



**Universitat Autònoma de Barcelona**

**Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals**

**Didàctica de la Matemàtica**

**Doctorat en Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències**

Tesis doctoral

**ESTUDIO COMPARATIVO DE PROCESOS DE  
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y DE JUEGOS DE  
ESTRATEGIA EN EDUCACIÓN PRIMARIA**

**Mirian Luz Baeza Toro**

Directores de tesis:

Mequè Edo i Basté

Jordi Deulofeu Piquet

Enero 2016



# Índice

Índice .....	3
PRESENTACIÓN.....	6
CAPÍTULO 1: FINALIDAD DE LA INVESTIGACIÓN Y ENFOQUE GENERAL ..	8
1.1. Justificación, interés y planteamiento del problema .....	9
1.2. Antecedentes.....	10
1.3. Objetivos de la Investigación .....	14
CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO.....	15
2.1.    Juegos y matemáticas .....	16
2.1.1. Juegos matemáticos y juegos de estrategia .....	16
2.1.2. Relación entre juegos y matemáticas.....	18
2.1.3. Clasificación de los juegos .....	21
2.2.    La resolución de problemas .....	25
2.3.    Juegos de estrategia y resolución de problemas .....	34
CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA.....	41
3.0 Introducción .....	41
3.1. Contexto y población del estudio .....	41
3.2. Situación didáctica y selección de tareas.....	42
3.2.1. Diseño y selección de tareas.....	42
3.3. Participantes y organización de la actividad .....	45
3.4. Obtención de datos y elaboración de protocolos .....	47
3.4.1. Selección de datos.....	47
3.4.2. Elaboración de los protocolos .....	47
3.5. Análisis de datos .....	49
3.5.1. Proceso de construcción del instrumento de análisis .....	49
3.5.2. Determinación de los episodios e indicadores.....	50
3.5.3. Organización de los datos.....	56
3.5.4. Organización de los datos en tablas.....	56
3.5.5. Elaboración mapas de tiempo.....	61

4.3.1. Ejemplo de análisis: Problema B.....	64
CAPÍTULO 4 ANALISIS DE DATOS Y RESULTADOS.....	69
4.1 Análisis protocolos juego A.....	70
4.1.1. Protocolo 3.....	70
4.1.2. Protocolo 4.....	72
4.1.3. Protocolo 5.....	74
4.1.4. Protocolo 6.....	76
4.1.5. Síntesis Protocolos Juego A.....	78
4.2 Análisis protocolos juego B.....	80
4.2.1. Protocolo 9.....	81
4.2.2. Protocolo 10.....	83
4.2.3. Protocolo 11.....	85
4.2.4. Protocolo 12.....	86
4.2.5. Síntesis Protocolos Juego B.....	88
4.3 Comparación resultados Juego A y Juego B.....	90
4.4 Análisis protocolos Problema A.....	91
4.4.1. Protocolo 1- Pareja 1.....	91
4.4.2. Protocolo 1-Pareja 2.....	93
4.4.3. Protocolo 2-Pareja 3.....	95
4.4.4. Protocolo 2-Pareja 4.....	97
4.4.5. Síntesis Protocolos Problema A.....	99
4.5 Análisis protocolos Problema B.....	100
4.5.1. Protocolo 7.....	101
4.5.2. Protocolo 8.....	102
4.5.3. Síntesis Protocolos Problema B.....	104
4.6 Comparación resultados problema A y Problema B.....	105
4.7. Comparación entre juegos y problemas.....	106
4.7.1. Similitudes entre los protocolos de juegos y problemas.....	112
4.7.2. Diferencias entre los protocolos de juegos y problemas.....	114
4.7.3. Gestión del docente durante el proceso de resolución.....	117
4.7.4. Patrones observados en la resolución de los juegos.....	118
4.7.5. Patrones observados en la resolución de los problemas.....	120

4.7.6. Comparación de los patrones observados en la resolución de juegos y problemas .....	121
CAPITULO 5: CONCLUSIONES, LIMITACIONES Y PERSPECTIVA DE FUTURO.....	123
5.0. Introducción .....	123
5.1. Conclusiones de carácter metodológico: .....	123
5.2. Conclusión respecto a los resultados .....	125
5.3. Conclusión respecto al desarrollo de habilidades de resolución de problemas.....	128
5.4. Limitaciones del estudio. ....	129
5.5. Perspectivas de futuro e implicaciones didácticas .....	129
6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	131
7. ANEXOS (Adjunto en CD).....	135

## PRESENTACIÓN

La presente investigación es de carácter exploratorio y comparativo y se centra en el estudio de los procesos de resolución presentes tanto en juegos de estrategia como en problemas escolares de primaria.

La elaboración e implementación de un instrumento de análisis, nos permite identificar los procesos comunes en ambas tareas de resolución. En este estudio, dicho instrumento de análisis, posee una doble función, por un lado permite identificar y caracterizar los procesos de resolución de cada tarea - juegos y problemas- y por otro lado, permite comparar ambos procesos, es decir, determinar si la actividad matemática que se realiza en ambos tipos de tareas, presentan similitudes y diferencias.

El estudio se organiza en siete capítulos:

En el **primer** capítulo, se presentan los antecedentes que justifican el interés del tema de investigación, se plantea el problema y sus objetivos, tanto el general como los específicos.

En el **segundo** capítulo, se presenta el marco teórico que sustenta el estudio. Se define el concepto de "Juego" y "Juego de estrategia". Se entrega una clasificación de los tipos de juegos existentes y su influencia en el entorno escolar. Se define lo que entendemos por "Resolución de problemas", se mencionan los aspectos más relevantes de algunas investigaciones en el área y su importancia en la educación escolar actual. Por último, se presentan evidencias que permiten observar una relación importante entre los procesos llevados a cabo durante la resolución de problemas y de juegos de estrategia.

En el **tercer** capítulo, se expone la fundamentación metodológica que sustenta la investigación con el fin de cumplir los objetivos trazados. Se presenta el contexto y la población en estudio. Se describe la situación didáctica y se presentan y justifican la elección de las tareas, así como las características de los participantes y la organización de las tareas llevadas para el posterior registro de datos.

Posteriormente, se detalla cómo se realizaron los registros y cómo se transcribieron para obtener los protocolos necesarios para el análisis. Se describe detalladamente el proceso seguido para la elaboración del instrumento de análisis, comenzando por la identificación de los episodios y sus indicadores. A partir de los protocolos obtenidos, que por las características de nuestro estudio, es un análisis en sí mismo, se organizan los datos en tablas y mapas de tiempo. Estas tablas y mapas, permiten completar y profundizar este primer análisis.

En el **cuarto** capítulo, se profundiza en el análisis de los datos a partir de los registros, protocolos, tablas y mapas de tiempo elaborados. En primera instancia, se analizan los protocolos por tarea y área. Primero se analizan los protocolos pertenecientes al Juego A y luego al Juego B; y se analizan y comparan los resultados obtenidos en ambos juegos. En segunda instancia, se analizan los protocolos correspondientes al Problema A y al Problema B y se analizan y comparan los resultados obtenidos en ambos problemas. El capítulo culmina con la comparación de los resultados obtenidos tanto en ambos tipos de tareas, en búsqueda de similitudes y diferencia.

En el **quinto** capítulo, se presentan las conclusiones relativas al objetivo general del estudio: Comparar los procesos de resolución de problemas y de juegos de estrategia buscando evidencias que permitan establecer relaciones entre ambos procesos. También se presentan conclusiones relativas a los objetivos específicos: Identificar los episodios presentes en la resolución de problemas; Identificar los episodios presentes en la resolución de juegos de estrategia, y Comparar los episodios en ambos tipos de resolución buscando similitudes y diferencias.

El capítulo culmina con la mención de las limitaciones; las perspectivas de futuro y las implicaciones didácticas de nuestra investigación.

En el **sexto** capítulo se presentan las referencias bibliográficas y en el **séptimo** capítulo se presentan los anexos para su revisión.

## **CAPÍTULO 1: FINALIDAD DE LA INVESTIGACIÓN Y ENFOQUE GENERAL**

Un gran número de currículos matemáticos actuales subrayan la importancia de aprender a pensar y razonar matemáticamente por medio de la resolución de problemas.

El currículum de educación primaria de la Generalitat de Catalunya especifica que pensar matemáticamente implica “construir conocimientos matemáticos a partir de situaciones que tengan sentido, experimentar, intuir, relacionar conceptos y realizar abstracciones” (Generalitat de Catalunya, 2007). Por “razonar matemáticamente” se entiende “realizar inducciones y deducciones, particularizar y generalizar, argumentar las decisiones tomadas, así como la elección de los procesos seguidos y de las técnicas utilizadas” (Generalitat de Catalunya, 2007).

Es aquí donde el potencial de los juegos matemáticos se vislumbra con fuerza como actividad pedagógica que fomenta las características anteriormente señaladas. El presente trabajo pretende aportar evidencias empíricas que apoyen la utilización de los juegos de estrategia como herramienta metodológica para la enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas en las clases de matemáticas de primaria.

El objetivo de este estudio era elaborar un instrumento de análisis que nos permitiera estudiar situaciones didácticas con juegos de estrategia relacionados con los procesos de resolución de un problema matemático.

La resolución de problemas, como entorno de aprendizaje abarca distintos tipos de actividades matemáticas. Los contenidos matemáticos deben ser afrontados en situaciones problemáticas que permitan a los alumnos “explorar, despertando varias formas de razonamiento y procesos como experimentar, discutir, conjeturar, justificar...” (Abrantes, 1996, p.10). Esta tarea debe ser asumida por profesores y alumnos desde la temprana edad. El contexto es relevante a la hora de desarrollar un currículum que se basa en estos supuestos: “es necesario que los contenidos curriculares se trabajen en contextos significativos y ricos que muestren el origen concreto de los conceptos matemáticos, la relación entre ellos y su aplicación a problemáticas diversas... pero también los juegos y las propias matemáticas, y en particular su historia, han de ser las fuentes que nos proporcionan los contextos más relevantes para aprender matemáticas” (Generalitat de Catalunya, 2007).

El uso de los juegos matemáticos como instrumento metodológico para el desarrollo de la heurística, debe ser estudiado con mayor profundidad, para aportar resultados concretos sobre la relevancia de los mismos en los procesos

de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; y para ello es necesario elaborar instrumentos de análisis que nos permitan observar situaciones de juego para estudiar si la resolución de juegos, y en particular los juegos de estrategia, permiten el desarrollo de heurísticas propias de la resolución de problemas matemáticos.

## **1.1. Justificación, interés y planteamiento del problema**

La presente investigación pretende aportar datos empíricos a favor del uso de los juegos de estrategia en el aula, como herramienta metodológica para desarrollar habilidades propias de la resolución de problemas. Por lo tanto, por un lado es una investigación teórico-práctica, pero por otro, es un estudio comparativo, porque se realiza una comparación entre los procesos de resolución de problemas y los procesos de resolución de juegos de estrategia.

El principal interés se percibe de la necesidad de elaborar actividades, tareas y/o proyectos que puedan ser aplicados en el aula, utilizando material concreto y apelando a la motivación de los participantes, pero bajo un marco teórico sustentable y bajo cierta forma de procedimientos para llevarlos a cabo de manera que cumplan con su objetivo.

La resolución de problemas, es aceptada como crucial en la educación de las Matemáticas hace décadas. Como veremos en el Marco teórico propuesto en nuestro estudio, existen diversos investigadores preocupados por conocer los procesos que se llevan a cabo cuando se resuelve un problema, así como las estrategias utilizadas por los resolutores.

En la década de los ochenta, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM), declaró que el principal objetivo de la enseñanza de las matemáticas tenía que ser la resolución de problemas. ¿Pero cómo llevar la resolución de problemas a las aulas de primaria? Como comenta Corbalán (2002), por medio de los juegos, especialmente los de estrategia, es posible introducir a los educandos en estos procesos de resolución.

Resolver un problema, no sólo implica componentes intelectuales, como el uso de heurísticas, sino que también existe un fuerte componente de compromiso personal. El resolutor debe sentirse motivado a querer buscar una solución o al menos intentar encontrar un posible camino de solución, y mientras lleva a cabo este proceso, se siente atraído y desafiado, pero sobre todo interesado en llevarlo a cabo.

Según Guzmán (1984), la matemática es concebida por muchos matemáticos como un verdadero juego, porque presenta el mismo tipo de estímulos y de

actividad que se da en el resto de los juegos intelectuales. Ambos, matemáticas y juegos tienen un fuerte componente lúdico ¿por qué no utilizarlo en beneficio de la enseñanza de las matemáticas?

Si bien, la mayoría de los juegos combinan conocimiento y azar, creemos que el tratamiento que se haga del juego de estrategia en el aula, es el punto que marca la diferencia y que permite que en su solución puedan desarrollarse habilidades de resolución de problemas, considerando que en ambos tipos de tareas podemos no solo llevar a cabo procesos similares durante la búsqueda de la estrategia para ganar (o no perder), sino que también es posible utilizar estrategias similares de resolución.

Comenzando desde esta premisa y siguiendo con la línea de investigación que venimos realizando en estudios anteriores, las preguntas que surgen a partir de los resultados obtenidos son las siguientes:

¿Existen evidencias de que la resolución de problemas y la resolución de un juego de estrategia presentan procesos de resolución comunes? Y, en caso afirmativo ¿qué evidencias son estas?

Estas son las cuestiones que queremos profundizar en el presente estudio.

## **1.2. Antecedentes**

Como ya se vislumbra, esta investigación se basa en el potencial de los juegos matemáticos de estrategia para desarrollar habilidades de resolución de problemas y el posible paralelismo entre la resolución de un juego de estrategia y de un problema matemático.

En primer lugar, se realizó un estudio piloto (Edo, Baeza, Deulofeu y Badillo, 2008) que centraba la atención en la presencia o ausencia de fases de resolución de problemas en un juego de estrategia. En este estudio piloto participaron alumnos de un curso de quinto de primaria. Las sesiones de juego formaban parte de los contenidos matemáticos planificados anualmente por la profesora. La unidad didáctica duró tres semanas, desarrollándose una sesión aplicando un juego de estrategia por semana.

Este primer acercamiento a la temática de interés, tenía como objetivo principal: Identificar evidencias que nos permitan describir los procesos heurísticos del descubrimiento de estrategias ganadoras y el posible paralelismo con las fases de resolución de problemas (Pólya, 1979).

En este caso, los objetivos específicos eran:

- Describir el proceso de resolución de estrategias ganadoras del juego de estrategia “Cerrar quince”.
- Comparar las fases de la heurística que los alumnos desarrollan en la resolución del juego de estrategia “Cerrar quince” en comparación a las fases de la heurística de un problema matemático.

En esta ocasión se registró en video el desarrollo de una actividad de juego de mesa, con alumnos<sup>1</sup> de quinto de primaria, que formaba parte de las unidades didácticas planificadas por la maestra de matemáticas dentro de un proyecto de cálculo mental que se lleva a cabo en el centro.

Antes de comenzar el análisis, fue necesario encontrar un modelo que nos permitieran dividir la sesión de juego elegida para el análisis de los procesos de resolución de un juego e identificar aquellas partes de la sesión que nos permitieran identificar las fases que se querían estudiar. A partir del modelo de análisis de Shoenfeld (2000) “Models of the Teaching Process”, se identificaron los episodios y sub-episodios observados en sesiones de juegos con alumnos de quinto de primaria. En este estudio se definió por episodio cada uno de los procesos o partes que conformaban una sesión de juego, no a las fases de resolución del juego.

Partiendo de este modelo obtuvimos dos niveles de análisis que se detallan a continuación:

En el primer nivel de análisis se identificaron cinco episodios:

- I. Inicio de la sesión,
- II. Desarrollo de partida: primera partida
- III. Desarrollo de partida: segunda partida
- IV. Desarrollo de partida: tercera partida
- V. Cierre de la sesión.

En el segundo nivel de análisis, centrado en el episodio III: Desarrollo de partida, se identificaron tres sub-episodios correspondientes a las fases de resolución de un juego:

- a. Comprensión de los objetivos del juego y de las normas que se deben seguir.
- b. Desarrollo de partidas: experimentación, diseño y aplicación de planes parciales.

---

<sup>1</sup> En este estudio, se utiliza la palabra alumnos incluyendo los dos géneros, con el objetivo de hacer más fluida la lectura y escritura, no con el objetivo de resaltar un género más que el otro.

c. Validación o refutación de estrategias y análisis de lo que ha pasado.

Los resultados que arrojaron nuestros datos se reflejan en el siguiente cuadro:

I	II		III				IV										V	
INICIO	PRIMERA JUGADA		SEGUNDA JUGADA				TERCERA JUGADA										CIERRE	
5min 40s	2m	5m 40s	1m 49s	39s	4m 30s	1m 5s	3m 3s	22s	12s	27s	16s	31s	1m 6s	39s	4m 47s	51s	5m 6s	
	b	c	b	a	b	c	b	a	b	a	b	a	b	c	b	c	b	
<b>Tiempo total 42 minutos 6 segundos</b>																		

**Cuadro 1:** Resumen de las fases de resolución de un juego observadas en una sesión (Edo, Baeza, Deulofeu y Badillo, 2008).

En la ejecución del juego, aparecen las fases de resolución de problemas descritas anteriormente.

Las fases identificadas en la resolución del juego, se repiten a lo largo del desarrollo del mismo sin un orden lineal estricto.

Sin embargo, a partir de este primer análisis, describimos el proceso realizado por el grupo estudiado. El análisis se detalla a continuación:

Al inicio de la sesión encontramos tres sub episodios en los que los alumnos, experimentan y aplican (b), analizan y validan (c) y experimentan y aplican (b). Sigue un momento en que aparece una duda relacionada con la comprensión de objetivos o normas (a). Los tres sub-episodios siguientes siguen la misma pauta inicial, es decir, los alumnos experimentan y aplican (b), analizan y validan (c) y experimentan y aplican (b). Cuando reaparece la duda (a) se centran en ella en los seis sub-episodios siguientes; alternando uno de comprensión de objetivos y normas (a) con uno de experimentación y aplicación (b). En el momento que el grupo comparte realmente los objetivos y normas de la tarea, el sub-episodio (a) desaparece y se centran de nuevo y alternativamente en, experimentación y aplicación (b) seguido de análisis y validación (c).

A partir de los resultados de este estudio piloto, mostrados en el Cuadro 1, observamos cierto paralelismo entre las fases de resolución de problemas de Polya (1979) y las fases de resolución de un juego utilizadas por Edo (2002).

Concluimos en primera instancia, que estas fases parecen compartir procesos comunes en el desarrollo de resolución, con la salvedad de que en el caso del juego, dichas fases se repiten a lo largo de la sesión sin un orden lineal estricto (Edo, 2002; Edo y otros, 2008). Por ello decidimos que era necesario estudiar la misma situación con otros grupos de alumnos, generar una pauta

pedagógica que guiara la actuación del adulto y definir mejor el sistema de análisis.

A partir de estos hallazgos, determinamos los lineamientos de nuestro primer trabajo de investigación. Este primer estudio, correspondió al Trabajo de investigación del Programa de Doctorado de la Universidad Autónoma de Barcelona (Baeza, 2008). Atendiendo a las limitaciones vislumbradas en el estudio piloto, era necesario para avanzar, elaborar un instrumento de análisis apropiado para el estudio de los procesos de resolución en los juegos de estrategia que nos permitiera describir y caracterizar cada uno de los procesos; así también, la elaboración de una pauta didáctica pertinente que guiara al docente durante el desarrollo del juego.

Los objetivos de esta investigación fueron los siguientes:

Objetivo general:

- Elaborar un instrumento de análisis para estudiar los procesos de resolución de un juego de estrategia, ligados a los procesos de resolución de problemas matemáticos.

Objetivos específicos:

- Caracterizar el proceso de resolución de un juego de estrategia, en relación a los procesos de resolución de problemas.
- Caracterizar cada parte del proceso de resolución de un juego de estrategia a partir de la descripción de indicadores.

En este estudio, participaron alumnos de dos cursos de quinto de primaria resolviendo el mismo juego de estrategia del estudio piloto. Se diseñó una pauta didáctica con el objetivo de planificar de manera más eficiente la gestión de las sesiones de juegos, necesidad considerada a partir de las conclusiones del estudio anterior.

Los resultados obtenidos fueron alentadores y pudimos identificar los siguientes episodios: Apropriación de reglas y objetivos, Exploración y análisis, Planificación e implementación, Verificación y argumentación y los enlaces entre episodios denominados Momentos de transición.

Estos episodios coincidían de forma reagrupada con los episodios de resolución de problemas de Schoenfeld (1985), pero en el juego de estrategia, se presentan de manera repetida e intermitente a lo largo de las sesiones de juego y poseen características propias que permiten diferenciar un episodio de otro.

Los datos permitieron evidenciar cambios positivos con la implementación de la pauta didáctica, cuya intervención permitió un mayor aprovechamiento de los procesos más importantes, la resolución misma. Los cambios fueron favorables tanto para el desempeño del adulto como de los participantes, permitiendo la generación de un ambiente propicio para la resolución de problemas.

Sin embargo, era necesario seguir avanzando y responder a algunos de los interrogantes que surgieron de los estudios anteriormente señalados. Era necesario seguir investigando, disponer de más datos empíricos, con un mayor número de participantes, con la inclusión de otras tareas de resolución y profundizar en la relación entre los procesos de resolución de los juegos de estrategias y de la resolución de problemas.

Es a partir de esta premisa, que se fecunda la presente investigación, cuyos objetivos trataremos en el siguiente punto.

### **1.3. Objetivos de la Investigación**

A partir de los cuestionamientos señalados en el apartado anterior, los objetivos de nuestro estudio son los siguientes:

#### **Objetivo general:**

- Comparar los procesos de resolución de problemas y de juegos de estrategia buscando evidencias que permitan establecer relaciones entre ambos procesos.

#### **Objetivos específicos:**

- Identificar los episodios presentes en la resolución de problemas.
- Identificar los episodios presentes en la resolución de juegos de estrategia.
- Comparar los episodios en ambos tipos de resolución buscando similitudes y diferencias.

## CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

A continuación se presentan la evidencia teórica que sustenta nuestra investigación. Para comprender la base que sustenta esta investigación debemos definir qué entendemos por 'juego' y por 'resolución de problemas'. En primer lugar, estudiaremos el concepto de juego, sus características y clasificaciones. En segundo lugar, estudiaremos del mismo modo la resolución de problemas para luego comprender la relación entre ambos y el por qué pensamos que el juego, en nuestro caso de estrategia, puede ser una herramienta metodológica importante y pertinente para desarrollar habilidades de resolución de problemas.

Desde tempranas edades, el mayor cúmulo de aprendizajes de niños y niñas se desarrolla en un entorno de juego. Vygotski (1979) afirma que “el juego crea una zona de desarrollo próximo en el niño” (p.156) que es generador de nuevos aprendizajes. Este autor concibe el juego como una actividad esencial para el desarrollo humano, recalcando que “El juego no es un rasgo predominante de la infancia, sino un factor básico en el desarrollo” (op. cit. p.154). Siguiendo al mismo autor sabemos que cualquier juego contiene reglas, algunas más implícitas y otras más explícitas, y que a medida que el niño se va desarrollando cambia sus intereses desde los juegos de simulación hacia los juegos más reglados, siendo cada vez más consciente del propósito que encierra cada juego.

Vygotski añade que durante la edad escolar “el juego no desaparece, sino que se introduce en la actitud que el niño adopta frente a la realidad. Tiene su propia continuidad interna en la instrucción escolar y en el trabajo” (p.158). El autor señala, que el juego proporciona beneficios cognitivos, sociales y morales que, no sólo no debe coartarse en ninguna etapa del desarrollo y por lo tanto es generador de nuevos aprendizajes y concibe el juego como una actividad esencial para el desarrollo humano y por tanto de la humanidad.

De manera parecida, Bishop (1999) considera que el juego es una actividad presente en todas las civilizaciones y es, según este autor, una de las actividades relacionadas con las matemáticas.

En la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, el juego también es una actividad que permite el desarrollo de esta área. Kamii y DeVries (1980) aportan resultados satisfactorios de la importancia del juego en el desarrollo de diversas áreas de la matemática en la etapa escolar más temprana: social, política (normas y reglas), moral, emocional y cognitiva.

Las autoras señalan que el valor de los juegos colectivos en la enseñanza tiene estrecha relación con la tendencia natural de los niños a participar en este tipo de actividades, la importancia del juego colectivo para los niños es conocida por los maestros de enseñanza elemental, para quienes esta es una actividad predilecta en el tiempo de recreo, incluso los adultos buscan la compañía de otros para desarrollar juegos sociales.

Dentro de las ventajas de los juegos colectivos en la enseñanza está la posibilidad de los jugadores de recibir la corrección por parte de otro jugador y no del propio profesor, lo que conduce al desarrollo de su autonomía, así también se sienten motivados a supervisar las acciones de sus compañeros y reciben una retroalimentación mutua e inmediata. Por otro lado, los alumnos se encuentran más activos mentalmente cuando están jugando que cuando trabajan en hojas de ejercicios, lo que confirma la fuerza motivadora del mismo como instrumento metodológico de enseñanza y cuyo proceso es más importante que el producto final.

## **2.1. Juegos y matemáticas**

Según NCTM (2000), desde tempranas edades los niños tienen relación con las matemáticas a lo largo de su desarrollo, y a medida que van creciendo va aumentando su interés de forma natural por los elementos matemáticos, a través de los juegos y de las diversas situaciones vividas en el día a día. Es así como los alumnos llegan a la etapa escolar con un cúmulo de aprendizajes previos, adquiridos de manera natural y que deben ser tomados en cuenta, explorados y activados por el docente.

Podemos decir entonces, que el juego durante el desarrollo humano es de suma importancia, está presente en todas las culturas (Bishop, 1999) y es aceptado por todas las edades. Desarrolla destrezas y habilidades sociales, comunicativas y cooperativas que se presentarán a lo largo de la vida en distintas etapas y situaciones del diario vivir, es una actividad natural que genera motivación y a la que se está predispuesto positivamente a participar, incluso en la vida adulta. Por lo mismo es importante retomar y hacer uso de esta natural herramienta durante el período escolar para enseñar los diferentes contenidos curriculares.

### **2.1.1. Juegos matemáticos y juegos de estrategia**

Antes de avanzar y justificar la relación entre las matemáticas y los juegos, se debe dejar claro a qué nos referimos con “juego” en este estudio y qué significa para nosotros “juego matemático” y “juego de estrategia”.

Huizinga (2012) define el juego como “una acción u ocupación voluntaria, que se desarrolla dentro de los límites temporales y espaciales determinados, según reglas absolutamente obligatorias, aunque libremente aceptadas; acción que tiene su fin en sí misma y va acompañada de un sentimiento de tensión y alegría y de la conciencia de *ser de otro modo* que en la vida corriente” (2012, p. 43-44). Esta definición centra su atención en aspectos importantes como: la característica de que el juego es una actividad sujeta a reglas voluntariamente aceptadas por los participantes; y la necesidad del carácter lúdico.

Las investigaciones teóricas suscitadas respecto a la importancia del juego como un componente del aprendizaje ha corroborado lo que los educadores en matemáticas han descubierto mediante su experiencia. “Ello ha hecho del acto de jugar y de la idea del juego una actividad de enseñanza y aprendizaje mucho más extendida de lo que había sido anteriormente”. (Bishop, 1998. p. 11).

En los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, tanto la motivación como el entorno y los límites temporales juegan un rol importante, a la hora de hablar de “juego matemático”, nos estamos limitando a entender que esta actividad se realiza dentro de un entorno matemático, y en el caso de la enseñanza primaria, dentro de un entorno escolar matemático.

Consideramos el juego matemático como una actividad escolar de naturaleza matemática. En esta actividad, basada en reglas asumidas por los participantes, existe un problema a resolver, formado a partir del objetivo del juego, que se desarrolla en un entorno de resolución de problemas. Este entorno debe permitir a los alumnos: explorar, discutir y buscar diversos caminos para la resolución del juego. Corbalán (1994), considera que el juego en el marco del contexto escolar requiere del uso de materiales concretos como tableros y fichas o simplemente lápiz y papel. Así mismo destaca la importancia de aquellos materiales que permitan registrar los procesos de resolución del problema matemático implicado en el juego.

Dependiendo de la finalidad didáctica del juego planteado para las clases de matemáticas planificada por el profesor, el juego presenta diversas potencialidades. A continuación se mencionan algunos aspectos del juego que tienen relación con los objetivos del presente estudio:

- **Aumento de las interacciones que permiten el desarrollo del vocabulario matemático**, así como habilidades transversales referidas al ámbito personal y social. El trabajo colaborativo, y en este caso, la actividad entre compañeros de la misma edad (interacción entre iguales), potencia habilidades de autoestima, autorregulación, autocorrección, cooperatividad (Topping, 2003) y aumento de las verbalizaciones de explicaciones y

argumentos referidos a los procesos realizados por los alumnos durante la actividad para lograr jugar y, si es posible, ganar, apropiándose del lenguaje matemático como se mencionó anteriormente de una manera repetitiva, pero entretenida y evitando el tedio (Topping, 1998). La importancia y ventajas de los juegos colectivos en la enseñanza de las matemáticas, es también mencionada por Kamii y DeVries (1980). El juego tiene estrecha relación con la naturaleza de los niños a participar en este tipo de actividades y los maestros de enseñanza primaria también conocen la importancia del juego colectivo para los niños, para quienes esta es una actividad predilecta en el tiempo de recreo, “No hacen falta más pruebas para demostrar el predominio de los juegos colectivos como actividad humana natural y satisfactoria. Lo que hace falta es una justificación de su empleo en el aula.” (Kamii y DeVries, op. Cit., p. 42).

- **Desarrollo del pensamiento matemático y el razonamiento lógico, vinculado a la resolución de problemas:** Existen muchos juegos de sociedad donde intervienen estrategias, es decir donde el jugador tiene que descubrir y aplicar algunos procedimientos que le ayuden a resolver mejor la situación en la que está. Estas estrategias tienen que ver, desde el punto de vista de la matemática, con el razonamiento lógico y con estrategias de resolución de problemas. El uso de juegos en el marco escolar puede tomar como finalidad la comprensión de conceptos o la mejora de técnicas –juegos de conocimiento–, o bien la adquisición de métodos de resolución de problemas –juegos de estrategia– (Corbalán y Deulofeu, 1996; Gómez Chacón, 1992). Por otro lado Bishop comenta que “desde la perspectiva de la capacidad mental, parece que el juego desarrolla habilidades concretas de pensamiento estratégico, adivinación y planificación” (1998, p.16).

En nuestro caso nos centramos en los juegos de estrategia, en los que se utilizan procedimientos para ganar siempre o para no perder (Corbalán y Deulofeu, 1996), como instrumento metodológico importante para la enseñanza de la resolución de problemas.

### **2.1.2. Relación entre juegos y matemáticas**

La línea que separa la matemática seria del juego a simple vista es enorme, pero si ponemos atención a los procesos involucrados en ambos podemos encontrar varios aspectos comunes. Guzmán señala que “el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático” (Guzmán, 2005, p.23).

Este autor comenta que muchos de los grandes matemáticos eran agudos observadores de los juegos; profundizando en ellos y analizándolos profundamente llegaron a nuevos campos y modos de pensar que hoy son considerados como matemática seria.

En el juego, durante el desarrollo de partidas sencillas se deben aprender y estudiar las reglas fundamentales, en este proceso se van asimilando los procedimientos llevados a cabo para usarlos en situaciones similares. En síntesis, el resolutor se hace más activo en la participación de la búsqueda de soluciones, enfrentándose a los problemas utilizando herramientas conocidas o creando nuevas herramientas que conduzcan a la solución del problema.

En los juegos podemos encontrar, de acuerdo con Guzmán (2005) varios contenidos matemáticos, entre los que enumera: la aritmética, la teoría elemental de números, la combinatoria, el álgebra, la teoría de grupos, la teoría de grafos, la teoría de matrices, la teoría del punto fijo, la geometría, la probabilidad y la lógica.

Si bien, sólo nos hemos ocupado en enumerar estos contenidos y no los hemos estudiado profundamente, no cabe duda de que los juegos tiene una relación con las matemáticas más profunda que la que generalmente se conoce y que si hacemos extensibles estos conocimientos y argumentos a profesores, alumnos y padres, los juegos tendrían el peso pedagógico que se merecen.

No debemos negar que el juego también tiene diferencias con las matemáticas; Guzmán menciona que “generalmente las reglas del juego no requieren introducciones largas ni tediosas. En el juego se busca la diversión y sobretodo la posibilidad de entrar en acción rápidamente. Muchos problemas matemáticos permiten también una introducción sencilla y una posibilidad de acción con instrumentos bien ingenuos, pero la matemática no es sólo diversión, sino ciencia e instrumento de exploración” (Guzmán, op. cit. p.28). Por lo mismo debemos ser serios a la hora de planificar una actividad que emplee el uso de juegos con sentido matemático como herramienta pedagógica, conocer el juego, que implicaciones matemáticas tiene, cómo podemos abordarlas para que los alumnos no sólo se entretengan sino que se motiven a descubrir, a explorar, a buscar caminos de solución, a argumentar utilizando un vocabulario matemático, en fin, a pensar matemáticamente.

Pero aún quedan más argumentos para relacionar el juego y las matemáticas, muchos de ellos quedarán sin mencionar en este estudio y otros han de ser estudiados en futuras investigaciones.

Bishop (1999) se cuestionaba si todas las culturas desarrollaban o no matemáticas y desde este planteamiento decidió estudiar las actividades equivalentes a la comunicación, que dio lugar al lenguaje. De esta manera llegó a seis actividades matemáticas comunes a todas las culturas: contar, localizar, medir, dibujar, jugar y explicar. De estas seis actividades, las más importantes a su parecer son jugar y explicar.

Todas estas actividades tienen como objetivo estimular diversos procesos cognitivos ya sea en interacción o por separado. El juego es importante debido a la gran aceptación y práctica en todas las culturas como una actividad importante dentro del desarrollo cultural y que no sólo es llevada a cabo en las primeras edades, sino que también es una actividad muy desarrollada por los adultos; y a la gran cantidad de juegos que tienen conexiones matemáticas. Lo que las hacen ser consideradas como una actividad importante dentro de la educación matemática.

Explicar es una actividad que implica “explicarse a sí mismo y a los demás por qué las cosas pasan del modo que pasan... En lo que se refiere a las matemáticas nos interesa saber, por ejemplo, por qué funcionan los cálculos numéricos y en qué situaciones, por qué algunas formas geométricas no encajan entre sí, por qué un resultado algebraico lleva a otro y cómo están relacionados entre sí los distintos modos de simbolizar estas relaciones” (Bishop, 1998, p.15).

El diseño de los juegos, especialmente los de estrategia, tienen estrecha relación con las matemáticas (Corbalán, 1994) ya que en su análisis se realiza una tarea similar a la modelización, la simulación y la realización de modelos de situaciones que deben ser resueltas, actividad profundamente matemática.

Los juegos implican elementos matemáticos comunes; por ejemplo, en los juegos de cartas podemos encontrar los siguientes aspectos:

- Cálculo de probabilidades.
- Recuentos de posibilidades.
- Clasificaciones.
- Ordenaciones.
- Operaciones aritméticas.
- Suponer el problema resuelto o empezar por el final.
- Resolver problemas parciales.

Como veremos más adelante, la resolución de los juegos de estrategia pueden ser considerados como un tipo especial de problema, por lo que su relación es equivalente a la resolución de un problema matemático.

Por otro lado, Ferrero (1998) señala que “los juegos y las matemáticas tienen muchos rasgos en común...las matemáticas dotan a los individuos de un conjunto de instrumentos que potencian y enriquecen sus estructuras mentales, y posibilitan para explorar y actuar en la realidad” (p.39).

Los juegos permiten a los alumnos de primaria dar los primeros pasos hacia el desarrollo de técnicas intelectuales como el pensamiento lógico, el desarrollo de hábitos de razonamiento y enseñar a pensar con espíritu crítico y creativo. También fomenta el desarrollo social gracias al carácter lúdico de este tipo de actividades en la escuela y “acaban con el miedo y la aversión que los alumnos tienen a las matemáticas” (Ferrero, op.cit. p.40).

Por otro lado, Deulofeu (2001) señala que muchos juegos utilizan la matemática en su desarrollo, ya sea por sus relaciones numéricas, por sus relaciones geométricas o, especialmente, por las características de algunos juegos que requieren el desarrollo de estrategias para intentar realizar la mejor jugada.

Para cerrar este apartado, recurriremos a un extracto de un artículo de Guzmán (1989) que expresa la importancia del juego y su relación con las matemáticas, resumiendo en ella todo lo mencionado hasta ahora: “la matemática es un grande y sofisticado juego, que, además resulta ser una obra de arte intelectual, portadora en innumerables ocasiones de una gran luz para explorar el universo y con repercusiones prácticas de gran alcance. Los intentos de popularización de la matemática a través de la presentación de sus potentes aplicaciones, de aspectos interesantes de su historia, a través de la biografía de algunos de los matemáticos famosos, de sus relaciones con la filosofía u otros aspectos del pensamiento humano pueden servir eficazmente para acercar la matemática a muchas personas. Pero posiblemente ningún otro método acercará a una persona más a lo que constituye el quehacer interno de la matemática como un juego bien escogido” (Guzmán, 1989, p.64).

### **2.1.3. Clasificación de los juegos**

Existen diferentes criterios para clasificar a los juegos, incluso estos pueden ser considerados como matemáticos o no dependiendo del uso que se haga de ellos. Los juegos se pueden clasificar valorando el juego en sí mismo y en su utilización como herramienta metodológica para enseñar y aprender matemáticas, teniendo en cuenta los siguientes criterios (Corbalán, 1994):

- El contenido matemático de los juegos y las habilidades que desarrollan. Entre estos juegos podemos encontrar juegos que desarrollan habilidades de cálculo mental y los juegos de estrategia destinados a desarrollar habilidades de resolución de problemas.
- El lugar que ocupan en el proceso de aprendizaje. es decir, el valor del juego en sí mismo y el papel que ocupa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Entre estos juegos podemos encontrar juegos pre-instruccionales, co-instruccionales o post-instruccionales.

Juegos pre-instruccionales: se utilizan previamente a la adquisición de conceptos o procedimientos. Se usan también para la adquisición de procedimientos típicos del quehacer matemático.

Juegos co-instruccionales: se utilizan a la vez que se van introduciendo conceptos o procedimientos, para reforzar mutuamente los conceptos y la comprensión de los juegos.

Juegos post-instruccionales: se utilizan para reforzar conocimientos o procedimientos ya conocidos desde hace tiempo y/o para refrescarlos y actualizarlos. Su uso es aceptado ampliamente por profesores alumnos y padres.

- El número de jugadores que participan: los juegos pueden ser desarrollados de manera individual o en grupos, de manera que juegue jugador contra jugador o pareja contra pareja.

En nuestro estudio, elegimos el trabajo grupal que permite observar de manera más eficiente los procesos que se quieren estudiar.

### *2.1.3.1. Juegos de conocimiento*

Los juegos de conocimientos son aquellos que hacen referencia a uno o varios de los tópicos habituales del programa de matemáticas:

- Se utilizan para afianzar o adquirir de una manera más lúdica los conceptos y/o algoritmos que deben ser enseñados de acuerdo al programa matemático.
- Son ampliamente aceptados por la comunidad pedagógica.
- Hacen la enseñanza más activa, creativa, motivadora y participativa.
- Los juegos típicos de conocimientos son: los juegos numéricos, juegos de geometría y juegos de probabilidad.

Corbalán menciona que un mismo juego puede ser utilizado en distintas etapas del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; dependiendo del proceso en el que se desarrollen, nos referimos nuevamente a los juegos pre-instruccionales, co-instruccionales y post- instruccionales detallados el punto anterior.

### *2.1.3.2. Juegos de estrategia*

Como mencionamos anteriormente, los juegos de estrategia son aquellos en los que no hay intervención del azar y se utilizan procedimientos para ganar siempre, o para no perder, llamados estrategias, entendidas como formas de jugar (Corbalán y Deulofeu, 1996), y tienen una importancia especial en la formación matemática al ser un recurso pedagógico que permite iniciar a los alumnos en la resolución de problemas a partir de actividades prácticas que no tienen nada que ver con aquellas actividades repetitivas y tediosas (ejercicios algorítmicos) o a la repetición de procedimientos hechos por otros.

En estos juegos, mayoritariamente para los jugadores, todas las decisiones están en sus manos (no hay azar) y se trata de que estos lleguen a descubrir la existencia de una estrategia ganadora, es decir, una forma concreta de jugar que permita ganar siempre, o que el otro jugador no gane nunca, dependiendo de si el jugador es el primero o el segundo en realizar sus jugadas (Edo, Deulofeu y Badillo, 2006).

Según Corbalán y Deulofeu (1996), dentro de los juegos de estrategia podemos encontrar los pequeños juegos de estrategia (refiriéndose a la corta duración del juego) que van desde el conocido Tres en raya hasta juegos como el Nim en donde la búsqueda de la estrategia ganadora es mucho más difícil.

Estos juegos se caracterizan por ser para dos jugadores, de corta duración y sin intervención del azar, para los cuales existe generalmente una estrategia ganadora entendida como un conjunto de instrucciones que nos permiten decidir en cualquier momento y en cualquier situación cómo hemos de jugar; esta estrategia permite ganar a uno de los dos jugadores ya sea el primero o el segundo en jugar. Un conocido teorema de la Teoría de juegos, afirma que para los juegos finitos de información completa, en los que no es posible hacer tablas, existe siempre una estrategia ganadora para uno de los jugadores (Deulofeu, 2010).

Según estos autores “plantear este tipo de juegos a los alumnos, en particular aquellos que son fácilmente analizables, constituye una actividad interesante y que posibilita la introducción al estudio de los mismos” (Corbalán y Deulofeu, op. cit., p.75).

Los juegos de estrategia permiten analizar el juego para encontrar las estrategias ganadoras o no perdedoras; este tipo de actividad del mismo modo que la resolución de problemas permiten hacer uso de técnicas fundamentales de comunicación. También son importantes para la formación del pensamiento

matemático y propician una actitud positiva al enfrentarse a la resolución de un problema, actitud extensible también a otras situaciones de la vida cotidiana.

Los juegos de estrategia y algunos de conocimiento, permiten ser flexibles en cuanto a las reglas y movimientos en distintos contextos y dependiendo del interés y objetivo del juego. “Los juegos constituyen, pues, un buen instrumento para desarrollar el idioma matemático, para hacer matemáticas, para interiorizar los procesos propios del pensar matemático” (Corbalán, op. Cit., p.8).

De acuerdo con Corbalán en que el juego de estrategia “tendría que ser de aplicación generalizada (y por supuesto clasificada) en la clase matemáticas” (Corbalán, op. cit. p. 34).

El juego, aun teniendo un objetivo matemático, no pierde su característica lúdica en ningún momento y por lo mismo se deben tener en cuenta algunos aspectos que impidan que el alumno pierda la sensación de juego y se desmotive en el proceso de resolución. Según Corbalán ( op. cit.) un buen juego:

- Tiene pocas reglas. La característica de un juego que se relaciona a un buen problema es el que no deja bloqueado. Las reglas del juego deben presentarse de manera clara y concisa, para que el juego sea fácil de entender y se pueda comenzar a jugar rápido.
- Es breve (o sus situaciones son cambiantes). Si una partida de un juego dura mucho tiempo y su final es previsible, tiende a ser poco interesante y los alumnos pierden el interés en el juego.

Por último, mencionaremos algunas de las estrategias utilizadas en el juego y que pertenecen al desarrollo de la resolución de un problema:

- Empezar por el final (dar el problema por resuelto).
- Experimentar y extraer pautas (inducir).
- Aplicar la simetría.
- Utilizar un método de expresión adecuado: verbal, algebraico, gráfico, numérico.
- Resolver problemas análogos (analogía).
- Desarrollo de habilidades espaciales.
- Conjeturar.
- Manipular y experimentar manualmente.
- Empezar por lo fácil, resolver un problema más sencillo.

Otro tipo de clasificación es la realizada por Edo, Deulofeu y Badillo (2007), atendiendo a la interacción (o no) del azar en el mismo. Según estos autores, es posible establecer tres tipos de juegos:

- Juegos de azar puro: son juegos en los que los jugadores se limitan a ejecutar las órdenes dictadas por el dado. Como por ejemplo “la Oca”.
- Juegos con alguna estrategia favorecedora: son juegos, que a pesar de la existencia del azar los jugadores deben tomar decisiones que pueden influir en el resultado de su partida. Como por ejemplo “el Parchís”.
- Juegos de estrategia: son los juegos en que todas las decisiones están en manos de los jugadores y estos pueden llegar a descubrir una estrategia ganadora que les permita ganar siempre o no permitir que el otro jugador gane. Como por ejemplo “El tres en raya”.

Los juegos que tiene alguna estrategia favorecedora o los juegos de estrategia “conllevan un tipo de pensamiento estrechamente vinculado al pensamiento matemático deseable en los procesos de resolución de problemas; por ello es altamente recomendable que en nuestras aulas se destinara un tiempo para enseñar las reglas de algunos juegos, para jugar en pequeños grupos y para analizar y discutir en gran grupo los descubrimientos realizados” (Edo y otros, 2007, p.2)

Como podemos ver, el juego tiene innumerable posibilidades para ser utilizadas a favor del desarrollo de contenidos matemáticos; en un juego se pueden utilizar una o más de estas estrategias, todo va a depender, entre otras cosas, de cómo el maestro organice y planifique la actividad, del juego que escoja de acuerdo al proceso pedagógico llevado a cabo en ese momento y al nivel de sus alumnos.

## **2.2. La resolución de problemas**

La resolución de problemas es un campo de investigación muy amplio que ha ocupado numerosos investigadores desde los primeros trabajos de Polya en la década de los cuarenta del siglo pasado.

En la actualidad sigue siendo un amplio caso de estudio con múltiples ramificaciones como muestran numerosos artículos<sup>2</sup> (Castro, 2008; Puig, 2008; Santos Trigo, 2008).

---

<sup>2</sup> Referencias en: XII Simposio de la SEIEM-Actas Badajoz

El interés de la resolución de problemas en las aulas de matemáticas ha llevado a algunos investigadores a realizar estudios bajo distintos enfoques, abarcando desde los procesos cognitivos, a lo afectivos, y tomando en cuenta el uso de la tecnología en los centros educativos (Codina y Castro, 2006).

Respecto a la tipología de problemas, podemos encontrar distintas clasificaciones. La primera clasificación de los problemas de matemáticas que según Polya (1945), considera dos tipologías: problemas de encontrar (construir la solución) y problemas de probar (demostrar una conjetura).

Los problemas de encontrar son los relativos al establecimiento de resultados. En este tipo de problemas, encontramos incógnitas, datos y condiciones. Mientras que los problemas de probar son relativos a la demostración. En este tipo de problemas, encontramos conjeturas y conclusiones.

Pero es importante, tener en cuenta que "en el curso del proceso de resolución el problema puede cambiar de tipo, o, más exactamente, puede transformarse en uno del otro tipo. Esto debido a que en un problema de encontrar ha de incluir la prueba de que lo que se ha encontrado, verificando las condiciones del problema. Pero, además, cualquier problema de encontrar se transforma en un problema de probar con sólo que, de alguna manera, se haga una conjetura sobre su resultado y con ésta se formule el problema de probar que el resultado es efectivamente ése. En un problema de probar, por su parte, pueden delimitarse unos objetos, que se toman como dados, y unas propiedades o relaciones entre ellos, que también se toman como dadas —lo que constituye una hipótesis—, de manera que la conclusión sea una relación entre otro objeto que se toma como incógnita y los que se toman como datos, con lo que el problema de probar se transforma en el problema de encontrar esa incógnita" (Puig, 2006).

Continuando con Puig, la segunda tipología de problemas, pone el foco en la matemática escolar y recoge la distinción entre ejercicio y problema:

- *Ejercicios de reconocimiento*, son aquellos para los que el resolutor debe buscar en su memoria el resultado;
- *Ejercicios algorítmicos*, son aquellos en los que el resolutor debe ejecutar un algoritmo de manera automática;
- *Problemas de aplicación*, son aquellos en los que el resolutor conoce un procedimiento para resolver el problema y ha de justificar que ese procedimiento es adecuado para obtener su solución, o siempre que la ejecución de un procedimiento tenga que ir acompañada de la argumentación de que sus pasos son adecuados;

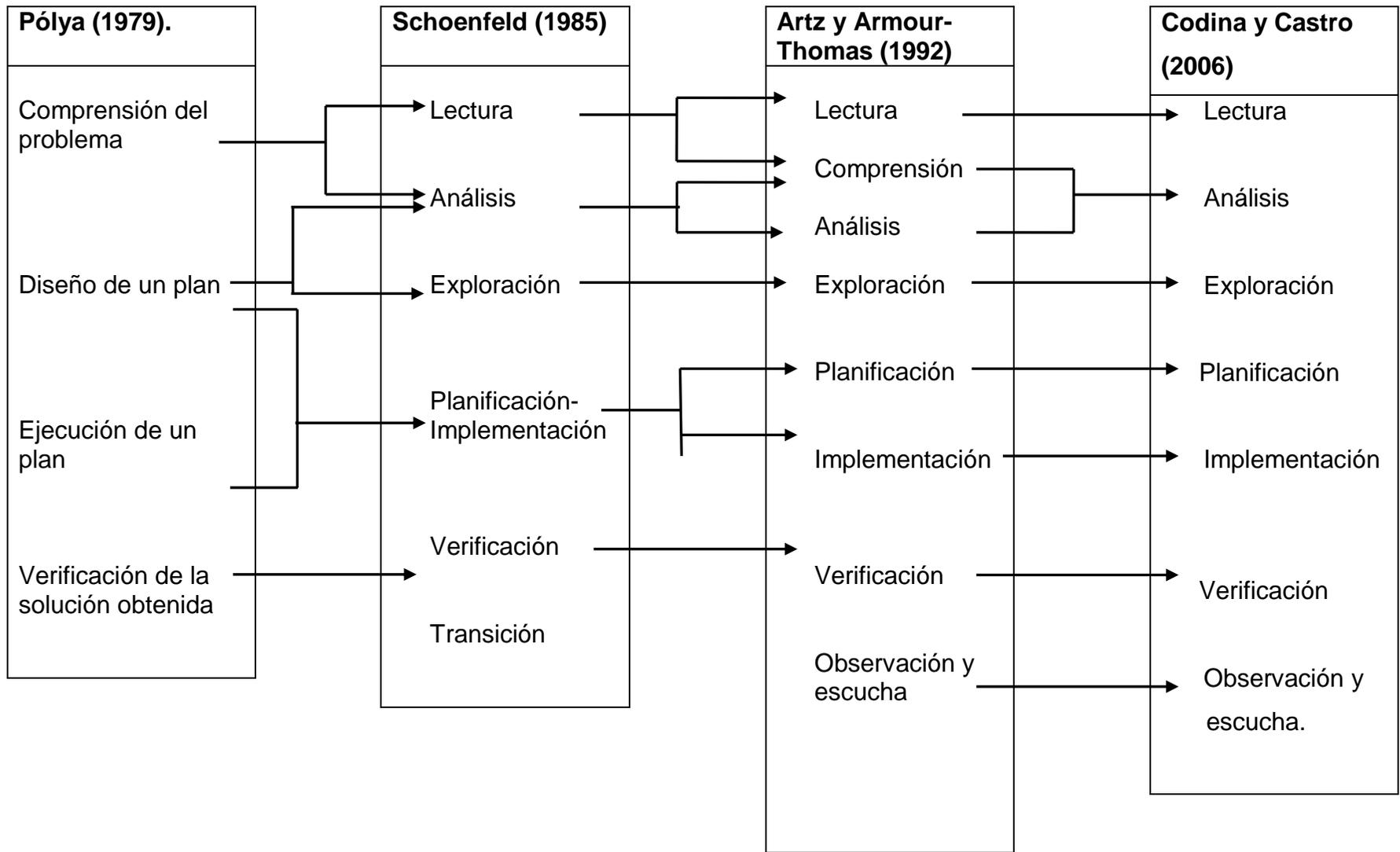
- *Problemas de búsqueda*, son aquellos en los que el resolutor ha de crear un procedimiento de solución;
- *Situaciones problemáticas*, son aquellos en los que el enunciado no se precisa bien qué es lo que hay que hacer y ésta es la primera tarea del resolutor.

Algunos de estos estudios son los referentes teóricos que nos permiten sustentar nuestro marco teórico y la perspectiva con la que se trabaja en el presente estudio.

Sin duda uno de los principales referentes, es el trabajo de Polya (1979), quien señala en su libro *Cómo plantear y resolver problemas*, que el proceso de resolución de problemas, consta de cuatro fases: *comprensión del problema*, *Diseño de un plan*, *Ejecución de un plan* y *Verificación de la solución obtenida*. Estas fases sirven a Polya para desarrollar un método de enseñanza junto a un listado de sugerencias heurísticas adecuadas, que deben ser adaptada al nivel de los alumnos (Castro, 2008).

A partir del trabajo inicial de Polya, nos encontramos con los estudios de Schoenfeld (1985), quien ha realizado un análisis profundo de las fases de Polya enriqueciéndolas a partir de sus estudios y formulando los episodios de la resolución de problemas. Otros investigadores como Artz y Armour-Thomas (1992), Codina y Castro (2006) han utilizado estas fases y/o episodios como punto de partida para sus investigaciones.

En el Cuadro 2, se presenta una visión general de las fases y/o episodios de resolución de problemas utilizadas por los investigadores anteriormente mencionados en estudios relacionados con la resolución de problemas.



**Cuadro 2.** Cuadro resumen de los episodios en la resolución de un problema.

En el cuadro 2, se pueden observar los procesos que se llevan a cabo durante la resolución de un problema desde diversas perspectivas, lo cual nos permite comparar los episodios de resolución de problemas identificados en distintos contextos.

En la primera columna podemos observar las fases de Pólya (1979). Si bien Pólya denomina fases a los procesos heurísticos desarrollados durante la resolución de un problema en vez de episodios, cada uno de estos pasos son momentos que se presentan durante el desarrollo de la resolución y que no pueden ser obviados por un buen resolutor, por lo que podemos relacionar las fases con los episodios con el mismo objetivo.

Recordamos que entendemos como procesos heurísticos a aquellas operaciones mentales típicamente útiles para la resolución de un problema, cuyo conocimiento y práctica es justamente uno de los principales objetivos de la resolución de problemas. Para Pólya, las heurísticas son procesos internos que mejoran con la práctica, por lo mismo es necesario conocer estos procesos y enseñarlos de manera planificada y con método. (Corbalán, 1994)

Sin embargo, Polya señala que no basta sólo con conocer heurísticas de resolución de problemas, sino que hay que saber cuándo y cómo utilizarlas.

En la segunda columna se presentan los episodios de Schoenfeld (1981, 1985), quien a partir del estudio de las fases de Pólya realiza experiencias a partir de la década de los 80, con estudiantes y profesores en las que propone problemas a resolver; estos estudiantes tenían los conocimientos previos necesarios para la resolución del problema y los profesores tenían la formación previa para resolverlos. Los problemas eran suficientemente difíciles y seguían en su estructura las ideas de Pólya.

Schoenfeld observaba cómo actuaban ambos grupos durante la resolución de un problema en parejas.

En estos trabajos, Schoenfeld reconoce cinco o seis episodios durante el proceso de resolución de problemas: lectura, análisis, exploración, planificación, implementación (o planificación/implementación si ambos están relacionados), verificación y transición. Este autor define como episodio “un período de tiempo durante el cual un individuo o un grupo están ocupados en una determinada tarea... o un cuerpo de tareas estrechamente relacionadas en servicio de una meta común” (Schoenfeld, 1985, p.292).

Cada uno de estos episodios está determinado por un grupo de preguntas que los sitúan y diferencian uno de otro. Además Schoenfeld señala otros

momentos denominados transiciones, que son momentos en los que se produce el enlace con otro episodio, ya sea por la toma de una nueva decisión o por el cambio de dirección del episodio. Schoenfeld (op. cit.) delimita cada episodio mediante preguntas que orientan al observador a centrarse en los comportamientos que forman parte de momentos específicos durante la resolución del problema.

A continuación describimos brevemente los episodios de Schoenfeld (1985):

- **Episodios de lectura:** Se inicia cuando un sujeto comienza a leer el enunciado del problema en voz alta, incluye el tiempo ocupado en asimilar las condiciones del problema y continúa con los silencios que pueden seguir de la lectura, silencio que podría indicar contemplación del enunciado del problema. La re-lectura del problema (en silencio) o los pensamientos en blanco. Continúa con la re-lectura de los pensamientos en voz alta y verbalizaciones de partes del enunciado del problema. Las preguntas que permiten reconocer el episodio de lectura son las siguientes:
  - R1. ¿Han sido mencionadas todas las condiciones del problema? ¿Fueron mencionadas explícita o implícitamente?
  - R2. ¿Han sido mencionadas correctamente las condiciones del objetivo? ¿Fueron mencionadas explícita o implícitamente?
  - R3. ¿Hay una evaluación del estado actual del conocimiento de los resolutores relativos a la tarea de resolución de problemas?
  
- **Episodio de análisis:** Si no hay un modo aparente para proceder después de haber sido leído el problema, la siguiente fase (ideal) de una solución del problema es el análisis. En el análisis se intenta completar el entendimiento del problema, para seleccionar una perspectiva adecuada y reformular el problema en estos términos y para introducir por reflexión principios o mecanismos que podrían ser adecuados. El problema puede ser simplificado o reformulado. A menudo lleva directamente al análisis del desarrollo del plan, en tal caso esto sirve como una transición. Además, se debe tomar en cuenta que el análisis del episodio puede ser evitado completamente. Las preguntas que permiten reconocer el episodio de análisis son las siguientes:
  - A1. ¿Qué elección de perspectiva hacer? ¿La elección es hecha explícitamente o por omisión?
  - A2. ¿Las acciones son dirigidas por las condiciones del problema? (trabajo futuro)
  - A3. ¿Las acciones son dirigidas por las metas del problema? (trabajo pasado)

- A4. ¿Buscamos una relación entre las condiciones y metas del problema?
  - A5. ¿El episodio es un conjunto coherente? En suma (considerando las preguntas A1 a A4), ¿las acciones tomadas por el resolutor del problema son razonables? ¿Hay algún comentario adicional u observaciones que parezcan apropiadas?
- **Episodio de exploración:** Tanto la estructura como el contenido sirven para distinguir la exploración del análisis. El análisis está generalmente bien estructurado, más bien mantienen unidos a las condiciones o metas del problema. La exploración, por otra parte, está menos estructurada y además es extraída del problema original. Esto es un comprensivo paseo a través del recorrido del problema, una búsqueda de información relevante que puede ser incorporada en la secuencia de análisis-planificación-implementación. Si uno se encuentra con nueva información durante la exploración, por ejemplo, se puede retornar a analizar en la espera de usar la información para entender mejor el problema.

En la fase de exploración de la resolución de problemas, se puede encontrar una variedad de heurísticas en la resolución de problemas –la exanimación de los problemas descritos, el uso de analogías y así sucesivamente. Las preguntas que permiten reconocer el episodio de exploración son las siguientes:

- E1. ¿El episodio es dirigido por las condiciones? ¿O por las metas?
  - E2. ¿La acción es dirigida o focalizada? ¿Esto es a propósito?
  - E3. ¿Hay alguna supervisión del proceso? ¿Cuáles son las consecuencias para la solución de la presencia o ausencia de la supervisión?
  - E4. ¿El episodio es un conjunto coherente? En suma (considerando las preguntas E1 a E3) ¿Las acciones tomadas por el resolutor son razonables? ¿Hay algún comentario adicional u observaciones que parezcan adecuadas?
- **Episodio de planificación e implementación:** Las principales preguntas de interés se ocupan si el plan está o no bien estructurado, si la implementación del plan es ordenado, y si hay supervisión de las evaluaciones del proceso por parte de los resolutores del problema, con retroalimentación para la planificación y evaluación en niveles locales y/o globales. Muchos de estos criterios son subjetivos. Por ejemplo, la ausencia de cualquier acto manifiesto de planificación no indica necesariamente la ausencia de un plan. Las preguntas que permiten reconocer el episodio de planificación e implementación son las siguientes:

- P11. ¿Hay evidencia de planificación en todo? ¿La planificación es abierta o la presencia de un plan debe ser deducido del propósito del comportamiento del sujeto?
  - P12. ¿El plan es relevante para la solución del problema? ¿Es apropiado? ¿Está bien estructurado?
  - P13. ¿El sujeto evalúa la tanto la calidad del plan como la relevancia, cuán adecuado es o la estructura? ¿Si es así, cómo hacer esas evaluaciones para compararlas con las sentencias en las preguntas P12?
  - P14. ¿Ejecutará el plan de una manera estructurada?
  - P15. ¿Hay una evaluación de la implementación (especialmente si las cosas van mal) en el nivel global o local?
  - P16. ¿Cuáles son las consecuencias para la solución de evaluaciones si ocurren si se producen, o de su ausencia si no se producen?
- **Episodio de verificación:** La naturaleza de los episodios en sí mismos es obvia. Las preguntas son las siguientes:
    - V1. ¿El resolutor del problema revisa la solución?
    - V2. ¿La solución es probada en alguna manera? ¿Si es así, cómo?
    - V3. ¿Hay alguna evaluación de la solución, o una evaluación del proceso, o una evaluación de confianza en el resultado?
- **Transición:** La unión entre los episodios es, en la mayoría de los casos, donde las decisiones gerenciales (o su ausencia) harán o romperán una solución. Se debe observar, sin embargo, que la presencia o ausencia de evaluación u otras gestiones manifiestas no necesariamente son tomadas para comenzar una buena o mala solución. En una solución de experto de un problema rutinario, por ejemplo, las únicas acciones que uno ve pueden ser la lectura e implementación. Eso explica, en parte, la naturaleza subjetiva de lo que sigue. Las preguntas que permiten reconocer las transiciones son las siguientes:
    - T1. ¿Hay alguna evaluación del estado actual de la solución? ¿Desde que el trayecto de una solución es abandonado, hay un intento por salvar o guardar las cosas que podrían ser valiosas?
    - T2. ¿Cuáles son los efectos locales y globales sobre la solución de la presencia o la ausencia de evaluación cuando el trabajo anterior es abandonado? ¿La acción (o falta de acción) tomada por el resolutor del problema es adecuada o necesaria?
    - T3. ¿Hay una evaluación a corto y largo plazo de los efectos sobre las soluciones de la toma de una dirección nueva, o simplemente se lanza a un nuevo enfoque?

- T4. ¿Cuáles son los efectos locales y globales sobre la solución de la presencia o la ausencia de evaluación cuando un nuevo camino es emprendido? ¿Esta acción es necesaria o adecuada?

En el proceso de resolución de problemas, influyen además otros factores que inciden notoriamente en el trabajo de alumnos y docentes. Barrantes (2006) identifica los siguientes factores:

- Los conocimientos previos del alumno.
- Las estrategias de resolución de problemas.
- El monitoreo y control del trabajo (el control del alumno de su trabajo que incluye el entendimiento del problema a resolver, el diseño de un plan a seguir, el monitoreo del proceso para decidir continuar o no por el mismo camino, ejecutar un plan y revisar el proceso de resolución).
- Las prácticas.
- También influyen tanto en los alumnos como en los profesores las creencias que tienen sobre las matemáticas, que inciden notablemente en la forma en que ambos abordan la resolución de un problema y la creencia que hay de las matemáticas a nivel social, agrupando estas creencias en tres categorías: lo que es posible aprender, lo que es deseable aprender y cuál es el mejor método para enseñar matemáticas.

En la tercera columna, se encuentran los episodios de Artz y Armour-Thomas (1992), cuyo estudio se centraba en el estudio de los procesos cognitivos y metacognitivos de 27 alumnos de séptimo grado que trabajaban en pequeños grupos en la resolución de un problema. Su estudio se sustenta principalmente en las ideas de Pólya, Schoenfeld y los niveles cognitivos y metacognitivos de los procesos estudiados dentro de la psicología cognitiva. Partiendo de los episodios de Schoenfeld y de las conductas observadas, realizaron cambios en favor de los propósitos de su investigación, añadiendo los episodios de 'entender el problema' (episodio reconocido por Pólya como un momento muy importante en el proceso de resolución de un problema) debido a los frecuentes comentarios realizados por los estudiantes referentes a las condiciones del problema y el episodio de 'observación-escucha' debido a las interacciones verbales que suceden en el trabajo en grupo, momento en el que algunos alumnos por momento observan y escuchan a otros. Los ocho episodios de Artz y Armour-Thomas son los siguientes: leer, entender, analizar, explorar, planificar, implementar, verificar, observar-escuchar.

El análisis de las conductas de resolución de problemas de los pequeños grupos de trabajo, proporcionaron evidencias de que los procesos metacognitivos y cognitivos se diferencian uno del otro. Esta diferenciación trae consigo implicaciones importantes en los niveles teóricos y prácticos. Esto los lleva a la necesidad de estudiar en una futura investigación cómo la

interrelación entre ambos procesos afecta la eficiencia y eficacia de la resolución de problemas.

El trabajo realizado les permitió observar la aparición y frecuencia de los episodios heurísticos en el trabajo desarrollado por los grupos observados. Los datos mostraron que en las sesiones de resolución de problemas, los estudiantes utilizan las heurísticas de manera intermitente, volviendo a usarlas una y otra vez a lo largo del proceso de resolución.

En la cuarta columna observamos los episodios de Codina y Castro (2006), estos investigadores realizaron un estudio en el que analizaban el trabajo colaborativo de parejas de resolutores resolviendo problemas de optimización mediados por la inclusión de Applets interactivos. Si bien mantienen una estructura similar a los episodios de Schoenfeld (1985), agregan uno de los episodios definidos por Artz y Armour-Thomas (op. cit.), incorporan a su vez elementos propios de sus investigaciones previas relacionadas fundamentalmente con los conceptos de interactividad e interacción. Así mismo, delimitan cada episodio mediante indicadores que son comportamientos específicos que el investigador puede observar y que le permiten reconocer cada episodio.

Podemos ver que no existe una manera única de clasificar los episodios en la resolución de problemas. La clasificación o determinación de estos episodios dependen tanto del contexto a observar como de los objetivos del estudio. Por lo tanto, podemos adaptar los episodios a nuestro contexto, pero manteniendo la esencia de los episodios como momentos necesarios en un entorno de resolución de problemas y que tienen aspectos comunes independientes del contexto en el que se observen, sea que se presenten con o sin un orden lineal, de manera única o repetida en el tiempo.

Así mismo, podemos resaltar que la investigación en el área de la resolución de problemas abre un sin número de caminos para ser estudiados profundamente y que los episodios de Schoenfeld son una base sólida desde la cual podemos adentrarnos en algunos de los distintos aspectos de la resolución de problemas (Jonassen, 2010).

### **2.3. Juegos de estrategia y resolución de problemas**

Existe un creciente interés en el campo de la didáctica de las matemáticas en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas, interés que en ocasiones se vincula con el hecho de utilizar juegos en el aula. Esta importancia radica en la atribución al énfasis en la resolución de problemas en los actuales currículum matemáticos, "lo que ha llevado a considerar los juegos de estrategia como elementos claves en este proceso y a

usarlos, no sólo para introducir contenidos, sino también, y muy especialmente, para favorecer distintos aspectos (procesos, fases...) de la resolución de problemas, así pues constituyen un instrumento metodológico importante para su enseñanza” (Gómez Chacón, 1992. p.7).

El objetivo principal de la inclusión de la resolución de problemas en el currículum de Matemáticas “es que el alumnado aprenda a pensar matemáticamente...La habilidad para resolver problemas se desarrolla familiarizándose con los procesos adecuados, y éstos son más importantes que los resultados.” (Gómez Chacón, op. cit., p.9). Se entiende en este marco por problema una situación para la cual la persona no tiene un algoritmo que garantice su solución, y debe elaborar una estrategia de solución.

En el actual currículum de matemáticas de Catalunya (Generalitat de Catalunya, 2007), se describen los objetivos de la resolución de problemas en primaria:

- Leer y entender el enunciado, generar preguntas relacionadas con la situación problemática, planificar y desarrollar estrategias de resolución y verificar la validez de las soluciones.
- Obtener, interpretar y generar información con contenido matemático.
- Utilizar las técnicas matemáticas básicas (para contar, operar medir, situarse en el espacio, organizar y analizar datos) y los instrumentos (calculadoras, TIC, de dibujo y medida) para hacer matemáticas.
- Interpretar y representar a través de palabras, dibujos, símbolos, números y materiales, expresiones, procesos y resultados matemáticos.
- Comunicar el trabajo y los descubrimientos a los otros, tanto oralmente como por escrito, utilizando de manera progresiva el lenguaje matemático.

En el programa curricular chileno (MINEDUC, 2005) también encontramos una lista de objetivos a conseguir con la resolución de problema, eje transversal de la enseñanza matemática e inherente a cada uno de los contenidos matemáticos deseables en la educación primaria chilena:

- Explorar y probar estrategias diversas para resolver problemas.
- Desarrollar procesos ordenados y sistemáticos para la resolución de problemas o desafíos matemáticos.
- Sistematizar procedimientos y resultados.
- Comunicar procesos, resultados y conclusiones, incorporando, progresivamente, el uso de lenguaje matemático.
- Justificar, argumentar y fundamentar, tanto resultados como procedimientos.

- Buscar y establecer regularidades y patrones, tanto en el ámbito de los números como del espacio y la geometría.
- Trabajar con materiales manipulativos concretos y simbólicos.
- Desarrollar trabajos individuales y colectivos, en los que discutan tanto sobre procedimientos y resultados como sobre el sentido de las actividades.
- Proponer nuevas preguntas y problemas.
- Detectar y corregir sus errores.

Para conseguir estos objetivos, los docentes deben plantear actividades de aprendizaje “como juegos, debates, investigaciones, exposiciones...que contribuyen a generar aprendizajes significativos y a desarrollar la confianza en la propia capacidad para enfrentar con éxito nuevos desafíos cognitivos... Los problemas y situaciones deben provenir de la vida cotidiana de los niños y niñas, de sus juegos, de lecturas e informaciones históricas, de actualidad, de otras ramas del conocimiento (ciencias, artes, tecnología, etc.), que tengan sentido para ellos” (MINEDUC, 2004)

Los juegos de estrategia como instrumento metodológico para la creación de un ambiente de resolución de problemas, puede permitir en el alumnado el desarrollo de heurísticas propias de la resolución de problemas. Logrando muchos de los objetivos mencionados más arriba.

El objetivo de la heurística es “comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso” (Pólya, 1979, p.103).

En la resolución de un juego de estrategia, las heurísticas requieren el mismo cuidado y análisis que la resolución de problemas. “La semejanza de esta estructura permite comenzar a ejercitar en unos y en otra las mismas herramientas, idénticos procesos de pensamiento que son útiles en los desarrollos matemáticos” (Gómez Chacón, op. cit., p.18).

Llegando a este punto es posible establecer un paralelismo entre el proceso de resolución de un problema típicamente matemático y el de la resolución de un juego de estrategia. En nuestro primer estudio piloto de carácter exploratorio, realizamos un paralelo entre las fases de resolución de un problema de Pólya (1979) y las fases de resolución de un juego (Edo, 2002). Debemos destacar que las fases utilizadas por Edo formaban parte del proceso de resolución de diversos juegos matemáticos que no eran específicamente de estrategia como el que se analizó en el mencionado estudio piloto.

Corbalán (1994) en su libro “Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato”, realiza una equivalencia entre las características del juego y las características de las matemáticas. Señala que si observamos el

modelo axiomático puesto en marcha por Euclides “trata de un pequeño número de resultados “evidentes” por sí mismos (axiomas y postulados) y una serie de leyes fijas y explícitas (reglas de inferencia) a partir de las cuales se conforma un cuerpo doctrinal que ha perdurado en las matemáticas hasta la crisis de fundamentos de finales del siglo pasado” (Corbalán, op. cit., p.19).

Lo que expone Corbalán (1994) se podría sintetizar de la siguiente forma:

<b>Matemática</b>	<b>Juego</b>
Axiomas de la teoría	Descripción de la o las situaciones iniciales
Reglas de inferencia	Reglas de juego
Pasos de una deducción	Jugadas producidas en el desarrollo del juego
Aplicación de resultados parciales	Estrategias parciales o tipos de juegos
Obtención de nuevos teoremas o resultados	Obtención de estrategias generales de juego

**Cuadro3:** Correspondencia entre el modelo matemático de resolución de un problema y el modelo de resolución de un juego a partir de Corbalán (2004).

Por otra parte, es posible relacionar las fases de resolución de un problema (Polya, 1979) citadas en el punto anterior, con las fases de resolución de un juego.

A la hora de hacer un paralelo con la resolución de un juego, debemos considerar que este proceso puede ser alternado y repetitivo. De acuerdo con Edo (2002) en el aprendizaje de un nuevo juego, se pueden establecer en el proceso ideal las siguientes secuencias.

- Fases de aprendizaje De un juego (Edo) {
- a) Comprensión de los objetivos del juego y sus normas.
  - b) Desarrollo de la partida aplicando el plan imaginado
  - c) Validación de los resultados y reflexión de lo que ha pasado.

En el cuadro 4 que se presenta a continuación, se muestra el paralelismo entre las fases de la resolución de un problema de matemática en el ámbito de la educación primaria y las fases de la resolución de un juego:

<b>Fases de resolución de problemas en primaria (Pólya)</b>	<b>Fases de aprendizaje de un juego (Edo)</b>
I. Comprensión del problema.	a) Comprensión de los objetivos del juego y de las normas que se deben seguir.
II. Diseño y ejecución de un plan general o de planes parciales sucesivos.	b) Desarrollo de una serie de partidas: experimentación, diseño y experimentación de planes parciales.
III. Verificación de la solución obtenida.	c) Validación de los resultados y análisis de lo que ha pasado.

**Cuadro 4:** “Relación entre las fases de resolución de un problema y las fases de aprendizaje de un juego”. Edo, M. (2002, p.78).

De acuerdo con Edo, es importante resaltar que tanto “en el juego como en la resolución de problemas, las secuencias de las fases de aprendizaje de un juego en primaria no aparece de manera ordenada y lineal, sino que se requieren diversas partidas en las cuales estas fases se repitan de manera circular con el objetivo de llegar a ser un buen aprendizaje de la estructura general” (Edo, 2002, p.68). Por lo mismo, estas fases pueden aparecer y reaparecer varias veces en el proceso.

Siguiendo con la idea de Edo, se puede apreciar el paralelismo entre ambos tipos de situación problemática, ya que los juegos matemáticos, en nuestro caso de estrategia, permiten desarrollar habilidades de resolución de problemas, siempre y cuando sean trabajados con un objetivo claro y dentro de un entorno de resolución de problemas. Debemos tener claro también que “en el proceso de conocimiento y apropiación de un nuevo juego aparecen unas fases o momentos claves que presentan un paralelismo con las fases de resolución de un problema...en primaria, tanto en la resolución de problemas como en el proceso de apropiación de un juego estas fases no aparecen una única vez y de manera ordenada y lineal, sino que se observan ciclos de apariciones de las fases que se cierran cuando el jugador domina el juego o resuelve definitivamente el problema” (Edo, op. cit., p.69).

Gómez-Chacón (1992), realiza una propuesta similar en la que presenta las similitudes entre las fases de resolución de problemas de Pólya y las fases de la resolución de un juego de estrategia que se presenta en el cuadro 5:

## HEURÍSTICAS

De la resolución de problemas	Fases de Resolución de problemas de Pólya	De los juegos de estrategia
Comprender qué piden, qué encontrar, qué datos tengo.	<b>1. Comprensión del problema.</b>	Comprender los requisitos, los movimientos y cómo se gana.
¿Existe un problema análogo cuya solución conozco?  Formular conjeturas.  Seleccionar algunas estrategias.	<b>2. Diseño de un plan.</b>	¿He jugado algún juego similar?  Seleccionar posibles estrategias.
Examinar la validez de cada conjetura.	<b>3. Ejecución de un plan.</b>	¿Qué movimientos de ataque u oposición hacen que el juego progrese?
Si has resuelto un problema: ¿por qué se trata de una estrategia general? ¿Puede usarse esta estrategia en otros problemas?	<b>4. Verificación de la solución obtenida.</b>	Si la estrategia seleccionada es siempre ganadora, ¿es una estrategia general? ¿Funciona esta estrategia con otros juegos y con otros componentes?

**Cuadro 5:** “Semejanza de las fases de resolución de un juego y la de un genuino problema matemático basados en las cuatro fases de Pólya” (Gómez-Chacón, 1992, p.19).

También Miguel de Guzmán (2005) propone algunas directrices heurísticas basadas en juegos:

1. Antes de hacer trataré de entender. En esta etapa el resolutor debe hacerse las siguientes preguntas: ¿sé de qué va el juego? ¿cómo funcionan las diferentes partes en el juego? (forma del tablero, reglas, funcionamiento de las fichas, etc.).
2. Tramaré una estrategia. En esta etapa el resolutor debe buscar conexiones con otros elementos conocidos, construir un juego más sencillo, construir un plan de ataque.
3. Miraré si mi estrategia me lleva al final. En esta etapa el resolutor debe poner en práctica el plan creado.
4. Sacaré jugo al juego. Es importante una vez resuelto el juego mirar a fondo la solución del juego, aprovechar la solución para asimilar la experiencia.

Como podemos ver, los autores mencionados tienen una idea común acerca de la potencialidad del juego como herramienta metodológica para el desarrollo de habilidades de resolución de problemas. Las fases de resolución de un juego, equivalentes a las fases de resolución de problemas de Pólya, son

observables y deben ser tratadas y estudiadas con la misma seriedad y cuidado.

Teniendo en cuenta los aspectos mencionados anteriormente y sin olvidar que nuestra investigación está inserta en el contexto escolar, entendemos entonces que "un problema escolar de matemáticas es una tarea de contenido matemático, cuyo enunciado es significativo para el alumno al que se ha planteado, que éste desea abordar, y para el cual no ha producido sentido" (Puig, 1996, p.28).

Sin embargo falta continuar aportando evidencias empíricas a favor del juego en los diferentes niveles escolares y en distintos contextos y aspectos. También cabe destacar que sea cual sea el nivel en el que se desarrollen estas actividades pedagógicas, la fase más importante para el proceso de matematización es la de reflexión sobre el proceso y los descubrimientos realizados. Al respecto, Corbalán (1994), afirma que "dentro de la matematización de situaciones (en general de la resolución de problemas) es de importancia fundamental la formulación de hipótesis, y su comprobación posterior. Ese proceso es muy fácil de realizar con juegos y su puesta en práctica inmediata para su contraste (...) a las motivaciones habituales para desear resolver un problema se añade el hecho de que si utilizamos buenas técnicas se ganan las partidas. Y ello constituye una motivación profunda de actuación para todas las edades" (Corbalán, op. cit. p.65).

En lo que respecta a la presente investigación, Puig (1996) señala, que no todas las situaciones escolares en las que se resuelven problemas, pueden tratarse o ser analizadas de la misma manera que los problemas de matemáticas. Por lo mismo pensamos que el uso de juegos de estrategia en el aula debe ser tratado bajo un enfoque de resolución, es decir, que para lograr que esta tarea sea efectiva para desarrollar habilidades de resolución de problemas, debe tener en cuenta los componentes que lo integran, lo que según Kilpatrick (1978) son: el *problema*, el *alumno*, y el *profesor*. Aunque el análisis de estos componentes no es el objetivo de la presente investigación, sí forman parte de las actividades propuestas.

## **CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA.**

### **3.0 Introducción**

La investigación que proponemos es de carácter exploratorio y comparativo. De carácter exploratorio porque continuamos con la búsqueda de evidencias de procesos de resolución de problemas durante el desarrollo de juegos de estrategia y que estos procedimientos pueden ser observados tanto en la resolución de un juego como de un problema.

Es de carácter comparativo porque buscamos más datos empíricos que nos permita confirmar que ambos tipos de tareas, resolución de los juegos de estrategia y resolución de problemas, comparten procesos comunes, por lo que el uso de los juegos matemáticos, y especialmente en este caso los juegos que poseen alguna estrategia ganadora, puede ser una herramienta metodológica útil para iniciar a los alumnos en la resolución de problemas.

En el presente capítulo se presenta el contexto y la población en estudio, la situación didáctica diseñada y las tareas seleccionadas para ser desarrolladas. Se presentan también las características de los participantes y la organización de las sesiones objetos de observación.

Se describe el proceso de obtención de los datos y la elaboración de los protocolos, se finaliza este apartado con el análisis de dichos protocolos.

### **3.1. Contexto y población del estudio**

En el presente estudio participaron alumnos de un centro educativo religioso concertado del área metropolitana de Barcelona. Este colegio atiende a una población de nivel socio-económico medio bajo y con un alto porcentaje de alumnos inmigrantes, especialmente en las aulas implicadas en la investigación. Los datos fueron tomados durante el año académico 2009-2010. Los alumnos que participan en este estudio cursaban quinto de primaria.

Dentro de los contenidos de la educación de las matemáticas planificados por el centro en los cursos de quinto de primaria, se lleva a cabo un programa de cálculo mental y de resolución de problemas. El programa contempla, entre otras actividades, sesiones de juegos ya sean de estrategia o que contienen alguna estrategia favorecedora como herramienta metodológica para el desarrollo de habilidades de cálculo mental y de resolución de problemas.

El programa se aplica de 1º a 6º de primaria y en cada nivel se selecciona un juego. Este programa se desarrolla a lo largo de todo el curso, una vez por semana y cuenta con actividades escritas y manipulativas.

En este contexto se han seleccionado seis grupos de 5º de primaria de cuatro alumnos cada uno, en total participaron 24 alumnos<sup>3</sup> (12 niños y 12 niñas). La maestra de matemáticas ha formado los grupos seleccionándolos según su habilidad verbal, con el fin de obtener datos de mayor calidad gracias a la interacción que este tipo de alumnos propicia. Cada grupo está compuesto por cuatro alumnos y alumnas dispuestas en parejas (un niño y una niña). El desarrollo de las actividades se realizó en una sala independiente para poder obtener una mejor calidad de registro.

## **3.2. Situación didáctica y selección de tareas**

En el programa de cálculo mental y de resolución de problemas anteriormente mencionado, se encuentra el desarrollo de problemas y juegos tanto de cálculo mental como de estrategia, este programa se desarrolla anualmente en la asignatura de educación matemática.

Nuestra intervención en este programa se llevó a cabo en sesiones de aproximadamente 45 minutos cada una, en donde los alumnos y alumnas resolvieron dos juegos de estrategia y dos problemas.

### **3.2.1. Diseño y selección de tareas**

Tanto los dos problemas (Problema A y Problema B) como los dos juegos de estrategia (Juego A y Juego B), fueron diseñados y aplicados de modo que exista una relación de contenido entre ellos. De esta manera el contenido del Juego A se relacionan con el contenido del problema A y el Juego B con el problema B.

Para cada juego de estrategia se realizaron dos sesiones de 45 minutos aproximadamente y para cada problema una sesión de 45 minutos en el caso del Problema A y de 20 minutos en el caso del Problema B.

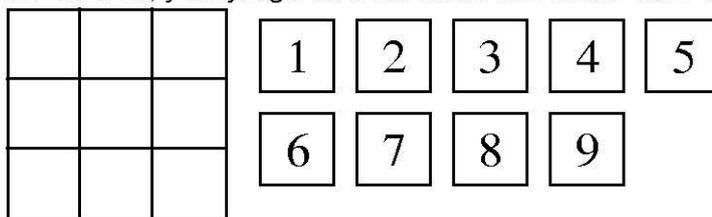
Los juegos y problemas seleccionados son los siguientes:

---

<sup>3</sup> En este estudio se utiliza la palabra alumnos incluyendo los dos géneros, con el objetivo de hacer más fluida la lectura y escritura.

## JUEGO A: "Cerrar quince"

**Material:** Un tablero de 3 x3, y un juego de 9 cartones con cifras del 1 al 9.



**Número de jugadores:** Dos jugadores si juegan individualmente o cuatro jugadores si juegan en parejas.

**Reglas:** Se dejan todos los cartones boca arriba. Cada jugador, en su turno, escoge uno y lo coloca sobre el tablero en la posición que quiera. El primer jugador o pareja que al colocar un cartón consiga sumar "15" en vertical, horizontal o diagonal gana el juego.

### **Actividad:**

- 1 Jugar varias partidas intentando ganar todas las veces que sea posible.
- 2 Buscad en pareja una forma de ganar siempre.
- 3 ¿Quién gana el juego, la pareja que comienza o la que juega en segundo lugar?  
¿Por qué?
- 4 Explicad una estrategia que os permita ganar siempre. Argumentad por qué.
- 5 Imaginad que la primera jugada tiene que ser distinta de la que habéis escogido antes. ¿Podéis encontrar otra forma para ganar siempre? Explicadla.

**Estrategia ganadora:** En este juego de estrategia, no interviene el azar, por lo que debe ser analizado para descubrir la/s estrategia/s ganadora/s. Las estrategias son las siguientes: **a)** La estrategia más directa para ganar es la siguiente: Si el primer jugador coloca el 5 en el centro del tablero puede ganar a la siguiente jugada. **b)** Una segunda estrategia ganadora para el primer jugador consiste en colocar el 5 en uno de los vértices. **c)** Una tercera estrategia para el primer jugador consiste en situar el 5 en el centro de un lado del tablero. **d)** Existe también la posibilidad de hallar una estrategia ganadora, para el primer jugador, colocando una ficha en el centro del tablero distinta del cinco.

**PROBLEMA A: "Suma de números" Enunciado:** ¿Cómo se puede encontrar la suma de todos los números del 1 al 20 sin sumarlos todos uno por uno? Explicad cómo lo haríais.

¿Podríais hacerlo de la misma manera con los números del 1 al 25? Explicad cómo lo haríais.

**Estrategia de resolución:** Para resolver este problema se deben colocar los números del 1 al 20 de manera horizontal. De esta manera, se pueden observar los números y buscar algún tipo de relación entre ellos. Se suman los números extremos desde afuera hacia adentro:  $1+20$ ,  $2+19$ ,  $3+18$ ,  $4+17$ ,  $5+16$ ,

6+15, 7+14, 8+13, 9+12, 10+11, de manera que se formen diez parejas que suman 21, luego se multiplica este resultado por el número de parejas:  $21 \times 10 = 210$ , llegando al resultado de que la suma de los números consecutivos del 1 al 20 es 210.

En la segunda parte, en donde se debe explicar si se pueden sumar los números del 1 al 25 utilizando el mismo procedimiento que en el caso anterior, se debería llegar a la conclusión de que sí se puede utilizar, pero en este caso al sobrar un número no podemos hacer parejas exactas como en el caso anterior, por lo que el número sobrante se debe agregar a la suma de la parejas para obtener el resultado: 1+25, 2+24, 3+23, 4+22, 5+21, 6+20, 7+19, 8+18, 9+17, 10+16, 11+15, 12+14, y sobra el 13. Entonces,  $26 \times 12 = 312$ ;  $312 + 13 = 325$ , llegando al resultado de que la suma de los números consecutivos del 1 al 25 es 325.

<b>JUEGO B: “El 10 Gana”</b>
<p><b>Material:</b> 10 fichas ordenadas de cualquier manera.</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;">  </div> <p><b>Número de jugadores:</b> Dos jugadores si juegan individualmente o cuatro jugadores si juegan en parejas.</p> <p><b>Reglas:</b> Cada jugador o pareja puede retirar, en su turno, 1 ó 2 fichas, según quiera. Gana el jugador que recoge la última ficha.</p>
<p><b>Actividad:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Jugar varias partidas intentando ganar todas las veces que sea posible.</li> <li>2. Buscad en pareja una forma de ganar siempre.</li> <li>3. ¿Quién gana el juego, la pareja que comienza o la que juega en segundo lugar? ¿Por qué?</li> <li>4. Explicad una estrategia que os permita ganar siempre. Argumentad por qué.</li> <li>5. Si en vez de 10 fichas tenemos 14 ¿Cómo habría que jugar para ganar? ¿Y si el número de fichas fuera 12? Explicad.</li> </ol>

**Estrategia ganadora:** Existe una estrategia que permite ganar al primer jugador. Para ello debe sacar 1 ficha en la primera jugada y luego completar grupos de 3 fichas, es decir, si el segundo saca 3, el primero saca 1 y viceversa. La estrategia general para cualquier número de fichas consiste en dividir el total por 3 y coger el resto en la primera jugada. Por lo tanto, si el número de ficha no es múltiplo de 3, existe la estrategia para el primer jugador, y si es múltiplo de 3 la estrategia ganadora es para el segundo jugador.

#### **PROBLEMA B: “Números consecutivos”**

**Enunciado:** El número 21 puede expresarse como:  $6+7+8$ . ¿Cuáles son los números que se pueden expresar como suma de tres números consecutivos? Explicad por qué son estos números.

**Estrategia de resolución:** Para resolver este problema se deben buscar todos los tríos de números consecutivos y resolver la suma. Podría realizarse de la siguiente manera:

0+1+2=3  
 1+2+3=6  
 2+3+4=9  
 3+4+5=12  
 4+5+6=15  
 5+6+7=18  
 6+7+8=21  
 etc.

se deben realizar los tríos aditivos necesarios que les permitan encontrar alguna relación entre los resultados de las adiciones. Se observa que la explicación radica en que las sumas de los tríos de números consecutivos son múltiplos de 3. Se podría llegar a la siguiente generalización:  $n+(n+1)+(n+2)=3n+3$ .

### 3.3. Participantes y organización de la actividad

En las sesiones de aula que se destinan a practicar este juego, los alumnos son divididos en grupos de cuatro compañeros, teniendo en cuenta el mismo número de participantes según el género, jugando una pareja contra otra.

Los grupos que participaron en nuestro estudio fueron seleccionados por la maestra de matemáticas teniendo en cuenta que los integrantes del grupo tuvieran ciertas habilidades comunicativas y motivacionales para participar activamente en las discusiones de grupo.

En el estudio participó un adulto (la investigadora) y seis parejas de alumnos<sup>4</sup> organizadas en tres grupos como se presentan a en el siguiente cuadro:

Grupos	Alumnos
Grupo 1: (5° A)	Pareja 1: Carmen y Germán Pareja 2: Nadia y Rubén
Grupo 2: (5° B)	Pareja 3: Eric y Ana Pareja 4: Sara y Raúl
Grupo 3: (5° C)	Pareja 5: Sofía y Nicolás Pareja 6: Marta y José

**Cuadro 6:** Grupos participantes en la investigación

Estas actividades fueron el elemento metodológico central para la obtención de datos durante seis sesiones desarrolladas en seis semanas (una sesión por semana).

<sup>4</sup> Los nombres de los alumnos participantes han sido modificados.

Los juegos y problemas fueron aplicados como se señalan en el recuadro siguiente con la finalidad de poder observar si existe o no alguna relación entre ambos tipos de resolución.

<b>Grupo 1 y 2</b>	<b>Grupo 3 y 4</b>
Problema A	Problema A
Juego A	Juego A
Problema B	Juego B
Juego B	Problema B

**Cuadro 7:** Grupos participantes en la investigación

Tanto el adulto que intervino en las sesiones registradas como los maestros que dirigen la clase completa, orientaron la gestión del aula mediante una pauta didáctica.

Esta pauta fue diseñada por el equipo de investigación a partir del análisis de los resultados de la fase piloto (2006-2007) y rediseñada a partir de los resultados en la gestión del adulto a partir de los resultados obtenidos en la segunda etapa de investigación (2008-2009) (Baeza, 2008).

### **PAUTA DIDÁCTICA**

- Se les entregará las hojas a los alumnos con los enunciados de los juegos y de los problemas como se mostrará más adelante.
- Se explicarán las normas del juego y se contestará a las dudas de los participantes.
- Se dará de 10 a 15 minutos para que los alumnos realicen varias partidas con el objetivo de familiarizarse con el juego.
- Después se pedirá que busquen la manera de ganar siempre o de no perder.
- A continuación los alumnos podrán ensayar jugadas y buscar estrategias en la hoja que se las entregado. En este momento se introduce el término de estrategia ganadora.
- No incidiremos con ayudas ni interrupciones durante las jugadas a menos que el grupo diga que ha encontrado la estrategia ganadora, tengan alguna duda respecto a las normas del juego o quieran explicar algún descubrimiento.
- Cuando el grupo o una pareja diga que ha encontrado la estrategia ganadora (o que saben cómo ganar) el profesor jugará con los alumnos, el profesor les dejara escoger si quieren empezar, o no, y si empieza él utilizará una de las estrategias ganadoras (exceptuando el 5 en el centro, en el caso del juego “Cerrar quinces”), sea que los alumnos ganen o no, el profesor les preguntará qué ha pasado y les dará tiempo para explicarse.
- En el caso de los problemas, cuando los alumnos crean que han resuelto los

problemas podrán explicar y ejemplificar sus resultados a la maestra.

- Cuando acaben de verbalizar es importante preguntarles si tienen todo claro, si alguno lo hubiera explicado de otra manera o si alguien quiere agregar algo más a lo ya dicho.
- Si después de 20 minutos los alumnos no pueden avanzar podemos preguntarles qué han descubierto hasta ese momento.
- A continuación jugar con ellos utilizando una de las estrategias ganadoras y volver a preguntarles qué han descubierto en las nuevas partidas realizadas o en las soluciones obtenidas en el proceso de resolución de problema.

Para gestionar la resolución de problemas, se procederá de manera similar, otorgándoles a los alumnos el tiempo necesario para encontrar diferentes caminos de resolución sin interrumpirlos ni entregarles ayudas innecesarias y permitiéndoles argumentar sus hallazgos y comprobarlos mediante ejemplos propios.

### **3.4. Obtención de datos y elaboración de protocolos**

#### **3.4.1. Selección de datos**

En una sala independiente a la del resto de sus compañeros trabajaron dos grupos por aula, estas sesiones fueron gestionadas por la investigadora mientras que los maestros estaban a cargo del resto de la clase realizando las mismas actividades y en conocimiento de la pauta didáctica para su libre empleo en la actividad.

Las sesiones tuvieron una duración aproximada de 45 minutos cada una y fueron registradas en video y en audio. A los participantes se les entregaron las hojas de actividades para que pudieran registrar sus hallazgos y explicar las estrategias o soluciones encontradas.

#### **3.4.2. Elaboración de los protocolos**

Para el análisis de los datos se procedió a la transcripción de los registros audiovisuales generando el protocolo de análisis. Un protocolo, según Schoenfeld (1981), es la producción de los registros realizados, son rastros de una secuencia de las acciones tomadas por los individuos en el proceso de resolución de un problema. El protocolo está sujeto generalmente a un análisis cualitativo en donde se busca una correlación entre ciertos tipos de comportamiento.

El protocolo fue creado siguiendo las siguientes acciones:

1. Transcripción de todas las intervenciones orales.
2. Puntuación específica para pausas e interrupciones.
3. Numeración de las intervenciones con el fin de hacer más fluida la lectura y búsqueda de segmentos importantes a la hora del análisis.
4. Utilización de la letra cursiva para la transcripción literal y letra normal para las aclaraciones.
5. Utilización de corchetes para la descripción de movimientos realizados por los alumnos, a quién se dirigen y aclaraciones implícitas en el diálogo.
6. En el caso de los juegos se agregaron ilustraciones visuales para mostrar los movimientos realizados por los alumnos.
7. En el caso de las actividades en que participaron por momentos en parejas y no en grupo, se realizaron divisiones en el protocolo para facilitar la lectura del proceso de cada pareja y ver la continuación o cambios en los mismos.
8. Una vez conformado el protocolo se revisaron nuevamente las intervenciones y se eliminaron del mismo los momentos no relacionados con la tarea y/o con el grupo referente a cada protocolo, con el fin de facilitar el análisis de los mismos.

A continuación se presentan extractos del protocolo 1 y 3 a modo de ejemplo de los puntos anteriormente señalados:

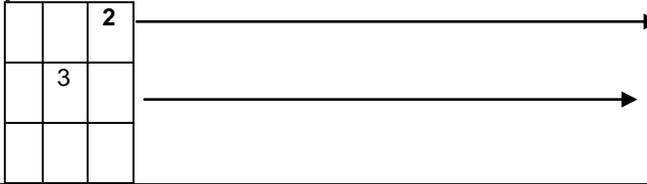
## Ejemplos: Protocolo 1

Separación de las intervenciones por parejas y en conjunto: en la columna 'Protocolo P1': se muestran las intervenciones realizadas por la Pareja 1 (P1) independiente de la Pareja 2 (P2), lo mismo sucede en la columna 'Protocolo 1 P2, en donde se muestran la situación inversa.

En la columna 'protocolo P1 y P2', se muestran las intervenciones realizadas por el grupo en conjunto.

Nº	Sujeto	Protocolo P1	Protocolo P1 y P2	Protocolo P2	
	Rubén			Por 10, por la mitad, lo hemos multiplicado todo por la suma del resultado que es 21x10 que es el número de las operaciones [diez parejas de 21 cada una].	Transcripción literal → Aclaración implícita en el diálogo.
	Nadia			¿Qué es...? [Pide a Rubén que le repita lo que ha dicho para escribirlo en la hoja].	→ A quien se dirige.
	Rubén			Que es el número de todas las operaciones que hemos hecho.	Transcripción literal
	Maestra		Por favor hagan una buena letra para que lo pueda entender cuando lo lea.		Segmento eliminado, no relacionado con la resolución en sí misma.
	Carmen	Da todo 21, vale [han sumado los números de la misma manera que P2].			Transcripción literal → Aclaración implícita en el diálogo.

## Ejemplos: Protocolo 2

	<b>Germán</b>	Porque si pones el 7 en cualquier lado da 10 [ $3+7=10$ , en la próxima jugada la otra pareja ganaría colocando el 5].	
	<b>Rubén</b>	Sólo podemos poner un 1 o un 2 digo yo.	
	<b>Nadia</b>	¿Cuál?	
	<b>Rubén</b>	El 2 [ <i>Coloca el 2 en la esquina superior derecha</i> ].	
	<b>Germán</b>	Necesitamos un 10, no hay, así que...	
	<b>Carmen</b>	Ponemos el 5 aquí [ <i>en el centro de la primera fila</i> ].	

### **3.5. Análisis de datos**

Con el fin de lograr el objetivo general: “Comparar los procesos de resolución de problemas y de juegos de estrategia buscando evidencias que permitan establecer relaciones entre estos procesos” y sus correspondientes objetivos específicos, se realiza el análisis de los datos obtenidos a partir de las modificaciones del instrumento de análisis elaborado en el trabajo de investigación anterior (Baeza, 2008).

En el presente apartado, se da a conocer tanto el instrumento de análisis como el proceso llevado a cabo para su elaboración, la determinación de los episodios y la determinación de los indicadores de cada episodio, para analizar el proceso de resolución de los juegos de estrategia y problemas diseñados para la presente investigación.

También, se organizan los datos en tablas para la cuantificación de los mismos. Estos datos son representados en Mapas de tiempo, cuyo objetivo es entregar una visión general en el tiempo de la información obtenida para su posterior análisis.

Una vez elaboradas estas tablas y mapas de tiempo, se analiza la información obtenida y se realiza una comparación entre ambos procesos de resolución: juegos de estrategia y problemas.

A partir del instrumento elaborado anteriormente en nuestro primer estudio (Baeza, 2008), se comenzó primero por identificar los episodios presentes en los protocolos. El proceso de construcción es el que se describe a continuación:

#### **3.5.1. Proceso de construcción del instrumento de análisis**

El instrumento de análisis utilizado en el presente estudio, como se mencionó anteriormente, tuvo su origen en el instrumento elaborado en el trabajo de investigación, correspondiente al programa de Doctorado en didáctica de las matemáticas de la UAB (Baeza, 2008).

Sin embargo, fue necesario modificar dicho instrumento para que fuera pertinente tanto para el análisis de problemas como de los juegos de estrategia. Recordamos que el anterior instrumento se elaboró tomando en cuenta sólo el análisis de juegos de estrategia.

El procedimiento llevado a cabo fue similar a la elaboración del anterior y se presenta detalladamente en el Capítulo 4 del presente documento.

Cabe destacar que en el presente caso, se revisaron reiteradamente los protocolos obtenidos, primero uno por uno y luego comparándolos entre sí, primero con el fin de identificar los episodios en cada protocolo y luego identificando episodios comunes entre ambos tipos de tarea: juegos de estrategia y problemas.

### **3.5.2. Determinación de los episodios e indicadores.**

Una primera etapa de análisis es la modificación del instrumento de análisis en sí mismo. Después de un profundo estudio de los episodios descritos por Schoenfeld (1985), una exhaustiva revisión de investigaciones similares con especial atención en el ámbito de la resolución de problemas en primaria (Artz y Thomas (1992); Codina (2015); Codina y Castro (2006); Mallart (2008), y de los datos obtenidos en estudios anteriores, uno piloto y el otro cuyo objetivo fue la elaboración de un instrumento de análisis adecuado para estudiar procesos de resolución a partir de juegos de estrategia en el aula, concretamente en quinto de primaria (Baeza, 2008). Se ha elaborado un instrumento de análisis que contemplaba los siguientes episodios:

- Episodio de Apropriación de reglas y objetivos.
- Episodio de Exploración y análisis.
- Episodio de Planificación e Implementación.
- Episodio de Verificación y argumentación.
- Momentos de Transición.

Tomando como guía este instrumento, se recogieron los datos para la presente investigación. A partir de estos datos se decidió seguir profundizando en los episodios de modo que cada uno de ellos sea la representación más exacta posible de los procesos tanto de resolución de problemas como de resolución de los juegos de estrategia.

Cada uno de estos episodios cuenta con una serie de indicadores que los describen e identifican. El procedimiento para determinar estos indicadores fue la revisión y observación repetida de los registros obtenidos. Primero se comenzó con la observación de los procesos de resolución del juego de estrategia A, y luego se compararon con los procesos de resolución del problema A. De esta manera, podíamos comenzar a vislumbrar la relación existente o no entre ambos tipos de resolución.

Posteriormente, se actuó de la misma manera con el juego B y el problema B. A partir de la observación de estos cuatro registros, y una vez determinados los episodios presentes, se determinaron los indicadores para cada uno de ellos.

Una vez realizada la primera determinación de indicadores, se volvieron a revisar los doce protocolos para asegurar que estos representaban fielmente los datos registrados.

Es importante señalar, que las modificaciones y delimitaciones realizadas a los episodios de Schoenfeld y al instrumento de análisis elaborado en el anterior trabajo de investigación, fueron realizadas en un contexto escolar de resolución de problemas, independiente de que la tarea sea realizada a través de un juego o de un problema, el entorno de resolución es un entorno que permite analizar una situación problemática que permita descubrir diferentes caminos para llegar a la solución.

Teniendo en cuenta estos datos, se identificaron cinco episodios: Lectura; Exploración y Análisis; Planificación; Implementación; Verificación y argumentación y los Momentos de Transición, pero por sus características referidas a la brevedad y a la naturaleza de los mismos (función de enlace, momentos desligados del proceso de resolución) no son considerados como episodios propiamente tal.

Los indicadores que permiten determinar los episodios, fueron extraídos de los protocolos y en concordancia con la descripción de cada episodio como un todo coherente, es decir, que puede ser identificado por su naturaleza misma. Por lo tanto, los indicadores cumplen con su función de ayudar a despejar las dudas que puedan presentarse debido a las diversas situaciones e interacciones presentes en el desarrollo de las tareas de resolución de problemas descritas en la presente investigación.

Para que los episodios sean considerados como tales, deben contar con uno o más de los indicadores descritos para cada episodio. A continuación se describen los episodios y sus indicadores junto con un ejemplo de cada uno:

▪ **Episodio de Lectura.**

Este episodio, en adelante L, se caracteriza por presentarse generalmente al principio de la sesión con la lectura del enunciado, pero también puede presentarse durante el desarrollo de la tarea.

El objetivo de este episodio es la asimilación de las condiciones de la tarea, tiene estrecha relación con la familiarización de la tarea. Incluye la lectura y relecturas del enunciado, los silencios y verbalizaciones destinadas a la comprensión del mismo.

Los indicadores del episodio L son los siguientes:

- L1.** Lectura o relectura del enunciado de la tarea.
- L2.** Intentos de expresar el objetivo de la tarea –total o parcialmente- con sus propias palabras.
- L3.** Preguntas y opiniones para comprender mejor la tarea.

## Ejemplos de los indicadores L:

Indicador	Ejemplo (extraídos del protocolo 1)	Comentario
L1	<p><b>Lectura o relectura del enunciado de la tarea.</b></p> <p>Maestra: [<i>Dirigiéndose a los dos grupos</i>] Entonces el problema dice ¿Cómo se puede encontrar la suma de todos los números del 1 al 20 sin que sea necesario sumarlos todos uno por uno.</p>	La maestra lee el enunciado del problema A.
L2	<p><b>Intentos de expresar el objetivo de la tarea – total o parcialmente- con sus propias palabras.</b></p> <p>Eric: Ah, 1+2+3+4+...</p>	Eric responde a la pregunta ¿Qué entienden por la suma de todos los números uno por uno?
L3	<p><b>Preguntas y opiniones para comprender mejor la tarea.</b></p> <p>Maestra: ¿Qué entienden por la suma de todos los números uno por uno?</p>	La maestra realiza una pregunta que inicie la verbalización de los alumnos respecto a la comprensión del enunciado.

### ▪ **Episodio de Exploración y Análisis.**

Este episodio, en adelante E, comprende todas aquellas primeras acciones o ideas que en un intento de comprender el problema se llevan a cabo, incluye la simplificación o reformulación del problema, pruebas de ensayo y error, especialmente en la resolución de los juegos de estrategia, por lo mismo, es un episodio poco estructurado.

Podemos vislumbrar, que en este caso, el episodio comienza con las partidas realizadas por las parejas con el objetivo principal de cumplir las normas del juego, los estudiantes exploran distintos movimientos siguiendo las normas e intentando ganar o no perder. Generalmente el momento de la exploración transcurre en silencio (en este proceso interviene un período de análisis) y termina con la intervención de la profesora quien propone ya sea explícita o implícitamente la verbalización del análisis.

En el contexto de juego, la exploración está estrechamente relacionada con el análisis, los alumnos buscan y prueban distintos movimientos con el fin de encontrar algunas regularidades que le permitan llegar a un plan para resolver el juego, pasando intermitentemente de la exploración al análisis y viceversa. En el momento del análisis, el alumno emplea los conocimientos que tiene del juego después de haber realizados varias partidas (exploración) analizando las partidas, los movimientos realizados y los resultados obtenidos de estos movimientos.

En el caso de la resolución de problemas, la forma de proceder es similar, se produce en silencio y los alumnos suelen realizar distintos cálculos intentando

encontrar alguna regularidad o algún camino que los lleve a abordar el problema y encontrar la solución.

El episodio E cuenta con los siguientes indicadores:

**E1.** Búsqueda desordenada de información sobre las condiciones de la tarea y su objetivo.

**E2.** Búsqueda de elementos que lleven a una manera de abordar la tarea.

**E3.** Preguntas y opiniones que permitan buscar enfoques locales para resolver objetivos intermedios.

### **Ejemplos de los indicadores E:**

<b>Indicador</b>	<b>Ejemplo (extraídos del protocolo 2)</b>	<b>Comentario</b>
<b>E1</b>	<b>Búsqueda desordenada de información sobre las condiciones de la tarea y su objetivo.</b> Raúl: Multiplicar. Maestra: ¿Multiplicando? Raúl: Sí, $10 \times 2$ .	En este caso, Raúl responde a la pregunta ¿Qué entienden por la suma de todos los números uno por uno?, pero a diferencia del caso anterior, esta vez menciona una posible manera de resolver el problema y no se refiere sólo al enunciado del problema.
<b>E2</b>	<b>Búsqueda de elementos que lleven a una manera de abordar la tarea.</b> Raúl: ¿Y sumar $1+2$ , no se puede sumar así? Maestra: No consecutivamente. Raúl: Ah, no se puede sumar ordenadamente, pero se puede... Eric: Pero puedes hacer $1+2$ , $2+4$ ...	Raúl y Eric, buscan una manera de comenzar a resolver el problema, en este caso, van más allá de la comprensión del enunciado, ya que el episodio implica la realización de posibles cálculos.
<b>E3</b>	<b>Preguntas y opiniones que permitan buscar enfoques locales para resolver objetivos intermedios.</b> Raúl: ¿Pero no dará 210 cierto? Maestra: Claro que no, porque tenéis que agregar el 21, 22, 23, 24 y 25.	En el contexto de la resolución de la segunda parte del problema A, Raúl necesita confirmar que el resultado de este nuevo problema es mayor al anterior, posiblemente para buscar un camino de solución intermedio, basándose en la anterior estrategia de solución.

#### ▪ **Episodio de Planificación.**

Este episodio, en adelante P, es más estructurado que el anterior. Se caracteriza por la verbalización de una idea o acción que se llevará a cabo de manera inmediata con el fin de llegar a una solución.

El episodio P cuenta con los siguientes indicadores:

- P1. Planificación explícita total o parcial.
- P2. Preguntas y opiniones sobre el acierto o error de la planificación.
- P3. Preguntas y opiniones que ayudan a iniciar o avanzar en la planificación.

**Ejemplos de los indicadores P:**

Indicador	Ejemplo (extraídos del protocolo 3)	Comentario
P1	<b>Planificación explícita total o parcial.</b> Carmen: Empezamos nosotros con el 3 ¿vale Germán?	Verbaliza una manera de comenzar el juego A.
P2	<b>Preguntas y opiniones sobre el acierto o error de la planificación.</b> Germán: No, no, espérate...pon el 5 en... [ <i>Le dice a Germán señalando el centro de la tercera fila</i> ].	Germán, en este caso, señala que no está de acuerdo con el movimiento que menciona su compañera para ganar.
P3	<b>Preguntas y opiniones que ayudan a iniciar o avanzar en la planificación.</b> Germán: ¿Un número grande? [ <i>Le pregunta a Carmen</i> ].	Germán, pregunta a su compañera si está de acuerdo con comenzar a jugar con un número grande.

▪ **Episodio de Implementación.**

Este episodio, en adelante I, comienza cuando el alumno aplica las ideas, estrategias o procesos previamente planificados. Incluyen también la descripción y/o explicación de las mismas.

El episodio I cuenta con los siguientes indicadores:

- I1. Realización de las acciones planificadas.
- I2. Descripción y/o explicación de la implementación.
- I3. Preguntas y opiniones sobre el acierto o error de la implementación.

En el caso de los juegos, los momentos de planificación e implementación se suceden y entrecruzan en un breve lapso de tiempo y su intermitencia es más notoria que entre los demás episodios.

**Ejemplos de los indicadores I:**

Indicador	Ejemplo (extraídos del protocolo 1 y 4)	Comentario									
I1	<b>Realización de las acciones planificadas.</b> Carmen: [ <i>Coloca el 9 en la esquina superior izquierda</i> ] <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">9</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">4</td> </tr> <tr> <td> </td> <td> </td> <td> </td> </tr> <tr> <td> </td> <td> </td> <td> </td> </tr> </table>	9	1	4							Carmen realiza la acción previamente planificada.
9	1	4									
I2	<b>Descripción y/o explicación de la implementación.</b> Rubén: Porque no se pueden repetir los números en	Raúl, explica a Nadia porque no puede repetir los números en los cálculos									

	la segunda columna [ <i>Nadia ha repetido uno de los números por ser impar</i> ].	que está realizando para resolver el problema A.
<b>I3</b>	<b>Preguntas y opiniones sobre el acierto o error de la implementación.</b> Rubén: ¡Carmen no podemos! Nadia: Tiene que buscar otro número. Carmen: Si que podéis si queréis.	Carmen ha realizado un movimiento en el juego que no es posible realizar en ese momento según la pareja 1.

▪ **Episodio de Verificación y argumentación.**

Este episodio, en adelante V. incluye la evaluación del proceso seguido en la resolución, de la solución por la que se ha optado y del resultado obtenido. Incluye la argumentación verbal de los descubrimientos y de los aciertos o errores del resultado final. Es un momento de reflexión, comprobación o justificación del proceso de acuerdo con las exigencias del objetivo.

A diferencia del episodio de verificación de Schoenfeld en el que el resolutor revisa sus resultados individualmente, en primaria, por desarrollarse en un contexto escolar y grupal, el episodio de verificación pasa a ser un proceso mayormente verbal, en donde los alumnos expresan y argumentan sus descubrimientos y la verificación llega en torno a un consenso entre los participantes y el profesor a modo de conclusión de los descubrimientos realizados.

Este episodio, es un proceso transversal que aparece en distintos momentos durante el desarrollo del problema. En el caso de los juegos de estrategia, puede referirse tanto a las evaluaciones del resultado de unas partidas como al descubrimiento y resolución de una estrategia ganadora. En este episodio se incluyen comprobaciones y argumentaciones de las estrategias que resuelven o supuestamente resuelven el juego de estrategia.

El episodio V cuenta con los siguientes indicadores:

**V1.** Explicación y/o argumentación de la validez de un resultado y/o estrategia total o parcial.

**V2.** Explicación global de la estrategia.

**V3.** Preguntas y opiniones que ayudan a expresar el resultado y/o estrategia total o parcial.

**Ejemplos de los indicadores V:**

<b>Indicador</b>	<b>Ejemplo (extraídos del protocolo 7 y 10)</b>	<b>Comentario</b>
<b>V1</b>	<b>Explicación y/o argumentación de la validez de un resultado y/o estrategia total o parcial.</b> Carmen: La suma consecutiva de... la suma de los números consecutivos del 1 al 10, el resultado siempre nos va sumando 3.	Carmen redacta la estrategia de solución del problema B, en donde intenta explicar la aparición de los múltiplos de 3 en los resultados y explica cómo han obtenido el resultado.
<b>V2</b>	<b>Explicación global de la estrategia.</b> Todos: 15, 18, 21, 24, 27, 30.	El grupo completo responde a la pregunta de la maestra:

		Entonces este más tres [ <i>la suma del 2+3+4</i> ], viene este [ <i>la suma del 3+4+5</i> ], más tres sería...yo ya podría decir ¿Qué número viene? Los alumnos ha identificado la regularidad presente en el problema B.
V3	<b>Preguntas y opiniones que ayudan a expresar el resultado y/o estrategia total o parcial.</b> Maestra: ¿Por qué sacas una y no saca dos? [ <i>Pregunta a Carmen</i> ].	La maestra pregunta a Carmen de para que ella pueda explicar por qué su estrategia es válida.

#### ▪ Momentos de transición.

Los momentos de transición, en adelante T, en el presente estudio, son aquellos momentos en los que los alumnos verbalizan o realizan acciones ajenas a la tarea de resolución de los juegos o problemas.

T cuenta con el siguiente indicador:

**T1.** Intervenciones no relacionadas con la tarea.

#### Ejemplos de los indicadores L:

Indicador	Ejemplo (extraídos del protocolo 10)	Comentario
T1	<b>Intervenciones no relacionadas con la tarea.</b> Rubén: Vamos a contar cuantos puntos hay, es el juego.... Eh [ <i>Pelea por la hoja con Carmen</i> ].	Conversan antes de comenzar el Juego A y discuten por quién se queda con la hoja de actividades.

#### 3.5.3. Organización de los datos.

Con el objetivo de obtener una visión, tanto global como específica de los datos contenidos en los protocolos, se organizaron los mismos en dos formatos estructurados: tablas y mapas de tiempo.

De esta manera, se lleva a cabo de manera intrínseca en la misma organización un primer análisis, referido principalmente a la visualización de la aparición de los episodios que conformaron el instrumento de análisis validando, conformando y revisando cada uno de los indicadores del mismo.

A continuación se describe la organización de los datos ya protocolizados.

#### 3.5.4. Organización de los datos en tablas.

Una vez conformado los protocolos, se realiza una primera revisión de cada uno de ellos, se analizan los mismos en busca de los episodios establecidos y se identifican los indicadores para cada episodio.

Este primer análisis, arroja una visión global de la pertinencia o no de los indicadores y permite la revisión y modificación de los mismos, de modo que se acerquen cada vez más a la realidad registrada.

Como se mencionó anteriormente, para el análisis de los protocolos se identificaron los indicadores que caracterizan cada episodio. Estos indicadores fueron revisados en varias ocasiones para reflejar objetivamente los distintos episodios presentes en los procesos de resolución, tanto de los problemas A y B, como de los Juegos A y B. A continuación, se presenta un ejemplo de cada tipo de tarea.

A partir de un protocolo que ya contiene la transcripción, la identificación de los sujetos y el número de turno, se procede a limpiar el protocolo de aquellas intervenciones que por su naturaleza, no tienen ninguna relación con la tarea y no aportan ninguna evidencia útil para el estudio. Una vez terminado con estos pasos, se delimita cada episodio y se identifican los indicadores (ver números detrás de siglas):

- Episodio de Lectura (L)
- Episodio de Exploración y análisis (E)
- Episodio de Planificación (P)
- Episodio de Implementación (I)
- Episodio de Verificación y argumentación (V)
- Momentos de transición (T)

Después de reiteradas revisiones, se vuelve a observar el registro para identificar los tiempos de duración de cada episodio. Se observaron ciertas secuencias en la aparición de algunos episodios conformando cierto patrón observable. Se decidió unir estas secuencias de dos o más episodios, pero tomando en cuenta el patrón observable como se puede verificar en las tablas que se presentan a modo de ejemplo.

De esta manera, se pudo llegar a elaborar tablas que representen los datos obtenidos, pero sin perder la naturaleza de los patrones observados.

Ejemplo: Tabla-Protocolo 3  
Grupo 1-5ºA-Pareja 1  
Juego A: "Cerrar 15" (1ª Parte)

PROTOCOLO 3-JUEGO A-1ª PARTE-PAREJA 1 Y 2				
	Nº	Episodios	Tiempo	Duración
Se reagrupa 1 y 3, total 30"	1	Momento de transición	00:00-00:27	27"
	2	Lectura	00:28-04:00	3' 32"
	3	Momento de transición	04:01-04:04	03"
Se reagrupan P-I-E	4	Planificación	04:05-04:14	09"
	5	Implementación	04:15-04:21	06"
	6	Exploración y Análisis	04:22-05:06	44"
	7	Planificación	05:07-05:10	03"
	8	Implementación	05:11-05:19	08"
	9	Planificación	05:20-05:35	15"
	10	Implementación	05:36-05:59	23"
	11	Exploración y Análisis	06:00-06:08	08"
	12	Implementación	06:09-06:37	28"
	13	Exploración y Análisis	06:38-07:05	27"
	14	Planificación	07:37-07:46	09"
	15	Implementación	07:12-07:42	30"
Se reagrupa I	16	Planificación	07:43-07:46	03"
	17	Implementación	07:47-07:51	04"
	18	Planificación	07:52-09:01	1' 09"
	19	Implementación	09:02-09:03	01"
	20	Transición	09:04-09:20	16"
	21	Planificación	09:21-10:47	1' 26"
	22	Implementación	10:48-10:49	1"
	23	Planificación	10:50-11:01	11"
	24	Implementación	11:02-11:47	45"
	25	Planificación	11:48-11:53	05"
	26	Implementación	11:54-12:37	43"
	27	Planificación	12:38-13:12	34"
	28	Implementación	13:13-13:28	15"
	29	Exploración y Análisis	13:29-13:59	30"
	30	Planificación	14:00-14:03	03"
	31	Implementación	14:04-14:20	16"
	32	Exploración y Análisis	14:21-14:50	29"
	33	Planificación	14:51-15:00	09"
34	Implementación	15:01-16:23	22"	
35	Exploración y Análisis	16:24-16:49	25"	
36	Implementación	16:50-17:00	10"	
37	Exploración y Análisis	17:01-18:07	1' 06"	
38	Implementación	18:08-18:10	02"	
39	Exploración y Análisis	18:11-19:10	59"	
40	Implementación	19:11-19:34	23"	
41	Exploración y Análisis	19:35-20:03	28"	
42	Implementación	20:04-20:27	23"	
43	Transición	20:28-20:38	10"	
44	Lectura	20:39-21:19	20"	
45	Exploración y Análisis	21:20-23:11	1' 51"	
46	Verificación y argumentación	23:12-24:06	54"	

47	Exploración y Análisis	24:07-28:20	4' 13''
48	Planificación	28:21-28:40	19''
49	Exploración y Análisis	28:41-29:03	22''
50	Implementación	29:04-30:20	1' 16''
51	Exploración y Análisis	30:21-30:40	19''
52	Implementación	30:41-31:12	31''
53	Planificación	31:13-31:54	41''
54	Implementación	31:55-32:14	19''
55	Planificación	32:15-32:39	24''
56	Implementación	32:40-33:12	32''
57	Exploración y Análisis	33:13-37:25	4' 12''
58	Planificación	37:26-37:40	14''
59	Exploración y Análisis	37:41-38:31	50''
60	Verificación y argumentación	38:32-39:14	42''
61	Exploración y Análisis	39:15-40:58	1' 43''
62	Verificación y argumentación	40:59-43:00	2' 01''
63	Transición	43:01-45:01	02'

Una vez determinadas, las apariciones de los episodios y la duración de los mismos, se hace una reagrupación de los episodios que presentan cierto patrón, es decir, que tienen una característica de intermitencia repetida en más de una ocasión y que además son de corta duración, uniéndolas y manteniendo de esta manera la naturaleza de las mismas, lo que se ejemplifica con los corchetes en la tabla anterior.

El siguiente ejemplo, muestra el resultado de la reagrupación de los episodios:

Nº	Episodios	Duración	Tabla anterior
1	Lectura	3' 32"	2
2	Momento de transición	30"	1,3
3	Planificación	1' 48"	4,7,9,14,16,18
4	Implementación	1' 39"	5,8,10,12,15,17
5	Exploración y Análisis	1' 19"	6,11,13
6	Planificación	2' 16"	21,23,25,34
7	Implementación	1' 44"	19,22,24,26,28
8	Exploración y Análisis	1' 24"	29,32,35
9	Planificación	12"	30,33
10	Implementación	1' 36"	31,34,36,38,40
11	Exploración y Análisis	2' 33"	37,39,41
12	Transición	26"	20,43
13	Lectura	20"	44
14	Exploración y Análisis	1' 51"	45
15	Verificación y argumentación	54"	46
16	Exploración y Análisis	4' 13"	47
17	Planificación	1' 38"	48,53,55
18	Exploración y Análisis	55"	49,51,57
19	Implementación	2' 38"	50,52,54,56
20	Exploración y Análisis	6' 45"	59,59,61
21	Verificación y argumentación	2' 43"	42,62
22	Transición	02' 00"	63

Como se puede observar, la tabla anterior contiene cuatro columnas, en la primera columna se numeran las apariciones de los episodios. En la segunda columna, se identifica el episodio, en la tercera columna se indica el tiempo de duración de cada episodio y en la cuarta columna se presenta la forma en que se reúnen los episodios de la tabla anterior para reagruparlos.

Después de realizada la tabla anterior, se diseña una tabla resumen, en donde se indica el tiempo total de cada episodio durante la sesión de resolución, sin tomar en cuenta, en este caso, el orden de aparición de los mismos, esta tabla tiene el fin de recoger una estadística cuantitativa respecto al tiempo que ocupa cada episodio durante la sesión. A su vez, en ambas tablas se aplica una diferenciación de color para favorecer la percepción visual de los mismos.

Se procede a organizar los datos de la misma manera, tanto para la resolución de problemas como para la resolución de los juegos de estrategia en una tabla que resume todos los datos de la siguiente manera:

PROTOCOLO 3-JUEGO A-1ª PARTE-PAREJA 1 Y 2			
Episodios	Tiempo total en la sesión	% tiempo	Frecuencia
Lectura	3' 52"	9,01	2
Exploración y Análisis	19' 00"	44,25	7
Planificación	5' 54"	13,74	4
Implementación	7' 37"	17,74	4
Verificación y argumentación	3' 37"	8,42	2
Momento de transición	2' 56"	6,83	3
TOTAL	42' 56"	100	22

En la primera columna se presentan los episodios, en la segunda columna, se muestra el tiempo de duración de cada episodio ya reagrupados, en la tercera columna se señala el porcentaje de tiempo que ocupa cada episodio en total durante la sesión y en la cuarta columna se muestra la frecuencia con la que se ha presentado cada episodio a lo largo de la sesión, pero de manera no reagrupada, es decir, que son las apariciones de cada episodio de acuerdo a la tabla de la primera parte del análisis.

### 3.5.5. Elaboración mapas de tiempo.

A partir de la organización de los datos en tablas, y con el fin de obtener una visión general y cualitativa de la aparición y tiempo de cada episodio durante la sesión de resolución, se presenta la información en mapas de tiempo.

El mapa de tiempo, permite visualizar la forma en que van apareciendo los episodios durante la sesión, de esta manera, podemos analizar la recurrencia e intermitencia de los episodios y el tiempo que ocupa cada uno en los distintos momentos del proceso de resolución. Esto nos permitió realizar una segunda fase de análisis, que en el caso de nuestro estudio, es a su vez, uno de los resultados de la investigación. Este análisis se desarrollará en el apartado de resultados.

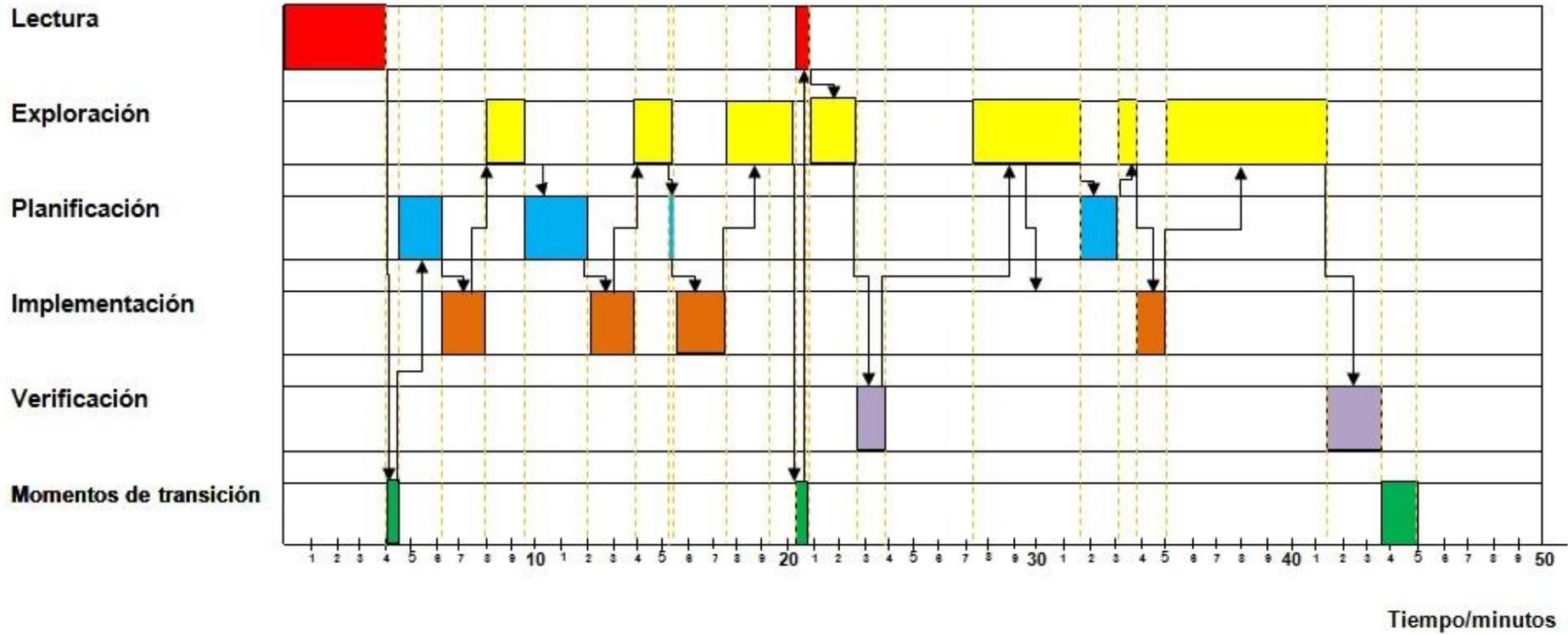
En el eje vertical del mapa se aprecia la aparición de cada episodio y en el eje horizontal se distribuye el tiempo de la sesión de resolución en minutos. Las flechas indican el orden de aparición de los episodios, las líneas punteadas de color amarillo, permiten distinguir el inicio y el final de cada uno de ellos. Los colores que identifican cada episodio en las tablas son los mismos utilizados en este mapa.

Se procede a presentar la información en los mapas de tiempo de la misma manera, tanto para la resolución de problemas como para la resolución de los juegos de estrategia, la frecuencia de cada episodio no se observa claramente

en estos mapas, para ello podemos recurrir a las tablas resumen de cada protocolo.

### Línea de tiempo-Protocolo 3

#### Episodios



A partir de los datos presentes en las tablas de cada protocolo, se realiza un mapa de tiempo para cada protocolo. Este mapa permite observar la secuencia de aparición y duración de los episodios a lo largo de cada sesión, información que utilizaremos en el análisis de los protocolos obtenidos.

### 4.3.1. Ejemplo de análisis: Problema B

A continuación se presenta un extracto del proceso de análisis del Protocolo 7, problema B para mostrar parte de este proceso.

Nº	Sujeto	Tiempo	Protocolo P1 y P2	Episodio
7	Germán		El número 21 puede expresarse como 6+7+8 ¿Cuáles son los números que se pueden expresar como suma de tres números consecutivos?	L1
8	Maestra		¿Quién me lo puede explicar?	L3
9	G2 (Raúl)		Nos da lista de tres, ¿siempre con los mismos números?	L2
10	Rubén		1+1+1 je, je, je [ <i>Se ríe</i> ].	L2
11	Germán		¿Explicar por qué son estos números?	L3
12	Maestra		Vele, ahí dice que el número 21 se puede expresar como la suma de tres números consecutivos.	L3
53	Carmen		Tenemos que poner un número del 1 al 10 para que de algún número ¿no?	E1
54	Nadia		No, como 1+2+3...	E1
55	Carmen		Tres números del 1 al 10.	E1
56	G2 (Eric)		2+3+4; 3+4+5.	E2
57	Rubén		O sea, que no podemos usar otra cosa que el 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.	E3
58	Maestra		Claro pero de a tres [ <i>números</i> ].	E3
59	Grupo 2 (Raúl)		Pero que no den el mismo número.	E3
60	Maestra		No te va dar la misma suma, porque esto no te va dar lo mismo que esto ni que esto [ <i>señala los ejemplos escritos en la pizarra</i> ].	E3
61	Carmen		Ya no podemos poner ni el 11, 12, 13...	E2
80	Germán		7+8=15, +9= 24.	I1
81	Carmen		7, 8 y 9 yo he escuchado un número y he anotado 24, 7+8 y 9 eran 24.	I1

82	<b>Germán</b>		Ah.	
83	<b>Maestra</b>		Hasta el 10 o si quieren hasta el número que quieran, hasta que se den cuenta de que pasa algo.	<b>I3</b>
100	<b>Nadia</b>		Ir haciendo los números del 1 al 10; 1+2+3; 2+3+4.	<b>P1</b>
101	<b>Rubén</b>		2+3+4, vamos... ¿da 9, no?	<b>P2</b>
102	<b>Nadia</b>		Desde el principio vale, 1+2+3 ah...vale.	<b>P1</b>
103	<b>Rubén</b>		1+2+3.	<b>P1</b>
104	<b>Germán</b>		Luego 2+3+4.	<b>P1</b>
130	<b>Maestra</b>		Tienen que explicar por qué pasa lo que pasa.	<b>V3</b>
131	<b>Germán</b>		La suma progresiva de los números por orden... [G1 comienza en conjunto a explicar lo que han hecho para redactarlo y escribir la respuesta en la hoja de actividades. Ver hoja de actividades adjuntas al final del protocolo].	<b>V1</b>
132	<b>Germán</b>		¿Por qué al ser tres números, no?	<b>V1</b>
133	<b>Rubén</b>		No, ponemos la suma de los tres números consecutivos, empezando por el 1 y acabando por el 10 y el resto por orden.	<b>V1</b>
134	<b>Carmen</b>		No del 1 al 10.	<b>V1</b>
135	<b>Rubén</b>		Siempre.	<b>V1</b>
136	<b>Carmen</b>		La suma consecutiva de... la suma de los números consecutivos del 1 al 10, el resultado siempre nos va sumando 3.	<b>V1</b>
222	<b>Maestra</b>		Bien, ahora vamos a introducir para la próxima semana un juego que se llama...	<b>T</b>
223	<b>G2 (Raúl)</b>		4 en raya.	<b>T</b>
224	<b>Germán</b>		Pero ya se acabado.	<b>T</b>
225	<b>Maestra</b>		Sí, el problema ya está, lo han resuelto muy rápido.	<b>T</b>

#### 4.3.2. Ejemplo de análisis: Juegos A

A continuación se presenta un extracto del proceso de análisis del Protocolo 4, Juego A, para mostrar parte de este proceso:

Nº	Sujeto	Tiempo	Protocolo	Episodio
3	Maestra		¿Cuál es la estrategia que han encontrado?	V3
4	Carmen		Yo, vale.	
5	Maestra		¿Quién gana el que juega primero o el que juega segundo?	V3
6	Rubén		El que juega primero.	V2
7	Maestra		¿Por qué?	V3
8	G2		Porque el que empieza, lo pone, entonces el otro...	V2
9	Maestra		¿Pero qué pone?	V3
10	G2		Un número, el 5, entonces...	V2
11	Maestra		¿Tiene que ser el 5?, ¿no puede ser otro?	V3
12	Carmen		Pero con el 5, con el 5 pongas el número que pongas ya has ganado.	V2
13	Maestra		¿El 5 dónde?	V3
14	Carmen		En el medio.	V2
40	Maestra		Entonces teníamos $1+9=$ , $2+8=$ , $3+7=$ , 4 y 6, ahí está, bueno teniendo esta información, ahora lo que tienen que encontrar son más estrategias, este juego tiene 11 estrategias más o menos; 11 estrategias que te permiten ganar, pero esta es la que te permite ganar rápidamente, siempre hay otras que son un poquito más complicadas, pero que las podemos encontrar, tienen que encontrar otra estrategia ganadora, usando los números del 1 al 9, pero sin usar el 5 en el medio.	L1
41	G2		En el lado ¿se puede?	L3
42	Rubén		¿Qué?	
43	Maestra		Claro, en cualquier otro lugar pero no en el medio, ¿alguna, otra pregunta? He... miren escuchen, él dice	L3

			[Raúl] que si el 5 puede estar en otro lugar.										
47	Rubén		Ya igualmente si pones el 5 en cualquier otro lado, también igualmente a lo mejor ganas.	E1									
48	G2		No, si pones el 5 ya ha acabado.	E1									
49	Maestra		Ya, pero si pones el 5 en el medio, no hemos probado otras formas, no sabemos si poniendo el 5 aquí también ganamos. <i>[Muestra en la pizarra otra alternativa que no sea el medio].</i>	E3									
			<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr> </table>	x	x	x	x		x	x	x	x	
x	x	x											
x		x											
x	x	x											
50	Carmen		Hay que probar como podemos ganar si eres el segundo, vamos, el segundo que pone el número.	E1									
51	Maestra		Es que no se sabe si ganará el primero o el segundo.	E1									
52	Carmen		Pero si pones un 5 solo no puede ganar.	E1									
100	Rubén		Gracias Carme porque es una tontera <i>[Coloca el 4 en la esquina superior derecha].</i>	P1									
			<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td></td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>		1	4							
	1	4											
101	Germán		Pon el 9 ahí para que no se acabe <i>[Dice a Carmen].</i>	P1									
102	Carmen		Juega <i>[Coloca el 9 en la esquina superior izquierda]</i> ponlo aquí <i>[Señala el centro del cartón].</i>	I1									
			<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>9</td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	9	1	4							
9	1	4											

103	<b>Rubén</b>		¡Carmen no podemos!	I3
104	<b>Nadia</b>		Tiene que buscar otro número.	I3
482	<b>G1</b>		Pero la semana que viene haremos esto.	T
483	<b>Maestra</b>		No otra cosa.	T
484	<b>G1</b>		¡Toma!	T

## CAPÍTULO 4 ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

En este capítulo se presenta el análisis de los protocolos y los resultados de la investigación. Se comienza con el análisis de los protocolos obtenidos a partir del desarrollo de los Juegos A y B por separado. Luego se realiza una comparación entre ambos juegos (Apartados 4.1, 4.2 y 4.3).

De la misma manera se procede con los protocolos relacionados con los problemas A y B (Apartados 4.4 y 4.5).

El capítulo finaliza con la comparación del análisis de los protocolos relacionados con juegos y problemas (Apartado 4.6).

En la Tabla 1, se presentan los doce protocolos obtenidos y analizados en el presente estudio; mostrando los grupos de alumnos, las parejas y la tarea propuesta.

Protocolo	Grupo	Pareja	Sesión
1	G1	P1-P2	Problema A (Suma de números)
2	G2	P3-P4	Problema A (Suma de números)
3	G1	P1-P2	Juego A (Cerrar 15)
4	G1	P1-P2	Juego A (Cerrar 15)
5	G2	P3-P4	Juego A (Cerrar 15)
6	G2	P3-P4	Juego A (Cerrar 15)
7	G1	P1-P2	Problema B (Números consecutivos)
8	G2	P3-P4	Problema B (Números consecutivos)
9	G1	P1-P2	Juego B (El diez gana)
10	G1	P1-P2	Juego B (El diez gana)
11	G2	P3-P4	Juego B (El diez gana)
12	G2	P3-P4	Juego B (El diez gana)

**Tabla 1:** Organización de los protocolos obtenidos

En la Tabla 2, se presentan las parejas participantes que se distribuyen de la siguiente manera:

Grupo	Alumnos
Grupo 1: (5° A)	Pareja 1: Carmen y Germán Pareja 2: Nadia y Rubén
Grupo 2: (5° B)	Pareja 3: Eric y Ana Pareja 4: Sara y Raúl

**Tabla 2:** Organización de los participantes en la investigación

Para obtener los resultados se organizaron las tablas y líneas de tiempo cuya elaboración se explicó en el apartado de Metodología, capítulo 3 (Apartado 3.5.4 y 3.5.5).

Recordemos que los episodios fueron reagrupados a partir de las secuencias breves y repetitivas que se observaron, pero manteniendo el orden de aparición de los mismos.

A continuación se presenta el análisis de cada protocolo y las respectivas comparaciones entre ellos. A partir de ahora, el análisis se referirá a lo observado en las líneas de tiempo y no a los datos de las tablas, aunque se recurrirá a ellos para complementar el análisis final de cada juego o problema.

## 4.1 Análisis protocolos juego A

En el juego A: "Cerrar 15", Cada jugador, en su turno, debe escoger una de las fichas (del 1 al 9) y colocarla sobre el tablero, en la posición que quiera. El primer jugador o pareja que al colocar un cartón consiga sumar "15" en vertical, horizontal o diagonal gana el juego.

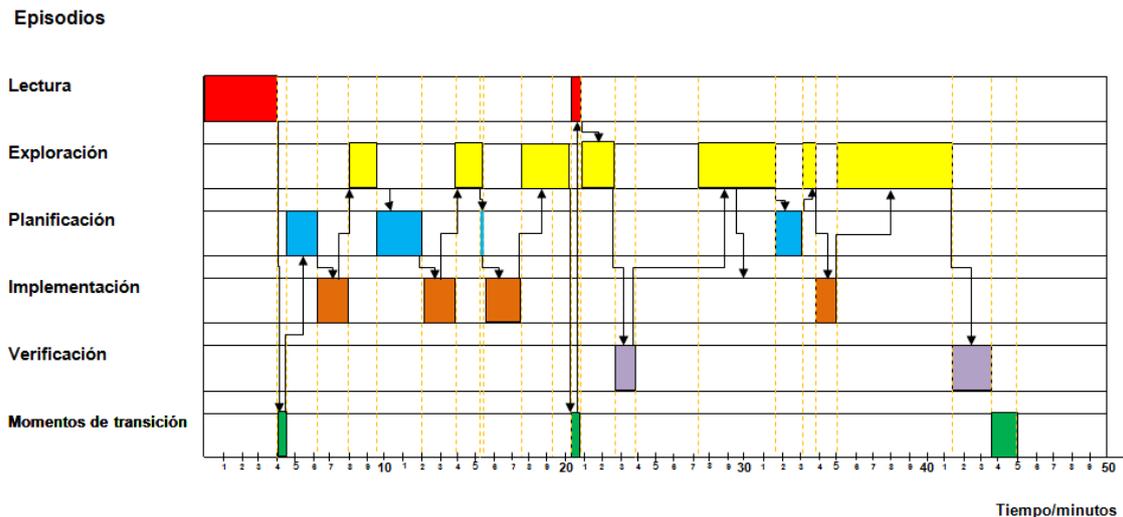
Los protocolos pertenecientes a este juego son los Protocolos 3, 4, 5 y 6.

### 4.1.1. Protocolo 3

Del análisis del Protocolo 3 (Anexo 7.1.3) se extraen los siguientes datos:

Episodios	Tiempo total en la sesión	% Tiempo	Frecuencia
Lectura	3' 52"	9,01	2
Exploración y Análisis	19' 00"	44,25	7
Planificación	5' 54"	13,74	4
Implementación	7' 37"	17,74	4
Verificación y argumentación	3' 37"	8,42	2
Momento de transición	2' 56"	6,83	3
Total	42' 56"	100	22

**Tabla 3:** Duración y frecuencia de cada episodio durante una sesión de juego: Protocolo 3



**Cuadro 8:** Línea de tiempo del Protocolo 3

En el Cuadro 8, correspondiente al Protocolo 3, podemos apreciar la aparición de los cinco episodios durante la sesión. En el eje vertical, se ubican los episodios y en el eje horizontal se muestran el orden de aparición de los mismos a lo largo del desarrollo de la sesión (en minutos).

A partir de los datos observados en la Tabla 3 y el Cuadro 8, correspondientes al análisis del Protocolo 3, Juego A, primera parte, Grupo 1, parejas 1 y 2, se extraen los siguientes resultados:

**Episodio de Lectura:**

Este episodio aparece al inicio de la sesión y vuelve a aparecer casi a la mitad de la sesión. Ocupa cerca del 10% del tiempo total siendo la primera aparición de mayor duración.

**Episodio de Exploración y análisis:**

Este episodio se presenta numerosas veces y de manera intermitente durante toda la sesión, generalmente después de los episodios de Planificación e implementación. Los lapsos de tiempo que ocupa en cada aparición son importantes. Ocupa más del 44% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Planificación:**

Este episodio se presenta en lapsos breves y de manera intermitente a lo largo de la sesión, generalmente precede al episodio de implementación. Ocupa cerca del 14% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Implementación:**

Este episodio se presenta en lapsos breves y de manera intermitente a lo largo de la sesión, aparece precedido por el episodio de planificación. Ocupa cerca del 18% del tiempo total de la sesión.

### **Episodio de Verificación y argumentación:**

Este episodio se presenta por primera vez hacia la mitad de la sesión y vuelve a aparecer casi al final de la misma. Ocupa algo más del 8% del tiempo total de la sesión.

### **Momentos de Transición:**

Su presencia es poco significativa, ocupan poco más del 6% del tiempo total de la sesión.

### **Síntesis del Protocolo 3:**

La mayor parte de tiempo en esta primera sesión del juego, se ha destinado a: Exploración y análisis (44%). También los episodios de Implementación (18%) y Planificación (14%) son significativos en cuanto al tiempo que se les destina. Estos tres episodios aparecen en una secuencia, no lineal, en la que se suceden Planificación, Implementación y Exploración y análisis, de forma recurrente. En particular se observa como aspecto más relevante que después de cada implementación los estudiantes recurren de nuevo a realizar una exploración.

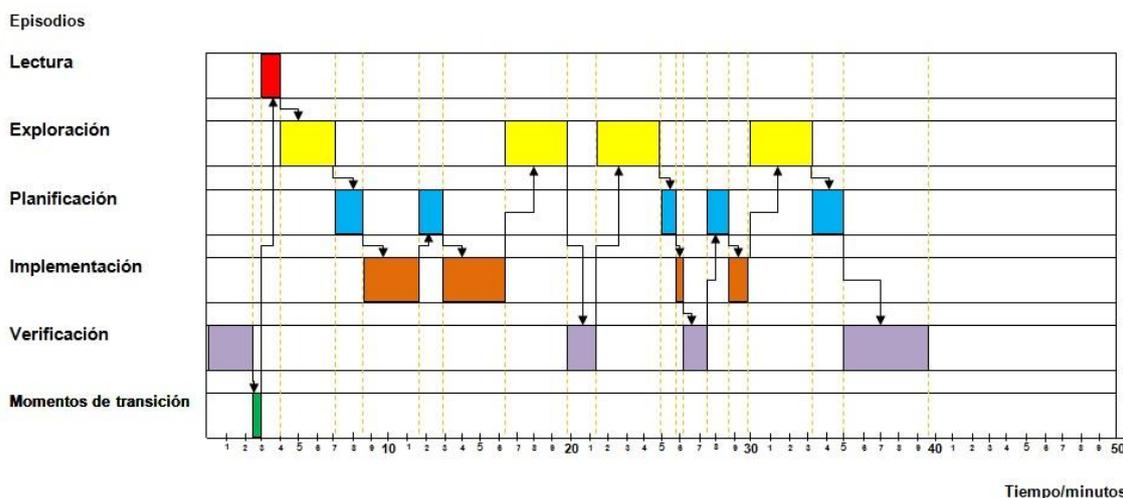
Los episodios que aparecen con mayor frecuencia durante la sesión son los de Exploración y Análisis, Planificación e Implementación, y esto coincide con los tiempos dedicados a cada uno de ellos.

#### **4.1.2. Protocolo 4**

Del análisis del Protocolo 4 (Anexo 7.1.4) se extraen los siguientes datos:

<b>Episodios</b>	<b>Tiempo total en la sesión</b>	<b>% Tiempo</b>	<b>Frecuencia</b>
Lectura	58"	2,43	1
Exploración y Análisis	13' 59"	35,21	4
Planificación	6' 28"	16,28	5
Implementación	7' 29"	18,84	4
Verificación y argumentación	10' 15"	25,81	4
Momento de transición	34"	1,43	1
Total	39' 43"	100	19

**Tabla 4:** Duración y frecuencia de cada episodio durante una sesión de juego: Protocolo 4



**Cuadro 9:** Línea de tiempo del Protocolo 4

En el Cuadro 9, correspondiente al Protocolo 4, podemos apreciar la aparición de los cinco episodios durante la sesión.

A partir de los datos observados en la Tabla 2 y Cuadro 9, correspondientes al análisis del Protocolo 4, Juego A, segunda parte, Grupo 1, parejas 1 y 2, se extraen los siguientes resultados:

**Episodio de Lectura:**

Este episodio es prácticamente irrelevante y una única vez en el primer cuarto de la sesión, ocupando poco más del 2% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Exploración y análisis:**

Este episodio se presenta de manera intermitente durante toda la sesión, precediendo generalmente a los episodios de Planificación e implementación. Los lapsos de tiempo que ocupa en cada aparición son importantes. Este episodio ocupa cerca del 35% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Planificación:**

Este episodio se presenta de manera intermitente a lo largo de la sesión durante breves lapsos de tiempo, aparece ligado en cada ocasión con el episodio de implementación. Este episodio ocupa poco más del 16% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Implementación:**

Este episodio se presenta de manera intermitente a lo largo de la sesión durante breves lapsos de tiempo, aparece después del episodio de planificación. Ocupa el 19% del tiempo total de la sesión.

### **Episodio de Verificación y argumentación:**

Este episodio se presenta al inicio y al final de la sesión, y aparece en otras oportunidades después de distintos episodios. Ocupa cerca del 26% del tiempo total de la sesión.

### **Momentos de Transición:**

Irrelevantes (poco más de 1%).

### **Síntesis del Protocolo 4:**

Esta sesión comienza con un episodio de Verificación y argumentación; si bien esto no parece habitual, debemos recordar que esta sesión es la continuación del juego A. Por lo tanto, se comienza recordando las estrategias encontradas en la primera sesión del Juego A (Protocolo 3).

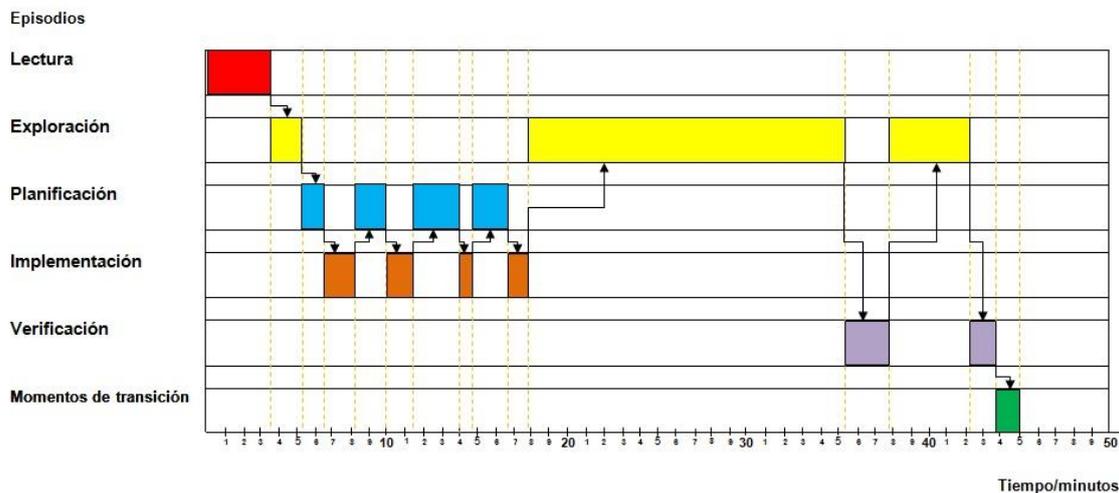
En esta segunda sesión del juego, la mayor parte del tiempo, se ha destinado a: Exploración y análisis (35%). También el episodio de Verificación y argumentación es relevante (26%) y a continuación aparecen los episodios de Implementación (19%) y Planificación (16%). Todos los episodios, excepto el episodio de Lectura, que se presenta sólo al principio de la sesión, se suceden de manera intermitente durante el desarrollo de la sesión. Aun así, se puede observar cierto patrón: Exploración y análisis-Planificación-Implementación. Pero, sin duda, es especialmente relevante la duración del episodio de Verificación y argumentación aunque no forme parte de ninguna secuencia.

#### **4.1.3. Protocolo 5**

Del análisis del Protocolo 5 (Anexo 7.1.5.) se extraen los siguientes datos:

<b>Episodios</b>	<b>Tiempo total en la sesión</b>	<b>% Tiempo</b>	<b>Frecuencia</b>
Lectura	3' 36"	8,01	1
Exploración y Análisis	23' 53"	53,18	3
Planificación	7' 15"	16,15	4
Implementación	4' 54"	10,90	4
Verificación y argumentación	3' 26"	7,64	2
Momento de transición	1' 51"	4,12	1
Total	44' 54"	100	15

**Tabla 5:** Duración y frecuencia de cada episodio durante una sesión de juego: Protocolo 5



**Cuadro 10:** Línea de tiempo del Protocolo 5

En el Cuadro 10, correspondiente al Protocolo 5, podemos apreciar la aparición de los cinco episodios durante la sesión.

A partir de los datos observados en la Tabla 5 y Cuadro 10, correspondientes al análisis del Protocolo 5, Juego A, primera parte, Grupo 2, parejas 3 y 4, se extraen los siguientes resultados:

**Episodio de Lectura:**

Este episodio aparece brevemente al inicio de la sesión. Ocupa el 8% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Exploración y análisis:**

Este episodio se presenta de manera intermitente durante toda la sesión. Ocupa más del 53% del tiempo total de la sesión, la aparición más importante en cuanto al tiempo que ocupa se concentra durante el segundo tercio de la sesión.

**Episodio de Planificación:**

Este episodio se presenta de manera intermitente y breve durante el primer tercio de la sesión, aparece ligado en cada ocasión con el episodio de implementación. Este episodio ocupa el 16% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Implementación:**

Este episodio se presenta de manera intermitente y breve durante el primer tercio de la sesión, aparece precedido por el episodio de planificación. Ocupa poco más del 19% del tiempo total de la sesión y se presenta en reiteradas ocasiones.

**Episodio de Verificación y argumentación:**

Este episodio se presenta brevemente en el último tercio de la sesión. Ocupa más del 7% del tiempo total de la sesión.

### **Momentos de Transición:**

Se presentan brevemente y ocupa poco más del 4% del tiempo total de la sesión.

### **Síntesis del Protocolo 5:**

La mayor parte de tiempo en esta primera parte del juego, se ha destinado a: Exploración y análisis (53%). Todos los episodios, excepto el de Lectura, que se presenta sólo al principio de la sesión, interactúan de manera intermitente durante el desarrollo de la misma. Aun así, se puede observar que:

Los episodios de Planificación e Implementación conforman una secuencia recurrente, a lo largo de la primera parte de la sesión.

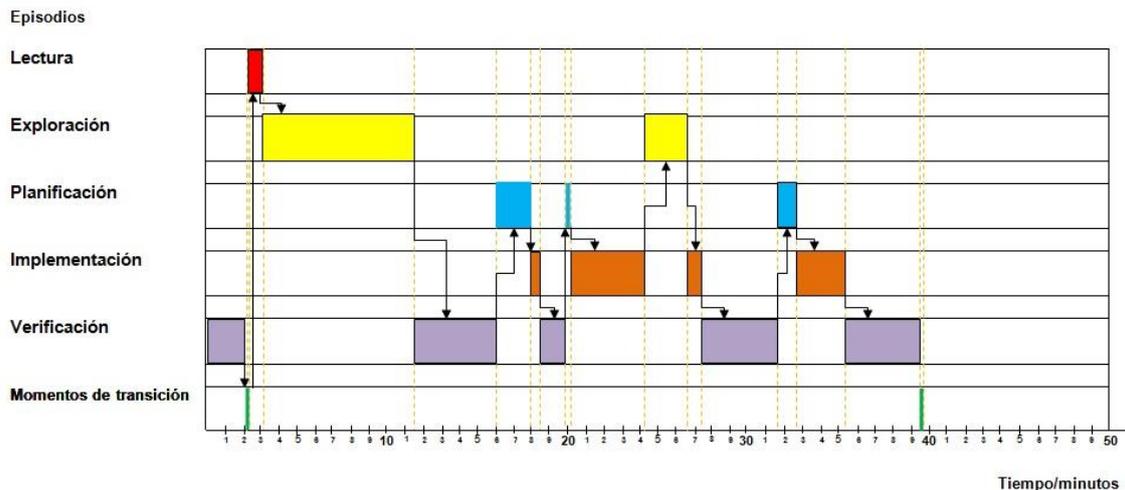
El episodio de Exploración y análisis ocupa gran parte de la segunda mitad de la sesión y se alterna con el episodio de Verificación y argumentación. Este salto en la secuencia (Exploración y análisis-Verificación y argumentación) se explica a partir de lo sucedido en la primera parte de la sesión donde se repite varias veces la secuencia (Planificación-Implementación).

#### **4.1.4. Protocolo 6**

Del análisis del Protocolo 6 (Anexo 7.1.6.) se extraen los siguientes datos:

<b>Episodios</b>	<b>Tiempo total en la sesión</b>	<b>% Tiempo</b>	<b>Frecuencia</b>
Lectura	57"	2,40	1
Exploración y Análisis	10' 48"	27,28	2
Planificación	3' 10"	8,00	3
Implementación	7' 55"	20,00	3
Verificación y argumentación	16' 22"	41,35	5
Momento de transición	23"	0,97	2
Total	39' 36"	100	17

**Tabla 6:** Duración y frecuencia de cada episodio durante una sesión de juego: Protocolo 6



**Cuadro 11:** Línea de tiempo del Protocolo 6

En el Cuadro 11, correspondiente al Protocolo 4, podemos apreciar la aparición de los cinco episodios durante la sesión (en minutos).

A partir de los datos observados en la Tabla 6 y Cuadro 11, correspondientes al análisis del Protocolo 6, Juego A, segunda parte, Grupo 2, parejas 3 y 4, se extraen los siguientes resultados:

**Episodio de Lectura:**

Este episodio aparece de manera breve y única al inicio de la sesión. Ocupa poco más del 2% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Exploración y análisis:**

Este episodio se presenta de manera importante en el primer tercio de la sesión y vuelve a aparecer al final del segundo tercio, generalmente precede al episodio de Planificación. Ocupa poco más del 27% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Planificación:**

Este episodio se presenta de manera intermitente durante el segundo tercio y parte del tercer tercio de la sesión durante breves lapsos de tiempo en reiteradas ocasiones, precediendo en cada ocasión al episodio de implementación. Ocupa cerca del 8% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Implementación:**

Este episodio se presenta de manera intermitente durante los dos últimos tercios de la sesión en reiteradas ocasiones, aparece precedido por el episodio de planificación. Ocupa cerca del 20% del tiempo total de la sesión.

### **Episodio de Verificación y argumentación:**

Este episodio aparece durante toda la sesión ocupando una importante parte del tiempo. Aparece antes o después de los episodios de Planificación e implementación. Ocupa cerca más del 41% del tiempo total de la sesión.

### **Momentos de Transición:**

Irrelevantes (menos del 1%).

### **Síntesis del Protocolo 6:**

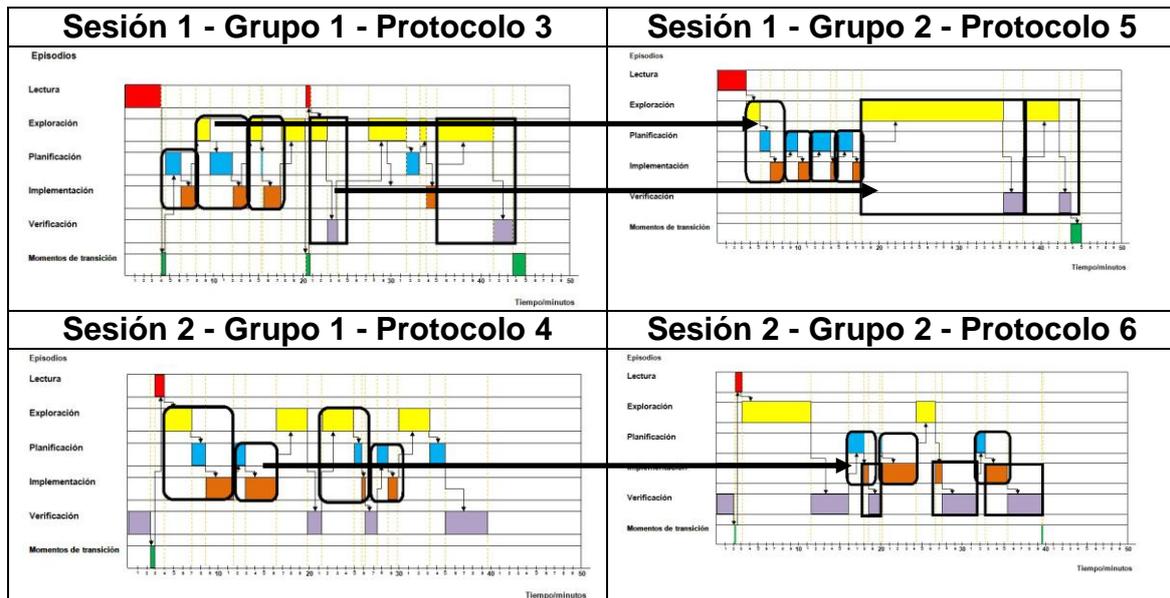
La mayor parte de tiempo, en esta segunda parte del juego, se ha destinado a: Verificación y argumentación (41%), seguido de Exploración y análisis (27%) e Implementación (20%). Los episodios, excepto el episodio de Lectura, que se presenta sólo al principio de la sesión, interactúan de manera intermitente durante el desarrollo de la sesión. Aun así, se puede observar cierto patrón. Después de comenzar con un episodio de Verificación y argumentación, se puede observar el patrón: Planificación-Implementación.

Es especialmente relevante la duración del episodio de Verificación y argumentación en esta segunda parte del juego; esto concuerda con el objetivo del mismo, debido a la necesidad de que los participantes comuniquen y argumenten los hallazgos de estrategias favorecedoras durante el juego.

#### **4.1.5. Síntesis Protocolos Juego A**

El juego A se desarrolló durante dos sesiones. En la primera sesión (Protocolos 3 y 5), los participantes exploraron las primeras ideas en busca de las estrategias favorecedoras del juego. En la segunda sesión (Protocolos 4 y 6), se retoman los hallazgos de la primera sesión, se continúa con la actividad y se comunican y argumentan los hallazgos realizados durante el proceso de resolución.

En el Cuadro 12 se presenta un cuadro comparativo de los cuatro protocolos anteriormente analizados:



**Cuadro 12:** Comparación Protocolos 3, 4, 5 y 6

El Cuadro 12 nos permite por un lado, comparar los protocolos de cada grupo (lectura horizontal) con la finalidad de observar los patrones o regularidades que se producen en las dos sesiones. También nos permite detectar similitudes y diferencias entre las dos parejas (lectura vertical).

En la primera sesión, se observan las siguientes similitudes y diferencias entre los Protocolos 3 y 5:

En ambos protocolos se presentan todos los episodios, pero de manera intermitente, no siguen un orden lineal en sus apariciones. Sin embargo, se pueden observar ciertos patrones durante el desarrollo de las sesiones.

Tanto en el Protocolo 3 como en el Protocolo 5, a partir del episodio de Exploración, se observa la secuencia de aparición siguiente: Exploración y análisis-Planificación-Implementación. También se observa que en el último tercio de la sesión, después de Exploración y análisis se presenta el episodio de Verificación y argumentación.

El episodio más importante en cuanto al tiempo destinado por parte de los participantes, es el episodio de Exploración y análisis, seguido de Planificación e Implementación.

Se observa que en ambos protocolos, los episodios de Planificación e Implementación, se encuentran ligados y en el mismo orden, es decir, que en primer lugar aparece la Planificación y en seguida la Implementación.

A partir del segundo tercio de la sesión, se observa, en los dos protocolos, el patrón Exploración y análisis-Verificación y argumentación, de manera casi exclusiva en el Protocolo 5, pero en ambos es observable. Este salto puede ser

producto del anterior patrón observado: Planificación-Implementación, los cuales conllevan a revisar el proceso realizado.

En la segunda sesión, se observan las siguientes similitudes y diferencias entre los Protocolos 4 y 6:

En ambos protocolos se presentan nuevamente todos los episodios, sin seguir un orden lineal, sin embargo, se pueden observar ciertos patrones durante el desarrollo de las sesiones.

Mientras que en el Protocolo 4, se observa la siguiente secuencia de aparición: Exploración-Planificación-Implementación; en el Protocolo 6, a partir de un episodio de Verificación y argumentación, se observa la secuencia: Planificación-Implementación.

Mientras que en el Protocolo 4, el episodio más importante en cuanto al tiempo destinado por parte de los participantes, es el episodio de Exploración y análisis; en el Protocolo 6, sobresale el episodio de Verificación y argumentación. En ambos protocolos los episodios más recurrentes son los episodios de Planificación e Implementación.

Se observa que en ambos protocolos, los episodios de Planificación e Implementación, se encuentran ligados y en el mismo orden, es decir, que en primer lugar aparece la Planificación y en seguida la Implementación.

## **4.2 Análisis protocolos juego B**

En el juego B: "El 10 gana", cada jugador o pareja puede retirar 1 ó 2 fichas por turno, según quiera. Gana el jugador que recoge la última ficha.

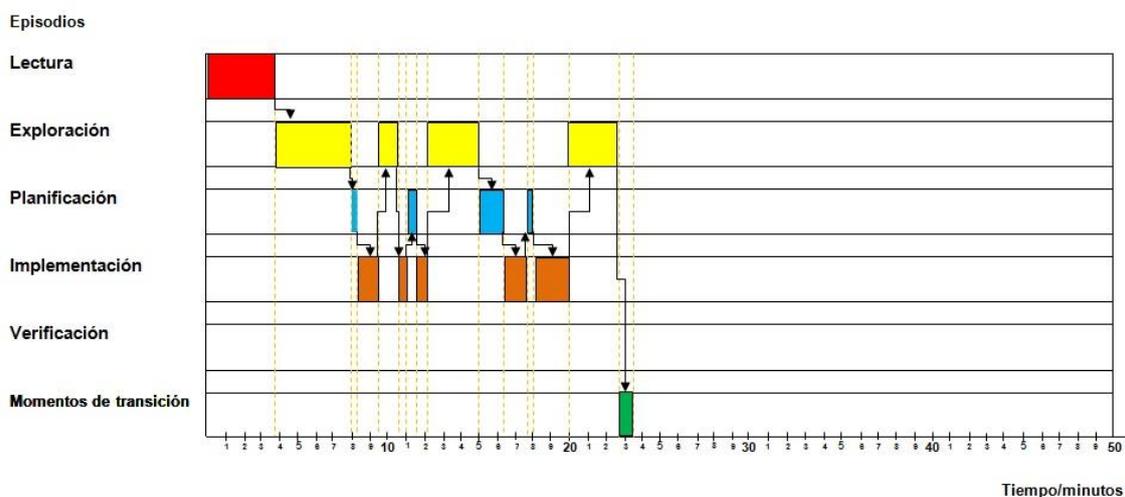
Los protocolos pertenecientes a este juego son los Protocolos 9, 10, 11 y 12.

### 4.2.1. Protocolo 9

Del análisis del Protocolo 9 (Anexo 7.1.9.) se extraen los siguientes datos:

Episodios	Tiempo total en la sesión	% Tiempo	Frecuencia
Lectura	3' 53"	16,54	1
Exploración y Análisis	11' 08"	47,41	4
Planificación	2' 28"	10,50	4
Implementación	5' 09"	21,93	5
Verificación	0	0	0
Momento de transición	51"	3,62	1
Total	23' 30"	100	15

**Tabla 7:** Duración y frecuencia de cada episodio durante una sesión de juego: Protocolo 9



**Cuadro 12:** Línea de tiempo del Protocolo 9

En el Cuadro 12, correspondiente al Protocolo 9, podemos apreciar la aparición de cuatro de los cinco episodios durante la sesión.

A partir de los datos observados en la Tabla 7 y Cuadro 12, correspondientes al análisis del Protocolo 9, Juego B, primera parte, Grupo 1, parejas 1 y 2, se extraen los siguientes resultados:

#### Episodio de Lectura:

Este episodio aparece brevemente al inicio de la sesión. Este episodio ocupa poco más del 16% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Exploración y análisis:**

Este episodio aparece de manera intermitente a lo largo de la sesión, precede al episodio de planificación y ocupa importantes lapsos de tiempo en cada aparición. Ocupa más del 47% del tiempo total de la sesión y se presenta en varias ocasiones.

**Episodio de Planificación:**

Este episodio se presenta de manera intermitente a lo largo de la sesión, sus apariciones son breves, pero reiteradas, aparece ligado en cada ocasión con el episodio de implementación. Este episodio ocupa poco más del 10% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Implementación:**

Este episodio se presenta de manera intermitente a lo largo de la sesión, sus apariciones son breves, pero reiteradas, aparece precedido por el episodio de planificación. Este episodio ocupa casi un 22% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Verificación:**

Este episodio no se observa en este protocolo.

**Momentos de Transición:**

Se presenta brevemente ocupando poco más del 3% del tiempo total de la sesión.

**Síntesis del Protocolo 9:**

La mayor parte de tiempo en esta sesión se ha destinado a: Exploración y análisis (47%). Seguido de Lectura e Implementación.

En esta primera parte del desarrollo del Juego B, no se presenta el episodio de Verificación y argumentación. Los episodios, excepto el episodio de Lectura que se presenta sólo al principio de la sesión, se suceden de manera intermitente durante el desarrollo de la sesión. Aun así, se puede observar cierto patrón.

Después del episodio de Lectura, se puede observar el patrón: Exploración y análisis-Planificación-Implementación en reiteradas ocasiones.

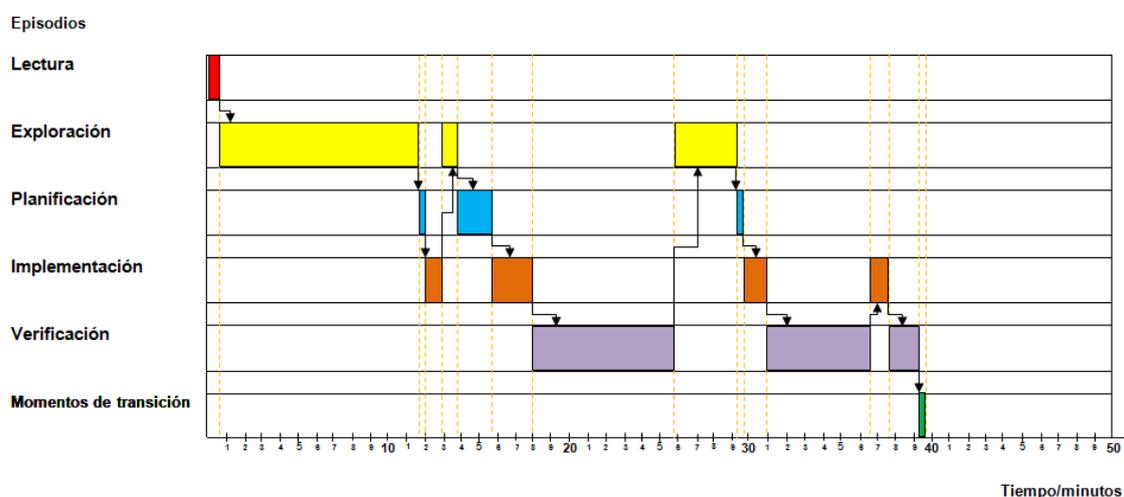
Los episodios más recurrentes son los de Planificación e Implementación.

## 4.2.2. Protocolo 10

Del análisis del Protocolo 10 (Anexo 7.1.10.) se extraen los siguientes datos:

Episodios	Tiempo total en la sesión	% Tiempo	Frecuencia
Lectura	18''	0,75	1
Exploración y Análisis	15' 54''	39,92	3
Planificación	2' 25''	6,07	3
Implementación	5' 09''	12,93	4
Verificación	15' 36''	39,16	3
Momento de transición	28''	1,17	1
Total	39' 48''	100	15

**Tabla 8:** Duración y frecuencia de cada episodio durante una sesión de juego: Protocolo 10



**Cuadro 12:** Línea de tiempo del Protocolo 10

En el Cuadro 12, correspondiente al Protocolo 10, podemos apreciar la aparición de los cinco episodios durante la sesión.

A partir de los datos observados en la Tabla 8 y Cuadro 12, correspondientes al análisis del Protocolo 9, Juego B, segunda parte, Grupo 1, parejas 1 y 2, se extraen los siguientes resultados:

### Episodio de Lectura:

Este episodio aparece brevemente al inicio de la sesión. Ocupa menos del 1% del tiempo total de la sesión.

### **Episodio de Exploración y análisis:**

Este episodio aparece de manera intermitente a lo largo de la sesión, precede a los episodios de planificación e implementación y ocupa importantes espacios de tiempo, especialmente en el primer tercio de la sesión. Ocupa el 40% del tiempo total de la sesión.

### **Episodio de Planificación:**

Este episodio se presenta de manera intermitente a lo largo de la sesión sus apariciones son breves, aparece ligado en cada ocasión con el episodio de implementación. Ocupa el 6% del tiempo total de la sesión y se presenta en reiteradas ocasiones.

### **Episodio de Implementación:**

Este episodio se presenta de manera intermitente a lo largo de la sesión, aparece precedido por el episodio de planificación. Ocupa el 13% del tiempo total de la sesión.

### **Episodio de Verificación y argumentación:**

Este episodio se presenta a partir de la segunda mitad de la sesión ocupando importantes lapsos de tiempo en cada aparición. Ocupa casi el 40% del tiempo total de la sesión.

### **Momentos de Transición:**

Irrelevante (1% de la sesión)

### **Síntesis del Protocolo:**

La mayor parte de tiempo en esta sesión se ha destinado a: Exploración y análisis (40%) y Verificación y argumentación (40%). Los episodios, excepto el episodio de Lectura que se presenta sólo al principio de la sesión, interactúan de manera intermitente durante el desarrollo de la sesión. Aun así, se puede observar cierto patrón.

Después del episodio de Exploración y análisis, se puede observar el patrón: Planificación-Implementación durante toda la sesión y Planificación-Implementación-Verificación y argumentación a partir del segundo tercio de la sesión.

Los episodios que se presenta con mayor frecuencia son los de Planificación e Implementación.

Se observa que en esta segunda sesión, el episodio de Lectura es casi irrelevante (1%), mientras que Exploración y análisis, y Verificación y argumentación, se presentan ambos cerca del 40%, muestran la importancia

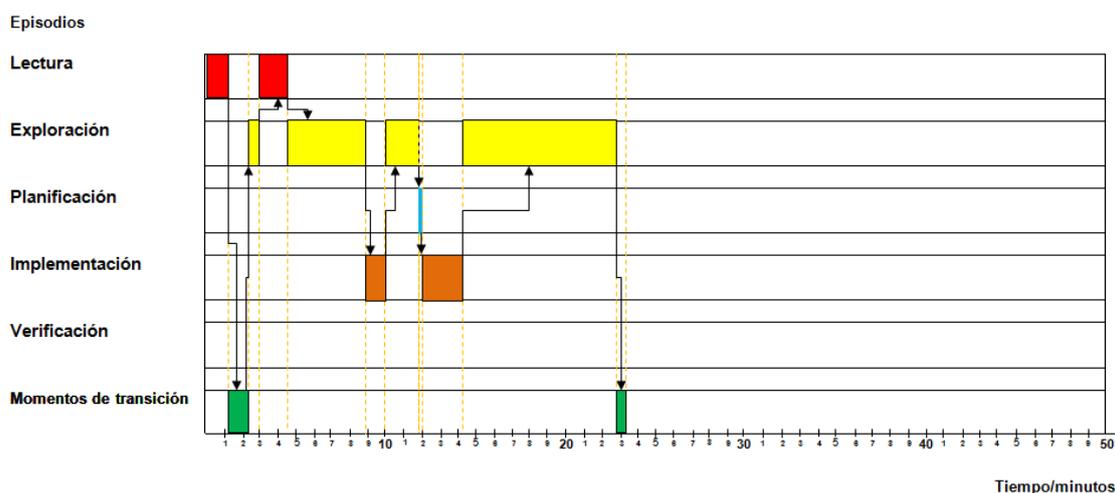
que se requiere para la comprensión y análisis de las estrategias favorecedoras del juego halladas durante la resolución.

### 4.2.3. Protocolo 11

Del análisis del Protocolo 11 (Anexo 7.1.11.) se extraen los siguientes datos:

Episodios	Tiempo total en la sesión	% Tiempo	Frecuencia
Lectura	2' 33"	10,91	2
Exploración y Análisis	15' 10"	64,86	4
Planificación	28"	1,99	1
Implementación	3' 13"	13,76	2
Verificación	0	0	0
Momento de transición	1' 59"	8,48	2
Total	23' 24"	100	11

**Tabla 9:** Duración y frecuencia de cada episodio durante una sesión de juego: Protocolo 11



**Cuadro 13:** Línea de tiempo del Protocolo 11

En el Cuadro 13, correspondiente al Protocolo 11, podemos apreciar la aparición de los cinco episodios durante la sesión.

A partir de los datos observados en la Tabla 9 y Cuadro 13, correspondientes al análisis del Protocolo 9, Juego B, primera parte, Grupo 2, parejas 3 y 4, se extraen los siguientes resultados:

#### Episodio de Lectura:

Este episodio aparece al inicio de la sesión. Ocupa cerca del 11% del tiempo total de la sesión.

#### **Episodio de Exploración y análisis:**

Este episodio aparece de manera intermitente a lo largo de la sesión, precede generalmente al episodio de Planificación y ocupa importantes lapsos de tiempo. Este episodio ocupa poco más del 65% del tiempo total de la sesión.

#### **Episodio de Planificación:**

Este episodio se presenta brevemente en el segundo tercio de la sesión. Ocupa el 1% del tiempo total de la sesión.

#### **Episodio de Implementación:**

Este episodio se presenta en el segundo tercio de la sesión, aparece precedido por el episodio de planificación. Ocupa casi 14% del tiempo total de la sesión.

#### **Episodio de Verificación y argumentación:**

Este episodio no se observa en este protocolo.

#### **Momentos de Transición:**

Se presenta al brevemente ocupando casi el 9% del tiempo total de la sesión.

#### **Síntesis del Protocolo 11:**

La mayor parte de tiempo en esta sesión se ha destinado a: Exploración y análisis (65%).

En esta primera parte del desarrollo del Juego B, no se presenta el episodio de Verificación y argumentación. Todos los episodios, excepto el episodio de Lectura que se presenta sólo al principio de la sesión, interactúan de manera intermitente durante el desarrollo de la sesión. Se observa que después de la Exploración y análisis viene el episodio de Implementación o de Planificación.

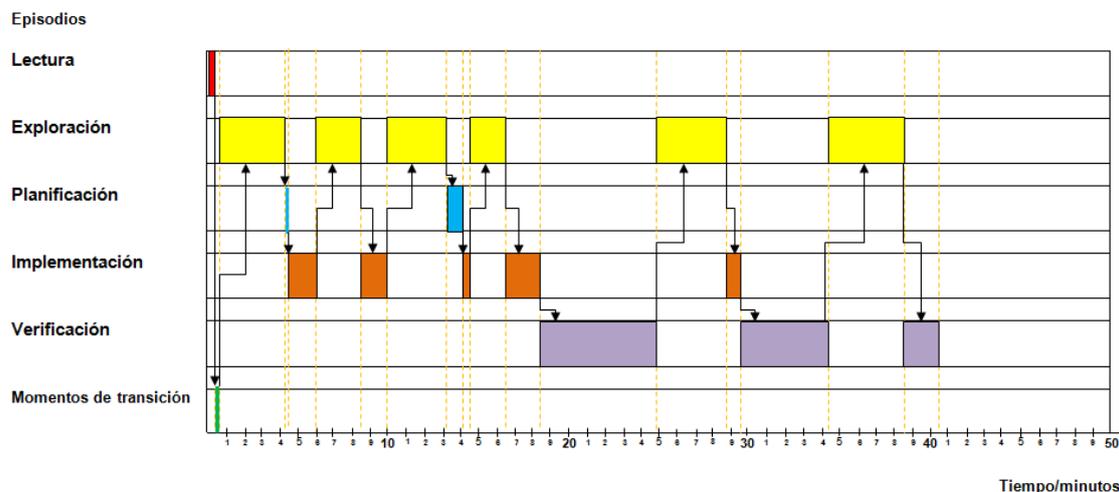
El episodio que se presenta con mayor frecuencia es el de Exploración y análisis, seguido de Implementación.

#### **4.2.4. Protocolo 12**

Del análisis del Protocolo 12 (Anexo 7.1.12.) se extraen los siguientes datos:

Episodios	Tiempo total en la sesión	% Tiempo	Frecuencia
Lectura	21''	0,87	1
Exploración y Análisis	19' 24''	48,46	6
Planificación	1' 02''	2,58	2
Implementación	6' 07''	15,28	5
Verificación	12' 50''	32,06	3
Momento de transición	18''	0,75	1
Total	40' 01''	100	18

**Tabla 10:** Duración y frecuencia de cada episodio durante una sesión de juego: Protocolo 12



**Cuadro 14:** Línea de tiempo del Protocolo 12

En el Cuadro 14, correspondiente al Protocolo 12, podemos apreciar la aparición de los cinco episodios durante la sesión.

A partir de los datos observados en la Tabla 10 y Cuadro 14, correspondientes al análisis del Protocolo 12, Juego B, segunda parte, Grupo 2, parejas 3 y 4, se extraen los siguientes resultados:

#### **Episodio de Lectura:**

Este episodio aparece al inicio de la sesión. Ocupa menos del 1% del tiempo total de la sesión.

#### **Episodio de Exploración y análisis:**

Este episodio aparece de manera intermitente a lo largo de la sesión, precede generalmente al episodio de planificación y ocupa importantes lapsos de

tiempo en cada aparición. Ocupa poco más del 48% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Planificación:**

Este episodio se presenta brevemente al final del primer tercio y ocupa poco más del 2% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Implementación:**

Este episodio se presenta a lo largo de la sesión, de manera más frecuente durante los dos primeros tercios de la sesión. Ocupa poco más del 15% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Verificación y argumentación:**

Este episodio aparece a partir de la mitad de la sesión, ocupando una parte importante del tiempo en cada aparición, se presenta tanto antes como después de un episodio de exploración. Ocupa el 32% del tiempo total de la sesión.

**Momentos de Transición:**

Irrelevante (menos del 1%).

**Síntesis del Protocolo 12:**

La mayor parte de tiempo de esta sesión se ha destinado a: Exploración y análisis (48%) y Verificación y argumentación (32%).

Todos los episodios, excepto el episodio de Lectura que se presenta sólo al principio de la sesión, interactúan de manera intermitente durante el desarrollo de la sesión. Aun así, se puede observar cierto patrón.

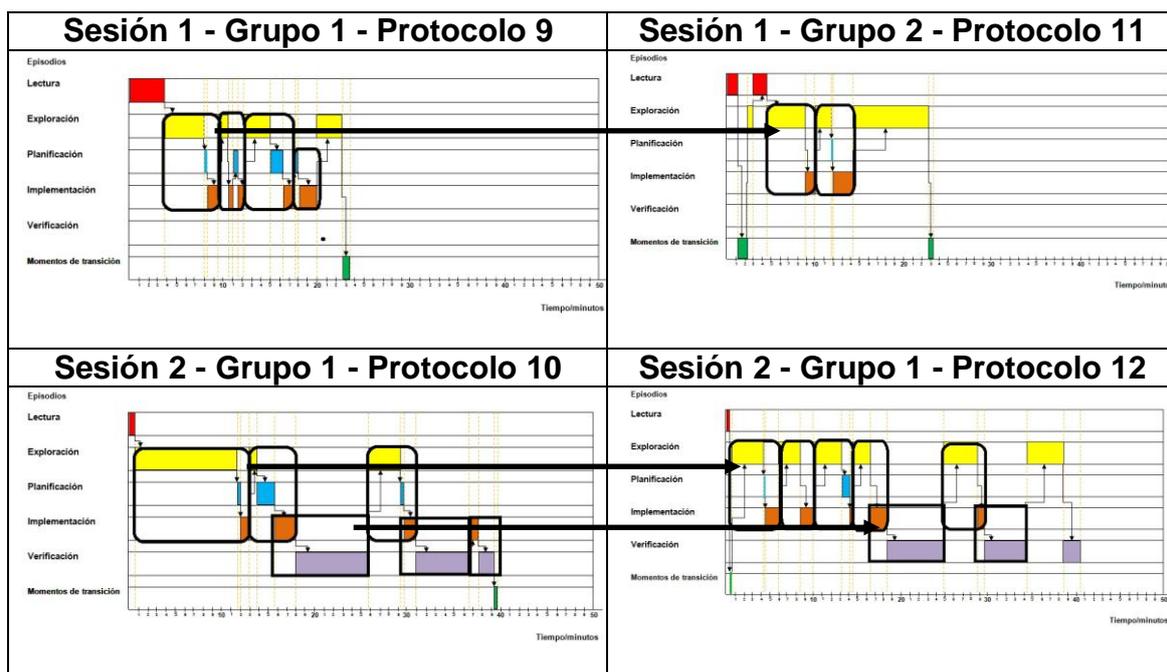
Durante la primera mitad de la sesión, después del episodio de Exploración, se puede observar el patrón: Planificación-Implementación y durante la segunda mitad de la sesión, se puede observar el patrón: Planificación-Implementación-Verificación y argumentación.

Los episodios que se presentan con mayor frecuencia son: Implementación y Exploración y análisis.

**4.2.5. Síntesis Protocolos Juego B**

Este juego se desarrolló durante dos sesiones, en la primera sesión, los participantes exploraron en las primeras ideas en busca de las estrategias favorecedoras del juego. En la segunda sesión, se retomaron los hallazgos de la primera sesión y se continuó con la actividad.

A continuación se presenta un cuadro comparativo de los cuatro protocolos anteriormente analizados:



**Cuadro 15:** Comparación Protocolos 9, 10, 11 y 12

El Cuadro 15 nos permite por un lado, comparar los protocolos de cada grupo (lectura horizontal) con la finalidad de observar los patrones o regularidades que se producen en las dos sesiones. También nos permite detectar similitudes y diferencias entre las dos parejas (lectura vertical).

En la primera sesión, se observan las siguientes similitudes y diferencias entre los Protocolos 9 y 11.

Durante la primera sesión, en ninguno de los dos protocolos se observa el episodio de Verificación y argumentación. Los demás episodios se presentan de manera intermitente, no siguiendo un orden lineal. No se observan patrones repetitivos importantes, pero sigue observándose la relación entre los episodios de Planificación e Implementación.

En ambos Protocolos, el episodio más importante en cuanto al tiempo destinado por parte de los participantes, es el episodio de Exploración y análisis. Mientras que en el Protocolo 9 el episodio más recurrente es el de Implementación, en el Protocolo 11, el episodio más frecuente es el de Exploración y análisis.

En la segunda sesión, se observan las siguientes similitudes y diferencias entre los Protocolos 10 y 12.

En ambos protocolos se presentan nuevamente todos los episodios, pero de manera intermitente, no siguiendo un orden lineal, pero si se puede observar

ciertos patrones durante el desarrollo de las sesiones. Durante el primer tercio de la sesión se observa la secuencia: Exploración y análisis-Planificación-Implementación. A partir del segundo tercio, se observa también la secuencia: Planificación-Verificación y argumentación.

Los episodios más importantes en cuanto al tiempo destinado por parte de los participantes, son los de Exploración y análisis, y Verificación y argumentación. En ambos protocolos los episodios más recurrentes son los episodios de Implementación, pero en el Protocolo 12, también es recurrente el episodio de Exploración y análisis.

Se observa que en todos los protocolos, los episodios de Planificación e Implementación, se encuentran ligados y en el mismo orden, es decir, que en primer lugar aparece la Planificación y en seguida la Implementación.

### **4.3 Comparación resultados Juego A y Juego B**

En el desarrollo de ambas actividades: Juego A y B, se observan más similitudes que diferencias.

En la resolución de ambos juegos, se presentan los episodios de manera intermitente durante las sesiones, no se observa un orden lineal en las apariciones de los episodios, pero si es posible observar ciertos patrones recurrentes.

El episodio que ocupa la mayor parte de tiempo es de Exploración y análisis y los episodios más recurrentes son los de Planificación-Implementación en el desarrollo del Juego A; y los episodios de Exploración y análisis, Planificación e Implementación en el desarrollo del Juego B.

El patrón más significativo de los episodios observados en ambos juegos, es el siguiente: Exploración y análisis-Planificación-Implementación. Sin embargo, durante las segundas sesiones, el episodio de Verificación y argumentación cobra relevancia. Esto puede deberse a las siguientes razones: durante la primera sesión, los participantes se familiarizan con las normas del juego, exploran y analizan sus jugadas mediante el ensayo y error, realizando varias jugadas antes de comenzar a observar qué algo sucede. A partir de estas suposiciones planifican jugadas y las implementan en varias ocasiones, sin llegar a una conclusión acerca de la posible estrategia favorecedora.

Durante la segunda sesión, comienzan a jugar con una idea más clara del juego, manejan las normas del mismo completamente y ya saben qué sucede con determinados movimientos. En esta etapa comienzan el juego con una posible estrategia favorecedora en mente, pero de la cual aún no están seguros, de manera que exploran, planifican e implementan movimientos en diversas partidas que le permitan fortalecer o derribar esta idea.

A partir, de las comprobaciones de estas ideas comienza el episodio de Verificación, en donde los estudiantes comunican y argumentan sus hallazgos. Para ello, realizan partidas de comprobación, explicando el por qué la estrategia encontrada es favorecedora, llegando a la solución parcial o total de la tarea planteada.

A partir de esta Verificación y argumentación, si se dan cuenta que aún no han encontrado la estrategia favorecedora, vuelven a realizar los episodios de Exploración y análisis, Planificación e Implementación, finalizando nuevamente con la Verificación y argumentación de los hallazgos. Este proceso puede darse en más de dos ocasiones en el caso de los juegos.

#### 4.4 Análisis protocolos Problema A

En los apartados anteriores hemos analizado los juegos propuestos en la investigación. Ahora vamos a realizar un análisis de los problemas A y B siguiendo la misma estructura.

**Problema A:** “Suma de números”, el enunciado es el siguiente: ¿Cómo se puede encontrar la suma de todos los números del 1 al 20 sin sumarlos todos uno por uno? Explicad cómo lo haríais.

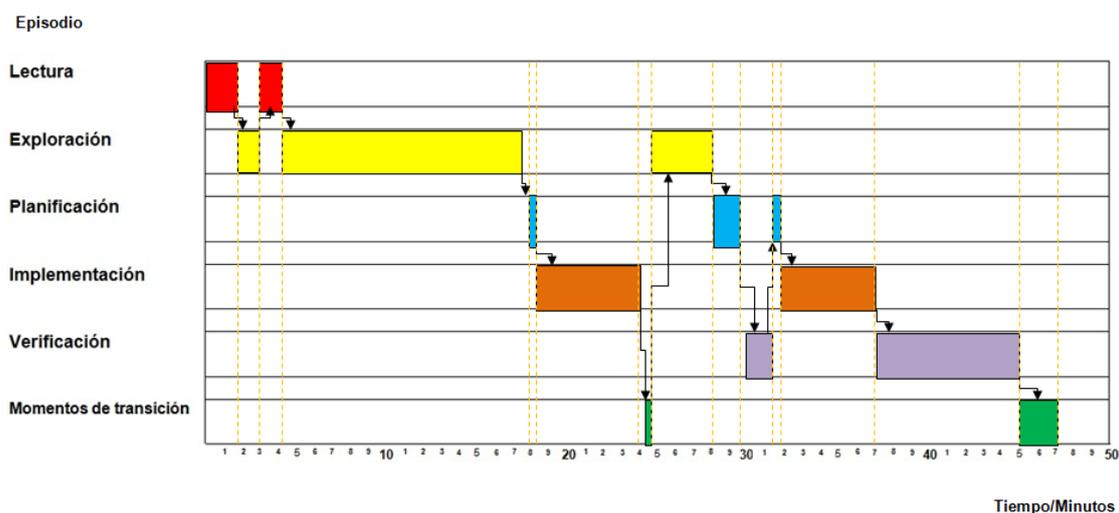
¿Podríais hacerlo de la misma manera con los números del 1 al 25? Explicad cómo lo haríais.

##### 4.4.1. Protocolo 1- Pareja 1

Del análisis del Protocolo 1-Pareja 1 (Anexo 7.1.1.) se extraen los siguientes datos:

Episodios	Tiempo total en la sesión	% Tiempo	Frecuencia
Lectura	2' 24"	5,03	2
Exploración y Análisis	20' 35"	43,10	3
Planificación	2' 06"	4,40	3
Implementación	10' 32"	22,06	2
Verificación y argumentación	9' 20"	19,55	2
Momento de transición	2' 48"	5,86	2
Total	46' 45"	100	14

**Tabla 11:** Duración y frecuencia de cada episodio durante una sesión de juego: Protocolo 1- Pareja 1



**Cuadro 16:** Línea de tiempo del Protocolo 1-Pareja 1

En el Cuadro 16, correspondiente al Protocolo 1-Pareja 1, podemos apreciar la aparición de los cinco episodios durante la sesión.

A partir de los datos observados en la Tabla 11 y Cuadro 16, correspondientes al análisis del Protocolo 1, Problema A, Grupo 1, pareja 1; se extraen los siguientes resultados:

**Episodio de Lectura:**

Este episodio aparece brevemente al inicio de la sesión y ocupa poco más del 5% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Exploración y análisis:**

Este episodio aparece de manera intermitente a lo largo de la sesión durante los dos primeros tercios de la sesión, precede generalmente al episodio de Planificación y ocupa importantes lapsos de tiempo en cada aparición. Ocupa poco más del 39% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Planificación:**

Este episodio se presenta brevemente a partir del segundo tercio de la sesión. Ocupa poco más del 4% del total de la sesión.

**Episodio de Implementación:**

Este episodio se presenta, a partir del segundo tercio de la sesión. Ocupa poco más del 23% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Verificación y argumentación:**

Este episodio aparece durante el tercer tercio de la sesión, ocupando una parte importante del tiempo. Ocupa casi el 20% del tiempo total de la sesión.

### **Momentos de Transición:**

Se presenta brevemente a lo largo de la sesión. En el Protocolo ocupa poco más del 6% del tiempo total de la sesión.

### **Síntesis del Protocolo 1-Pareja 1:**

En síntesis, la mayor parte del tiempo en esta sesión se ha destinado a: Exploración y análisis (39%), seguidos de Implementación (23%) y Verificación y argumentación (20%). Los episodios, excepto el episodio de Lectura que se presenta sólo al principio de la sesión, interactúan de manera intermitente durante el desarrollo de la sesión.

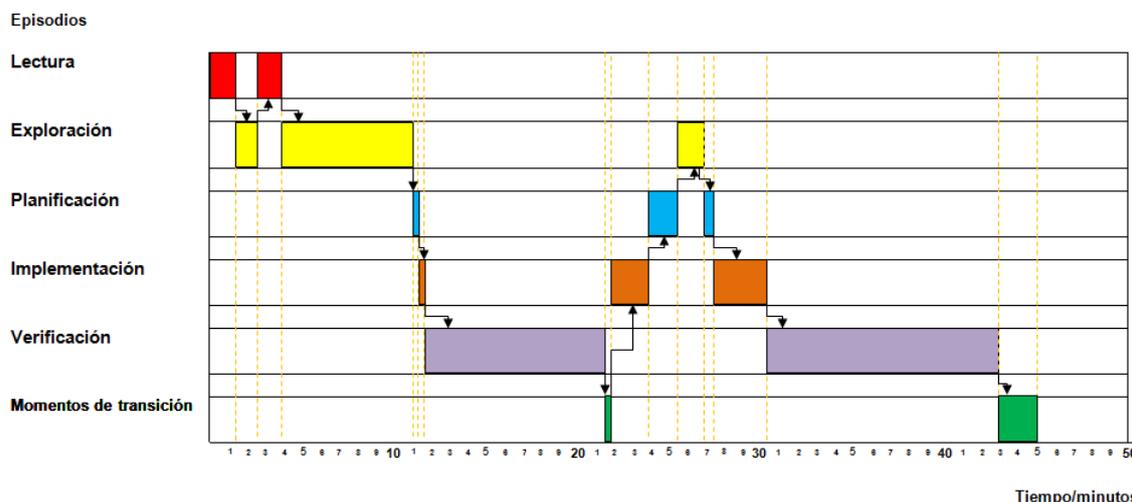
Los episodios más frecuentes son los de Lectura, Planificación e Implementación.

#### **4.4.2. Protocolo 1-Pareja 2**

Del análisis del Protocolo 1-Pareja 2 (Anexo 7.1.1.) se extraen los siguientes datos:

<b>Episodios</b>	<b>Tiempo total en la sesión</b>	<b>% Tiempo</b>	<b>Frecuencia</b>
Lectura	4' 30"	9,82	2
Exploración y Análisis	9' 19"	20,33	3
Planificación	25"	0,91	3
Implementación	4' 34"	9,97	3
Verificación y argumentación	24' 13"	52,86	2
Momento de transición	2' 48"	6,11	2
Total	45' 49"	100	15

**Tabla 10:** Duración y frecuencia de cada episodio durante una sesión de juego: Protocolo 1-Pareja 2



**Cuadro 17:** Línea de tiempo del Protocolo 1-Pareja 2

En el Cuadro 17, correspondiente al Protocolo 1-Pareja 2, podemos apreciar las apariciones de los cinco episodios durante la sesión.

A partir de los datos observados en la Tabla 12 y Cuadro 17, correspondientes al análisis del Protocolo 1, Problema A, Grupo 1, pareja 2; se extraen los siguientes resultados:

**Episodio de Lectura:**

Este episodio aparece brevemente al inicio de la sesión. Ocupa poco más del 9% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Exploración y análisis:**

Este episodio aparece de manera intermitente durante los dos primeros tercios de la sesión. Ocupa poco más del 20% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Planificación:**

Este episodio se presenta brevemente durante el segundo tercio de la sesión, ocupando menos del 1% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Implementación:**

Este episodio se presenta brevemente durante el segundo tercio de la sesión, ocupando poco más del 9% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Verificación y argumentación:**

Este episodio aparece a partir del segundo tercio de la sesión, ocupando una parte importante del tiempo en cada aparición. Ocupa más del 53% del tiempo total de la sesión.

**Momentos de Transición:**

Se presenta brevemente a lo largo de la sesión, ocupando casi el 6% del tiempo total de la sesión.

### **Síntesis del Protocolo 1-Pareja 2:**

La mayor parte de tiempo en esta sesión se ha destinado a: Verificación y argumentación (53%), seguido de Exploración y análisis(20%). Los episodios, excepto el episodio de Lectura que se presenta sólo al principio de la sesión, interactúan de manera intermitente durante el desarrollo de la sesión. Se observa la secuencia: Exploración y análisis-Planificación-Implementación-Verificación y argumentación en dos oportunidades.

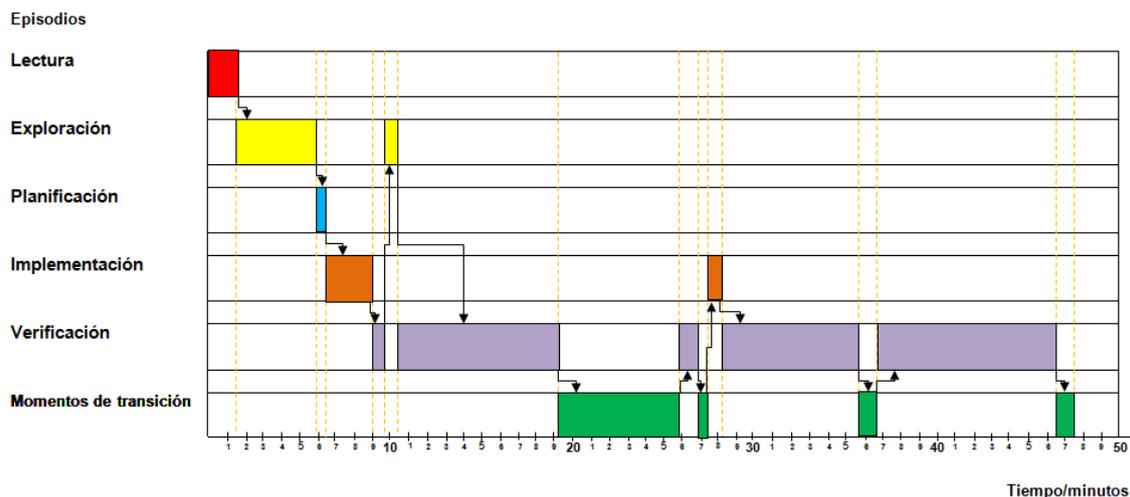
La mayoría de los episodios se presentan con la misma frecuencia.

### **4.4.3. Protocolo 2-Pareja 3**

Del análisis del Protocolo 2-Pareja 3 (Anexo 7.1.2.) se extraen los siguientes datos:

<b>Episodios</b>	<b>Tiempo total en la sesión</b>	<b>% Tiempo</b>	<b>Frecuencia</b>
Lectura	57"	1,98	1
Exploración y Análisis	5' 08"	10,68	2
Planificación	31"	1,07	1
Implementación	3' 14"	6,72	2
Verificación y argumentación	27' 43"	57,64	5
Momento de transición	10' 32"	21,91	4
Total	48' 05"	100	15

**Tabla 13:** Duración y frecuencia de cada episodio durante una sesión de juego: Protocolo 2-Pareja 3



**Cuadro 18:** Línea de tiempo del Protocolo

En el Cuadro 18, correspondiente al Protocolo 2-Pareja 3, podemos apreciar la aparición de los cinco episodios durante la sesión.

A partir de los datos observados en la Tabla 13 y Cuadro 18, correspondientes al análisis del Protocolo 2, Problema A, Grupo 2, pareja 3, se extraen los siguientes resultados:

**Episodio de Lectura:**

Este episodio aparece brevemente al inicio de la sesión. Ocupa cerca del 2% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Exploración y análisis:**

Este episodio aparece durante el primer tercio de la sesión. Ocupa cerca del 11% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Planificación:**

Este episodio se presenta brevemente al inicio de la sesión. Ocupa el 1% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Implementación:**

Este episodio se presenta durante los dos primeros tercios de la sesión. Ocupa casi el 7% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Verificación y argumentación:**

Este episodio aparece a lo largo de la sesión, ocupando una parte importante del tiempo en cada aparición. Ocupa casi el 58% del tiempo total de la sesión y se presenta en reiteradas ocasiones.

**Momentos de Transición:**

Se presenta de manera intermitente a lo largo de la sesión. En el Protocolo ocupan casi el 22% y se presenta en reiteradas ocasiones.

### **Síntesis del Protocolo 2-Pareja 3:**

La mayor parte de tiempo en esta sesión se ha destinado a: Verificación y argumentación (58%), seguido de los Momentos de Transición (22%) y de Exploración y análisis (11%). Los episodios, excepto el episodio de Lectura que se presenta sólo al principio de la sesión, interactúan de manera intermitente durante el desarrollo de la sesión. No se observa un patrón repetitivo importante.

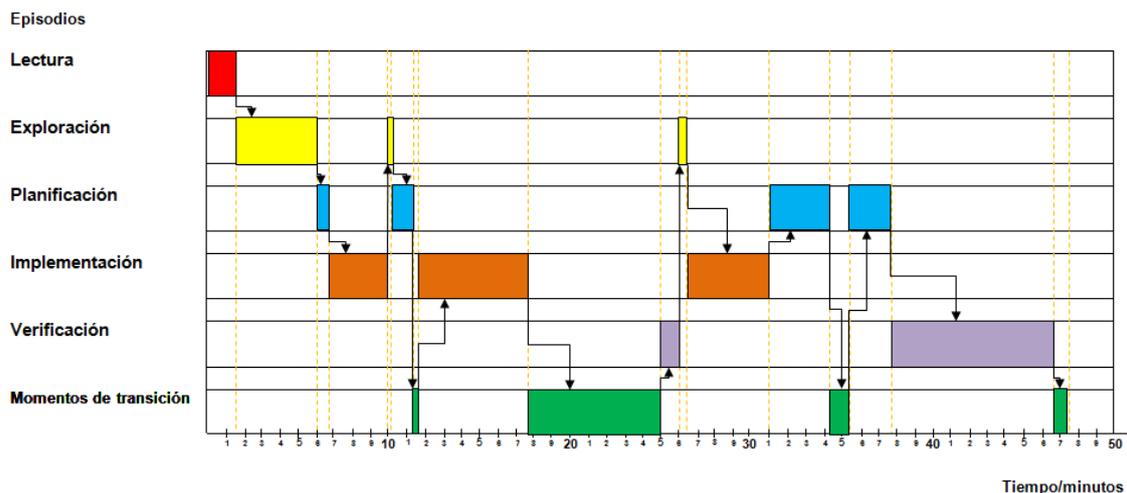
El episodio que se presenta con mayor frecuencia es el Verificación y argumentación (8). También se presenta frecuentemente los Momentos de Transición (7).

#### **4.4.4. Protocolo 2-Pareja 4**

Del análisis del Protocolo 2-Pareja 4 (Anexo 7.1.2.) se extraen los siguientes datos:

<b>Episodios</b>	<b>Tiempo total en la sesión</b>	<b>% Tiempo</b>	<b>Frecuencia</b>
Lectura	57''	2,02	1
Exploración y Análisis	5' 16''	11,21	3
Planificación	7' 50''	16,68	4
Implementación	13' 59''	29,77	3
Verificación y argumentación	8' 57''	19,06	2
Momento de transición	9' 59''	21,26	4
Total	46' 58''	100	17

**Tabla 14:** Duración y frecuencia de cada episodio durante una sesión de juego: Protocolo 2-Pareja 4



**Cuadro 19:** Línea de tiempo del Protocolo

En el Cuadro 19, correspondiente al Protocolo 2-Pareja 4, podemos apreciar la aparición de los cinco episodios durante la sesión.

A partir de los datos observados en la Tabla 14 y Cuadro 19, correspondientes al análisis del Protocolo 2, Problema A, Grupo 2, pareja 4; se extraen los siguientes resultados:

**Episodio de Lectura:**

Este episodio aparece brevemente al inicio de la sesión. Ocupa el 2% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Exploración y análisis:**

Este episodio aparece durante el primer tercio de la sesión. Ocupa el 11% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Planificación:**

Este episodio se presenta a lo largo de la sesión. Ocupa casi el 16% del tiempo total de la sesión y se presenta en reiteradas ocasiones.

**Episodio de Implementación:**

Este episodio se presenta durante los dos primeros tercios de la sesión. Ocupa casi el 30% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Verificación y argumentación:**

Este episodio aparece a partir de la segunda mitad de la sesión. Ocupa casi el 19% del tiempo total de la sesión.

**Momentos de Transición:**

Se presenta de manera intermitente a lo largo de la sesión. En el Protocolo ocupan el 22% y se presenta en reiteradas ocasiones.

#### **Síntesis del Protocolo 2-Pareja 4:**

En síntesis, la mayor parte del tiempo de esta sesión se ha destinado a: Implementación (30%), seguido de Planificación (16%), los Momentos de Transición ocupan una importante parte del tiempo (22%).

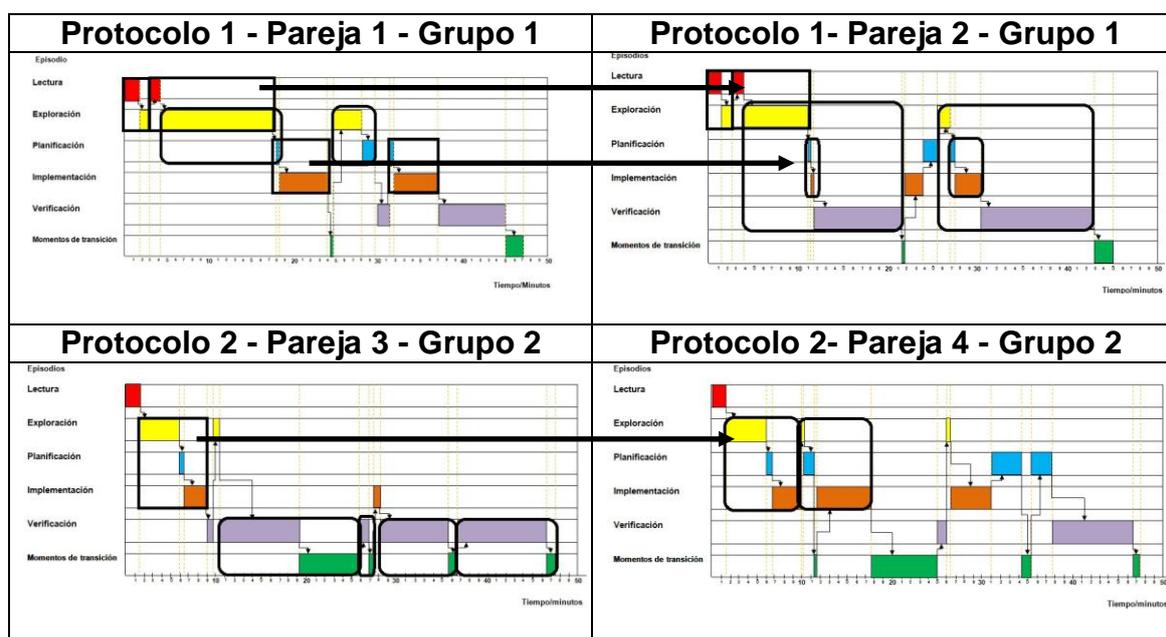
Todos los episodios, excepto el episodio de Lectura que se presenta sólo al principio de la sesión, interactúan de manera intermitente durante el desarrollo de la sesión. Se observa el siguiente patrón: Exploración y análisis-Planificación-Implementación durante el primer tercio de la sesión.

El episodio que se presenta con mayor frecuencia es el Verificación y argumentación, seguido de los Momentos de Transición.

#### **4.4.5. Síntesis Protocolos Problema A**

Este problema se desarrolló en una sola sesión, los alumnos trabajaron en parejas, pero dentro de los grupos originales. Se observan las siguientes similitudes y diferencias entre los Protocolos 1-pareja 1 (Grupo 1), Protocolo 1-Pareja 2 (Grupo 1), y Protocolo 2-Parejas 3 (Grupo 2) y Protocolo 2-pareja 4 (Grupo 2).

A continuación se presenta un cuadro comparativo de los cuatro protocolos anteriormente analizados:



**Cuadro 20:** Comparación Protocolos 1 y 2

En los cuatro protocolos se presentan todos los episodios. Excepto el episodio de Lectura que se presenta sólo al principio de la sesión, los demás interactúan de manera intermitente durante el desarrollo de la sesión.

En los protocolos correspondientes al Grupo 1, la frecuencia de la aparición de cada episodio es similar, se observa al principio de la sesión la siguiente secuencia: Lectura-Exploración y análisis en dos oportunidades. A partir de este patrón aparecen los demás episodios, pero no se observa otro patrón común. Los episodios de Planificación e implementación se presentan ligados y en dos ocasiones aparecen de esta manera: Planificación-Implementación.

En cuanto a los episodios que ocupan una importante porción del tiempo total de la sesión, existen diferencias entre ambos episodios. Mientras que en el Protocolo 1-Pareja 1, el episodio más significativo es el de Exploración y análisis; en el Protocolo 1-Pareja 2, el episodio más significativo es el de Verificación y argumentación.

En los protocolos correspondientes al Grupo 2, se pueden observar más diferencias que similitudes. Comparten una secuencia similar al principio de la sesión: Lectura-Exploración y análisis-Planificación-Implementación, a partir de esta secuencia los demás episodios aparecen de manera intermitente. Otro aspecto común entre ambos protocolos, es que los episodios más recurrentes fueron los de Verificación y argumentación y los Momentos de Transición.

Se observan las siguientes diferencias: en el Protocolo 2-Pareja 3, la mayor parte del tiempo se destinó al episodio de Verificación; mientras que en el Protocolo 2-Pareja 4, la mayor parte del tiempo se destinó al episodio de Implementación.

## 4.5 Análisis protocolos Problema B

**Problema B:** “Números consecutivos”, el enunciado es el siguiente:

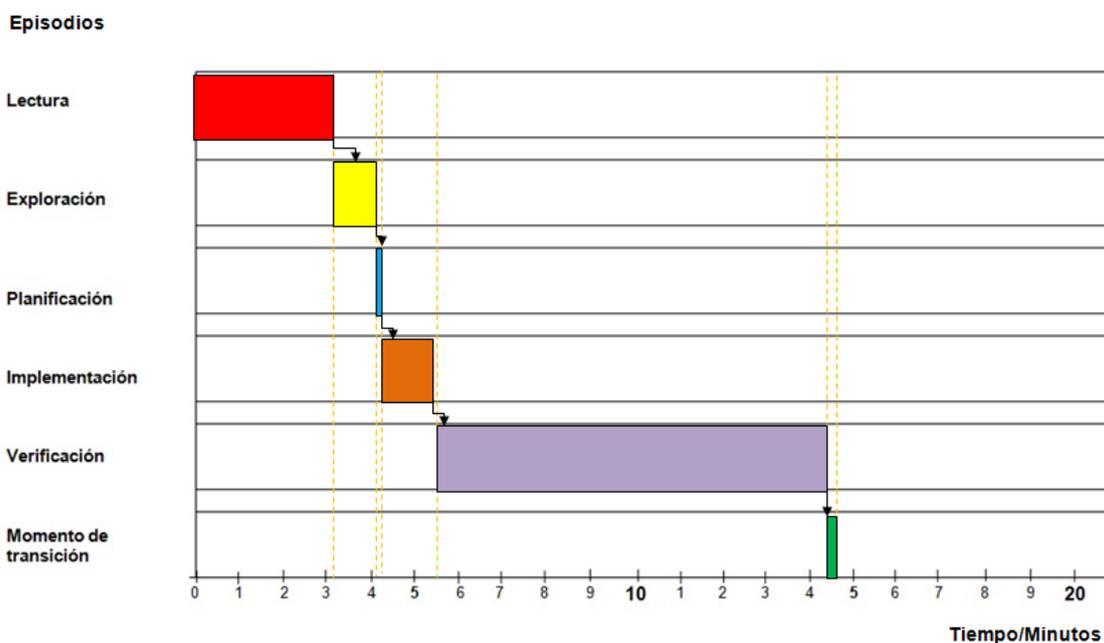
El número 21 puede expresarse como:  $6+7+8$ . ¿Cuáles son los números que se pueden expresar como suma de tres números consecutivos? Explicad por qué son estos números.

### 4.5.1. Protocolo 7

Del análisis del Protocolo 7 (Anexo 7.1.7.) se extraen los siguientes datos:

Episodios	Tiempo total en la sesión	% Tiempo	Frecuencia
Lectura	2' 41''	17,81	1
Exploración y Análisis	59''	6,52	1
Planificación	49''	5,42	1
Implementación	1' 29'	9,85	1
Verificación y argumentación	8' 34''	56,86	1
Momento de transición	32''	3,54	1
Total	15' 04''	100	6

**Tabla 15:** Duración y frecuencia de cada episodio durante una sesión de juego: Protocolo 7



**Cuadro 21:** Línea de tiempo del Protocolo 7

En el Cuadro 21, correspondiente al Protocolo 7, podemos apreciar la aparición de los cinco episodios durante la sesión.

A partir de los datos observados en la Tabla 15 y Cuadro 21, correspondientes al análisis del Protocolo 7, Problema B, Grupo 1, parejas 1 y 2; se extraen los siguientes resultados:

#### Episodio de Lectura:

Este episodio aparece al inicio de la sesión. Ocupa cerca del 18% del tiempo total de la sesión.

#### **Episodio de Exploración y análisis:**

Este episodio aparece durante el primer tercio de la sesión. Ocupa casi el 7% del tiempo total de la sesión.

#### **Episodio de Planificación:**

Este episodio se presenta en el primer tercio de la sesión. Ocupa poco más del 5% del tiempo total de la sesión.

#### **Episodio de Implementación:**

Este episodio se presenta al final del primer tercio de la sesión. Ocupa casi el 10% del tiempo total de la sesión.

#### **Episodio de Verificación y argumentación:**

Este episodio se presenta durante los dos últimos tercios de la sesión, involucrando una importante parte del tiempo. Ocupa casi el 57% del tiempo total de la sesión.

#### **Momentos de Transición:**

Se presenta al final de la sesión y su aparición no es significativa, ocupa poco más del 3% del tiempo total de la sesión.

#### **Síntesis del Protocolo 7:**

La mayor parte del tiempo en esta sesión se ha destinado a: Verificación y argumentación (57%), seguido de Lectura (18%). Los episodios se suceden de manera ordenada, no se observa una intermitencia importante entre ellos. Se puede observar el siguiente orden: Lectura-Exploración y análisis-Planificación-Implementación-Verificación y argumentación -Momento de Transición.

Los episodios se presentan generalmente con la misma frecuencia.

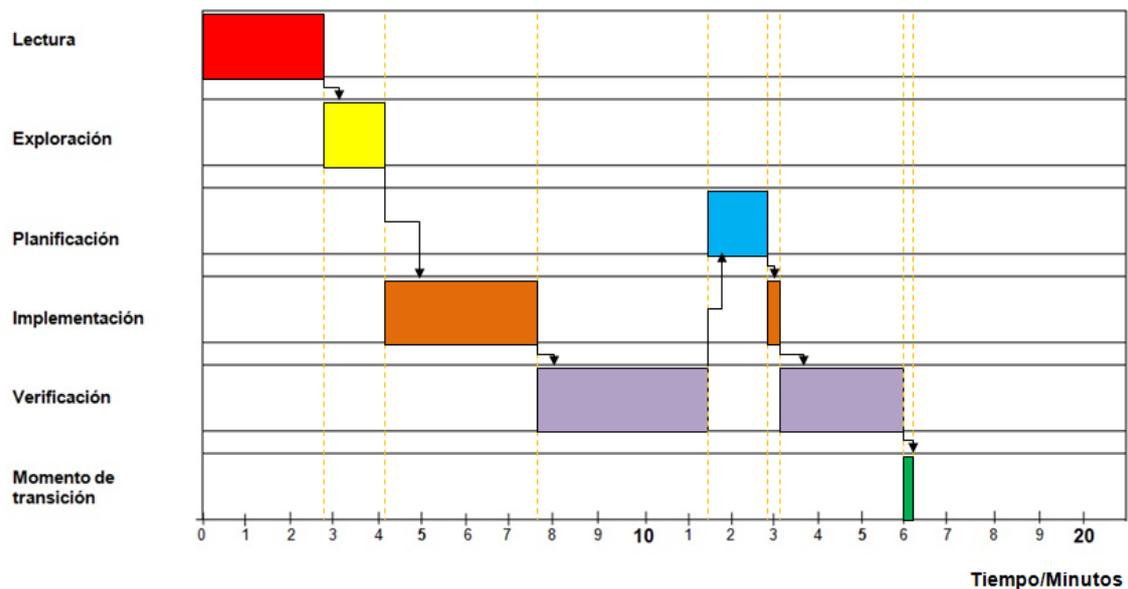
#### **4.5.2. Protocolo 8**

Del análisis del Protocolo 8 (Anexo 7.1.8.) se extraen los siguientes datos:

Episodios	Tiempo total en la sesión	% Tiempo	Frecuencia
Lectura	2' 40"	16,60	1
Exploración y Análisis	1' 14"	7,68	1
Planificación	1' 26"	8,92	1
Implementación	3' 40"	22,82	2
Verificación y argumentación	6' 38"	41,29	2
Momento de transición	26"	2,69	1
Total	16' 04"	100	8

**Tabla 16:** Duración y frecuencia de cada episodio durante una sesión de juego: Protocolo 8

#### Episodios



**Cuadro 22:** Línea de tiempo del Protocolo 8

En el Cuadro 22, correspondiente al Protocolo 8, podemos apreciar la aparición de los cinco episodios durante la sesión.

A partir de los datos observados en la Tabla 16 y Cuadro 22, correspondientes al análisis del Protocolo 8, Problema B, Grupo 2, parejas 3 y 4, se extraen los siguientes resultados:

#### Episodio de Lectura:

Este episodio aparece al inicio de la sesión. Ocupa más del 16% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Exploración y análisis:**

Este episodio aparece brevemente durante el primer tercio de la sesión. Ocupa más del 7% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Planificación:**

Este episodio se presenta en el tercer tercio de la sesión. Ocupa casi el 9% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Implementación:**

Este episodio se presenta a partir del segundo tercio de la sesión. Ocupa casi el 23% del tiempo total de la sesión.

**Episodio de Verificación y argumentación:**

Este episodio se presenta a partir del segundo tercio de la sesión, involucrando una importante parte del tiempo en cada aparición. Ocupa el 41% del tiempo total de la sesión.

**Momentos de Transición:**

Se presenta al final de la sesión y su aparición no es significativa, ocupa poco más del 2% del tiempo total de la sesión.

**Síntesis del Protocolo 8:**

La mayor parte del tiempo en esta sesión se ha destinado a: Verificación y argumentación (41%), seguido de Implementación (23%) y Lectura (16%).

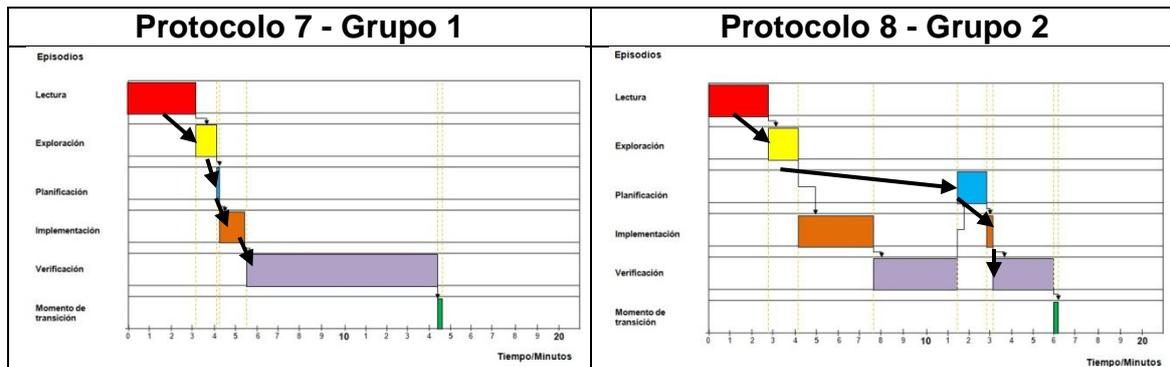
Los episodios se suceden de manera ordenada, no se observa una importante intermitencia entre ellos. Se puede observar el siguiente orden: Lectura-Exploración y análisis-Implementación-Verificación y argumentación. A partir del último tercio, se presenta Planificación y se retoma: Implementación-Verificación y argumentación.

Los episodios se presentan generalmente con la misma frecuencia.

**4.5.3. Síntesis Protocolos Problema B**

Este problema se desarrolló en una sola sesión; los alumnos trabajaron en parejas, pero dentro de los grupos originales. Se observan las siguientes similitudes y diferencias entre los Protocolos 7 y 8.

A continuación se presenta un cuadro comparativo de los dos protocolos anteriormente analizados:



**Cuadro 23:** Comparación Protocolos 7 y 8

En ambos protocolos el episodio más significativo en cuanto al tiempo que ocupa durante el desarrollo del problema B es el de Verificación y argumentación y los episodios se presentan con una frecuencia similar. Ambos protocolos comienzan con la secuencia: Lectura-Exploración y análisis, pero a partir de ahí se observan una pequeña diferencia, debido a una intermitencia en el segundo tercio del Protocolo 8. Sin embargo, los episodios se presentan en un orden similar: Lectura-Exploración y análisis-Planificación-Implementación-Verificación y argumentación.

La linealidad de esta secuencia, puede explicarse por el tipo de tarea desarrollada. Al parecer cuando se trata de un juego, se observa que los resolutores pasan por los episodios de manera intermitente; pero cuando se trata de la resolución de un problema, el resolutor pasa por los episodios en orden, tal como los postula Polya y Schoenfeld.

Es decir, primero leen el enunciado para comprenderlo, luego exploran en busca de posibles soluciones a partir de los datos extraídos en el enunciado. Posteriormente se planifica una operación aritmética o una estrategia, como por ejemplo, el ensayo-error, el cual se lleva a cabo pasando al episodio de Implementación. Finalmente todo el proceso llevado a cabo se revisa paso a paso, se desmenuza, se discute, se argumenta y se revisa el resultado concluyendo este con el proceso de Verificación y argumentación.

#### 4.6 Comparación resultados problema A y Problema B

En el desarrollo de ambas actividades, se presentan todos los episodios. El episodio de Lectura siempre se presenta al principio de la sesión y la frecuencia de aparición de cada episodio a lo largo de la sesión es similar en el desarrollo de ambos problemas.

Sin embargo, la aparición de los demás episodios se comportan de manera distinta. Mientras que en el problema A se observa cierta intermitencia en la aparición de los episodios, en el problema B esta intermitencia no se destaca en las líneas de tiempo presentadas.

Esto se debe al tipo de tarea, la dificultad para los participantes de la misma y el tiempo destinado a resolverlas. Mientras que en el Problema A, el tiempo destinado a su resolución fue superior a 45 minutos, el tiempo destinado al Problema B fue de poco más de 15 minutos. Podemos deducir que el Problema A era más difícil para los estudiantes que el Problema B.

Por otro lado, el Problema A, fue la primera tarea presentada a los participantes de la investigación. Quizás esto puede haber influido a la hora de comprender la dinámica del taller.

Además, en el Problema A, los participantes se organizaron en parejas, mientras que en el Problema B, si bien, estaba organizado de la misma manera que en el problema anterior, las parejas terminaron trabajando en conjunto de manera espontánea, formándose dos grupos de trabajo y no cuatro como en el Problema A.

Debemos recordar también, que el Problema B, fue la última tarea en ser desarrollada por los estudiantes en el taller. Todas estas razones, pueden ser la causa de que el Problema B, haya resultado ser más fácil para los estudiantes, quienes ya tenían cierta experiencia resolviendo problemas, por lo que podemos deducir que los episodios de resolución llevados a cabo podrían haber sido interiorizados por los participantes.

#### **4.7. Comparación entre juegos y problemas**

A continuación sintetizamos la información de la siguiente manera:

En primer lugar, elaboramos la Tabla 15, en donde se pueden observar los resultados obtenidos en todos los protocolos referentes a la resolución de los juegos A y B; la Tabla 16, corresponde a los resultados obtenidos en todos los protocolos referentes a la resolución de los problemas A y B, con ellas es posible observar el porcentaje de tiempo ocupado en cada episodio y la frecuencia de cada episodio durante las sesiones.

En segundo lugar, se presentan las líneas de tiempo en formato disminuido con el fin de obtener una visualización general de todos los protocolos y fijar la atención en el orden en que aparecen los episodios, la secuencia y la relación entre los episodios y la duración de cada una de estas apariciones.

A partir de estos resultados, podemos encontrar similitudes y diferencias entre los protocolos de juegos y problemas.

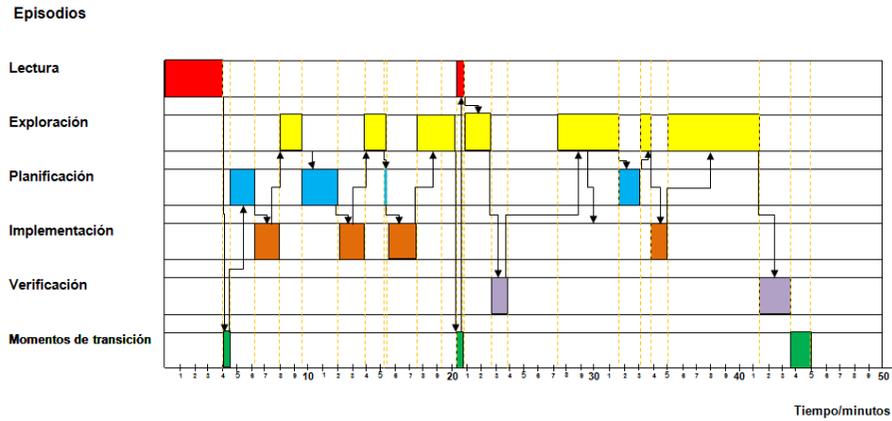
Episodios Juegos A y B	Protocolo 3		Protocolo 4		Protocolo 5		Protocolo 6		Protocolo 9		Protocolo 10		Protocolo 11		Protocolo 12		Promedio	
	% Tpo.	f	% Tpo.	f	% Tpo.	f	% Tpo.	f	% Tpo.	F								
Lectura	9,01	2	2,51	1	8,02	1	2,43	1	16,57	1	0,76	1	10,98	2	0,87	1	6,39	1,25
Exploración	44,25	7	34,90	4	53,37	3	27,69	2	47,59	4	40,08	3	65,28	4	48,38	6	45,19	4,13
Planificación	13,74	4	16,65	5	16,01	4	7,94	3	10,29	4	6,09	3	1,00	1	2,58	2	9,28	3,25
Implementación	17,74	4	19,33	4	10,77	4	19,50	3	21,97	5	12,98	4	13,85	2	15,42	5	16,44	3,86
Verificación	8,42	2	25,13	4	7,65	2	41,47	5	0	0	39,91	3	0	0	32,00	3	19,32	2,38
Transición	6,83	3	1,47	1	4,18	1	0,98	2	3,58	1	1,18	1	8,90	2	0,75	1	3,48	1,5
Total	100	22	100	19	100	15	100	17	100	15	100	15	100	11	100	18	100	16,5

**Tabla 17:** Duración y frecuencia de cada episodio en todos los protocolos correspondientes a la resolución de los juegos A y B

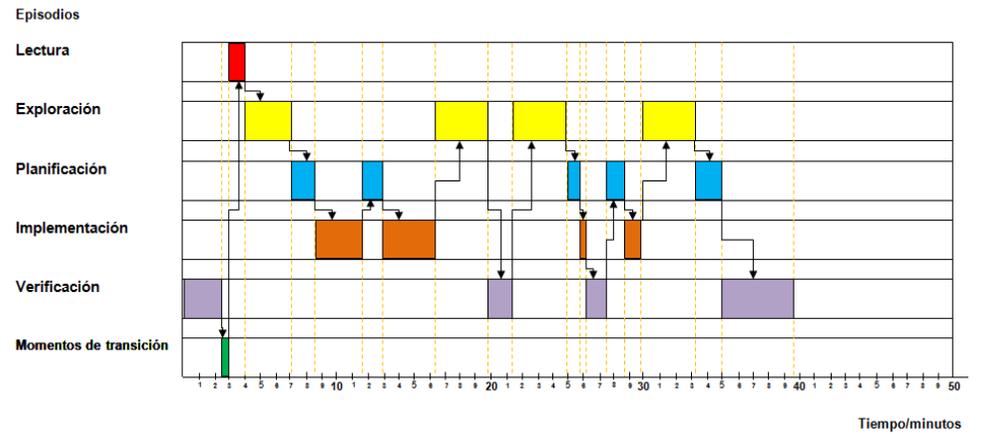
Episodios Problemas A y B	Protocolo 1-P1		Protocolo 1-P2		Protocolo 2-P3		Protocolo 2-P4		Protocolo 7		Protocolo 8		Promedio	
	% Tpo.	f	% Tpo.	f	% Tpo.	f	% Tpo.	f						
Lectura	5,36	2	9,57	2	1,98	1	2,01	1	17,81	1	16,60	1	8,88	1,33
Exploración	39,17	3	20,21	3	10,68	2	11,15	3	6,53	1	7,68	1	15,90	1,17
Planificación	4,69	3	0,89	3	1,07	1	15,98	4	5,42	1	8,92	1	6,16	2,17
Implementación	23,51	2	9,72	3	6,72	2	29,60	3	9,84	1	22,82	2	17,04	2,17
Verificación	20,83	2	53,65	2	57,64	5	18,95	2	56,86	1	41,29	2	41,54	2,33
Transición	6,44	2	5,96	2	21,91	4	22,30	4	3,54	1	2,69	1	10,47	2,33
Total	100	14	100	15	100	15	100	17	100	6	100	8	100	12,5

**Tabla 18:** Duración y frecuencia de cada episodio en todos los protocolos correspondientes a la resolución de los problemas A y B

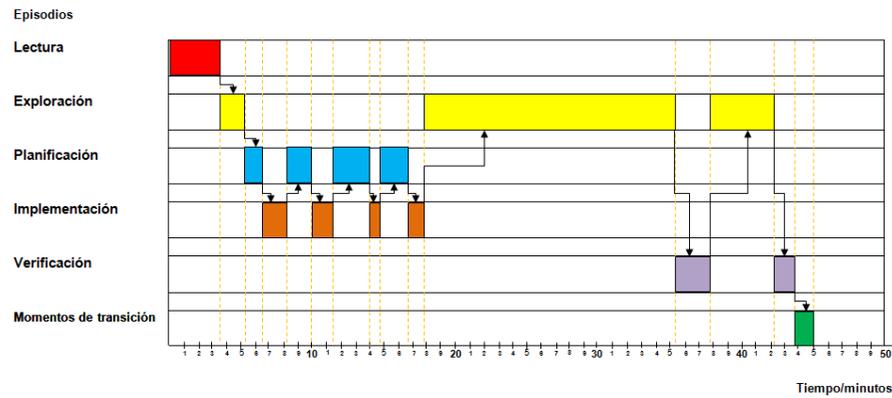
### Línea de Tiempo 1: Análisis Protocolo 3



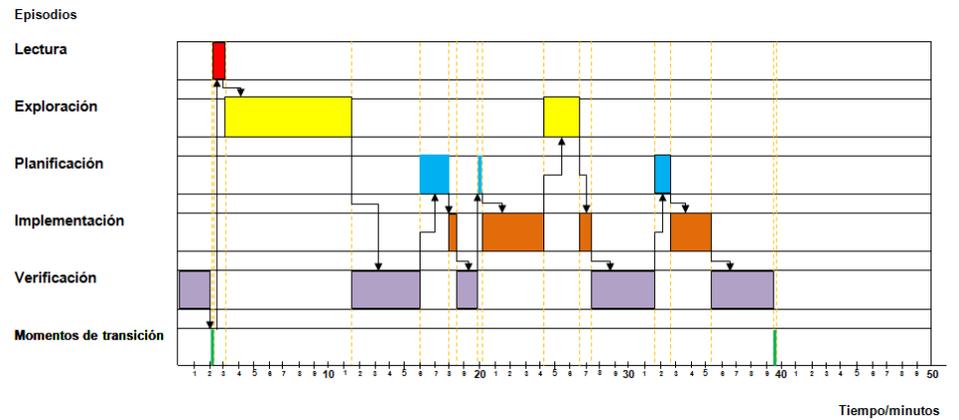
### Línea de Tiempo 2: Análisis Protocolo 4



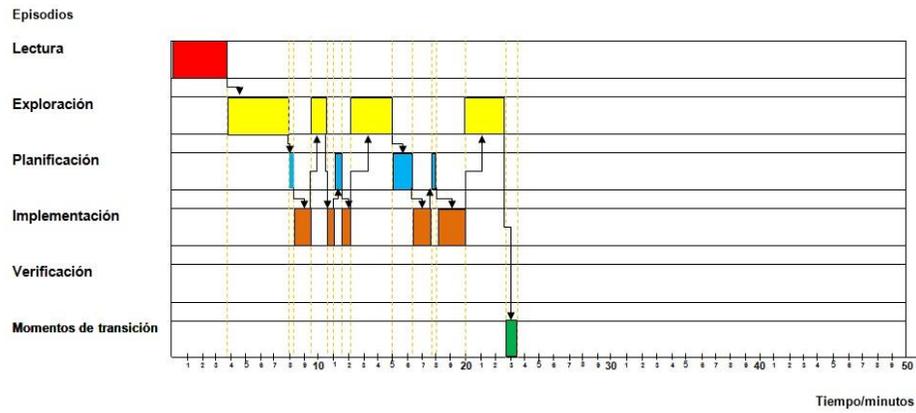
### Línea de Tiempo 3: Análisis Protocolo 5



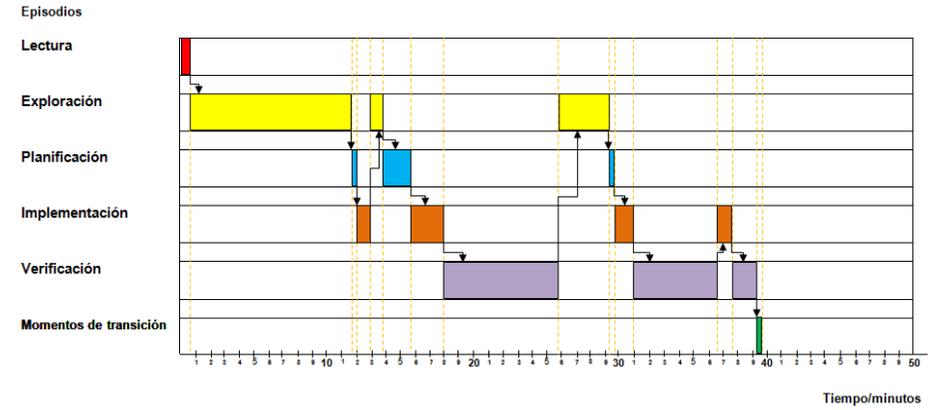
### Línea de Tiempo 4: Análisis Protocolo 6



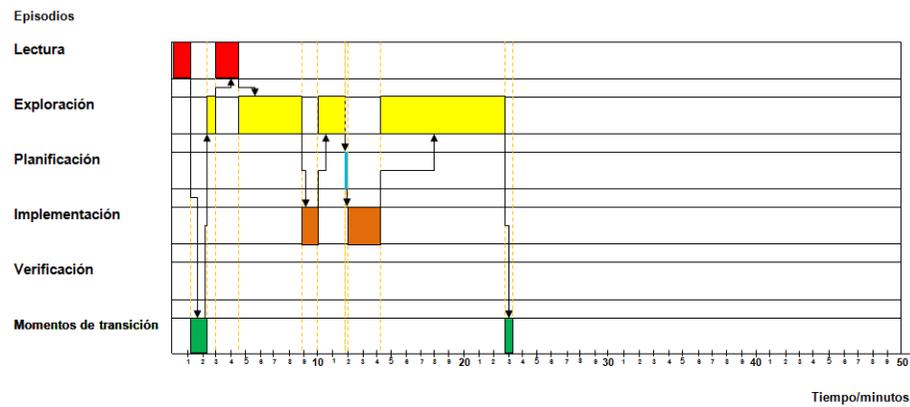
### Línea de Tiempo 5: Análisis Protocolo 9



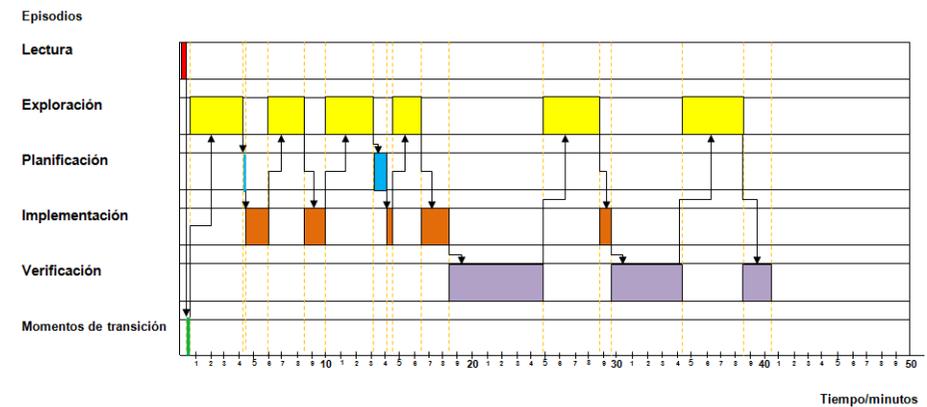
### Línea de Tiempo 6: Análisis Protocolo 10



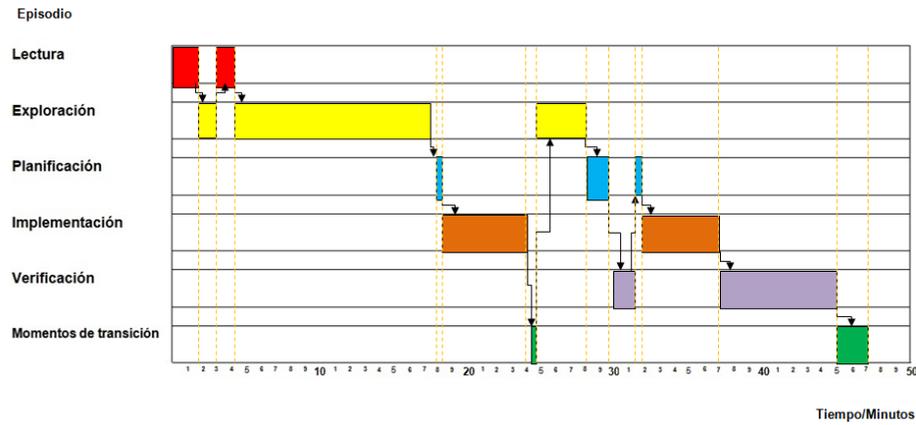
### Línea de Tiempo 7: Análisis Protocolo 11



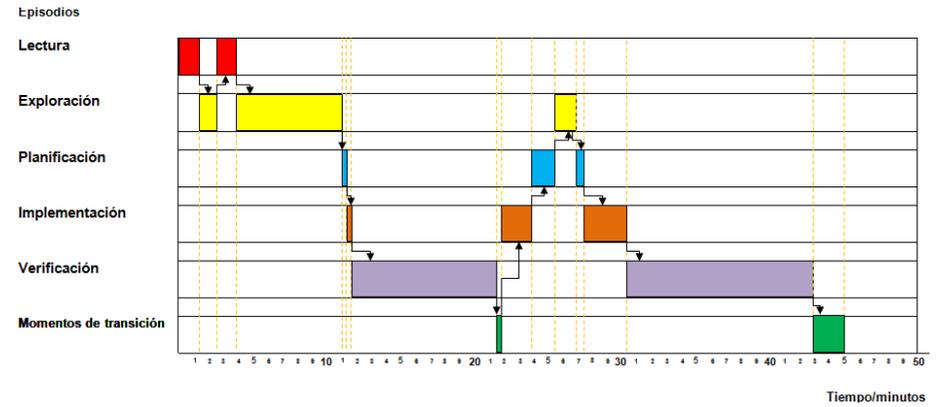
### Línea de Tiempo 8: Análisis Protocolo 12



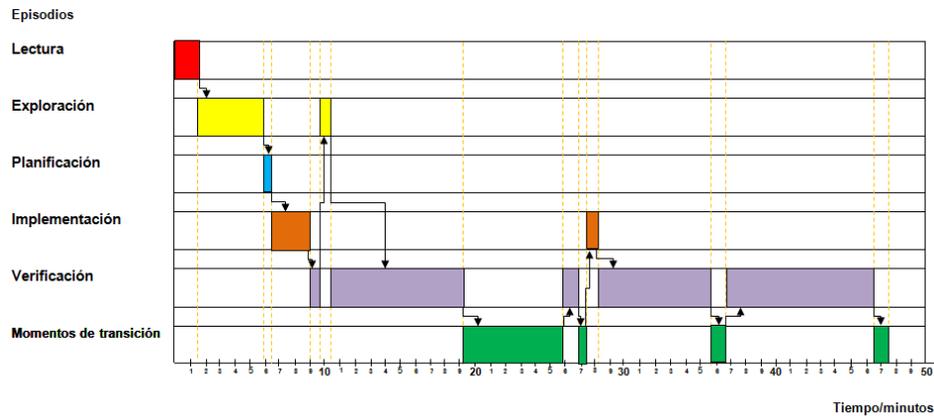
**Línea de Tiempo 9: Análisis Protocolo 1-Pareja 1**



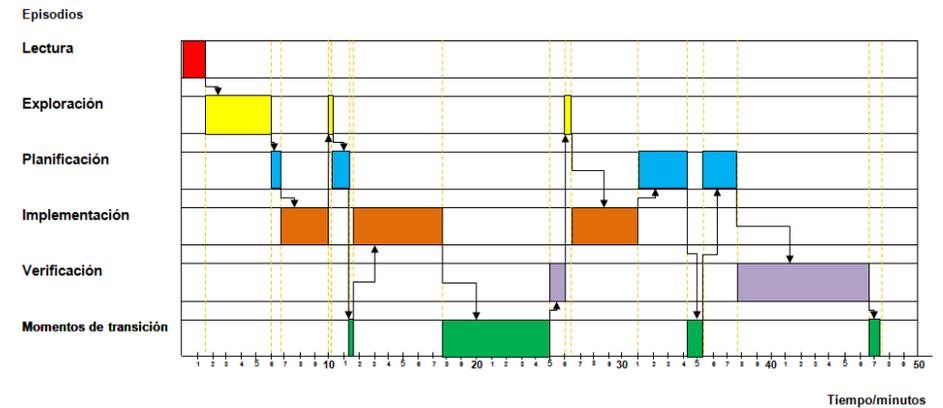
**Línea de Tiempo 10: Análisis Protocolo 1-Pareja 2**



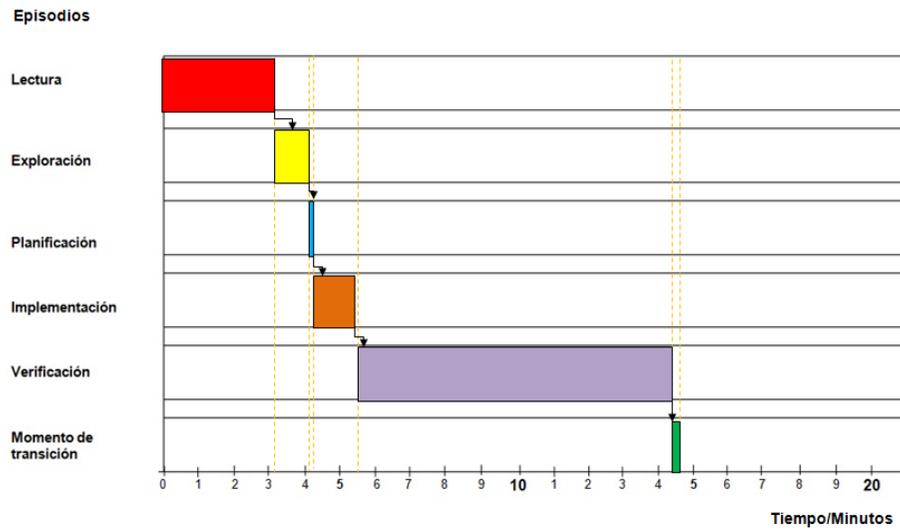
**Línea de Tiempo 11: Análisis Protocolo 2-Pareja 3**



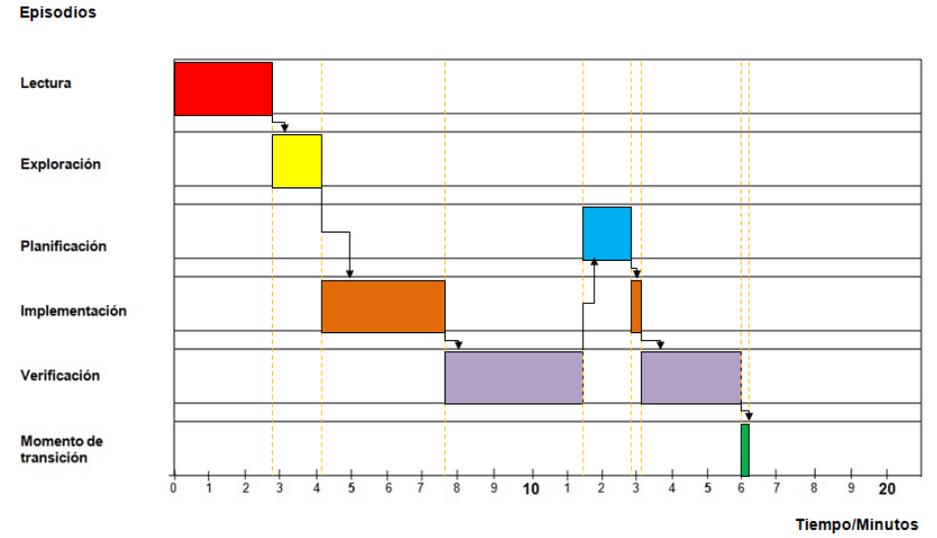
**Línea de Tiempo 12: Análisis Protocolo 2-Pareja 4**



### Línea de Tiempo 13: Análisis Protocolo 7



### Línea de Tiempo 14: Análisis Protocolo 8



#### **4.7.1. Similitudes entre los protocolos de juegos y problemas**

En cuanto a la comparación de los resultados visibles entre las Tablas 15 y 16, y en las Líneas de tiempo 1 a 14, se presentan las siguientes similitudes:

El episodio de Lectura tanto de los juegos como de los problemas, se presenta siempre al inicio de la sesión, la duración de la/s aparición/es es breve, ocupando un promedio del tiempo total de la sesión del 6% en el caso de los juegos y de 9% en el caso de los problemas; la frecuencia de aparición de este episodio es muy baja respecto a la frecuencia de los otros episodios. En el caso de los juegos, puede presentarse hasta en dos ocasiones, debido a la necesidad de los participantes de comprender el enunciado de manera práctica, es decir, realizar algunas partidas para comprender e interiorizar las normas del juego. La baja necesidad de recurrir a este episodio, indica que no existen dificultades relevantes en cuanto a la comprensión del enunciado por parte de los estudiantes.

El episodio de Exploración y Análisis se presenta en ambos tipos de tareas, con una presencia importante en cuanto al tiempo total de la sesión, ocupando un promedio de 45% en el caso del juego y de un 15% en el caso de los problemas. La frecuencia de aparición en ambas tareas es importante en ambos tipos de tarea, siendo más relevante en el caso de los juegos en donde se presentó hasta en 6 ocasiones. Mientras que en los problemas se presentó hasta en 3 ocasiones.

Esto indica que las tareas propuestas promueven el trabajo de los estudiantes relacionado con la exploración y análisis tanto de los juegos como de los problemas. Esto se puede observar con mayor relevancia en el caso de los juegos, donde los estudiantes trabajan de manera menos estructurada, realizando distintas partidas mediante ensayo y error antes de poder observar ciertas regularidades en los movimientos y resultados de las jugadas realizadas. En este sentido, este episodio los lleva a explorar y analizar continuamente durante todo el proceso.

Cabe destacar, que las cuatro actividades desarrolladas por los estudiantes constaban de al menos dos partes. Esta situación influye notoriamente en la necesidad de explorar y analizar constantemente las alternativas de solución prevista por los participantes y por ende, confirma la importancia de que las tareas propuestas a los estudiantes sean progresivas en complejidad, estructuradas y desafiantes.

El episodio de Planificación ocupa un tiempo similar respecto al tiempo total de las sesiones en ambos casos. Mientras que en las sesiones de juego se presenta en un 9%, en las sesiones de problemas se presenta un 6%. Esto indica que las tareas propuestas promueven el trabajo de los estudiantes relacionado con la

planificación de acciones destinadas a resolver tanto los juegos como los problemas.

En ambos casos, aparece después del episodio de Exploración y Análisis y precede al episodio de Implementación. La brevedad en las apariciones de este episodio, pueden deberse a que después de un período de exploración, los estudiantes comienza a tener una cierta idea de qué es lo que sucede en cada caso o de cuál podría ser la solución al problema. Estos, les permite planificar una acción que los lleve a comprobar estas ideas, tanto si esta idea es correcta o no, para comprobarla deben hacer varias acciones que los lleven a confirmar o a cambiar de idea. En este proceso de Planificación, no se detienen a analizar qué podría suceder o no, sino que se concreta un movimiento que se comunica al resto de los participantes y cuyo resultado determinará si estaban en lo cierto o no.

El episodio de Implementación se presenta, generalmente, en ambos casos precedidos por el episodio de Planificación. El tiempo que ocupa este episodio en ambas situaciones es similar, en las sesiones de juego se presenta un 16% y en las sesiones de problemas se presenta un 17% del tiempo total de la sesión. Al igual que el episodio de Planificación, su frecuencia es relativamente importante, pero breve en el tiempo. Esto indica que las tareas propuestas promueven el trabajo de los estudiantes relacionado con la implementación de las acciones planificadas tanto en los juegos como en los problemas.

El objetivo de la Implementación es llevar a cabo la acción planificada, el resultado obtenido les permite a los estudiantes comprobar el estado de sus ideas y si el camino llevado a cabo los aleja o acerca al objetivo final. Por esta razón, ambos episodios son inseparables, una es consecuencia del otro y en conjunto permiten tomar una decisión durante el proceso de resolución de la tarea. Si el resultado es favorable, se comenzará a explicar por qué lo ha sido, dando paso al episodio de Verificación y argumentación; y si el resultado no es favorable, dará paso a un proceso de Exploración y análisis de los resultados obtenidos que les permita encontrar el camino a la solución de la tarea.

El episodio de Verificación y argumentación se encuentra presente tanto en las sesiones de juego como de problemas, ocupando una parte importante del tiempo total de la sesión. En el caso de los juegos poco más del 19% y en el caso de los problemas, poco más del 41%, en ambas tareas, ocupa una importante parte del tiempo. La frecuencia de aparición de este episodio es similar en ambos tipos de tarea.

En el caso de los juegos, el episodio de Verificación y argumentación cobra importancia en las segundas sesiones de cada juego, esto se debe a que como se

mencionó en la anteriormente, las primeras sesiones están destinadas a familiarizarse con el juego y explorar posibles estrategias, mientras que la segunda sesión, está destinada a comprobar las ideas previas y comunicar hallazgos parciales o finales de las estrategias favorecedoras.

La aparición de este episodio tanto en los juegos como en los problemas, indica que las tareas propuestas promueven tanto la comunicación y argumentación de los hallazgos, así como la verificación de la/s solución/es obtenida/s. Es decir, este tipo de tareas suscita la evaluación del proceso seguido en la resolución tanto de los juegos como de los problemas; por esta razón, las apariciones del episodio de Verificación, se presentan con mayor frecuencia y profundidad hacia el final de la tarea en ambos casos.

Los Momentos de Transición se presentan en ambos tipos de resolución, ocupando poco tiempo de la sesión.

En síntesis, el episodio de Lectura, se presenta al inicio de las sesiones, ocupa breve cantidad de tiempo y es poco frecuente en sus apariciones.

Los episodios con mayor relevancia en cuanto al tiempo destinado son los de Exploración y Análisis y de Verificación y argumentación.

Los episodios más frecuentes son los de Planificación e Implementación, y estos siempre se presentan unidos en la mayoría de sus apariciones. Es decir, después de la Planificación, se observa la Implementación.

A partir de estos datos podemos decir que tanto los problemas como los juegos de estrategias diseñados para la presente investigación, promueven el desarrollo de habilidades de resolución de problemas, porque en el proceso de solución de se presentan todos los episodios en al menos una ocasión.

#### **4.7.2. Diferencias entre los protocolos de juegos y problemas**

En cuanto a la comparación de los resultados visibles entre las Tablas 15 y 16, se presentan las siguientes diferencias:

El episodio de Lectura, no presenta diferencias relevantes durante el proceso de resolución tanto de juegos como de problemas.

El episodio de Exploración y análisis presenta diferencias sustanciales entre ambos tipos de resolución, mientras que en el desarrollo de los juegos implica en promedio un 45% del tiempo total de la sesión, en el desarrollo de los problemas ocupa un 16% del tiempo y se presenta principalmente en el primer tercio de la sesión. La frecuencia de aparición de este episodio también muestra diferencias; en el juego la aparición es mayor (7 veces) que en los problemas (3 veces).

En el caso de los juegos de estrategias, los estudiantes deben encontrar la o las estrategias favorecedoras del juego. Para ello, comienzan el juego sin seguir ninguna estructura, intentando ganar o no perder mediante la estrategia de ensayo y error, o empezando por el final.

A partir de los resultados de estas partidas o jugadas, comienzan a vislumbrar qué sucede al realizar ciertas acciones, pero aún no son capaces de comunicar sus primeras ideas, este proceso es largo e interno, muchas veces transcurre en completo silencio, aun cuando se juegue en parejas. Cuando la idea de la posible estrategia parece tener cierto asidero a partir de los resultados de las jugadas realizadas, estas ideas son comprobadas o refutadas mediante los episodios de Planificación y posterior Implementación.

En el caso de los problemas, este episodio se presenta de manera más breve y generalmente durante la primera mitad de la sesión. Esto puede deberse, a que en el caso de los problemas, los estudiantes no deben realizar numerosas acciones antes de comenzar a visualizar una estrategia.

Es importante destacar, que los problemas diseñados para esta investigación, distan de aquellos problemas del campo aditivo o multiplicativo a los que están acostumbrados y los estudiantes deben recurrir a estrategias de ensayo y error, o de empezar por el final para explorar y analizar sus primeras ideas. No obstante, los estudiantes suelen trabajar de manera más estructurada, a partir de la comprensión del enunciado, recurren inmediatamente a sus conocimientos buscando la operación aritmética que podría dar solución al problema: Pero como se mencionó anteriormente, el tipo de problemas diseñado, no les permitía actuar de la misma manera que con los problemas escolares habituales, es posible que por esta razón, el episodio de Exploración y análisis es uno de los más relevantes tanto en la resolución de los juegos como de los problemas., pero en el caso del hallazgo de estrategias favorecedoras cobra mayor relevancia gracias a las características lúdicas de la tarea.

El episodio de Planificación es de los episodios que se presenta con mayor frecuencia en las sesiones de juego (10 veces), mientras que en las sesiones de problemas su recurrencia es similar a las de otros episodios (2 veces). Comparte esta característica con el episodio de Implementación. En el caso de los juegos.

La frecuencia de aparición es alta en ambos casos, pero mayor en el caso de los juegos. Esto puede deberse a que una vez que los estudiantes exploran mediante el ensayo y error ciertas acciones, comienzan a vislumbrar posibles estrategias favorecedoras, la única forma de comprobar que están en lo cierto es comenzar a probar movimientos específicos. En este momento, el trabajo deja de ser en

silencio y los estudiantes comienzan a verbalizar al resto de sus compañeros el movimiento específico que quiere realizar para comprobar su idea.

En el caso de los juegos esto sucede en innumerables ocasiones, intercalando junto con la posterior Implementación. Estos movimientos son rápidos y su comprobación inmediata, por lo que sus apariciones son muy breves.

El episodio de Implementación es otro de los episodios que se presenta con mayor frecuencia en el caso de las sesiones de juego (12 veces), mientras que en las sesiones de problemas su recurrencia es similar a las de otros episodios (2 veces). Comparte esta característica con el episodio de Planificación. La relación entre la frecuencia de los episodios de Planificación e Implementación es directa, por ello la frecuencia de ambos episodios es muy similar, como se mencionó en el párrafo anterior.

El episodio de Verificación y argumentación cobra importancia relevante en el caso de las sesiones de problemas, ocupando el 41% del tiempo total de la sesión. Mientras que en las sesiones de juego ocupa un 19%. La frecuencia del mismo también es mayor en el caso de las sesiones de resolución de problemas, en el caso de las sesiones de juego (2 veces), mientras que en las sesiones de problemas su recurrencia es similar a las de otros episodios (4 veces).

Sin embargo, en el caso de los juegos, por las características de la tarea, en donde deben encontrar más de una estrategia favorecedora, o en donde la actividad consta de más de un problema dentro de la misma tarea, la verificación se produce en varias ocasiones. Este episodio permite comunicar y evaluar los hallazgos realizados hasta el momento en el que se decide comunicar posibles estrategias favorecedoras que ya han sido exploradas, analizadas y que han sido comprobadas y/o refutadas mediante la Planificación e Implementación. Por lo tanto, se presenta la Verificación y argumentación de cada estrategia hallada, como la evaluación de todo el proceso llevado a cabo.

En cambio, en la resolución de problemas, el proceso de resolución es más estructurado y la verificación y argumentación se produce cuando los estudiantes han hallado la respuesta, esto lo pueden comprobar, comparando sus soluciones con la del resto del grupo. Inmediatamente después de esta comprobación, los estudiantes comienzan a redactar el procedimiento realizado paso a paso incluyendo la argumentación de la acción realizada para resolverlo. Esto sucede notoriamente de manera espontánea más en el segundo problema, que en el primero, eso se debe a que los estudiantes ya comprendían la dinámica del taller y a la interiorización de los episodios.

Los Momentos de Transición se presentan con menos frecuencia y tiempo de duración en las sesiones de juego. Mientras que en el juego se presenta en un 3%, en las sesiones de problemas se presenta en un 10% del tiempo total de la sesión. También su frecuencia es mayor en el caso de las sesiones de resolución de problemas; en el caso de las sesiones de juego (3 veces), mientras que en las sesiones de problemas su recurrencia es similar a las de otros episodios (4 veces).

En síntesis, la aparición y frecuencia del episodio de Lectura no presenta mayor diferencia en ambos tipos de tareas.

El episodio de Exploración y análisis es más frecuente e importante en el tiempo destinado en los juegos que en los problemas.

El episodio de Verificación y argumentación es más frecuente e importante en el tiempo destinado en los problemas que en los juegos.

A partir de estos datos podemos decir que tanto los problemas como los juegos de estrategias diseñados para la presente investigación, promueven el desarrollo de habilidades de resolución de problemas, pero dependiendo de la habilidad que se pretende desarrollar se puede elegir una u otra tarea.

#### **4.7.3. Gestión del docente durante el proceso de resolución**

Si bien, no es objeto del presente estudio, cabe destacar la importancia de la gestión del adulto durante el proceso de resolución. Dicha gestión, permite guiar a los estudiantes durante la resolución de las tareas, evitando que se queden atascados y permitiendo el paso de un episodio a otro.

Para ello, se elaboró la pauta didáctica mencionada en el Capítulo 3 (Apartado 3.3, página 46).

El adulto, es el encargado de observar y evaluar el proceso. Durante el inicio de la sesión, el adulto debe resolver las dudas referentes al enunciado, en el caso de los problemas o las reglas en el caso de los juegos (Episodio de Lectura). A partir de esta aclaración, debe permitir que los estudiantes busquen de manera espontánea la/s posibles solución/es, es decir, que los estudiantes exploren (Episodio de Exploración y análisis) las distintas alternativas de solución.

Una vez que los estudiantes, comienzan a comentar que tienen una posible solución, el adulto les pide que lo comprueben o que le enseñen estas posibles soluciones paso a paso, aquí los estudiantes verbalizan la planificación (Episodio de Planificación) de las acciones a realizar para luego Implementarlas (Episodio de Implementación). Si los estudiantes, están seguros de estar en lo correcto, el

adulto los insta a explicar paso a paso el proceso llevado a cabo (Episodio de Verificación y argumentación), esta argumentación no necesariamente se hace cuando los estudiantes hayan encontrado la solución correcta, si no que puede realizarse tanto para verificar una solución como para hacerlos cambiar de camino.

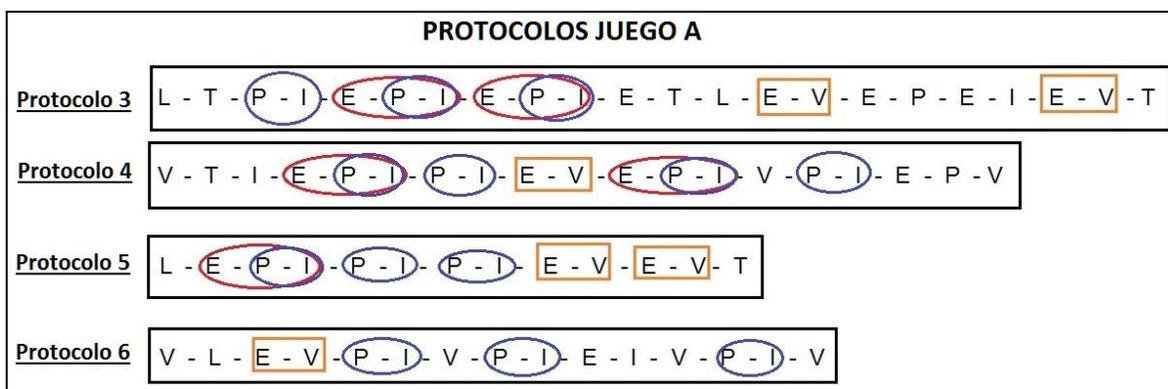
El adulto, debe ser capaz, de seguir el ritmo de cada grupo, para permitirles un proceso acabado a cada uno y debe sobre todo evitar dar soluciones, si no que por medio de contra preguntas, guiarlos a encontrar la/ respuesta/s por sí mismos.

#### 4.7.4. Patrones observados en la resolución de los juegos

A partir de la visualización de las líneas de tiempo de los protocolos por tipo de tarea, se pueden observar ciertos patrones comunes.

Para visualizarlos de mejor manera se presenta la información en cuadros; estos cuadros tienen como objetivo mostrar el orden de aparición los episodios en cada una de las sesiones destinadas a cada juego. En este apartado, se comparan los patrones observados en los Juegos A y B.

Se comienza con el análisis del cuadro correspondiente al Juego A. En el Cuadro 24, se presenta el orden de aparición de los episodios de los protocolos del Juego A:



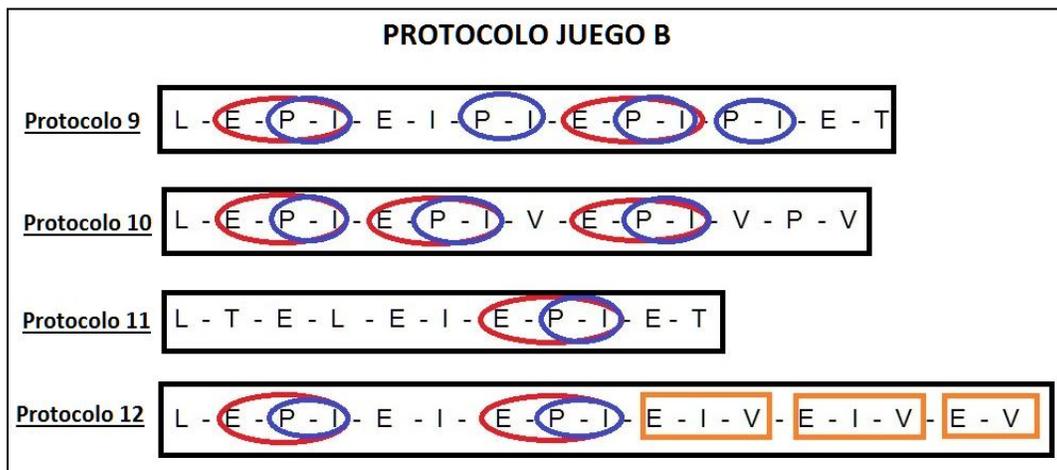
Cuadro 24: Orden de aparición de los episodios: protocolos Juego A

A partir de estos datos, podemos observar tres patrones importantes: Después de un episodio de Exploración y análisis, se produce la Planificación y posterior Implementación (E-P-I). Los episodios Planificación e Implementación, se presentan unidos en la mayoría de las ocasiones (P-I). En los protocolos 3 y 5, correspondientes a las primeras sesiones del Juego A (Grupo 1 y Grupo 2 respectivamente), se presenta a partir de la segunda mitad de la sesión un importante período de Exploración y análisis seguido de Verificación y argumentación (E-V). Este mismo patrón, se observa en los Protocolos 4 y 6

(Grupo 1 y Grupo 2 respectivamente), pero durante la primera mitad de la segunda sesión.

Durante la primera y segunda sesión de resolución del juego A, se pueden observar que en general, después del episodio de Exploración y análisis, se produce un período repetitivo y breve de Planificación seguida Implementación (E-P-I).

En el Cuadro 25, se presenta el orden de aparición de los episodios de los protocolos del Juego B:



Cuadro 25: Orden de aparición de los episodios: protocolos Juego B

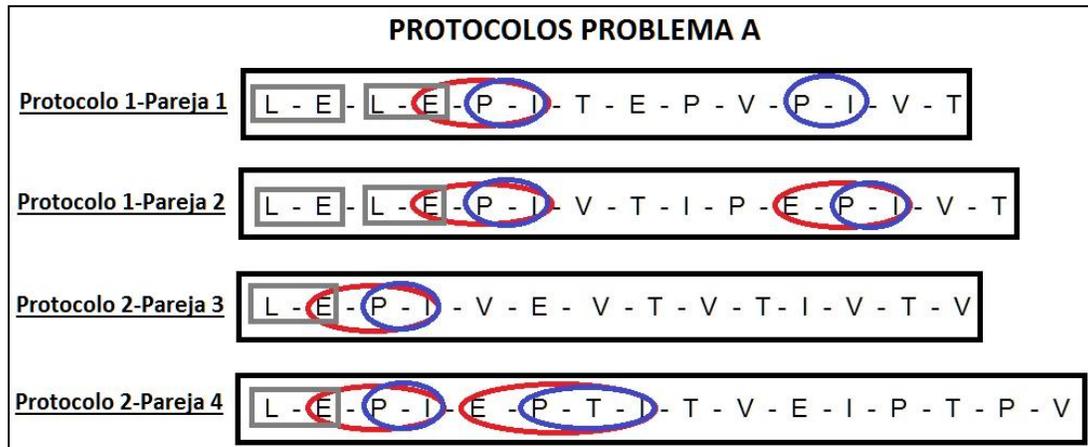
A partir de estos datos, podemos observar dos patrones importantes: Después de un episodio de Exploración y análisis, se produce la Planificación y posterior Implementación (E-P-I), siendo un patrón frecuente en todos los protocolos. Además, después del episodio de Exploración y análisis, se produce un período repetitivo y breve de Planificación seguida Implementación. Estos episodios se presentan unidos en la mayoría de las ocasiones (P-I). Sólo en el protocolo 12, podemos observar el patrón (E-V) en tres ocasiones.

En síntesis, podemos deducir que en el desarrollo de los juegos se presentan tres patrones importantes: El patrón E-P-I, se presenta en todos los protocolos, con mayor relevancia en las primeras sesiones de cada juego (Protocolos 3, 6, 9 y 11). El patrón P-I, se presenta a lo largo de todos los protocolos. Los episodios de Planificación e Implementación se presentan unidos en casi todas las apariciones. El patrón E-V, se presenta notoriamente en los protocolos del Juego A. En el Juego B, se presenta solo hacia el final de la sesión del Protocolo 12.

#### 4.7.5. Patrones observados en la resolución de los problemas

En este apartado, se comparan los patrones observados en los problemas A y B. Se comienza con el análisis del cuadro correspondiente al problema A:

En el Cuadro 26, se presenta el orden de aparición de los episodios de los protocolos del Problema A:



Cuadro 26: Orden de aparición de los episodios: protocolos Problema A

A partir de estos datos, podemos observar tres patrones importantes: en todos los protocolos se comienza en al menos una ocasión con el episodio de Lectura, seguido de un breve episodio de Exploración y Análisis (L-E). Después de un episodio de Exploración y análisis, se produce la Planificación y posterior Implementación (E-P-I). Los episodios Planificación e Implementación, se presentan unidos de forma regular (P-I).

En el Cuadro 27, se presenta el orden de aparición de los episodios de los protocolos del Problema B:



Cuadro 27: Orden de aparición de los episodios: protocolos Problema B

A partir de estos datos, no se observan patrones a los largo de la sesión, si no, que cierta linealidad en la aparición de los episodios. Sin embargo, se destaca,

que en ambos protocolos se producen las secuencias observadas en el resto de protocolos.

En síntesis, podemos deducir que en el desarrollo de los problemas se presentan dos patrones importantes: El patrón E-P-I, se presenta en la mayoría de los protocolos en al menos una ocasión (excepto en el Protocolo 8). El patrón P-I, se presenta a lo largo de todos los protocolos al principio y al final de la sesión. Los episodios de Planificación e Implementación se presentan unidos en casi todas las apariciones.

#### **4.7.6. Comparación de los patrones observados en la resolución de juegos y problemas**

A partir del análisis de los patrones observados en los protocolos del apartado anterior, se realiza una comparación entre los protocolos de ambos tipos de tareas.

Tanto en los juegos como en la resolución de problemas se presentan los siguientes patrones comunes:

En ambas tareas se presentan los patrones: E-P-I, esto indica que ambas tareas permiten realizar un proceso interno de exploración y análisis de las ideas previas, y que estas son comprobadas o refutadas mediante la Planificación e Implementación. El patrón P-I, también es común en todos los protocolos, esto indica la necesidad de probar las ideas frutos de la exploración.

Tanto en los juegos como en la resolución de problemas se presentan las siguientes diferencias en los patrones:

En el desarrollo del juego, se presenta el patrón E-V en varias ocasiones; sin embargo, este patrón no se observa en el desarrollo de los problemas.

En el desarrollo de los problemas se presenta el patrón L-E al inicio de cada protocolo; sin embargo, este patrón se observa sólo en la mitad de protocolos asociados a los juegos.

El patrón P-I, es frecuente y repetitivo a lo largo de los protocolos de los juegos; sin embargo, este patrón ocurre con menor frecuencia en el caso de los problemas.

Los patrones comunes observados en los doce protocolos (E-P-I y P-I), se presentan repetidas veces a lo largo del desarrollo de los juegos; sin embargo, estos patrones se repiten en dos ocasiones en el Problema A y en ninguna ocasión en el Problema B.

En síntesis, se pueden observar ciertos patrones comunes durante el desarrollo de las tareas, esto indica que ambas tareas, permiten pasar por procesos similares durante la resolución. En el caso de los juegos estos patrones se repiten a lo largo de las sesiones frecuentemente; esto indica que los juegos permite un trabajo más profundo. Al ser una tarea desafiante para los estudiantes, lúdica y práctica, los estudiantes repiten el proceso de resolución en varias ocasiones, reformulando una y otra vez sus ideas y estrategias. Sin embargo, los problemas son tratados de manera más estructurada, se puede observar con mayor claridad la secuencia esperada para un resolutor de problemas: Lectura, Exploración y análisis, Planificación, Implementación finalizando con la Verificación y argumentación, aunque con algunas intermitencias. Esto indica, que si bien los problemas diseñados, no se resuelve inmediatamente realizando una operación aritmética, los estudiantes ya tienen interiorizados las fases de resolución de problemas.

## **CAPITULO 5: CONCLUSIONES, LIMITACIONES Y PERSPECTIVA DE FUTURO.**

### **5.0. Introducción**

En el presente capítulo se presentan las conclusiones que surgen del estudio. El capítulo consta de cinco apartados.

En primer lugar, se mencionan las conclusiones de carácter metodológico, que tiene estrecha relación con la elaboración del instrumento de análisis.

En segundo lugar, se mencionan las conclusiones referidas a los resultados del análisis de los datos por medio del instrumento de análisis elaborado.

En un tercer apartado, se presentan las conclusiones referidas al tipo de tarea presentada a los estudiantes para el desarrollo de habilidades de resolución de problemas.

En un cuarto apartado, se señalan las limitaciones observadas en el presente estudio.

Finalizando, en un quinto apartado, con la mención de las perspectivas de futuro e implicaciones didácticas que se deducen de los resultados del presente estudio.

### **5.1. Conclusiones de carácter metodológico:**

Si bien el objetivo de la presente investigación no es la elaboración del instrumento de análisis en sí, fue necesario modificar, a partir de los datos obtenidos, el instrumento de análisis elaborado en el estudio anterior (Baeza, 2008).

Recordamos que el anterior instrumento de análisis se basó en los episodios de Schoenfeld (1985), los que fueron reinterpretados para que se ajustaran a los procesos de resolución del juego de estrategia observado (Baeza, 2008). El instrumento de análisis elaborado fue modificado a partir del análisis de los doce protocolos que conforman el presente estudio.

Estas modificaciones atañen particularmente a la necesidad de que el instrumento elaborado para analizar los procesos de resolución de un juego de estrategia, en primera instancia, se ajustara también al análisis de los procesos de resolución de problemas y de otros juegos de estrategia. De esta manera, se hace posible comparar ambos procesos de resolución.

Nuestra primera conclusión es de carácter metodológico y se refiere al proceso de análisis en sí mismo, es decir, la caracterización de los procesos de resolución de los dos juegos y de los dos problemas a partir de un mismo instrumento de análisis que nos permita realizar la comparación de ambos tipos de resolución.

El instrumento de análisis contempla la observación y análisis de cinco episodios: Lectura y familiarización de la tarea; Exploración y Análisis; Planificación; Implementación; y Verificación y argumentación. Se contemplan también los Momentos de Transición, pero que por su característica y brevedad no son considerados como episodios, si no como puente entre episodios o como momentos que no tienen relación con la actividad llevada a cabo.

Para cada uno de estos episodios, se señalan los indicadores que son descriptores que permiten identificar cada uno de estos episodios. Para que los episodios sean considerados como tal, deben contar con al menos uno de estos descriptores.

Este instrumento de análisis, ha sido elaborado y modificado a lo largo de tres etapas. En primer lugar, se observó en un estudio piloto la aparición o no de las fases de resolución de problemas en los juegos de estrategia (Edo, Baeza, Deulofeu y Badillo, 2008). A partir de los resultados obtenidos se decidió elaborar un instrumento más preciso y ad hoc a la actividad analizada; este instrumento fue el resultado del análisis de los resultados obtenidos para el estudio de Investigación, correspondiente al programa de Doctorado en didáctica de las matemáticas de la UAB (Baeza, 2008); en ambos casos, el instrumento se ajustaba al análisis de un juego de estrategia. Por último, para el presente estudio, el instrumento se ajusta al análisis de juegos de estrategia y de problemas.

Cabe mencionar, que por las características de la investigación; este instrumento es tanto una herramienta metodológica que permite analizar los datos obtenidos, como el análisis en sí mismo, porque su elaboración ha sido diseñada a partir de los mismos datos. Por ello, este instrumento de análisis puede ser utilizado en futuras investigaciones y por otros investigadores con el objetivo de seguir ahondando en las relaciones presentes entre ambos tipos de resolución y la ventaja del uso de este tipo de tareas en las aulas de educación Matemática (ver instrumento en el Capítulo 3, apartados 3.5.1 y 3.5.2, páginas 49-56).

## 5.2. Conclusión respecto a los resultados

Las tareas diseñadas para ser analizadas nos permitieron cumplir con el objetivo general de nuestra investigación: comparar los procesos de resolución de problemas y de juegos de estrategia buscando evidencias que permitan establecer relaciones entre ambos procesos.

A medida que se analizaban los protocolos, se comenzaban a vislumbrar los primeros resultados, para poder concluir que el mismo instrumento se puede utilizar para ambos tipos de resolución y ofrecer resultados relevantes de que estos poseen características comunes.

Recordemos los objetivos específicos de la presente investigación:

- Identificar los episodios presentes en la resolución de problemas.
- Identificar los episodios presentes en la resolución de juegos de estrategia.
- Comparar los episodios en ambos tipos de resolución buscando similitudes y diferencias.

En cuanto al primer objetivo, identificar los episodios presentes en la **resolución de problemas**, podemos concluir que, durante el proceso de resolución de problemas se identifican los siguientes episodios: Lectura, Exploración y análisis, Planificación, Implementación, Verificación y argumentación y los Momentos de transición.

La aparición de los episodios no sigue un orden lineal pero podemos reconocer algunos patrones. Destacamos tres patrones importantes: en todos los casos se comienza con el episodio de Lectura, seguido de un breve episodio de Exploración y Análisis (L-E). Después de un episodio de Exploración y análisis, aparece siempre la Planificación y posterior Implementación (E-P-I). Los episodios Planificación e Implementación, se presentan unidos de forma regular (P-I).

En relación al momento de aparición y el tiempo dedicado podemos concluir que:

El episodio de Lectura, se presenta al inicio de cada sesión y tiene una mayor duración en las sesiones iniciales.

El episodio de Verificación y argumentación, es uno de los que se presenta con mayor frecuencia y ocupa en promedio el 41% del tiempo destinado a las sesiones. En relación al momento de aparición, se presenta de manera relevante hacia el final del proceso de resolución.

En cuanto al segundo objetivo identificar los episodios presentes en la **resolución de juegos de estrategia**, podemos concluir que, durante el proceso de resolución

de ambos juegos se identifican los siguientes episodios: Lectura, Exploración y análisis, Planificación, Implementación, Verificación y argumentación y los Momentos de Transición.

Estos episodios coinciden de forma reagrupada con los episodios de resolución de problemas de Schoenfeld (1985), por lo tanto podemos afirmar que en la resolución de un juego de estrategia se presentan procesos similares a los procesos de resolución de un problema matemático.

La aparición de los episodios no sigue un orden lineal pero podemos reconocer algunos patrones. Destacamos tres patrones importantes: El patrón Exploración y análisis, Planificación, Implementación (E-P-I), se presenta en todos los protocolos, con mayor relevancia en las primeras sesiones de cada juego. El patrón Planificación, Implementación (P-I), se presenta a lo largo de todos los protocolos y se presentan unidos en casi todas las apariciones. El patrón Exploración y Verificación y argumentación (E-V), se presenta notoriamente en los protocolos de ambos juegos, aunque en uno de ellos de forma más constante que en el otro.

En relación al momento de aparición y el tiempo dedicado podemos concluir que:

El episodio de Exploración y análisis, es el que se presenta con mayor frecuencia, a lo largo de todas las sesiones y ocupa en promedio poco más del 45% del tiempo total de cada sesión.

El episodio de Verificación y argumentación, ocupa en promedio, poco más del 19% del tiempo total de las sesiones. Aparece de manera relevante hacia la segunda mitad de cada sesión. Su presencia es mayor en las segundas sesiones de cada juego, apareciendo incluso en el inicio de una de las sesiones.

Estos resultados coinciden con la idea de investigadores como Pólya (1979), Schoenfeld (1985), Corbalán (1994) y Mallart (2008) sobre uno de los aspectos más importantes del proceso de resolución de un problema: la reflexión y verificación del proceso llevado a cabo. En su libro, Corbalán (1997) dice “dentro de la matematización de situaciones (en general de la resolución de problemas) es de importancia fundamental la formulación de hipótesis, y su comprobación posterior. Ese proceso es muy fácil de realizar con juegos y su puesta en práctica inmediata para su contraste [...] A las motivaciones habituales para desear resolver un problema se añade el hecho de que si utilizamos buenas técnicas se ganan las partidas. Y ello constituye una motivación profunda de actuación para todas las edades” (Corbalán, op. cit. p.65).

En cuanto a nuestro tercer objetivo específico, comparar los episodios en ambos tipos de resolución buscando similitudes y diferencias, podemos concluir que, tanto en el proceso de resolución de problemas como de juegos de estrategia, se presentan todos los episodios identificados en el análisis.

Las similitudes entre ambos procesos son las siguientes:

- En ambos casos, el episodio de Lectura se presenta al inicio del proceso.
- Los episodios más relevantes, en cuanto al tiempo que se les dedica durante las sesiones, son los de Exploración y análisis y Verificación y argumentación.
- Los episodios de Planificación e Implementación se presenta unidos, después de planificar se implementa la acción planificada con el objetivo de solucionar el desafío presentado.
- La aparición de los episodios durante la resolución de problemas y de juegos de estrategia se comportan de manera diferente. Mientras que durante la resolución de los problemas, los episodios se presentan de manera lineal, sin mayores intermitencia y sin seguir una pauta de episodios común entre ambos problemas; en la resolución de los juegos de estrategias, se presentan de manera intermitente a lo largo de las sesiones, pero presentan una pauta de episodios similar.
- Se observa, al inicio de las sesiones, que al episodio de Exploración le siguen los episodios de Planificación e Implementación; el patrón observado es: E-P-I.
- Se observa que hacia el final de las sesiones, al episodio de Exploración y análisis, le sigue el episodio de Verificación y argumentación; el patrón observado es E-V.
- Los momentos de transición, son lapsos breves de tiempo, que no tienen interferencia sobre los procesos de resolución y que aparecen brevemente durante las sesiones.

Las principales diferencias entre ambos procesos son las siguientes:

- Los episodios de Planificación e Implementación, se presenta con mayor frecuencia durante la resolución de los juegos.
- El episodio de Exploración y análisis es más relevante en cuanto a la frecuencia y al tiempo destinado durante la resolución de los juegos.
- El episodio de Verificación y argumentación, es más relevante en cuanto a la frecuencia y al tiempo destinado durante la resolución de los problemas.
- La aparición de los episodios durante la resolución del juego, es más frecuente e intermitente que en los problemas.

- Existen notorias diferencias entre los dos problemas analizados. En el problema A, los episodios parecen comportarse de manera muy similar a la de los juegos. En cambio en el Problema B, la mayoría de los episodios se presentan en una ocasión y en ambos grupos siguen el mismo orden: Lectura, Exploración y análisis, Planificación, Implementación y Verificación y argumentación.

Es importante mencionar, que a medida que las sesiones avanzaban, los estudiantes iban asimilando la dinámica de trabajo y requerían cada vez menos de ayuda del adulto, al mismo tiempo que el trabajo se tornaba cada vez más colaborativo entre ellos. Incluso, no sólo compartían dudas o estrategias con los integrantes de su grupo, sino que también con los otros grupos participantes. Se esforzaban por comunicar sus ideas para que los demás pudieran comprender lo que pensaban, es decir, el episodio de argumentación y comunicación, se convertía en una instancia en los que ellos eran los protagonistas, los verdaderos resolutores de las tareas.

Esto nos lleva a mencionar la importancia de la gestión del adulto (Ver Capítulo 4, apartado 4.7.3., página 117); si bien, son los alumnos quienes protagonizan el proceso de resolución, este proceso es más o menos significativo en el contexto escolar debido a la orientación del adulto. Este tipo de tareas, requiere que el adulto conozca a fondo la tarea seleccionada y permita que sean los estudiantes quienes encuentren la solución evitando dar pistas o dar las respuestas esperadas, es decir, que cumpla el rol de mediador del proceso de resolución.

### **5.3. Conclusión respecto al desarrollo de habilidades de resolución de problemas**

A partir de los resultados obtenidos, podemos concluir que las tareas diseñadas para el presente estudio permiten el desarrollo de habilidades de resolución de problemas. Como fundamento tenemos que en el desarrollo de ambas tareas (juegos y problemas) se presentaron los mismo episodios y la forma de presentación de los mismos posee similitudes observables y diferencias que subyacen a la naturaleza lúdica del juego versus el desarrollo de un problema.

Ambas actividades se desarrollaron en un entorno escolar de naturaleza matemática, en donde existía una pauta didáctica que generaba el entorno propicio para que surgieran procesos de resolución de problemas y no una mera repetición de pasos en búsqueda de una solución mecánica.

Si bien el aspecto motivacional provocado por estas tareas no forma parte de nuestro estudio, se debe mencionar que durante las cuatro tareas los estudiantes

se mostraban interesados e involucrados en resolver los desafíos planteados, puesto que estos se presentaron de manera lúdica y con igual importancia, tanto en el caso de los juegos como de los problemas.

#### **5.4. Limitaciones del estudio.**

Desde el inicio de la presente investigación se tenían grandes expectativas respecto a los resultados a obtener y a los objetivos a abordar. Sin embargo, la necesidad de acotar el estudio al tiempo disponible, nos hizo dejar interesantes objetos de estudio de lado, como la observación de la posible transferencia de los procesos de resolución de un tipo de problema a otro y la observación de transferencia también de contenidos entre ambos tipos de tareas.

Aunque los problemas tenían relación en cuanto al contenido matemático que abordaban, la posible transferencia de contenidos entre un tipo de tarea al otro quedó fuera del presente estudio.

#### **5.5. Perspectivas de futuro e implicaciones didácticas**

Una investigación de este tipo, en donde se consolida un instrumento de análisis que permite el análisis de procesos de resolución de problemas y de juegos de estrategia, nos permitirá a futuro, enfocarnos en otros aspectos importantes y necesarios para generar un entorno que permita el desarrollo de las habilidades de resolución de problemas.

Tanto los estudios anteriormente mencionados (Corbalán, 1997; Edo, 2002; Mallart, 2008) como nuestro estudio, se aporta evidencias respecto a la similitud de los procesos de resolución de un juego de estrategia y los procesos de resolución de un problema matemático ya que en ambos se presentan procesos comunes. Sin embargo, sería interesante replicar el estudio con otros juegos y problemas que permitan aseverar estas conclusiones y generalizar la aplicación de este tipo de problemas y de juegos en el aula.

Sería adecuado también, realizar nuevos estudios con alumnos de distintos niveles de primaria, con distintos juegos de estrategia y buscar otros problemas que tengan relación con dichos juegos.

En cuanto al contenido, surgen las siguientes interrogantes: ¿Cómo seleccionar el juego de estrategia adecuado para un grupo de alumnos específicos y el problema que tenga relación, en cuanto a contenidos y estrategias de resolución con este juego?, ¿qué heurísticas pueden desarrollarse en la resolución de un juego de estrategia y de cada problema?, ¿cómo se trasladan las heurísticas presente en el

juego de estrategia a la resolución de un problema matemático?, ¿Existe transferencia entre el contenido matemático presente en un juego de estrategia y los contenidos objeto de aprendizaje escolar en educación Matemática?

En relación a los alumnos, surgen las siguientes preguntas: ¿qué características tienen las interacciones verbales entre iguales que se generan durante el juego de estrategia?, ¿el cambio en la motivación y actitud positiva generada por los juegos matemáticos en los alumnos se traslada a otros contenidos matemáticos menos lúdicos y cuál es la permanencia de esta actitud positiva hacia las matemáticas?

En relación a los maestros, se debe estudiar el traspaso de control por parte de la maestra a los alumnos. Tenemos claro que la gestión del adulto durante la aplicación de una tarea, debe generar un ambiente que permita que el alumno se exprese y comente los descubrimientos realizados en el proceso llevado a cabo. Las argumentaciones realizadas por los alumnos, de las soluciones encontradas son importantes para el cumplimiento de los objetivos del juego sin interrupciones ni ayudas innecesarias.

A partir de estos antecedentes surgen preguntas similares a las que surgen en el estudio de Edo (2002): ¿poseen los maestros un conocimiento pedagógico del contenido matemático y de las matemáticas, suficientes para aprovechar el potencial de los juegos matemáticos y de los problemas planteados?, ¿entienden los maestros la importancia del traspaso del control a sus alumnos?, ¿qué características tiene un eficiente traspaso de control y qué ventajas aporta a los alumnos en el desarrollo de las tareas escolares?.

En síntesis, para que las tareas de resolución de problemas cumplan con sus objetivos didácticos, requieren de un profesor formado en el traspaso del control, ya que para que un juego no se transforme en una mera competición entre los participantes, las actividades de juego de estrategia como otras complementarias, deben llevar al alumno a pensar matemáticamente. Lo mismo sucede con los problemas planteados, no todos los problemas son tratados de modo que puedan desarrollar el pensamiento matemático; no todos los problemas plantean un reto que obligue al estudiante a jugar con el conocimiento adquirido en la etapa escolar y a buscar distintos caminos de solución.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, P. (1996). El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 8, 7-18.
- Arzt A., Armour-Thomas, E. (1992). Development of a cognitive-metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. *Cognition and Instruction*, 9, 137-175.
- Baeza, M. (2008). *Relaciones entre procesos de resolución de juegos de estrategia y procesos de resolución de problemas: elaboración de un instrumento de análisis*. Treball de recerca. Doctorat en Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.
- Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. El trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 1(1), 1-9.
- Bishop, A. (1998). El papel de los juegos en educación matemática. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 18, 9-19.
- Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.
- Codina, A. (2015). *Interacción e interactividad con nuevas tecnologías en la resolución de problemas matemáticos*. Tesis doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la matemática.
- Codina, A., Castro, E. (2006). Descripción de un sistema de categorías para una investigación en resolución de problemas con herramientas informáticas interactivas. En: *Seminario de Metodologías de Investigación de trabajos de curso*. Recuperada mayo 20, 2008, de <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/CodinaA06-2818.PDF>
- Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Corbalán, F. (1997). *Juegos de estrategia y resolución de problemas: Análisis de estrategias y tipología de jugadores en el alumnado de secundaria*. Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

- Corbalán, F., Deulofeu, J. (1996). Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 7, 71-80.
- Coronilla, S., Fedriani, M., Trujillo, J. (2005). Posibilidades didácticas del juego tres en raya. *Épsilon*, 63, 329-338.
- D'Amore B., Fandiño, M.I. (2002). Un acercamiento analítico al “triángulo de la didáctica”. *Educación Matemática*. México. 14(1), 48-61.
- Deulofeu, J. (2001). *Una recreación matemática: historia, juegos y problemas*. Barcelona: Planeta.
- Edo, M. (2002). *Jocs, interacció i construcció de coneixements matemàtics*. Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.
- Edo, M., Deulofeu, J. (2006). Investigación sobre juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos. *Enseñanza de la Ciencias*, 24(2), 257-268.
- Edo, M., Deulofeu, J., Badillo, E. (2007). Taller de juego y matemáticas: desarrollo de las estrategias en la escuela. Actas XIII JAEM, *Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, Granada.
- Edo, M. (2008). Joc i matemàtiques: Recerca i implicacions didàctiques. *Comunicació Educativa*, 21, 64-70.
- Edo, M., Baeza, M., Deulofeu, J., Badillo, E. (2008). Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 14, 61-75.
- Ferrero, L. (1998). ¡Hagan juego! Juegos matemáticos para la educación primaria. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 18, 39-46.
- Generalitat de Catalunya (2007). Currículum de matemàtiques per a l'educació Primària. Annex al decret 142/2007 pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària. (p. 21822) DOGC 4915-29/06/2007.
- Gómez, I. (1992). *Los juegos de estrategia en el currículum de matemáticas*. Apuntes I.E.P.S. Madrid: Narcea.
- Guzmán, M. (1989). Juegos y matemáticas. *Suma*, 4, 61-64.

- Guzmán, M. (2005). Juegos matemáticos en la enseñanza. *Textos de Miguel de Guzmán*, Monografía 2. Suma.
- Huizinga, J. (1995). *Homo ludens*. Madrid: Alianza.
- Kamii, C., DeVries, R. (1980). *Juegos colectivos en la primera enseñanza: implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: Visor.
- Kamii, C., Kato, Y. (2005). Fostering the Development of Logico-Mathematical Thinking in a Card Game at Ages 5-6. *Early Education; Development* 16(3), 367-383.
- Kilpatrick, J. (1978). Variables and Methodologies in Research on Problem Solving. En Hatfield, L.L. y Bradbard, D.A. (Eds.) *Mathematical problem solving: paper from a research workshop*. Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science.
- Mallart, A. (2008). *Estrategies de millora per a la resolució de problemes amb alumnes de segon d'Eso: Ús de la matemàtica recreativa a les fases de l'abordatge i revisió*. Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.
- MINEDUC (2004). *Planes y programas de estudio: Educación Básica y Media Formación general*. Ministerio de Educación de Chile, Santiago.
- NCTM. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. National Council of Teacher of Mathematics. Traducción: SAEM Thales, Sevilla.
- Pólya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares, col. Mathema.
- Schoenfeld, A. (1981). Episodes and Executive Decisions in Mathematical Problem Solving. (ERIC N° ED201505) Recuperado, 22 de Mayo, 2008, Base de datos ERIC.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press. Inc.
- Schoenfeld, A. (1989). La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas. *Currículum y cognición* (pp. 141-170). Buenos Aires: Aique.

- Shoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (N.C.T.M.). D.A. Grows, editor. Nueva York: Macmillan.
- Shoenfeld, A.H. (2000). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 243-261
- Topping, K., Bamford, J. (1998). *The Paired Math Handbook. Parental Involvement and Peer Tutoring in Mathematics*. London: David Fulton Publishers.
- Topping, K., Campbell, J., Douglas, W., Smith, A. (2003). Cross-age peer tutoring in mathematics with seven- and 11-year olds: influence on mathematical vocabulary, strategic dialogue and self-concept. *Educational Research*, 45(3), 287-308.
- Vygotski, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.

## **7. ANEXOS (Adjunto en CD)**

### 7.1. Análisis de los protocolos

7.1.1. Protocolo 1

7.1.2. Protocolo 2

7.1.3. Protocolo 3

7.1.4. Protocolo 4

7.1.5. Protocolo 5

7.1.6. Protocolo 6

7.1.7. Protocolo 7

7.1.8. Protocolo 8

7.1.9. Protocolo 9

7.1.10. Protocolo 10

7.1.11. Protocolo 11

7.1.12. Protocolo 12

### 7.2. Tablas Protocolos

7.2.1. Tabla Protocolo 1

7.2.2. Tabla Protocolo 2

7.2.3. Tabla Protocolo 3

7.2.4. Tabla Protocolo 4

7.2.5. Tabla Protocolo 5

7.2.6. Tabla Protocolo 6

7.2.7. Tabla Protocolo 7

7.2.8. Tabla Protocolo 8

7.2.9. Tabla Protocolo 9

7.2.10. Tabla Protocolo 10

7.2.11. Tabla Protocolo 11

7.2.12. Tabla Protocolo 12

### 7.3. Tabla resumen de Protocolos

- 7.3.1. Tabla resumen Protocolo 1, pareja 1
- 7.3.2. Tabla resumen Protocolo 1, pareja 2
- 7.3.3. Tabla resumen Protocolo 2, pareja 3
- 7.3.4. Tabla resumen Protocolo 2, pareja 4
- 7.3.5. Tabla resumen Protocolo 3
- 7.3.6. Tabla resumen Protocolo 4
- 7.3.7. Tabla resumen Protocolo 5
- 7.3.8. Tabla resumen Protocolo 6
- 7.3.9. Tabla resumen Protocolo 7
- 7.3.10. Tabla resumen Protocolo 8
- 7.3.11. Tabla resumen Protocolo 9
- 7.3.12. Tabla resumen Protocolo 10
- 7.3.13. Tabla resumen Protocolo 11
- 7.3.14. Tabla resumen Protocolo 12

#### 7.4. Líneas de tiempo

- 7.4.1. Línea de tiempo 9: Protocolo 1, pareja 1
- 7.4.2. Línea de tiempo 10: Protocolo 1, pareja 2
- 7.4.3. Línea de tiempo 11: Protocolo 2, pareja 3
- 7.4.4. Línea de tiempo 12: Protocolo 2, pareja 4
- 7.4.5. Línea de tiempo 1: Protocolo 3
- 7.4.6. Línea de tiempo 2: Protocolo 4
- 7.4.7. Línea de tiempo 3: Protocolo 5
- 7.4.8. Línea de tiempo 4: Protocolo 6
- 7.4.9. Línea de tiempo 13: Protocolo 7
- 7.4.10. Línea de tiempo 14: Protocolo 8
- 7.4.11. Línea de tiempo 5: Protocolo 9
- 7.4.12. Línea de tiempo 6: Protocolo 10
- 7.4.13. Línea de tiempo 7: Protocolo 11
- 7.4.14. Línea de tiempo 8: Protocolo 12