAHI, B., HALL, A.S. y RAGSDELL, K.M., 1981. Application of the generalized reduced gradient method to selected mechanisms synthesis problems. *Proceedings - International Conference on Software Engineering*, 49-56.

- FERNÁNDEZ-BUSTOS, I., AGUIRREBEITIA, J., AVILÉS, R. y ANGULO, C., 2005. Kinematical synthesis of 1-dof mechanisms using finite elements and genetic algorithms. *Finite Elem.Anal.Des.*, 41(15), 1441-1463.
- FOGEL, L.J., OWENS, A.J. y WALSH, M.J., 1966. Artificial Intelligence through Simulated Evolution. New York, USA: John Wiley.
- FOX, R.L., 1971. Optimization methods for engineering design. Reading, Mass. etc.: Addison-Wesley.
- FRANDSEN, P.E., JONASSON, K., NIELSEN, H.B. y TINGLEFF, O., Unconstrained Optimization. Technical University of Denmark.1999.
- FRANK, M. y WOLFE, P., 1956. An algorithm for quadratic programming. *Naval Research Logistic Quarterly*, 3, 95-110.
- FREUDENSTEIN, F., 1955. Approximate Synthesis of Four-Bar Linkages. *Transactions of ASME*, 77(Aug.), 853-861.
- GARCÍA DE JALÓN, J., 2007. Twenty-five years of natural coordinates. *Multibody System Dynamics*, 18, 15-33(19).
- GARCÍA DE JALÓN, J. y BAYO, E., 1994. Kinematic and dynamic simulation of multibody systems: the real-time challenge. New York: Springer.
- HAYES, M.J.D., PARSA, K. y ÁNGELES, J., 1999. The effect of data-set cardinality on the design and structural errors of four-bar function-generators, *Proc. Tenth world congress on the theory of machines and mechanisms*, junio 20-24, 1999 1999, IFFToMM pp437-442.
- HOLLAND, J.H., 1975. Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence. Ann Arbor, Mich.: University of Michigan Press.
- HOWELL, L.L., 2001. Compliant mechanisms. New York: Wiley.

HWANG, W. y SHIH, J., 1987. Optimal synthesis of suspension mechanism with variable leverage ratio for motorcycle. *Chung-Kuo Chi Hsueh Kung Cheng Hsueh Pao/Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers*, 8(1), 43-50.

JALÓN, J.G.D., SERNA, M.A. y AVILÉS, R., 1981. Computer method for kinematic analysis of lower-pair mechanisms—I velocities and accelerations. *Mechanism and Machine Theory*, 16(5), 543-556.

JIMÉNEZ, J.M., ÁLVAREZ, G., CARDENAL, J. y CUADRADO, J., 1997. A simple and general method for kinematic synthesis of spatial mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 32(3), 323-341.

KENNEDY, J. y EBERHART, R., 1995. Particle swarm optimization, *Proceedings of 1995 IEEE international conference on neural networks*, 1995, pp1942-1948.

KIRKPATRICK, S., GELATT JR., C.D. y VECCHI, M.P., 1983. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598), 671-680.

KOTA, S., LU, K., KREINER, Z., TREASE, B., ARENAS, J. y GEIGER, J., 2005. Design and application of compliant mechanisms for surgical tools. *Journal of Biomechanical Engineering*, 127(6), 981-989.

KOZA, J.R., 1992. Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

LARIBI, M.A., MLIKA, A., ROMDHANE, L. y ZEGHLOUL, S., 2004. A combined genetic algorithm-fuzzy logic method (GA-FL) in mechanisms synthesis. *Mechanism and Machine Theory*, 39(7), 717-735.

LENARCIC, J. y GALLETTI, C., 2004. On advances in robot kinematics. Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers.

MACCARTHY, J.M., 2000. Geometric design of linkages. New York etc.: Springer.

- MARIAPPAN, J. y KRISHNAMURTY, S., 1996. A generalized exact gradient method for mechanism synthesis. *Mechanism and Machine Theory*, 31(4), 413-421.
- MARIAPPAN, J. y KRISHNAMURTY, S., 1992. Using exact gradients in mechanism design, 1992, pp53-59.
- MARTIN, P.J., RUSSELL, K. y SODHI, R.S., 2007. On mechanism design optimization for motion generation. *Mechanism and Machine Theory*, 42(10), 1251-1263.
- METROPOLIS, N., ROSENBLUTH, A.W., ROSENBLUTH, M.N., TELLER, A.H. y TELLER, E., 1953. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *The Journal of chemical physics*, 21(6), 1087-1092.
- NIETO, J., 1978. Síntesis de mecanismos. Madrid: Editorial AC.
- NOCEDAL, J. y WRIGHT, S.J., 2006. Numerical optimization. 2 edn. New York: Springer.
- NORTON, R.L., 2005. Diseño de maquinaria: síntesis y análisis de máquinas y mecanismos. 3<sup>a</sup> en español edn. México, D.F. etc.: McGraw-Hill.
- PEREZ, A. y MCCARTHY, J.M., 2005. Clifford algebra exponentials and planar linkage synthesis equations. *Journal of Mechanical Design, Transactions Of the ASME*, 127(5), 931-940.
- RAO, S.S., 1996. Engineering optimization: theory and practice. 3 edn. New York etc.: John Wiley & Sons.
- RAVINDRAN, A., REKLAITIS, G.V. y RAGSDALL, K.M., 2006. Engineering optimization: methods and applications. 2 edn. Hoboken, New Jersey: John Wiley and Sons.
- RECHENBERG, I., 1965. *Cybernetic solution path of an experimental problem*. Royal Air Force Establishment.

REKLAITIS, G.V., RAVINDRAN, A. y RAGSDALL, K.M., 1983. Engineering optimization: methods and applications. New York etc.: John Wiley and Sons.

REULEAUX, F., 1876. Kinematics of machinery. Outlines of a Theory of Machines.

SÁNCHEZ, F.T., 2000. *Contribución a la síntesis dimensional de mecanismos planos para generación de trayectoria*, Dissertation/Thesis, Universidad Jaume I.

SÁNCHEZ, F.T. y PÉREZ, A., 2004. Open-path synthesis of linkages through geometrical adaptation. *Mechanism and Machine Theory*, 39(9), 943-955.

SÁNCHEZ, F.T. y PÉREZ, A., 2003. Global optimization in path synthesis based on design space reduction. *Mechanism and Machine Theory*, 38(6), 579-594.

SANCIBRIÁN, R., GARCÍA, P., VIADERO, F. y FERNÁNDEZ, A., 2006. A general procedure based on exact gradient determination in dimensional synthesis of planar mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 41(2), 212-229.

SANCIBRIÁN, R., VIADERO, F., GARCÍA, P. y FERNÁNDEZ, A., 2004. Gradient-based optimization of path synthesis problems in planar mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 39(8), 839-856.

SANTORO, E., 1989. Comparison between structural and residual error formulations of an optimum design mechanism problem. *Meccanica*, 24(3), 172-176.

SERNA, M.A., AVILÉS, R. y GARCÍA DE JALÓN, J., 1982. Dynamic analysis of plane mechanisms with lower pairs in basic coordinates. *Mechanism and Machine Theory*, 17(6), 397-403.

SHEN, Q., AL-SMADI, Y.M., MARTIN, P.J., RUSSELL, K. y SODHI, R.S., 2009. An extension of mechanism design optimization for motion generation. *Mechanism and Machine Theory*, 44(9), 1759-1767.

SIMIONESCU, P.A. y BEALE, D., 2002. Optimum synthesis of the four-bar function generator in its symmetric embodiment: The Ackermann steering linkage. *Mechanism and Machine Theory*, 37(12), 1487-1504.

SMITH, S.F., 1980. *A learning system based on genetic adaptive algorithms*, Dissertation/Thesis, University of Pittsburgh.

SUTHERLAND, G.H. y ROTH, B., 1975. An improved Least-squares method for designing function generating mechanisms. *Journal of Engineering for Industry*, 97, 303-307.

SVOBODA, A., 1948. *Computing mechanisms and linkages*. 1 edn. New York: McGraw-Hill.

ULLAH, I. y KOTA, S., 1997. Optimal synthesis of mechanisms for path generation using fourier descriptors and global search methods. *Journal of Mechanical Design, Transactions Of the ASME*, 119(4), 504-510.

VALLEJO, J., AVILÉS, R., HERNÁNDEZ, A. y AMEZUA, E., 1995. Nonlinear optimization of planar linkages for kinematic syntheses. *Mechanism and Machine Theory*, 30(4), 501-518.

VASILIU, A. y YANNOU, B., 2001. Dimensional synthesis of planar mechanisms using neural networks: Application to path generator linkages. *Mechanism and Machine Theory*, 36(2), 299-310.

VENKATARAMAN, P., 2002. *Applied optimization with Matlab programming*. New York: John Wiley & Sons.

VITALE, F. y VIRZI MARIOTTI, G., 2007. Cinematic and dynamic analysis and structural verify of an innovative motorcycle suspension, 1 junio 2007.

WILDE, D.J., 1982. Error linearization in the least-squares design of function generating mechanisms. *Journal of Mechanical Design*, 104, 881-884.

YAO, J. y ANGELES, J., 2000a. Computation of all optimum dyads in the approximate synthesis of planar linkages for rigid-body guidance. *Mechanism and Machine Theory*, 35(8), 1065-1078.

YAO, J. y ANGELES, J., 2000b. The kinematic synthesis of steering mechanisms. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 24(3-4), 453-476.