# CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Del 10 al 14 de Julio

VIII CIBEM

Madrid 2017

# LIBRO DE ACTAS

*" Miramos con ilusión hacia el futuro de la educación matemática "*

**VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

# LIBRO DE ACTAS

**Editado por:**
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
C/ H. Carvajal, 5. 23740 Andújar (Jaén) España

***www.fespm.es***

ISBN: 978-84-945722-3-4

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas no se hace responsable de los trabajos publicados en estas actas.

Los autores son responsables de que las citas en sus trabajos están adecuadamente indicadas con referencias apropiadas en el texto, así como de no haber utilizado fuentes distintas de las indicadas en la bibliografía, asumiendo las consecuencias de un posible plagio.

# VIII CIBEM

Madrid 2017

## CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**COMUNICACIONES BREVES 1101-1200**

CB-1.103

# ECO – MATEMÁTICAS EN LAS CLASES DE MAGISTERIO

Juan Miguel Ribera Puchades[(1)] - Adela Jaime Pastor[(2)] - María José Beltrán Meneu[(2)]
juan-miguel.ribera@unirioja.es - adela.jaime@uv.es - maria.jose.beltran@uv.es
[(1)]Universidad de La Rioja - [(2)]Universitat de València

Núcleo temático: VI. Matemáticas y su integración con otras áreas.
Modalidad: CB Comunicación breve.
Nivel educativo: 5 Formación y actualización docente y 2 Primario (6 a 11 años)
Palabras clave: ecología, conciencia social, aprendizaje cooperativo, atención a la diversidad en matemáticas.

**Resumen**
*Cualquier tema puede servir de pretexto para plantear problemas de matemáticas. También es factible plantear problemas con extensiones para involucrar a alumnos de diversos niveles de rendimiento matemático, incluso para talentos matemáticos.*
*En nuestra presentación comentaremos una experiencia llevada a cabo en la Universidad de Valencia con estudiantes del Grado de Maestro en E. Primaria, con dos objetivos: a) fomentar en los futuros profesores y, a través de ellos, en los niños de Primaria, el desarrollo de una cultura ecológica y b) atender en el aula a estudiantes de varios niveles en matemáticas: por debajo de la media, medio y alto o talento matemático. En nuestros cursos proponemos trabajos grupales, consistentes en elaborar un cuento, que pueda ser llevado al aula de Primaria, que: a) resalte algún problema medioambiental y b) establezca relación con problemas de matemáticas con nivel bajo, medio y alto de complejidad.*
*Por otra parte, los futuros maestros deben también: a) relacionar el diseño curricular oficial con los problemas, b) realizar un análisis didáctico de los problemas, c) incluir manipulativos y TIC si procede y d) incluir una relación comentada de páginas web y bibliografía, que puedan ser interesantes para el profesor y/o para los niños.*

## Introducción

Nuestro planeta, la naturaleza y los seres que en ella habitamos se han constituido en ecosistemas equilibrados tras millones de años de evolución. Una utilización cuidadosa y respetuosa con el medio ambiente de los recursos existentes mantendría la calidad de vida y la salud de quienes habitamos en ella. Eso, además de la natural belleza y la perfección que se puede observar en los seres vivos e inertes, en los fenómenos naturales y en su funcionamiento.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Pero es un hecho el deterioro de la Tierra, la sobreexplotación y destrucción de los recursos naturales y la exposición innecesaria a problemas de salud, debidos al empleo de materiales, compuestos químicos o utilización de tecnología de manera inadecuada.

Por otra parte, los maestros de Primaria son transmisores y mediadores de conocimiento, actitudes y valores en los niños. Y esto los convierte en un eslabón importante en la concienciación ciudadana sobre la necesidad de mantener o mejorar el estado en que se encuentra la Tierra. Además de encumbrar utopías como realizar viajes intergalácticos, sería deseable que los niños se plantearan objetivos como descontaminar los ríos, comer sin componentes perjudiciales, reforestar montañas...

¿Qué tiene esto que ver con las matemáticas? Esa misma pregunta formulan los estudiantes de Magisterio, futuros profesores de Enseñanza Primaria, cuando, en alguna asignatura de Didáctica de la Matemática, les proponemos un trabajo para Primaria, contextualizado en la sostenibilidad del planeta Tierra. Y es clara la respuesta: las matemáticas están en todos los ámbitos. Y, dado que en Magisterio se forman futuros profesores, intentamos transmitir esta idea: que no es necesario abrir el libro de matemáticas para trabajar conocimientos o destrezas vinculados a esta materia; es posible utilizar en el aula la última noticia del periódico, la próxima excursión de la clase... Y nosotros nos servimos de contextos de sostenibilidad, medioambientales y de salud como ejemplo de ello.

Y todavía hay otro punto que resaltamos en el trabajo que deben realizar los estudiantes de Magisterio: la atención a la diversidad en el aula de Primaria, en relación con el dominio de las matemáticas. Hay estudiantes que necesitan más ayuda y un nivel de exigencia menor que la media, mientras que otros requieren profundización, mayor dificultad y, quizá, documentos complementarios para su propia consulta; en particular, los estudiantes de "alta capacidad matemática" se encontrarían en este último grupo.

En esta comunicación mostramos una tarea que, con ligeras variaciones, se ha venido llevando a cabo desde hace tres cursos en varios grupos de la Facultad de Magisterio de la Universitat de València. A través de ella, los futuros profesores realizan una propuesta de matemáticas para el aula de primaria, contextualizada en temas medioambientales y de interés para la salud.

## Destinatarios y objetivos del trabajo

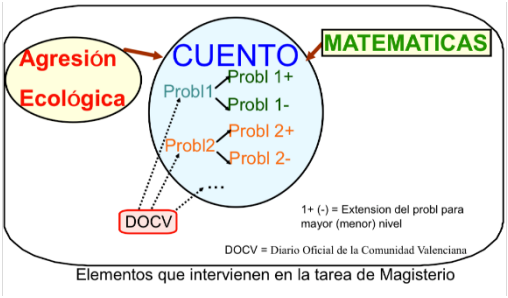

ISBN 978-84-945722-3-4

Esta experiencia va dirigida a los futuros maestros de E. Primaria y, en segundo término, a estudiantes de E. Primaria. Los objetivos de la misma son los siguientes:

1- Fomentar en los futuros profesores y, a través de ellos, en los estudiantes de E. Primaria, el desarrollo de una cultura ecológica, de sostenibilidad medioambiental y de prevención contra factores que perjudiquen la salud.
2- Dotar a los futuros maestros de herramientas para atender en el aula de E. Primaria a estudiantes de varios niveles en matemáticas: por debajo de la media, medio y alto o talento.
3- Hacer que los futuros profesores de Primaria sean conscientes de que las matemáticas están en cualquier ámbito, el cual se puede utilizar en el aula.

**Apartados del trabajo**

Se propone un trabajo grupal, de 6 alumnos por grupo, aproximadamente, con el fin de que se realice de forma colaborativa. La utilización de un cuento como contexto para plantear problemas de matemáticas, así como la elaboración del cuento en sí dirigido al aula de primaria, sobre un tema preocupante, que hay que adaptar al nivel adecuado, es algo que resulta nuevo para los futuros maestros. En esta situación, el aporte de ideas entre los miembros del grupo y la distribución de tareas enriquece el resultado. A continuación describimos los diferentes apartados del trabajo:



Elementos que intervienen en la tarea de Magisterio

*1- Elección de un tema.*

El tema sobre el que se va a realizar el trabajo se deja a elección de los estudiantes, cuidando que no se repitan en un aula. De todas maneras, se facilita un listado para orientar a los alumnos, por si no llegan a definir ninguno en concreto. (Ej.: deforestación, contaminación de los ríos, pesticidas, aditivos no saludables en la alimentación, centrales nucleares, ...)

*2- Breve justificación del interés del tema elegido.*

En esta apartado pretendemos que se presente, con datos fiables, el problema existente. Pero también, a ser posible, soluciones o formas de mitigar dicho problema.

*3- Curso de E. Primaria al que se dirige la propuesta.*



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Se pide que los alumnos elaboren una propuesta centrada en un curso de E. Primaria, o quizá para dos cursos consecutivos, donde los contenidos de matemáticas se correspondan con los del currículum, y el vocabulario utilizado se adapte al correspondiente nivel.

*4- Elaboración de un cuento breve (2-5 páginas de texto).*

La elaboración del cuento es una tarea creativa, de recopilación, resumen y adaptación de la información, en este caso medioambiental, a la que hay que añadir la fantasía propia del público de E. Primaria. Todas las destrezas mencionadas son importantes, aunque destacamos la creatividad, puesto que de manera explícita no está considerada en el sistema educativo y, sin embargo, es importante tenerla en cuenta y desarrollarla. En particular, es inherente a la superdotación, por lo que puede ser interesante para alumnos con esta característica. En este apartado se presenta a los futuros maestros la realidad de los niños con superdotación para que tengan en cuenta a este tipo de alumnado en el diseño de sus actividades atendiendo a la diversidad en sus aulas.

*5- Inclusión de problemas matemáticos en el cuento.*

En este apartado se requiere el diseño de 12 problemas de matemáticas, acordes con el curso de E. Primaria al que van dirigidos, contextualizados en el tema seleccionado y que, en su conjunto, abarquen todos los bloques de contenidos del diseño curricular contemplados en el DOCV (Diario Oficial de la Comunidad Valenciana) que se correspondan con la asignatura que están cursando los estudiantes del grado en E. Primaria.

En los problemas hay que especificar objetivos de aprendizaje relacionados con los contenidos incluidos en el DOCV, y, si procede, otros complementarios. Además, hay que incluir "extensiones" del problema, tanto para nivel inferior como para superior, de dominio de las matemáticas implicadas.

En este trabajo, las matemáticas están contempladas desde la resolución de problemas. Tal como se indica en el decreto que regula la LOMCE en la Comunidad Valenciana (Generalitat Valenciana, 2014), *Las estrategias de resolución de problemas constituyen uno de las líneas principales de la actividad matemática y han de ser fuente y soporte principal del aprendizaje*. Lo usual es que los futuros maestros resuelvan en Magisterio algunos problemas, cuyo enunciado se les proporciona, y posteriormente, como maestros de E. Primaria, utilicen los del libro de texto o los de alguna otra fuente. A través de esta tarea, se pretende poner de manifiesto la posibilidad y utilidad de construir problemas propios,



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

adaptados a los objetivos matemáticos que se tengan como objetivo de aprendizaje, contextualizados en un tema de interés y, además, con variantes que resulten útiles a los niños con diferentes niveles de dominio de las matemáticas.

*6- Diagrama de contenidos curriculares*

Este apartado se centra en el diseño de una tabla o diagrama que recoja todos los contenidos curriculares (DOCV) pertinentes según la asignatura del grado en E. Primaria para la que se realice este trabajo. En dicha tabla se pide a los alumnos destacar los contenidos abordados en los problemas abordados en el cuento.

*7- Utilización de materiales manipulativos o tecnología pertinentes.*

En el decreto que regula el currículo de matemáticas para Primaria en la LOMCE, en la Comunidad Valenciana (Generalitat Valenciana, 2014), se especifica que *El uso de materiales como monedas, cromos, fichas, bolas, ábacos, cubos, regletas, espejos… en la enseñanza de la matemática es fundamental y muy beneficioso, ya que proporciona al niño la oportunidad de comprender a través de la manipulación*. Así mismo, hay muchas páginas de internet, con información y recursos interactivos atractivos para los niños y programas (GeoGebra, Paint, Scratch). Estos recursos virtuales hay que explotarlos, tanto desde la utilización de algunos juegos o *applets* concretos, como desde la búsqueda y selección por parte de los niños de páginas y enlaces interesantes. En (Generalitat Valenciana, 2014) se especifica: *Obtención de información mediante herramientas digitales de búsqueda y visualización aplicando estrategias de filtrado sencillas (diferentes buscadores y repositorios, opciones de filtrado de los sitios web, etc.)*. De todo esto han tenido información previa los futuros maestros en las clases del grado en E. Primaria y se trata de incorporarlos a los problemas que se planteen en el cuento.

*8. Referencias bibliográficas del trabajo y webgrafía.*

En el trabajo deben incluirse enlaces a páginas web con información sobre el tema medioambiental tratado y también sobre los aspectos matemáticos trabajados, tanto de carácter explicativo como lúdico. Toda la bibliografía debe ir acompañada de comentarios sobre lo que se aborda, nivel al que está dirigida, facilidad de manejo e interés. De esta manera los futuros maestros pueden elaborar una lista de enlaces de internet que pueden resultar interesantes para su futuro trabajo en el aula.

*9- Conclusiones:*


ISBN 978-84-945722-3-4

Se pide una reflexión grupal a los miembros del grupo sobre los siguientes puntos para analizar el aprendizaje realizado en este trabajo.

- Interés de la transmisión en E. Primaria de una sensibilización hacia la conservación de la naturaleza.
- Aprendizaje realizado respecto a la utilización de cualquier situación o contexto como fuente de enseñanza de matemáticas en E. Primaria.
- Valoración de la utilización de un cuento como conductor de situaciones de resolución de problemas matemáticos.
- Valoración del planteamiento de situaciones de aprendizaje en la clase incluyendo tres niveles de dificultad para atender a la diversidad: desde nivel bajo a talento matemático.

**Ejemplo de un posible trabajo**

En el Anexo mostramos un recorrido rápido por los diversos apartados que hemos presentado anteriormente en "Apartados del trabajo", centrados en un tema concreto: "Las islas basura". Lo hemos elegido por ser desconocido por gran parte de la población y, sin embargo, tener un gran impacto ambiental.

**Conclusiones**

Tras haber realizado esta propuesta de trabajo con alumnos del Grado en Maestro en E. Primaria, destacamos que los resultados han sido siempre muy satisfactorios. En particular, destacamos las siguientes observaciones:

- Los alumnos en general desarrollan unos trabajos sorprendentes, muy creativos y completos.
- Todos los miembros del grupo aprenden sobre los contenidos ecológicos que ellos exponen, así como de los temas tratados por otros grupos.
- Lo que en un principio les parece un trabajo complicado, finalmente les proporciona unas nuevas herramientas para organizar sus clases de primaria y, en particular, integrar las matemáticas en cualquier área de interés y con atención a niveles distintos de comprensión matemática. De hecho, se aprecia un considerable avance respecto a


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

la habilidad para realizar propuestas en el aula de E. Primaria, adaptadas a diversos niveles de dominio de las matemáticas, tanto para niños que necesitan más formación como para los que van muy avanzados (niños con talento matemático). Y ese progreso no sólo se refiere a la realización de unas actividades concretas, sino, y más importante, a un cambio de mentalidad, por el cual casi todas las tareas se pueden presentar en el aula teniendo en cuenta la diversidad de los niños en relación al nivel de comprensión matemática.

**Referencias bibliográficas**

Barbieri, A (2016) Un continente flotando de basura. La Vanguardia http://www.lavanguardia.com/natural/20160609/402387225954/isla-basura-pacifico.html Consultado 25/05/2017 18:00

Generalitat Valenciana (2014). Decreto 108/2014, de 4 de julio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la educación primaria en la Comunitat Valenciana.

National Geographic (s.f.). Great Pacific Garbage Patch http://www.nationalgeographic.org/encyclopedia/great-pacific-garbage-patch/ Consultado 25/05/2017 18:01

Great Pacific Garbage Patch. (s.f.). En Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Great_Pacific_garbage_patch Consultado 25/05/2017 18:01

Domínguez, N. (2015). El mundo tira ocho millones de toneladas de plástico al mar cada año. El País http://elpais.com/elpais/2015/02/12/ciencia/1423754724_622856.html Consultado 25/05/2017 18:01

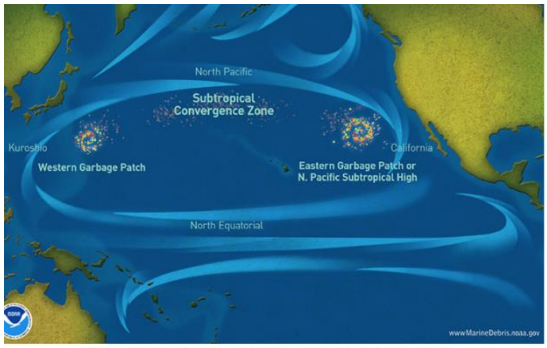
**Anexo: Ejemplo parcial de un posible trabajo**

A continuación mostramos un recorrido rápido por los diversos apartados que deben completarse en el trabajo, mediante un ejemplo concreto. No desarrollamos los apartados por completo, pero presentamos un resumen suficientemente ilustrativo de lo que se pretende en cada uno de ellos:

Uno de los temas más elegidos por los alumnos es “Las islas basura”. Por ello, nos centraremos en él para recorrer los 9 apartados que se proponen en el trabajo.


ISBN 978-84-945722-3-4

Se trata de una situación asombrosa, alarmante, desconocida por la mayoría de los futuros maestros de E. Primaria y que causa asombro cuando se plantea en el aula. Sobre este tema hay mucha información disponible en internet, en fuentes como el National Geographic, en periódicos y en enlaces de curiosidades. Aquí daremos sólo algunas cifras e ideas generales:

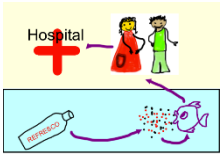


*Marine debris accumulation locations in the North Pacific Ocean. (NOAA Marine Debris Program)*

**1 y 2- Elección de un tema y breve justificación del interés del tema elegido:**

**Las islas basura**.

Charles Moore descubrió en 1997 la primera y más grande de las islas basura, en el océano Pacífico, denominada en inglés *Great Garbage Patch*. Cada año tiramos al mar, aproximadamente, 8 millones de toneladas de plástico, que las corrientes marinas hacen que se acumulen en algunas zonas del planeta. No se puede determinar su extensión, que es de aproximadamente 4 millones de $km^2$ (la extensión de España es, aproximadamente, 500.000 $km^2$). En su mayoría se trata de micropartículas de plástico, procedentes de la descomposición de fragmentos mayores. Es como una "sopa" de partículas que se encuentran flotando o justo por debajo de la superficie del océano. Las pequeñas partículas tienen toxinas, que son tragadas por los peces o las medusas (las cuales se tragan algunos peces). Los hombres llegan a ingerir esos peces y las toxinas que se han acumulado en el pez. Se están buscando soluciones al problema, como una gran barrera, una recicladora del plástico, y otras posibilidades.




**3- Curso de E. Primaria al que se dirige la propuesta**

6º de E. Primaria. Se podría haber planteado en otro curso, pero elegimos este para seleccionar los problemas y utilizar un vocabulario adecuado a este nivel.

**4- Elaboración de un cuento breve** (Resumen)



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Álex era un hombre bravucón, de mediana edad. Apostó con sus conocidos que las islas basura y los peligros asociados eran fruto de la imaginación humana, por lo que se dirigió hacia una de ellas, con la intención de grabar un vídeo y volver triunfante. Pero cuando llegó a la zona más densa, el barco se paró y se vio obligado a pescar para subsistir. Enfermó porque allí todos los peces habían ingerido y asimilado las toxinas derivadas de los plásticos. Por suerte para él, una pareja de investigadores ecologistas, con sus hijos y unos amigos de estos, llegó a ese lugar con la finalidad de hacer mediciones y pudieron socorrer a Álex.

**5- Inclusión de problemas matemáticos en el cuento**

(Ejemplo de dos problemas, con sus extensiones)

Problema1: En el cuento has visto que hay muchas toneladas de plástico en el mar. Si se colocara toda la basura que echamos, a lo largo de las costas de la Tierra, habría cinco bolsas de la compra llenas de plásticos cada 30 centímetros (El País, 2015). Busca en internet los datos que necesites y obtén la cantidad de bolsas de basura que corresponderían a la costa de la provincia de Valencia.

Problema 1-: Hallar las bolsas que corresponderían a la costa de la provincia de Valencia si cada Km. se llenan 15.000 bolsas.

Problema 1+: el Problema 1, pero utilizando como extensión de costa la de toda España.

Problema 2: La forma de la isla basura cambia constantemente. Tomemos como 3 millones de $km^2$ la extensión de la mayor isla basura del Pacífico. Si fuera un círculo, ¿cuál debería ser su radio? Si fuera un cuadrado, ¿cuánto mediría su lado?

Problema 2-: Dibuja una posible forma de la mayor isla basura, que tiene un área de 3 millones de $km^2$. Puedes hacerla por partes, indicando el área de cada parte.

Problema 2+: el Problema 2, pero añadiendo lo siguiente: Dibuja el círculo resultante a escala, en un mapa en el que aparezca el océano Pacífico y los continentes que lo limitan (o parte de ellos). Si la forma fuera un rectángulo, ¿Qué dimensiones puede tener?

En el caso del Problema 1 y sus extensiones, el tamaño de los números varía y, además, el problema de menor nivel se resuelve mediante una operación (a parte de la conversión de unidades), mientras que en los otros niveles se requieren dos. Por otra parte, las modificaciones del Problema 2 corresponden a tareas distintas, aunque todas se centran en el mismo contexto.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

**6- Diagrama de contenidos curriculares**

Por cuestión de espacio, sólo mostramos los contenidos curriculares del DOCV para 6º de E. Primaria directamente relacionados con los problemas que hemos mostrado. En el trabajo completo aparecerían los apartados de cada uno de los bloques de contenidos de matemáticas presentes en el DOCV (números, medida, geometría y probabilidad y estadística) y, en cada uno de ellos, los problemas que los tienen en cuenta.

Bloque 2, Números: Proporcionalidad directa. P1

Bloque 3, Medida: -Unidades de medida convencionales: múltiplos y submúltiplos de uso cotidiano. -Unidades del Sistema Métrico Decimal (longitud, peso/masa, capacidad, superficie) y equivalencias. P1, P2.

Bloque 4, Geometría: - El área del círculo, -Cálculo del perímetro y el área de figuras planas y composiciones de ellas. P2

**7- Utilización de materiales manipulativos o tecnología pertinentes.**

En los problemas que hemos mostrado a modo de ejemplo, se pide la consulta en páginas web. También se puede incluir en la propuesta para el aula la utilización de *applets* construidos por el profesor en GeoGebra, en los que se puedan insertar los mapas, calcular las longitudes de las costas y donde haya un rectángulo y círculo dinámicos, con indicación de su área y perímetro, para poder así ajustar las figuras a los datos del Problema 2 y de sus extensiones.

**8- Referencias bibliográficas del trabajo y webgrafía**.

De nuevo por limitación de espacio, mostramos sólo una referencia, tal como se presentaría en el trabajo del grado en E. Primaria:

Vídeo de Charles Moore, descubridor de la mayor isla basura. En inglés. Plantea el problema de los restos de plástico que van a parar al mar. Seleccionado por la relevancia de quien lo expone.

C. J. Moore. Capt. Charles Moore on the seas of plastic [vídeo, disponible en línea en www.ted.com/talks/lang/en/capt_charles_moore_on_the_seas_of_plastic.html].


ISBN 978-84-945722-3-4

## 9- Conclusiones

Para las conclusiones, enumeramos valoraciones reales de los estudiantes:

Los alumnos no se habían planteado nunca el establecimiento de relaciones entre las matemáticas y algún tema concreto de interés general, y menos a través de un cuento, pero dicen que:

- Han aprendido a relacionar las matemáticas con otras áreas.
- Les ha resultado interesante la posibilidad de transmitir información e inculcar una predisposición favorable hacia el medio ambiente.
- Han descubierto problemas existentes de sostenibilidad sobre los que se pueden tomar medidas.
- La utilización de un cuento les ha parecido una buena propuesta para el aula de E. Primaria porque hace más entretenido y fácil trabajar los temas que se consideren interesantes y las matemáticas relacionadas con ellos.
- Cada grupo ha trabajado de forma colaborativa.
- Ha sido útil la incorporación de tres niveles de dificultad como puesta en práctica de un diseño útil para atender a la diversidad (de menor nivel a talento matemático) en el aula de E. Primaria.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.104

# ELEMENTOS METODOLÓGICOS PARA UN DISEÑO DE SECUENCIAS DIDÁCTICAS EN MATEMÁTICAS, CON APOYO DE GEOGEBRA

José Luis Soto Munguía
jlsoto@mat.uson.mx
Universidad de Sonora, México

Núcleo temático: recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Bachillerato
Palabras clave: Secuencia didáctica, GeoGebra,

**Resumen**

*En el presente trabajo se describe una metodología para el diseño de secuencias didácticas en matemáticas, que ha sido aplicada en la elaboración de diversas secuencias, orientadas tanto a estudiantes como a profesores de diferentes niveles educativos, aunque aquí ejemplificamos con secuencias dirigidas a estudiantes. Las secuencias están integradas por actividades agrupadas en tres bloques ordenados, denominados: apertura, desarrollo y cierre. Como punto de partida, en la apertura se plantea una situación problema y todas las actividades de este bloque están centradas en la familiarización con la situación y su contexto; en el desarrollo se pretende avanzar gradualmente en la resolución de la situación planteada y en el cierre se pretenden formalizar las nociones matemáticas que han emergido. El software GeoGebra se ha incorporado a las secuencias con diferentes propósitos, por un lado como herramienta para simular las situaciones planteadas (apertura) y por otro, como recurso para modelar, explorar y resolver la situación propuesta a lo largo del desarrollo. En todos los casos se usan archivos previamente construidos, que pueden ser manipulados por el usuario "arrastrando" objetos en pantalla. Se presentan fragmentos de algunas secuencias, para ilustrar el diseño y la metodología.*

## Introducción

Desde la última reforma educativa aprobada en México en el año 2011, se ha insistido en la importancia del diseño de actividades didácticas. Lo cierto es que, por razones muy diversas, los avances en esta dirección son mínimos en educación básica (4-15 años) y prácticamente nulos en el bachillerato (16-18 años). Tenemos ahora un sistema educativo formalmente concebido "bajo el enfoque por competencias", pero en los hechos las prácticas educativas siguen siendo esencialmente las mismas que antes de la reforma. En el Departamento de Matemáticas de nuestra Universidad, en los últimos años nuestro grupo de trabajo ha



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

dedicado grandes esfuerzos a diseñar secuencias didácticas para los cursos de matemáticas de diferentes niveles educativos. Expondremos aquí los elementos metodológicos que nos han servido de base y las experiencias que nos han dejado estos esfuerzos. La estructura didáctica de las secuencias, ha sido tomada de Díaz_Barriga (2013), quien las describe como:

> De esta manera la secuencia de aprendizaje responde fundamentalmente a una serie de principios que se derivan de una estructura didáctica (actividades de apertura, desarrollo y cierre) y a una visión que emana de la nueva didáctica: generar procesos centrados en el aprendizaje, trabajar por situaciones reales… (p. 18)

En todos los casos el diseño tiene como punto de partida, lo que Hitt (2009) llama una *situación problema*, y que caracteriza como:

> La situación debe ser simple, fácil de entender (ello no implica que sea fácil de resolver), ella debe provocar la reflexión y por tanto no puede ser un ejercicio. La matemática que debe utilizarse no debe ser explicitada en el enunciado. (p. 6)

La dificultad principal que enfrentamos para iniciar el diseño de una secuencia, es la selección de esta *situación problema*, esto es así porque necesitamos situaciones como las descritas por Hitt, pero que además respondan a los contenidos curriculares de la escuela. Para seleccionar estas situaciones, hemos recurrido a la literatura especializada, como la compilación publicada por Teacher College University of Columbia (2012), aunque también hemos extraído situaciones de diversas publicaciones no especializadas, como revistas, sitios web, tesis de licenciatura y además hemos propuesto situaciones a partir de problemas de la vida real planteados por estudiantes y profesores de nuestro posgrado. Describimos a continuación cada una de las tres etapas que integran una secuencia.

**Apertura**

En este primer momento lo más importante es plantear una situación problema, en la que se explica la importancia que tiene abordarla y el contexto de la situación. Las actividades aquí están centradas en la comprensión de la situación. Cuando lo hemos considerado necesario hemos usado GeoGebra para construir una simulación de la situación, en ese caso esperamos que la observación y manipulación de la construcción apoye la comprensión.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Ejemplificamos con la secuencia siguiente, titulada “Cuidado con el autobús”, que llamaremos Ejemplo A y cuyo planteamiento ha sido tomado y adaptado de una publicación de Mathematics Assessment Resource Service (2015) con los permisos correspondientes y consiste esencialmente en lo siguiente: Cuando un camión o autobús da la vuelta en una esquina, el conductor debe maniobrar el volante de tal manera que logre desplazarlo hacia afuera, para que las ruedas traseras no invadan el carril por el cual circulan las bicicletas. Se pretende aquí cuantificar qué tanto invade el autobús la ciclovía.

Se proporciona en este momento, el archivo que se ilustra en la Figura 1, en donde el estudiante puede rotar el autobús, hacer variar las distancia entre los ejes del mismo y modificar el radio del borde exterior de la ciclovía; como puede verse el estudio de la situación es hasta ahora casi exclusivamente cualitativo. Se espera que esta interacción con la construcción permita entenderla mejor y clarificar los problemas que se plantearán a partir de ella.

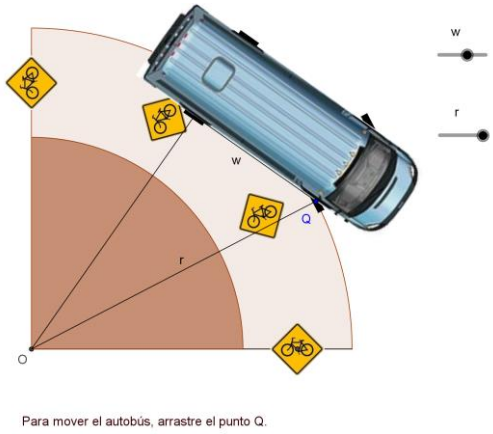



Figura 1

En un segundo caso que llamaremos Ejemplo B, mostramos que en las actividades de apertura, no necesariamente usamos tecnología, la situación de inicio consiste en plantear algunas formas geométricas que presentan las secciones transversales de los canales hidráulicos y encontrar el mejor canal de entre todos los que tienen una capacidad fija (ver Figura 2)


ISBN 978-84-945722-3-4

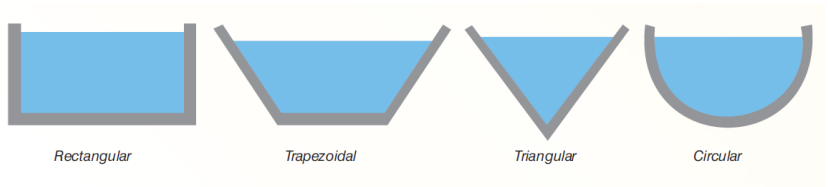



Figura 2

Como parte de las actividades de inicio, se pide expresar algebraicamente algunos parámetros que se van a necesitar durante el resto de las secuencia. El propósito aquí es constatar que la situación se ha comprendido, pero también la verificación de que se cuenta con algunas herramientas matemáticas necesarias, la Figura 3 ilustra uno de estos casos:

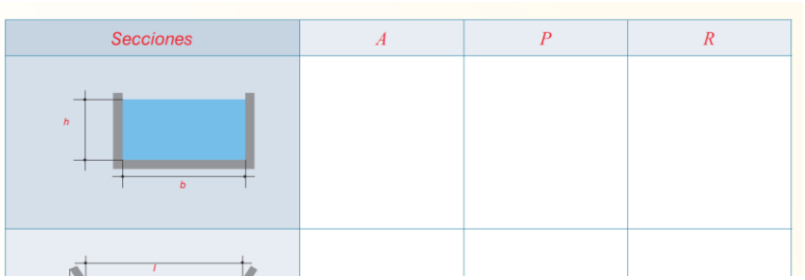



Figura 3. En la tabla, A representa el área húmeda (área del rectángulo azul), P representa el perímetro húmedo (perímetro del rectángulo azul después de restarle la base *b* del rectángulo) y R representa el radio hidráulico, definido como $R = A/P$.

**Desarrollo**

Díaz-Barriga (2013, p. 22) afirma que "Las actividades de desarrollo tienen la finalidad de que el estudiante interaccione con una nueva información.", pero nosotros en matemáticas hemos interpretado que el nuevo conocimiento se generará a partir de los procesos de resolución de la situación planteada al principio. Se intentará entonces que las actividades se orienten hacia dicha resolución. La secuencia en este momento se torna compleja porque la resolución exige más allá de las herramientas matemáticas disponibles, de habilidades y heurísticas que generen ideas sobre las estrategias de resolución que tendrán que emplearse. El papel que juega aquí la tecnología cambia radicalmente, se trata ahora de explorar archivos construidos que muestren las relaciones internas de la situación planteada, lo que nosotros hemos llamado su *modelo dinámico*, cuya exploración y observación pueda sistematizarse para identificar las variables, las constantes y las relaciones que intervienen en el modelo.


ISBN 978-84-945722-3-4

En el desarrollo del Ejemplo A, se propone una construcción que puede ser manipulada por el estudiante en la que las cantidades y sus relaciones están a la vista, como puede verse en la Figura 4.

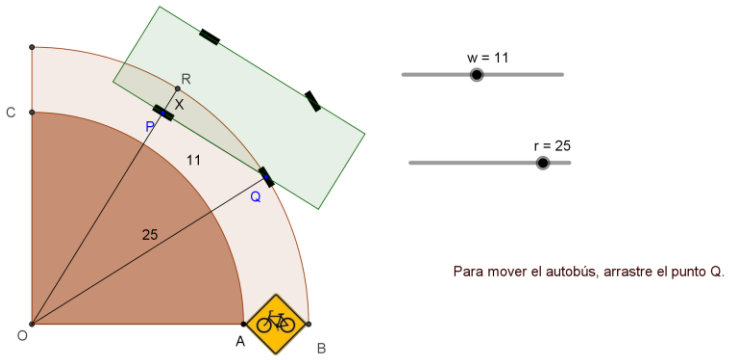



Figura 4

En un primer acercamiento la manipulación se reduce a mover el punto Q, dejando fijas las variables *r* y *s*, con valores como los mostrados en la Figura 4. Durante la rotación está claro que todas las variables de interés permanecen fijas y solamente está cambiando el ángulo de rotación del autobús y las características del triángulo OPQ permiten plantear la ecuación $x^2 - 50x + 121 = 0$, una de cuyas soluciones resuelve este caso particular.

En el desarrollo del Ejemplo B, se propone como tarea la búsqueda del óptimo en cada uno de los tres primeros tipos de canales, cuando el área húmeda es de 72 $m^2$, en cada caso se trata de obtener las dimensiones que debe tener el canal para que su perímetro húmedo sea mínimo. La búsqueda se hace a través de la manipulación de un archivo como el mostrado en la Figura 5, que ilustra el canal rectangular.

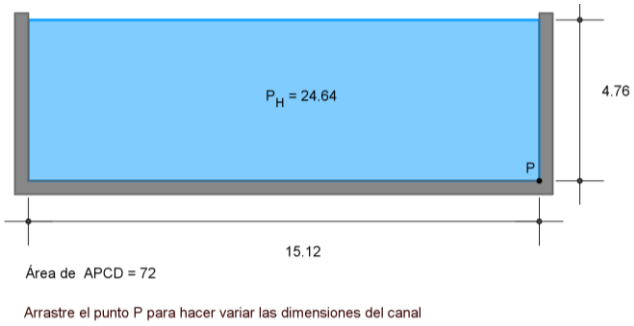



Figura 5



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

La búsqueda del perímetro húmedo óptimo está basada en la exploración numérica de las dimensiones, se pospone hasta el cierre una discusión sobre las razones por las cuales el canal que optimiza el perímetro húmedo tiene dimensiones que están en la razón 2:1.

**Cierre**

Al respecto de esta parte final de la secuencia, Díaz-Barriga (2013, p. 23) afirma que "Las actividades de cierre se realizan con la finalidad de lograr una integración del conjunto de tareas realizadas, permiten realizar una síntesis del proceso y del aprendizaje desarrollado.", pero de nueva cuenta, frente a la naturaleza de las actividades propuestas en matemáticas tenemos que ser más específicos. Al iniciar esta etapa, la situación planteada ya ha sido resuelta y hablar de integración para nosotros significa:

- Reunir y formalizar los conceptos matemáticos que han emergido durante la resolución.
- Profundizar en los conceptos utilizados, aunque esta profundización se limita con frecuencia a la introducción de representaciones sobre el mismo concepto que no se han usado en la secuencia.
- En algunos casos, planteamos también en el *cierre*, la justificación de resultados que han sido utilizados como teoremas "de hecho", aunque la justificación propuesta no alcance el nivel de una demostración formal.

En el ejemplo A, una vez resuelta la ecuación $x^2 - 50x + 121 = 0$ y analizadas las soluciones, la secuencia se cierra con la resolución y el análisis del caso general $x^2 - 2rx + w^2 = 0$. Este análisis no se reduce a los tratamientos algebraicos, el estudiante dispondrá también de una construcción como la mostrada en la Figura 6, en la que se estudian las soluciones como raíces de la función $f(x) = x^2 - 2rx + w^2$ en donde parámetros $r$ y $w$ pueden hacerse variar en pantalla como deslizadores de GeoGebra.

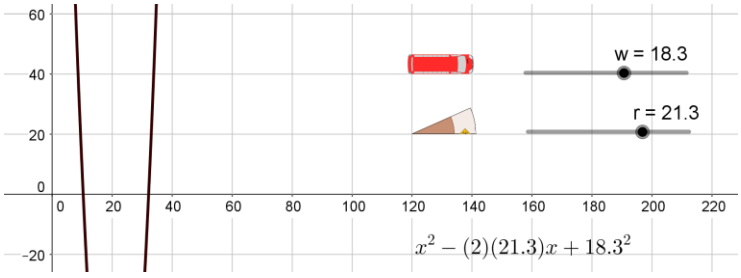



Figura 6



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En el ejemplo B, una vez que se han encontrado las dimensiones de los canales que tienen menor perímetro húmedo, en cada uno de los primeros tres casos (ver Figura 2), se comparan estos casos óptimos entre sí. Se propone como actividad integradora la comparación de los tres óptimos con el canal semicircular, para llegar a la conclusión que este último es el óptimo de los óptimos calculados. Durante el desarrollo de la actividad cada uno de los óptimos se ha encontrado de manera empírica, explorando las construcciones numéricamente, pero no hay una búsqueda de argumentos matemáticos que conduzcan a esos resultados; por esta razón se incluye en esta parte final una discusión sobre el fundamento matemático que está detrás de estos resultados. En el segundo semestre del Bachillerato, los estudiantes no han entrado todavía en contacto con el Cálculo Diferencial y por lo tanto estas herramientas no pueden usarse aquí; por esta razón se ha tomado el resultado "Entre todos los polígonos de *n* lados y con la misma área, el regular es el de menor perímetro" como verdadero. A partir de este resultado y explorando y analizando la construcción siguiente (Figura 7), se trata por ejemplo de concluir que el entre todos los canales de área húmeda igual a 72 $m^2$, el de menor perímetro húmedo es el que guarda la relación 2:1 entre la base y la altura.

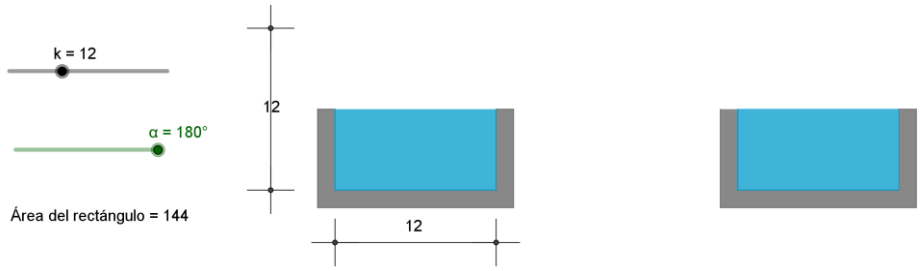



Figura 7

La manipulación está orientada a buscar el rectángulo de menor perímetro entre todos los que tienen un área de 144 $m^2$ y luego partirlo en dos canales, cada uno con área húmeda igual a 72 $m^2$ y perímetro húmedo igual a 24 m.

## Conclusiones

Si queremos transformar el aula de matemáticas en un espacio de trabajo atractivo, en donde todos podamos aprender matemáticas con gusto, tenemos que repensar nuestra práctica docente. En nuestro país el aula sigue siendo predominantemente un lugar para desarrollar lo que Díaz-Barriga (2013, p. 12) llama una *clase frontal*. La iniciativa de modificar nuestras


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

propias formas de enseñar matemáticas nos han conducido de manera natural al diseño de actividades didácticas primero, y luego a darles forma como secuencia de actividades. Pero la necesidad de influir en la modificación de la práctica de otros profesores, nos ha llevado a plantearnos la necesidad de contar con elementos metodológicos específicos que permitan a los docentes diseñar sus propias secuencias. El trabajo que hemos resumido aquí es apenas una pequeña contribución a las transformaciones a las que aspiramos; la idea de involucrar a los profesores en el diseño y la puesta en práctica de estas secuencias ha enfrentado por lo menos tres dificultades: a) la resistencia de los profesores a replantear la enseñanza de la matemática y al uso de tecnología, b) el interés de las instituciones para modificar la enseñanza no ha sido el esperado y c) la propia resistencia de los estudiantes acostumbrados a una clase de matemáticas completamente distinta. Por lo pronto hemos escrito con la metodología descrita, el conjunto de libros de texto (6) de matemáticas de la institución de bachillerato más importante en nuestra región, pero el uso de estos libros de texto está apenas en su etapa de evaluación. Nuestros estudiantes de posgrado han mostrado cada vez más interés por elaborar tesis sobre la investigación de temas relacionados con los aspectos metodológicos del diseño.

**Referencias bibliográficas**

Díaz-Barriga, Á. (2013). Secuencias de aprendizaje. ¿Un problema del enfoque de competencias o un reencuentro con perspectivas didácticas? *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, *17*(3), 11-33. https://recyt.fecyt.es/index.php/profesorado/article/view/41685/23758. Consultado 04/01/2017.

Hitt, F. & Cortés, C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, *10*(1), 1-30. http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1977. Consultado 15/01/2017.

Mathematics Assessment Resource Service (2015). Solving Quadratic Equations. University of Nottingham, http://map.mathshell.org/download.php?fileid=1736. Consultado 12/02/2016.


ISBN 978-84-945722-3-4

Teacher College University of Columbia (2012). *Mathematical Modeling Handbook*. Comap. http://www.comap.com/modelingHB/Modeling_HB_Sample.pdf. Consultado 08/02/2017.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.106

# MEDIATRIZ, CIRCUNCENTRO Y DIAGRAMA DE VORONOI EN EDUCACIÓN PRIMARIA. EXPERIMENTO CON M&M'S

Laura Morera[1] – Marc Guinjoan[2] – Carla Alacañiz[3]
laura@explorium.cat – marc@explorium.cat – info@explorium.cat
eXplorium[123] – Universitat Autònoma de Barcelona[12]

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Primario
Palabras clave: Mediatriz, Diagrama de Voronoi, material manipulativo, actividades ricas

## Resumen

*En este estudio se ha diseñado un taller manipulativo para alumnos de todos los cursos de primaria que se centra en los conceptos de mediatriz, circuncentro y diagramas de Voronoi. A través de visualizar el concepto de mediatriz entendido como la recta de puntos que están a igual distancia de dos puntos dados, se amplía su conceptualización al ver que están a igual distancia de tres puntos y el paso a la generalización consiste en realizar los diagramas de Voronoi.*

*Se han recogido datos de las distintas fases del taller en las diferentes etapas educativas y se muestran resultados de los distintos niveles de intervenciones de los alumnos durante la realización del taller.*

## Introducción

En un entorno de resolución de problemas, con la didáctica adecuada, el alumnado puede aprender conceptos matemáticos de forma creativa, innovadora y divertida. Queremos que los conocimientos que adquiere el alumnado sirvan para afrontar los retos que tengan por delante. En el presente documento mostramos una experiencia didáctica aplicada con éxito en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en jóvenes de educación primaria, desde primero hasta cuarto. Más concretamente, el objetivo principal de esta experiencia didáctica aquí presentada es trabajar conceptos geométricos específicos de un nivel, a priori, superior al de la edad del alumnado que participa en la sesión.

Hay muchas formas de transmitir conceptos. Uno de esos modos es la pizarra, la tiza y los ejercicios en la libreta, pero en eXplorium defendemos otros modos para permitir que los



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

alumnos aprendan, ya sea usando la tecnología (*tablets*, ordenadores…) u otros recursos menos sofisticados (cartón, plástico, material reciclado…). Lo que sí tenemos claro es que para que los jóvenes construyan el conocimiento tienen que experimentar, manipular y hablar sobre lo que van descubriendo guiados por el andamiaje del profesor (Sherin, 2002).

**Experiencia didáctica**

El objetivo principal de la actividad extraescolar que presentamos en esta comunicación es que los alumnos de primaria (desde primero hasta cuarto) trabajen sobre los conceptos matemáticos de la mediatriz, el circuncentro y los diagramas de Voronoi mediante un proceso práctico y gradual basado en la construcción de puntos equidistantes a otros puntos dados.

Esta experiencia didáctica se ha realizado en 15 grupos de aproximadamente 10 alumnos de ciencia recreativa en horario extraescolar. Los alumnos cursaban entre 1º y 4º de educación primaria agrupados en dos grupos de edad (los alumnos de 1º y 2º van juntos y los alumnos de 3º y 4º también).

El concepto de mediatriz se puede definir de dos formas: 1) la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento que lo corta en el punto medio y 2) la mediatriz de dos puntos es el lugar geométrico cuyos puntos son equidistantes a los dos puntos dados. Matemáticamente, vemos que estas definiciones son equivalentes; en cambio, didácticamente, la segunda facilita la construcción de los conceptos posteriores de circuncentro y diagramas de Voronoi. También veremos que la experimentación realizada con los alumnos les hace descubrir esta propiedad de equidistancia. Así para esta comunicación tomaremos como definiciones:

La *mediatriz de dos puntos* es el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a la misma distancia que los dos puntos dados.

El *circuncentro de tres puntos* es el punto equidistante a tres puntos dados.

El *diagrama de Voronoi de diversos puntos* es la construcción geométrica originada a partir de la creación de las mediatrices entre distintos puntos que nos hace un mapa de los puntos equidistantes a los diferentes puntos que tienen alrededor.

Una vez presentadas las definiciones a las que nos referimos en esta comunicación, mostramos la experiencia de clase acompañada de diferentes evidencias de aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje.


ISBN 978-84-945722-3-4

El taller consta de cuatro fases que, de forma ordenada, se van sucediendo guiadas por el profesor al incorporar diferentes retos experimentales.

*Primera fase: exploración.*

A cada pareja de alumnos se le reparte un plato de plástico, una jarra de agua y una bolsa de caramelos (M&M's®). El primer reto que se les propone es que hagan hipótesis de lo que creen que sucederá cuando introduzcan el caramelo en el plato lleno de agua (con 3 mm de altura aproximadamente).

Algunos alumnos se centran en las propiedades físicas: hacen hipótesis sobre su flotabilidad. La gran mayoría dicen que no puede flotar por el peso, y otros comentan que es un material que no podrá flotar, pero no concretan qué propiedades debería tener. Otros se centran más en los aspectos químicos: hacen hipótesis sobre la disolución, o no, del colorante y del chocolate en el agua. Algunos apuntan que el agua debería estar caliente, otros comentan que para que se derritiera el chocolate, sería mejor que el líquido fuera leche. También hay quienes se decantan por hipótesis más geométricas e intentan predecir la forma del colorante cuando este se deslice por la capa de agua. Algunos ven claramente que se hará un círculo alrededor, pero otros visualizan una franja alargada en una dirección concreta, pero en ambos sentidos.

Una vez han hecho sus hipótesis y las han puesto en común, realizan el experimento, observan qué sucede (Figura 1) y verifican las hipótesis ciertas y refutan las que eran falsas.

Figura 1. Círculo creado alrededor de un punto.

Para esta comunicación a partir de ahora nos centraremos en las oportunidades de aprendizaje creadas en torno a los conceptos matemáticos y dejaremos de lado los transversales.

*Segunda fase: Construyendo la mediatriz*



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

El siguiente reto es pensar qué sucederá si en un plato con agua, dejamos dos caramelos de colores distintos a la vez.

Después de haber visto lo que sucede cuando se deja uno, los alumnos suponen que se generan dos círculos, pero predicen dos posibles resultados en el punto de encuentro entre ambas áreas. Por un lado, unos alumnos defienden la hipótesis de que los colores de los colorantes se mezclaran y se generará una franja de otro color (ellos ponen el ejemplo de que amarillo y azul, se transformará en verde) y, por otro lado, otros defienden que los colores chocarán y ya no avanzarán más. A lo largo de la discusión guiada por el profesor, algunos alumnos nombraban el concepto de frontera y al preguntar sobre la forma de esta frontera, varios veían que sería una frontera recta mientras que otros no conseguían imaginar qué forma tendría. En la Figura X, acompañada de la transcripción, podemos ver como un alumno había dibujado, sobre la pizarra, correctamente lo que sucedería.

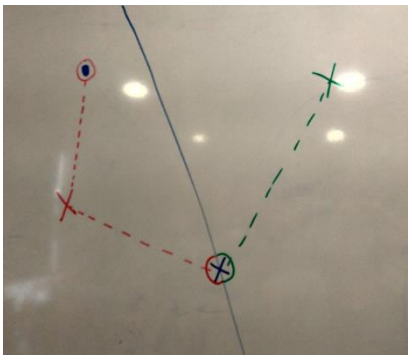


Figura 2. Esquema de la situación de la mediatriz de dos puntos

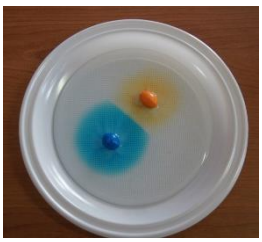
*P: ¿Cómo creéis que será esta frontera que decís que se formará?*
*A: ¡Recta!*
*P: Si por ejemplo dibujo un plato y en estas cruces (roja y verde) es donde pondremos los caramelos, ¿dónde estará esta recta?*
*A: Aquí (sale a dibujar-la en azul encima del dibujo del profesor).*
*P: ¿Y este punto (el círculo azul) de dónde está más cerca?*
*A: De este punto (el rojo), será de este color (rojo).*
*P: ¿Y este punto (la cruz azul), de cuál estará más cerca?*
*A: ¡Este está igual de cerca de los dos!*
*P: Señálame otro punto que esté a igual distancia de los dos.*
*A: ¡Cualquiera de éstos! (Señalando la recta)*

Nótese que lo que no tienen asimiladas son las propiedades teóricas y por ejemplo, la línea recta que dibuja el alumno, está hecha a ojo y no coincide exactamente con la construcción


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

de la mediatriz, pero podemos observar en la transcripción que sí tienen claro que los puntos de la línea recta estarán a igual distancia de los dos caramelos iniciales.

Después de la discusión, las diferentes parejas realizan el experimento y pueden observar qué sucede. En la mayoría de los casos, se pueden observar las mediatrices que teóricamente se esperan (Figura 3a), pero como en todo experimento, surgen algunos problemas físicos: cuando no toda la superficie del plato está cubierta con agua y queda una isla en medio como se puede observar en la Figura 3b o, cuando las marcas de los caramelos no son iguales y el colorante no se derrite a la misma velocidad, cosa que hace que la frontera recta no quede donde seria la mediatriz teórica, sino que queda paralela a ella pero más cerca de uno de los caramelos.



a) Mediatriz de dos puntos

b) Plato con agua insuficiente

Figura 3. Experimentación con dos caramelos

Queremos hacer notar que están descubriendo el concepto de mediatriz por ellos mismos, pero antes de dar paso a la siguiente fase, es conveniente que el profesor institucionalice el nombre de esta frontera recta con la que han estado tratando para que los alumnos la puedan nombrar por su nombre y sepan que es la mediatriz.

Otro reto para ir más allá que en algunos grupos surgió, para seguir trabajando propiedades sobre la mediatriz, es que se puede proponer que dada una mediatriz, los alumnos tengan que pensar dónde situar los caramelos. Es muy interesante, se dan cuenta de que hay muchas soluciones y lo que se tiene que cumplir es que los dos puntos sean simétricos respecto la mediatriz. Así también hay conexiones con el concepto de simetría.

*Tercera fase: Siempre hay circuncentro?*

En esta tercera fase, decidimos cambiar la naturaleza del reto inicial, y en lugar de preguntar de forma abierta qué creen que sucederá, ahora con tres caramelos, les propusimos que los distribuyeran de forma que consiguieran tres zonas iguales.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En los grupos que los platos de plástico eran bastante cuadrados (Figura 4a), los alumnos, mediante sus propuestas, intentaban crear tres franjas igual de anchas. En cambio, en los grupos donde los platos eran circulares, intentaban conseguir tres sectores circulares iguales (Figura 4b). En otras ocasiones, no tenían claro lo que sucedería y proponían distribuciones como la de la Figura 4c.

a) Distribución en plato cuadrado

b) Distribución en plato circular

c) Distribución errónea para crear tres zonas iguales

Figura 4. Experimentación con 3 caramelos

A partir de estas situaciones se creó un tema de discusión interesante: la creación del circuncentro. En diversas puestas en común se comentó si había algún punto que estuviera a la misma distancia de los tres caramelos, y en los casos donde se había creado circuncentro los alumnos respondían rápidamente que sí. Incluso también era interesante referirse a aquellas distribuciones que no cumplían con el reto inicial, como la de la Figura 4c, ya que les sirvió para generalizar la propiedad de ¿cuándo tres puntos tendrán circuncentro? Y es que en todos los grupos llegaron a la conclusión que tres puntos tendrían circuncentro si no estaban alineados, es decir, si formaban un triángulo.

De hecho, algunos de los errores matemáticos como el de la Figura 4c, tienen que ver con las propiedades químicas y físicas que habían experimentado; por ejemplo, como había colores o marcas que teñían más o menos, intentaban contrarrestar esos efectos con las posiciones como se puede observar en el siguiente extracto de la creación de la Figura 4c:

*M: ¿Por qué los habéis (los caramelos) colocado así? (Antes de que el colorante se diluya)*
*A1: Porque el verde será más pequeño.*
*A2: No, todos tendrán el mismo espacio.*
*M: ¿Qué espacio tendrá exactamente el amarillo? ¿Y el verde? ¿Y el rojo?*
*(Los alumnos creen que se formará como un triángulo alrededor de cada caramelo)*
*M: ¿Podrá el verde llegar aquí? (Zona donde no hay ningún caramelo, lado izquierdo)*
*A1: No, porque el amarillo y el rojo chocarán antes y no podrá pasar.*



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

*A2: Sí, porque el verde pasará antes que choquen.*
*M: Entonces, ¿creéis que se formará una línea verde entre el amarillo y el rojo?*
*A2: Si, porque aunque está más lejos, tiene más velocidad que los otros y podrá pasar antes de que los otros choquen.*

*Cuarta fase: ¿Cómo generalizamos? Con Diagramas de Voronoi.*

En este momento, ya tienen la teoría interiorizada a partir de su propia experimentación; ya han visualizado una mediatriz y un circuncentro (ya sea a través de su experimento o el de un compañero). Es el momento idóneo para predecir, hacer hipótesis sobre lo que pasará, y generalizar para construir el caso de n puntos, que era el objetivo de la sesión.

Esta vez se plantean dos retos. En el primero, se trata de hacer hipótesis sobre papel de lo que creen que sucederá con diferentes distribuciones de caramelos. Dada una imagen como la de la Figura 5a, sobre la misma figura los alumnos hacen sus hipótesis del diagrama de Voronoi que se formará. En la Figura 5b podemos apreciar la creación de un grupo de alumnos del diagrama de Voronoi asociado a una distribución de puntos concreta.

a) Planteamiento del reto para hacer hipótesis de cómo seria el diagrama de Voronoi asociado a esta distribución de puntos

b) Solución propuesta por los alumnos

Figura 5. Primer reto del caso general con más de 3 puntos

Podemos observar cómo tienen asimilados algunos de los conceptos trabajados y cómo ven que la frontera entre dos puntos será recta.

El segundo reto propuesto en esta fase consiste en pensar dónde deberían estar los caramelos inicialmente, cuando la información que tenemos es el diagrama de Voronoi terminado como se muestra en la Figura 6a.

En ambos casos, los alumnos realizaban los experimentos para comprobar sus hipótesis como se muestra en la Figura 6b, donde sitúan cada caramelo en el lugar correspondiente y miran


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

a ver si lo que sucede es lo que ellos han predicho. En este caso así es, la hipótesis queda corroborada. Esta es la parte culminante del taller entero.

a) Planteamiento del reto para hacer hipótesis sobre la distribución de los puntos que generarían este diagrama de Voronoi

b) Solución propuesta por los alumnos

Figura 6. Segundo reto del caso general con más de 3 puntos

Finalmente, los alumnos también conservan las ganas de realizar experimentaciones libres y crean sus propias distribuciones de puntos para conseguir diagramas de Voronoi complicados, que ya conjeturan que no serían tan fáciles de predecir (Figura 7).

Figura 7. Ejemplos variados de diagramas de Voronoi creados por alumnos.

## Conclusiones

El recurso que presentamos en esta comunicación permite que el alumnado de primaria trabaje el concepto de mediatriz, de circuncentro y de diagrama de Voronoi de forma satisfactoria a través de un taller donde la manipulación y la experimentación son claves.

Las matemáticas no están separadas del mundo que nos rodea, forman parte de él. Es por eso que la experiencia tiene parte teórica y experimental mediante experiencias con objetos sencillos. El alumnado puede observar un concepto teórico y abstracto de forma práctica.

Al hacer experimentos, otras componentes como la creación de hipótesis, el análisis de resultados o el pensamiento crítico para conseguir un objetivo salen a la luz trabajan el pensamiento matemático de forma competencial.


ISBN 978-84-945722-3-4

Además, con este taller practican el trabajo en equipo, si hay más de un alumno por plato, y las discusiones y análisis entre compañeros que se derivan de la experiencia educativa. En eXplorium, creemos que estas ideas son fundamentales para que los alumnos vivan un proceso de aprendizaje significativo.

En definitiva, la experiencia detallada en este comunicado no solamente aporta conocimiento matemático, sino también saberes de muchos otros ámbitos que están relacionados con las matemáticas, aunque en las aulas no pueda parecer así.

**Agradecimientos**

Este trabajo se enmarca en el contexto del proyecto EDU2015-65378-P "Construcción de conocimiento matemático escolar: discurso del profesor y actividad de enseñanza".

**Referencias bibliográficas**

Aubanell Pou, A. (2006). *Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària*. http://www.xtec.cat/~aaubanel/ Consultado 22/05/2017.

Castelnuovo, E. y Barra, M. (1976). *Matematica nella realtà.* Torino: Editore Boringhieri.

Sherin, M.G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. Journal of Mathematics Teacher Education, 5, 205-233.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.108

# APRENDIENDO ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD CON APPLETS

Assumpta Estrada Roca - Mª Núria Cardet Carné - Mª Jose Peroy Ribes –
Maria Ricart Aranda - Iván Barbero Sola
aestrada@matematica.udl.cat – mcardet@xtec.cat - joseperoy@gmail.com -
maria.ricart@matematica.udl.cat – ibarbero@pip.udl.cat
Universitat de Lleida - España

Núcleo temático: 5
Modalidad: CB
Nivel educativo: Primario
Palabras clave: Educación Estadística, Aprendizaje de la Probabilidad, Applets, Educación Primaria

**Resumen**
*Tanto la estadística como la probabilidad han sido reconocidas en los últimos años como un componente básico de la formación ciudadana y su incorporación en el currículum escolar de diversos países confirma la importancia de estas disciplinas en la educación matemática. Asimismo, es en este campo de las matemáticas donde las tecnologías han tenido más influencia, en particular internet (Galmacci, 2001). Concretamente los applets son unos recursos que nos permiten acercar los conceptos estadísticos a los estudiantes. Su uso requiere un cuidadoso análisis didáctico así como orientaciones para el profesorado sobre la metodología a utilizar en el aula. En este trabajo analizamos algunos applets disponibles en internet, haciendo especial énfasis en su utilidad didáctica. Presentamos también una selección de tales recursos para facilitar la enseñanza de la estadística, azar y probabilidad en los diferentes ciclos de la educación primaria.*

## Las nuevas tecnologías en el mundo educativo

En la sociedad actual, las nuevas tecnologías están presentes en nuestro día a día, siendo los niños y jóvenes los que más demanda producen y más las utilizan. Además la mayoría de ellos demuestran una gran habilidad con los dispositivos electrónicos ya que son generaciones que han nacido en la era digital (Domingo y Fuentes, 2010).

La escuela debe saber adaptarse a esta situación incorporando las tecnologías en sus metodologías de trabajo. Una adaptación que está siendo difícil y lenta en muchos centros educativos (Tilve, Gewerc y Álvarez, 2009).

Pero dar la espalda a la realidad tecnológica puede resultar peligroso, ya que como afirma Bautista (2008), "evolucionamos conjuntamente con el actual desarrollo de las TIC, o nos



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

quedamos al margen". Por ello Domingo y Fuentes (2010) creen que la escuela necesita una innovación pedagógica que aproveche las tecnologías de la información y la comunicación.

En base a la relación entre las nuevas tecnologías y la educación, Tesouro y Puiggalí (2006) comentan que las nuevas tecnologías han abierto nuevas expectativas en los currículos escolares de la mayoría de los países desarrollados

La estadística es una de las materias donde las tecnologías han tenido más influencia, (Contreras et als., 2011) parece pues evidente el uso de algunos recursos disponibles en Internet en las aulas de primaria. Entre los distintos recursos disponibles, utilizaremos los applets por sus características específicas que nos permiten acercar los conceptos estadísticos a los estudiantes. Pero su uso requiere un cuidadoso análisis didáctico del applet así como orientaciones para el profesorado de la forma de trabajo en el aula de primaria porque tal como señala Kaput (2008) " en la actualidad se necesita estudiar de que manera los profesores pueden utilizar las potencialidades de las TIC para obtener información sobre los procesos de aprendizaje de sus estudiantes, sobre los conocimientos previos que poseen al respecto así como de su evolución . "

En este trabajo presentamos unas pautas desarrolladas dentro del proyecto Appletmat que permiten a los futuros profesores un cuidadoso análisis didáctico del applet haciendo especial énfasis en su utilidad en el aula de primaria. Estas pautas las aplicamos a dos casos concretos y presentamos también una selección de algunos recursos disponibles en Internet y que a nuestro entender pueden ser útiles para la enseñanza de la estadística en diferentes niveles educativos.

## Applets y enseñanza de la estadística

Las TIC actúan en el proceso del desarrollo profesional del docente como un tipo de mediador semiótico que permiten alterar la configuración epistémica del proceso de estudio matemático (Font y Godino, 2006). Sin embargo, tal como argumenta Giménez (2004) el profesorado no las usa habitualmente por desconocimiento de sus posibilidades y limitaciones.

Pero dada la proliferación y disponibilidad de estos recursos en Internet en el ámbito de la estadística, pensamos que es necesario introducir y fomentar en los programas de formación de profesores el uso de estos materiales informáticos en general, y de los applets en particular


ISBN 978-84-945722-3-4

para ayudar a los futuros docentes a reconocer su valor y su aplicabilidad en las aulas de Educación Primaria.

La mayoría de los applets estadísticos encontrados están pensados para "mostrar contenidos" de hecho la característica pedagógica de los applets es la interactividad entre el alumno y el ordenador para vehicular un contenido determinado. Según Callis (2006) se centran generalmente en contenidos muy concretos y puntuales en los que el usuario puede manipular multitud de variaciones dentro del mismo objetivo conceptual, utilizando, simplemente, el ratón. Frecuentemente, intentan reproducir la manipulación real y tienen el doble objetivo de ser instrumentos que posibilitan, por un lado construir conceptos y, por otro, el dominio comprensivo del lenguaje estadístico que sirve para representarlos y, en algunos casos, además, potenciar la generalización del fenómeno.

Los applets como recurso educativo en la escuela pueden ayudar a avanzar con el proceso de aprendizaje de la estadística pero para ello es imprescindible un análisis didáctico previo en el que se contemplen las cuestiones principales que sustentan el aprendizaje. Es necesario pues implementar técnicas metodológicas de formación universitaria que permitan al futuro docente integrar diversos tipos de prácticas profesionales en su periodo de formación. De todo ello nos ocupamos en los apartados siguientes.

**Recursos en Internet para la enseñanza de la Estadística**

Si queremos potenciar el uso de los applets en la educación estadística es necesario formar a los futuros docentes, dotándoles de recursos que les ayuden en el análisis didáctico del applet así como orientaciones de la forma de trabajo en el aula de primaria. El trabajo que aquí presentamos va en esta dirección, pues por un lado nos proponemos mejorar el conocimiento de los futuros educadores presentando una selección de applets disponibles en Internet y por otro lado también nos proponemos capacitarlos para valorar y analizar críticamente estos recursos, ofreciendo el análisis didáctico de dos applets concretos.

Para realizarlo utilizamos las pautas desarrolladas en el proyecto APPLETMAT (2006- 2007) en las que podemos distinguir tres apartados bien diferenciados. En el primero se describe el recurso y se valora su posible utilización en el aula de primaria en cuanto a sus posibilidades, conocimientos previos necesarios, limitaciones y técnicas de uso. Dado que nuestro ámbito de actuación es la formación de profesores de Educación Primaria, el segundo apartado


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

constituye el núcleo central del análisis donde se estudia su gestión y uso en la formación de los futuros docentes valorando las competencias profesionales que desarrolla y la transferencia educativa que comporta.

El último apartado lo dedicamos a ver las posibilidades de mejora y ampliación del applet así como las ventajas e inconvenientes del recurso frente a otros materiales alternativos. De todo ello nos ocupamos a continuación.

**Recursos de exploración**

Según Díaz y de la Fuente (2006) el uso de applets en la enseñanza de la estadística y la probabilidad aumenta la motivación de los alumnos por el tema, ya que se presentan los conceptos de una forma más llamativa y permite al alumno adoptar un papel activo en su aprendizaje. Es por ello importante que el profesor tenga en cuenta estos recursos y los incorpore a su enseñanza.

Explorando servidores en educación matemática que contienen recursos de Internet para la enseñanza de estadística seleccionamos aquellos applets que se adaptaban a los contenidos curriculares de educación primaria. En la Tabla 1 presentamos la dirección web de algunos recursos útiles para explorar conceptos de estadística y probabilidad.

Tabla 1. Enlaces a recursos TIC en estadística y probabilidad

| Nombre pág. web | Temática de trabajo | Dirección |
|---|---|---|
| Libros Vivos | Frecuencia, Moda y Mediana | http://www.primaria.librosvivos.net/archivosCMS/3/3/16/usuarios/103294/9/5EP_Mat_cas_ud8_FrecuenciaModaMedia/frame_prim.swf |
| Libros Vivos | Mediana, media, moda, frecuencia,... | http://www.librosvivos.net/smtc/PagPorFormulario.asp?TemaClave=1051&est=0 |
| Educar Chile | promedio y moda | http://odas.educarchile.cl/objetos_digitales/odas_matematicas/13_promedio_moda/LearningObject/index.html |
| Educar Chile | mediana y dispersión | http://odas.educarchile.cl/objetos_digitales/odas_matematicas/17_mediana_dispersion/LearningObject/index.html |
| That quiz | Gráficas | https://www.thatquiz.org/es-5/ |
| Xunta Galicia | Estadística | https://www.edu.xunta.es/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datos/1352714153/contido/estadistica.html |
| Xunta Galicia | Estadística | https://www.edu.xunta.es/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datos/1285583725/contido/index.html |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

| | | |
|---|---|---|
| Aprende estadística | Estadística | http://aprenestadistica.idescat.cat/primaria/ |
| Libros Vivos | Estadística y probabilidad | http://www.librosvivos.net/smtc/PagPorFormulario.asp?idIdioma=ES&TemaClave=1051&est=2 |
| Luisa María Arias | Estadística y probabilidad | https://luisamariaarias.wordpress.com/category/0-3-matematicas/15-estadistica-y-probabilidad/ |
| Junta Extremadura | Estadística y probabilidad | http://cplosangeles.juntaextremadura.net/web/edilim/tercer_ciclo/matematicas6/estadistica_6/estadistica_6.html |
| Docentes Navarra | Estadística y probabilidad | http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/azar.htm |

Muchos de estos applets reflejan propuestas pedagógicas clásicas, en el sentido que proporcionan oportunidades de reforzar el contenido y no precisamente llegar a él de forma constructiva incluso algunos de ellos sirven simplemente como tests de pregunta-respuesta pero incluso estos representan una buena actividad reflexiva en el aula de formación de profesores.

A continuación realizamos un análisis minucioso de dos de estos recursos con enfoques pedagógicos distintos con el fin de que puedan ser utilizados, para la enseñanza y aprendizaje de las medidas de tendencia central.

**Frecuencia, moda y media**

La dirección web para acceder al primer recurso seleccionado es la siguiente:

http://www.primaria.librosvivos.net/archivosCMS/3/3/16/usuarios/103294/9/5EP_Mat_cas_ud8_FrecuenciaModaMedia/frame_prim.swf

1.- Descripción del recurso

Trata sobre la recogida de residuos de 3 escuelas y se pide calcular la media, la moda y valores máximo y mínimo de frecuencias absolutas. Son un total de siete actividades que se han de responder correctamente para avanzar. Es un applet muy vistoso y atractivo para primaria con preguntas concisas y claras. Si se comete un error, aparece una pantalla recordando el concepto y permite una segunda oportunidad.

2.- Análisis y valoración del recurso en el aula


ISBN 978-84-945722-3-4

Posibilita practicar el cálculo de la moda, la media aritmética y la frecuencia, conceptos que necesitan trabajarse previamente. Su uso es totalmente intuitivo y resulta fácil para los alumnos. Entre sus limitaciones destacamos que el número de actividades es escaso aunque facilita trabajar otras competencias transversales como la comprensión lectora y tipologías de residuos.

3.- Posibles mejoras del recurso

Seria útil que tuviera algunas orientaciones más precisas para autocorregir los errores cometidos así como actividades más variadas con diferentes tipos de datos. Como material alternativo sólo podemos sugerir otros applets similares.

Este applet se ha experimentado con alumnos del ciclo superior de primaria, en dos escuelas de características similares de la ciudad de Lleida. Ha resultado motivador, los alumnos han estado atentos y ha consolidado el aprendizaje de los conceptos de media, moda y frecuencia que se habían introducido previamente en el aula.

**Estadística y probabilidad**

El segundo recurso seleccionado, es menos específico y trabaja además de las medidas de tendencia central (media aritmética, moda, mediana) y las frecuencias, diversos conceptos de probabilidad. Su dirección es:

http://www.librosvivos.net/smtc/PagPorFormulario.asp?TemaClave=1051&est=0

1.- Descripción del recurso

Se trata de un applet que explica paso a paso los distintos conceptos estadísticos y presenta un ejemplo de cada. Tiene cinco apartados independientes y no hay conexión entre los problemas que se plantean. La interacción es muy poca y no permite introducir datos propios.

2.- Análisis y valoración del recurso en el aula

Posibilita introducir los conceptos matemáticos relacionados con la estadística y su cálculo, ilustrándolos con un ejemplo en cada caso. Podría utilizarse tanto como introducción de conceptos de estadística y como repaso. Como limitaciones en algunos momentos es muy dirigido y no permite el ensayo-error. Su uso es sencillo pues consiste en leer definiciones y seguir instrucciones.

3.- Posibles mejoras del recurso


ISBN 978-84-945722-3-4

El applet resulta poco interactivo, sería interesante contemplar la posibilidad de trabajar con datos propios no solo con los generados por el recurso para así vincularlo al contexto escolar y los intereses de los alumnos. También se habrían de mejorar las imágenes y el tipo de problemas que se plantean.

## Reflexiones finales

La disponibilidad de recursos libremente accesibles en Internet posibilita que el aprendizaje de la estadística se lleve a cabo no sólo en el aula tradicional sino utilizando estos recursos didácticos como elemento dinamizador. En este trabajo hemos descrito algunas de las múltiples posibilidades existentes en lo que a applets se refiere y hemos proporcionado una guía que permita analizar a los futuros docentes el valor de estos materiales didácticos partiendo de su observación y manipulación. Consideramos importante que el trabajo en el aula se realice en grupo, pues ofrece la oportunidad de contrastar opiniones y formular propuestas consensuadas que potencian el espíritu crítico de los estudiantes. Constatamos que esta manera de trabajar requiere una formación estadística adecuada pues no es fácil reflexionar sobre un uso didáctico si los estudiantes no tienen una visión clara del contenido.

**Reconocimiento**: Trabajo realizado en el marco del Proyecto ARMIF2015 - 00005, Proyecto EDU 2016-74848-P y grupo GREEP (ICE-UDL)

## Referencias bibliográficas

Bautista, A. (2008). Comenta Cibercultura. La cultura de la sociedad digital de P. Lévy. *Educatio Siglo XXI, 26*, 295-298.

Callis, J. (2006). *Mestres del segle XXI*: *Capacitació en l'ús racional i eficient dels applets i altres recursos informàtics en l'aprenentatge matemàtic*. Girona, España: CCG Edicions.

Contreras, J. M., Martins, J. A., Estrada, A. y Batanero, C. (2011). Uso de recursos en internet para apoyar la comprensión de la probabilidad condicional. Using internet resources to support understanding of conditional probability. In proceedings of *the International Conference on New Horizons in Education - INTE 2011*, Guarda, Portugal, 952-957. https://www.int-e.net/publication_folder/inte/inte2011.pdf. Consultado el 30/10/2017.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2006). Recursos para la enseñanza del razonamiento bayesiano en internet. Actas del Congreso Internacional: El Profesorado ante el reto de las Nuevas


ISBN 978-84-945722-3-4

Tecnologías en la Sociedad del Conocimiento. Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Universidad de Granada. Granada, Marzo 2005.

Domingo, M., y Fuentes, M. (2010). *Innovación educativa: experimentar con las TIC y reflexionar sobre su uso*. Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación, 36, 171-180.

Font, V. y Godino, J.D. (2006). La noción de configuración epistémico como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, 8 (1), 67-98.

Galmacci, G. (2001). The impact of the internet on researchers' training. *Training researchers in the use of statistics*, 159-169.

Giménez, J. (2004). Realistic Mathematical experiences through the use of ICT and the treatment of diversity. *Lecture a 1st EME*. Text in CD Proceedings. Available at University of Minho. Braga.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. *Algebra in the early grades*, 5-17.

Proyecto APPLETMAT (2006- 2007). Grupo de Innovación Docente coordinado por el profesor Joaquim Giménez, *ARIE* Generalitat de Catalunya. Spain.

Tesouro Cid, M., y Puiggalí Allepuz, J. (2006). La escuela virtual: la tecnología al servicio de la educación. Comunicar, 27, 171-177.

Tilve, M. D., Gewerc, A., y Álvarez, Q. (2009). Proyectos de innovación curricular mediados por TIC: Un estudio de caso. *RELATEC: Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa*, 8(1), 65– 81.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.110

# ¿CÓMO EVOLUCIONAN LAS DIFICULTADES Y ERRORES ESTADÍSTICOS EN LOS CAMBIOS DE CICLO DE PRIMARIA?

Assumpta Estrada - Maria Ricart Aranda - Iván Barbero Sola - Mª Núria Cardet Carné - Mercè Ardiaca Burgués - Imma Fornells Barberà - Mª Jose Peroy Ribes - Mª Carmen Roures Márquez - Mª Àngels Mesalles i Camí - Irene Mayoral Seró
aestrada@matematica.udl.cat - maria.ricart@matematica.udl.cat - ibarbero@pip.udl.cat - mcardet@xtec.cat - mardiaca@xtec.cat - ifornel2@xtec.cat - joseperoy@gmail.com - mroures@xtec.cat - mmesalle@xtec.cat - mayoralirene@gmail.com
Universidad de Lleida – España

Núcleo temático: I Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: CB
Nivel educativo: Primario
Palabras clave: Educación estadística, currículum de educación primaria, errores conceptuales

**Resumen**

*En esta investigación se quiere detectar los errores conceptuales que tienen y las dificultades que presentan los estudiantes en el ámbito de la estadística en los cambios de ciclo escolares y cómo evolucionan. Para ello, se elaboró un cuestionario específico para el inicio del ciclo medio y superior de la educación primaria a partir de las pruebas de competencias básicas de matemáticas de la Generalitat de Cataluña, que contestaron 151 estudiantes de 3º y 150 de 5º de primaria. Los resultados indican que la interpretación de datos es una dificultad común a los diferentes niveles, especialmente en lo que respeta a la lectura de gráficos, que, a su vez, provoca errores en el aprendizaje de conceptos matemáticos elementales, como son el de doble y mitad. Sin embargo, los errores detectados en el cálculo de la moda no persisten, mayoritariamente, al cambiar de ciclo en variables de tipo cualitativo. Todo ello invita a reflexionar sobre la necesidad de potenciar el análisis y la comprobación de los resultados frente a la aplicación rutinaria de fórmulas y algoritmos en una tarea matemática.*

## Introducción

En los últimos años la Estadística se ha incorporado de manera generalizada en el currículo de la enseñanza obligatoria, por razones fundamentalmente socioculturales y educativas


ISBN 978-84-945722-3-4

(Franklin y cols., 2005) impulsando la investigación y el desarrollo curricular, en este campo específico. Pero a pesar de su utilidad reconocida y figurar en los programas oficiales, la Estadística es una materia frecuentemente olvidada en la educación primaria y secundaria, no sólo en España sino también en otros países desarrollados. Los profesores en ejercicio, a pesar de reconocer su importancia tanto en la enseñanza como en la vida cotidiana de sus alumnos, argumentan la falta de tiempo para desarrollar los contenidos curriculares y aceptan que para permitirles abordar con éxito los objetivos educativos correspondientes a cada ciclo muchos profesores precisan incrementar su conocimiento, no sólo sobre la materia, sino también sobre las dificultades y errores que los alumnos encuentran en el aprendizaje de la Estadística. Es evidente que el alumno se equivoca cuando se le pide realizar ciertas tareas estadísticas. Pero según Batanero et als. (2006) los errores y dificultades no se presentan de un modo aleatorio, imprevisible. Con frecuencia es posible encontrar regularidades, ciertas asociaciones con variables propias de las tareas propuestas, de los sujetos o de las circunstancias presentes o pasadas. El conocimiento de los errores y dificultades por parte del profesor es un primer paso para corregirlos y si los enfocamos de manera constructiva haciendo que los alumnos sean conscientes de esos errores probablemente no volverán a cometerlos en el futuro. El propósito de este estudio es contribuir a la difusión de los resultados de la investigación sobre estas dificultades y errores en conceptos estadísticos elementales centrándonos en analizar si permanecen en cada ciclo de la educación primaria, lo que pondría en evidencia el modelo de instrucción utilizado y nos llevaría a reflexionar sobre la necesidad de realizar una intervención en el aula que ayude a subsanarlos.

**La Estadística en la Educación Primaria**

La presencia de la Estadística en el currículum español ha ido aumentando con el paso del tiempo y actualmente encontramos una tendencia reciente a adelantar y renovar su enseñanza, haciéndola más experimental, e introduciéndola desde los primeros niveles de aprendizaje. En el actual currículum que no presenta grandes diferencias con el anterior, aparecen una serie de contenidos clave asociados a las competencias correspondientes. Para el bloque específico de Estadística y Probabilidad en primaria son tres:

- Obtención, representación e interpretación de datos estadísticos.
- Fenómenos aleatorios.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- Tablas y gráficos.

Pero a pesar de que estos contenidos se trabajan desde los primeros niveles, los alumnos terminan la Educación Primaria con errores y dificultades que en algunos casos arrastran hasta la universidad.

Debemos evitar que esta situación se produzca y evitar que el alumno siga cometiendo los mismos errores aplicando un cambio de metodología, abandonando el modelo tradicional de enseñanza, introduciendo nuevos métodos y recursos que favorezcan el aprendizaje tales como los proyectos o el uso de las tecnologías entre otros. Pero tal como señalan algunos autores, el análisis de errores es un recurso motivacional y como un punto de partida para la exploración matemática creativa, implicando valiosas actividades de planteamiento y resolución de problemas. De ello nos ocuparemos a continuación.

**Metodología**

Todo lo expuesto anteriormente pone de relieve lo que nuestra experiencia docente constata: Los estudiantes muestran al inicio del ciclo errores y dificultades en conceptos estadísticos elementales que van persistiendo a lo largo de la educación primaria y evidentemente para subsanarlos antes hemos de identificarlos.

Conscientes de esta situación, y centrando nuestro estudio en el cambio de ciclo, se decide elaborar un cuestionario como instrumento de evaluación que posibilite detectarlos.

El cuestionario de los estudiantes de 3º de Primaria consiste en cuatro tareas, formadas cada una de ellas por varias preguntas. En la tarea 1, "Partida de parchís" se plantea la siguiente situación: "Hay una ficha del parchís en la casilla 56; le faltan 20 casillas para llegar a casa. Si se va tirando el dado, ¿qué números pueden salir hasta sumar exactamente 20?" Se les pide que escriban 4 posibilidades distintas.

En la tarea 2, "Estudiamos la tele", se presenta en una tabla de frecuencias los 4 canales de TV que miran 25 alumnos de una escuela (Los canales son el A, el B, el C y el D). A continuación, deben completar una gráfica (diagrama de barras), dibujando una de las barras correspondiente a una de las modalidades de la variable y escribir el nombre de otra modalidad debajo de la barra correspondiente. En la siguiente cuestión se les pregunta por la moda: "¿Cuál es el canal que más miran?" y, finalmente, en la última pregunta tienen que completar una tabla de frecuencias. En la tarea 3 se les muestra un diagrama de barras de una



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

variable cualitativa y, a partir de él, tienen que contestar una serie de preguntas interpretando la información. En la última tarea, "Concurso de salto", se les dice que 20 estudiantes de una clase han hecho un concurso de saltos de longitud y han anotado los cm que ha saltado cada uno en una tabla, ordenados del más corto al más largo. El enunciado incluye la tabla. Esta tarea consiste en tres apartados, pero nos centraremos sólo en el 3º, en el cuál deben de interpretar la información de la tabla.

El cuestionario de 5º de Primaria está formado por tres tareas. En la primera tarea, "Campeonato de atletismo" se les dice que en un campeonato de atletismo participaron unos municipios y, a continuación, se incluye una tabla con los nombres de los municipios y el número de participantes de cada municipio. A partir de este contexto, se les pide que ordenen los municipios de más a menos según el número de participantes y se les pregunta por el número total de participantes. A continuación, se les dice que hay que hacer dos grupos con el mismo número de participantes y de manera que los participantes de cada municipio vayan al mismo equipo. ¿Cómo lo pueden hacer?

La segunda tarea es "Estudiamos la tele", exactamente la misma que la del cuestionario de 3º de Primaria. En la última tarea, "La fruta", se les plantea la siguiente situación: "En la escuela comemos fruta para desayunar. A media mañana, la cocinera trae una caja con distintas frutas. Hoy en la caja había 3 kiwis, 2 peras, 5 naranjas, 4 plátanos y 8 manzanas.". En la primera actividad de la tarea se debe completar un gráfico de barras poniendo los nombres de las frutas debajo de cada columna y encima de la columna, poner la frecuencia absoluta correspondiente; en la segunda actividad se pregunta por el número total de frutas de la caja; en la tercera, se les muestran los dibujos de las frutas de la caja y deben hacer grupos de fruta para obtener 11 piezas. Por último, en la cuarta actividad, deben contestar si unas afirmaciones relativas a los conceptos de doble y mitad son ciertas o no.

Los participantes fueron 151 estudiantes de 3º de Educación Primaria y 150 de 5º de Educación Primaria de 5 centros educativos de diferente tipología de la ciudad de Lleida.

**Análisis de los errores y dificultades**

A continuación, se analizan y se informa sobre los principales errores y dificultades detectados en los cuestionarios.

Respecto a la "Partida de parchís" se ha observado que la gran mayoría de los estudiantes hacen la descomposición del número 20 con 4 o 5 sumandos; por el contrario, los que utilizan



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

más sumandos, se equivocan más. Esto indica que al principio del Ciclo Medio hay estudiantes que aún tienen dificultades para contar. Otro error importante que se ha visto tiene que ver con la notación matemática: por un lado, respeto al uso del signo igual: "5+5+6=16+4=20" y, por otro, respeto a la ausencia de notación: "6 5 6 3 = 20".

En la tarea "Estudiamos la tele" de 3º se han detectado dos errores, uno en la construcción de los diagramas de barras y otro, en la interpretación de la moda. Por lo que se refiere a la elaboración del diagrama de barras, señalamos que las 3 barras que se muestran en la actividad están separadas y pintadas, por tanto, se espera que la cuarta barra se dibuje análogamente. El 42% de los estudiantes la han dibujado a la altura correspondiente, pero no la han pintado, mientras que el 21% la ha representado correctamente. Un 3% la ha pintado, pero no la ha dibujado con la altura correcta. Este error ya aparece reflejado en otros estudios sobre evaluación de errores de futuros maestros en la construcción de gráficos estadísticos. Aproximadamente el 10% ni la ha pintado ni la ha dibujado a la altura correcta y, el resto, no ha construido la barra.

En cuánto a la pregunta "¿Cuál es el canal que más miran?" el 63% contesta correctamente con la modalidad adecuada (el B); un 8 % responde implícitamente: "el be" o "el segundo". Esta respuesta no asegura que el estudiante entienda bien la situación planteada. Otro 8% contesta erróneamente con la frecuencia absoluta correspondiente al canal B; este error ya se advierte en Surtees (2005). Casi un 19% responde con otros canales o incluso, con canales reales, pensando que la pregunta se la hacen a los niños de su clase. Esto indica que una buena comprensión lectora puede contribuir a una mejor interpretación de la información estadística. El resto no ha respondido a la pregunta. Una de las preguntas de "El concurso de saltos" es: "Quién se ha acercado más a saltar exactamente dos metros?". En la tabla se lee que Yasmine ha saltado 198cm, mientras que Francisco ha saltado 212cm. En las respuestas de los estudiantes se han detectado dos tipos de respuestas: unas cuantitativas y otras cualitativas. A continuación, mostramos las respuestas y el porcentaje de estudiantes que las han contestado:

- Yasmine, un 18%.
- Francisco, un 5%.
- Àlex, un 15'4% (el que más cm ha saltado).



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- Aleix, un 6’4% (el que menos cm ha saltado).
- Contestan con un número, un 11’5%; por ejemplo, responden 198, que corresponde a la marca de Yasmine, o 212 o 2.12, que corresponde a la de Francisco.
- Otras respuestas incorrectas, un 24%.
- En blanco, un 19%.

En esta pregunta que subyace la idea de aproximación por exceso y por defecto, ha tenido un alto porcentaje de fracaso. Finalmente, en la misma tarea, debían completar la frase: “Diez alumnos han saltado entre… y… centímetros”. En las respuestas se ha observado que algunos estudiantes dan primero el número mayor y luego, el menor. Además, algunos estudiantes han considerado los extremos y otros no. Este hecho puede desencadenar en una mala construcción e interpretación de los intervalos de la recta real en cursos superiores.

Los resultados de “Estudiamos la tele” de 5º de Primaria son: aproximadamente el 50% dibuja la barra a la altura correspondiente, pero no la pinta; el 33% la representa correctamente; un 0’7% la pinta, pero no la dibuja a la altura correspondiente; otro 0’7%, no la pinta y la dibuja a una altura que no es correcta y, el resto, no la ha dibujado. Si comparamos con los estudiantes de 3º, hay que destacar que los resultados han mejorado, pero sigue habiendo un alto porcentaje de estudiantes que no pintan la barra. Esto puede ser también un indicativo de que tengan dificultades en el bloque de patrones y relaciones, ya que son incapaces de seguir el modelo. En cuanto a pregunta del canal de moda, el 89% ha contestado correctamente la pregunta; aproximadamente el 4% sigue contestando con la frecuencia absoluta correspondiente a la modalidad que es la moda de lo que ya advierte Batanero y cols. (2006) sobre la permanencia del error. Un 5% presenta otras respuestas y, el resto, no contesta. Claramente, se ha superado la dificultad, aunque un pequeño porcentaje sigue respondiendo con la frecuencia. Finalmente, se analizan con detalle las 3 preguntas de verdadero o falso de “La fruta”:

a) “Hay el doble de manzanas que de plátanos”. V
b) “Hay la mitad de plátanos que de peras”. F
c) “Hay tantas manzanas como kiwis y peras juntos”. F



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

| Nº DE PREGUNTAS CORRECTAS | |
|---|---|
| **Nº DE PREGUNTAS CORRECTAS** | % |
| **Ninguna** | 1’32% |
| **1** | 11’18% |
| **2** | 48’03% |
| **3** | 38’82% |

| Nº DE ESTUDIANTES QUE HAN RESPONDIDO CORRECTAMENTE LA... | |
|---|---|
| **PREGUNTA** | % |
| **a. doble** | 90’13% |
| **b. mitad** | 44’08% |
| **c. tantas como** | 89’47% |

| De los que se equivocan en 1 pregunta, cuál es? (Aciertan 2) | |
|---|---|
| **PREGUNTA** | % |
| **a. doble** | 0% |
| **b. mitad** | 90’41% |
| **c. tantas como** | 9’59% |

Si se analizan las tablas anteriores, es fácil darse cuenta de que, si bien el concepto de doble está bastante adquirido al inicio del Ciclo Superior, el concepto de mitad, todo lo contrario. Se puede apreciar que los estudiantes presentan serias dificultades para la interpretación de este concepto. Este hecho puede deberse a que en esta etapa el alumnado domine la multiplicación, pero no la división. En estudios posteriores y con estudiantes de 1º de ESO sería interesante volver a plantear esta cuestión, aunque por nuestra experiencia docente nos consta que, en cursos superiores, la dificultad de la interpretación de mitad vuelve a surgir al plantear problemas de ecuaciones en los cuáles este está implicado.

**Conclusiones**

En este estudio se constata que los estudiantes tienen una limitada interpretación del signo igual; esta dificultad persiste en cursos superiores y en actividades de distinta naturaleza. Consideramos que requiere una atención más detallada para erradicarla porque puede desembocar en otras dificultades de tipo algebraico más difíciles de superar.

Referente a las dificultades que presentan los estudiantes con el concepto de mitad, éstas se pueden transformar en cursos inmediatamente superiores en dificultades para el trabajo de otros conceptos más profundos como es el de la proporcionalidad, ya que las relaciones de



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

doble o mitad están estrechamente relacionadas con la proporcionalidad desde las primeras etapas educativas (Wilhelmi, 2017).

En el caso de la construcción de gráficos estadísticos, observamos que no se tiene en cuenta los convenios de construcción de los distintos gráficos, probablemente debido a la falta de formación del profesorado en este ámbito.

Nuestro estudio evidencia la transversalidad de la Estadística, pues pone de manifiesto errores y dificultades que no son propios de la disciplina. Por ello, reivindicamos que se potencie más la formación estadística en la enseñanza obligatoria, evitando planteamientos tradicionales y potenciando enfoques constructivistas que favorezcan el aprendizaje significativo del alumnado.

**Reconocimiento**: Trabajo realizado en el marco del Proyecto ARMIF2015 -00005, y grupo GREEP(ICE-UDL)

**Referencias bibliográficas**

Batanero, C., Godino, J., Green, D., Holmes, P. y Vallecillos, A. (2006). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2005). *A Curriculum Framework for K-12 Statistics Education. GAISE Report.* American Statistical Association.

Surtees, L. (2005). Children's mathematical errors and misconceptions: perspectives on the teacher's role. En A. Hansen (Ed.), *Children's errors in mathematics*, pp. 14-21. Glasgow: Learning Matters.

Wilhelmi, M.R. (2017). Proprcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html/ Consultado 10/05/2017


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.112

# ENSEÑANZA DE LOS ELEMENTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO UTILIZANDO GEOGEBRA. UN ESTUDIO DESDE LA TEORÍA DE LOS CONCEPTOS NUCLEARES

Pedro Corcho Sánchez[1] – María José Cáceres García[2] – Ricardo Luengo González[1]
pecorcho@unex.es – majocac@usal.es – rluengo@unex.es
Universidad de Extremadura[1] - Universidad de Salamanca[2] (España)
Miembros del grupo de Investigación Ciberdidact

Núcleo temático: I Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente.

Palabras clave: Blearning, Teoría de los Conceptos Nucleares, Redes Asociativas Pathfinder, Representación del Conocimiento.

## Resumen

*La utilización de recursos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas está tomando mucha importancia en los últimos años, en concreto se están produciendo muchos avances en la utilización del programa Geogebra para la enseñanza de la geometría y su integración en plataformas de Learning Management System (LMS).*
*En este trabajo se diseñó e implementó una experiencia para la enseñanza de los elementos notables del triángulo con Geogebra y se analizó su influencia en el aprendizaje de los estudiantes. Se compararon las Redes Asociativas Pathfinder (RAP, dentro de la Teoría de los Conceptos Nucleares) de dos grupos, uno experimental y otro de control, que cumplían las condiciones de homogeneidad en cuanto a conocimientos previos, antes y después de una intervención educativa, en la cual, se proporcionó al grupo experimental un material de apoyo en formato SCORM, en los que se incluyeron applets interactivos de Geogebra*
*Los resultados mostraron diferencias estadísticamente significativas entre el índice de coherencia del grupo de control y el grupo experimental tras nuestra intervención educativa. Este mayor índice de coherencia de las redes cognitivas del grupo experimental, sugiere que los conceptos relativos a los elementos notables del triángulo quedaron más asentados en la estructura cognitiva de estos estudiantes.*

## Introducción

Nuestra experiencia como docentes nos ha permitido constatar que algunos estudiantes muestran dificultades para asistir a las clases presenciales. Para solucionar esta cuestión las TIC pueden ser un recurso que nos ayude en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje y la


ISBN 978-84-945722-3-4

adquisición de contenidos matemáticos. Si bien algunos autores afirman que el uso de las TIC en el aula no suponen necesariamente una mejora en la práctica educativa cuando se incorporan bajo un modelo pedagógico tradicional (Area, 2012), los estudiantes de hoy tienen una valoración positiva hacia la integración de las TIC en su proceso educativo (Tejedor, 2011). Además, la visualización de conceptos matemáticos que los estudiantes exploran en entornos multimedia puede fomentar su comprensión de una manera nueva (Hollebrands, 2007).

**Fundamentación Teórica**

La Teoría de Conceptos Nucleares (Casas, 2002; Casas y Luengo, 2004; Casas y Luengo, 2013), que en adelante nombraremos como TCN, tiene su fundamentación en el marco teórico general de la Ciencia Cognitiva y en la noción de estructura cognitiva (Neisser, 1976; Piaget, 1978; Ausubel, Novak y Hanesian,1978) y con muchas de las ideas de (Rumelhart, 1984) en cuanto a organización de la memoria en base a esquemas o representaciones mentales relacionadas en la Teoría de los Esquemas.

La TCN establece que la estructura del conocimiento responde a un modelo de redes: se organiza a partir de pequeñas unidades interrelacionadas, cuyos elementos tienen su correspondencia cerebral (en los circuitos neuronales) y mental (en las representaciones llamadas esquemas). De modo que cada concepto en la mente no es algo simple, sino una pequeña estructura, relativamente estable, de elementos interrelacionados. Los conocimientos previos vienen representados por estas estructuras y el aprendizaje significa la modificación de la estructura cognitiva por acrecentamiento y reestructuración y, por tanto, de la estructura biológica, es decir, de los circuitos neuronales que le sirven de soporte.

Esta teoría tiene asociada la técnica de Redes Asociativas Pathfinder (RAP) que permite la representación de la estructura cognitiva de una manera analítica y gráfica, y nos proporciona información acerca de cómo se produce el aprendizaje en función de los cambios que se producen en dicha estructura (Schvaneveldt, 1989). El software Goluca desarrollado por Godinho, Luengo y Casas (Godinho, 2007; Casas, Luengo y Godinho, 2011) permite la obtención de datos mediante un método no invasivo. Este programa informático sistematiza, en el mismo software, tres procedimientos esenciales de las RAP: 1) establecer relaciones entre los términos (estudiar el número de conceptos nucleares, conceptos extremos y número


ISBN 978-84-945722-3-4

de nodos), 2) representar la estructura cognitiva y 3) analizar la representación de la estructura. Además, permite identificar los conceptos más importantes en función de las relaciones, los que presentan mayor número de relaciones se denominan Conceptos Nucleares y los que se sitúan en los extremos Conceptos Extremos.

Estudios previos han utilizado la tecnología con la intención de reforzar la enseñanza presencial, por ejemplo, Sordo (2005) diseñó una estrategia didáctica basada en las TIC y el uso de un programa de geometría dinámica Geometer´s Sketchpad para la enseñanza-aprendizaje de una de las áreas de conocimiento de las matemáticas: la geometría métrica. También Preiner (2008) desarrolló materiales de instrucción mediante el uso de software de geometría dinámica, centrándose principalmente en el uso de Geogebra. Por otro lado, Gomez (2007) aborda el diseño de unidades didácticas para el desarrollo de contenidos didácticos con profesores de Matemáticas, Dikovi (2009) evalúa si existen diferencias en los estudiantes de Matemáticas antes y después del uso de Geogebra en algunos conceptos importantes.

El objetivo principal de este trabajo es analizar las diferencias cognitivas que se producen en dos grupos de estudiantes en relación con la adquisición de determinadas competencias matemáticas, concretamente el aprendizaje de los elementos notables del triángulo.

**Metodología**

Esta investigación ha consistido en el diseño, experimentación y análisis de una metodología de enseñanza basada en TIC utilizando, con un grupo de estudiantes que se identifica como grupo experimental (GE, 68 estudiantes), un modelo denominado Blearning donde se ha utilizado Moodle y Elluminate como LMS, eXeLearning como constructor de paquetes Scorm y Geogebra para elaborar applets de Geometría Dinámica, frente a una metodología tradicional que se utilizó con un grupo de control (GC, 68 estudiantes).

En la asignatura Matemáticas y su Didáctica, de segundo curso del Grado en Educación Primaria nos planteamos crear paquetes Scorm, es decir, recursos educativos reutilizables, interactivos, basados en la visualización y en la interacción con los elementos matemáticos y a disposición de los estudiantes las 24 horas del día. Dentro de los paquetes, se utilizaron múltiples herramientas multimedia (como vídeos, elementos del


ISBN 978-84-945722-3-4

proyecto Descartes[1], applets de Geogebra[2] y cuestionarios auto corregibles de HotPotatoes) para facilitar el seguimiento del curso y, con ello, disminuir las dificultades de aprendizaje. Estos paquetes los pusimos a disposición del GE, que se correspondía con el grupo con docencia presencial por las tardes, dado que solían ser menos estables en la asistencia a las clases presenciales.

Para comparar los dos grupos, hemos utilizado los métodos que describimos a continuación. En primer lugar, se realizó una prueba de nivel de contenidos relacionados con la Geometría a los dos grupos para comprobar la homogeneidad de los mismos. Mediante la prueba T-Student comprobamos que las medias obtenidas en la prueba de nivel de los dos grupos eran similares, por lo que podemos asegurar que los rendimientos de los dos grupos eran estadísticamente similares al principio de nuestra investigación.

Posteriormente se pasó un cuestionario, Pretest, utilizando el software Goluca a los dos grupos de estudiantes (GE y GC) para obtener las RAP antes de la intervención educativa.

A continuación, se impartieron las sesiones presenciales y seminarios de los que constaba la asignatura, de igual forma para los dos grupos, completado para el grupo experimental de material de apoyo bajo la modalidad Blearning en el Campus Virtual de la Universidad de Extremadura (bajo los LMS: Moodle e Elluminate).

Para la elaboración de los materiales multimedia se utilizó el software eXelearning que permite el empaquetado de todo el material en formato Scorm compatible con la plataforma Moodle (Figura 1).

[1] http://recursostic.educacion.es/descartes/web/

[2] https://www.geogebra.org


ISBN 978-84-945722-3-4

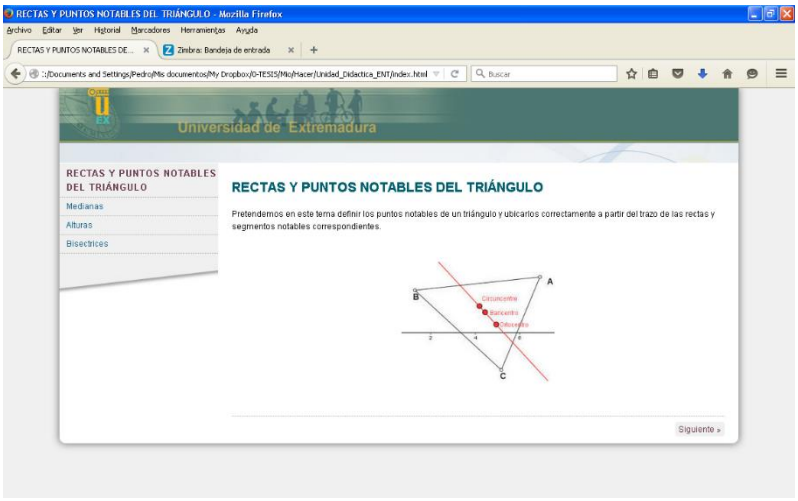



Figura1: Ejemplo de material proporcionado a los estudiantes del grupo experimental.
Fuente: Elaboración propia

A las dos semanas de impartir la docencia se volvieron a realizar los cuestionarios postest a los dos grupos.

Para analizar la estructura cognitiva de los estudiantes, hemos utilizado el método de encuesta, donde se sustituye el cuestionario para recoger los datos, por el soporte informático denominado Goluca (Godinho, 2007), que nos ha permitido formular las preguntas (mediante la similaridad de conceptos) y recoger los datos.

Para el análisis del rendimiento en los contenidos trabajados obtuvimos las Redes Asociativas Pathfinder (RAP) de los dos grupos de estudiantes. Las RAP son representaciones espaciales donde los conceptos aparecen como nodos y sus relaciones como segmento que los unen, de mayor a menor longitud según sea el peso o fuerza de su proximidad semántica (Casas, L. y Luengo, R. 2005) Un ejemplo se muestra en la Figura 2. Estas representaciones las analizamos bajo la Teoría de los Conceptos Nucleares (TCN). Para el estudio de las características de las RAP en los análisis que realizamos, se utilizaron algunas funcionalidades del software Goluca: número de nodos nucleares (aquellos conceptos que tienen más de dos enlaces en la estructura cognitiva del sujeto); índice de complejidad de la red desarrollado por Casas y Luengo (2004) e índice de coherencia (consistencia en las relaciones del conjunto de los datos).


ISBN 978-84-945722-3-4

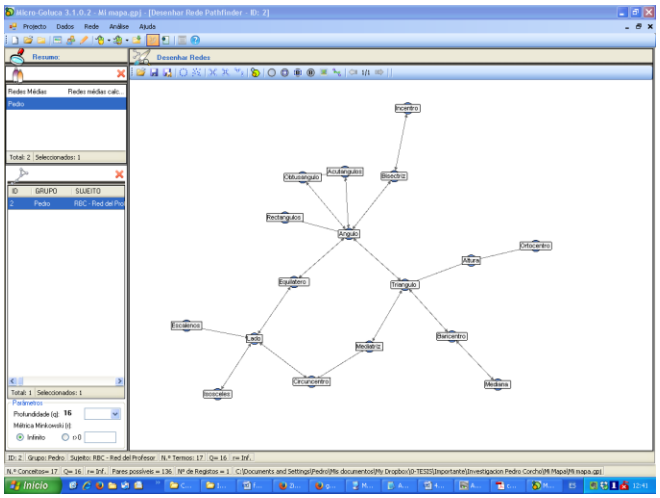


Figura 2: Obtención de la RAP de un estudiante mediante GOLUCA.
Fuente: Elaboración propia

## Resultados

El resultado de esta investigación es que existen diferencias entre el grupo de control y el experimental. Para ello hemos comparado el número de Nodos Nucleares en los dos grupos tras obtener las redes medias mediante GOLUCA, observando la disminución de los mismos en el grupo experimental. Podemos encontrar, en los estudios de Casas (2002), Antunes (2011) y Catarreira (2013), la constatación de la existencia de un menor número de Conceptos Nucleares presentes en la estructura cognitiva tras un periodo de formación, no aumentando la complejidad de la red. También hemos obtenido, mediante SPSS, que los índices de coherencia del grupo de control y experimental no presentan diferencias estadísticamente significativas antes de la intervención educativa. Sin embargo las RAP obtenidas tras la intervención educativa presentan diferencias estadísticamente significativas en el índice de coherencia siendo el grupo experimental el que mayor coherencia presenta[3]. Además, los estudiantes del grupo experimental obtuvieron mejores resultados en la evaluación realizada al finalizar la asignatura (Figura3).

[3] Todos estos resultados pueden consultarse en: Corcho, P. (2016) *Enseñanza de los Elementos Notables del Triángulo utilizando Objetos de Aprendizaje y LMS.* (Tesis Doctoral). Cáceres: Universidad de Extremadura.


ISBN 978-84-945722-3-4

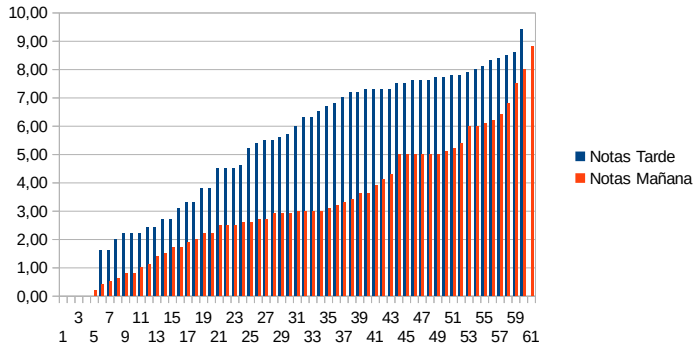



Figura3: Obtención Notas obtenidas por el grupo de mañana y el de tarde .
Fuente: Elaboración propia

## Conclusiones

Los resultados muestran que se ha producido un cambio en la estructura cognitiva de los estudiantes, presentándose en las redes obtenidas tras la instrucción un menor número de conceptos nucleares, lo que indica mejor comprensión de los conceptos trabajados en la intervención educativa (conforme aumenta el dominio del concepto estudiado, las redes de los estudiantes se hacen más simples). Respecto a la comparación de los dos grupos podemos afirmar que nuestro grupo experimental, presenta un mayor índice de coherencia en sus RAP (a mayor coherencia, mayor conocimiento de la materia objeto de estudio) y mejores calificaciones en la evaluación final. En cuanto al índice de complejidad, no hemos encontrado diferencias estadísticamente significativas entre ambos grupos

Los resultados indican que el uso de material de apoyo (Scorm), en concreto el uso de Geogebra, puede favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje en los conceptos geométricos estudiados. Sería conveniente continuar con el diseño de estos materiales para el resto de contenidos geométricos. Además, sería interesante contrastar los resultados mediante la realización de estudios similares con estudiantes de otras especialidades, o con otros contenidos matemáticos con softwares adecuados en cada caso.

La Teoría de los Conceptos Nucleares y sus técnicas asociadas nos abren nuevos caminos en la representación del conocimiento. El uso de técnicas no invasivas (RAP) frente a otras que si lo son (Mapas Conceptuales) y la combinación de su estudio con otros métodos, tales como entrevistas y técnicas de análisis cualitativo, nos


ISBN 978-84-945722-3-4

lleva a nuevos campos de investigación, algunos de los cuales pueden consultarse en la Web[4] del Grupo de Investigación CIBERDIDACT.

## Referencias bibliográficas


Area, M. (2012). La formación y el aprendizaje en entornos virtuales. Potencialidades, debilidades y tendencias. *Crítica, 982*, 33-36.

Ausubel D.P, y Novak, J.D. y Hanesian, H. (1978): *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. Ed. Trillas. México.

Casas, L. (2002). *El estudio de la estructura cognitiva de alumnos a través de Redes Asociativas Pathfinder. Aplicaciones y posibilidades en Geometría*. Tesis doctoral. Universidad de Extremadura. Badajoz.

Casas, L.M. y Luengo-González, R. (2004). Representación del conocimiento y aprendizaje. Teoría de los Conceptos Nucleares. *Revista Española de Pedagogía, 227*, 59-84.

Casas, L.M. y Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. *Enseñanza de las Ciencias, 23*(2), 201-216

Casas, L. y Luengo, R. (2013). The study of the pupil's cognitive structure: the concept of angle. *European Journal of Psychology of Education, 28*, 373–398.

Casas, L., Luengo, R. y Godinho, V. (2011) Software GOLUCA: Knowledge Representation in Mental Calculation. *US-China Education Review B,4*, 592-600

Corcho, P. (2016) *Enseñanza de los Elementos Notables del Triángulo utilizando Objetos de Aprendizaje y LMS.* (Tesis Doctoral). Cáceres: Universidad de Extremadura.

Dikovic, L. (2009). Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level. *ComSIS, 6*(2), 191-203

Godinho, V. (2007). *Implementación del software GOLUCA y aplicación al cambio de redes conceptuales*. Diploma de Estudios Avanzados inédito. Universidad de Extremadura.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas en secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Granada.

Hollebrands, K. F. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2):164-192.

Neisser, U. (1976): *Psicología Cognoscitiva*. Máxico.Trillas

Piaget, J. (1978): La evolución intelectual entre la adolescencia y la edad adulta". En J Delval (comp.). *Lecturas de Psicología del niño*, V 2.

Preiner, J. (2008). *Introducing dynamic mathematics software to mathematics teachers: The case of geogebra.* Tesis doctoral. Universidad de Salzburgo, Austria. Disponible en https://archive.geogebra.org/static/publications/jpreiner-dissertation.pdf. Consultado 17/02/2009

Schvaneveldt, R.W. (Ed.). (1989). *Pathfinder Associative Networks. Studies in Knowledge Organization*. Norwood, NJ. Ablex.


[4] http://www.unex.es/investigacion/grupos/ciberdidact/estructura/publicaciones



ISBN 978-84-945722-3-4

Sordo, J. M. (2005). *Estudio de una estrategia didáctica basada en las nuevas tecnologías para la enseñanza de la geometría*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid, España.
Tejedor, F.J. (2011). *Integración de las TIC en la docencia Universitaria. Salamanca. NETBIBLO, S. L.*


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.114

# SEMINARIO ONLINE DE PROBLEMAS OLÍMPICOS DE MATEMÁTICAS

Juan Miguel Ribera Puchades
Juan-miguel.ribera@unirioja.es
Universidad de La Rioja, España

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: CB.
Nivel educativo: Universidad
Palabras clave: Aprendizaje online, recursos online, Olimpiadas Matemáticas, Resolución de problemas.

**Resumen**
*El Seminario Online de Problemas Olímpicos de Matemáticas es una guía online que recoge un conjunto de secuencias didácticas preparadas por profesores preparadores de Olimpiadas Matemáticas de la Universidad de La Rioja. Siguiendo las ideas del Taller de Creatividad Matemática de la Universidad de La Rioja hemos adaptado y creado contenido para que pueda ser visualizado desde cualquier dispositivo con conexión a internet. Enumeramos los objetivos desde un punto de vista de creación de contenido y desde un punto de vista docente. En este trabajo presentamos detalladamente el proceso para la creación de la guía. Empezando por la planificación inicial de los contenidos que se van a preparar, continuando por una descripción detallada de las bases de datos consultadas para la búsqueda de problemas y enumerando los detalles a tener en cuenta para las grabaciones del contenido. Además, añadimos algunas características de la edición de los videos y del lugar donde alojaremos el contenido. Por último, presentamos algunas posibles extensiones para la guía que hemos creado.*

## Introducción

El Taller de Creatividad Matemática de la Universidad de La Rioja es un punto de encuentro entre profesores, alumnos de la Universidad y alumnos de ESO y Bachillerato donde se realizan actividades de estímulo y divulgación de las Matemáticas. Una de dichas actividades es el Seminario de problemas para alumnos de ESO y Bachillerato donde, desde hace más de una década, se proponen problemas matemáticos de distinta dificultad que los alumnos, deben resolver y explicar a sus compañeros y profesores. Los problemas que se realizan en el seminario sirven de preparación para los problemas que se plantean a los alumnos de Secundaria y Bachillerato en las diferentes competiciones que se realizan a lo largo del curso; por ejemplo, la Fase Local de la Olimpiada Matemática Española (OME) o el Concurso de



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Primavera de Matemáticas. Debemos destacar también que, los alumnos que participan en estas competiciones en Secundaria suelen seguir interesados en las mismas una vez cursan sus estudios universitarios. En dicho caso, suelen presentarse a competiciones matemáticas universitarias que se realizan a lo largo del curso; por ejemplo, la Olimpiada Iberoamericana Matemática Universitaria o la International Mathematical Competition.

Es por ello que, un grupo de profesores que formamos parte del Taller de Creatividad Matemática de la Universidad de La Rioja, consideramos interesante la posibilidad de disponer de contenido audiovisual de preparación de Olimpiadas Matemáticas para que nuestros alumnos puedan acceder al mismo en cualquier momento de su formación tanto preuniversitaria como universitaria. Este tipo de recurso no existía, hasta la actualidad, en las bases de datos de contenido audiovisual docente.

**Objetivos**

Los objetivos del seminario online son varios. El principal es obtener una guía audiovisual de resolución de problemas olímpicos de matemáticas que muestre algunas de las metodologías clásicas de resolución de problemas de matemáticas acompañada de ejemplos de resolución de problemas siguiendo dicha metodología. Para ello, el grupo de trabajo creamos o adaptamos contenido de forma que pueda ser impartido en dicha plataforma virtual.

Por otro lado, estamos interesados en conocer las respuestas que realizan los estudiantes a los problemas que se dejan planteados en los diferentes videos que hemos creado. Para ello facilitamos un canal de comunicación entre los estudiantes y el grupo de trabajo que permita obtener las observaciones de los alumnos tanto de los problemas planteados a lo largo de los diferentes temas como respecto del contenido y de la forma de los videos.

Además, este seminario permitirá a los estudiantes de Secundaria conocer el Seminario de Problemas que se realiza en la Universidad de La Rioja de forma que, puedan participar tanto en sus estudios de Secundaria como una vez llegados a la Universidad. A su vez, pretendemos que la Universidad de La Rioja se inicie en la elaboración de contenido audiovisual fomentando, así, los estudios semipresenciales y no presenciales.

**Planificación de las sesiones.**


ISBN 978-84-945722-3-4

En la primera fase del proyecto establecemos los contenidos que queremos tratar en las grabaciones que realizamos los integrantes del proyecto repartiéndonos las diferentes temáticas que se pueden encontrar entre los problemas clásicos de olimpiadas matemáticas. De esta forma pretendemos recubrir gran parte de la casuística de problemas matemáticos que se pueden encontrar los alumnos en las competiciones en las que pretenden participar. Los temas que hemos trabajado y que estamos interesados en preparar en un futuro se pueden encontrar en el Anexo I.

Una vez repartimos la temática que cada uno de los profesores del seminario pretendemos plantear, aprovechamos para establecer la cantidad y la duración de las sesiones audiovisuales que queremos elaborar. En general, pretendemos que los profesores elaboren contenido docente de aproximadamente 20-25 minutos en total en el que se presenten problemas matemáticos y contenidos teóricos necesarios para la realización de problemas olímpicos en matemáticas. Este contenido lo dividiremos en (al menos) 4 videos con las siguientes características:

- Un primer video de introducción/motivación. En el mundo de las competiciones matemáticas existen algunos problemas clásicos que permiten introducir conceptos matemáticos que se usan en la resolución de problemas de mayor dificultad. Otras veces, existen situaciones de la vida cotidiana que se pueden modelizar mediante la resolución de un problema. En este primer video pretendemos incluir dichas situaciones de forma que nos permita introducir el tema que trataremos en los siguientes videos.
- Un segundo video de contenido más teórico. En esta sesión pretendemos introducir los conceptos teóricos que pueden servir de gran utilidad para la resolución de problemas. Aprovecharemos para relacionarlos con los contenidos del primer video y mostrar la relación existente entre algunos resultados/teoremas clásicos y la resolución de problemas olímpicos en matemáticas. En este mismo video incluiremos algún ejemplo/ejercicio de aplicación directa del contenido teórico para presentarlo de forma divulgativa.
- Un tercer video de aplicación práctica del contenido teórico. En esta sesión queremos incluir ejemplos variados de problemas de matemáticas que utilicen los conceptos


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

teóricos presentados en la sesión anterior. Como ocurre en algunos casos, existen aplicaciones muy variadas y en diferentes áreas de la matemática de dichos conceptos teóricos que pretendemos recoger en este video. En otros temas, es necesario el uso de la tercera sesión para incluir una mayor cantidad de conceptos teóricos, haciendo que el número de sesiones totales sea mayor.

- Un cuarto, y posiblemente último, vídeo de aplicación del concepto teórico en la resolución de problemas de mayor dificultad. En este vídeo estamos interesados en aportar la resolución detallada de un problema perteneciente a alguna competición matemática usando el concepto teórico estudiado a lo largo de las sesiones. Además, aprovecharemos los últimos instantes de la secuencia docente para aportar algún problema abierto de forma que los alumnos puedan aprovechar los conocimientos adquiridos en los diferentes videos para intentar resolverlo. Esto nos servirá también a los profesores para obtener retroalimentación por parte de los alumnos que hayan visualizado las sesiones.

**Bases de datos de Olimpiadas Matemáticas.**

Para obtener la secuencia didáctica anteriormente planteada necesitamos realizar una búsqueda previa tanto de problemas de Olimpiadas Matemáticas como de contenido teórico de preparación de Olimpiadas Matemáticas.

Algunos libros como los de Engel (1998) y Lehoczky y Rusczyk (1994, 1994) profundizan en numerosos conceptos teóricos presentes en la resolución de problemas teóricos presentando algunas aplicaciones directas de los mismos. Por otro lado, Andreescu y Gelca (2008) y Larson (2012) se centran más en la variedad de problemas matemáticos clasificándolos en diferentes áreas pero centrándose menos en los contenidos teóricos que intervienen.

Otras fuentes de problemas de Olimpiadas Matemáticas se pueden encontrar en Internet. Por ejemplo, NRICH enriching mathematics dispone de una gran variedad de problemas de niveles desde primaria a secundaria en los cuales profundiza con todo detalle permitiendo una comprensión mayor de los conceptos; en algunos casos también incluye extensión de los problemas o algunos problemas relacionados. Por otro lado, Art of Problem Solving incluye un foro en el que se discuten problemas de todos los niveles donde los participantes del foro



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

aportan varias soluciones a los problemas que se plantean en el mismo. La página web Brilliant dispone de una gran cantidad de problemas de matemáticas y otras ciencias donde los interesados pueden resolver problemas y además conocer algunos conceptos teóricos que intervienen en la resolución de los mismos; en esta página se solicita registro y además dispone de zonas premium previo pago. La revista Crux Mathematicorum dispone de una gran cantidad de números en los que se plantean problemas de nivel medio-alto con soluciones aportadas por los lectores.

**Grabación del contenido**

Una vez planificadas las sesiones procedemos a la grabación de las secuencias docentes planificadas por los profesores siguiendo los criterios anteriormente mencionados. Planteamos dos métodos diferentes de grabación para los contenidos dependiendo del contenido.

Los temas relacionados con las transformaciones visuales, como puede ser Geometría, necesitan de un método que permita a los alumnos ver, de la forma más clara posible, dichas transformaciones. Para ello, el software matemático Geogebra permite la creación de contenido teniendo en cuenta la secuencia de operaciones y transformaciones realizadas. En estos casos, la grabación se ha realizado usando software de captura de pantalla de ordenador, permitiendo incluir explicaciones grabadas con micrófono a la vez que se visualizan las transformaciones en la pantalla del Geogebra. Las ventajas de este software han permitido ir un paso más delante del material que ofrece Geogebra Tube y permitir incluir explicaciones de los procedimientos utilizados.

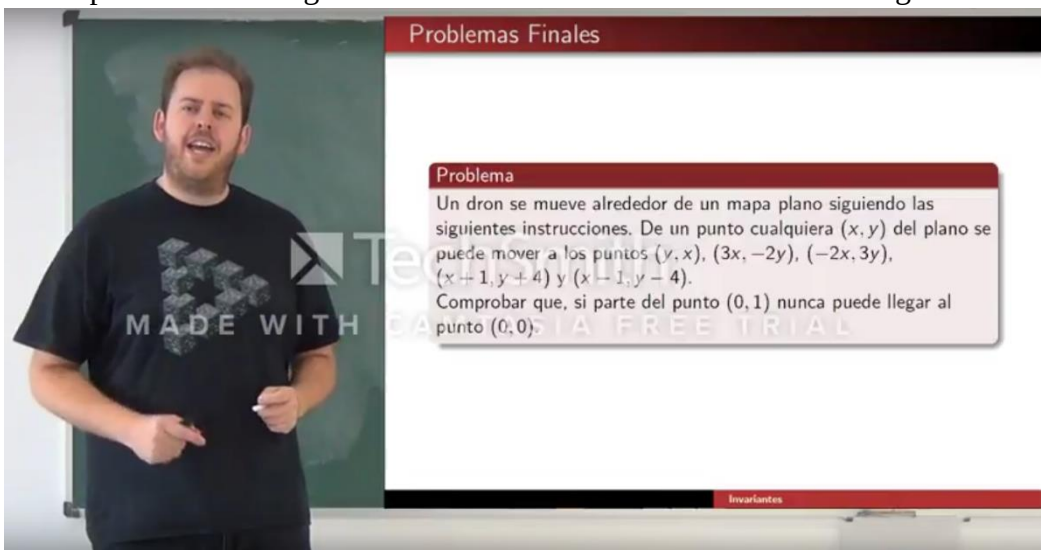


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Aunque el formato de grabación de contenido más utilizado ha sido el uso de cámaras de grabación. En concreto, para la grabación de las sesiones, hemos usado dos cámaras de alta resolución y un micrófono para disponer de varios planos que permitieran prestar atención tanto al profesor como al contenido que pretende explicar. Además, también hemos dispuesto de una pizarra sobre la que realizar explicaciones detalladas y de presentaciones de diapositivas que posteriormente se incluyen en la edición de los videos. Estas presentaciones han permitido dotar de una mayor claridad a las explicaciones a la vez que una mayor velocidad en la exposición de los contenidos, no teniendo que permanecer a la espera que el profesor escribiese en la pizarra algunos conceptos.

**Edición del contenido**

Una vez disponemos de las grabaciones de las sesiones necesitamos una gran cantidad de




tiempo de edición del contenido digital.

La grabación del contenido la realizamos en diferentes clips que deben ser separados o unidos dependiendo de la duración de los mismos, facilitando la obtención de videos de aproximadamente 5 minutos.

Además, unificamos el estilo de las presentaciones utilizadas en las sesiones, así como la introducción a cada uno de los vídeos. Estos y otros detalles de estilo y de enumeración facilitan la organización de los videos de las sesiones.

Para la realización de estos detalles es necesario el uso de un software de edición de vídeo. En nuestro caso hemos utilizado el programa de pago Camtasia dado que no existía ningún software libre de suficiente calidad para la edición del contenido. Este programa permite


ISBN 978-84-945722-3-4

elegir entre diferentes fuentes de video y de audio, así como la posibilidad de incluir presentaciones a lo largo de los videos de las sesiones.

Como resultado de la edición obtenemos una guía completa y estructurada.

**Distribución del seminario**

Uno de los problemas que ha aparecido para la distribución del seminario es la búsqueda de una ubicación online del contenido.

Entre las características que debemos tener en cuenta en la búsqueda de la ubicación se encuentran la posibilidad de que el contenido esté disponible para todo el mundo o bajo registro. Otro detalle a observar es la extensión de los archivos de vídeo que obtenemos después de la edición, dado que no todos los repositorios de videos online permiten videos de extensión mayor a 1GB.

La solución que elegimos, al final, es la posibilidad de ubicar el contenido en la plataforma Youtube, la cual permite mantener privado los videos que deseemos de forma que el contenido solo sea accesible para aquellos que dispongan del enlace. Aunque esta decisión hace que disminuya el número de visualizaciones de los vídeos, disponemos de un control mayor de la distribución del contenido. Aun así hemos habilitado el siguiente enlace público como ejemplo: https://youtu.be/dDg2wYZYqoY. Asimismo hemos habilitado una cuenta de correo electrónico de Gmail (olimpiadasmatematicasunirioja@gmail.com) para recibir las soluciones a los problemas planteados y otras sugerencias que nos pueden hacer los alumnos que visualicen el contenido.

**Trabajo futuro**

Aunque hemos realizado una completa guía de las principales temáticas que aparecen en las competiciones matemáticas, aún quedan muchos conceptos teóricos y temas por tratar. Algunos de ellos se pueden encontrar en el Anexo I.

Por otro lado, estamos interesados también en extender con un mayor número de videos cada una de las secuencias didácticas que hemos planteado para los distintos temas.

Además, algunos compañeros de preparación de olimpiadas matemáticas de otros países nos hacen solicitado la posibilidad de realizar la grabación de contenido, siguiendo la misma estructura, también en inglés.


ISBN 978-84-945722-3-4

**Agradecimientos**

Agradecer a los profesores de la Universidad de La Rioja: Luciano Abadías Ullod, José Luis Arregui Casaus, Maria del Pilar Benito Clavijo, José Manuel Gutiérrez Jiménez, Victor Lanchares Barrasa, Judit Mínguez Ceniceros y Jesús Murillo Ramón por la participación en la creación de la guía y a José Manuel Sota Eguizábal por las constantes indicaciones realizadas tanto para la elaboración, edición y distribución del contenido. Este trabajo pertenece al proyecto de Innovación Docente de la convocatoria 2016/2017 de la Universidad de La Rioja.

**Referencias bibliográficas**

Andreescu, T., & Gelca, R. (2008) *Mathematical Olympiad Challenges*. Birkhäuser Basel Springer Science & Business Media.

Art of Problem Solving. Recuperado de: https://artofproblemsolving.com/

Brilliant. Recuperado de: https://brilliant.org/

Camtasia. Recuperado de: https://www.techsmith.com/camtasia.html

Crux Mathematicorum. Recuperado de: https://cms.math.ca/crux/

Engel, A. (1998). *Problem-Solving Strategies*. Springer.

Geogebratube. Recuperado de: https://www.geogebra.org/materials/?lang=es

Larson, L. (2012) *Problem-Solving Through Problems*. Springer Science & Business Media.

Lehoczky, S., & Rusczyk, R. (1994) *The Art of Problem Solving, Vol. 1: The Basics*. AoPS Incorporated. Alpine (California), Estados Unidos.

NRICH enriching mathematics. Recuperado de: http://nrich.maths.org/

Rusczyk, R., & Lehoczky, S. (1994) *The Art of Problem Solving, Vol. 2: And Beyond*. AoPS Incorporated. Alpine (California), Estados Unidos.

**ANEXO I**

Los temas confeccionados en el seminario online hasta el momento:

- Invariantes.
- Principio del palomar.
- Inducción.
- Polinomios.


ISBN 978-84-945722-3-4

- Recurrencias.
- Ecuaciones Funcionales.
- Geometría en el plano.

Los temas pendientes de confeccionar en futuras ediciones del seminario son los siguientes:

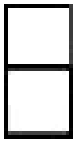
- Combinatoria.
- Teoría de números.
- Desigualdades.
- Convexidad.
- Geometría espacial.
- Probabilidad.
- Números complejos.
- Geometría analítica.

**ANEXO II**

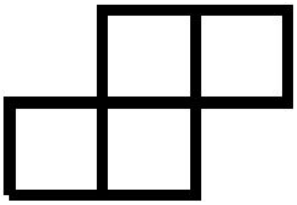
Enumeramos los problemas que aparecen en la secuencia didáctica de Invariantes perteneciente a la guía creada.

**Sesión 1.**

1. Consideramos un tablero de ajedrez usual de 8 x 8 = 64 casillas al que le hemos quitado dos casillas de las esquinas diametralmente opuestas. Demostrar que no se puede recubrir con piezas como la de la imagen.



2. Tenemos un tablero de 9 x 9 = 81 casillas cuadradas. ¿Cuál es el valor máximo de casillas de este tablero que podemos cubrir con piezas como las de la figura siguiente (estas fichas son reversibles, y cada cuadrado de la pieza ocupa exactamente una casilla del tablero, pero no se pueden superponer)?



3. En el siguiente juego, empezando con un número natural, podemos efectuar cualquiera de las tres operaciones siguientes:
    a. Sumar algunos de sus dígitos consecutivos y substituirlos por su resultado.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

b. Descomponer cualquier sección en suma de otros números y substituir la sección por la concatenación de dichos números.
c. Permutar los dígitos.

El juego que os proponemos es, dado dos números, realizar una sucesión de operaciones que pasen de uno a otro. ¿Se puede pasar de 2459 a 100? ¿Podéis caracterizar los pares de números que se pueden conectar mediante las sucesiones de operaciones de este tipo?

4. Tres personas, A, B y C juegan una serie de partidas de un juego. Cuando empiezan, A tiene 10€, B tiene 20€ y C tiene 30€. En cada ronda, el ganador recibe 1€ de cada uno de los otros dos jugadores. ¿Puede ser que en algún momento los tres jugadores tengan 15€ cada uno?

**Sesión 2.**

Dedicada a incluir el contenido teórico.

Diferenciamos entre Invariantes y Monovariantes.

Explicamos diferentes situaciones donde encontrar los invariantes y monovariantes en:

- Coloraciones.
- Ejes y esquinas.
- Simetrías.
- Expresiones algebraicas.
- Inversiones.
- Enteros y racionales.

**Sesión 3.**

1. Los números del 1 al 50 se escriben en la pizarra. En cada paso podemos elegir dos números a, b y escribimos en su lugar |a-b|. ¿Si repetimos la operación hasta que nos quede un único número, como sería el valor que obtendremos?
2. Distribuimos 2017 personas en las 100 habitaciones de un hotel. A cada minuto, y mientras no están todas las personas en la misma habitación, una persona cualquiera va de una habitación a otra donde haya, como mínimo, el mismo número de personas que en la suya. Demostrar que, tarde o temprano, todas las personas estarán en la misma habitación.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

**Sesión 4.**

1. Un dron se mueve alrededor de un mapa plano siguiendo las siguientes instrucciones. De un punto cualquiera (x, y) del plano se puede mover a los puntos (y, x), (3x, 2y), (2x, 3y), (x + 1, y + 4) y (x – 1, y - 4). Comprobar que, si parte del punto (0, 1) nunca puede llegar al punto (0, 0).
2. ¿Se puede elegir una sucesión de enteros no negativos distintos menores que 100000 tales que no haya, en la sucesión, tres en progresión aritmética?



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.115

# *OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE EN CONTEXTOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EDUCACIÓN INFANTIL*

Pérez, Rocío[1]– Martín, Juan P.[2] – Molina, Noemí[2]– Rodríguez, Alejandro[2] – Gómez, Ana[3] –Jiménez, Inmaculada[4]– Díez, Alice[4] –Climent, Nuria[2]– Carrillo, José[2]
yo.chiogpic@gmail.com – martindiazjp@gmail.com – nmg.molina89@gmail.com – alejandro.lara@alu.uhu.es – angoga22@gmail.com – inmajica@gmail.com – alicediezf@gmail.com– climent@uhu.es –carrillo@uhu.es
[1]CEIP Aurora Moreno (Gibraleón-Huelva, España), [2] Universidad de Huelva (España)
[3]CEIP Las Gaviotas (La Antilla-Huelva, España), [4]Junta de Andalucía (España)

Núcleo temático: La resolución de problemas en matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Inicial (3 a 5 años)
Palabras clave: oportunidades de aprendizaje, logros de aprendizaje, resolución de problemas, educación infantil

**Resumen**
*Presentamos los resultados de una investigación sobre las relaciones entre las oportunidades de aprendizaje que ofrece una maestra de educación infantil en una clase de matemáticas en 5 años y el aprendizaje de sus alumnos. Tomamos una sesión orientada hacia la resolución de problemas y analizamos las oportunidades de aprendizaje considerando el foco matemático y didáctico de lo que propone la maestra (Carrillo, Contreras & Zakaryan, 2014; Climent y Carrillo, 2007), las estrategias de resolución de la tarea desarrolladas por los alumnos y la comprensión de los alumnos en torno al contenido matemático implicado (el reparto). Mostramos cómo se enlaza la gestión del aula (en términos de oportunidades de aprendizaje) y dicho aprendizaje. Las oportunidades de aprendizaje observadas vienen dadas por foco matemático centrado en el desarrollo conceptual, la comparación crítica de distintas estrategias, el razonamiento y la resolución de problemas; desde el punto de vista didáctico la maestra pone el énfasis en que los alumnos expresen sus ideas. En el aprendizaje de los alumnos se aprecia cómo otorgan significado a una situación de reparto y desarrollan distintas estrategias para resolverla, se familiarizan con la estructura de realización de un problema y representan de distintos modos el trabajo matemático.*

## Introducción

La investigación que presentamos se desarrolla en el seno de un grupo de investigación colaborativo (al que denominaremos PIE) formado por maestras y profesores de distintos niveles educativos, formadores de profesores, maestros en formación inicial y otros educadores relacionados con la enseñanza de la matemática. El interés compartido del grupo



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

es el aprendizaje y la enseñanza de la matemática (en concreto la resolución de problemas y la relación entre contenidos matemáticos en distintos niveles) y la formación del profesor para desarrollar dicha enseñanza.

El trabajo se ha desarrollado en el proyecto de investigación educativa *Investigar para aprender en el aula de matemáticas* (PIV-031/15) y entre sus objetivos nos proponemos reflexionar sobre las relaciones entre las oportunidades de aprendizaje que ofrece el profesor y los logros de aprendizaje del alumnado, en un contexto de resolución de problemas. Para ello, diseñamos actividades para Educación Infantil y analizamos su implementación por parte de una de las maestras del PIE. En esta comunicación analizaremos la puesta en práctica de una actividad.

**Marco teórico**

El inicio en la resolución de problemas, adquiriendo estrategias para su resolución, es considerado uno de los objetivos a conseguir en la etapa de Educación Infantil (Junta de Andalucía, 2008, p.22). Concebimos la resolución de problemas como estrategia metodológica y como objeto de conocimiento (Carrillo, 1998). De este modo, entendemos la enseñanza de la matemática caracterizada por el planteamiento, abordaje y discusión de situaciones problemáticas. Considerando las particularidades de la resolución de problemas en Educación Infantil (Alsina, 2014), planteamos situaciones problemáticas priorizando el apoyo visual y gráfico y la transmisión oral.

Asimismo, nos interesa el aprendizaje de los alumnos en resolución de problemas, por lo que consideramos las estrategias y heurísticos que usan. Una adaptación de las fases de resolución de problemas de Pólya (1985) nos ha servido de referente para el diseño y para el análisis de los logros de los alumnos.

Proponemos a los alumnos un problema de división partitiva, en un contexto de reparto (se dispone de una colección de elementos que ha de repartirse en un nº de partes). Estas situaciones contribuyen a dar sentido a la división y, según algunos estudios (Clements, 2004), pueden resolverse a partir de los 3 años. Si bien la división es un contenido que no forma parte del currículo de esta etapa, coincidimos con Ramírez y Castro (2014) en la conveniencia de propiciar un aprendizaje informal de la división en Educación Infantil, antes de comenzar con un aprendizaje formal. De este modo, los niños pueden otorgar significado a la división antes de aprender algoritmos de cálculo.


ISBN 978-84-945722-3-4

Como hemos indicado, en esta investigación nos preocupamos por la interacción entre las oportunidades de aprendizaje que ofrece la maestra y los logros de aprendizaje de sus alumnos. Las oportunidades de aprendizaje son uno de los pocos indicadores que conectan la enseñanza y el aprendizaje (Hiebert y Grows, 2007). En este trabajo consideraremos dos de las dimensiones diferenciadas en Carrillo, Contreras y Zakaryan (2014) para el estudio de las oportunidades de aprendizaje ofrecidas por el profesor (que a su vez se basan en Climent y Carrillo, 2007). Estas se refieren a los objetivos del profesor (relacionados con el énfasis en diferentes habilidades y procesos matemáticos) y a estrategias didácticas que utilizan. En cuanto a la primera dimensión, denominada *foco matemático*, el profesor puede promover: el desarrollo conceptual de sus estudiantes (*foco conceptual*); la adquisición de destrezas, procedimientos, técnicas o algoritmos (*foco mecánico*); las conexiones entre diferentes entes matemáticos (*foco estructural*); el desarrollo de nuevos entes matemáticos a partir del conocimiento existente (*foco derivativo*); la adquisición de procesos o técnicas que desarrollan la flexibilidad, la elegancia o lacomparación crítica del trabajo (*foco de eficiencia*); la implicación en la solución de tareas no rutinarias (*foco de resolución de problemas*); o/y la articulación de justificaciones y argumentaciones (*foco de razonamiento*). En cuanto a las estrategias didácticas, diferenciamos: *acceso al conocimiento previo*, *explicación* (del profesor), *expresión de las propias ideas* (por parte de los alumnos), *exploración* (de los alumnos en actividades que implican una nueva idea matemática), *entrenamiento* (si el profesor ofrece pistas y retroalimentación), *valoración o evaluación* (de las ideas de los alumnos por parte del profesor, para reconducir su acción) y *motivación* (si el profesor ofrece estímulos o dirige las actitudes de los alumnos hacia las matemáticas). Los distintos focos no son excluyentes, siendo habitual encontrar varios de ellos en un mismo fragmento de aula.

**Metodología**

Hemos desarrollado una investigación colaborativa (Feldman, 1993), en la que todos los miembros del grupo participan en el diseño de las actividades y análisis de su implementación, de la que se nutre la experiencia y pericia de cada componente en su área de especialización (como la práctica en la escuela o la investigación educativa).

La actividad se desarrolla en una clase de Educación Infantil de 5 años de un colegio público de la provincia de Huelva, compuesta por 25 niños. La maestra del aula (miembro del PIE),


ISBN 978-84-945722-3-4

tiene 14 años de experiencia en Educación Infantil y es el tercer curso que es tutora de este grupo de alumnos.

En la sesión que analizamos se marcaron como objetivos: motivar e implicar a los alumnos/as en la resolución de problemas; iniciarse, de forma conjunta, en la resolución de problemas en cuanto a toma de datos, estrategia usada y expresión de la solución; ser capaz de expresar y argumentar sus reflexiones en la resolución de problemas; respetar las opiniones y aportaciones del compañero para llegar a una resolución consensuada; e iniciar el concepto de división.

Tras una breve introducción de la actividad (en gran grupo), la maestra dispone a los alumnos en parejas y les entrega dos vasos de plástico y 12 fichas, pidiéndoles que repartan las fichas en los dos vasitos. Tras un tiempo de trabajo de las parejas, en el que la maestra va observando el trabajo que realizan, se pone en común la actividad (en gran grupo). Tras la puesta en común, se pide a los alumnos que de modo individual representen por escrito la actividad realizada (gráfica y simbólicamente). Las representaciones de los alumnos se comparten posteriormente en una puesta en común.

Durante la implementación de la actividad otros miembros del grupo observan la sesión de modo no participante y esta es videograbada. Las notas de los observadores, la videograbación y las producciones escritas constituyen los datos de la investigación.

En sesiones del PIE se hace un análisis de contenido de la sesión, considerando los elementos y categorías expuestos en el marco teórico.

**Resultados**

Organizamos los resultados en torno a aspectos del trabajo matemático que se desarrolla en el aula, describiendo de modo relacionado las oportunidades de aprendizaje que ofrece la maestra del aula y el aprendizaje que se observa en los alumnos. Para ilustrar el aprendizaje, usamos datos tanto de la videograbación de la sesión, como de las producciones individuales de los alumnos.

*a) La división como reparto equitativo*

Al inicio de la actividad, la maestra (M) dice:

M: *Tenéis que ayudar a repartir unas cositas que yo os voy a dar entre los dos* [vasitos]. *¿Sabéis lo que significa repartir?*



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Los alumnos asocian la pregunta a experiencias previas en las que "se reparten los niños" o "si tienen un juego y a uno se le gasta, le da el otro" y añaden que *hay que compartir los juguetes*. La maestra interviene:

M: *Una cosa es repartir y otra es compartir*. […] *¿Qué estáis haciendo, repartiendo, compartiendo o repartiendo para compartir?*

Una niña: *Repartiendo para compartir*.

Los alumnos entienden el reparto equitativo asociándolo al sentido de justicia. La maestra aprovecha esta idea natural de los alumnos para asociar la *división* al *reparto equitativo* (sin usar los términos destacados). Apreciamos en ese sentido un *foco conceptual* por parte de la maestra. A pesar de no indicarse en la actividad que el reparto debía ser equitativo, parece que estar por parejas favoreció esta idea de reparto. Esta comprensión del reparto equitativo se aprecia durante todo el desarrollo de la sesión y en las representaciones de los alumnos de la actividad (como en la figura 1, en la que su autor usa una línea para representar que su compañero y él tienen la misma cantidad, asociada a la longitud y situación espacial (alineado en columna).

Figura 1: representación del reparto equitativo

*b) Distintas estrategias para resolver un problema de reparto*

Los niños usan distintas estrategias para resolver la tarea: conteo o reparto de uno en uno y de dos en dos; estimación; y estimación y compensación. Estas estrategias coinciden con las observadas en Ramírez y Castro (2014) en la resolución por parte de niños de 1º de Educación Primaria de un problema de división partitiva. En la puesta en común de la actividad, la maestra les invita a que cuenten lo que han hecho ("me podéis contar a mí, a un compañero o a todos"). Propicia de este modo la justificación de lo realizado y la comparación crítica del trabajo de los alumnos, usando constantemente expresiones como "¿alguien lo tiene igual?". Análogamente les pide que comparen su representación con la que van presentando sus compañeros. La maestra potencia el *foco de razonamiento* y el de *eficiencia*,



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

promoviendo la adquisición de diferentes métodos de representación y de resolución del problema para que los alumnos puedan comparar críticamente lo que aporta cada uno.

En las representaciones por parte de los alumnos de su resolución del problema observamos algunas de las estrategias seguidas.

*c) Estrategia de estimación y compensación*

Esta estrategia y su gestión merecen un tratamiento especial. En varias parejas, usando la estrategia de estimación, los niños llegan a que uno de ellos tiene cinco fichas y otro tiene siete. En la puesta en común de una de estas parejas, se desarrolla el diálogo:

Niña 1: *Al principio ella tenía más y yo menos, ella me ha dado una y tenemos 6 y 6. (*La otra niña del grupo lo explica diciendo que ella le dio dos a la otra).

M: (a otro alumno) *¿Tú lo has hecho igual con tu pareja o les quieres preguntar algo? ¿Crees que lo han hecho bien?*

Niño: *Lo han hecho bien, porque tienen 6 y 6.*

Otra pareja coincide en explicar que tenían 5 y 7 y uno le dio dos a su compañero, quedándose 6 cada uno. La maestra trata de que los alumnos comparen esta resolución con la suya para ver cómo la valoran. Los alumnos la consideran correcta al obtener 6 y 6. De este modo, observamos un énfasis por parte de la maestra en que los alumnos *expresen sus ideas*, incluyendo el análisis de las ideas de sus compañeros. Los alumnos parecen centrar su atención más en el resultado (6 y 6) que en el proceso.

Continuando la sesión, en la puesta en común de las representaciones de los alumnos, la maestra aprovecha la representación de una alumna (Celia, figura 2), que incluye 6=1+5, para cuestionar si el que tenía 7 le da una ficha o dos fichas al que tenía 5.

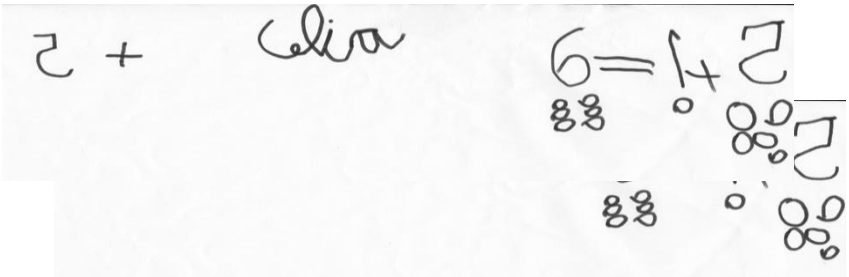


Figura 2: representación gráfica y simbólica de la estrategia de compensación

En las representaciones de los alumnos podemos percibir la persistencia del papel de la diferencia entre las fichas de los dos compañeros tras el reparto por estimación. Así, en la representación de Isabela (figura 3) se observa cómo esta realiza una primera estimación que


ISBN 978-84-945722-3-4

supone un reparto no equitativo (7-5). Una vez advertido el error, compensa el reparto trasladando una ficha de la izquierda al grupo de la derecha. Sin embargo, a la hora de representarlo y de expresarlo oralmente, marca las dos fichas que rompen la igualdad. Se aprecia de este modo una falta de coherencia entre, por un lado, el resultado del problema y, por otro, su expresión oral y su representación. Tras comparar ambas cantidades, los alumnos obtienen el dos como la cantidad que impide la igualdad, y aplican un razonamiento aditivo, restando 2 del grupo mayor y dándoselo al menor (en lugar de aplicar un razonamiento multiplicativo, dividiendo dos entre dos y asignando uno a cada grupo).

Figuras3 y 4: representaciones de la estrategia de compensación

Otros alumnos (como Blanca, figura 4) representan el proceso de compensación de 5 y 7 mediante el paso de una ficha del grupo mayor al menor. Lo podemos observar claramente en su dibujo gracias a la combinación de los símbolos numéricos con las fichas coloreadas, lo que le permite diferenciar las suyas de las de su compañero. Celia (figura 2), representa 5+1=6 en forma de suma en espejo, pareciendo que ha resuelto el problema repartiendo y por compensación.

*d) Distintas representaciones del trabajo matemático*

En la secuencia de trabajo planteada, la maestra propone hacer uso del material para resolver la actividad, expresar oralmente lo realizado una vez resuelta la actividad, expresarlo por escrito y explicar oralmente sus representaciones. De este modo, los niños expresan oral, simbólica o gráficamente los procedimientos y los resultados.

*e) Fases en la resolución de un problema*

La maestra propone como secuencia de trabajo: anticipar el resultado del problema (antes de que los alumnos lo aborden, pregunta: *Os voy a dar dos cubiletes y 12 fichas, ¿qué creéis que pasará?*), experimentar con material buscando distintos procesos de resolución, explicar y argumentar lo realizado, y dibujar el proceso seguido y explicarlo. Podemos hablar de un plan inducido que, de forma progresiva, facilita anticipar el resultado, plasmar en un dibujo


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

las estrategias seguidas, el proceso y/o el resultado o elaborar conjeturas sobre el propio enunciado.

**Conclusiones**

La maestra enfatiza durante toda la sesión el razonamiento y justificación matemáticos (*foco de razonamiento*). Propone una tarea no rutinaria para los alumnos (que puede ser considerada un problema) y presta ayudas mediante preguntas (*foco de resolución de problemas*), solicita que los alumnos expresen sus ideas a sus compañeros y las argumenten (*foco de expresión de las propias ideas*), analicen las resoluciones y resultados de los compañeros comparándolos con los propios (*foco de eficiencia*). La actividad del alumno en el aula es la de hacer matemáticas y discutir la actividad con sus compañeros (aborda problemas, comunica sus resultados y procesos, analiza el trabajo matemático de otros). Con su gestión del aula se favorece que los alumnos aprendan distintas estrategias para resolver el problema y representar su resolución, aprendiendo de los procesos y representaciones de sus compañeros para comprender mejor y evaluar los suyos. Los alumnos, además, se inician en un proceso general para resolver problemas.

Respecto del problema propuesto, los alumnos han mostrado que son capaces de desarrollar estrategias para resolver situaciones de reparto, dando sentido a la división como reparto equitativo. Algunas estrategias han incluido el uso de esquemas de comparación citados en investigaciones previas sobre la resolución de problemas de reparto por niños de Educación Infantil (López y De Castro, 2014). La gestión de la maestra en relación con el énfasis conceptual (*foco conceptual*), el *razonamiento* y la *expresión de las propias ideas* por parte de los alumnos ha mostrado favorecer dichos aprendizajes.

**Agradecimientos:** Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto *Investigar para aprender en el aula de matemáticas* (PIV-031/15). Junta de Andalucía.

**Referencias bibliográficas**

Alsina, A. (2014). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números*, 86, 5-28.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.


ISBN 978-84-945722-3-4

Carrillo, Contreras y Zakaryan (2014). Oportunidades de Aprendizaje y Competencias Matemáticas: un estudio de dos casos. *Bolema*, *28*(48), 89-109.

Clements, D. H. (2004). Major themes and recommendations. En D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Climent, N., & Carrillo, J. (2007). El uso del video para el análisis de la práctica en entornos colaborativos. *Investigación en la escuela*, 61, 23-36.

Feldman, A. (1993). Promoting equitable collaboration between university researchers and school teachers. Qualitative Studies in Education, *6*(4), 341-357.

Hiebert, J. y Grows, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. En F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-404). NCTM: Information Age Publishing.

Junta de Andalucía (2008). ORDEN de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el Currículo correspondiente a la Educación Infantil en Andalucía. BOJA 169, 26 de agosto de 2008.

López, M.E. y De Castro, C. (2014). Iniciación a los problemas de reparto igualatorio en educación infantil. *Épsilon*, *31*(2), 87, 83-98.

Pólya, G. (1985). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas. (Versión original en inglés: *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press, 1945).

Ramírez, M. y Castro, C. (2014). Trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división de cuatro a siete años. *Epsilon*, *31*(3), 88, 39-54.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.116

# APRENDIENDO FORMAS GEOMÉTRICAS MEDIANTE GEOGEBRA EN INFANTIL

Pedro Corcho Sánchez - Elena Maestre Polo
pecorcho@unex.es – elenamaestrepolo@gmail.com
Universidad de Extremadura. España

Núcleo temático: I Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente.

Palabras clave: Geometría, Geogebra, Teoría de los Conceptos Nucleares, Educación Infantil.

## Resumen

*En este trabajo presentamos una experiencia realizada con estudiantes de Educación Infantil en la que hemos utilizado la Teoría de los Conceptos Nucleares y las Redes Asociativas Pathfinder para la representación gráfica de la estructura cognitiva de alumnos de Educación Infantil. Para ello hemos utilizado una técnica no invasiva, utilizando iconos e imágenes gráficas con el software Goluca. Mediante el uso del software Geogebra, los estudiantes han interactuado con formas geométricas utilizando para ello una Pizarra Digital Interactiva el grupo experimental y los estudiantes del grupo de control han trabajado de una forma tradicional en fichas de papel.*

## Introducción

En la actualidad la visión de la enseñanza de las matemáticas en la etapa de Educación Infantil está cambiando. A nivel internacional con el grupo de investigación Early Years Mathematics Groups (2009)de la European Society for Research in Mathematics Education, o a nivel español con el grupo de Investigación en Educación Matemática Infantil (2011) de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática hacen que se le dé la importancia que tiene dentro de la Didáctica de las Matemáticas.

Probablemente, la teoría más citada y conocida sobre desarrollo cognitivo en los niños sea la de Jean Piaget (1896-1980). Esta teoría mantiene que los niños pasan a través de etapas específicas conforme su intelecto y capacidad se van desarrollando.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

La etapa preoperacional (2-7 años), es la que más se aproxima al período de educación infantil, que será en la que nos centraremos en nuestro estudio junto con la enseñanza de la Geometría para este período.

Todo sistema de adquisición y desarrollo del conocimiento tiene su propia estructura (Bizarro, N. et al, 2015). Identificar esta estructura es de vital importancia para conocer los procesos de aprendizaje de nuestros alumnos y analizar sus progresos.

En esta investigación pretendemos averiguar si el uso de la PDI como elemento motivador e interactivo, ayuda al desarrollo de las estructuras mentales de nuestros estudiantes y mediante la representación de estas estructuras a través de las RAP nos proporcionan datos importantes para seguir el aprendizaje de los alumnos y analizar sus progresos (Bizarro, Luengo, Casas & Carvalho, 2014).

## Fundamentación Teórica

La teoría de Piaget sostiene que los sujetos son capaces de crear nuevos conocimientos mediante la reflexión de sus acciones físicas, mentales; este mismo proceso de construcción de conocimientos conlleva conflictos de reflexión, cognitivos, de reorganización conceptual. (Colom, Bernabeu, Domínguez, & Sarramona, 2002).

Edo (2000), nos indica que el inicio del aprendizaje de la geometría, según varios estudios, comienza con la denominada intuición geométrica, es decir, con la experimentación, la manipulación y la reflexión con cuerpos en tres dimensiones de la vida habitual del niño.

Para Mª Antonia Canals (1997), el conocimiento geométrico no se adquiere a partir de recibir una información dada por otra persona ni a través de palabras, aunque vayan acompañadas de imágenes (dibujos, gráficos en pizarras, libros…), si al mismo tiempo no se pone en juego la experiencia y la mente del que los recibe.

Como nos indica Mercè Edo (2016), la matemática es simbólica, compleja y abstracta, por lo tanto, se tiende a creer que la matemática es demasiado "grande" para los "niños pequeños". Sin embargo Ginsburg (2002) defiende que los niños pequeños tienen un gran interés en las ideas matemáticas, incluso en el simbolismo matemático y pueden aprender y beneficiarse de la enseñanza de esta materia. Afirma que los niños de forma espontánea emplean contenidos matemáticos en su juego libre.

### Teoría de los Conceptos Nucleares


ISBN 978-84-945722-3-4

Este trabajo se encuadra dentro de los realizados por el Grupo de Investigación Ciberdidact sobre la adquisición y representación del conocimiento y la Teoría de los Conceptos Nucleares (TCN) de Casas y Luengo (2004).

La Teoría de los Conceptos Nucleares ofrece una nueva visión sobre la organización de la estructura cognitiva y determina una nueva e importante función de los conceptos que figuran de manera más importante en esta estructura. Nos muestra una nueva manera de conocer cómo funciona el aprendizaje de nuevos conceptos, dando mayor importancia a las representaciones mentales que estos conceptos provocan en los estudiantes.

Los principales elementos de la Teoría de los Conceptos Nucleares son la "organización geográfica del conocimiento", la noción de "conceptos nucleares" y la noción de "senderos de mínimo coste" (Casas, 2002; Casas y Luengo 2004). Al igual que otras teorías, hace uso de su propia técnica, las Redes Asociativas Pathfinder (RAP), que describiremos más adelante.

Para la práctica educativa, es de suma importancia el conocimiento de cómo se llevan a cabo los procesos de integración de nuevos contenidos en la estructura cognitiva previa de un alumno.

Exponer y representar datos tiene como objetivo la presentación de información de forma sistemática, y si es de forma visual, mucho mejor. Una de las mejores formas de presentar la información es mediante redes que establezcan relaciones entre las distintas categorías. Esta forma de representación tiene ventajas tales como la economía y la visualización en la organización de los datos y la posibilidad de la comparación de las redes de distintos individuos (Vicente, 2.010).

Las Redes Asociativas Pathfinder son representaciones en las cuales los conceptos aparecen como nodos y su relación como segmentos que los unen. Los segmentos son de diferente longitud dependiendo del peso o fuerza de la proximidad semántica entre tales conceptos. Las representaciones obtenidas son muy útiles para conocer la estructura cognitiva de los estudiantes y ayudan a explicar hechos que no se entenderían utilizando otros modelos teóricos (Arias, J. 2008).

La representación se obtiene a partir de una puntuación numérica transmitida desde la similitud o diferencia entre los conceptos percibida por el sujeto, de modo que los conceptos


ISBN 978-84-945722-3-4

más cercanos semánticamente están representados en el espacio de forma más próxima, y de otra manera más separados. (Casas, 2002).

## Metodología

En este estudio participaron 10 alumnos de 3º de Educación Infantil con edades comprendidas entre los 5 y 6 años.

En una primera sesión se obtuvieron las RAP de los alumnos, utilizando para ello el software Goluca[5] (figura 1) en su versión gráfica a la hora de relacionar imágenes similares, por lo que los alumnos no necesitaban leer nada. Se les presentaban, de forma aleatoria, un par de conceptos para que los alumnos puntuasen la similaridad que presentaban. Esto se realizo de forma individual y con apoyo de la profesora en el manejo del ordenador. Este programa, actualmente en desarrollo por el grupo de investigación Ciberdidact[6] de la Universidad de Extremadura, presenta aleatoriamente, en forma gráfica o escrita, un par de conceptos para que el alumno puntúe la similaridad que hay entre ellos, desplazando el ratón del ordenador sobre una barra continua en la que se indica la similaridad de los conceptos, indicando el alumnos la mayor o menor relación entre ellos (Figura 1).

El cuestionario que se presento a los alumnos constaba de varias imágenes en la que estaba representado un Centro Comercial que contenía figuras geométricas y las figuras que aparecían en imágenes. El alumno tenía que indicar si la figura geométrica aparecía en el Centro Comercial o no.

Figura 1: Cuestionario pasado a los alumnos

Fuente: Elaboración propia.

[5] Software desarrollado por Godinho, V., Luengo, R., y Casas, L. (2007)

[6] www.unex.es/investigacion/grupos/ciberdidact


ISBN 978-84-945722-3-4

En segundo lugar, se dividió al grupo y, 5 alumnos realizaron actividades en fichas con papel (grupo de control, GC) y los otros 5 (grupo experimental, GE) realizaron las mismas actividades pero utilizando una pizarra digital interactiva (PDI) y Geogebra para poder interactuar con las imágenes y las formas geométricas. Estas actividades se tomaron de los materiales disponibles en MatemaTICinfantil[7]. En este proyecto, todo el material está disponible para usar mediante PDI o tablet. Para su utilización con el grupo de control, tuvimos que adaptar las actividades a fichas para utilizar en papel.

La división de alumnos que se realizo fue la siguiente:

| Alumnos que realizaron fichas escritas | Alumnos que utilizaron PDI |
|---|---|
| DG | MG |
| IS | IG |
| NZ | AC |
| CD | AD |
| PC | MC |

Tabla 1: División de alumnos (se muestran las iniciales de sus nombres)

Tras esta sesión, y transcurrida una semana, volvimos a utilizar el programa Goluca, para obtener la segunda representación gráfica y evaluación de la estructura cognitiva de los alumnos.

A continuación se analizaron los resultados obtenidos utilizando de nuevo el programa Goluca. Este programa nos proporciona las Redes Asociativas Pathfinder de los individuos encuestados (figura 2) y nos permite identificar los conceptos más importantes ya que son los que presentan un mayor número de relaciones (Conceptos Nucleares) y los menos importantes, por aparecer en los extremos (Conceptos Extremos). De igual manera, crea una matriz de datos de proximidad con la que podemos obtener un Índice de Coherencia (Schvaneveldt, 1989; Casas y Luengo, 2004, 2005, 2012) y un Índice de Complejidad de Redes (Casas y Luengo, 2004, 2005, 2012).

[7] http://matematicinfantil.catedu.es/


ISBN 978-84-945722-3-4

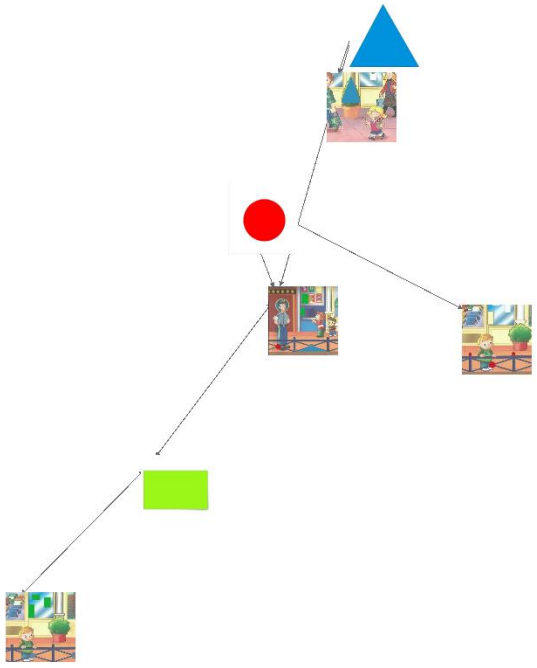


Figura 2: Red de un alumnos

Fuente: Elaboración propia.

Los conceptos nucleares que obtuvimos son los siguientes:

| | Pretest | | Postest | |
|---|---|---|---|---|
| **Sujeto** | **Concepto Extremo** | **Concepto Nuclear** | **Concepto Extremo** | **Concepto Nuclear** |
| MG | 3 | 4 | 4 | 2 |
| IG | 2 | 4 | 3 | 2 |
| DG | 3 | 3 | 3 | 3 |
| AC | 3 | 3 | 3 | 3 |
| IS | 3 | 4 | 2 | 5 |
| NZ | 3 | 3 | 3 | 3 |
| CD | 3 | 3 | 3 | 3 |
| AD | 3 | 3 | 4 | 2 |
| MC | 2 | 5 | 3 | 2 |
| PC | 2 | 5 | 2 | 5 |

Tabla 2: Número de conceptos nucleares.

Fuente: Elaboración propia.

Como podemos observar, el número de nodos nucleares disminuye en el grupo experimental con los alumnos que trabajaron los contenidos utilizando TIC. Podemos encontrar, en los


ISBN 978-84-945722-3-4

estudios de Casas (2002), Antunes (2011), Catarreira (2013) y Corcho (2016), la constatación de la existencia de un menor número de Conceptos Nucleares presentes en la estructura cognitiva tras un periodo de formación, no aumentando la complejidad de la red, es decir, van desapareciendo conceptos secundarios pero permanecen los que más peso tienen. Estos no son los más destacados en la estructura cognitiva, sino que son aquellos en torno a los cuales se forman las redes y resultan los más significativos para los alumnos. Ello nos indica una mejor comprensión de los conceptos trabajados en la intervención educativa, ya que conforme aumenta el dominio del concepto estudiado, las redes de los estudiantes se hacen más simples (Casas, 2002).

También hemos obtenido el índice que coherencia que varía entre -1 y 1. Un mayor índice de coherencia de las redes cognitivas, sugiere que los conceptos quedaron más asentados en la estructura cognitiva de estos estudiantes.

| Pretest | | Postest | |
|---|---|---|---|
| **Sujeito** | **Coerência** | **Sujeito** | **Coerência** |
| MG | -0,134 | MG | 0,027 |
| IG | 0,147 | IG | 0,359 |
| DG | 0,229 | DG | 0,124 |
| AC | 0,282 | AC | 0,371 |
| IS | 0,072 | IS | 0,404 |
| NZ | 0,125 | NZ | -0,033 |
| CD | -0,110 | CD | -0,221 |
| AD | -0,064 | AD | 0,271 |
| MC | -0,156 | MC | 0,167 |
| PC | -0,236 | PC | 0,357 |

Tabla 3: Índice de coherencia.

Fuente: Elaboración propia.

Vemos como el índice de coherencia aumenta en los alumnos que pertenecen al grupo experimental tras la intervención educativa.

**Conclusiones.**

A lo largo de nuestra investigación hemos observado como los alumnos presentan una gran motivación a la hora de utilizar las TIC. Hemos de tener en cuenta que hoy en día a su edad, ya manejan tecnologías como tablet, teléfonos, mandos a distancia y por lo tanto están acostumbrados a su utilización. Todas las actividades desarrolladas con la utilización de las


ISBN 978-84-945722-3-4

TIC tienen un carácter abierto, por lo que permiten al profesorado hacer un uso adaptado a las necesidades en cada momento del aula, frente a la rigidez de las actividades en papel.

También observamos, a través de la representación gráfica de las RAP, cuáles son los conceptos nucleares y los más significativos de los alumnos, y ver como se ha producido un cambio en su estructura cognitiva (reduciéndose el número de conceptos nucleares en nuestro grupo experimental) y un aumento en la coherencia de las RAP en aquellos alumnos que utilizaron las TIC (en concreto Geogebra y PDI) tras nuestra intervención educativa.

Los resultados muestran que esta teoría constituye una destacada herramienta didáctica para la organización de la práctica docente y un referente pedagógico importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

**Referencias bibliográficas**


Antúnez, A. (2010): *Análise do Domínio de Conceitos Trigonométricos: Estudo Exploratório com alunos do Ensino Básico ao Ensino Superior de Escolas de Beja.* Tesis doctoral. Universidad de Extremadura.

Arias, J. (2008). *Evaluación de la calidad de Cursos Virtuales - Indicadores de Calidad y construcción de un cuestionario de medida. Aplicación al ámbito de asignaturas de Ingeniería Telemática.* Tesis Doctoral. Universidad de Extremadura.

Bizarro, N., Luengo, R., Casas, L., & Carvalho, J.L. (2014). Tratamiento de Conceptos Fundamentales (Forma, Tamaño y Color) en alumnos con Discapacidad Intelectual a través de Redes Asociativas Pathfinder. En Actas 3º Congreso Ibero-Americano en Investigación Cualitativa. Badajoz, Universidad de Extremadura, Badajoz, p.252-257.

Bizarro, N. et al (2015). Aplicación de las Redes Asociativas Pathfinder al análisis de los conceptos forma, tamaño y color en alumnos con Discapacidad Intelectual. Revista Lusófona de Educação, v. 29.

Canals, M. A. (1997). La geometría en las primeras edades escolares, Suma 25, p. 33.

Casas, L. (2002). *El estudio de la estructura cognitiva de alumnos a través de Redes Asociativas Pathfinder. Aplicaciones y posibilidades en Geometría.* Tesis doctoral. Universidad de Extremadura. Badajoz.

Casas L. & Luengo, R. (2004). Representación del conocimiento y aprendizaje. Teoría de los Conceptos Nucleares. Revista Española de Pedagogía, 227, 59–84

Casas, L., y Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de "ángulo". Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 23(2), 201-216.

Casas, L. M., y Luengo, R. (2012) The study of the pupil's cognitive structure: the concept of angle. European Journal of Psychology of Education. DOI 10.1007/s10212-012-0119-4

Casas, L., et. al. (2012) Una experiencia de representación del conocimiento en Educación Infantil mediante el uso de Redes Asociativas Pathfinder. RED Revista de Educación a Distancia. Número 36. Monográfico Especial SIIE 2012

Colom, A. J., Bernabeu, J. L., Domínguez, E., & Sarramona, J. (2002). *Teorías e instituciones contemporáneas de la educación* (2ª Edición). Barcelona-España: Ariel.




ISBN 978-84-945722-3-4

Corcho, P. (2016) *Enseñanza de los Elementos Notables del Triángulo utilizando Objetos de Aprendizaje y LMS*. (Tesis Doctoral). Universidad de Extremadura.
Edo, M. y Artés, M. (2016). *Juego y aprendizaje matemático en educación infantil. Investigación en didáctica de las matemáticas*. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 5(1), 33-44.
Edo, Mercè (2016). Emergencia de la investigación en educación matemática infantil. Juego y matemáticas. En Berciano, Ainhoa; Fernández, Catalina; Fernández, Teresa; González, José Luis;Hernández, Pedro; Jiménez, Antonio; Macías, Juan Antonio; Ruiz, Francisco José; Sánchez, María Teresa(Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (pp. 53-66). Malaga, España: Universidad de Málaga.
Edo, M. (2000). Mundo Matemático. Formas en el Espacio. *Educación Infantil. Orientación y Recursos (0-6 años)*. Pp. 301-409. Barcelona: Praxis.
Ginsburg, H. P. (2002). *Little children, big mathematics: Doing, learning and teaching in the preschool.* In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), Proceedings of the Twenty sixth Psychology of Mathematics Education, PME26, (Vol. 1, pp. 1-3 – 1-14). Norwich (United Kingdom).
Godinho, V. (2007). Implementación del software GOLUCA y aplicación al cambio de redes conceptuales. Diploma de Estudios Avanzados inédito. Universidad de Extremadura.
Piaget, J. (1971). *Los estadios del desarrollo intelectual del niño y el adolescente.* En P.A. Osterrieth (Ed.), los estadios en la psicología del niño. Buenos Aires: Nueva Visión.
Schvaneveldt, R.W.(Ed.).(1.989). *Pathfinder Associative Networks*. En Studies in Knowledge Organization. Norwood, NJ: Ablex
Verissimo Catarreira, S. (2013). *La introducción de las ideas de la Teoría de Conceptos Nucleares en la enseñanza de la Geometría y sus implicaciones.* Tesis Doctoral. Universidad de Extremadura.
Vicente, S. M. (2010). *Visión del Docente sobre la Utilización de los Blogs en el Aula*. Trabajo Final de Máster. Universidad de Extremadura.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.118

# COMPETENCIA MATEMÁTICA DEL ALUMNADO DE GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: UN ANÁLISIS DE NECESIDADES

Jesús Montejo-Gámez – Elvira Fernández de Ahumada – Carmen León-Mantero – Natividad Adamuz-Povedano – Noelia Jiménez-Fanjul
jmontejo@uco.es – elvira@uco.es – cmleon@uco.es
nadamuz@uco.es – noelia.jimenez@uco.es,
Universidad de Córdoba, España

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Competencia matemática PISA; maestros en formación inicial; necesidades formativas;

**Resumen**

*Este trabajo explora las necesidades formativas en Matemáticas del alumnado de nuevo ingreso en el grado de Educación Primaria. Estos estudiantes, de procedencia heterogénea, suelen presentar un rendimiento irregular en Matemáticas, acompañado de baja autoestima hacia la materia y de una concepción meramente instrumental de la misma. Presentamos un análisis exploratorio del grado de competencia matemática que demuestran nuestros alumnos. Partiendo de la concepción de competencia matemática de PISA (OECD, 2013a), se han seleccionado diferentes ítems liberados que cubren los distintos contenidos del currículo de Educación Primaria, así como los procesos y capacidades PISA. Las respuestas a esos ítems que proporciona el alumnado de primer año de grado de Educación Primaria permiten trazar un perfil de sus necesidades formativas. Dicho perfil nos proporciona la información necesaria para afrontar la formación matemática de los estudiantes noveles de magisterio desde su propio conocimiento.*

## Introducción y motivación

Las exigencias de la sociedad del s. XXI hacen cada vez más necesario el desarrollo de destrezas matemáticas que permitan al ciudadano desenvolverse de forma autónoma en la experiencia cotidiana. El impacto social del desempeño de los profesores de Matemáticas es creciente y su formación, por tanto, debe ser un objetivo prioritario a analizar. En el grado de Educación Primaria de la Universidad de Córdoba existe solo una asignatura orientada a desarrollar la formación puramente matemática de los futuros maestros de Matemáticas. Este contexto formativo originó la investigación que se presenta en esta comunicación: por una



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

parte, la formación matemática adecuada de los estudiantes de grado requiere mayor inversión de tiempo de la que se dispone, lo que obliga a priorizar ciertos contenidos; por otra, se percibe en el alumnado un conocimiento matemático puramente instrumental. Respecto a cuestiones actitudinales, los estudiantes consideran las matemáticas útiles para el ejercicio de su futura labor docente, pero la materia les genera ansiedad y poco agrado (Madrid, León-Mantero y Maz-Machado, 2015). Similares resultados se han obtenido en otras investigaciones a nivel nacional e internacional (Gómez-Chacón, 2002; Hannula et al., 2016). Por otra parte, la procedencia desde la que los alumnos acceden al grado de Educación Primaria es diversa, de manera que no está claro qué habilidades matemáticas se pueden asumir que poseen los futuros docentes como adquiridas de antemano. Todos estos motivos conducen a cuestionar qué habilidades matemáticas se deben trabajar en la asignatura de primer curso y motivaron la celebración de una evaluación inicial para explorar las destrezas del alumnado y cuyos detalles se exponen a continuación.

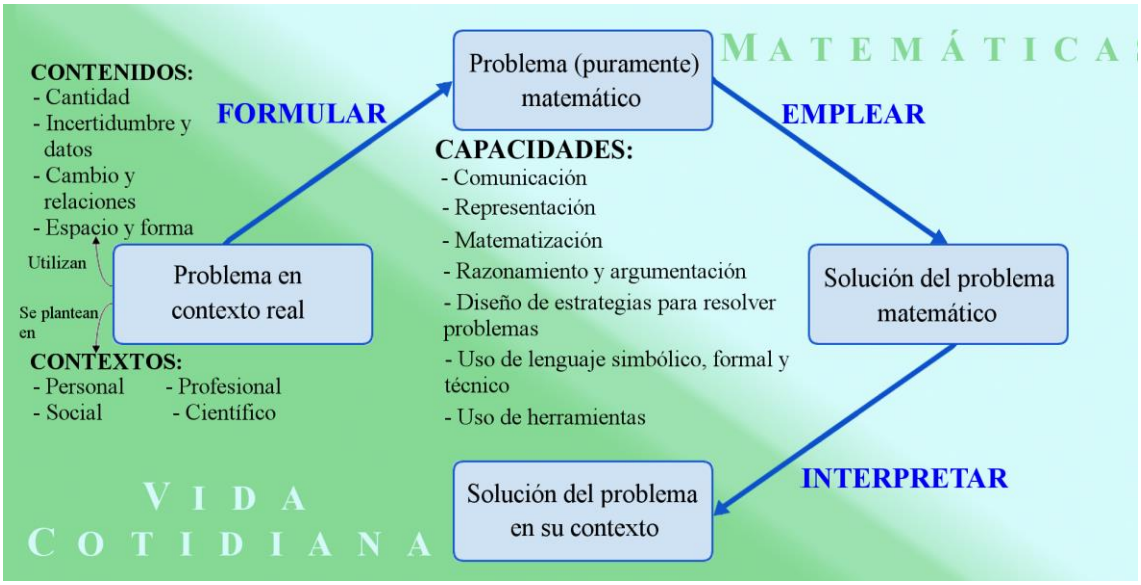
**Marco conceptual**

El diseño de la evaluación inicial se planteó en términos de la competencia matemática PISA 2012 (OECD, 2013a), debido a (i) la ya mencionada diversidad del alumnado objeto de estudio, que no permite exigir *a priori* ningún nivel en Matemáticas más allá del correspondiente a la enseñanza obligatoria y que es precisamente el nivel que evalúan las pruebas de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OECD, de sus siglas en inglés *Organisation for Economic Co-operation and Development*); (ii) se asume que el aprendizaje matemático debe partir de la realidad y ser útil fuera del ambiente matemático, lo que conduce a trabajar a partir de problemas contextualizados. Además, el enfoque PISA 2012 proporciona un formato de trabajo que deben conocer los maestros de Matemáticas, ya que se utiliza para evaluaciones de alcance internacional y existen ítems liberados que permiten plantear la investigación desde el mismo enfoque de dichas evaluaciones.

El concepto de competencia matemática PISA 2012 constituye una evolución del modelo adoptado nueve años atrás para la evaluación de 2003 (OECD, 2003), que a su vez fue concebido a partir del modelo de Niss (2003). Se define como "la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las Matemáticas en distintos contextos" (OECD, 2013a;


ISBN 978-84-945722-3-4

p. 9). Esta concepción, basada en la aplicación de las Matemáticas para resolver problemas de la vida cotidiana, se articula en torno a tres elementos básicos: los procesos, los contenidos




y los contextos (ilustración 1). Los procesos matemáticos describen las acciones que deben completar los individuos competentes cuando resuelven un problema matemático presentado en un contexto real. PISA 2012 identifica tres procesos: (i) formulación, que consiste en la actividad de identificar, estructurar y definir elementos matemáticos para abordar un problema; (ii) empleo, que consiste en la ejecución de procedimientos, cálculos o algoritmos matemáticos; (iii) interpretación, que implica la valoración de la solución matemática dentro del contexto en el que se presentó el problema. El desarrollo adecuado de estos procesos está basado en siete capacidades que subyacen a la ejecución de los procesos y son transversales a los conceptos usuales en Matemáticas. Estas capacidades pueden consultarse en la ilustración 1 y con mayor profundidad en OECD (2013a).

Ilustración 1: Competencia matemática PISA 2012

Los contenidos son los conocimientos que debe poseer el individuo matemáticamente competente. El marco PISA 2012 establece cuatro categorías de contenidos: cambio y relaciones, espacio y forma, cantidad e incertidumbre y datos. Por último, los contextos son las situaciones del mundo real en las que se plantean los problemas matemáticos, y en general determinan las representaciones y estrategias necesarias para afrontar los problemas. Se distinguen los contextos personal, profesional, social y científico.


ISBN 978-84-945722-3-4

En síntesis, el individuo matemáticamente competente ha desarrollado las capacidades para identificar contenidos matemáticos dentro de problemas presentados en contextos y ejecutar los procesos para resolver estos problemas.

Como hemos descrito, en esta comunicación se ha adoptado como marco de referencia el propuesto en OECD (2013). Sin embargo, el fin de la investigación obliga a considerar los contenidos que tendrán que trabajar los maestros en formación que se están estudiando. Por esta razón se han adoptado los bloques curriculares de Educación Primaria en Andalucía (números, geometría, medida y estadística y probabilidad) como la referencia para el análisis en relación a los contenidos.

Existen algunas investigaciones empíricas que estudian la competencia matemática de maestros en formación inicial con diferentes finalidades. Sáenz-Castro (2007) efectuó la evaluación desde el enfoque PISA 2003 para comparar con los resultados oficiales y trazar un perfil de rendimiento matemático y dilucidar la relación entre el tipo de bachillerato cursado y dicho rendimiento. Escolano-Vizcarra, Gairín-Sallén, Jiménez-Gestal, Murillo-Ramón y Roncal-Gómez, (2012), por su parte, comparan la competencia matemática de maestros en formación inicial de varias universidades españolas con sus creencias acerca de las matemáticas y su desempeño como profesores de Matemáticas.

**Objetivos**

Evaluar la competencia matemática del alumnado novel del grado de Educación Primaria desde el dominio de los contenidos curriculares y las destrezas del marco PISA 2012 para construir su formación matemática sobre sus necesidades. Específicamente:

*OE1:* Estudiar el nivel de competencia matemática del alumnado en términos de los bloques de contenidos del currículo de Educación Primaria y de los procesos y capacidades PISA y contrastar si la modalidad de acceso a los estudios de grado influye en este nivel.

*OE2:* Analizar pormenorizadamente las soluciones a problemas contextualizados dadas por el alumnado para comprender los niveles obtenidos.

*OE3:* Elaborar el perfil de conocimiento matemático del alumnado y determinar sus necesidades formativas en virtud del perfil definido.

**Metodología**


ISBN 978-84-945722-3-4

*Población, muestra e instrumento.* Los alumnos del primer curso del grado de la Universidad de Córdoba (curso 2016/2017). La muestra para el estudio, generada por muestreo accidental, está formada por 227 de los 283 matriculados en el Primer Curso, formados por 88 hombres y 139 mujeres y de diferentes procedencias: 107 alumnos de bachillerato de Ciencias Sociales, 39 de humanidades, 43 del técnico o del biosanitario, 32 de ciclos formativos y 6 que accedieron por otras vías. Para la recogida de información se elaboró un instrumento formado por los siguientes ítems liberados de pruebas PISA (OECD, 2013b): P1 (p. 298), P2 (p. 175), P3 (p. 320-322) y P4 (p. 42) y P5 (p. 178). En conjunto estos ítems cubren todos los bloques de contenidos de Educación Primaria, así como los procesos y las capacidades PISA 2012.

*Procedimiento.* Los alumnos participantes en el estudio resolvieron los ítems que conforman nuestro instrumento individualmente durante 1 h. Para analizar las respuestas obtenidas se combinaron los análisis cuantitativo y cualitativo. El análisis cuantitativo parte de un conjunto de indicadores que se consensuaron entre los investigadores para evidenciar el dominio de contenidos, procesos y capacidades, de manera que cada problema tiene asociados varios indicadores describiendo los procedimientos elementales necesarios para resolver el problema. La ejecución satisfactoria de cada uno de estos indicadores (es decir, del procedimiento asociado) evidencia el dominio de ciertos contenidos, capacidades y procesos PISA según se muestra en la tabla del anexo I. A cada indicador se le asignó un valor entre 0 y 1 para medir los niveles de desempeño del participante respecto de los diferentes procedimientos elementales asociado, que se valoraron a partir de la rúbrica del anexo II y se aplicó de manera que las respuestas en blanco se excluyeron del análisis. Una vez valorados todos los indicadores, se definieron para cada estudiante catorce variables correspondientes a los cuatro bloques de contenidos, los tres procesos y las siete capacidades, de forma que el valor de cada variable es el promedio del valor de todos los indicadores que están relacionados con ella según las filas de la tabla en el anexo I. El análisis descriptivo de estas variables nos proporciona el nivel de competencia matemática del alumnado. La relación entre este nivel y la modalidad de acceso a los estudios de grado se contrastó a través de pruebas de dependencia apropiadas al 95 % de confianza. Los gráficos obtenidos y los análisis estadísticos se realizaron utilizando la Toolbox *Stats* de MatLab. Dado el carácter formativo de la investigación, el análisis cualitativo se centró en profundizar en los resultados


ISBN 978-84-945722-3-4

de nivel obtenidos mediante el análisis cuantitativo. Concretamente, para alcanzar el segundo objetivo específico se describieron e interpretaron las respuestas a los indicadores involucrados en las variables que mostraron nivel más bajo. Finalmente, el logro del último objetivo específico se afrontó a partir de la síntesis de la información obtenida y las posibles acciones que pueden tomar los docentes para cubrir las carencias observadas.

**Resultados**

*Nivel de competencia e influencia del tipo de acceso.* En cuanto al nivel de competencia matemática del alumnado, puede verse en la ilustración 2 el análisis descriptivo de las variables tomadas. Para contrastar la influencia de la modalidad de acceso en los niveles descritos, la corrección de Lilliefors al test de Kolmogorov-Smirnov condujo a rechazar la normalidad de todas las variables estudiadas. La prueba de Kruskal-Wallis aplicada a cada una de dichas variables rechazó en casi todas ellas la hipótesis nula de independencia respecto a la modalidad de acceso a los estudios de grado. Las correcciones de Dunn-Sidak aplicadas para las comparaciones entre los diferentes subgrupos de participantes mostraron que: (i) el nivel de los estudiantes de bachilleratos científicos en geometría y medida fue significativamente diferente (mayor media) a los estudiantes de los otros bachilleratos y ciclos formativos. En números solo hubo diferencias entre el bachillerato científico y los alumnos que no hicieron bachillerato, mientras que en estadística no se encontraron diferencias significativas entre grupos; (ii) solo se encontraron diferencias significativas entre los alumnos de bachilleratos científicos y los de humanidades y ciclos formativos en el proceso de formulación; (iii) en cuanto a las capacidades, existieron diferencias significativas entre los bachilleratos científicos y el de ciencias sociales en estrategias de resolución de problemas y entre el bachillerato científico y el de humanidades en el uso de herramientas. En el resto de capacidades se obtuvo en general mayor rendimiento de los participantes de bachilleratos científicos, que fue significativo solo en pocos casos.


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

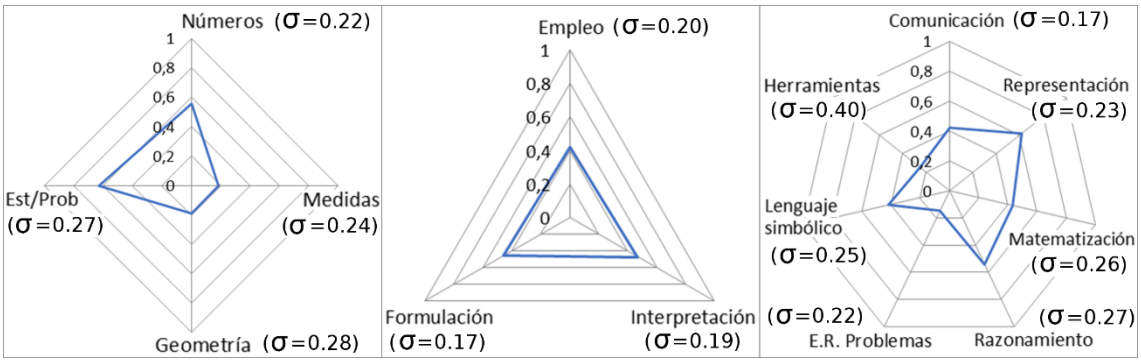



Ilustración 2: Niveles medios y desviaciones típicas de las variables asociadas a los bloques de contenido curriculares y los procesos y capacidades PISA 2012

*Análisis de las soluciones a los problemas.* Para comprender los niveles obtenidos, la tabla del anexo I lleva a analizar con mayor detalle las respuestas a los problemas 2, 4 y 5. En el problema 5 se observó que 161 participantes dejaron el problema en blanco. Entre los demás se encontraron estudiantes que no utilizaron adecuadamente la escala, otros que hicieron cambios de unidades utilizando reglas de tres incorrectas o utilizando el factor de cambio cm – Km para pasar de $cm^2$ a $Km^2$. También se constató el cálculo de áreas utilizando fórmulas que no pueden conducir a un área, dando áreas en unidades de longitud o estimando directamente áreas a través de longitudes. En el problema 4, 86 alumnos evitaron contestar las preguntas que implicaban cambio de unidades y 37 dejaron el problema en blanco, siendo solo 23 los participantes que hicieron adecuadamente el cambio de unidad "pasos/minuto" a "Km/h". Además, se observaron casos en los que los alumnos sabían la respuesta a una pregunta cerrada pero no explicaron cómo se obtuvo esa respuesta. En el problema 2, se observan dos actuaciones destacables: la primera es que se encontraron respuestas a la pregunta planteada que no se apoyan en cálculos o los usan como accesorios; la segunda es que 100 estudiantes interpretan que la proporción adecuada para saber qué pizza es más rentable se basa en la proporción diámetro/coste, en lugar de área/coste. Respecto a los problemas 1 y 3, relacionados con las variables que obtuvieron mayor nivel de desempeño, se constató que los alumnos resolvieron mayoritariamente los cálculos relacionados con medias, porcentajes y probabilidad, pero en ocasiones mostraron interpretaciones poco precisas de esos conceptos.

*Perfil del alumnado y necesidades formativas.* Los resultados obtenidos en las dos subsecciones anteriores muestran, en contraste a los resultados de Sáenz-Castro (2007), un



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

alumnado con mayor dominio de la estadística y los números que de la medida y la geometría. Se observa un rendimiento homogéneo en cuanto a los procesos e irregular en cuanto a las capacidades PISA 2012, destacando en particular el bajo nivel de desempeño en la capacidad de estrategias de resolución de problemas y en el uso de herramientas. Los alumnos de bachilleratos científicos muestran en general mayor nivel que sus compañeros, lo que está en la misma línea de los resultados obtenidos por Sáenz-Castro (2007) y esta diferencia es significativa en las destrezas donde el rendimiento general es más bajo.

El análisis pormenorizado de la información recogida deja de manifiesto algunas necesidades formativas. En cuanto a los contenidos, se identifica la importancia de abordar la percepción de magnitud y los procedimientos asociados a la medición (incluyendo el uso de herramientas de medición), prestando atención especial al cambio de unidades utilizando factores de conversión. Se observa también que algunos participantes poseen concepciones poco sólidas del concepto de área, por lo que se hace necesario trabajar el área desde su interpretación como medida de la superficie, lejos del uso de fórmulas. También resultaría formativo trabajar conceptos numéricos y estadísticos como la media, la probabilidad de un suceso o los porcentajes desde los fenómenos del mundo real que representan. En cuanto a las capacidades, los estudiantes muestran niveles irregulares en relación a las capacidades. Además, se observan dificultades para argumentar ideas matemáticas apoyadas en cálculos, carencias a la hora de buscar soluciones a problemas y, en general, menor rendimiento conforme más abierta es la pregunta que plantea el problema a resolver. Se plantea de esta manera la necesidad de trabajar específicamente la resolución de problemas contextualizados, lo que puede contribuir a un nivel de ejecución de los procesos.

## Conclusiones

Se han explorado las necesidades formativas del alumnado de primer curso del Grado en Educación Primaria a partir de sus niveles de competencia matemática PISA 2012. Los resultados han revelado variabilidad excesiva y cierta dependencia de los ítems concretos evaluados que sugiere considerar diferentes niveles de dificultad para evaluar cada destreza o, como señalan Escolano-Vizcarra et al. (2012), la necesidad de validar un instrumento para calibrar la competencia matemática. Una futura línea de investigación puede ir enfocada en esta dirección. Los resultados de la investigación, por otra parte, han arrojado mucha más luz


ISBN 978-84-945722-3-4

sobre el nivel de desempeño de contenidos que de procesos y capacidades. Esta situación sugiere el análisis multivariante de las variables medidas con el objeto de analizar la consistencia estadística del constructo 'competencia matemática PISA 2012', su potencial para medir el conocimiento matemático de los individuos y analizar la conveniencia de trabajar en el aula procesos y capacidades de forma específica.

**Referencias bibliográficas**


Escolano-Vizcarra, R., Gairín-Sallén, J. M., Jiménez-Gestal, C., Murillo-Ramón, J. y Roncal-Gómez, L. (2012). Perfil emocional y competencias matemáticas de los estudiantes del grado de educación primaria. *Contextos Educativos, 15*, 107–133.

Gómez-Chacón, I. M. (2002). Cuestiones afectivas en la enseñanza de las matemáticas: una perspectiva para el profesor. En L. C. Contreras y L. J. Blanco (Eds.), *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente* (pp. 23-58). Cáceres: Universidad de Extremadura.

Hannula, M. S., Di Martino, P., Pantziara, M., Zhang, Q., Morselli, F., Heyd-Metzuyanim, E., Jansen, A. (2016). Attitudes, Beliefs, Motivation, and Identity in Mathematics Education. In *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education* (pp. 1-35). Springer International Publishing.

Madrid, M. J., León-Mantero, C., y Maz-Machado, A. (2015). Assessment of the Attitudes towards Mathematics of the Students for Teacher of Primary Education. *Open Access Library Journal, 2*. doi:10.4236/oalib.1101936.

Niss, M. (2003), Mathematical Competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. En A. Gagatsis y S. Papastavridis (eds.), *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 115-124). Atenas: Hellenic Mathematical Society.

OECD (2003). *Marcos Teóricos de PISA 2003*. Madrid: MEC.

OECD (2013a). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012 Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid: MECD.

OECD. (2013b). *Estímulos PISA de Matemáticas Liberados*. Madrid: MECD.

Sáenz-Castro, C. (2007). La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros. *Investigación Didáctica, 25*(3), 355–366.


**Anexo I: indicadores y mapa de contenidos – procesos – capacidades**

*Indicadores*

*Problema 1*.

I1: Utiliza correctamente los datos útiles que proporciona la gráfica

I2: Aplica de alguna manera la regla de Laplace para calcular la probabilidad

I13: Contesta a la pregunta en el contexto del problema, dando una respuesta consistente con los cálculos.

I14: Calcula correctamente los porcentajes.



ISBN 978-84-945722-3-4

I3: Calcula el porcentaje partiendo de la fracción

*Problema 2.*

I4: Representa gráficamente la situación de manera que le ayuda a ver la relación con el área.

I5: Establece dos razones a ser comparadas en las que intervienen el área y el coste: A1/C1 y A2/C2 (o sus inversas) o bien A1/A2 y C1/C2 (o sus inversas).

I6: Calcula el área correctamente (y no la longitud de la circunferencia o diámetro).

I7: Contesta correctamente a la pregunta en el contexto del problema.

I8: En la explicación, interpreta el cociente (razón) entre área y coste (o su inversa) o área/área y coste/coste en el contexto del problema.

*Problema 3.*

I9: Responde "No" en 1a)

I10: Responde "No" en 1b)

I11: Responde "Sí" en 1c)

I12: Relaciona "reparar" con el cálculo de porcentajes de aparatos defectuosos.

*Problema 4.*

I15: En 1, identifica n como el medidor de la velocidad y la necesidad de despejarla.

I16: En 2 despeja correctamente la variable n.

I17: En 3, sustituye P por 0.80 e indica que el resultado obtenido está en pasos por minuto.

I18: En 3, una vez sustituido, vuelve a multiplicar por 0.80 e indica que el resultado está en metros por minuto.

I19: En 3, cambia de unidades correctamente.

*Problema 5.*

I20: Aplica correctamente la escala (expresa datos necesarios en unidades reales).

I21: Descompone el mapa en figuras planas de área calculable

I22: Calcula correctamente las áreas que muestra el dibujo hecho y opera con ellas si fuera el caso.

I23: En la explicación relaciona el área de las figuras con el área total.

I24: Mide correctamente los datos del dibujo necesarios.

I25: Contesta a la pregunta en el contexto del problema, expresando correctamente el resultado obtenido (magnitud y uds.)

*Mapa de contenidos – procesos – capacidades (definido mediante triangulación a partir de los descriptores de OECD, 2013a, p. 18)*

| | **Problema 1** | **Problema 2** | **Problema 3** | **Problema 4** | **Problema 5** |
|---|---|---|---|---|---|
| *Números* | I3 | I5 | I9, I14 | I16, I17, I18 | I20, I25 |
| *Medidas* | | | | I18, I19 | I21, I23, I24, I25 |
| *Geometría* | | I6 | | | I20, I21, I22, I23 |
| *Estadística y probabilidad* | I1, I2 | | I10, I11 | | |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Formulación | I1 | I4, I5, I6 | I9, I10, I11 | I15, I16 | I20, I21, I24 |
| Empleo | I2 | I5, I6, I8 | I12, I13, I14 | I15, I17, I18, I19 | I22, I23, I24 |
| Interpretación | I3 | I7, I8 | I9, I10, I11, I13 | I18 | I25 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Comunicación | I1 | I5, I7 | I9, I10, I11, I13 | I18 | I20, I23, I24 |
| Representación | I3 | I4 | I9, I10, I11 | | |
| Matematización | I2 | I6 | | I15, I16 | I21, I25 |
| Razonamiento y argumentación | | I8 | I12, I13 | I15 | |
| E. R. Problemas | | I5, I6 | | | I21, I22, I23 |
| Lenguaje simbólico | I2 | I5, I6, I8 | I14 | I17, I18, I19 | I22, I25 |
| Herramientas | | | | | I24 |

## Anexo II: Rúbrica empleada para construir las variables para el análisis cualitativo

| | | **Incorrecto** | **Mejorable (1/3)** | **Aceptable (2/3)** | **Correcto (1)** |
|---|---|---|---|---|---|
| **P 1** | I1 | No identifica el nº de caramelos rojos y no obtiene 30 como el número de caramelos total | Identifica 6 como … y no obtiene 30 como ... o no identifica 6 como …. y sí obtiene 30 como ... | Identifica 6 como …. y calcula la suma de los elementos de forma errónea. | Identifica el nº de caramelos rojos.<br>y obtiene 30 como el número de caramelos total |
| | I2 | No divide o calcula 30/6 | | No expresa la relación, aunque se denota que la conoce o utiliza | Da como resultado 6/30 en algún sistema de representación |
| | I3 | Cualquier resultado que no sea el correcto | | Deja el resultado correcto en fracción | Obtiene 20% o resultado consistente con los datos recogidos. |
| **P 2** | I4 | El modelo gráfico representado no tiene nada que ver con el problema o no es ayuda a ver la relación con el área | El modelo gráfico aportado (círculos) no muestra de manera expresa los diámetros (no están marcados), por lo que no ayuda a ver la relación entre áreas. | | El modelo gráfico aportado (círculos) indica expresamente los diámetros (longitud) en ellos, apreciándose variación en el tamaño (área) |
| | I5 | Establece relaciones incorrectas. | Establece relaciones intuitivas en las que intervienen área y coste pero no llega a expresarlas simbólicamente. | Establece dos razones en las que intervienen área y coste. | Establece dos razones en las que intervienen área y coste [y utiliza las unidades adecuadas]. |
| | I6 | Otro caso (salvo su ausencia) | Pone de manifiesto la necesidad de calcular áreas pero no las calcula o lo hace incorrectamente (ej. | Usa la fórmula (o alternativamente d^2) correctamente pero no expresa | Usa la fórmula correctamente (o alternativamente d^2) y expresa |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Logitud de circunferencia o diámetro). | la solución en unidades adecuadas. | la solución en las unidades adecuadas. |
| | I7 | Contesta directamente -sin hacer nada- | Marca el dato que da la solución, pero no responde en el contexto del problema. | | Contesta en el contexto del problema de forma coherente con su solución |
| | I8 | Otra cosa | Habla de proporciones intuitivamente (con o sin uds.) y no interpreta en el ctxto del problema. | Usa la proporción involucrando razones con Área pizza y dinero (o su inverso) o utiliza unidades en su explicación. | Usa la proporción involucrando razones con Área pizza y dinero (o su inverso) y utiliza unidades en su explicación. |
| **P 3** | I9 | Marca "sí" en 1ª) o no responde | | | Marca "no" en 1a) |
| | I10 | Marca "sí" en 1b) o no responde | | | Marca "no" en 1b) |
| | I11 | Marca "no" en 1c) o no responde | | | Marca "sí" en 1c) |
| | I12 | No relaciona | | | Sí relaciona |
| | I13 | No contesta | Marca el dato que da la solución, pero no responde en el contexto del problema. | | Contesta en el contexto del problema de forma coherente con su solución |
| | I14 | No calcula o da resultados incorrectos | | | Obtiene 100 vídeos y 180 aparatos de audio. |
| **P4** | I15 | No identifica n como variable que mide la velocidad. | Identifica n como variable que mide la velocidad pero no indica que hay que despejar (ni lo hace) | Identifica n como variable que mide la velocidad , indica que hay que despejarla, pero no lo hace | Identifica n como variable que mide la velocidad, indica que hay que despejarla y lo hace. |
| | I16 | Marca a) o b), o no contesta | Marca d) | | Marca c) |
| | I17 | Identifica que en el caso de Bernardo n es 0.80 o cualquier resultado que no sea el correcto | Identifica que en el caso de Bernardo P es 0.80 pero obtiene n incorrectamente. | Identifica que en el caso de Bernardo P es 0.80 y obtiene n=112 pero no identifica que 112 son pasos por minuto | Identifica que en el caso de Bernardo P es 0.80 y obtiene 112 usando la unidad pasos por minuto. |
| | I18 | Cualquier otro caso | Multiplica n de nuevo por 0.80 pero obtiene cualquier resultado incoherente con sus datos | Multiplica n de nuevo por 0.80 pero no expresa el resultado como metros por minuto. | Multiplica n de nuevo por 0.80 y obtiene un resultado coherente con sus datos, expresándolo en m/min |
| | I19 | Otra respuesta | Obtiene un resultado incorrecto con la escalera o indica sin ejecutar los cálculos. | No identifica factor de conversión pero obtiene el resultado correcto con la escalera. | Identifica el factor de conversión adecuado y obtiene resultado coherente con sus datos. |
| **P 5** | I20 | Toma el total de la escala gráfica (2,5 cm) o la mínima unidad de la escala gráfica (5 mm) como 1 cm, hace el cambio $cm^2$ $Km^2$ multiplicando por 1000 o 100 000 u otra respuesta. | Se equivoca en los cálculos (a pesar de que plantea correctamente el cambio de escala) y no expresa la medida en las unidades adecuadas | Comete solo una de las siguientes incorrecciones:<br>* Plantea correctamente el cambio de escala y se equivoca en los cálculos.<br>* No expresa la medida en las unidades | Escribe los datos del problema en Km (coherentemente con las medidas tomadas) o hace el cambio $cm^2$ – $Km^2$ multiplicando por 160 000 o con proporcionalidad adecuada. |
| | I21 | No da evidencia de que descompone u otro caso | Utiliza una única figura que rodea todo el dibujo para aproximar el área y no dibuja figura que describa su aproximación o da una aproximación de bajísima precisión. | Solo utiliza una figura que rodea todo el dibujo o varias figuras sin evidencia de que intenta aproximar el área de la isla o no dibuja figura que describa su aproximación. | Utiliza figuras dejando evidencia de que intenta aproximar el área de la isla y dibuja las figuras |


ISBN 978-84-945722-3-4

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | I22 | No calcula áreas, o deja dos o más cálculos sin hacer o plantea el cálculo de algún área de forma incorrecta (con error de concepto). | Plantea bien el cálculo de las áreas (sin error de concepto) pero da algún resultado erróneo y no expresa la medida en las unidades adecuadas | Plantea bien el cálculo de las áreas (fórmula) pero se equivoca (u omite) en algún cálculo, o no expresa los resultados en las unidades adecuadas | Calcula todas las áreas planteadas obteniendo un resultado consistente con sus mediciones y expresa los resultados en las unidades adecuadas |
| | I23 | Otro caso (no explica o no habla de áreas) | Habla de áreas sin relacionar claramente la de la isla con la de otras figuras o da una fórmula o esquema que relaciona correctamente las áreas pero sin explicar. | Dice explícita pero incorrectamente, que el área de la isla es resultado de un cálculo con diferentes áreas. | Dice explícita y correctamente que el área de la isla es el resultado la suma (o resta) de diferentes áreas. |
| | I24 | No da evidencia de que mide u otro caso | Utiliza resultados de mediciones con 5 mm o más de error o comete errores de entre 2 y 5 mm evidenciando que desconoce las unidades | Utiliza datos de la ilustración con un error menor de 2mm pero deja evidencia de que desconoce las unidades. Comete errores de entre 2 y 5 mm sin dejar evidencia de que desconoce las unidades. | Utiliza datos de la ilustración con un error menor de 2mm y no deja evidencia de que desconoce las unidades. |
| | I25 | Otra respuesta | Marca el dato que da la solución (usando las unidades correctas) pero no responde en el contexto del problema. | Contesta en el contexto del problema de forma coherente con su solución pero sin usar las unidades adecuadas. | Contesta en el contexto del problema de forma coherente con su solución y usando las unidades adecuadas. |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.119

# USO DE TRILHOS MATEMÁTICOS E TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NA FORMAÇÃO CONTÍNUA DE DOCENTES DA EDUCAÇÃO INCLUSIVA

Souza, Márcia E. - Van Lammeren, S. - Barroqueiro, Carlos H. – Schimiguel, J. – Amaral, L. H.
marciaelisabeth@hotmail.com - slavisca.lamounier@gmail.com - carbarroqueiro@gmail.com – schimiguel@gmail.com – luiz.amaral@cruzeirodosul.edu.br
Escola Superior de Educação Paula Frassinetti e Portugal– Universidade Católica Portuguesa e Portugal - Instituto Federal de São Paulo e Brasil – Universidade Cruzeiro do Sul e Brasil - Universidade Cruzeiro do Sul e Brasil

**Modalidade**: CB (Breve Comunicação)

**Nível educativo**: Formação de Professores

**Núcleo Temático**: Ensino e aprendizagem da Matemática nas diversas formas e níveis de educação

**Palavras-chave**: Formação Contínua de Professores de Educação Inclusiva. Trilhos Matemáticos. Tecnologias de Informação e Comunicação. Necessidades Educativas Especiais.

**Resumo**: *A Organização das Nações Unidas estima que 15% da população mundial tem alguma deficiência. Em termos de Brasil, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística diz, no censo 2010, que 45 milhões de pessoas têm alguma deficiência cognitiva ou motora, sendo 300 mil de Trissomia 21, tendo uma prevalência de 1 caso para cada 600 nascimentos aproximadamente, e 1.616 casos confirmados de Microcefalia e 3.580 em investigação, Ministério da Saúde - 18/06/2016. Em 2012, o censo escolar registrou 820,4 mil matrículas de alunos com deficiência motora e/ou cognitiva e constatou que 76% dos alunos encontravam-se em escola regular, e, em 2010, 68.117 professores receberam formação para lecionar em Educação Inclusiva, Ministério de Educação. Esta investigação objetiva-se utilizar os trilhos matemáticos com suporte de tecnologia para melhorar a formação contínua dos docentes que trabalham na Educação Inclusiva. A metodologia da pesquisa baseia-se em três etapas: primeira, uma oficina com docentes de Educação Inclusiva e Regulares em trabalho colaborativo e interativo para elaboração de trilhos matemáticos e tecnologia de apoio; em seguida, averiguar os trilhos em espaços não-formais e o desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem, e, por último, avaliar através de questionários abertos e fechados a oficina. Este trabalho encontra-se no início.*

## Introdução

Esta pesquisa aparece por falta de estratégias de aprendizagem que trabalhem espaços não formais para se aprender a aprender Matemática com suporte de Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) para alunos com Necessidades Especiais Educativas (NEE). Não há na literatura especializada investigações específicas deste tema.


ISBN 978-84-945722-3-4

A importância da pesquisa deve-se que a Organização das Nações Unidas (ONU) estima que 15% da população mundial tem alguma deficiência. Em termos de Brasil, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística diz, no censo 2010, que 45 milhões de pessoas têm alguma deficiência cognitiva ou motora, sendo 300 mil de Trissomia 21 (Síndrome de Down), tendo uma prevalência de 1 caso para cada 600 nascimentos aproximadamente, e 1.616 casos confirmados de Microcefalia e 3.580 em investigação, Ministério da Saúde - 18/06/2016. Em 2012, o censo escolar brasileiro registrou 820,4 mil matrículas de alunos com deficiência motora e/ou cognitiva e constatou que 76% dos alunos encontravam-se em escola regular (Educação Inclusiva), e, em 2010, 68.117 professores receberam formação para lecionar em Educação Inclusiva, Ministério de Educação. Antes de mais nada, precisa-se ter claramente o conceito de Educação Inclusiva (EI). Rodrigues, em 2007 p.35, apresenta o seguinte conceito:

> *um modelo educacional que promove a educação conjunta de todos os alunos, independentemente das suas capacidades ou estatuto socioeconómico. A EI tem por objetivo* ***alterar as práticas tradicionais****,* ***removendo barreiras à aprendizagem e valorizando as singularidades dos alunos****.*

Ao se analisar o conceito de EI apresentado por Rodrigues, principalmente, em <<alterar práticas tradicionais e remover barreiras à aprendizagem>>, percebe-se que esta investigação torna-se viável e tem importância significativa como uma estratégia de aprendizagem inovadora pedagogicamente. A inovação pedagógica está centrada em trabalhar-se em espaços não formais, Trilhos Matemáticos ou Trilhos Multidisciplinares, com suporte das TICs específicas para EI, alunos nativos digitais.

Esta investigação objetiva-se utilizar os trilhos matemáticos com suporte das TICs para melhorar a formação contínua dos docentes que trabalham na EI para que os alunos tenham uma aprendizagem ativa, significativa (Ausubel, 1982) e funcional. Para se ter uma aprendizagem de qualidade em salas de aula de EI (naturalmente heterogêneas) há necessidade de um ambiente de trabalho em que os alunos participem de forma cooperativa e autônoma (Rodrigues, 2007 e Freire, 2015), usem recursos de aprendizagem como as TICs de forma interativa e colaborativa, tenham assistência tanto do professor "regular" como


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

"NEE" e usufruam de espaços formais em formato de aprendizagem ativa e de espaços não formais, Trilhos Matemáticos ou Multidisciplinares.

**Fundamentação Teórica**

É difícil encontrar-se na literatura especializada investigações sobre Trilhos Matemáticos ou Multidisciplinares com suporte das TICs. Os Trilhos Matemáticos trabalham contextos com o mundo real, tarefas construídas na resolução e formulação de problemas, como também em desafios matemáticos, apresentam um aporte motivacional, têm a essência da criatividade – Fluência, Flexibilidade e Originalidade. É importante, para isso, conhecer-se a definição de Trilhos Matemáticos de Cross:

> *é uma sequência de paragens ao longo de um percurso pré-planejado, no qual os alunos estudam Matemática no ambiente* (Vygotsky, 1988) *que os rodeia* (Cross,1997, p.38).

Os Trilhos Matemáticos (TM) representam uma Educação Informal e, isso, vem de encontro do pensamento de David Rodrigues e Paulo Freire. A Matemática por sua vez tem as seguintes dimensões: Comunicação, Conexões, Raciocínio e Resolução e Formulação de Problemas do Mundo Real (Polya, 1957; Singer et al., 2015; Watson & Ohtani, 2015), que fortalece a base de formação sólida do estudante em termos de qualidade acadêmica com atributos de criatividade. Os Trilhos são para todos, e, assim, confirma o que diz David Rodrigues em que a Escola Inclusiva é para todos. Além disso, os Trilhos são cooperativos e não competitivos. Eles também atraem e mantem seus participantes interessados, proporcionam atitudes positivas (Freire, 2015), dão oportunidade de se aprender a aprender, vem de encontro a fala de David Rodrigues, e são temporários (Shoaf, Pollak & Schneider, 2004).

As TICs como suporte dos Trilhos Matemáticos ou Trilhos Multidisciplinares para a EI têm um approach fundamental. Há já inúmeros softwares "free" úteis que podem ser utilizados, como Aramumo – Dislexia, Livox – Deficiências Motora, Cognitiva e Visual, Geogebra – construção de figuras e determinação de áreas, Hércules e Jiló – ensinar Ciências Naturais, Scratch – Criatividade em Lego e MiniMatecaVox – exclusivo para Deficiência Visual, entre outros. As TICs apresentam aspectos positivos com estudantes de Dificuldades Intelectuais e Desenvolvimentais: interação com a tela de Laptop dando para si autonomia e


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

auxiliando na aprendizagem de conteúdos mais exigentes, desenvolvendo maior controle e precisão em nível de motricidade fina, principalmente, uso do mouse, estimulação da capacidade de atenção e memória, contribuição para a execução rápida de tempo de resposta, e estimulo positivo por executar bem uma tarefa. As TICs têm um papel de suporte fundamental nos dias atuais no processo ensino-aprendizagem dos estudantes, nativos digitais (Barroqueiro & Amaral, 2011). As TICs podem propiciar uma comunicação sem ruído e interativa e colaborativa, as Redes Sociais, entre elas o Facebook e WhatsApp (Barroqueiro, Amaral & De Charles, 2011).

Nesta pesquisa desenvolveu-se um Trilho Matemático (desenvolvimento cognitivo) e Mobilidade (desnvolvimento motor) com suporte das TICs Redes Sociais – WhatsApp, Softwares "free" Scratch e MiniMatecaVox e Simuladores da Universidade do Colorado.

**Metodologia**

A metodologia desta pesquisa tem como estrutura fundamental a pesquisa-ação e o desenvolvimento de uma oficina de professores "regulares" e "NEE". É interessante observar-se o conceito de pesquisa-ação de Kemmis & McTaggart:

> *Pesquisa-ação é uma forma de investigação baseada em uma autorreflexão coletiva empreendida pelos participantes de um grupo social de maneira a melhorar a racionalidade e a justiça de suas próprias práticas sociais e educacionais, como também o seu entendimento dessas práticas e de situações onde essas práticas acontecem. A abordagem é de uma pesquisa-ação apenas quando ela é colaborativa..." (Kemmis &McTaggart,1988).*

Como pode-se ver pela definição de Kemmis & McTaggart a pesquisa-ação é um trabalho colaborativo e interativo dos professores. Por isso, organizou-se uma Oficina de Formação Contínua de Professores "Regulares" e "NEE" (Educação Inclusiva) em que os professores "regulares" e "NEE" realizassem um trabalho colaborativo e interativo a fim de aperfeiçoar as suas atividades acadêmicas e tornar as suas aulas motivadoras, significativa e, principalmente, ativas. A Oficina ocorreu em dois períodos, matutino – 21 professores NEE (10 professores de Deficiência Intelectual – DI, 3 professores de Deficiência Auditiva – DA, 4 professores de Deficiência Motora – DM e 1 professor de Deficiência Visual – DV) e 6 "regulares" e vespertino – 12 NEE (4 professores de Deficiência Intelectual – DI, 1 professor


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

de Deficiência Auditiva – DA, 1 professor de Deficiência Motora) e 5 “regulares”. Os professores são da Rede Municipal de Cubatão e as oficinas ocorreram em 10 sessões de 4 horas cada uma. Nos encontros trabalhou-se os Trilhos Matemáticos e as tarefas de resolução e formulação de problemas, a comunicação Matemática; a Mobilidade em espaços não formais e as TICs aplicadas à Educação Inclusiva, incluindo com o uso do telemóvel como uma estratégia de aprendizagem. Por fim, solicitou-se dos professores que respondessem a um questionário para avaliar a Oficina e o Trabalho Colaborativo e Interativo, e traçar um perfil deles.

**Análise e Discussão de Resultados**

O Trilho Matemático foi organizado e planejado pelos professores que incluíram a Mobilidade na sua construção. O Trilho ocorreu no bairro (freguesia) do Jardim Casqueiro, cidade de Cubatão e teve três paradas, a saber: Escola Municipal Maria do Rosário Lopes Franco, Raia Olímpica e Igreja São Judas Tadeu. A escolha da Escola Municipal deveu-se nela ter em suas paredes e escadas “desafios matemáticos para os alunos resolverem” em todos os andares e possuir uma quadra de Esportes. Na Raia Olímpica, apresenta um contato com a natureza e inúmeras situações que provocam um olhar Matemático apurado. Já na Igreja São Judas Tadeu tem-se uma arquitetura significativa com Vitrais esplêndidos e que apresentam boas possibilidades de elaboração de problemas Matemáticos. Além disso, observou-se que nas proximidades da Igreja há uma casa com arquitetura europeia e dando a chance de se elaborar problemas com ângulos associados à Ciência Física.


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Na parada do Trilho Matemático, Igreja São Judas Tadeu, tarefas do contexto real foram elaboradas, conforme figura abaixo.

Observando a fachada da igreja, estime sua altura até o crucifixo. Há cinco Vitrais na fachada da Igreja, quantas combinações possíveis podem ser feitas? Sabendo-se que a área interna da Igreja é de 600 $m^2$, estime o número de pessoas sentadas e em pé que podem assistir a uma missa. Observe a Igreja e explique que figuras geométricas você vê.

A segunda parada foi a Raia Olímpica, ver foto abaixo.

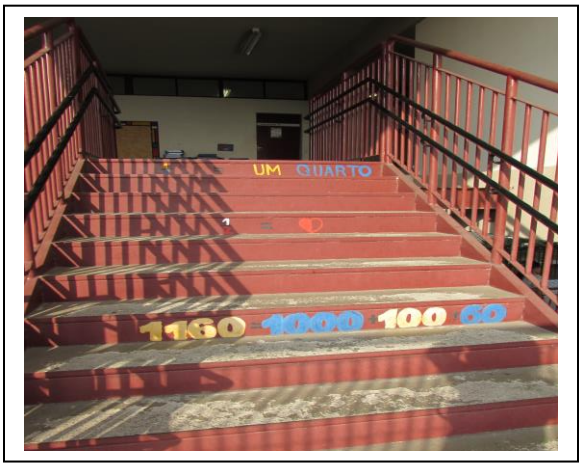
Sabe-se que na Raia Olímpica são disputas competições de canoagem de 22Km, 11Km e 3 Km. Na disputa de 22Km, a média de tempo foi 1h45m55s, 11Km de 1h01m30s e 3Km de 12m34s. Observando-se o enunciado do problema, obtenha a velocidade média em cada uma das provas. Explique sua resposta.

Problema número 2: Achar a distância do píer e explique como você pode medir o perímetro do mesmo.

A terceira e última parada foi na Escola Municipal do Rosário. Observa-se nas paredes incentivos para que os alunos pensem Matemática.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4




Na elaboração dos problemas percebe-se tarefas interessantes para alunos NEE e que mostram o contexto real dos Trilhos Matemáticos. O uso das TICs ainda ocorreu de maneira tímida, dando-se ênfase as Redes Sociais e aos Scratch e MiniMatecaVox. Os simuladores puderam complementar o aprendizado.

Os professores NEE são do sexo feminino, têm formação específica em pedagogia especial e especialização na área. Tem o desejo de realizar cursos de formação contínua e Mestrado na área de atuação. Os docentes gostaram de trabalhar nos Trilhos Matemáticos com suporte das TICs, principalmente, por terem a oportunidade de trabalhar de maneira colaborativa e interativa com professores regulares.

**Considerações Finais**

Os Trilhos Matemáticos são uma grande oportunidade para despertar nos alunos o interesse pela Matemática ao seu redor e no seu dia-a-dia. Eles fazem com que os estudantes vejam a importância real em suas vidas, desde na elaboração de um orçamento familiar até na sua vida profissional futura. Os trilhos têm o poder de realizar conexões importantíssimas no desenvolvimento cognitivo do discente. Apresentam a ele olhares apurados da Matemática no mundo que os rodeia e desenvolve no aluno a criatividade, felicidade por aprender a aprender e curiosidade pelo Mundo Real. Já no professor, os Trilhos apresentam-se como uma boa ferramenta para realizar o trabalho colaborativo e interativo e uma excelente estratégia de aprendizagem, pois tornam suas aulas atrativas, felizes, ativas, significativas e de base funcional. As TICs são também uma boa ferramenta para ser usada a favor da inclusão. As TICs vieram para complementar e servir de suporte para a aprendizagem dos alunos e têm um fator primordial para a Inclusão. As TICs quando bem orientadas pelos


ISBN 978-84-945722-3-4

professores podem ter uma função importante no papel na aprendizagem, pois os alunos por meio das Redes Sociais abrem um canal de comunicação entre eles e entre o professor e a sala para alimentarem o processo de ensino-aprendizagem; em termos de softwares e simuladores quando bem utilizados pelos docentes tornam-se uma estratégia de aprendizagem muito boa devido a incentivar o processo autônomo dos alunos e serem mais uma ferramenta interativa de aprendizagem significativa e funcional a eles.

As TICs na Educação Inclusiva junto com os Trilhos são uma grande oportunidade para que o aluno tenha possibilidade de se sentir útil, colaborativo e participativo, além de que, na Sociedade do Conhecimento, oferecerem uma perspectiva de dignidade e construção de oportunidade de igualdade a todos os estudantes e futuros profissionais.

**Referências**:


Ausubel, D. P. (1982) *A aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula*. Livro escrito por Moreira, M. A. Brasília: Editora da UnB.

Barbosa, A.; Vale, I. & Ferreira, R.A.T. (2016) Trilhos Matemáticos: promovendo a criatividade de futuros professores. Educação e Matemática, 135, 57-64.

Barroqueiro, C.H. & Amaral, L. H. (2011) O Uso das Tecnologias de Informação e Comunicação no processo ensino-aprendizagem dos alunos nativos digitais nas aulas de Física e Matemática. RenCiMa, v.2, n.2, 123-143.

Barroqueiro, C.H.; Amaral, L.H. & De Oliveira, C.A. (2011). O Uso das Tecnologias de Informação e Comunicação no Ensino de Ciências e Matemática. Revista Tecnologia & Cultura, v.13, n.19, 45-58.

Cross, R. (1997) Development Math Trails**.** Mathematics Teaching, 158, pp. 38-39.

Da Ponte, J. P. (org.) (2014) *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*. 1ª ed., Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Freire, P. (2015) *Educação como prática da liberdade*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Morin, E. (2001) Os sete saberes necessários à educação do futuro. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EdgarMorin.pdf. Consultado 09/04/2017.

Polya, G. (1957) *How to solve it.* 2ª ed., Princeton: Princeton University Press.

Rodrigues, D. (2012). As tecnologias de informação e comunicação em tempo de educação inclusiva. Em Giroto, C. R M.; Poker, R. B. e Omote, S. (org.), As Tecnologias nas práticas pedagógicas inclusivas, Capítulo 2, pp. 25-40. Marília: Cultura Acadêmica Editora.




ISBN 978-84-945722-3-4

Rodrigues, D. (2007) Desenvolver a educação inclusiva: dimensões do desenvolvimento profissional. In: *Investigação em Educação Inclusiva*. Cruz Quebrada: Faculdade de Motricidade Humana, v. 2.

Shoaf, M.M.; Pollak, H. & Schneider, J. (2004). *Math Trails*. Bedford: The Consortium for Mathematics and Its Applications (COMAP).

Singer, F. M.; Ellerton, N. F. & Cai, J. (2015). *Mathematical Problem Posing :From research to effective practice.* New York: Springer.

Thiollent, M. (2002) . *Metodologia da pesquisa-ação.* 11ª ed., São Paulo: Cortez.

Vale, I.; Barbosa, A. & Pimentel, T. (2014). Teaching and learning mathematics for creativity through challenging tasks. In S., Carreira, N., Amado, K., Jones, & H., Jacinto (Eds.) Proceedings of the Problem @Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving, p.335. Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Vale, I.; Barbosa, A.; Portela, J.; Fonseca, L. Dias, N. & Pimentel, T. (2008) A Matemática e a Cidade – Um roteiro por Viana do Castelo. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação – Projecto MatCid.

Watson, A. & Ohtani, M. (editors) (2015). *Task design in Mathematics Education.* New York: Springer.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.122

# MARÍA ANDREA CASAMAYOR Y DE LA COMA: UNA MATEMÁTICA EN EL SIGLO XVIII

María José Madrid[1] – Alexander Maz-Machado[2] – Carmen López-Esteban[3] – Carmen León-Mantero[2]
mjmadridma@upsa.es – ma1mamaa@uco.es – lopezc@usal.es – cmleon@uco.es
[1]Universidad Pontificia de Salamanca (España) – [2]Universidad de Córdoba (España) – [3]Universidad de Salamanca (España)

Núcleo temático: Historia social de la Educación Matemática en Iberoamérica.
Modalidad: Comunicación Breve (CB)
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: Historia de las matemáticas y la educación matemática, Siglo XVIII, María Andrea Casamayor y de la Coma, aritmética.

**Resumen**
*La investigación sobre la historia de las matemáticas y la educación matemática tiene entre sus objetivos sacar a la luz a figuras relevantes en estos campos. Entre ellas se encuentra María Andrea Casamayor y de la Coma, considerada la primera mujer científica española de la que se conservan documentos escritos. A lo largo de esta comunicación se analiza una de sus obras titulada Tyrocinio arithmetico, instruccion de las quatro reglas llanas, publicada en 1738. En una época en la que el saber científico estaba vedado al sexo femenino, María Andrea firmó su texto con un nombre masculino, Casandro Mamés de la Marca y Araoia, lo cual muestra el sesgo de género de la época. La obra está dedicada a la Escuela Pía del colegio de Santo Tomás de Zaragoza, afirmando el autor bajo su seudónimo, ser discípulo de dichas escuelas y fue autorizada para su publicación por Pedro Martínez. Para su análisis se ha recurrido a la técnica del análisis de contenido, ampliamente utilizada en investigaciones sobre la Historia de las Matemáticas y Educación Matemática. Dicho análisis muestra una obra sencilla, con contenidos matemáticos elementales y un gran interés por la aplicación práctica de las matemáticas.*

## Introducción

La investigación sobre la historia de las matemáticas y la educación matemática tiene como objetivo descubrir situaciones, personas, instituciones, obras o temas, que en un momento determinado supusieron un cambio o un avance para estas disciplinas (Maz-Machado y Rico, 2013).

Con este objetivo a lo largo de las últimas décadas se han realizado numerosas investigaciones tanto en España como a nivel internacional sobre distintas cuestiones


ISBN 978-84-945722-3-4

relacionadas con esta temática, por ejemplo el estudio de la evolución del límite funcional y del concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX (Sierra, González y López, 1999, 2003) o sobre el proceso histórico de adquisición de la noción de número negativo (Glaeser, 1981).

Entre estas investigaciones se encuentran aquellas que tienen como objetivo sacar a la luz a matemáticos o autores de libros de matemáticas que en un momento dado han contribuido a esta disciplina, pero que en muchas ocasiones, tanto ellos como sus obras resultan desconocidas; por ejemplo la obra del autor del siglo XVI Miguel Gerónimo de Santa Cruz (Madrid, Maz-Machado y López, 2015), el ingeniero del siglo XIX Juan Cortázar (León-Mantero y Maz-Machado, 2015) o al matemático español del siglo XX Julio Rey Pastor (Peralta, 2001).

Este tipo de investigaciones cobran especial relevancia en el caso de las mujeres científicas, ya que pese a haber contribuido al desarrollo de la ciencia, en muchas ocasiones no están presentes en distintas recopilaciones científicas y de libros de ciencia, escritos en su mayoría por hombres (Muñoz- Páez, 1996).

El siglo XVIII español viene marcado por el cambio en la dinastía reinante, la llegada de la dinastía francesa de los Borbones sustituyendo a la de los Austrias, que marca una renovación en el panorama político, social y cultural promovido por el movimiento de la Ilustración (Rico y Maz, 2005).

En el campo educativo y científico, el siglo XVIII supone el fin del período de mayor influencia de las órdenes religiosas, culminado con la expulsión de los jesuitas en 1767, y el incremento del fomento de las instituciones civiles y militares (Gómez, 2011).

Más concretamente en la primera mitad del siglo XVIII, el estudio de las matemáticas en España se practicaba en Colegios dirigidos por Jesuitas y en las escuelas que el ejército y la marina mantenían para la formación de sus oficiales. Mientras que es en la segunda mitad de este siglo cuando se fundan nuevas escuelas, se traducen libros modernos y acceden a puestos docentes en las escuelas profesores con sólida formación matemática (De Guzmán y Garma, 1980).

Numerosos estudios sobre la historia de las matemáticas y la educación matemática se han centrado en los matemáticos y escritores de libros de matemáticas españoles del siglo XVIII y en sus obras, así autores como Vicente Tosca (Rosselló, 2004), Gabriel Ciscar (Ausejo y


ISBN 978-84-945722-3-4

Medrano, 2012), Agustín de Pedrayes y Foyo (León-Mantero, Madrid y Maz-Machado, 2016), Thomas Cerdá (Maz y Rico, 2009) o Antonio Eximeno (De Guzmán y Garma, 1980) han sido analizados.

Sin embargo, otros matemáticos de la época han sido menos reconocidos; entre ellos se encuentra María Andrea Casamayor y de la Coma, considerada la primera mujer científica española de la que se conservan documentos escritos (Casado, 2006) y sin embargo casi una desconocida. Por ello, el objetivo de esta obra es hacer una breve semblanza de la autora y analizar su obra *Tyrocinio arithmetico, instruccion de las quatro reglas llanas*.

## Metodología

La investigación que se ha realizado es exploratoria, descriptiva y ex post facto. Se encuadra dentro de la investigación histórica y se basa en el análisis de libros de texto antiguos de matemáticas.

El objetivo de este estudio es identificar y caracterizar el propósito de la obra de María Andrea Casamayor y de la Coma, *Tyrocinio arithmetico, instruccion de las quatro reglas llanas* y los contenidos matemáticos incluidos en ella.

La técnica de análisis utilizada es el análisis de contenido de libros de texto, siguiendo las pautas propuestas por Maz (2009) y utilizadas en otras investigaciones en este ámbito (Madrid, Maz-Machado y López, 2015; Maz y Rico, 2009).

Se definieron como unidades de análisis cada uno de los párrafos incluidos en los textos estudiados. Para ello se leyeron y analizaron todos ellos y posteriormente se categorizaron.

## María Andrea Casamayor y de la Coma

María Andrea Casamayor y de la Coma nació en Zaragoza a principios del siglo XVIII (se desconoce la fecha exacta de su nacimiento) y falleció en Zaragoza el 24 de octubre de 1780 (Casado, 2006; Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo Americana, 1911; Serrano y Sanz, 1903).

No son numerosos los datos conocidos sobre esta autora, Casado (2006) indica que sus padres fueron Juan José Casamayor Mancebo (procedente de un pueblo de Huesca) y su madre Juana Rosa Lacoma (zaragozana); estos se casaron en 1705 y tuvieron varios hijos. No hay registros que indiquen que María Andrea Casamayor y de la Coma se casara ni tuviera hijos.


ISBN 978-84-945722-3-4

Se dedicó al estudio de las matemáticas, disciplina de la que se considera poseía un nivel muy alto (Casado, 2006; Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo Americana, 1911). De hecho Serrano y Sanz (1903) consideró qué María Andrea poseía unos conocimientos de esta disciplina que pocas mujeres de su época poseían.

María Andrea es autora de la obra *Tyrocinio arithmetico, instruccion de las quatro reglas llanas*, publicada en 1738. Sin embargo en una época en la que el saber científico estaba vedado al sexo femenino (Muñoz-Páez, 1996), María Andrea firmó su texto con un nombre masculino, Casandro Mamés de la Marca y Araoia (anagrama de su propio nombre).

En este libro afirma la autora bajo su seudónimo, que fue discípulo de la Escuela Pía del Colegio de Santo Thomas de Zaragoza, pero en una época en la que estos colegios eran exclusivamente masculinos resulta sorprendente e improbable que María Andrea fuera admitida (Casado, 2006).

Esta obra aparece autorizada por fray Pedro Martínez, rector y regente de estudios del colegio de San Vicente Ferrer de Zaragoza, con quien la autora colaboró en trabajos e investigaciones (Casado, 2006). De hecho Pedro Martínez dice conocer al autor de la obra, ocultando por tanto que se trataba de una mujer.

María Andrea escribió otra obra sobre matemáticas *El Para si solo de Casandro Mames de la Marca y Arioa. Noticias especulativas, y prácticas de los números, uso de las Tablas de Raizes, y reglas generales para responder á algunas demandas, que con dichas Tablas se resuelven sin la Algebra,* un manuscrito de 109 hojas en folio que posiblemente conservaron los herederos de la autora pero del que no se ha localizado copia en la actualidad (Casado, 2006; Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo Americana, 19911; Serrano y Sanz, 1903).

**Tyrocinio arithmetico, instruccion de las quatro reglas llanas (1738)**

La obra titulada *Tyrocinio arithmetico, instruccion de las quatro reglas llanas*, fue elaborada por María Andrea Casamayor y de la Coma y publicada en 1738 en Zaragoza por Joseph Fort.

Sin embargo, en el libro viene indicado que el autor es Casandro Mames de la Marca y Araoia (anagrama del nombre real de la autora) y todas las menciones al autor incluidas tanto en las autorizaciones como a lo largo de la obra, indican que se trata de un hombre. Esto muestra el

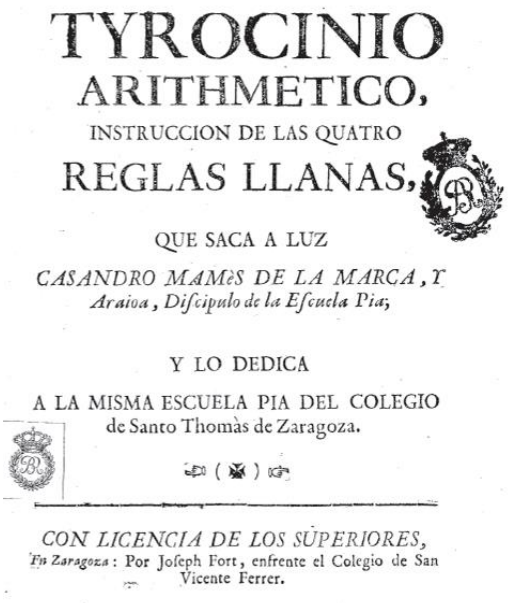

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

sesgo de género de la época, seguramente María Andrea cambió su nombre para favorecer la publicación y una mejor acogida de su obra (Casado, 2006).

La obra se describe como un solo volumen publicado en 4º (Serrano y Sanz, 1903) y se divide en 10 capítulos. Lleva una dedicatoria a los Escolapios del colegio de Santo Tomás de Zaragoza firmada en *Almodovar de el Pinar* el 20 de enero de 1738. Sin embargo, esto contrasta con el lugar de publicación de la obra, el lugar de residencia de la autora y con el hecho de que las autorizaciones estén firmadas en Zaragoza.

Fue autorizada para su publicación por Pedro Martínez y por Juan Francisco de Jesús. En estas autorizaciones se describe la obra como un tratado útil y claro que pretende enseñar unos conocimientos matemáticos básicos al mayor número posible de personas. Considerando además que la obra facilita el acceso a estos conocimientos matemáticos a todos aquellos que no pueden costearse libros más amplios pero que sí podrán pagar esta pequeña obra.

Como se indica a lo largo de sus páginas, esta va dirigida a cualquier persona que no posea conocimientos matemáticos previos. Se trata de una obra sencilla, con contenidos matemáticos elementales y un gran interés por la aplicación práctica de las matemáticas al comercio.



TYROCINIO
ARITHMETICO,
INSTRUCCION DE LAS QUATRO
REGLAS LLANAS,
QUE SACA A LUZ
*CASANDRO MAMÈS DE LA MARCA, Y Araioa, Discipulo de la Escuela Pia;*
Y LO DEDICA
A LA MISMA ESCUELA PIA DEL COLEGIO
de Santo Thomàs de Zaragoza.
*CON LICENCIA DE LOS SUPERIORES,*
*En Zaragoza*: Por Joseph Fort, enfrente el Colegio de San Vicente Ferrer.

Figura 1. Portada de la obra.


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

La obra comienza con la introducción de los números y una explicación sobre el sistema posicional.

Pasa después a introducir las cuatro operaciones básicas que define del siguiente modo:

- Sumar es juntar un número con otro.
- Restar es sacar o quitar de una cantidad mayor otra menor y ver lo que resta, o lo que queda.
- Multiplicar es aumentar un número por otro; tomándolo o contándolo tantas veces como unidades tiene el otro.
- Partir es distribuir una cantidad, o suma de dineros, de granos o de cualquier otra cosa, a muchos y averiguar cuánto le toca o le cabe justificadamente a cada uno.

Para cada una de las operaciones incluye varios ejemplos y distintas pruebas para comprobar si los resultados obtenidos son correctos.

En cuanto a otros contenidos matemáticos solo aparecen mencionados los quebrados y la proporción, pero sin profundizar en ninguno de ellos.

Sin embargo, la autora si muestra un marcado interés comercial, prueba de ello es que incluye varias páginas sobre conversiones de monedas, pesos, medidas de sólidos, líquidos y lineales. Además, muchos de los ejemplos de las operaciones básicas vienen referidos a objetos o precios. Todo esto aporta numerosa información sobre los usos y las costumbres de la Zaragoza del siglo XVIII.

**Conclusiones**

La historia de las matemáticas y la educación matemáticas tiene entre sus propósitos sacar a la luz a figuras que por distintos motivos son relevantes para esta disciplina. Entre estas figuras se encuentra María Andrea Casamayor y de la Coma, considerada la primera mujer científica en España de la que se conservan documentos escritos.

María Andrea fue una mujer con importantes conocimientos matemáticos que publicó un sencillo libro, *Tyrocinio arithmetico, instruccion de las quatro reglas llanas*, con el principal objetivo de que fuera usado en la enseñanza y que fuera accesible para el mayor número posible de personas.


ISBN 978-84-945722-3-4

Por este motivo, la obra se centra básicamente en la enseñanza de los números y la realización de operaciones básicas, muchas de ellas contextualizadas en el comercio de la época.

En definitiva, María Andrea Casamayor y de la Coma fue una mujer con amplios conocimientos matemáticos que no le impidieron realizar una obra sencilla y útil para la vida en la época. El conocimiento sobre su vida y su obra nos acerca al papel de la mujer en el panorama científico español de otros siglos.

**Agradecimientos:** esta comunicación se enmarca en el proyecto de investigación del Plan I+D+i del Ministerio de Economía y Competitividad EDU2016-78764-P.

**Referencias bibliográficas**

Ausejo, E. y Medrano, F. J. (2012). La fundamentación del calculus en España: El cálculo infinitesimal en Gabriel Ciscar (1760-1829). *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 35*(76), 305-316.

Casado, M. J. (2006). *Las damas del laboratorio: Mujeres científicas en la historia*. Barcelona: Debate.

Casamayor y de la Coma (María Andrea). (1911). En *Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo Americana* (Vol. XII, p. 48). Madrid: Espasa – Calpe SA.

De Guzmán, M. y Garma, S. (1980). El pensamiento matemático de Antonio Eximeno. *Llul: revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 3*(5), 3-38.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *RDM - Recherches En Didactique Des Mathématiques, 2*(3), 303-346.

Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilon, 28*(1), 9-22.

León-Mantero, C., Madrid, M. J. y Maz-Machado, A. (2016). Efemérides de Agustín de Pedrayes y Foyo: un destacado matemático español del siglo XVIII. *Números, 92*, 49-56.


ISBN 978-84-945722-3-4

León-Mantero, C. y Maz-Machado, A. (2015). Juan Cortázar y sus aportaciones a la Educación Matemática española del siglo XIX. *ENSAYOS. Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 30*(1), 55-62.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A. y López C. (2015). Fenomenología y representaciones en el dorado contador de Miguel Gerónimo de Santa Cruz. *Ensayos, Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 30*(1), 63-72.

Mames de la Marca y Araoia, C. (1738). *Tyrocinio arithmetico, instruccion de las quatro reglas llanas*. Zaragoza: Joseph Fort.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En Gonzalez, M., González, M. y Murillo, J. (Eds.), *Investigación en Educación matemática XIII*, pp. 5-20. Santander: SEIEM

Maz, A. y Rico, L. (2009). Las Liciones de Thomas Cerda: doscientos cincuenta años (1758-2008). *Suma, 60*, 35-41.

Maz-Machado, A. y Rico, L. (2013). "Tratado elemental de matemáticas", de José Mariano Vallejo, en el bicentenario de su publicación. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 74*, 55-63.

Muñoz-Páez, A. (1996). Algunas contribuciones de la mujer a las ciencias experimentales. *Enseñanza de las ciencias, 14* (2), 233-237.

Peralta, J. (2001). El liderazgo de Rey Pastor en el renacimiento de la matemática española. *Cátedra Nova, 13*, 287-298.

Rico, L. y Maz, A. (2005). Matemáticas, libros y matemáticos: un recorrido por su historia y su relación con la enseñanza en España. En *El libro español de Matemáticas*, pp. 11-35. Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Rosselló, V. M. (2004). Tomàs V. Tosca y su entorno ilustrado en Valencia. Obra autógrafa y atribuciones. *Ería, 64*(65), 159-176.

Serrano y Sanz, M. (1903). *Apuntes para una biblioteca de escritoras españolas. Tomo I.* Madrid: Sucesores de Rivadeneyra.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria, 1940-1995. *Enseñanza De Las Ciencias, 17*(3), 463-476.


ISBN 978-84-945722-3-4

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanaza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática*, *15*(1), 21-50.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.123

# UN ESTUDIO SOBRE LA ILUSIÓN DE LA LINEALIDAD EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Roberto Sánchez Sánchez – José Antonio Juárez López – Lidia Aurora Hernández Rebollar
rtgr1904@gmail.com – jajul@fcfm.buap.mx – lhernan@fcfm.buap.mx
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México

Núcleo temático: I Enseñanza y aprendizaje de la matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Bachillerato
Palabras clave: Ilusión de la linealidad, bachillerato, resolución de problemas, diagnóstico.

**Resumen**

*El presente avance de investigación muestra una visión general de las tendencias de los alumnos de bachillerato al resolver problemas de tipo constante, área, volumen y con falta de autenticidad donde se hace presente la ilusión de la linealidad.*

*Uno de los ejemplos más comunes de un comportamiento corrompido en la resolución de problemas matemáticos es la fuerte tendencia de los alumnos a aplicar métodos proporcionales a los problemas de valor faltante, incluso en problemas en los que es cuestionable o claramente inadecuado (De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2007). Se aplicó un instrumento con el cual se pudo observar que la mayoría de los alumnos son "atrapados" por la ilusión de la linealidad pues tienden a generalizar en problemas de área y volumen debido a que suponen que si en determinada figura su arista crece k-veces entonces su área o volumen también crece k-veces.*

*Otros resultados que se encontraron fueron que los alumnos ignoran consideraciones realistas o no toman en cuenta algunos aspectos esenciales de la situación del problema en la vida real. Bastantes alumnos realizaron representaciones externas, sin embargo fueron de poca ayuda para la interpretación y resolución correcta de los problemas.*

## Introducción

Las reformas y programas de estudio de varios países tienen como uno de los principales objetivos de la educación matemática propiciar la capacidad de desarrollar y utilizar modelos para dar sentido a las diversas situaciones que rodean la vida diaria y de los sistemas complejos derivados de nuestra sociedad moderna (Blum, 2002; Consejo Nacional de profesores de Matemáticas [NCTM], 1989, 2000, citado en Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens & Verschaffel, 2005, 58).



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En la educación matemática contemporánea, la linealidad (o proporcionalidad) recibe mucha atención debido a que las relaciones lineales son el modelo apropiado para acercarse a diversos problemas prácticos (situaciones de la vida diaria) y teóricos, en las matemáticas y la ciencia (De Bock et al., 2007). La linealidad es uno de los conceptos clave en la matemática escolar debido a que aparece en diferentes formas: la "regla de tres" en educación primaria, modelos lineales en secundaria, aproximaciones de cálculo y probabilidad en bachillerato, y abstracciones de un espacio vectorial en la universidad (De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2002).

Varias investigaciones realizadas por De Bock et al., (2007) han demostrado que los estudiantes tienen una tendencia a utilizar métodos lineales o proporcionales para resolver problemas aritméticos para los que no son apropiados dichos métodos.

## Antecedentes

### La "ilusión de la linealidad"

Freudenthal (1983, p. 267, citado en Van Dooren et al., 2005, 59) advirtió que:

*"La linealidad es una propiedad tan sugestiva de las relaciones que uno se rinde fácilmente a la seducción para hacer frente a cada relación numérica como si fuese lineal."*

A partir del contexto de esta cita, Freudenthal utilizó el término lineal como sinónimo de proporcional, en referencia a las relaciones representadas gráficamente por una línea recta a través del origen (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens & Verschaffel, 2004, citado en Van Dooren et al., 2005, 59).

El uso de la linealidad en situaciones no lineales (a veces referido como la "ilusión de la linealidad o proporcionalidad", la "trampa de la linealidad", el "obstáculo lineal", etc.) es un error "clásico", posiblemente uno de los más antiguos de la literatura del pensamiento matemático (De Bock et al., 2002).

### La ilusión de la linealidad en problemas de área y volumen

Existe investigación que informa que el razonamiento lineal incorrecto ocurre con frecuencia en problemas sobre relaciones entre los ángulos y lados de figuras geométricas (Rouche, 1992, citado en De Bock, et al., 2007, p. 17).


ISBN 978-84-945722-3-4

Los estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas [NCTM] (1989, p. 114-115, citado en Van Dooren et al., 2005, 59) sugieren que:

*"La mayoría de los estudiantes en los últimos grados de primaria y alumnos de secundaria creen que si los lados de una figura se duplican para producir una similar, el área o el volumen también se duplicará."*

En general, existe una tendencia casi irresistible en los estudiantes de diferentes niveles educativos por creer que si una figura se agranda $k - veces$, el área o volumen es ampliada $k - veces$ también (De Bock et al., 2002).

El refuerzo de la linealidad en numerosas situaciones de la matemática escolar, junto con su sencillez intrínseca, puede dar lugar a una tendencia en los estudiantes e incluso en adultos para aplicar el modelo lineal "en todas partes" (De Bock et al., 2002).

**La ilusión de la linealidad en problemas constantes y con falta de autenticidad**

Además de los problemas de área y volumen, Van Dooren et al., (2005) realizaron una investigación sobre el uso excesivo de la linealidad, los estudiantes se enfrentaron al problema siguiente: *"Mamá puso 3 toallas en el tendedero. Después de 12 horas estaban secas. La abuela puso 6 toallas en el tendedero. ¿Cuánto tiempo les toma secarse?"* (Respuesta correcta: 12 horas, respuesta proporcional: 24 horas). Uno esperaría que el problema con un modelo "constante" (como el problema del "tendedero") sería un problema que los estudiantes podrían solucionar fácilmente en la prueba (debido a que no había necesidad de cálculos), pero tuvo la más alta tasa de errores proporcionales (hasta un 80% en quinto grado).

La actividad de resolución de problemas admite problemas "reales" aceptables (o buenos) que los alumnos puedan encontrar fuera de sus clases de matemáticas (Van Dooren et al., 2005), sin embargo, varias investigaciones (Reusser y Stebler, 1997; Verschaffel, De Corte, y Lasure, 1994 citado en Van Dooren et al., 2005, 58) han demostrado que los estudiantes comienzan a resolver problemas con poca o ninguna relación con el mundo real.

Verschaffel, De Corte, y Lasure (1994, p. 276, citado en Van Dooren et al., 2009, 187) encontraron que para el problema: "el mejor tiempo de John para correr 100 metros es de 17 segundos. ¿Cuánto tiempo le llevará correr 1 kilometro?" Más del 90% de los estudiantes de



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

entre 10 y 12 años de edad, respondió “170 segundos”. Casi todos los estudiantes jugaron el “juego de los problemas de aplicación de la escuela”, es decir, la situación del mundo real que evoca el problema permite una respuesta única y precisa, por lo cual los alumnos tienen que buscar la operación matemática (suma, resta, multiplicación, división o combinación de estas operaciones) en el planteamiento del problema para resolverlo en vez de concebir y abordar estos problemas como legítimos en matemática realista (Nesher, 1996; Reusser y Stebler, 1997; Wyndhamn & Säljö, 1997, citado en Van Dooren et al., 2009, 188).

De Bock at al., (2007) sugieren que los estudiantes a los que se les aplicaron los problemas demostraron una visión simplista en la resolución de problemas, debido a que todos los problemas no pueden ser resueltos mediante el uso de cálculos matemáticos simples con los números que se proporcionan en el problema, y que las consideraciones basadas en el conocimiento y en el contexto del mundo real no participan en el proceso de solución.

**Esquemas en la resolución de problemas**

Existen diversas investigaciones teóricas y empíricas sobre cómo y por qué los dibujos y diagramas son una herramienta útil que puede mejorar la capacidad de las personas para representar y resolver problemas matemáticos (Aprea y Ebner, 1999; De Corte et al., 1996; Larkin y Simon, 1987; Pólya, 1945; Reed, 1999; Schoenfeld, 1992; Vlahovic-Stetic, 1999, citado en Bock at al., 2007, 56).

En los problemas no proporcionales, esta actividad representacional debería ayudar a los estudiantes para detectar la inadecuación de un razonamiento lineal, y para determinar la naturaleza de la relación no lineal que conecta los elementos conocidos y desconocidos en esta representación del problema (De Bock et al., 2007).

Sin embargo, realizar un dibujo o diagrama no garantiza que se va a encontrar la solución de un problema dado (De Bock, et al., 2007). Cuando los estudiantes no tienen éxito al realizar un esquema “correcto”, podría ser más eficaz y de gran ayuda presentar un diagrama “correcto” ya realizado.

**Método**

La investigación se realizó en México con 75 alumnos de cuarto semestre (con edades entre 15 y 17 años) de bachillerato. Se aplicó un cuestionario que debía ser resuelto con lápiz y


ISBN 978-84-945722-3-4

papel. Éste instrumento consistió en problemas no lineales de tipo: constante, área, volumen y falta de autenticidad. Posteriormente se analizaron los instrumentos para observar las tendencias de los alumnos al resolver problemas y finalmente se analizaron las representaciones externas en donde se hace presente la ilusión de la linealidad.

**Resultados**

Los problemas que se propusieron en el instrumento son los que utilizaron Van Dooren et al., (2005) y De Bock et al., (2007) (algunos mencionados anteriormente), se realizaron algunas modificaciones superficiales y otros más fueron propuestos por los autores de la presente investigación. A continuación se presentan el tipo de problema, el problema propuesto en el instrumento y parte de los resultados obtenidos de analizarlo.

**Problemas de área**

*"Luis es un pintor publicitario. En los últimos días, tuvo que pintar las decoraciones de varias ventanas de una tienda. Ayer hizo un dibujo de 56 cm de altura de Bart Simpson en la puerta de una tienda de regalos. Necesitó 6 ml de pintura. Ahora se le pide hacer una versión ampliada del mismo dibujo en una ventana de una tienda de videojuegos. Esta copia debe ser de 168 cm de alto. ¿Qué cantidad de pintura necesitará aproximadamente Luis para hacerlo?"* 66 alumnos fueron "atrapados" en la ilusión de la linealidad pues respondieron que necesitaban 18 mililitros de pintura para el Bart Simpson de 168 centímetros; de los 66 alumnos que aplicaron el modelo lineal, 61 aplicaron el modelo lineal de forma correcta y 5 alumnos tuvieron algún error (aritmético) al aplicar dicho modelo. Un estudiante presentó cierto razonamiento no lineal aunque de forma inadecuada debido a que toma ciertas consideraciones realistas, sin embargo, su respuesta no fue correcta pues dijo que "*se necesitan 20 ml de pintura porque se necesita más pintura para ciertos detalles*". 5 estudiantes realizaron procedimientos alternativos para resolver el problema pues realizaron múltiples operaciones para obtener una solución numérica del problema, 1 estudiante otorgó una respuesta al problema pero el procedimiento utilizado resultó ser confuso y el resto de estudiantes (2) simplemente no respondieron.

*"Un agricultor se tarda 8 horas en arar un terreno cuadrado de 100 m de lado. ¿Cuánto tardará en arar un terreno de la misma forma pero con el triple de longitud?* 62 alumnos utilizaron el modelo lineal pues respondieron que se necesitan 24 horas para arar el terreno


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

más grande, 2 de los estudiantes presentaron dificultades al realizar las operaciones aritméticas al resolver el problema. Un estudiante logró resolver adecuadamente el problema (72 horas). Del resto de estudiantes, 2 solo realizaron operaciones aritméticas con los datos proporcionados, 8 estudiantes resolvieron el problema aunque el procedimiento utilizado fue confuso y 2 estudiantes no respondieron.

**Problema de volumen**

*"En su caja de juguetes, María tiene dados en varios tamaños. El más pequeño mide 10 mm de lado y tiene un peso de 800 mg. ¿Cuál sería el peso de un dado más grande cuyo lado mide 30 mm?"* 69 alumnos utilizaron el modelo lineal pues respondieron que el cubo más grande pesa 2400 miligramos, de los cuales 6 presentaron dificultades al aplicar el modelo lineal. 1 estudiante logró resolver adecuadamente el problema (21600 mg). 1 estudiante solo realizó operaciones aritméticas con los datos proporcionados, 3 estudiantes realizaron un procedimiento confuso para resolver el problema y 1 estudiante no respondió.

**Problemas con falta de autenticidad**

*"El mejor tiempo de Alicia para correr 100 metros es de 16 segundos. ¿Cuánto tiempo le llevará correr 1000 metros?"* 69 estudiantes aplicaron el modelo lineal, es decir, obtuvieron como resultado 160 segundos para recorrer los 1000 metros, 9 de ellos presentaron dificultades al realizar los cálculos correspondientes. Un estudiante no aplicó el modelo lineal aunque no lo hizo del todo adecuado pues el creyó que para recorrer los 1000 metros tardaría menos de 160 segundos, lo cual indica que no está tomando ciertas consideraciones como el factor cansancio. 2 estudiantes realizaron operaciones aritméticas con los datos presentados en el problema, 1 estudiante resolvió el problema aunque su procedimiento resultó confuso y 2 estudiantes no respondieron.

*"Los mexicanos miden a los 10 años aproximadamente 1.30 m. ¿Cuánto medirán a los 30 años?"* se obtuvo lo siguiente: 39 estudiantes aplicaron el modelo lineal, es decir, obtuvieron como resultado 3.90 metros, de ellos, 1 estudiante presentó dificultades al realizar las operaciones aritméticas. 22 estudiantes se dieron cuenta que la respuesta (3.90 metros) no era adecuada, de los cuales, 11 estudiantes dieron argumentos como: *"no es posible, pues los mexicanos no alcanzan dicha altura"* y otros 11 estudiantes solo tomaron en cuenta los centímetros del dato 1.30 metros, es decir, 0.30 metros y posteriormente lo triplicaron para



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

obtener como resultado 1.90 metros. 7 estudiantes presentaron un procedimiento confuso o solo dieron la respuesta sin saber el procedimiento utilizado y otros 7 estudiantes no dieron respuesta al problema

**Problemas constantes**

*"Si 500 ml de agua se encuentran a 20° C en el ambiente. ¿Qué temperatura tendrán 1000 ml de agua?".* 61 estudiantes utilizaron el modelo lineal por lo cual su respuesta fue *"40° C"*, pero 2 de ellos tuvieron algún error al realizar los cálculos pertinentes. 3 estudiantes utilizaron proporcionalidad inversa por lo cual su respuesta fue *"10° C"*, es decir, a más cantidad de agua la temperatura es más baja. 1 estudiante no tomó en cuenta las cantidades del problema pues en lugar de 500 ml y 1000 ml, tomó como datos 50 ml y 100 ml respectivamente, resolvió correctamente el problema al decir que la temperatura no cambiaba debido a que las cantidades de agua eran muy pequeñas pero, si hubiera tomado las cantidades correctas ¿su respuesta sería la misma?. 7 estudiantes no "cayeron" en la ilusión de la linealidad y dijeron que la temperatura era invariante, es decir, la temperatura es la misma (*"20° C"*). Del resto, 1 estudiante no realizó el problema y otros 2 estudiantes realizaron un procedimiento confuso.

*"Mamá puso 3 toallas en el tendedero. Después de 12 horas estaban secas. La abuela puso 6 toallas en el tendedero. ¿Cuánto tiempo les toma secarse?"* 50 estudiantes aplicaron el modelo lineal, por lo cual obtuvieron como resultado *"24 horas"*. 1 estudiante respondió 6 horas, es decir, el creyó que a mayor cantidad de toallas el tiempo necesario de secado es menor (proporcionalidad inversa). 20 estudiantes utilizaron su experiencia y/o conocimiento del mundo y se dieron cuenta que la solución a este problema era *"12 horas"*. 1 estudiante solo realizó operaciones aritméticas con los datos proporcionados en el problema, 2 estudiantes realizaron un procedimiento confuso para resolverlo y 1 estudiante no respondió.

Cabe señalar que muchos alumnos realizaron representaciones externas como operaciones, diagramas, tablas o incluso gráficas como se muestra en la siguiente Figura. Los ejemplos que se muestran fueron realizados por diversos estudiantes para resolver el problema de área del "Bart Simpson" ampliado.


ISBN 978-84-945722-3-4

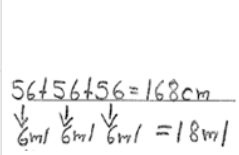
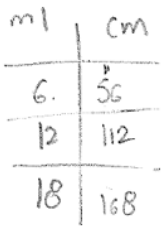
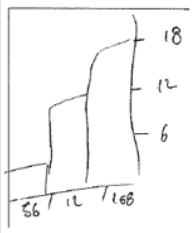
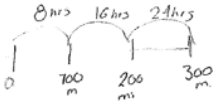
| Operaciones (Suma) | Tabla | Gráfica | Recta | Diagrama |
|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  | |

Figura 1. Ejemplos de representaciones externas utilizadas por los alumnos.

Las representaciones externas realizadas por los estudiantes no fueron de suficiente ayuda para la resolución correcta de los problemas pues en la gran mayoría de los casos los estudiantes "cayeron" en la ilusión de la linealidad a pesar de dichas representaciones.

**Reflexiones o conclusiones**

Los alumnos de bachillerato deberían ser más analíticos debido al nivel académico en el que se encuentran y deberían de ser capaces de utilizar sus conocimientos del mundo para resolver los problemas, sin embargo, pareciera que no los toman en cuenta y solo pretenden dar una solución numérica. Lo anterior conllevo a que más de la mitad de los alumnos aplicara el modelo lineal o proporcional para resolver los diferentes problemas cuando en realidad no debieron de haber realizado dichos cálculos. En general, se observó que los estudiantes utilizan con mayor frecuencia el modelo lineal para resolver problemas de área y volumen (aunque en un problema con falta de autenticidad hubo una gran mayoría que utilizó este modelo), los estudiantes en este tipo de problemas tienden a creer que si la medida de la arista de una figura crece *k-veces*, entonces el área o volumen también crece *k-veces*. Aunque los estudiantes utilizan con menor frecuencia el modelo lineal para resolver problemas constantes o con falta de autenticidad, más de la mitad los estudiantes aplicaron el modelo lineal y tienden a no utilizar o suspender sus conocimientos del mundo para dar paso a la resolución numérica para este tipo problemas, incluso, en algunos casos es cuestionable o inadecuada dicha resolución.

En México desde primaria hasta altos niveles educativos se abordan infinidad de problemas que pueden ser resueltos con "la regla de tres" (en la cual se dan tres datos, dos de ellos


ISBN 978-84-945722-3-4

pertenecen a una relación y el tercer dato pertenece a otra relación, el cuarto dato tiene que ser encontrado) y se le da poca importancia a problemas donde no es conveniente aplicar el modelo lineal. Con base en lo anterior, es necesario verificar la aplicabilidad del modelo lineal en determinadas situaciones, pues como se observó en la presente investigación, no es adecuado utilizar dicho modelo en todas las situaciones en las que pareciera que es correcto utilizarlo.

**Referencias**


De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper Use of Linear Reasoning: An In-Depth Study of the Nature and the Irresistibility of Secondary School Students' Errors. *Educational Studies in Mathematics, 50*(3), 311-334.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement.* New York: Springer.

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. & Verschaffel, L. (2009). Students' Overuse of Proportionality on Missing-Value Problems: How Numbers May Change Solutions. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(2), 187-211.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2005). Not Everything Is Proportional: Effects of Age and Problem Type on Propensities for Overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23*(1), 57-86.




ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.125

# LECTURA DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS: UNA COMPETENCIA IMPORTANTE A DESARROLLAR EN CLASES

Danilo Díaz-Levicoy, Pedro Arteaga y Carmen Batanero
dddiaz01@hotmail.com, parteaga@ugr.es, batanero@ugr.es
Universidad de Granada-España

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: CB
Nivel educativo: Educación Primaria
Palabras clave: gráficos estadísticos, lectura de gráficos, enseñanza, reflexión

**Resumen**

*La estadística ha ido tomando cada vez mayor importancia en la sociedad actual, lo que viene dado por estar presente en innumerables situaciones de la vida cotidiana. Dentro de este panorama, los gráficos estadísticos son frecuentes en los medios de comunicación para apoyar comentarios y/o causar un impacto visual. Este último aspecto es manipulado intencionalmente para sacar beneficios, por lo que es necesario formar a los niños, y futuros ciudadanos, para leerlos correctamente, evitando ser engañados, y tomar las decisiones correctas, cuando estas dependan de la información ahí mostrada. En este trabajo describimos la importancia de la lectura de gráficos estadísticos como elemento de la cultura estadística, su presencia en los medios de comunicación, en las directrices curriculares de algunos países, en los libros de texto y los resultados de algunas investigaciones en el ámbito de la educación obligatoria y la formación de profesores. Finalizando con una reflexión y sugerencias para su enseñanza.*

## Introducción

En la actualidad los ciudadanos tienen acceso a una gran cantidad de información estadística, por ejemplo, a través de los medios de comunicación, en la vida social y profesional, etc. Información que necesitan leer correctamente para interactuar con los demás. Mucha de esta información se presenta en gráficos estadísticos, por lo que para su correcta decodificación es necesario conocer los convenios de construcción del gráfico involucrado y la función que cumplen cada uno de sus elementos constituyentes, tanto por separado como en su conjunto. Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas (2016, p.16) mencionan que "los gráficos estadísticos son parte de la *cultura estadística* necesaria en la sociedad actual". La expresión *cultura estadística* hace referencia a un derecho ciudadano y conlleva el desarrollo de



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

capacidades como: lectura e interpretación de datos; lectura de tablas, gráficos y resúmenes estadísticos en los medios de comunicación, así como tener una visión crítica sobre los estudios, encuestas y afirmaciones que se fundamentan en ellos; usar y comprender las herramientas y el lenguaje básico de la estadística; valorar su relevancia en la vida cotidiana y profesional (Del Pino y Estrella, 2012).

En lo que sigue describimos que se entiende por lectura de gráficos, la presencia de estas representaciones y su lectura en directrices curriculares y en libros de texto de Educación Primaria (España y Chile), la importancia de la lectura de los gráficos estadísticos en los medios de comunicación, el resumen de algunos estudios sobre esta temática, para finalizar con algunas reflexiones y sugerencias para el aula de Educación Primaria.

**Lectura de gráficos estadísticos**

Friel, Curcio y Bright (2001, p. 132) consideran que la compresión de gráficos estadísticos está asociada a "las habilidades de los lectores de gráficos para interpretar el significado de gráficos creados por otros o por ellos mismos". Con esta idea es necesario respetar los convenios de construcción de los gráficos, ya que varían en cada tipo de gráfico, y es importante conocerlos para poder realizar buenas lecturas e interpretaciones de los mismos. Por su parte Wu (2004), menciona que la comprensión de gráficos estadísticos está relacionada con cuatro habilidades: lectura gráfica, construcción gráfica, interpretación gráfica, y evaluación de gráficos estadísticos; entregando una visión más amplia sobre este concepto.

Centrándonos en la lectura e interpretación, como elementos de la compresión gráfica, observamos que Friel, Curcio y Bright (2001) proponen los siguientes niveles:

- *Leer los datos*. Es la lectura literal de información del gráfico, es decir, no se realiza interpretación ni cálculos. Por ejemplo, leer el título del gráfico o la frecuencia para una determinada categoría.
- *Leer dentro de los datos*. Corresponde con la lectura basada en los datos proporcionados en el gráfico, con los que se realizan cálculos y comparaciones. Un ejemplo es calcular el total de sujetos de los que se han graficado los datos.
- *Leer más allá de los datos*. Conlleva realizar inferencias o predicciones de acuerdo a la información del gráfico y su contexto. Por ejemplo, estimar la temperatura en una ciudad


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

a partir de las temperaturas registrada en los últimos días en un gráfico.

- *Leer detrás de los datos*. Está asociado a una valoración crítica de la representación de los datos, el tipo de gráfico, la forma de obtenerlos o las conclusiones obtenidas. Por ejemplo, analizar si la muestra considerada en el estudio es la adecuada.

**Los gráficos estadísticos en los medios de comunicación**

Para nadie es una novedad que los medios de comunicación hacen uso frecuente de tablas y gráficos estadísticos para transmitir información, principalmente porque estas formas de representación muestra el resumen de una gran cantidad de datos en un espacio reducido y permite transmitir información de forma rápida (Cavalcanti, Natrielli y Guimarães, 2010). Por lo que estudiar cómo se presentan los gráficos en los medios de comunicación es importante, ya que estos últimos van dirigidos a un público determinado y permiten caracterizar el tipo de sociedad que les interesa promover.

En este sentido, un estudio detallado de los gráficos en los medios de comunicación lo realizan Cavalcanti, Natrielli y Guimarães (2010), que estudian la función de los gráficos estadísticos en medios de comunicación impresos (un periódico entre de agosto y septiembre de 2007 y una revista semanal de temas diversos; y una revista mensual entre septiembre de 2006 al mismo mes del 2007, dirigida a formación de profesores). Se encontraron 135 gráficos (43 en periódicos, 60 en revistas semanales y 32 en revistas mensuales), dónde la presencia de los gráficos estadísticos es más constante en las revistas mensuales.

Los resultados muestran que estas representaciones son usadas en variedad de temas, pero mayoritariamente se relacionan a publicidad en los periódicos, a la economía en la revista semanal y educación en la revista mensual. El tipo de gráfico de mayor frecuencia es el de barras (52%), también encontrando gráficos de sectores, líneas y pictogramas. La revista semanal tiene mejor distribuido el tipo de gráficos y, junto a la revista mensual, se observan los cuatro gráficos citados anteriormente, en los periódicos no se observan pictogramas. También se observa que el 20% de los gráficos no presenta título. Al estudiar la escala en los gráficos de barras, con regla graduada, se observó que el 39% de ellos presentan errores, valor considerado alto pues se tienen las herramientas tecnologías para no cometerlos.

Finalmente, se estudia la relación entre el texto y el gráfico estadístico, estableciendo las siguientes relaciones: 1) El texto describe los datos que aparecen en el gráfico y realiza un



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

análisis de los mismos; 2) El texto presenta algunos datos del gráfico para dar consistencia a sus conclusiones; 3) El texto solo presenta la conclusión de los datos presentados en el gráfico; 4) El texto remite al lector para que vea el gráfico, sin utilizar los datos; 5) En el texto no hace referencia al gráfico, pero el gráfico abordar la misma temática y viene acompañado de una breve conclusión; 6) En el texto no hay referencia al gráfico, pero este aparece en la misma página y se relaciona con el tema.

Los gráficos analizados muestran que las categorías más frecuente son las 4(26%) y 5 (33%), por lo que se puede inferir que los gráficos son utilizados para complementar información al tema abordado en el escrito.

**Gráficos estadísticos en el currículo de Educación Primaria en España y Chile**

Son diversas las directrices curriculares que han considerado la relevancia de los gráficos estadísticos en la sociedad y han incluido la enseñanza de este tema desde los primeros cursos de Educación Primaria.

En el caso de España, el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD), por medio del Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, establece el currículo de Educación Primaria. En tales directrices los contenidos para la enseñanza de la matemática se organizan en cinco bloques, donde el titulado *Estadística y probabilidad* es donde enfatiza el trabajo con los gráficos estadísticos. Además, se aconseja que la enseñanza se realice conectando los diferentes temas del currículo. Situación donde los gráficos estadísticos poseen una ventaja por su aplicación en las Ciencias Naturales y Sociales, y la variedad de objetos matemáticos que permite trabajar.

En Dentro de los estándares de aprendizaje evaluables que se establecen en el bloque de *Estadística y probabilidad*, para dar cumplimiento a los contenidos de estos niveles, se observa la importancia de la lectura de los gráficos estadísticos. La habilidad de lectura considera va desde la interpretación, la toma de decisión, y el análisis crítico de información del gráfico, tal como se muestra a continuación (MECD, 2014, p. 19393):

> - Realiza e interpreta gráficos muy sencillos: diagramas de barras, poligonales y sectoriales, con datos obtenidos de situaciones muy cercanas.
> - Realiza análisis crítico argumentado sobre las informaciones que se presentan mediante gráficos estadísticos.
> - Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos propios de estadística estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando,


ISBN 978-84-945722-3-4

y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización.
- Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas: revisando las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprobando e interpretando las soluciones en el contexto, proponiendo otras formas de resolverlo.

En el caso de chileno, el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) define cinco ejes de para el área de matemática, donde la lectura de gráfico estadísticos se establece en el eje titulado *Datos y probabilidades*. Los objetivos relacionados con la lectura de gráficos son los siguientes (MINEDUC, 2012):

- *Primer año*. Construir, leer e interpretar pictogramas (p. 9).
- *Segundo año*. Construir, leer e interpretar pictogramas con escala y gráficos de barra simple (p. 12).
- *Tercer año*. Construir, leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, en base a información recolectada o dada (p. 16).
- *Cuarto año*. Leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, y comunicar sus conclusiones (p. 20).
- *Quinto año*. Leer, interpretar y completar tablas, gráficos de barra simple y gráficos de línea y comunicar sus conclusiones (p. 24).
- *Sexto año*. Comparar distribuciones de dos grupos, provenientes de muestras aleatorias, usando diagramas de puntos y de tallo y hojas. Leer e interpretar gráficos de barra doble y circulares y comunicar sus conclusiones (p. 27).

En ambas directrices curriculares observamos la importancia de trabajar la lectura de diferentes gráficos estadísticos para comprender información a la que se puede acceder en diferentes situaciones de la vida cotidiana.

**Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria**

Una consecuencia directa de estudiar la presencia de la lectura de gráficos estadísticos en las directrices curriculares es analizar cómo los libros de texto plasman estas recomendaciones, ya que estos deben ser un reflejo del currículo (Herbel, 2007; Díaz-Levicoy y Roa, 2014).

Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea (2016) realizaron un análisis detallado de los gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria en España y Chile. En este estudio el gráfico de barras es el más frecuente en ambos países. Respecto a las actividades se observa que la lectura recibe mayor interés que la construcción, ya que en leer se incluyen las


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

actividades de lectura literal, calcular, justificar, traducir (pasar la información de un gráfico a una tabla u otro gráfico) y de ejemplo.

También se observa coincidencia con el nivel de lectura, ya que en ambos casos es el 2 (leer dentro de los datos) y 1(leer los datos), agrupando más del 90% de las actividades. Por lo que se sugiere ir incorporando actividades de nivel superior en forma gradual para desarrollar una adecuada cultura estadística. Más tarde, Arteaga y Díaz-Levicoy (2016) estudian los errores en los gráficos en libros de texto chilenos, entre ellos encontraron: ausencia del título general, ausencia de títulos y rótulos en los ejes, errores en la escala del gráfico, entre otros. Los profesores deben ser conscientes de estos errores presentes en los libros de texto, para que no se transmitan a los estudiantes.

**Investigación sobre lectura de gráficos estadísticos**

Las investigaciones sobre lectura de gráficos aún son escasas y muestran las dificultades de los estudiantes en relación a dicha habilidad en diferentes niveles educativos.

Guimarães (2002) estudia la lectura de gráficos de barras en 107 estudiantes de 3º de Educación Primaria en Brasil. Los resultados muestran que el 72% de los estudiantes responden con éxito las actividades sobre lectura puntual (encontrar máximos, mínimos y localizar frecuencias o categorías), presentando dificultades en actividades donde la frecuencia que no está explicitada. El éxito en las actividades de comprensión variacional solo alcanza un 26,3%.

Fernandes y Morais (2011) analizan los niveles de lectura (Friel, Curcio y Bright, 2001) en 108 estudiantes de 9º grado de Educación Fundamental en Portugal. Los resultados indican que no presentan mayores dificultades en preguntas de nivel 1, y sus errores se deben a que no se observan todos los elementos del gráfico o por una lectura errada de la pregunta. Las actividades de nivel 2 son levemente más difíciles que las de nivel 3, motivados por la falta de conocimiento matemático y errores de interpretación.

Monroy (2007) estudia la lectura de gráficos por estudiantes mexicanos de Educación Secundaria (12-15 años), donde sus resultado están en el nivel más bajo en la *taxonomía SOLO* (idiosincrásico o transicional), a que presentan dificultades para identificar los elementos del gráfico.

Rodríguez y Sandoval (2012) realizan un estudio comparativo sobre la lectura de gráficos por profesores en formación y en activo. Los resultados muestran que la el 90% de los


ISBN 978-84-945722-3-4

estudiantes y profesores realiza algún tipo de lectura, aunque el 79% de realiza en forma correcta. En el trabajo con gráficos de barras simples el 95,5% de los estudiantes responde con éxito, mientras que los profesores lo hace en un 89,3%. El éxito es menor cuando se lee información de gráficos de barras múltiples, en el que el 40% de los estudiantes y el 45% de los profesores. Al clasificar las actividades según los niveles de Curcio, se responde con mayor éxito las de nivel 1 (entre el 93% y 100%), seguido del nivel 2 (20,9% de los estudiantes de profesorado y 13% de los profesores).

**Reflexiones y sugerencias para el aula**

En los puntos anteriores hemos confirmado la importancia de los gráficos estadísticos, ya que aparecen con frecuencia en los medios de comunicación, y su enseñanza se estable en las directrices curriculares y en los libros de texto de Educación Primaria en España y Chile. Creemos que los libros de texto presentan actividades interesantes para trabajar en aula, pero los profesores deben vigilar y tratar en clases aquellos gráficos que presenten errores para hacer conscientes a los estudiantes de ellos.

Tomando en consideración lo indicado en las directrices curriculares chilenas, respecto a que la matemática entrega diversas herramientas para estudiar la información cuantitativa que se presenta en las noticias, en la publicidad, como una forma de contribuir "al desarrollo de las capacidades de comunicación, razonamiento y abstracción e impulsando el desarrollo del pensamiento intuitivo y la reflexión sistemática" (MINEDUC, 2012, p. 1).

Para atender a estos puntos se pueden plantear los estudiantes actividades como la mostrada en la Figura 1, la que se extrajo de un libro de texto, y que pide buscar un tipo de gráfico estadístico en los medios de comunicación para interpretar la información que en él se muestra. De esta forma se acerca a los estudiantes a situaciones reales, a las que se enfrentarán como ciudadanos.

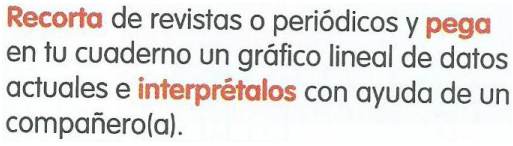



*Figura 1.* Actividad de libro de texto (Sagredo y Luna, 2016, p. 125).

Una variación de este tipo de actividades es que el profesor seleccione los gráficos que aparecen en los medios de comunicación y formulen diversas actividades, desde las más


ISBN 978-84-945722-3-4

simples a otras más complejas. De esta forma se logra que todos los alumnos analicen una misma forma de representación. Por ejemplo, del gráfico mostrado en la Figura 2, donde se muestra la cantidad de campeonatos nacionales que se han ganado en Chile. Algunas actividades que se pueden formular sobre él es: ¿Qué equipo ha ganado ocho campeonatos?, ¿Cuál es la diferencia de campeonatos que ha ganado Colo-Colo y Unión Española?, incluso se puede analizar la escala usada en el gráfico, ya que las veces que ha ganado el primer equipo es casi el doble del segundo, pero no se ve reflejado en las barras.

*Figura 2.* Gráfico en medio de comunicación

Creemos que con un adecuado estudio de las actividades de los libros de texto y el uso de gráficos de los medios de comunicación se estaría aportando a que los estudiantes obtengan una cultura estadística adecuada para su vida cotidiana.

**Agradecimientos**

Proyecto EDU2016-74848-P (MEC), Beca CONICYT PFCHA 72150306 y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

**Referencias bibliográficas**

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J.M. y Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *RELIME, 19*(1) 15-40.

Arteaga, P. y Díaz-Levicoy, D. (2016). Conflictos semióticos sobre gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria. *Educação e Fronteiras On-Line, 6*(17), 81-96.

Del Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 49*(1), 53-64.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M.M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de primaria: un estudio comparativo entre España y Chile. *BOLEMA, 30*(55), 713-737.

Díaz-Levicoy, D. y Roa, R. (2014). Análisis de actividades sobre probabilidad en libros de texto para un curso de básica chilena. *Revista Chilena de Educación Científica, 13*(1),


ISBN 978-84-945722-3-4

9-19.
Cavalcanti, M. R., Natrielli, K. R. y Guimarães, G. L. (2010). Gráficos na mídia impressa. *BOLEMA, 23*(36), 733-751.
Fernandes, J.A.; Morais, P.C. (2011). Leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. *Educação Matemática Pesquisa, 3*(1), 95-115.
Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158.
Guimarães, G. (2002). *Interpretando e construindo gráficos de barras* (Tesis doctoral). Universidad Federal de Pernambuco, Pernambuco.
Herbel, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(4), 344-369.
MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.
MINEDUC (2012). *Matemática Educación Básica. Bases curriculares*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
Monroy, R. (2007). Categorización de la comprensión de gráficas estadísticas en estudiantes de secundaria (12-15). *REIEC, 2*(2), 29-38.
Rodríguez, F. y Sandoval, P. (2012). Habilidades de codificación y descodificación de tablas y gráficos estadísticos: un estudio comparativo en profesores y alumnos de pedagogía en Enseñanza Básica. *AVALIAÇÃO, 17*(1), 207-235.
Sagredo, M. y Luna, M.A. (2016). *Matemática 3.* Lima: Bruño.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.126

## vídeoMAT: UNA VISIÓN APLICADA Y FUNCIONAL DE LAS MATEMÁTICAS

Sergi Muria Maldonado - Joan Jareño Ruíz
smuria@xtec.cat - jjareno@xtec.cat
CESIRE CREAMAT (España)

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Internivel (infantil- Primaria-Secundaria- Bachillerato)
Palabras clave: matemáticas aplicadas, vídeo

**Resumen**

*El vídeoMAT es un proyecto en el que el alumnado crea vídeos para responder preguntas que pongan en relieve aplicaciones de las matemáticas o su presencia en el entorno.*
*El certamen, que va por su quinta edición, se dirige a alumnos desde educación infantil a bachillerato y han participado, en sus cinco primeras ediciones, 8264 alumnos produciendo 629 videos.*

*Los objetivos principales del vídeoMAT son:*

- *Contribuir a promover en el alumnado una vivencia de las matemáticas que incorpore sus aplicaciones y su presencia en el entorno.*
- *Reconocer el trabajo que hacen maestros y profesores para proyectar una visión aplicada y funcional de las matemáticas.*
- *Estimular el interés por la comunicación científica y la divulgación matemática.*
- *Construir progresivamente una colección de videos que se puedan utilizar en las aulas o ser inspiradores de actividades.*

*Los participantes han de crear un video de una duración máxima de 3 minutos, en un ámbito de aplicación que puede ser muy amplio: arte, ciencia, tecnología, vida cotidiana, economía… El contenido de los videos puede consistir en la narración argumentada de la respuesta y/o la descripción del proceso seguido para obtenerla.*

*En la comunicación se presentarán videos que han participado en las 5 primeras ediciones.*



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Muchas veces, en las clases de matemáticas, y de forma muy especial en secundaria, oímos alguna voz que pregunta "¿Y esto para qué sirve?". Valdría la pena hacer una antología de los argumentos que maestros y profesores tenemos preparados para responder a esta pregunta. Pero, en el fondo, cada vez que la oímos se tendría que activar alguna alarma en nuestro interior, porque nos está indicando que alguna cosa no va del todo bien.

Las matemáticas son una ciencia fundamental y, precisamente, porque están en los fundamentos del edificio de la ciencia, se produce una cierta ocultación de sus aplicaciones. Nos encontramos así delante de una paradoja: la invisible relevancia de las matemáticas. Muchos y muchas alumnas, como también una mayoría de la ciudadanía adulta, afirmaría que las matemáticas son útiles, pero tendrían dificultades para concretar alguna utilidad más allá de "las cuatro operaciones" y la medida. A menudo la matemática escolar se ha centrado en aspectos formales o teóricos que no acaban de poner de manifiesto su funcionalidad práctica, a veces con el argumento que más adelante, en cursos posteriores, ya se verán aplicaciones. Pero, también a menudo, nunca llega esta presentación. La consecuencia es que el alumnado sale de la escuela vinculando la matemática más a fórmulas escritas en la pizarra que al trabajo sobre situaciones reales concretas, más a la abstracción que en la aplicación, perpetuando así una imagen social pobre y sesgada de las matemáticas.

Sin dejar de dar importancia a los aspectos formales y abstractos de la matemática, tenemos que admitir que sería conveniente hacer un esfuerzo para conseguir llevar a clase aplicaciones concretas de la matemática en diversos ámbitos de nuestro entorno natural, social y cultural. Con este objetivo nació el proyecto *vídeoMAT - Matemáticas para responder preguntas*. Después de valorar el éxito de convocatoria de las cinco primeras ediciones y de constatar el impulso que el proyecto representa para que centros escolares, profesorado y alumnado dispongan de una plataforma para poder empezar a plantear formas diferentes de trabajar y abordar las matemáticas en el aula, se continuará con el proyecto durante el 2018.


ISBN 978-84-945722-3-4

Al término *vídeoMAT* le acompaña un subtítulo que lo define bien: *matemáticas para responder preguntas*. Se trata de una propuesta de creación de videos cortos (de un máximo de tres minutos) en los cuales, a partir de una pregunta, el alumnado trabaja en equipo, poniendo de manifiesto la presencia de las matemáticas en el entorno o exponiendo alguna de sus aplicaciones en ámbitos como la ciencia, la tecnología, el arte, la economía, la sociedad en general...

Se trata de un proyecto colectivo en que, con las aportaciones de los equipos participantes, se irá construyendo progresivamente una colección de videos que estará a disposición de todo el profesorado y que podrá utilizar en sus clases, de forma directa o como "fuente de inspiración". Para estimular la participación y reconocer el esfuerzo de los diversos equipos el *vídeoMAT* se plantea en forma de proyecto abierto a todas las etapas educativas, otorgando unos premios especiales para las producciones más destacadas y para las más votadas por el público. Con esta última votación se pretende incentivar que los equipos (incluyendo toda la escuela, amistades, familiares...) vean diversos videos realizados por otros participantes. Si bien parece natural que sea el profesorado quien lleve la iniciativa del proyecto, se pretende que sea el alumnado quien lo desarrolle, ayudado por los y las docentes con una intensidad que dependerá de la etapa educativa. Se pretende así contribuir a promover una vivencia de las matemáticas que incorpore su funcionalidad y que implique la necesidad de comunicar de manera clara y creativa.

El vídeoMAT se estructura en cuatro categorías:

- Educación Infantil y Ciclo Inicial de Educación primaria
- Ciclo Medio y Superior de Educación Primaria
- 1º, 2º y 3º de la ESO
- 4º de ESO y Bachillerato

El proyecto vídeoMAT está coorganizado por el CESIRE CREAMAT (Centre de Recursos per Ensenyar i Aprendre Matemàtiques del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya), el MMACA (Museu de Matemàtiques de Catalunya), la FEEMCAT (Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya) y la Societat Catalana de


ISBN 978-84-945722-3-4

Matemàtiques (filial de l'Institut d'Estudis Catalans), y cuenta con la colaboración del proyecto *Cinema en curs*, el soporte económico de la Fundación CELLEX y de la Fundación Bancaria "la Caixa". Al frente del proyecto hay un equipo organizador que se encarga de velar por el correcto funcionamiento de todo el proceso.

Como ya hemos comentado, uno de los propósitos principales del vídeoMAT consiste en ir construyendo progresivamente una colección de videos que puedan ser utilizados en las clases para que el alumnado, a través del video que han creado otros alumnos, descubra aplicaciones de las matemáticas que pueden resultar motivadoras y sorprendentes.

La colección consiste en dos listas de reproducción de YouTube correspondiente a cada edición, una para Educación Infantil y Educación Primaria y otra para ESO y Bachillerato, que enlazan con los diferentes videos seleccionados.

Los videos seleccionados de las cinco primeras ediciones se pueden consultar en los siguientes enlaces:

- Colección permanente de Educación infantil y primaria del vídeoMAT2017
- Colección permanente de ESO y Bachillerato del vídeoMAT2017
- Colección permanente de Educación infantil y primaria del vídeoMAT2016
- Colección permanente de ESO y Bachillerato del vídeoMAT2016
- Colección permanente de Educación infantil y primaria del vídeoMAT2015
- Colección permanente de ESO y Bachillerato del vídeoMAT2015
- Colección permanente de Educación Infantil i primaria del vídeoMAT2014
- Colección permanente de  ESO y Bachillerato del vídeoMAT2014
- Colección permanente de Educación infantil y primaria del vídeoMAT2013
- Colección permanente de ESO y Bachillerato del vídeoMAT2013

Esta colección puede servir como banco de ideas para proponer a los alumnos preguntas que aparecen en uno de los videos y contrastar la respuesta con la que ha presentado el centre participante.


ISBN 978-84-945722-3-4

Todos los vídeos presentados se han de acoger a una licencia Creative Commons BY-NC-SA (Reconocimiento – No Comercial – Compartir por Igual)

**Datos de participación**

A continuación podemos ver el resumen de los datos de participación de las diferentes ediciones.

**Videos presentados**

| | **2013** | **2014** | **2015** | **2016** | **2017** |
|---|---|---|---|---|---|
| EI y CI de EP | 29 | 35 | 27 | 36 | 39 |
| ESO y Bachillerato | 94 | 73 | 87 | 102 | 97 |
| Total | 130 | 108 | 114 | 138 | 139 |

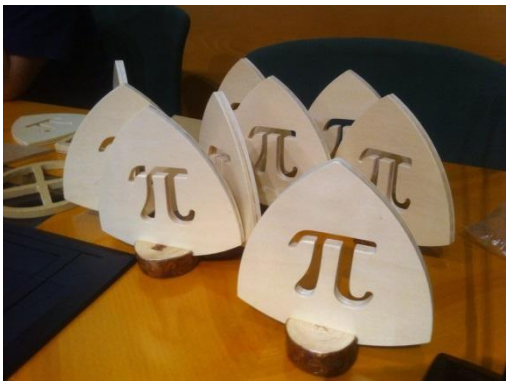
**Participación**

| | **2013** | **2014** | **2015** | **2016** | **2017** |
|---|---|---|---|---|---|
| Centros | 60 | 65 | 57 | 71 | 63 |
| Alumnos | 1044 | 2000 | 1750 | 1583 | 1887 |

En el concurso han participado principalmente centros de Catalunya y, en las últimas ediciones, se han incorporado algunos centros de Baleares y la Comunidad Valenciana. Todos los centros participantes reciben como premio un material manipulativo y chapas conmemorativas para cada uno de los alumnos participantes.

Los videos ganadores (seis premios especiales otorgados por un jurado de más de 30 personas relacionados con el mundo de la educación y el mundo audiovisual y dos por la votación del público) reciben además un premio extra relacionado con el mundo audiovisual y el trofeo propio del certamen: el “Pi de pi” (Pi dentro de un triángulo de Reuleaux realizado en madera de pino)


ISBN 978-84-945722-3-4



Los criterios que utiliza el jurado para valorar los videos presentados son:

- El interés de la pregunta en el marco del ámbito de presencia o aplicación de las matemáticas.
- La corrección y la coherencia de los contenidos matemáticos que se trabajan.
- La adecuación de la respuesta a la pregunta formulada.
- La claridad en la exposición de la respuesta o del proceso con el cual se ha llegado.
- La adecuación del discurso narrativo y visual al servicio de lo que se quiere explicar.
- La originalidad y la creatividad de la producción y de la puesta en escena.
- La adecuación, atendiendo al nivel educativo, de la implicación del alumnado en todas las fases del proceso de creación del video.
- La utilización de música i imágenes propias, libres o de las que se tengan los derechos de uso.

Más allá del hecho que se otorguen estos premios especiales la idea que quiere fomentar el *vídeoMAT* es que se trata de un proyecto de trabajo colaborativo del cual todos los participantes forman parte y esto ya representa un éxito de todos.

**Soporte al profesorado**

En la web del proyecto el profesorado dispone de documentación de soporte relacionada con: cómo trabajar el vídeoMAT en el centro; cómo han de ser las preguntas; orientaciones sobre comunicación audiovisual; orientaciones referentes a la protección de datos, de imágenes y derechos intelectuales y recursos de producción y postproducción audiovisual.


ISBN 978-84-945722-3-4

En tres de las cinco ediciones se ha llevado a cabo un curso de formación intensivo de dos fines de semana para el profesorado participante en el cual se ponen en la piel del alumnado y en el que en pequeños grupos tienen que realizar un video factible de ser presentado al certamen.

Para ello contamos con la ayuda de profesionales del mundo audiovisual que guían todo el proceso: formulación de preguntas para aprender matemáticas, recursos audiovisuales, orientaciones para hacer el guión, secuenciación y planificación del video y finalmente el rodaje. Todos los materiales de la formación se comparten en abierto en la web del proyecto.

**Conclusiones finales**

Creemos que el *vídeoMAT* es una muy buena forma de aprender matemáticas en contexto y desarrolla de forma natural las "4 C" del proceso de aprendizaje: Colaboración, Comunicación, Creatividad y Pensamiento Crítico.

Nos permite trabajar cualquier tipos de contenidos y competencias y se adapta perfectamente a diferentes formas de organización de aula (trabajo en pequeños grupos, ya sea en la misma propuesta o en diferentes, trabajo en gran grupo, trabajo fuera del aula, etc. ) lo que permite adaptarse a gran cantidad de situaciones. También se adapta a diferentes metodologías de aula, como puede ser el trabajo de investigación, trabajo por proyectos, trabajos de experimentación, etc.

Por lo tanto creemos que es una herramienta muy potente para fomentar el trabajo competencial por parte de los alumnos.

**Web del proyecto**

www.vídeoMAT.cat



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.128

# ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS DE MAESTROS DE EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA

Elena Castro-Rodríguez – Esperanza López-Centella – María Luisa López
elenacastro@ugr.es – esperanza@ugr.es – lmarisa@correo.ugr.es
Universidad de Granada, España

Núcleo temático: Aspectos socioculturales de la Educación Matemática.
Modalidad: Comunicación breve.
Nivel educativo: Formación y actualización docente.
Palabras clave: Actitud matemática; Ansiedad; Autoconfianza; Maestros en activo.

**Resumen**
*En este trabajo analizamos las respuestas de 36 maestros de Educación Primaria e Infantil sobre los constructos ansiedad y autoconfianza hacia la enseñanza de las matemáticas. Para ello aplicamos dos cuestionarios, un primer cuestionario de escala tipo Likert y un segundo de respuesta abierta con el que se profundiza en algunos de los temas tratados. En los resultados se aprecia que los maestros obtienen buena puntuación en ambas dimensiones.*

## Introducción

Los factores afectivos adquieren especial relevancia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Fennema y Sherman, 1976). De entre estos factores destacan las actitudes hacia las matemáticas, ya que unas actitudes positivas son determinantes en el aprendizaje de los contenidos matemáticos (Auzmendi, 1992).

A lo largo de la escolaridad, los docentes influyen en gran medida en la formación de actitudes hacia las matemáticas, así como en la motivación hacia su estudio (Mato y De la Torre, 2010). Por ello, dado que las experiencias de la infancia caracterizan el desarrollo físico y cognitivo de los niños, es fundamental que los docentes encargados de la enseñanza de las matemáticas en las primeras etapas de la escolaridad presenten actitudes favorables hacia ellas.

En las últimas décadas, se ha incrementado el interés en el área de investigación de los factores afectivos en relación con las matemáticas (Gairín, 1991). Consecuencia de ello son los numerosos estudios realizados, algunos de ellos centrados en las actitudes de estudiantes de diferentes niveles (Eshun, 2004; Mato y De la Torre, 2010; Pérez-Tyteca, Castro, Rico, y


ISBN 978-84-945722-3-4

Castro, 2011), profesores en formación (Aljaberi, 2014; Casis, Rico y Castro, 2017; Jong y Hodges, 2015; Sánchez, 2013) y, en menor medida, profesores en activo (Castro de Bustamante, 2002; Karp, 1991). En este contexto, el presente trabajo tiene como objetivo estudiar los constructos ansiedad y autoconfianza hacia la enseñanza de las matemáticas, considerados parte de los descriptores de la actitud hacia las matemáticas, que presentan un grupo de maestros de Educación Infantil y de Educación Primaria.

**Actitudes hacia las matemáticas**

Dentro del área de Educación Matemática, se ha hecho un notorio esfuerzo por dilucidar la noción de actitud. Aiken (1970) define las actitudes como modos de actuación derivados de sentimiento o pensamiento, que muestran la opinión y predisposición de una persona. McLeod (1992) liga las actitudes al dominio afectivo, considerándolas como "una respuesta afectiva que incluye sentimientos positivos o negativos de moderada intensidad y estabilidad razonable" (p. 581). En el trabajo de Hannula (2002) se describen las actitudes como "el gusto o el disgusto de un sujeto hacia un objeto familiar", las cuales pueden variar atendiendo a diversos factores. Según Gil, Blanco y Guerrero (2005) la actitud es "una predisposición evaluativa, positiva o negativa, que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento" (p. 20). Callejo (2010) distingue entre actitud hacia las matemáticas y actitud matemática. La primera de ellas se refiere a la valoración y aprecio hacia esta disciplina y al interés por las matemáticas y su aprendizaje.

A pesar de las variadas aproximaciones hacia las actitudes, la literatura coincide en que es un constructo complejo constituido por distintos componentes. En este trabajo adoptamos dicha postura considerando que las actitudes se componen de una variedad de elementos o dimensiones, que han de ser congruentes entre ellas. Específicamente, seleccionamos para su estudio la escala propuesta por Fennema y Sherman (1976) por ser un referente usado con frecuencia en el análisis de actitudes hacia esta materia (Sánchez, 2013). Dicha propuesta incluye nueve dimensiones: utilidad, disfrute, confianza, percepción de las actitudes del profesor, percepción de las actitudes de la madre, motivación, ansiedad, percepción de las actitudes del padre y la matemática como dominio del ser humano. En este trabajo nos centramos en dos de las dimensiones anteriores: ansiedad y autoconfianza, ya que las personas con mayor ansiedad hacia las matemáticas muestran menor confianza en su


ISBN 978-84-945722-3-4

capacidad para enseñar y aprender contenidos de naturaleza matemática (Pérez-Tyteca et al., 2011).

Específicamente, para abordar las dimensiones señaladas, adoptamos los siguientes planteamientos:

- La ansiedad matemática involucra sentimientos de tensión y temor que interfieren en la manipulación de números y la resolución de problemas y tareas matemáticas en una gran variedad de situaciones de la vida ordinaria y académica (Richardson y Suinn, 1972). La ansiedad matemática puede conducir a la fobia hacia la materia, afectando al comportamiento y rendimiento de los estudiantes (Pérez-Tyteca et al., 2011).
- La autoconfianza de una persona hacia las matemáticas se caracteriza como una componente particular de la percepción que tiene un individuo sobre sí mismo (Reyes, 1984). En esta percepción es determinante la habilidad que el sujeto tenga con la materia (Castro de Bustamante, 2002).

## Metodología

El presente estudio es de tipo encuesta, para el que se ha realizado un diseño no experimental.

*Muestra*

La muestra seleccionada ha sido intencional. Los participantes fueron 36 docentes de Educación Infantil y de Educación Primaria. Del total, 9 imparten docencia en la etapa de Educación Infantil y 27 en Educación Primaria. A su vez, estos docentes ejercen su labor en tres centros, dos de la provincia de Granada y uno de Barcelona.

*Instrumento*

El instrumento utilizado para recoger los datos lo forman dos cuestionarios. El primero fue una escala de actitud tipo Likert. Particularmente, realizamos una readaptación de los ítems empleados por Fennema y Sherman (1976) sobre las dimensiones ansiedad y autoconfianza. Esta readaptación fue necesaria debido a las características de la muestra, maestros en activo. Dentro de cada una de las dimensiones consideradas, ansiedad y autoconfianza, se establecen una serie de subdimensiones que abarcan un conjunto de ítems como se muestra en la Tabla 1. Estos ítems se encuentran redactados tanto de manera positiva como de forma negativa y


ISBN 978-84-945722-3-4

constan de cinco posibles respuestas, con un valor asociado que varía de 1 (totalmente en desacuerdo) a 5 (totalmente de acuerdo).

Tabla 1. Dimensiones y subdimensiones del cuestionario aplicado

| Dimensión | Subdimensiones | Ítems |
|---|---|---|
| Ansiedad | Ansiedad como disciplina | 1, 2, 6, 7, 11 |
| | Ansiedad hacia la resolución de problemas | 3, 8, 9 |
| | Ansiedad a la hora de evaluar | 4, 5, 10 |
| Autoconfianza | Autoconfianza como capacidad percibida | 12, 13, 14, 15, 16, 17 |
| | Autoconfianza en la comparación con otras asignaturas | 18, 19 |

El segundo instrumento empleado fue un cuestionario con preguntas abiertas con el fin de profundizar en las respuestas dadas en el primer cuestionario por un subgrupo muestral.

**Análisis de datos y resultados del primer cuestionario**

El análisis de los datos y los resultados obtenidos en el primer cuestionario se presentan en dos apartados que corresponden a las dimensiones ansiedad y autoconfianza. En el análisis, los ítems son considerados como variables cualitativas ordinales (o variables casi cuantitativas) donde el intervalo entre valores de la escala se presume uniforme. En las tablas de resultados los ítems redactados en forma negativa en el cuestionario original son mostrados en rojo, si bien por la facilidad en la interpretación de los datos, se han invertido las puntuaciones obtenidas. De esta manera, las puntuaciones de los ítems positivos y negativos quedan unificadas considerándose el valor 1 como el menos positivo y el 5 el más positivo.

*Análisis de la dimensión ansiedad*

Para el estudio de la ansiedad se utilizaron las respuestas de los sujetos a 11 ítems. En la tabla 2 se presenta la redacción de cada ítem junto con los resultados obtenidos.

Tabla 2. Mediana, moda, mínimo, máximo, media y desviación típica de las modalidades de los ítems que integran la escala de ansiedad.

| Ítem | Mediana | Moda | Mínimo | Máximo | Media | Desviación típica |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. No tengo ningún miedo a las matemáticas. | 5 | 5 | 1 | 5 | 4,61 | 0,803 |
| 2. Me gustaría ampliar mis conocimientos matemáticos. | 4,5 | 5 | 1 | 5 | 4,25 | 0,996 |
| 3. Normalmente no me preocupo sobre si mis alumnos son capaces de resolver los problemas que les propongo. | 1 | 1 | 1 | 5 | 1,86 | 1,150 |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Tabla 2. Mediana, moda, mínimo, máximo, media y desviación típica de las modalidades de los ítems que integran la escala de ansiedad.

| Ítem | Mediana | Moda | Mínimo | Máximo | Media | Desviación típica |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4. Casi nunca me pongo nervioso/a cuando enseño matemáticas. | 5 | 5 | 1 | 5 | 4,36 | 0,899 |
| 5. Normalmente estoy tranquilo/a cuando evalúo lo que mis alumnos han aprendido durante la clase de matemáticas. | 4,5 | 5 | 2 | 5 | 4,33 | 0,828 |
| 6. Normalmente, las matemáticas me hacen sentirme molesto/a y nervioso/a. | 5 | 5 | 2 | 5 | 4,78 | 0,591 |
| 7. Con las matemáticas me siento incómodo/a, inquieto/a, irritable e impaciente. | 5 | 5 | 3 | 5 | 4,78 | 0,485 |
| 8. Me pongo malo/a cuando tengo que resolver los problemas para mis alumnos. | 5 | 5 | 3 | 5 | 4,83 | 0,447 |
| 9. Cuando resuelvo los problemas de matemáticas de mis alumnos, se me queda la mente en blanco y no soy capaz de pensar con claridad. | 5 | 5 | 4 | 5 | 4,83 | 0,378 |
| 10. Crear una prueba de evaluación de matemáticas para mis alumnos me da miedo. | 5 | 5 | 4 | 5 | 4,86 | 0,351 |
| 11. Las matemáticas me hacen sentir preocupado/a y nervioso/a. | 5 | 5 | 4 | 5 | 4,94 | 0,232 |

Como se observa en la tabla 2, todos los ítems reciben valoraciones positivas. Los ítems que reciben una puntuación más baja son el ítem 2 relativo al deseo de ampliar conocimientos matemáticos, y el ítem 5 que refleja la ansiedad ante la evaluación. En el lado opuesto, se encuentran el ítem 1, relativo a los sentimientos de preocupación y nerviosismo antes las matemáticas, con el resultado más alto.

*Análisis de la dimensión autoconfianza*

Para el estudio de la autoconfianza se utilizaron las respuestas de los sujetos a 8 ítems. En la tabla 3 se presenta la redacción de cada ítem junto con los resultados obtenidos de los estadísticos descriptivos.


ISBN 978-84-945722-3-4

Tabla 3. Mediana, moda, mínimo, máximo, media y desviación típica de las modalidades de los ítems que integran la escala de autoconfianza.

| Ítem | Mediana | Moda | Mínimo | Máximo | Media | Desviación típica |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 12. Me siento seguro/a de mí mismo/a cuando realizo la explicación de las tareas de matemáticas que tienen que hacer mis alumnos. | 4,5 | 5 | 1 | 5 | 4,39 | 0,80 |
| 13. Estoy seguro/a de que podría abordar la enseñanza de tareas más complejas para mis alumnos. | 4 | 4 | 3 | 5 | 4,22 | 0,72 |
| 14. Puedo conseguir que mis alumnos saquen buenas notas en matemáticas. | 4 | 4 | 3 | 5 | 4,25 | 0,65 |
| 15. No tengo capacidad para enseñar matemáticas a mis alumnos. | 5 | 5 | 2 | 5 | 4,81 | 0,57 |
| 16. No creo que pudiera enseñar matemáticas en cursos superiores. | 5 | 5 | 1 | 5 | 4,08 | 1,25 |
| 17. No soy el tipo de persona a la que se le da bien enseñar matemáticas. | 5 | 5 | 1 | 5 | 4,33 | 1,09 |
| 18. Lo hago muy bien en el resto de las áreas/asignaturas pero cuando se trata de enseñar matemáticas, realmente lo echo a perder. | 5 | 5 | 3 | 5 | 4,83 | 0,44 |
| 19. Matemáticas es la asignatura/área que enseño peor. | 5 | 5 | 2 | 5 | 4,74 | 0,66 |

Al igual que en la dimensión anterior, todos los ítems sobre autoconfianza reciben valoraciones positivas. En la tabla 3 se observa que los ítems que reciben una puntuación más baja son el ítem 16 y el ítem 13, ambos relativos a abordar una enseñanza de temas matemáticos más complejos que los que actualmente enseñan los sujetos. Esto revela que los sujetos no se consideran capaces de enseñar matemáticas a un nivel superior. En caso contrario, se encuentran el ítem 18 relativo a una deficiente enseñanza de las matemáticas en relación con otras áreas, y el ítem 15 sobre su capacidad general de enseñar matemáticas.

**Análisis de los datos y resultados del segundo cuestionario**

Los docentes encuestados por medio de este segundo cuestionario manifestaron que su formación en matemáticas y su didáctica proviene, fundamentalmente, del estudio de los libros, tanto del alumno como del profesor, seguidos en el aula, y de las asignaturas de matemáticas cursadas a lo largo de sus estudios universitarios. En general, los sujetos



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

declararon no sentir nerviosismo en sus clases de matemáticas sino más bien un sentimiento de relajación y agrado motivado por la percepción de la diversión de su alumnado en las clases de matemáticas y por la preparación de sus clases con suficiente antelación. Entre los motivos por los que creen que sus alumnos tienen éxito en matemáticas se encuentran: su diversión en el aprendizaje de las matemáticas, dada la interactividad de los juegos realizados en el aula, y la repetición de dinámicas. En general, consideran que las sesiones pueden hacerse más atractivas mediante la introducción de juegos, de gran cantidad de ejemplos y el empleo de metodologías activas. Entre sus capacidades más desarrolladas las respuestas son variadas: el entusiasmo y la claridad en su transmisión de conocimientos, la visualización en la elaboración de esquemas y la utilización de dibujos de apoyo en sus explicaciones.

**Conclusiones**

Al contrario que ocurre cuando los maestros se encuentran cursando sus estudios universitarios (Pérez-Tyteca et al., 2011; Sánchez, 2014), los resultados obtenidos revelan que los maestros participantes no muestran ansiedad ante el proceso de enseñanza de las matemáticas, y manifiestan confianza en sí mismos como docentes de esta materia. En este ámbito, la evaluación es la subdimensión que presenta puntuaciones más bajas. Según los sujetos, sus buenas actitudes y sentimientos están ligados a la actuación de sus alumnos en el aula, pues observan su disfrute durante el desarrollo de la clase. Otros de los motivos es la planificación de su actuación y la realización de metodologías activas, ya que ambos les ayudan a tener mayor seguridad al enseñar matemáticas.

No obstante, a pesar de que los resultados se muestran positivos, destaca que los sujetos no consideran necesario ampliar sus conocimientos sobre la materia. Esta falta de motivación por aprender nuevos conocimientos, debiera ser considerada como tema de reflexión en los cursos de formación, ya que puede producir un estancamiento en su enseñanza.

**Agradecimientos**

Este trabajo se enmarca dentro del Proyecto «Conocimiento Didáctico del Profesor y Aprendizaje de Conceptos Matemáticos Escolares» (EDU2015-70565-P) del Plan Nacional de I+D+I y del Grupo “FQM-193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” de la Junta de Andalucía.

**Referencias bibliográficas**


ISBN 978-84-945722-3-4

Aiken, L. R. (1970). Attitudes toward mathematics. *Review of Educational Research, 40*(4) 551-596.

Aljaberi, N. M. (2014). Pre-Service elementary school teachers' level of mathematical thinking and their attitudes toward mathematics. *Journal of Education and Human Development, 3*(3), 181-195.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Bilbao: Ediciones Mensajero.

Callejo, M. L. (2010). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid: Narcea Eds.

Casis, M., Rico, N. y Castro, E. (2017). Motivación, autoconfianza y ansiedad como descriptores de la actitud hacia las matemáticas de los futuros profesores de educación básica de Chile. *PNA, 11*(3), 181-203.

Castro de Bustamante, J. (2002). Análisis de los componentes actitudinales de los Docentes hacia la enseñanza de la Matemática. Tesis doctoral. Universitat Rovira i Virgili. Tarragona, España.

Eshun, B. A. (2004). Sex-differences in attitude of students towards mathematics in Secondary schools. *Mathematics Connection, 4,* 1-13. doi:10.4314/mc.v4i1.21495

Fennema, E. y Sherman, J.A. (1976) Fennema-Sherman Mathematics attitudes scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of Mathematics by females and males. *Journal for Research in Mathematics Education ,7*(5), 324-326.

Gairín, J. (1991). *Las Actitudes en educación: Un estudio sobre Educación Matemática*. Barcelona: Boixaren Universitaria.

Gil, N., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *UNION, 2,* 15-32.

Hannula, M. S. (2006). Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics, 63*(2), 165-178.

Jong, C. y Hodges, T. E. (2015). The influence of elementary preservice teachers' mathematical experiences on their attitudes towards teaching and learning. *Mathematics International Electronic Journal of Mathematics Education, 8* (2-3), 100-122.

Mato, M. D. y De la Torre, E. (2010). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. *PNA, 5*(1), 197-208.


ISBN 978-84-945722-3-4

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualisation. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). Reston, VA: NCTM.

Karp, K. (1991). Elementary school teachers' attitudes toward mathematics: The impact on students' autonomous learning skills. *School Science and Mathematics, 91*(6), 265- 270.

Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (2011). Ansiedad matemática, género y ramas de conocimiento en alumnos universitarios. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(2), 237-250.

Reyes, L. H. (1984). Affective variables and mathematics education. *The Elementary School Journal, 84*(5), 558-581.

Sánchez, J. (2013). Actitudes hacia las matemáticas de los futuros maestros de Educación Primaria (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Richardson, F. C. y Suinn, R.M. (1972). The Mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. *Journal of Counseling Psychology*, *19*(6), 551.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.129

# COMPETENCIAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS DE DOCENTES UNIVERSITARIOS PERUANOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES: UN ESTUDIO DE CASO

Teresa Sofía Oviedo Millones – Luis Roberto Pino-Fan
sovmila@gmail.com – luis.pino@ulagos.cl
Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú - Universidad de Los Lagos, Chile

Núcleo temático: Formación del Profesorado en Matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Universitario/Formación y actualización docente
Palabras clave: Enfoque Ontosemiótico, competencia docente, Modelo del conocimiento didáctico-matemático, Modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas.

**Resumen**

*En esta investigación se presenta un caso, de un estudio múltiple, mediante el cual se ejemplifica la caracterización de las competencias didáctico-matemáticas de profesores universitarios peruanos en la enseñanza de la noción de función. Para este fin se toma como marco de referencia el modelo denominado Conocimiento y Competencias Didáctico Matemáticas (CCDM) del profesor de matemáticas (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016; Breda, Pino-Fan y Font, en prensa), el cual se encuentra basado en el Enfoque Onto-semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007). Como resultado se muestran las características de la práctica del profesor bajo estudio, que es común en el resto de los profesores observados, en los cuales se priorizan conocimientos y competencias de tipo epistémico, por sobre otras competencias relevantes para la gestión de los aprendizajes de los estudiantes. Así mismo, a nivel teórico se corrobora que los criterios de idoneidad didáctica que propone el EOS son una herramienta analítica potente para el estudio tanto de las competencias didácticas de los profesores, como para la reflexión de los profesores sobre su propia práctica.*

## Introducción

Los docentes cumplen un papel de gran importancia en la enseñanza y aprendizaje de sus alumnos. El aprendizaje de la matemática en muchos casos se hace muy dificultoso para los estudiantes. Es por ello que, para que los alumnos desarrollen competencias (integración de conocimientos, habilidades y actitudes), el docente debe estar preparado no sólo en su conocimiento matemático, sino en la didáctica y todo lo que implica ello. Es decir, de acuerdo con Godino, Batanero y Font (2007), el docente debe ser capaz de analizar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando las prácticas, objetos y procesos puestos


ISBN 978-84-945722-3-4

en juego, a fin de adaptar cada problema al contexto educativo y formular nuevos problemas. "El desarrollo de dicha competencia es un desafío para los formadores de profesores, debido a la diversidad de dimensiones y componentes a tener en cuenta" (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016, p. 286).

Muchas son las investigaciones sobre el conocimiento matemático y didáctico, por ejemplo, Shulman (1987), Llinares y Kraimer (2006) Godino (2009). En Pino-Fan y Godino (2015) se propone un modelo teórico conocido como "el modelo del conocimiento didáctico-matemático" (CDM), el cual es un referente en esta investigación. Posterior a este modelo, Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016) propusieron un modelo que trata de articular diversas categorías de conocimientos y competencias didácticas del profesor de matemáticas, denominado "modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas" (CCDM). De acuerdo a estos investigadores, en este modelo se toma como indicador de competencia a la acción eficaz realizada en un determinado contexto con una finalidad.

En esta investigación mostraremos algunos resultados de las competencias didáctico-matemáticas de docentes universitarios en la enseñanza de las funciones aplicando el modelo CCDM, previo al análisis usando el modelo CDM. Por razones de espacio y considerando que los resultados son análogos, mostraremos los análisis de las competencias para uno de los tres docentes participantes.

Resaltamos que son competencias que se pueden deducir porque, por el momento, no podemos afirmar las competencias exactas existentes de los docentes en estudio ya que para ello, se requerirá contar con la entrevista a este docente (que está en proceso de realizarse).

A continuación presentamos el marco teórico, metodología, resultados y conclusiones de la presente investigación.

**Marco teórico**

Esta investigación se sustenta en el modelo teórico: "modelo de los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas" (CCDM) (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016; Breda, Pino-Fan y Font, *en prensa*) que trata de articular diversas categorías de conocimientos y competencias didácticas del profesor de matemáticas. Este modelo proporciona herramientas que permiten distinguir cinco subcompetencias, dentro de la competencia general de análisis e intervención didáctica propia del profesor de matemáticas. Este modelo está basado en las herramientas teórico-metodológicas del EOS, que


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

proporciona criterios para categorizar los conocimientos y las competencias, además que orienta a diseño de acciones para una mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Las principales herramientas teóricas que, de acuerdo con Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016) incluye el EOS: 1) sistema de prácticas (operativas y discursivas); 2) configuración de objetos y procesos; 3) configuración didáctica; 4) la dimensión normativa, o sistema de reglas y 5) la idoneidad didáctica. Esta última se refiere a la adecuación y pertinencia de los conocimientos, recursos, acciones dentro del proceso de estudio matemático.

Por otro lado, el modelo CCDM toma en cuenta las dimensiones del modelo CDM, éstas son: 1) la dimensión matemática, que propone dos categorías globales del conocimiento sobre el contenido matemático, conocimiento común y conocimiento ampliado del contenido; 2) la dimensión didáctica, que comprende seis facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional; y 3) la dimensión metadidáctico-matemática.

El modelo CCDM presenta la competencia general de diseño e intervención didáctica, propia del profesor de matemáticas que se compone de cinco sub-competencias, de acuerdo con Godino, Batanero, Font y Giacomones (2016). Mostraremos el análisis de tres de ellas que son: 1) competencia de análisis de significados globales, esta competencia se requiere cuando el profesor trata de dar respuesta a las cuestiones ¿cuáles son los significados del objeto matemático (por ejemplo, cuáles son los diferentes significados de función? ¿Cómo se articulan entre sí? 2) competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas. El profesor debe ser capaz de responder a las cuestiones ¿cuáles son las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados en la resolución que son característicos de los diversos significados de los contenidos pretendidos? (configuraciones epistémicas) y ¿cuáles son las configuraciones de objetos y procesos puestas en juego por los alumnos en la resolución de los problemas (que el docente propone en la fase de diseño de su clase) (configuraciones cognitivas); 3) competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas, la cual se aprecia con las siguientes interrogantes: ¿qué tipos de interacciones entre personas y recursos se implementan en los procesos instruccionales y cuáles son sus consecuencias sobre el aprendizaje? y ¿cómo gestionar las interacciones para optimizar el aprendizaje?. Las otras dos competencias que sólo mencionamos son: 4) competencia de análisis normativo; y 5) competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica.


ISBN 978-84-945722-3-4

## Metodología

La metodología que se utilizó fue la metodología cualitativa correspondiente a un estudio de caso. Se realizó la transcripción y análisis de las dos primeras clases (220 minutos) de tres docentes universitarios en el tema de función correspondiente al primer semestre académico. Fueron 60, 58 y 60 alumnos respectivamente matriculados en este curso para cada uno de los profesores en estudio. La fuente de datos fueron las grabaciones de clase de los docentes en estudio, mediante la técnica de observación no participativa.

Los análisis de las transcripciones de clase se realizaron de acuerdo al modelo denominado: "modelo del conocimiento didáctico-matemático" que también se basa en las herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática, haciéndose así posible analizar, interpretar y caracterizar los conocimientos de los profesores de matemáticas, muestra de estudio.

La técnica de entrevista, es parte de una investigación en proceso. Sin embargo, se pueden deducir implícitamente, de los resultados de los análisis de las transcripciones de clase, las competencias de los docentes en estudio, que muestran en sus primeras clases respecto a la función.

## Resultados

Hechos los análisis de las transcripciones de clase, utilizando las herramientas del EOS, y los instrumentos de valoración de la idoneidad didáctica, basados en los componentes e indicadores de la idoneidad didáctica dados en Breda, Pino-Fan y Font (*en prensa*), se procedió a caracterizar los conocimientos didácticos y matemáticos del docente en estudio, en dos de las tres dimensiones del modelo CDM: la dimensión matemática y la dimensión didáctica (aquí solo abordamos las facetas epistémica, mediacional e interaccional). Realizado esto, se procedió a deducir implícitamente las siguientes competencias: competencia de análisis de significados globales, competencias de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas y competencias de análisis y gestión de configuraciones didácticas. A continuación presentamos estos resultados:

**Competencia de análisis de significados globales:** los análisis respecto a la dimensión matemática en el sistema de prácticas matemáticas (primer nivel del EOS) muestra que el docente tiene competencia en los significados del objeto matemático función. Así, hicimos las dos preguntas a esta competencia en relación a los análisis de las transcripciones de clase.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Respondiendo a la pregunta: ¿cuáles son los significados del objeto matemático función? Observamos que el docente aplicó en sus clases cuatro de los seis significados histórico-epistemológicos de la función (Parra, 2015). Estos significados dados por el docente fueron: la función como correspondencia, la función como expresión analítica, la función como correspondencia arbitraria y la función a partir de la teoría de conjuntos. Respecto a la pregunta: ¿cómo se articulan entre sí (los significados del objeto matemático función)? Pudimos observar que el docente utilizó los registros de representación semiótica (Duval, 2004) articulando estos significados mediante tratamientos y conversiones del objeto función. Como la coordinación de varios registros semióticos ayuda a disminuir las dificultades y obstáculos en el aprendizaje, podemos considerar que el docente tiene competencia en la articulación de los significados de la función. En conclusión, al ser positivas las dos respuestas a las preguntas mencionadas anteriormente, podemos decir que el docente mostró competencia en los análisis de significados globales.

**Competencias de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas:** respecto al análisis de las transcripciones de clase, para responder a la pregunta: ¿cuáles son las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados en la resolución que son característicos de los diversos significados de los contenidos pretendidos? (configuraciones epistémicas), presentamos la Tabla 1: componentes y descriptores de la idoneidad epistémica (matemática) que utilizamos como instrumento para el análisis de la transcripción de las clases del docente en estudio.

Tabla 1

*Componentes e indicadores de la faceta epistémica (matemática).*

| Componentes | Indicadores |
|---|---|
| Situaciones-problemas | Selección de una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.<br>¿Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)?<br>¿La situación planteada corresponde al nivel educativo de los estudiantes? |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

| | |
|---|---|
| Elementos linguísticos | Uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), traducciones y conversiones entre los mismos.<br>Nivel adecuado del lenguaje para el nivel a que se dirige.<br>¿Se promueve la expresión e interpretación? |
| Elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos) | Definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo a que se dirigen.<br>¿Se presentan los enunciados y procedimientos básicos del tema?<br>¿Se promueve la generación y negociación de las definiciones, procedimientos? |
| Argumentos | Adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen.<br>¿Se promueven momentos de generación y negociación de argumentos, de validación? |
| Relaciones (conexiones, significados) | ¿Se relacionan y articulan de manera significativa los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan? |

*Fuente*: Godino (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Algunos de los resultados del análisis de las transcripciones de clase, muestra que sólo en la parte introductoria del tema de funciones, de la primera clase dada, explica considerando situaciones extramatemáticas, considerando los conocimientos previos de los alumnos: función, dominio, rango, función lineal, etc. A partir de estas situaciones extramatemáticas, el docente institucionaliza algunos conceptos relacionados al tema de función: función, relación, dominio y rango. Sus argumentos van de lo particular a lo general. Posterior a ello sólo se restringe a explicar ejercicios de funciones en términos algorítmicos-algebraicos, éstos son propios del nivel del currículo (sílabo) de enseñanza universitaria al que se dirige, manteniendo sus argumentos de lo general a lo particular. Los objetos matemáticos (situaciones, lenguajes, reglas, argumentos se relacionan de manera significativa, manteniendo el orden de explicación del libro de texto (dado a los alumnos por la institución


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

educativa) que es tradicional: se explica la definición, luego se dan ejemplos que se resuelven algorítmicamente en la que se manifiestan proposiciones y procedimientos). Las proposiciones y procedimientos se centran en lo algoritmo-algebraico. No se promueve a la interpretación.

Respecto a la competencia que observamos, volvemos a la pregunta ¿cuáles son las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados en la resolución que son característicos de los diversos significados de los contenidos pretendidos? Podemos decir que, según lo descrito anteriormente, el docente tiene que adecuar su enseñanza en cuanto a las proposiciones y procedimientos, en la que haya también otros tipos de representación. También el docente tiene que promover momentos de negociación de significados, que los estudiante lleguen, por ellos mismos a la interpretación de los procesos y/o definiciones. Respecto a la otra pregunta ¿cuáles son las configuraciones de objetos y procesos puestas en juego por los alumnos en la resolución de los problemas (que el docente propone en la fase de diseño de su clase) (configuraciones cognitivas) en las clases dadas por el docente en estudio dieron tareas o problemas a los estudiantes, por tanto, no podríamos responder a esta pregunta respecto del docente.

Por lo tanto, este tipo de competencia: competencias de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas, de lo mencionado anteriormente -considerando la primera pregunta- es baja.

**Competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas**: en la que se consideró el análisis de la faceta interaccional y mediacional del modelo CDM.

Pudimos observar, mediante el instrumento, componentes e indicadores de la idoneidad mediacional, que las interacciones docente-discente y discente-discente están, en general, ausentes. El docente logra hacer participar a los estudiantes con preguntas dirigidas, es él el resolutor y expositor en toda la clase. Por lo que a las preguntas: ¿qué tipos de interacciones entre personas y recursos se implementan en los procesos instruccionales y cuáles son sus consecuencias sobre el aprendizaje? Y ¿cómo gestionar las interacciones para optimizar el aprendizaje? consideramos que el docente tiene una competencia muy baja.

En relación a estos tres tipos de competencias, análogo, se hizo el análisis de las transcripciones de clase de los otros docentes de estudio. Por razones de espacio no mostramos estos análisis. Los resultados fueron parecidos para los tres docentes en estudio y mostraron, tal como los resultados que se muestran aquí, que los docentes tienen mayor


ISBN 978-84-945722-3-4

conocimiento y competencias de tipo epistémico en relación a los conocimientos y competencias de tipo interaccional y mediacional.

**Conclusiones**

Conociendo las competencias de los docentes y que los propios docentes conozcan sus competencias es un gran avance en el desarrollo de la gestión de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, en particular de las funciones, que es uno de los temas fundamentales de la Matemática en el cual los estudiantes tienen mucha dificultad en su aprendizaje.

En el Perú se está innovando y poniendo principal atención en la formación por competencias de los estudiantes, tanto en el nivel básico regular como en el universitario. Con esta investigación tratamos de contribuir en la investigación educativa peruana en el campo de formación de profesores, en la que todavía no se han considerado investigaciones con el modelo CCDM en el Perú (como lo constatamos mediante los repositorios de tesis de universidades peruanas de los programas de Maestría y Doctorado en Educación o afines; en revistas académicas indexadas peruanas o en actas de congresos). Con ello, ponemos énfasis en la necesidad de contribuir en el campo de formación de profesores en el Perú mediante investigaciones respecto a las competencias de los docentes en los diversos temas de matemática.

**Referencias bibliográficas**

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (In press). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*

Duval, R. (2004). Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales**.** Universidad del Valle, Colombia.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39(1), 127-135

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. Iberoamericana de educación matemática, 20, 3-31.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. *Investigación en Educación Matemática XX*, 288-297.


ISBN 978-84-945722-3-4

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. PARADIGMA, 36(1), 87-109.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006) Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In: Gutierrez, A.; Boero, P. (Ed.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Rotherdam: Sense Publishers, p. 429-459.

Parra, Y. (2015). *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función* (tesis de Maestría). Recuperado de https://dl.dropboxusercontent.com/u/3280703/TESIS%20MAG%C3%8DSTER_YOCELYN%20PARRA.pdf

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, 57 (1), 1-22.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.130

# A CRIAÇÃO DE VÍDEOS COMO PRODUÇÃO DE CONHECIMENTO NA FORMAÇÃO INICIAL

Juscileide Braga de Castro – Kiara Lima Costa – José Aires de Castro Filho
juscileide@virtual.ufc.br – quimatufc@gmail.com -aires@virtual.ufc.br
Universidade Federal do Ceará (UFC)/Brasil e Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)/Brasil/ Universidade Federal do Ceará (UFC)/Brasil
Núcleo temático: Formação de professores de Matemática
Modalidade: CB
Nível educativo: Formação e atualização de ensino
Palavras chave: formação inicial, criação de vídeos, conhecimento matemático, contextualização

**Resumo**
*As avaliações nacionais brasileiras revelam um baixo nível de proficiência em matemática entre os estudantes da educação básica. Tal dificuldade pode estar associada à falta de relação entre os conteúdos ensinados e o cotidiano dos alunos. Além disso, entende-se também que a formação docente é uma variável para este quadro, já que a formação inicial precisa auxiliar no desenvolvimento dos conhecimentos que compõem a base para o ensino: conceitual, pedagógico e curricular. Diante desta necessidade, desenvolveu-se o Projeto Explorador do Holos que visa produzir vídeos didáticos contextualizados, baseado em conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental. Sendo assim, o objetivo deste trabalho é analisar tais vídeos produzidos na disciplina de Estágio Supervisionado I do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Ceará - Brasil. A abordagem metodológica foi de cunho qualitativo com triangulação e análise interpretativa de dados. Os resultados mostraram que os vídeos produzidos não ficaram restritos aos conceitos matemáticos, mas também, à compreensão dos processos de sua produção, representação e validação epistemológica.. Verificou-se ainda a problematização, a ressignificação e a contextualização de situações, criando um elo entre teoria e prática.*

## Introdução

Avaliações de larga escala aplicadas a alunos brasileiros da Educação Básica, em nível internacional, nacional e local, como: *Program International Students Assessment* (PISA); Prova Brasil, Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Sistema Permanente de Avaliação da Educação do Estado do Ceará (SPAECE) apontam baixos índices de proficiência em Matemática. Apesar de se destacar as dificuldades dos alunos, não se pode perder de vista que a formação docente é uma variável para este quadro. As


ISBN 978-84-945722-3-4

dificuldades para trabalhar com esses conteúdos sofrem influências sociais, culturais, dentre outros fatores. Além de dificuldades conceituais, os professores têm dificuldades em relacionar a Matemática com situações cotidianas, já que existe uma grande diferença entre o que a escola ensina e o que de fato é utilizado na vida social. Desta forma, é necessário transpor os conhecimentos aprendidos na escola para a vida diária, o que, para os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [8] de Matemática, pode ser alcançado com a contextualização (Brasil, 1997; 1998).

A transposição didática e a contextualização podem orientar a atividade do professor e dos alunos de modo a proporcionar a construção de um ambiente de aprendizagem, contudo é um processo complexo, pois envolve a definição do tratamento que deverá ser dado a determinado conteúdo, assim como, tomar decisões didáticas e metodológicas que norteiam a atividade, o que requer a combinação de diferentes tipos de conhecimentos.

Para Schulman (1986, 1987) há pelo menos três categorias distintas de conhecimento que constituem a base para o ensino: o conhecimento específico do conteúdo (*subject knowledge matter*); o conhecimento pedagógico do conteúdo (*pedagogical knowledge matter*) e o conhecimento curricular (*curricular knowledge*).

Diversos estudos (Ball, Thames & Phelps, 2008; Hill, Rowan & Ball, 2005) relacionam a base de conhecimento do professor para ensinar Matemática com o referencial teórico de Shulman (1986, 1987), levando-os ao desenvolvimento da noção de *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) – Conhecimento Matemático para o Ensino. O professor precisa não apenas dominar conceitualmente a Matemática, mas entendê-la de modo a relacioná-la com diferentes realidades e a partir de diferentes métodos (Ball, Thames & Phelps, 2008), sendo conhecimentos necessários a serem desenvolvidos pelos professores desde a formação inicial.

Alguns estudos e práticas de formação de professores (Buzato, 2006; Castro, Costa & Castro-Filho, 2015) têm utilizado as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) como

[8] Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática são referenciais de qualidade elaboradas pelo Governo Federal brasileiro para nortear os professores. Embora não dite regras, serve de referência para a definição de objetivos, conteúdos e didática do ensino. Divide a Matemática em blocos de conteúdos: Números e operações, Espaço e forma, Grandezas e medidas e Tratamento da Informação.


ISBN 978-84-945722-3-4

trabalho de letramento e apropriação tecnológica de futuros professores. Entende-se que as tecnologias digitais podem ser utilizadas como forma de contextualizar a realidade, uma vez que a introdução nesta cultura digital pode proporcionar a compreensão da linguagem multimídia (textos, imagens, sons), contribuindo para a utilização de práticas inovadoras de ensino.

Lévy (1993) explica que as TIC exigem uma maior compreensão do processo de re-significação da realidade uma vez que possibilitam que as pessoas sejam autoras, o que demanda uma maior responsabilidade. Essa abordagem de produção, possibilitada pelas TIC e desenvolvidas por meio de projetos que incentivem a criação, podem desenvolver a criatividade, o senso crítico, a autonomia, a capacidade de trabalhar em grupo, dentre outros aspectos (Castro, Costa & Castro-Filho, 2015).

Desta forma, desenvolveu-se, no âmbito da formação inicial, com estudantes da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Ceará (UFC), o Projeto Exploradores do Holos[9] que visa produzir vídeos didáticos contextualizados baseado em conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental. Sendo assim, o objetivo deste trabalho consiste em analisar tais vídeos, considerando os diferentes tipos de conhecimentos mobilizados. Na seção seguinte, serão dispostos os procedimentos metodológicos da investigação, seguido da discussão dos resultados e considerações finais.

**Procedimentos Metodológicos da Investigação**

Essa investigação realizou-se por meio de Projeto Exploradores do Holos, com uma turma de 38 alunos da disciplina de Estágio Supervisionado I, que estavam no 5° semestre do curso de Licenciatura em Matemática da UFC/Brasil. O projeto teve duração de dois meses, com 8 (oito) encontros semanais. O processo de criação de vídeo foi realizado em grupos, sendo dividido em cinco etapas: 1) definição do tema, 2) pesquisa, 3) roteiro, 4)

[9] O nome do projeto foi escolhido pelos estudantes que após discussões chegaram à conclusão de que apesar da Matemática ser considerada uma ciência complexa por muitas pessoas, ela faz parte de situações das quais estamos envolvidos no cotidiano, mesmo que muitas vezes essa presença pareça imperceptível. Desta forma, lembraram da história da matemática, que contava que na Grécia Antiga, diversos matemáticos acreditavam que toda a matemática estava "guardada" em um lugar (não necessariamente físico) chamado Holos, esperando para ser descoberta. Compreendendo que o referido projeto busca descobrir e compreender, a partir da produção de vídeos, as relações existentes da matemática e do mundo, denominaram-se Exploradores do Holos. Projeto disponível no *blog*: http://exploradoresdoholos.blogspot.com.br/



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

execução e 5) edição. Ao final do projeto foram produzidos 7 (sete) vídeos, listados no quadro 1.

| N° do grupo - vídeo/ Título do Vídeo | Bloco de Conteúdo/ Conceitos | Link do vídeo |
|---|---|---|
| 1. Nina e Kadu estudando a fórmula de Pick | Espaço e forma - Geometria - Cálculo de área e fórmula de Pick | https://www.youtube.com/watch?v=aHnwaCCfpUE |
| 2. Razão e Proporção | Números e operações - proporcionalidade, razão e proporção | https://www.youtube.com/watch?v=ByRKtSt-mW |
| 3. Porcentagem Futebolística | Números e operações e Tratamento da Informação - porcentagem | https://www.youtube.com/watch?v=9lpZhm3-khU |
| 4. Projeto Memes | Números e operações - álgebra - equação do 1° grau | https://www.youtube.com/watch?v=SRAH3vjPdeY |
| 5. Pipas e Matemática | Espaço e forma - Geometria - Polígono, quadriláteros (lados, vértice, diagonal, perpendiculares) | https://www.youtube.com/watch?v=V_BrPKDnYY8 |
| 6. Fração Nossa de Cada Dia | Números e operações - Fração: representação, fração equivalente | https://www.youtube.com/watch?v=_Alib4QMKW4 |
| 7. Meme Show | Números e operações - álgebra - razões trigonométricas, equação | https://www.youtube.com/watch?v=Rm7KCfLsGeU&t=266s&spfreload=10 |

**Quadro 1. Vídeos produzidos durante Projeto Exploradores do Holos**

Esta pesquisa é caracterizada como qualitativa com análise interpretativa de dados. A análise dos dados considerou como base teórica Schulman (1986, 1987) os vídeos produzidos, as postagens realizadas no *blog* do projeto e/ou no *Youtube* e transcrições de áudios realizadas durante o projeto, analisados por meio de triangulação de dados.A seguir, discutir-se-á os resultados das análises.

**Discussão dos resultados**

Os resultados das análises dos vídeos serão destacados em três categorias: conhecimento específico do conteúdo, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular, de acordo com Schulman (1986, 1987); destacadas em seguida.

*Conhecimento específico do conteúdo*

Em relação ao conhecimento específico do conteúdo, procurou-se identificar a compreensão conceitual da matemática, mas, sem restringir aos fatos e conceitos disciplinares (Shulman, 1986; 1987). De acordo com o quadro 1, os estudantes mobilizaram, durante a criação dos vídeos, conceitos relacionados com o cálculo de área, razão e


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

proporção, equações do 1° grau, quadriláteros, fração e razões trigonométricas. Todavia, verificou-se erros conceituais em um dos vídeos do projeto, como pode ser visualizado na figura 1.

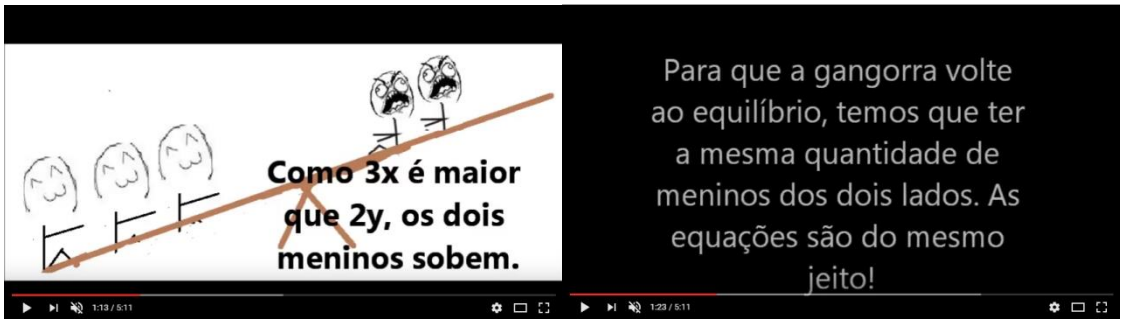



**Figura1. *Print* de trecho do vídeo do grupo 4. Projeto Memes**

A figura 1 mostra a representação de uma gangorra que se encontra em desequilíbrio. Verifica-se, no vídeo, que o desequilíbrio é explicado, conceitualmente, pela relação $3x>2y$, sendo a posição de equilíbrio dada pela quantidade de meninos. No entanto, o correto seria relacionar com a massa e não com a quantidade de garotos. Isto pode levar a falsa compreensão de que $2y$ nunca pode ser maior do que $3x$. Durante a exibição do referido vídeo encontram-se outros erros conceituais, o que revela à falta de desenvolvimento conceitual matemático adequado sobre equações desta equipe.

Analisando os demais vídeos, constata-se que, em geral, os estudantes de Licenciatura em Matemática têm um bom domínio conceitual da matemática, uma vez que demonstraram segurança e compreensão dos processos de produção de conhecimento, representação e validação epistemológica (quadro 2), o que "requer entender a estrutura da disciplina compreendendo o domínio atitudinal, conceitual, procedimental, representacional e validativo do conteúdo" (Shulman, 1986, p. 7).

| N° do vídeo | Representações utilizadas | Processos de produção/ validação do conteúdo |
|---|---|---|
| 1 | Mapas/Formas geométricas regulares e irregulares/ Geoplano/ Fórmula de Pick | Cálculo da área do lago/ Topografia/ História do matemático que inventou a fórmula de Pick |
| 2 | Representação visual de três copos com quantidades diferentes de água e polpa - proporções diferentes | Cálculo da quantidade de água e de polpa que devem ser colocados para a preparação de um suco |
| 3. | Trechos de vídeos mostrando os pênaltis cálculo do aproveitamento de cada time | Cálculo da porcentagem de pênaltis marcados pelos jogadores ao final da copa do mundo de 1994 |


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

| | | |
|---|---|---|
| 4 | Gangorra/situações cotidianas/ equações/ | Resolução de equações a partir de situações do cotidiano |
| 5 | Pipa, quadrilátero | Construção de uma pipa |
| 6 | Pizza, representação de fração (numérica e parte-todo | Divisão de um pizza em partes iguais para um determinado grupo de pessoas |
| 7 | Desenho da situação, relações trigonométricas, equações, | Descobrir a altura de um muro sem poder medí-lo fisicamente |

**Quadro 2. Conhecimento específico do conteúdo**

Observa-se, portanto, a partir do quadro 2 que os licenciandos criaram vídeos utilizando processos validativos coerentes e garantindo diversidade de representações utilizadas para a compreensão do conteúdo. De certo modo, isto também está ligado ao conhecimento pedagógico do conteúdo, como será visto a seguir.

*Conhecimento pedagógico do conteúdo*

O conhecimento pedagógico é bastante amplo e pode englobar desde o conhecimento dos alunos e de suas características; o conhecimento dos contextos educacionais; o conhecimento dos fins educacionais; e ainda, os princípios ou as estratégias de gestão e organização de sala de aula. Ainda que não se tenha observado a aplicação dos vídeos produzidos na escola, é possível observar as diferentes estratégias utilizadas pelos futuros professores na concepção dos vídeos, como forma de diversificar e flexibilizar explicações alternativas de conceitos apresentados (quadro 3).

| **N° do vídeo** | **Analogias, exemplos e/ou demonstrações observadas** | **Estratégias** |
|---|---|---|
| 1 | Uso da Fórmula da Pick para o cálculo de áreas de figuras irregulares como a área da cidade onde você mora; | Problematização e História da Matemática |
| 2 | Relacionar a quantidade de polpa para a quantidade de água na preparação de um copo de suco; | Problematização, Investigação Matemática |
| 3. | Uso do futebol para ensinar porcentagem; | Problematização e Resolução de problema |
| 4 | Uso de Memes para resolver situações presentes no dia a dia do aluno; Uso de gangorras para fazer alusão a equações e inequações. | Problematização, Etnomatemática e Resolução de Problemas |
| 5 | Uso da construção de pipas para visualizar os elementos de um quadrilátero e de conceitos da geometria plana; | Investigação Matemática |
| 6 | Uso da pizza para se ensinar o conceito de fração e fração equivalente a partir do momento que se pede para fazer a divisão da | Problematização |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

| | | |
|---|---|---|
| | pizza em partes iguais | |
| 7 | Uso de memes para se medir a altura de um muro para a construção de uma casa; uso de equipamentos, como o teodolito, para se fazer tal medição. | Problematização, História da Matemática, e Resolução de Problemas |

**Quadro 3. Conhecimento pedagógico do conteúdo**

Além das estratégias, analogias, demonstrações e exemplos existentes nos 7 (sete) vídeos (quadro 3), constatou-se uma grande preocupação entre os licenciandos de que os vídeos ajudassem a esclarecer os conceitos, mostrando sua existência no cotidiano: "S*erviu como uma amostra de como esse tema está envolvido na matemática do cotidiano*" (Informação verbal de aluno A - grupo 3).

Também é importante ressaltar que verificou-se, nos vídeos e a partir de depoimentos dos participantes, a necessidade de buscar integrar-se a realidade do público-alvo, como, por exemplo, o uso de Memes[10]. Os estudantes de Licenciatura preocupavam-se com a relação que as pessoas tinham com a matemática, assim como, com a relação entre professor e aluno: *"Fazer esse trabalho de vídeo, apesar do cansaço que ocasiona, torna-se gratificante por, de certa forma, aproximar mais o professor do aluno, tipo de relação que infelizmente está tão desgastada*"(Informação verbal de aluno B - grupo 6). Nos vídeos 1, 3, 4, 6 e 7 observaram-se passagens cômicas e brincadeiras relacionando a matemática com situações engraçadas, o que reforça a necessidade de buscar um elo de identificação desta disciplina com a realidade social e o estímulo afetivo com a matemática.

*Conhecimento Curricular*

O conhecimento curricular está relacionado com o conhecimento de programas de ensino. Desta forma, deve contemplar os recursos didáticos que podem ser utilizados e a relação entre conteúdos e contextos de uma mesma disciplina ou relacionados de forma interdisciplinar. Embora os vídeos não abordem contextos interdisciplinares, verifica-se, no Quadro 4, a variedade de recursos didáticos empregados pelos estudantes para facilitar a compreensão dos conceitos trabalhados nos vídeos.

| **N° do vídeo** | **Recursos didáticos** | **Contexto/conteúdos** |
|---|---|---|
| 1 | Geoplano/Geogebra/ Imagens | Contexto real de medição de figuras irregulares/Geometria plana |

[10]Termo utilizado com frequência na *web*, para referir-se ao fenômeno de "viralização" de uma informação.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

| | | |
|---|---|---|
| 2 | Medidor de líquido/Água/Polpa | Contexto real de preparação de um suco/Razão e proporção |
| 3. | Trecho de Vídeo de campeonato de futebol | Contexto real de se calcular a porcentagem dos pênaltis entre dois times/ Porcentagem |
| 4 | Imagens | Contexto real de situações que envolvem equações do 1°grau |
| 5 | Palitos/Papel/ Pipa | Contexto real de se construir um pipa/ Geometria plana/ quadriláteros |
| 6 | Pizza | Contexto real de divisão de uma pizza em partes iguais/ Fração: representação, equivalência |
| 7 | Teodolito/ Imagens | Contexto real de se medir a altura de um muro/ Relações trigonométricas e equações |

**Quadro 4. Conhecimento curricular**

Este dado é importante, pois, demonstra o conhecimento de recursos que vão além do quadro e pincel. Constata-se, ainda, que os vídeos não exibem aulas expositivas e centradas no conteúdo, mas diferentes métodos de ensino. Em alguns casos (vídeo 4 e 7) é possível visualizar uma diversidade de contextos em que os conteúdos estão presentes. É importante ressaltar que os conhecimentos confirmados na análise dos vídeos foram construídos ao longo do processo de criação:

> *"Tínhamos uma noção de como seria o vídeo desde a escolha do tema, mas partindo para a prática vimos que muitas das nossas ideias se tornaram inviáveis e o próprio processo de produção do vídeo que nos mostrou o melhor caminho para chegarmos a um resultado satisfatório"* (Informação verbal de aluno C - grupo 7).

Ao comprovar a inviabilidade das idéias, no decorrer do processo de criação de vídeos, o projeto oportunizou, a partir da realidade, a reflexão e a compreensão da relação entre a teoria e a prática. Em seguida as considerações finais serão dispostas.

## Considerações Finais

Este artigo teve como objetivo analisar vídeos produzidos por estudantes de Licenciatura em Matemática durante a formação inicial. Os resultados do estudo mostram que processos de criação de vídeos podem mobilizar e amplificar diferentes tipos de conhecimento: do conteúdo, pedagógico e curricular. Ressalta-se que estes conhecimentos são importantes e necessários para a prática pedagógica na escola.

O uso das TIC a partir do projeto Exploradores do Holos permitiu mobilizar tais conhecimentos de modo a problematizar, a ressignificar e a contextualizar situações cotidianas,


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

favorecendo o desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino. Em estudos futuros, espera-se analisar aspectos relacionados à aprendizagem colaborativa, verificando as interações ocorridas entre as equipes e seus participantes.

**Referências bibliográficas**


Ball, D. L.; Thames, M. H. & Phelps, G. (2008) Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, Michigan, v. 59, n. 5, p. 389-407, November/December.

Brasil, MEC/SEF.(1997) *Parâmetros curriculares nacionais***:** Matemática. Brasília: MEC/ Secretaria de Educação Fundamental.

Brasil. (1998) *Parâmetros curriculares nacionais*: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Introdução aos PCN. MEC/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília..

Brasil. *PISA: Relatório da OCDE*. INEP. [S.l.]. 2012. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2013/country_note_brazil_pisa_2012.pdf. Acessado em 22 de fevereiro de 2014.

Buzato, Marcelo. *Letramentos Digitais e Formação de Professores*. São Paulo: Portal Educarede, 2006 .

Castro, J. B.; Costa, K. L. & Castro-Filho, J. A.(2015) . Projeto Exploradores do Holos: o uso de vídeo na formação inicial de professores de matemática. In: 4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Ilhéus: UESC, 2015. p. 2737-2748.

Hill, H. C.; Rowan, B. & Ball, D. L. (2005) Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. American EducationResearchJournal, Boston v. 42, n. 2, Outubro.

Lévy, Pierre.(1993) *As tecnologias da inteligência*: o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Ed. 34.

Schulman, L. S. (1986) Those who understand Knowledge Growth. In: *Teachin. Educational Researcher*, v. 15, n. 2, p. 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*. Volume 57, pp. 1-22.




ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.132

# YENDO MÁS ALLÁ DE LA LÓGICA CLÁSICA PARA ENTENDER EL RAZONAMIENTO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Francisco Vargas – Laura Martignon
fvargasmancera@gmail.com – martignon@ph-ludwigsburg.de
Ludwigsburg University of Education (Alemania) y Universidad el Bosque (Colombia)–
Ludwigsburg University of Education (Alemania)

Núcleo temático: La resolución de problemas en Matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: razonamiento, lógica, implicación, abducción

## Resumen

*La evidencia experimental acumulada en las últimas décadas en la literatura psicológica muestra que la interpretación y uso de los conectivos lógicos en distintos contextos están lejos de ser obvios. Estos resultados son a menudo interpretados sólo como una falta respecto a una única lógica tomada como normativa. Esto mismo ocurre muy frecuentemente en la literatura de Educación Matemática en donde los parámetros de análisis del razonamiento presente en los estudiantes se limitan al ámbito de los conectivos y eventualmente los cuantificadores clásicos. Es posible, sin embargo, considerar otro tipo de lógicas que puedan ayudarnos no solo a reconsiderar esta perspectiva, sino a entender mejor cómo razonamos y por qué algunos "errores" lógicos en Matemáticas son tan consistentemente frecuentes. Proponemos un examen de los resultados de investigación de distintos experimentos y de la literatura, a la luz de algunas herramientas lógicas, en particular de algunas lógicas computacionales no monotónicas.*

## Introducción

Durante las últimas décadas la psicología cognitiva ha producido una gran cantidad de evidencia experimental que muestra que la interpretación y el uso de los conectivos lógicos en los lenguajes naturales y en diferentes contextos, están lejos de ser obvios. Los tipos de interpretaciones que se presentan no atañen solamente a un debate de tipo filosófico y teórico sino que se presentan en diferentes situaciones comunicativas, y en particular en aquellas que se presentan en contextos educativos.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Tal es el caso, por ejemplo, con respecto a los enunciados condicionales, cuyo sentido ha sido debatido ampliamente en diferentes disciplinas. Uno de los resultados que comúnmente han sido obtenidos es que este tipo de enunciados se interpretan de diferentes maneras y muy frecuentemente en desacuerdo con la semántica de la llamada implicación material.

Algunos experimentos muy conocidos de las últimas décadas del siglo pasado versan en esta dirección. Tal es el caso, por ejemplo, de la Tarea de selección de Wason (Wason, 1968, Cosmides, 1989) y de experimentos sobre el uso de esquemas deductivos del estilo *modus ponens* (como en Byrne, 1989). Estos resultados son interpretados normalmente como una falta en la competencia lógica normativa incluso a veces como mostrando nuestra falta de racionalidad. Sin embargo, como es bien sabido, son posibles otros enfoques, como el de tomar en consideración otros estándares lógicos aparte de la lógica clásica.

Estos pueden ayudarnos no sólo a reevaluar esas posiciones, Sino también a darnos una comprensión más profunda acerca de el porqué razonamos como lo hacemos (Stenning y van Lambalgen, 2008).

En el ámbito de la de la educación matemática la situación es similar. En efecto, la investigación en este campo hasta el momento ha sido dominada por la idea de que una descripción completa de los estadios de desarrollo de los estudiantes puede ser guiada por el examen de los 16 posibles conectivos proposicionales clásicos. Esta clase de análisis, inspirado por algunos de los trabajos seminales de Piaget, ha sido complementado en algunos casos por consideraciones acerca de la interacción de estos conectivos con los cuantificadores usuales (por ejemplo en Durand-Guerrier 2003). A pesar de esto, incluso en estos casos, la semántica tarskiana para lógica de primer orden ha sido la única considerada entre las muchas posibles. Estudios y presentaciones recientes ampliamente influyentes como Hoyles et al. 2002 y Durand-Guerrier et al. 2011, dan cuenta de esta situación.

Un fenómeno acerca de la interpretación de enunciados condicionales es el de atribuirles un significado similar al de los enunciados bicondicionales correspondientes, tal como ha sido documentado en los distintos niveles educativos. Es significativo desde nuestro punto de vista, que haya sido visto como la manifestación de una "lógica infantil" ("child logic") contrapuesta a la "lógica matemática" ("math logic"; véase O'Brien et al., 1968). Esta caracterización muestra que este tipo de fenómeno es interpretado usualmente tan solo como una falta o carencia, y no como una manifestación que puede ser en sí misma caracterizada,


ISBN 978-84-945722-3-4

explicada e incluso justificada. Proponemos el uso de algunas de las características salientes de Programación Lógica (Logic Programming). Algunas de estas han sido ya usadas en análisis psicológicos de la cognición humana (por ejemplo en Stenning y van Lambalgen, 2008).

**Nuestro estudio**

Presentaremos algunos de los resultados preliminares de un estudio en curso realizado hasta ahora con estudiantes universitarios en Colombia y Alemania a partir de cuestionarios. Nos focalizaremos en lo que sigue en dos ejemplos de las tareas desarrolladas.

**El Teorema de Pitágoras**

¿Quién no conoce el Teorema de Pitágoras después de haber superado la educación primaria y secundaria? Sin embargo, incluso cuando su enunciado es dado explícitamente y no dejando espacio a la ambigüedad de sus distintas formulaciones posibles, el significado atribuido parece ir mucho más allá de lo que explícitamente afirma. Esto es lo que parecen indicar las respuestas a algunas de las preguntas en los cuestionarios aplicados. Consideremos, por ejemplo, la siguiente de selección multiple:

"El Teorema de Pitágoras dice: Para todo triángulo rectángulo con hipotenusa a y catetos b y c, se tiene la igualdad $a^2 = b^2 + c^2$. Como una aplicación inmediata de este enunciado podemos concluir que (señale la o las opciones que considera correctas):

- el triángulo rectángulo con b=1 y c=2 tiene que tener $a = \sqrt{5}$
- el triángulo con a=4, b=3 y c=3 no es rectángulo
- el triángulo con a=5, b=4 y c=3 es rectángulo
- si un triángulo con b=1y c=2 no es rectángulo, entonces $a \neq \sqrt{5}$"

Sin entrar en los detalles relativos al uso de variables, cuantificadores, y la aplicación de reglas como la particularización universal, las distintas opciones corresponden, respectivamente, a la aplicación de los cuatro esquemas de inferencia modus ponens, modus


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

tollens, afirmación del consecuente y negación del antecedente (MP, MT, AC y DA por sus siglas en Inglés), de los cuáles sólo los dos primeros son válidos clásicamente.

Los patrones de respuesta son indicadores de que en matemáticas también se presentan fenómenos bien conocidos como la asimetría entre los niveles de afirmación de MP y MT. Similarmente, se presenta en la escogencia de AC un tipo de razonamiento de tipo abductivo que a partir de las consecuencias de un teorema pasa a concluir sus hipótesis. Esto se manifiesta en el hecho que, dado un teorema en modo condicional, se pasa a concluir la validez de su converso. En este caso el converso resulta ser cierto, pero no es un resultado abordado usualmente en las matemáticas escolares (ni superiores) y ninguno de nuestros participantes pudo dar un argumento válido matemáticamente para respaldar dicho teorema converso, ni siquiera de manera aproximada. De hecho, la argumentación más frecuente para concluir que el teorema converso es cierto, fue, simplemente, que el teorema directo lo es.

Veremos manifestarse el mismo fenómeno más adelante en la tarea sobre el Teorema de Lagrange en donde, a diferencia del caso que nos ocupa, el converso de Teorema es de hecho falso.

Consideremos ahora esta otra pregunta:

"Para todo triángulo rectángulo con hipotenusa a y catetos b y c se tiene lo siguiente (seleccione una única opción):

- la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construídos sobre los lados b y c es igual al área del triángulo equilátero construído sobre a.
- la suma de las áreas de las los semicírculos cuyos diámetros son b y c es igual al área del semicírculo con diámetro a.
- la suma de las mitades de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados b y c es igual a la mitad del área del cuadrado construido sobre a.
- la suma de las áreas de los pentágonos regulares construídos sobre los lados b y c es igual al área del pentágono regular construído sobre a.
- Todas las anteriores
- Ninguna de las anteriores

Justifique brevemente su respuesta"



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Como esperábamos, las respuestas más frecuentes fueron la tercera (algunos pocos alumnos dieron incluso un argumento correcto de su validez) y la última. En este caso se presenta a nuestro modo de ver, una forma de "Razonamiento de Mundo Cerrado". Tal como explicaremos en la última sección, esencialmente, aquello de lo que no se tiene una fuente de información afirmativa explícita es asumido como falso.

En resumen, un enunciado aparentemente simple y conocido como el Teorema de Pitágoras, conlleva en su interpretación toda una red semántica que no está necesariamente regida por las leyes de la lógica tradicional.

**El Teorema de Lagrange**

Nuestro ejemplo del Teorema de Lagrange nos muestra cómo en situaciones corrientes de la enseñanza-aprendizaje los condicionales son revertidos, incluso en situaciones en que los estudiantes ya poseen un cierto grado de madurez y sofisticación matemática (en este caso un curso de álgebra abstracta para futuros docentes). También nos muestra cómo, este tipo de fenómenos con los condicionales se presenta también en casos en que los estudiantes no tienen aún intuiciones bien establecidas (a diferencia del ejemplo anterior de Geometría elemental) precisamente por tratarse de un tema abstracto y nuevo para ellos.

Recordemos el enunciado del teorema: "Dado un grupo G y dado H, un subgrupo de G, el orden de H divide el orden de G". Lo que documentamos es que en situaciones argumentativas en que los estudiantes deben aplicar el teorema, lo que hacen frecuentemente es aplicar su converso, es decir, que si G es un grupo y n divide al orden de G, entonces tiene que haber un subgrupo de G de orden n.

En uno de nuestros grupos, como parte de su examen final, los estudiantes fueron puestos ante la tarea de determinar si es verdadero o falso que todo grupo de orden 10 posee un elemento de orden 5. En tal caso debían dar un argumento justificando su respuesta. El ejercicio había sido desarrollado en clase y se había enfatizado, con contraejemplos, el hecho de que el converso del teorema es falso. Sin embargo, de 19 estudiantes, 7 respondieron que es verdadero dando el argumento (erróneo) de que "por el Teorema de Lagrange", el grupo


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

de orden 10 debe poseer un subgrupo de orden 5 por dividir 5 a 10. Esta fue la argumentación modal en el grupo estudiado.

**Programación lógica y abducción**

Para dar una explicación de las tendencias comunes evidenciadas por distintos experimentos, entre ellos los aquí discutidos, usamos algunas de las características de Programación Lógica, una serie de sistemas lógicos surgidos al interior de la Inteligencia Artificial (véase Doets, 1994 o Kowalski, 2011), en particular la variante llamada Programación Lógica Abductiva. Entre estas características consideramos en particular el razonamiento de mundo cerrado ("closed world reasoning"), la semántica de compleción ("completion semantics") y el uso de coacciones de integridad ("integrity constraints").

La primera característica se manifiesta mediante el hecho de que dado un enunciado cuya validez no es afirmada explícitamente, se concluye que su negación es cierta. Podemos ver esta "negación como falla" ("negation as failure") en la segunda pregunta del Teorema de Pitágoras: la elección de "ninguna de las anteriores" indica que por no conocerse ninguna de las variantes del Teorema de Pitágoras dadas en las demás opciones, estas son asumidas (erróneamente en este caso) como falsas. Esto se puede ver, en efecto, en algunas de las justificaciones ofrecidas:

"Se deben formar cuadrados sobre b y c para que la suma de sus áreas sea igual al cuadrado en a." Otro alumno expresa: "no aplica ninguna respuesta ya que habla [sic] de otras figuras geométricas"

La semántica de compleción y las coacciones de integridad juegan, por otra parte, un papel en la formalización de los esquemas de inferencia MP, MT, AC y DA, ya sean estos válidos o no clásicamente. Por otra parte, representan una manera de formalizar lógicamente el razonamiento de tipo abductivo que se presenta en algunos de estos esquemas, o que podemos ver en uso en la interpretación del teorema de Lagrange descrita anteriormente.

Este tipo de herramientas técnicas dan una formalización de tipo algorítmico de los posibles procesos que llevan a las respuestas predominantemente observadas en los ejemplos descritos. Este tipo de descripción va más allá de los estándares tenidos tradicionalmente como únicos o canónicos en la descripción de los procesos en acción, (en este caso la Lógica Clásica). Esta última se nos muestra, aquí como en tantos otros contextos, como el resultado


ISBN 978-84-945722-3-4

excepcional de un entrenamiento y una educación, y no como nuestra manera espontánea y "natural" de razonar en todos. El estudio de las situaciones que faciliten el paso de un tipo de lógica usada espontáneamente (en este caso la Programación Lógica) a otra que normativamente es requerida en un contexto matemático (la Lógica Clásica), se convierte así en algo necesario para superar un verdadero obstáculo epistemológico.

**Referencias bibliográficas**


Byrne, R.M.J. (1989). Suppressing valid inferences with conditionals. Cognition, 31, 61–83.

Cosmides, L. (1989). The logic of social exchange: Has natural selection shaped how humans reason? Studies with the Wason selection task. Cognition, 31, 187–276.

Doets K. (1994) *From Logic to Logic Programming*. Cambridge, MA, MIT Press.

Durand-Guerrier V. (2003) Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. Educational Studies in Mathematics 53, 5-34.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., y Tanguay, D. (2011). Examining the role of logic in teaching proof. En *Proof and proving in mathematics education* (pp. 369-389). Springer Netherlands.

Hoyles, C. y Küchemann D. (2002). Students' understanding of logical implication. Educational Studies in Mathematics, 51, 193-223

Kowalski, R. (2011) *Computational Logic and Human Thinking: How to be Artificially Intelligent.* Cambridge University Press.

O'Brien, T.C., Shapiro, B.J. y Reali, N.C. (1971), Logical thinking – language and context, Educational Studies in Mathematics, 4, 201–219.

Stenning, K., y van Lambalgen, M. (2008). Human Reasoning and Cognitive Science. Cambridge, MA: MIT Press.

Wason, P.C. (1968). Reasoning about a rule. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 20, 273–281.




ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.133

# PEQUEÑOS JUEGOS DE ESTRATEGIA EN FORMATO TECNOLÓGICO Y NO TECNOLÓGICO: UN ESTUDIO COMPARATIVO EN EL CONTEXTO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Esther Lorenzo – Jordi Deulofeu – Santos González
estherlor93@gmail.com – jordi.deulofeu@uab.cat – santos@uniovi.es
Universidad Autónoma de Barcelona, España

Núcleo temático: La Resolución de Problemas en Matemáticas
Modalidad: Comunicación breve (CB)
Nivel educativo: Medio o secundario
Palabras clave: resolución de problemas, juegos de estrategia, formato tecnológico, educación secundaria

**Resumen**
*Esta comunicación se centra en el estudio de las resoluciones de alumnos de Educación Secundaria Obligatoria de pequeños juegos de estrategia en formato tecnológico y no tecnológico, en el contexto que vincula dichos juegos con la resolución de problemas.*
*Nuestro objetivo es estudiar la relevancia para los alumnos de ESO del formato de los juegos, tecnológico y no tecnológico, a la hora de encontrar la heurística que permita resolverlos.*
*Con el fin de ampliar los primeros resultados de nuestra investigación (Lorenzo, Deulofeu y González, 2016), hemos llevado a cabo un estudio cuantitativo comparativo, analizando los resultados obtenidos con dos juegos, Atrapa la Rana y Margarita, en un estudio con estudiantes de primer y tercer curso de ESO. Para ello, hemos recogido los datos de las partidas disputadas entre los alumnos con los juegos en formato tecnológico y no tecnológico, efectuando una comparación con los resultados obtenidos en ambos formatos, siguiendo el método utilizado por Corbalán en su tesis doctoral (Corbalán, 1997), también llevada a cabo en el Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales de la Universidad Autónoma de Barcelona.*

## Introducción

El principal objetivo de nuestra comunicación es estudiar si el formato de los juegos posee relevancia en la resolución de pequeños juegos de estrategia por parte de alumnos de Educación Secundaria Obligatoria. Con este objetivo, hemos definido tres índices: el *índice de comprensibilidad*, *el índice de facilidad* y el *índice de análisis*, de características similares a los establecidos por Corbalán en *Juegos de estrategia y resolución de problemas: análisis de estrategias y tipología de jugadores en el alumnado de secundaria* (Corbalán, 1997), que


ISBN 978-84-945722-3-4

nos permitirán analizar y comparar los resultados de dos muestras, una con juegos en formato tecnológico y otra con los mismos juegos en formato no tecnológico. Nuestro estudio analiza los resultados obtenidos por alumnos de primer y tercer curso de ESO con dos pequeños juegos de estrategia: Atrapa la Rana y Margarita.

**Descripción de los juegos de estrategia**

***Atrapa la Rana***. Este juego, más conocido como *Quitafichas*, es una versión simplificada del *Nim*, un juego clásico de origen chino. En nuestro caso, se trata de un juego con diez fichas o ranas, en el que cada uno de los dos jugadores debe ir retirando una o dos fichas cada vez, según su criterio. Ganará el juego aquel jugador que retire la última ficha.

Para encontrar la forma de ganar siempre en este juego, la estrategia adecuada es *empezar por el final*, siendo la idea clave para resolverlo el darse cuenta de que los jugadores pueden retirar las fichas de tres en tres (si combinan una jugada del adversario y una suya). De este modo, gana la partida el jugador que la comienza, siempre que deje a su oponente un número de fichas múltiplo de tres (nueve, seis y tres fichas, respectivamente).

***Margarita***. Este juego, llamado así porque las fichas se presentan como los nueve pétalos de una margarita, es una variación del juego anterior. Únicamente se añade la condición de que, en el caso de retirar dos fichas, éstas deben ser consecutivas. Esta pequeña variación implica que para ganar el juego no solo debemos tener en cuenta el número de fichas, sino también su posición, por lo que la estrategia es de tipo geométrico (simetría) más que numérico.
En este caso, es el segundo jugador el que tiene la estrategia ganadora, siempre que retire en la jugada inicial un número de fichas contrario al de su oponente (una si el primer jugador elige dos y dos si éste elige una). Las fichas que retira el segundo jugador deben estar situadas en el lado opuesto de la margarita, dejando así dos grupos aislados y simétricos de tres pétalos o fichas cada uno. Para ganar basta, en consecuencia, que en las siguientes jugadas el segundo jugador escoja las fichas simétricas a las de su rival.

**Metodología**

Con el objetivo de estudiar la relevancia para los alumnos del formato de los juegos cuando han de encontrar su estrategia ganadora, hemos llevado a cabo un estudio con 422


ISBN 978-84-945722-3-4

estudiantes, de los cuales 224 cursaban primero de ESO y 198 tercero, pertenecientes a nueve centros escolares de Oviedo de similares características.

La recogida de datos se ha llevado a cabo en dos fases, con estudiantes que han jugado a ambos juegos en formato tecnológico (54 parejas de 1º y 48 parejas de 3º) y con estudiantes que han jugado a los dos juegos en formato no tecnológico (58 parejas de 1º y 51 parejas de 3º). Los resultados de la presente comunicación se han obtenido a través de cuestionarios específicos, después de que las parejas de alumnos hubiesen jugado a los juegos Atrapa la Rana y Margarita durante media hora, sin intervención del profesorado para explicarles las reglas de juego.

**Análisis de resultados**

A continuación, detallaremos cada una de las tres cualidades que vamos a tratar para efectuar el estudio en ambos juegos y abordaremos el análisis de los resultados que hemos obtenido. Con el fin de poder establecer una comparación entre ambos formatos, hemos utilizado algunas de las cualidades que Corbalán estableció a lo largo de su investigación (Corbalán, 1997), que pasamos a describir a continuación:

**1. Comprensibilidad.** Hace referencia a la facilidad de las parejas de alumnos para entender tanto las reglas de los juegos como su manera de llevarlos a la práctica, así como el autocontrol que presentan respecto a los juegos. Para medir esta cualidad hemos hecho uso del *índice de comprensibilidad* (*I comp*), cuyo rango recorre los valores entre 0 y 1, de modo que su valor aumenta a medida que asciende el porcentaje de parejas que entienden las reglas de los juegos y dicen que encuentran una estrategia para ganar, siendo así como objetivamente sucede.

**2. Facilidad.** Esta cualidad se refiere a las dificultades encontradas por las parejas de jugadores para obtener una estrategia parcial o completa, es decir, para resolver el juego de manera efectiva. Para efectuar su medición, hemos utilizado el *índice de facilidad* (*I faci*), con un valor entre 0 y 1, que indica cuánto más *fácil* o *difícil* es cada juego. A medida que se acercan a la unidad los juegos son más *fáciles*.


ISBN 978-84-945722-3-4

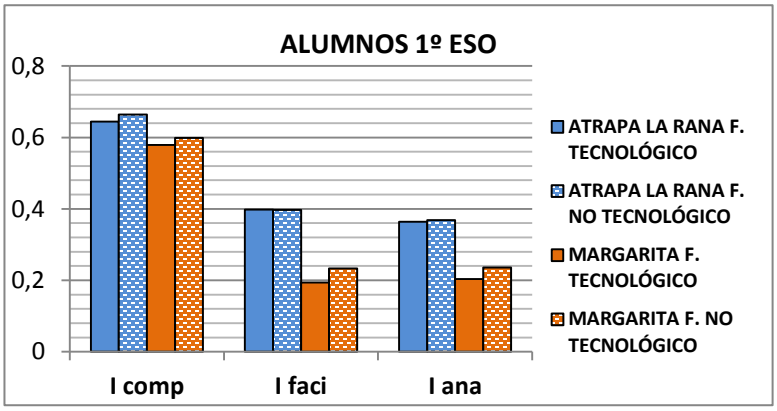
**3. Posibilidad de análisis del juego.** Hace referencia a la utilización de estrategias adecuadas en el análisis del juego y se mide a través del *índice de análisis* (*I ana*) cuyo valor, como en los índices anteriores, varía entre 0 y 1. Cuanto mayor sea el porcentaje de utilización de estrategias parciales o completas, mayores serán las posibilidades de análisis.

**Comparación de los índices según los cursos**

La *tabla 1* y la *gráfica 1* muestran los resultados obtenidos en los dos juegos en formato tecnológico y formato no tecnológico con los alumnos de 1º de ESO:

| JUEGO/FORMATO 1º ESO | I comp | I faci | I ana |
|---|---|---|---|
| ATRAPA LA RANA F. TECNOLÓGICO | 0,644 | 0,398 | 0,364 |
| ATRAPA LA RANA F. NO TECNOLÓGICO | 0,664 | 0,397 | 0,368 |
| MARGARITA F. TECNOLÓGICO | 0,579 | 0,194 | 0,204 |
| MARGARITA F. NO TECNOLÓGICO | 0,599 | 0,233 | 0,236 |

Tabla 1. Alumnos de 1º de ESO




Gráfica 1. Alumnos de 1º de ESO

Al establecer una comparación entre ambos formatos, se observa que los *índices de comprensibilidad* del juego Atrapa la Rana son muy parecidos (0.644 en formato tecnológico y 0.664 en formato no tecnológico). Lo mismo ocurre en Margarita (0.579 y 0.599 respectivamente), siendo de nuevo ligeramente mayor el *I comp* en el formato no tecnológico. Según su *índice de facilidad*, el juego Atrapa la Rana es más fácil que el juego Margarita (0.398 frente a 0.194, respectivamente, en formato tecnológico y 0.397 frente a 0.233 en formato no tecnológico). Atendiendo a su *I faci*, el resultado obtenido en el juego Atrapa la Rana es prácticamente similar en el formato no tecnológico (0.397) que en el tecnológico


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

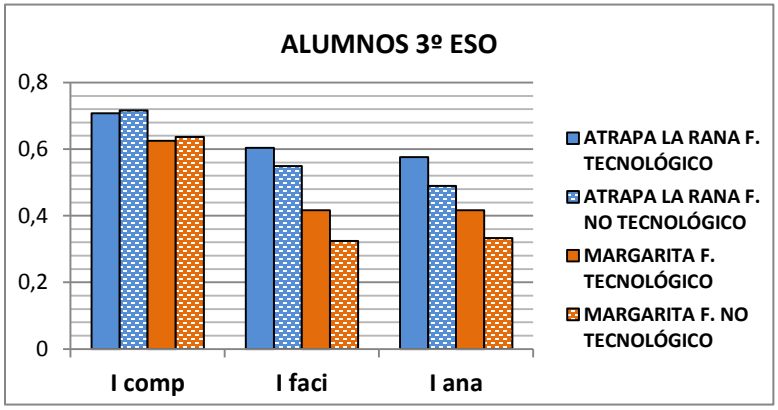
(0.398). Sin embargo, nos encontramos con una diferencia mayor en el juego Margarita (0.233 frente a 0.194 respectivamente). Este último resultado es el mínimo *I faci* obtenido durante el estudio.

En relación con el *índice de análisis*, en Atrapa la Rana los índices son muy parecidos (0.364 en formato tecnológico y 0.368 en formato no tecnológico); sin embargo, en el juego Margarita se observan mayores diferencias (0.204 y 0.236). Comparando ambos juegos, el *índice de análisis* es más alto en el juego Atrapa la Rana que el Margarita, lo cual es razonable, pues habitualmente resulta más sencillo encontrar la estrategia ganadora en el primero de los juegos, de carácter aritmético, que en el segundo, de carácter geométrico.

En la *tabla 2* y la *gráfica 2* pueden consultarse los resultados obtenidos en los dos juegos en ambos formatos con los alumnos de 3º de ESO:

| JUEGO/FORMATO 3º ESO | I comp | I faci | I ana |
|---|---|---|---|
| ATRAPA LA RANA F. TECNOLÓGICO | 0,708 | 0,604 | 0,576 |
| ATRAPA LA RANA F. NO TECNOLÓGICO | 0,716 | 0,549 | 0,490 |
| MARGARITA F. TECNOLÓGICO | 0,625 | 0,417 | 0,417 |
| MARGARITA F. NO TECNOLÓGICO | 0,637 | 0,324 | 0,333 |

Tabla 2. Alumnos de 3º de ESO




Gráfica 2. Alumnos de 3º de ESO

En las parejas formadas por alumnos de 3º de ESO, en relación con el *índice de comprensibilidad*, en la *tabla 2* se observa que los valores son ligeramente mayores en formato no tecnológico que en formato tecnológico, siendo superiores en ambos formatos en el juego Atrapa la Rana con respecto del juego Margarita.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

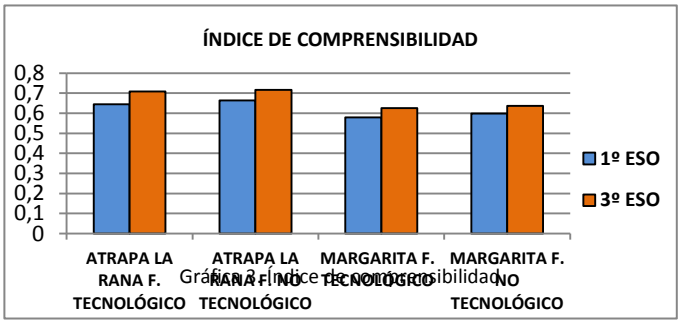
La *gráfica 2* ilustra claramente cómo en el juego Atrapa la Rana, tanto el *I faci* como el *I ana*, son claramente más elevados en formato tecnológico (0.604 frente a 0.549 y 0.576 frente a 0.490, respectivamente). Lo mismo ocurre en el juego Margarita, con valores más elevados en ambos índices en formato tecnológico (0.417 en los dos). Se observa también una clara diferenciación en estos índices al considerar los dos juegos, siendo siempre más altos en el juego Atrapa la Rana.

**Comparación individual de cada índice**

La *tabla 3* y la *gráfica 3* ilustran los resultados del *índice de comprensibilidad* en los juegos, tanto en 1º como en 3º de ESO:

| I comp | 1º ESO | 3º ESO |
|---|---|---|
| **ATRAPA LA RANA F. TECNOLÓGICO** | 0,644 | 0,708 |
| **ATRAPA LA RANA F. NO TECNOLÓGICO** | 0,664 | 0,716 |
| **MARGARITA F. TECNOLÓGICO** | 0,579 | 0,625 |
| **MARGARITA F. NO TECNOLÓGICO** | 0,599 | 0,637 |

Tabla 3. Índice de comprensibilidad




Gráfica 3. Índice de comprensibilidad

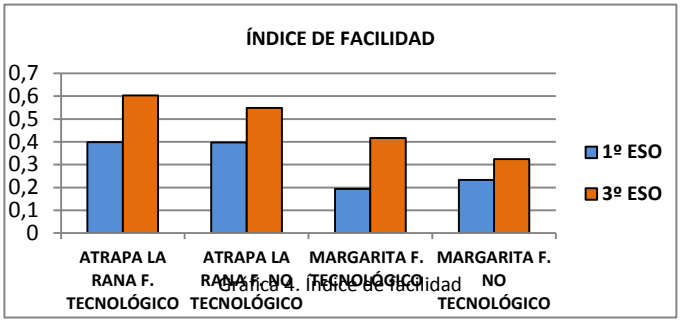
En general, en ambos juegos se observa que los resultados del *I comp* son siempre más elevados en los alumnos de tercer curso que en los de primero, siendo también superiores en ambos formatos en el juego Atrapa la Rana con respecto a Margarita. El mayor *I comp* se obtiene en el formato no tecnológico de Atrapa la Rana con los alumnos de tercero (0.716).


ISBN 978-84-945722-3-4

A continuación, la *tabla 4* y la *gráfica 4* muestran los resultados del *índice de facilidad*:

| I faci | 1º ESO | 3º ESO |
|---|---|---|
| **ATRAPA LA RANA F. TECNOLÓGICO** | 0,398 | 0,604 |
| **ATRAPA LA RANA F. NO TECNOLÓGICO** | 0,397 | 0,549 |
| **MARGARITA F. TECNOLÓGICO** | 0,194 | 0,417 |
| **MARGARITA F. NO TECNOLÓGICO** | 0,233 | 0,324 |

Tabla 4. Índice de facilidad




Gráfica 4. Índice de facilidad

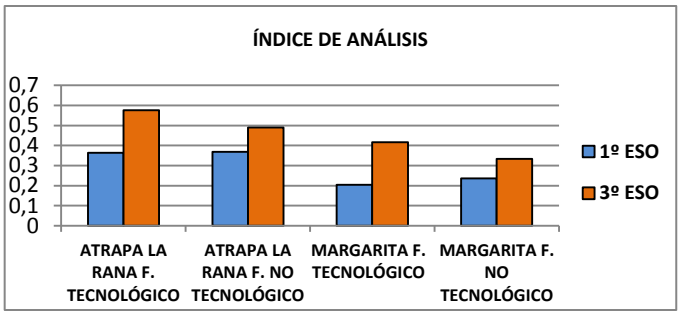
Resulta evidente que el *I faci* es más elevado para los alumnos de 3º de ESO en ambos juegos y también en ambos formatos, lo cual tiene sentido si consideramos que para los alumnos de tercer curso la dificultad para encontrar la heurística es menor que para los de primero. En cuanto a los formatos, los estudiantes de tercero, a diferencia de lo que ocurre con los de primero, obtienen mejores resultados en ambos juegos en formato tecnológico.

Los resultados del *índice de análisis*, considerado el más apropiado para comparar los juegos ya que se fundamenta más en la estrategia de resolución aplicada por los alumnos, quedan reflejados en la *tabla 5* y la *gráfica 5*:

| I ana | 1º ESO | 3º ESO |
|---|---|---|
| **ATRAPA LA RANA F. TECNOLÓGICO** | 0,364 | 0,576 |
| **ATRAPA LA RANA F. NO TECNOLÓGICO** | 0,368 | 0,490 |
| **MARGARITA F. TECNOLÓGICO** | 0,204 | 0,417 |
| **MARGARITA F. NO TECNOLÓGICO** | 0,236 | 0,333 |

Tabla 5. Índice de análisis


ISBN 978-84-945722-3-4




Gráfica 5. Índice de análisis

El *índice de análisis* es también mayor en las parejas de alumnos de tercer curso, habiendo una diferencia de más de dos décimas con los estudiantes de primero en ambos juegos, cuando las partidas se disputan en formato tecnológico. Como era de esperar, los *I ana* del juego Atrapa la Rana son, en los dos formatos, más altos que en Margarita.

## Conclusiones

Como podemos observar en las tablas y gráficas anteriores, el *índice de comprensibilidad* nos indica que los dos juegos, tanto en formato tecnológico como en formato no tecnológico han sido comprendidos por más de la mitad del alumnado, pues el *I comp* supera el valor 0.5, con lo que se trata de juegos *bastante comprensibles*. Según este índice, parece que todos los alumnos, tanto los de primero como los de tercero entienden mejor las reglas y tienen un mayor autocontrol de los juegos con el formato no tecnológico de los mismos, con menor diferencia entre los alumnos de tercero en relación con el formato.

Por otra parte, en los dos juegos los *índices de facilidad* son menores que los *índices de comprensibilidad*, lo cual tiene sentido, ya que es más sencillo comprender las reglas del juego que encontrar una estrategia ganadora.

En cuanto a la *facilidad* y a la *posibilidad de análisis del juego*, a tenor de los valores del *I faci* y del *I ana* de los alumnos de 3º de ESO, podemos pensar que el formato ha podido influir en la obtención de las heurísticas, ya que en ambos índices se observan mejores resultados en el formato tecnológico, tanto en Atrapa la Rana como en Margarita. Por el contrario, los resultados obtenidos con los alumnos de 1º de ESO parecen indicar que les resulta más fácil analizar el problema y obtener una estrategia adecuada para resolverlo



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

cuando juegan en formato no tecnológico, aunque en el caso del juego Atrapa la Rana el formato apenas parece ser relevante.

En consecuencia, parece lícito pensar que, en el caso de los alumnos participantes en el estudio, la influencia del formato aumenta según crece la edad de los alumnos, adquiriendo mayor relevancia el formato tecnológico.

Para finalizar, cabría plantearse en el futuro el estudio de las razones de la influencia del formato de los juegos en la búsqueda de heurísticas de resolución de problemas en alumnos de los cursos superiores de ESO.

**Referencias bibliográficas**

Corbalán, F. (1997). *Juegos de estrategia y resolución de problemas: análisis de estrategias y tipología de jugadores en el alumnado de secundaria*. (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra.

Deulofeu, J. (2011). *Prisioneros con dilemas y estrategias dominantes. Teoría de juegos*. Madrid: RBA.

Lorenzo, E., Deulofeu, J. y González, S. (2016). Videojuegos de estrategia en la ESO. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *74*, 14-20.

Navarro, A., Deulofeu, J. (2016). Aprendiendo a resolver problemas en un contexto de juegos de estrategia. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, *82*, 9-17.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.135

# ADIVINANZAS Y BALANZAS. UNA FORMA DE ENTENDER LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Ana-Belén Cabello Pardos
anabelen.cabello@educa.madrid.org
IES Joaquín Araújo (Madrid) España

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Nivel educativo medio o secundario (12 a 15 años)
Palabras clave: Modelo didáctico, situación didáctica, álgebra, ecuación de primer grado

**Resumen**
*A partir del análisis de la presentación de las ecuaciones de primer grado en los manuales escolares, se muestra una experiencia realizada en aula con alumnos de séptimo grado (1º de ESO), en la que se desarrolla la unidad didáctica de Introducción al Álgebra mediante el juego de las adivinanzas, profundizando posteriormente con el modelo analógico de la balanza. Se ha trabajado tanto con números enteros positivos como negativos. Finalmente se comentan los resultados de la aplicación de estos modelos y las incidencias surgidas en el aula durante la realización de la experiencia.*

## Introducción

Los alumnos de 1º de ESO (séptimo grado), de 12 y 13 años, se encuentran en el momento de transición de la etapa de las operaciones concretas a la de las operaciones formales (Piaget, 1983). Esto, entre otros factores, hace que muestren dificultad en la comprensión de la unidad didáctica de Álgebra, ya que es la primera ocasión en la que se encuentran ante procesos de abstracción. Numerosos autores han constatado esta dificultad presente en nuestras aulas y han analizado dichos procesos proponiendo modelos didácticos o líneas de investigación (Castro, 2012; Filloy, Puig y Rojano, 2008; Hurtado, 2013; Kieran, 2006; Palarea, 1998; Rojano, 2010; Socas, 2007; Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1989).

## Marco Teórico

La referencia más antigua de este modelo se ha encontrado en el manual "De la tabla de multiplicar a la integral. Unas matemáticas para todos" (Colerus, 1947). En el capítulo XIII, presenta las ecuaciones de primer grado con una incógnita proponiendo una adivinanza: *"Sin*



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

*entrar aún a teorizar, planteémonos una adivinanza…"* (Colerus, 1947). Unas páginas más adelante propone la idea de la balanza: *"Aunque no sea muy matemático, nos valdremos de una imagen: supondremos que la ecuación es una balanza…"* (Colerus, 1947).

El modelo analógico de la balanza ha sido estudiado por otros autores (Palarea, 1998; Rojano, 2010; Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1989). Hay también otra referencias sobre el modelo explícito diagramático de las adivinanzas y otros modelos tales como máquinas, gráficas, tableros de fichas, etc. (Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1989).

La puesta en práctica de este modelo se ha basado en la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

**Ilustración 3. Guy Brousseau**

Esta Teoría fue planteada por Guy Brousseau[11] (Ilustración 3), primera medalla Félix Klein en 2003 otorgada por la Comisión Internacional de Instrucción Matemática.

Según la misma, el alumno aprende adaptándose a un medio (Sierra, Bosch y Gascón, 2012) en el que se encuentra con contradicciones, dificultades y desequilibrios. El profesor elegirá así, problemas que provoquen en el alumno las adaptaciones deseadas.

El profesor no interviene, es decir, no le ofrece los conocimientos que quiere ver aparecer (Ilustración 4, Ilustración 5).

[11] Imagen tomada de www.ardm.eu


ISBN 978-84-945722-3-4

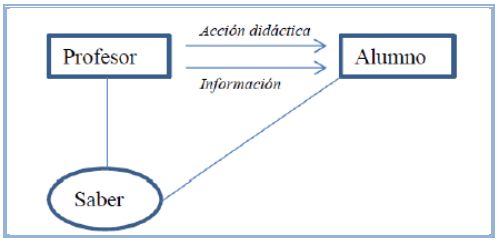



**Ilustración 4. Esquema incompleto de modelización de la enseñanza (Brousseau, 2007)**

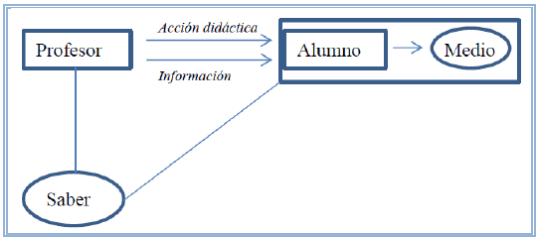



**Ilustración 5. Esquema adecuado de modelización de la enseñanza (Brousseau, 2007)**

En esta Teoría hay dos fases clave: la devolución y la institucionalización.

El profesor plantea al alumno una situación adidáctica que está a su alcance. Esa situación involucra al profesor en un juego con el sistema de interacciones del alumno con su medio. Ese juego más amplio es la situación didáctica. Es decir, es la situación que tiene intrínsecamente la intención de enseñar, o de que el alumno aprenda algo.

Mediante la "devolución", el profesor hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de dicha transferencia.

La situación termina con un momento final de revisión y ordenación de lo que se ha hecho. Es la fase de "institucionalización". Se trata de otorgar el carácter de "saber" a determinados "conocimientos", ya que los conocimientos quedarían contextualizados y reducidos al recuerdo si no hubiera institucionalización en saberes.

## Metodología

La metodología empleada responde al paradigma de investigación en acción (Elliott, 2010; Stenhouse, 1998).

Se plantearon dos objetivos (Ilustración 6):

*Objetivo 1*. Analizar la presentación de las ecuaciones de primer grado en los manuales escolares.

*Objetivo 2*. Diseñar y experimentar una situación que provoque en el alumno un aprendizaje de las ecuaciones de primer grado por adaptación al medio.


ISBN 978-84-945722-3-4

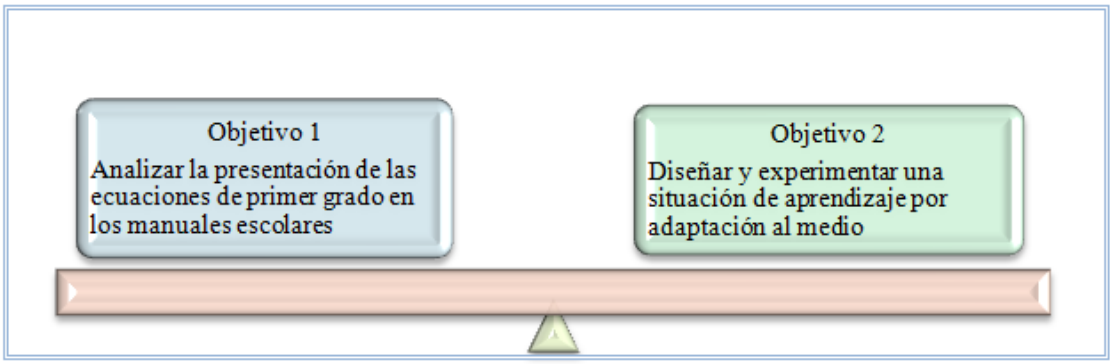



**Ilustración 6. Objetivos planteados en la investigación**

La investigación se ha desarrollado durante el curso 2015/2016 en las siguientes fases (Ilustración 7):

- *Fase teórica*.

  Se realizó un análisis de la presentación de las ecuaciones de primer grado en una muestra incidental (Pereda, 1987) de manuales escolares. También se analizó el software existente sobre dichas ecuaciones.

  Se estudió el marco teórico y se realizó una revisión de la literatura existente.

  Se diseñó la situación de aprendizaje de ecuaciones de primer grado con el modelo de adivinanzas y balanzas.

- *Fase experimental*.

  Se aplicó en el entorno real del aula el modelo diseñado. Se utilizó, de nuevo, una muestra incidental (Pereda, 1987) de 30 alumnos (18 chicas y 12 chicos) de 1º de ESO de un Instituto público de Madrid, durante el curso 2015/16, durante las 8 sesiones destinadas a esta unidad didáctica.

- *Fase de evaluación*.

  Esta fase incluye el análisis de los resultados, la evaluación del modelo, así como la redacción y difusión de la experiencia.


ISBN 978-84-945722-3-4

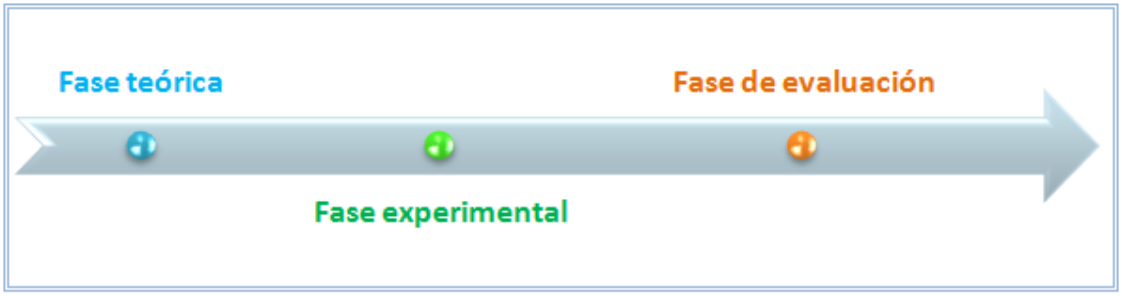



**Ilustración 7. Fases de la investigación**

## Resultados

Se presentan los resultados obtenidos en función de los objetivos planteados.

*Primer resultado*. Se ha analizado la presentación de las ecuaciones de primer grado en una muestra de manuales escolares (Bujanda y Mansilla, 2002; Ingelmo y Zárate, 2015; Machín y Rey, 2015; VVAA, 2010).

En ellos se introduce el lenguaje algebraico como generalización del lenguaje ordinario o como generalización de la aritmética y se introducen las expresiones algebraicas.

En (Bujanda y Mansilla, 2002), a continuación de esta presentación se utiliza el modelo analógico de la balanza para explicar el signo igual y las ecuaciones equivalentes con la idea de equilibrio.

Un *software* existente para la resolución de ecuaciones de primer grado, disponible en Internet en español, está en la Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales (*National Library of Virtual Manipulatives*).

Es una herramienta interactiva que facilita al profesor el trabajo, liberándole de la necesidad de diseñar una balanza con cajas y pesas para cada ecuación. Al alumno le posibilita, además, el aprendizaje autónomo (Ilustración 8).

Este proyecto educativo de la Universidad de Utah empezó en 1999 y ha sido financiado por la Fundación Nacional para la Ciencia (*National Science Foundation*), como se puede ver en su sitio web (http://nlvm.usu.edu/es/nav/siteinfo.html).

Permite trabajar solo con números naturales y también con enteros negativos.


ISBN 978-84-945722-3-4

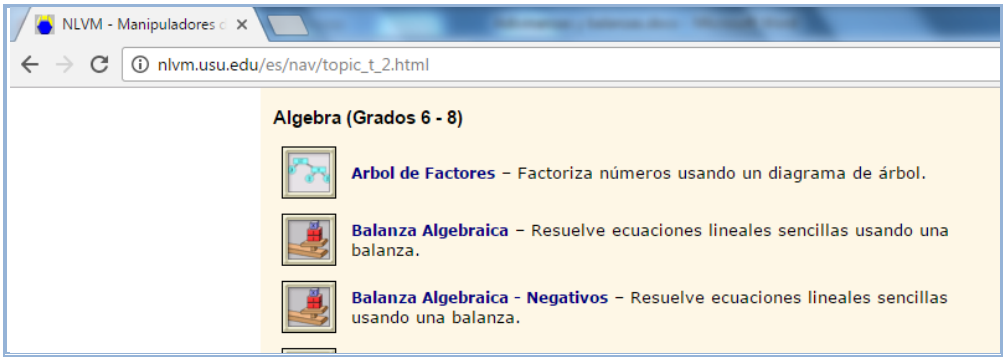



**Ilustración 8. Balanza Algebraica de la Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales**

El Proyecto Gauss (Ilustración 9) desarrollado por el Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (INTEF), permite trabajar con números enteros positivos y negativos (http://recursostic.educacion.es/gauss/proc/).

**Ilustración 9. Balanza del Proyecto Gauss**

Ambos tienen sus ventajas e inconvenientes.

- El primero es más amigable, pero funciona con Java.
- El segundo trabaja en html pero es menos amigable.

En esta experiencia didáctica se ha trabajado con la Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales.


ISBN 978-84-945722-3-4

*Segundo resultado*. Se ha diseñado y experimentado una situación de aprendizaje de las ecuaciones de primer grado por adaptación al medio (Sierra, Bosch y Gascón, 2012).
Se muestran extractos de las sesiones.

Situación 1. Adivinanzas

Se plantean ecuaciones de primer grado sencillas, como en el manual escolar, desde $x + b = d$, hasta $ax + b = cx + d$. De esta manera, el alumno constata la insuficiencia de esta técnica y se pasa al modelo de la balanza (Ilustración 10).

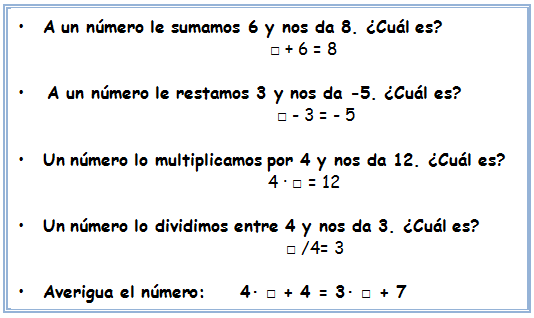



**Ilustración 10. Adivinanza**

Situación 2. Balanzas (con números enteros positivos y negativos)

Se plantean ecuaciones del tipo $ax + b = cx + d$. Inicialmente con coeficientes números enteros positivos y en segundo lugar con números enteros positivos y negativos. Se trata de ver "cuántas cajas de 1" hay en una "caja marcada con la x". Los globos son contrapesos, que simbolizan las cantidades negativas.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

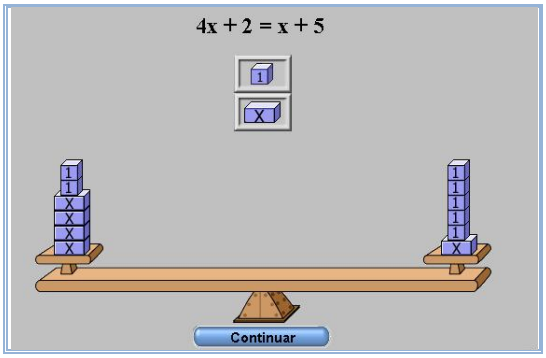



**Ilustración 11. Balanza con números enteros positivos**

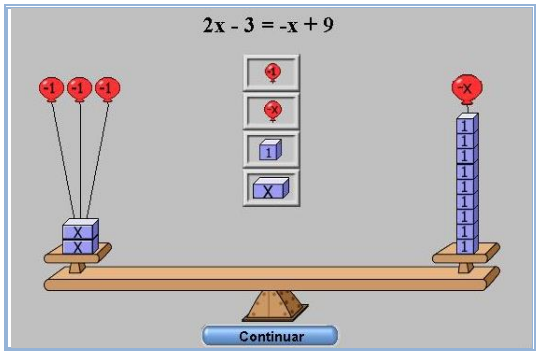



**Ilustración 12. Balanza con números enteros negativos**

## Discusión de los resultados y conclusiones

En cuanto a los resultados del primer objetivo, sería deseable una mayor conexión entre las líneas de investigación en Didáctica del Álgebra y los planteamientos de algunos manuales escolares. Esto se puede conseguir utilizando las herramientas informáticas que permiten modelizar la enseñanza.

En lo referente a los resultados del segundo objetivo, cabe comentar tanto el diseño como la experimentación de las situaciones didácticas.

*Diseño de las situaciones.*

Las situaciones diseñadas cumplen las características de las situaciones de aprendizaje por adaptación al medio (Sierra, Bosch y Gascón, 2012).

Se plantea un tipo de problemas: En la primera situación, se trata de adivinar un número; en la segunda situación, de adivinar cuántas "cajas de 1" hay en una "caja de x", manteniendo el equilibrio de la balanza (Ilustración 11, Ilustración 12).


ISBN 978-84-945722-3-4

El alumno dispone de una estrategia inicial o base para empezar a resolver el problema, que consiste en ir probando. Dicha estrategia no coincide con la estrategia óptima que es la resolución de la ecuación.

Los problemas se han presentado a los alumnos como un medio no didáctico, es decir, no perciben la intencionalidad didáctica de la propuesta.

Los alumnos pueden comprobar, sustituyendo, si la solución obtenida es válida.

*Experimentación de las situaciones.*

Los alumnos jugaron a las adivinanzas y balanzas sin tener la información de que estábamos empezando la nueva unidad didáctica. Poco a poco se fueron introduciendo en el Álgebra.

Fueron descubriendo que, mediante este juego, estábamos resolviendo ecuaciones de primer grado. A esto también contribuyó el hecho de que fuera del entorno escolar algunos reciben apoyo y clases particulares.

La actitud de los alumnos ante este tema ha sido muy positiva ya que han mostrado interés y les ha gustado trabajarlo de manera lúdica, si bien queda pendiente medir las mejoras en el aprendizaje.

La comprensión de las ecuaciones con números enteros negativos ha sido fácil con el recurso de los globos utilizados en la aplicación. Otras propuestas emplean poleas. Los alumnos de 1º de ESO no tienen suficientes conocimientos de Física como para comprender la analogía.

**Referencias bibliográficas**

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Bujanda, M. P., & Mansilla, S. (2002). *Matemáticas 1º de Secundaria. Números.* Madrid: SM.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, & L. Ordóñez, *Investigación en Educación Matemática XVI* (págs. 75-94). Jaén: SEIEM.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ICE HORSORI Universidad de Barcelona.

Colerus, E. (1947). *De la tabla de multiplicar a la integral. Unas matemáticas para todos.* Barcelona: Labor.

Elliott, J. (2010). *La investigación-acción en educación.* Madrid: Ediciones Morata.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias, 26 (3)* , 327-342.


ISBN 978-84-945722-3-4

Hurtado, C. A. (2013). Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita y su impacto en la educación básica. En *VII Congreso Iberoamericano de Educación Maatemática* (págs. 1045-1055). Montevideo.
Ingelmo, M. A., & Zárate, Y. A. (2015). *Matemáticas 1º ESO.* Barcelona: Teide.
Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra. En A. Gutiérrez, & P. Boero, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics. Past, Present and Future.* (págs. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.
Machín, P., & Rey, M. J. (2015). *Matemáticas 1º ESO.* Madrid: Oxford Educación.
Palarea, M. M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. (Tesis doctoral). Universidad de La Laguna.
Pereda, S. (1987). *Psicología Experimental. I Metodología.* Madrid: Pirámide.
Piaget, J. (1983). *La Psicología de la Inteligencia.* Barceleona: Crítica. Grupo Editorial Grijalbo.
Rojano, M. T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números, 75* , 5-20.
Sierra, T., Bosch, M., & Gascón, J. (2012). La formación matemático-didáctica del maestro de Educación Infantil: el caso de «cómo enseñar a contar». *Revista de Educación, 357* , 231-256.
Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores, & M. P. Bolea, *Investigación en educación matemática* (págs. 19-52). Tenerife: SEIEM.
Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M., & Hernández, J. (1989). *Introducción al Álgebra.* Madrid: Síntesis.
Stenhouse, L. (1998). *La investigación como base de la enseñanza.* Madrid: Ediciones Morata.
VVAA. (2010). *Matemáticas 1º ESO.* Madrid: Santillana.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.138

# ESTABILIDAD, VARIABILIDAD Y DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESTADÍSTICO EN SITUACIONES DE MODELACIÓN GRÁFICA. UN ESTUDIO DE CASO EN INGENIERÍA QUÍMICA

Leslie Mariel Torres Burgos – Eddie de Jesús Aparicio Landa
leslie.torres@correo.uady.mx – alanda@correo.uady.mx
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, México

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: CB (Comunicación Breve)
Nivel educativo: Formación profesional
Palabras clave: Pensamiento estadístico, modelación gráfica estadística.

**Resumo**
*Se reporta que las nociones de estabilidad y variabilidad de datos estadísticos presentes en la práctica profesional de un ingeniero químico industrial en el área de diagnóstico de transformadores eléctricos, son y proveen de elementos centrales para el desarrollo del pensamiento estadístico. Esto con base en la observación de la práctica y de los diálogos establecidos con el ingeniero químico, en la que se reconoce que la movilización de dicho pensamiento está acompañada por un método de análisis centrado en el uso e interpretación de datos y variables aleatorias en forma gráfica.*
*Se evidencia que el desarrollo de un pensamiento estadístico y uso de las gráficas forman parte de un proceso de modelación (modelación gráfica estadística), proceso que deviene de la necesidad de estudiar situaciones de inestabilidad en un sistema de variaciones. Particularmente se detectó que el pensamiento estadístico movilizado en contextos reales, se caracteriza por la capacidad para hacer interpretaciones, establecer correlaciones, predicciones y tomar decisiones ante un sistema de variaciones, con la intención de reconocer estabilidad en lo variable.*

## Introducción

El estudio del desarrollo del pensamiento estadístico tiene como elemento constitutivo la noción matemática de variabilidad. Son diversos los autores (por ejemplo, Fernández, Andrade y Sarmiento, 2009), quienes coinciden al identificar que la noción de variabilidad es el elemento central del pensamiento estadístico; pues se considera que en su desarrollo se ven implicados procesos de análisis y cuantificación de la variabilidad, estudio del comportamiento de datos, la construcción de modelos con los cuales realizar



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

interpretaciones, inferencias y predecir resultados, entre otros procesos (Batanero y Díaz, 2004).

Adicional a esto, Wild y Pfannkuch (1999), mencionan que poseer un pensamiento estadístico consiste también en formar y transformar representaciones de datos para comprender un sistema, analizar la variabilidad para predecir, explicar y controlar datos o variables en una situación, modelar la variación, generar modelos estadísticos o con componentes de aleatoriedad, producir inferencias o conjeturas, conectar el conocimiento del contexto con el análisis de datos para interpretar su significado y tomar decisiones bajo incertidumbre.

Dicho así, el propósito del estudio fue precisar en qué medida las nociones de estabilidad y variabilidad asociadas a la práctica profesional de modelación gráfica estadística, aportan elementos para el desarrollo del pensamiento estadístico.

**Marco Teórico**

Diversos autores como Aparicio, Sosa, Jarero y Tuyub, (2010), afirman que el estudio de la actividad profesional, permite identificar al conocimiento matemático en uso, su funcionalidad; es decir, las formas en que dicho conocimiento se integra a la vida de las personas para transformarla y reconstruir significados. Es así que se reconoce que el contexto de las prácticas profesionales es un medio de análisis para generar explicaciones y entendimientos respecto a las formas en que las personas piensan y actúan matemáticamente ante condiciones y circunstancias específicas de uso profesional del saber. Con base en tales afirmaciones, en el estudio se decidió analizar el contexto en el que un ingeniero químico moviliza su pensamiento estadístico ante condiciones y circunstancias específicas de incertidumbre e interpretación de información de datos estadísticos, para decidir sobre el correcto o incorrecto funcionamiento de transformadores eléctricos.

En este sentido, la investigación se desarrolló bajo la perspectiva teórica de la construcción social del conocimiento matemático o Socioepistemología. En la que se asume como tesis fundamental que el sentido, significado y funcionalidad de los saberes matemáticos construidos socialmente, están en estrecha relación con el contexto en el cual se desarrolla dicha construcción.

Visto así, el aporte de esta perspectiva teórica investigativa consiste en otorgarle un mayor protagonismo de análisis a las condiciones socioculturales en las que se lleva a cabo todo


ISBN 978-84-945722-3-4

proceso de construcción de conocimiento matemático. En consecuencia, en lugar de analizar conceptos matemáticos en construcción, se analizan prácticas, condiciones, circunstancias o en general, los contextos socioculturales en los que adquiere sentido y significado una noción matemática o una forma matemática de pensar.

**Método**

Se realizó un análisis cualitativo e interpretativo a través de un estudio de caso puesto que parte del interés estaba en comprender la particularidad del trabajo de un ingeniero químico (diagnóstico de transformadores eléctricos), para determinar qué aspectos o nociones involucradas en su práctica favorecen el desarrollo del pensamiento estadístico.

De esta forma, por el objetivo fundamental que se persigue, el trabajo se ubica en el estudio instrumental de casos, cuyo propósito es analizar para obtener una mayor claridad sobre un tema o aspecto teórico. Y por la naturaleza del informe final, el trabajo se clasifica en un estudio de casos interpretativo, el cual, aporta descripciones densas y ricas con el propósito de interpretar y teorizar sobre el caso. El modelo de análisis es inductivo para desarrollar categorías conceptuales que ilustren, ratifiquen o desafíen presupuestos teóricos difundidos antes de la obtención de la información. Así, la técnica de investigación consistió en un análisis de expresiones lingüísticas, por ejemplo, en entrevistas y en el desarrollo del que hacer del ingeniero.

*Obtención de información*

La obtención de información esencialmente se realizó durante toda una semana laboral ininterrumpida del ingeniero. Dicha información fue concentrada en notas de campo a partir de la observancia no participante en el contexto habitual de la práctica profesional de dicho ingeniero (su laboratorio). Posteriormente y con base en la información obtenida, se diseñaron e implementaron entrevistas orientadas esencialmente a entender el lenguaje y procedimientos propios de la ingeniería química industrial (método de diagnóstico), e identificar el tipo de matemática y pensamiento estadístico movilizados durante el proceso de modelación e interpretación de gráficas asociadas a la diagnosis.

*Método de diagnóstico de los transformadores eléctricos*

Durante el funcionamiento de un transformador se generan gases que en la diagnosis se consideran claves para la detección de fallas específicas. Por ejemplo, la presencia de Hidrógeno es un indicativo de un deterioro normal en su funcionamiento, si existe Etileno,


ISBN 978-84-945722-3-4

es un indicativo de sobrecalentamiento y, si hay Acetileno, entonces se presenta un Arqueo (falla grave en el equipo). Esos gases, junto con otros (Agua, Etano, Metano, Monóxido de Carbono ($CO$) y Bióxido de Carbono ($CO_2$)) se encuentran disueltos en el aceite del transformador, cada uno con distinto nivel de concentración. Así, el diagnóstico se realiza mediante la identificación de un cambio de tendencia a partir de un análisis gráfico de los niveles de concentración de los gases.

Es en este proceso de representación y análisis gráfico de información en donde la noción de variabilidad y estabilidad de un sistema de variables aleatorias adquiere especial relevancia para la toma de decisiones y la movilización adecuada de un pensamiento estadístico in situ. Pues en una situación ideal de funcionamiento es de esperarse que un transformador no presente niveles elevados de los gases clave, aunque como se ha mencionado, es posible que se formen, empero se asume que su concentración debe ser estable, es decir, su ritmo de incremento debiera ser lento y similar al resto de los gases considerados en el análisis. Por ejemplo, el $CO$ y $CO_2$ al igual que el Metano, Etano y Agua, se producen por el propio envejecimiento del transformador, de manera que es normal que se presenten durante el análisis; sin embargo, su comportamiento también debe ser estable, es decir, con un ritmo de incremento lento y constante.

En la imagen 1, se muestran los modelos gráficos asociados a un desgaste natural en el transformador bajo condiciones ideales de concentración de los gases disueltos en el aceite.

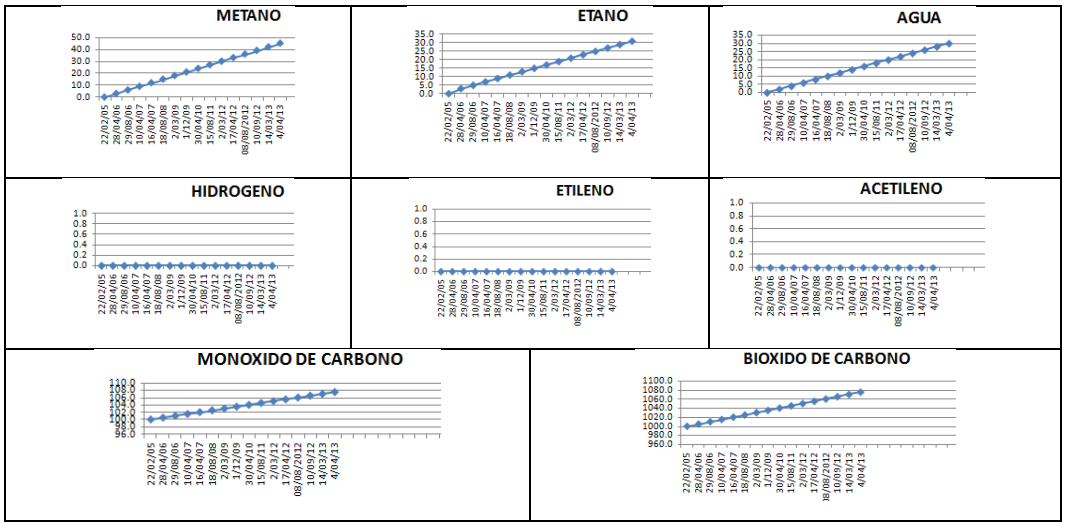



*Imagen 1. Modelos gráficos del desgaste de un transformador en condiciones ideales*



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

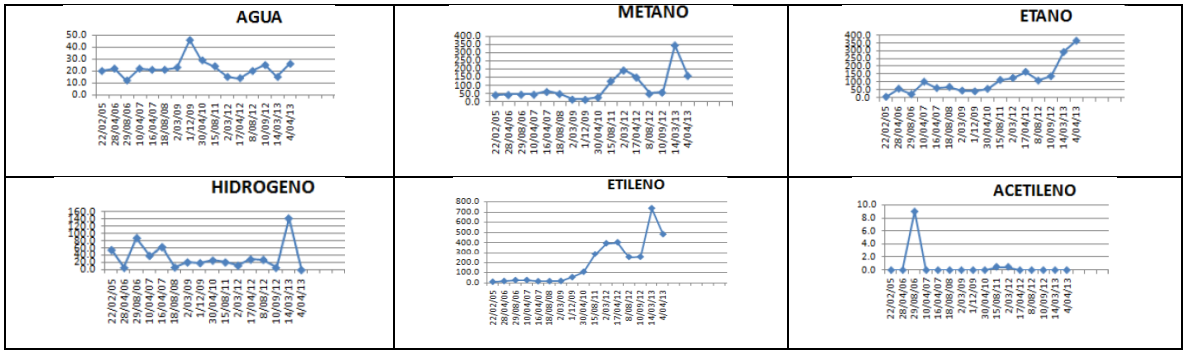
En estos modelos se observa la estabilidad de los gases de falla, y la estabilidad en el incremento de los otros gases (estabilidad como no incremento, estabilidad como variación constante). Cabe mencionar que estas gráficas no son reales, son solo una representación de las gráficas según las condiciones ideales que se esperarían en un transformador.

**Datos y Resultados**

*Análisis de una situación de diagnóstico*

Durante la etapa de observación se identificó que el ingeniero lleva a cabo su diagnosis en dos fases de análisis, una a nivel macro y otra a nivel micro (global y puntual) del sistema de comportamiento gráfico de gases. En el nivel macro analiza el comportamiento de todos los gases en forma sistémica y en caso de detectar variabilidad poco usual, procede a realizar un análisis a nivel micro, es decir, analiza el comportamiento específico en cada uno de los gases. Con ello determina si los niveles de concentración presentan o no estabilidad dentro de todo el sistema de datos. En caso de no reconocerse tal estabilidad, se procede a realizar un segundo análisis a nivel macro para determinar la variación simultánea (correlación de variables) entre cada uno de los gases disueltos en el aceite, de esta manera poder identificar si la variación se debe a factores ambientales (en caso de que las variaciones sean similares en todos los gases) o es intrínseco al equipo.

Si bien como se dijo en el apartado anterior, se presupone un modelo gráfico ideal asociado al comportamiento de la concentración de gases disueltos en el aceite de un transformador eléctrico, en la realidad, las gráficas generadas con los datos muestran variaciones significativas debido a factores tales como el ambiente en el que se ubica el transformador, sobrecargas, entre otros. En la imagen 3 se presenta un ejemplo de modelos gráficos del desgaste de un transformador en condiciones reales, en donde el equipo presenta un problema específico.






VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

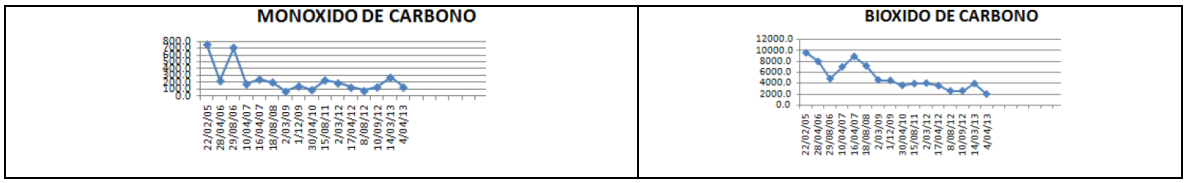



*Imagen 3. Modelos gráficos de un transformador en condiciones reales que presenta un índice de falla*

Desde una mirada global, se puede determinar que no se identifica una estabilidad en el comportamiento puntual de las concentraciones de gases; esto es, en todas las gráficas se observa variabilidad. Por ejemplo, en la gráfica correspondiente al acetileno se observa un incremento de 9 ppm, sin embargo, no continúa el incremento, sino que regresa a la estabilidad, lo que indica que no hay un problema de arqueo en el transformador ya que la concentración de este gas presenta estabilidad.

Por otro lado, haciendo un análisis de manera puntual del comportamiento de las concentraciones de hidrógeno (que indica descargas parciales), se observa que presenta incrementos no muy significativos, esto es, al principio de la gráfica tiene un crecimiento entre 100 y 160 ppm. Sin embargo, de manera global, los comportamientos de las demás gráficas como el bióxido, monóxido, etano, metano, tienen un comportamiento similar, además de que no se presenta un incremento en varios periodos de muestra. En contraste, el etileno si presenta incrementos en diferentes periodos de muestra seguidos, por lo que se concluye que éste gas presenta inestabilidad tanto a nivel micro como macro.

En el análisis del ingeniero se menciona que: *el gas etileno se incrementó al pasar el tiempo, se puede identificar un notable incremento en su concentración, en la fecha del treinta de abril de dos mil diez, tenía una concentración de 100 ppm y en la siguiente muestra del quince de agosto de dos mil once, tenía 300 ppm, por lo que en poco más de un año el incremento fue de 200 ppm, esta cantidad se considera un incremento considerable y por tanto, un indicativo de un posible calentamiento en el transformador. Continuando con el monitoreo del equipo se observa que los incrementos permanecen, ya que, en la siguiente muestra, a los 7 meses, hay un nuevo incremento de 100 ppm. Al siguiente mes se hace otro análisis y en este no hay mucha variación, por lo que parece que la velocidad de generación no es tan rápida. Cuatro meses después (el día ocho de agosto de dos mil doce), se toma una nueva muestra y al mes siguiente otra y en estas parece que hay un descenso en la*


ISBN 978-84-945722-3-4

*concentración. Sin embargo, si se observan las gráficas de todos los gases, se identifica un descenso en la concentración, por lo que se considera que éste es ajeno al problema del transformador, pues ocurre de manera simultánea en todos los gases. No obstante, en la siguiente muestra, seis meses después, hay un incremento de 500 ppm.* Por tal motivo el ingeniero determina que es momento de revisar el transformador por dentro ya que hay un "punto" caliente en el mismo.

Observaciones técnicas del ingeniero químico:

*… en este equipo se está presentando un punto caliente, por la presencia de gas etileno, el cual se incrementó en el último análisis del mes de marzo.*

En la situación de falla real del transformador presentada se observa que el énfasis en la práctica de análisis del ingeniero, está en la estabilidad de las variables del sistema que representan al funcionamiento del transformador.

*Resultados a la luz del encuadre teórico*

Con base en la observación de la práctica y de los diálogos establecidos con el ingeniero, se observa el despliegue de una forma de pensar estadística durante su práctica. Ejemplo de ello es que el proceso mental llevado a cabo por él, se caracteriza por el análisis o búsqueda de la estabilidad. Sin embargo, ante situaciones donde ésta se pierde, se realiza un análisis de la variabilidad en los datos, por lo que es necesario realizar ajustes en donde la variabilidad se considera constante. En consecuencia, el ingeniero trabaja sobre la variabilidad, reinterpretándola/reconfigurándola en una variabilidad aceptable, "normal" en relación a los datos, por tanto, no es significativa, y parece que los datos se comportan de manera constante. Si bien las mediciones arrojan datos de cada elemento del sistema, se recurre y es necesario entender las variables de todo el sistema. De este modo, la decisión (diagnóstico), no resulta a partir de los datos o más precisamente de su interpretación, sino de la reinterpretación de las variables y la correlación entre las mismas de manera que se explique algún nivel de la estabilidad; cognitivamente se trata de estabilizar lo variable. Es así que su práctica de diagnóstico incluye una confrontación de las nociones matemáticas de estabilidad y variabilidad.

De la forma en que el ingeniero usa, piensa o reinterpreta las gráficas, se identifica que su pensamiento y uso de las gráficas forman parte de un proceso de modelación, modelación gráfica estadística, la cual consiste en tomar datos (mayormente numéricos) de una situación,


ISBN 978-84-945722-3-4

organizarlos en forma sintética y visual para establecer o estudiar tendencias de estos, a partir de su especificidad o generalidad.

En toda esta práctica del ingeniero, el estado del transformador funge como una variable aleatoria que se analiza mediante un modelo gráfico estadístico, con el fin de interpretar el comportamiento de los datos para realizar inferencias, predicciones y tomar decisiones. Asimismo, se identifica a la estabilidad y al análisis correlativo de variables, como elementos referentes para la construcción de modelos estadísticos que favorecen el análisis e interpretación de lo aleatorio.

El análisis de situaciones de inestabilidad gráfica de datos aleatorios es el medio por el cual se favorece el establecimiento de correlaciones con la intención de reconocer cierto índice de estabilidad en las variaciones.

**Conclusiones**

El aspecto principal del pensamiento estadístico en la modelación gráfica de variables aleatorias fue la estabilidad, entendida como una forma de conocer y entender el equilibrio de un sistema; empero, es ante una situación o señal de inestabilidad que se decide estudiar el sistema de variaciones, en este caso específico, en los niveles de concentración de los gases, dando paso a un análisis correlativo.

El mecanismo usado por el ingeniero para establecer sus inferencias y decidir en consecuencia, consistió en la actividad de análisis comparativo entre gráficas y el correlativo entre las variables. En ello, la recolección, organización y graficación de datos obtenidos mediante muestreos estadísticos, forma parte de su práctica profesional, posibilitando la identificación y movilización de nociones medulares y formas del pensar estadísticamente tales como: estabilidad (o inestabilidad), variabilidad y el establecimiento de inferencias del comportamiento tendencial de datos en gráficas.

Así, se concluye que la estabilidad-inestabilidad y variabilidad de cambios simultáneos en los valores de variables aleatorias, son elementos indispensables en la modelación gráfica estadística de una práctica profesional, y en adición, son aspectos en los que se vislumbra una posible reinterpretación del uso de las gráficas, la graficación y modelación gráfica en la estadística escolar. Igualmente, son elementos que favorecen el desarrollo del pensamiento estadístico.

**Referencias bibliográficas**


ISBN 978-84-945722-3-4

Aparicio, E., Sosa, L., Jarero, M. y Tuyub, I. (2010). Conocimiento matemático. Un estudio sobre el papel de los contextos. *Memoria de la XIII EIME*, 167-174. México.
Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En Patricio Royo (Ed.), Aspectos didácticos de las matemáticas (125-164). Zaragoza: ICE.
Fernández, F., Andrade, L. y Sarmiento, B. (2009). La idea de variación en la educación estadística. *Memorias VIII Encuentro nacional de educación matemática y estadística*. Colombia.
Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-265.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.139

# PNAIC MATEMÁTICA E A PRÁTICA PEDAGÓGICA NA PERSPECTIVA DO PROFESSOR ALFABETIZADOR

Sirlene de Jesus dos Santos da Silva – Neila Tonin Agranionih
sirjesus.silva207@gmail.com – ntagranionih@gmail.com
Universidade Federal do Paraná: Departamento de Teoria e Pratica de Ensino – Brasil

Núcleo temático:IV FORMACIÓN DEL PROFESORADO EN MATEMÁTICAS.
Modalidade: COMUNICACIÓN BREVE (CB)
Nível: 5 FORMACIÓN Y ACTUALIZACIÓN DOCENTE
Palavras chave: Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa. Prática Pedagógica. Formação de Professores.

**Resumo**
*O artigo apresenta parte dos resultados de uma pesquisa que buscou identificar desafios e contribuições da política brasileira de formação de professores alfabetizadores - Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa – PNAIC Matemática - para a prática pedagógica. Os dados foram obtidos por entrevista semi-estruturada com dezoito professoras do Ciclo I do Ensino Fundamental da Rede Municipal de Curitiba – PR e analisados por meio da Análise de Conteúdo. Tem o objetivo de apresentar o que professores participantes entendem como prática e discutir este conceito de forma mais ampla no que se refere à ação pedagógica dos alfabetizadores participantes do PNAIC - Matemática. Para fundamentação e suporte teórico, conta com contribuições de: Brito (2006), Pimenta (1999, 2014) Tardif (2000), Mizukami (2002), Nóvoa (1992); entre outros. Os resultados apontam para uma concepção instrumental de prática, ora como oposição à teoria, ora como atividades aplicáveis. Evidenciam que a consciência das diferentes dimensões que envolvem a prática depende da reflexão que o professor realiza sobre seus saberes no desenvolvimento de seu trabalho.*

## Introdução

O Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa – PNAIC é um compromisso assumido pelos governos Federal, Estadual e Municipal brasileiros para assegurar a plena alfabetização de todas as crianças até os oito anos de idade. Para o alcance desse objetivo, foram criados e previstos um conjunto de ações que se referem aos materiais e referências curriculares e pedagógicos, avaliações e controle social, e mobilização que são disponibilizados pelo


ISBN 978-84-945722-3-4

Ministério da Educação – MEC, e contribuem para a alfabetização e o letramento sendo o eixo principal a formação continuada de professores alfabetizadores (Brasil, 2014a, p. 8).

No âmbito do Pacto, a Formação Continuada de Professores Alfabetizadores desenvolveu-se a partir de um processo de formação em um curso presencial, e as estratégias formativas priorizadas contemplaram atividades de estudo, planejamento e socialização da prática. O PNAIC Matemática ocorreu em 2014 e objetivou o aprofundamento e ampliação de temas sobre Linguagem tratados em 2013, contemplando o foco na articulação entre diferentes componentes curriculares com ênfase em Matemática. Em Curitiba- PR a formação foi realizada por meio de parcerias entre o Ministério da Educação – MEC, Universidade Federal do Paraná – UFPR e Secretaria Municipal de Educação – SME, os quais se articularam para a implantação e realização do processo formativo dos professores alfabetizadores da rede municipal.

O presente artigo apresenta parte dos dados de uma pesquisa mais ampla: "Desafios e contribuições do PNAIC Matemática para a prática pedagógica de professores da rede municipal de Curitiba", que buscou identificar os desafios e as contribuições do PNAIC - Matemática para a prática pedagógica. Tem como objetivo apresentar o que professores participantes entendem como prática e discutir este conceito de forma mais ampla no que se refere à ação pedagógica dos alfabetizadores participantes.

## A formação continuada e a alfabetização matemática no âmbito do PNAIC

O documento orientador do PNAIC ressalta que a formação continuada como política nacional é entendida como componente essencial da profissionalização docente, devendo integrar-se ao cotidiano da escola e pautar-se no respeito e na valorização dos diferentes saberes e na experiência docente. Logo, a formação continuada se constitui no conjunto das atividades de formação desenvolvidas ao longo de toda a carreira docente, com vistas à melhoria da qualidade do ensino e ao aperfeiçoamento da prática docente· Nesse sentido, concebe o professor do ciclo de alfabetização como um profissional reflexivo que constrói um trabalho docente como prática social (Brasil, 2012, p. 21).

O PNAIC - Matemática propõe a Alfabetização Matemática na perspectiva do letramento. Discussões sobre tal proposta foram apresentadas no decorrer de toda formação com o intuito de subsidiar e dar embasamento teórico aos professores alfabetizadores sobre o tema. Espera


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

que os professores participantes da formação do PNAIC Matemática incorporem às suas práticas pedagógicas atividades que oportunizem a compreensão, interpretação e o uso da linguagem matemática presente nas práticas sociais no sentido de ir além do ler e escrever números e realizar cálculos em exercícios que privilegiem o domínio de técnicas operatórias. De acordo com as orientações apresentadas nos Cadernos do PNAIC, o ambiente de sala de aula deve ser alfabetizador e neste sentido, além dos materiais que remetam à função social da matemática, dos jogos, do lúdico e das brincadeiras, o professor alfabetizador deve ser aquele que oportuniza situações que favoreçam a construção dos saberes matemáticos vivenciados na infância que servirão de base para a construção dos conceitos matemáticos universais. A construção resultante das relações que a criança estabelece a partir do seu contato com o mundo e nas suas relações sociais, quando incentivada pelo professor, contribui para o seu processo de alfabetização matemática (Brasil, 2012). Na medida em que propõe novas abordagens ao processo de alfabetização, com a proposta de realização de novas práticas de ensino, propõem também ao professor a construção de uma nova prática pedagógica, tendo como princípio a reflexão permanente sobre sua ação.

**A formação do professor e a prática pedagógica**

As pesquisas atuais sobre formação docente têm a marca da importância dada à prática docente e aos saberes dos professores. Brito (2007, p.50) acrescenta que há valorização dos "saberes da experiência, apresentando como novo paradigma formativo a perspectiva reflexiva". A perspectiva reflexiva de formação docente é delineada pela necessidade do próprio professor perceber-se como um profissional que reflete e está consciente de sua função social, capaz de construir o saber no cotidiano escolar continuamente na ação, numa perspectiva crítica (Brito, 2006).

A perspectiva reflexiva crítica é tomada por Nóvoa (1992) como processo que fornece aos professores meios de pensar com autonomia no contexto de sua autoformação, usufruindo de liberdade e criatividade.

Tardif (2000) contribui com essa discussão acrescentando que a prática docente é o palco e o cenário de produção de saberes relativos à profissão. Para este autor, cabe ao professor tornar-se sujeito do conhecimento detendo saber específico e intrínseco ao seu fazer pedagógico.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

A atuação profissional nos permite afirmar que os saberes docentes emergem no cotidiano da sala de aula a partir da reflexão que fazemos sobre o que fazemos. Mas, ao mesmo tempo, esses saberes alimentam-se de uma teoria pesquisada, estudada. Estamos falando de saberes que dependem de uma teoria, de uma prática reflexiva e nossa atuação crítica diante da realidade vivenciada. Então nossa formação, segundo Pimenta (1999, p.30) requer mobilização de "saberes da nossa prática reflexiva", assim como de "saberes especializados" e "saberes de uma militância pedagógica".

Por isso é tão importante o incentivo à formação do professor como intelectual reflexivo, inovador, que busca novas práticas e metodologias, que não tem medo do novo, que busca constantemente se atualizar, pois já é sabido que o conhecimento é sempre mobilizado por novas aprendizagens.

O profesor, que desde sua formação desenvolve o hábito de refletir sobre a prática poderá constituir-se num professor reflexivo. Esse professor traz em si a satisfação de formar e mudar, e isso não só em relação à sua própria prática, mas também em relação à sua própria pessoa, como ser humano.

**Os caminhos percorridos na pesquisa**

A seleção dos professores participantes do PNAIC- Matemática foi realizada por indicação do Ministério da Educação através do Edital que contemplava como critério para participação no curso, professores regentes de turmas do 1º, 2º e 3º ano, que constavam no censo escolar do ano anterior. Ao todo foram 1814 professores alfabetizadores que participaram da Formação do PNAIC na rede municipal de Curitiba. Esses professores foram organizados em 69 turmas distribuídas em 9 Núcleos Regionais de Educação, sendo Bairro Novo, Boa Vista, Boqueirão, Cajuru, CIC, Matriz, Pinheirinho, Portão e Santa Felicidade.

A pesquisa realizada, de natureza qualitativa, envolveu 18 professoras alfabetizadoras do Ciclo I da rede municipal de Curitiba, selecionadas por sorteio dentre os participantes da formação do PNAIC- Matemática no município. Como critério para participação na pesquisa, o professor tinha que ter concluído a formação do PNAIC Matemática em 2014 e estar atuando no Ciclo I no ano de 2015. A coleta de dados foi realizada por meio de entrevista semi-estruturada, vídeogravadas e posteriormente transcritas. Para análise e interpretação dos dados foi utilizada a técnica de Análise de Conteúdo (Bardin, 2011). Teve como objetivo


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

verificar desafios e contribuições do PNAIC Matemática para a prática pedagógica na perspectiva dos professores alfabetizadores do Ciclo I do município de Curitiba participantes. Nela ficaram evidentes as concepções de prática pedagógica dos professores no contexto da formação.

A pesquisa evidenciou as concepções de prática pedagógica dos professores participantes: *prática em oposição à teoria, prática como atividades aplicáveis.*

*Prática em oposição à teoria* refere-se à visão das professoras, tais como as exemplificadas abaixo, P13, P16 e P18, de que a formação foi um processo não apenas teórico, mas que promoveu atividades, trouxe sugestões sobre como ensinar e exemplos de atividades. Para elas o PNAIC Matemática trouxe muito a "prática", ou seja, metodologias que facilitam e que podem ser utilizadas pelo professor para desenvolver suas aulas e auxiliar na aprendizagem dos alunos.

> P13 – […], mas quando você trás para prática você vê que é possível ser realizada em sala de aula, então as possibilidades são grande de ser realizada em sala, não é tudo, mas a maioria gente consegue aplicar.
> P16 – [...] é bem possível porque foi um curso bem prático que nos ensinou a aplicar vários jogos de fácil aplicação e nos auxiliavam na prática do dia a dia.
> P18 – A possibilidade é ampla, pois as atividades são dinâmicas e práticas, facilitando assim o processo de aprendizagem das crianças [...] Tudo o que eu vi nos cadernos de formação eu achei interessante eu procurei colocar em prática, assim algumas delas e, eu acredito que pela forma prática de ser desenvolvida e pela ludicidade que se encontra nos cadernos as atividades elas instigam mais os estudantes.

Nesse sentido, a formação foi valorizada por ter apresentado o "como fazer" e não apenas dizer o que deve ser feito, ou seja, ficar só na "teoria", conforme dizem as professoras.

*Prática como atividades aplicáveis,* refere-se à concepção das professoras exemplificadas abaixo, P1, P2, P8 e P14, de que "prática" diz respeito às atividades aplicáveis na sala de aula, que enriquecem o planejamento, que auxiliam no seu fazer pedagógico e possibilitam desenvolver a alfabetização em sala de aula. Essas professoras viram na formação um meio para desenvolver determinadas atividades e não como uma proposta no sentido de auxiliar o professor no desenvolvimento de sua prática pedagógica num sentido mais amplo.

> P1 – Eu aplico bastante da formação, os conteúdos, as possibilidades que foram dadas no curso quando possível, nem sempre é possível né, apesar de serem práticas que enriquecem o nosso trabalho, enriquecem o nosso planejamento, o encaminhamento metodológico fica bem melhor do que a gente fazia antes.


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

> P2 – Eu continuo colocando [...] porque são práticas que eu já utilizei nos anos anteriores e eu vi que deu certo.
> P8 – Porque acaba assim como a gente fica muito no livro didático com a criança, o Pnaic acaba trazendo muita coisa prática pro curso, pras aulas de matemática mesmo, porque daí você pensa numa atividade de contagem numa atividade de jogo numa atividade lúdica na sala, um planejamento diferente.
> P14 – [...] são práticas de alfabetização que nós fizemos e que podem ser feitas no dia a dia pra auxilio do aluno né nos diferentes conteúdos.

Considerando o exposto destacamos que, embora o PNAIC Matemática tenha tido como objetivo promover a reflexão do professor sobre a sua própria prática pedagógica e sobre a necessidade de construí-la apoiados em referenciais teóricos, aos participantes talvez tenha ficado mais presente as atividades propostas em si para serem aplicadas em sala de aula, ou seja, as sugestões de atividades de ensino a serem seguidas.Neste contexto, concordamos com Kramer (2011) que diz que é preciso que uma formação continuada possibilite aos professores estudarem as teorias de forma crítica de maneira que elas os ajudem a compreenderem suas práticas, criando estratégias de ação e assim rejeitando antigas receitas e manuais. A professora P17, exemplificada abaixo, parece mais próxima destas ideias ao considerar que a prática requer mais do que aplicar um modo de fazer à atividade:

> P17 – [...] é uma coisa desafiadora, mas é possível, assim não a relação de conteúdos, mas na maneira de você trabalhar que exige mais dos professores, exige uma preparação também do aluno, mas eu acho que é bem prático e bem possível sim, mais pra isso a gente tem que ter toda uma organização, tem que organizar muito bem, pensar muito bem porque não dá pra simplesmente pra jogar as coisas, vai jogar por jogar, tem que ter um planejamento, um conteúdo e explicar porque a atividade daquele momento.

Não basta saber aplicar atividades práticas, mas é necessário ter clareza de seus objetivos, de suas contribuições para a aprendizagem e esses aspectos envolvem referenciais teóricos que os sustentam. Para que as práticas atinjam seus objetivos precisam estar ancoradas em planejamentos sólidos, do contrário, poderão perder o seu sentido. Não podemos esquecer que a prática pedagógica é, sem dúvida alguma, um exercício diário, uma formação pessoal e profissional que não finda, onde o professor precisa constantemente colocar em interlocução conhecimentos, teorias e práticas. Neste ponto, questionamos a concepção de que a prática simplesmente é alimentada pela prática e se basta em si mesma no exercício da docência. Se for assim podemos cair num mero ativismo, uma vez que os suportes dos


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

referenciais teóricos sustentam e dão sentido às práticas a serem desenvolvidas em sala de aula. A teoria e a prática necessitam andar juntas num processo de prática reflexiva.

Destacamos Mizukami que cita a importância da reflexão crítica na formação continuada:

> A formação continuada busca novos caminhos de desenvolvimento, deixando de ser reciclagem, como preconizava o modelo clássico, para tratar de problemas educacionais por meio de um trabalho de reflexividade crítica sobre as práticas pedagógicas e de uma permanente (re) construção da identidade do docente. (Mizukamiet al. 2002a, p.28)

A partir desses apontamentos, é importante que o professor rompa com o estigma da simples transmissão de conhecimentos e proposições de atividades destituidas de significado tanto para o aluno quanto para ele próprio. Neste sentido corroboramos com as reflexões de Mizukami (2002) quando salienta que um curso de formação continuada deve proporcionar novas reflexões sobre a prática em sala aula e a (re) construção da identidade docente.

**Considerações**

Ao professor não cabe ser um repetidor de atividades prontas e da mesma forma, não pode mais buscar nas formações continuadas apenas sugestões de atividades que facilitem o planejamento e o ensino. Neste sentido, torna-se fundamental que os programas de formação continuada assegurem ao professor o tempo necessário para construir uma visão mais ampla de prática pedagógica desencadeando um processo reflexivo sobre a mesma ancorado em referenciais teóricos. Corroboramos com Nóvoa (1992), que diz que a formação docente é norteada pela prática pedagógica desenvolvida pelo professor, na mesma proporção em que esta prática é alimentada pela própria formação. É através da reflexão que surge ou se constrói a o pensamento pedagógico sobre a prática, através de um processo de estudos continuados durante toda a carreira profissional.

Neste sentido, não podemos afirmar que a formação proposta pelo PNAIC Matemática tenha favorecido a construção de conhecimentos, a transformação de saberes e a reflexão contínua da própria prática, afinal, uma das características da prática reflexiva é a busca permanente de significado sobre a própria pratica no sentido de ressignificá-la. O que pudemos perceber com a pesquisa foi que o alcance desse objetivo demandaria a continuidade da formação no sentido de proporcionar a ressignificação das concepções de



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

prática como oposição à teoria e como aplicação de atividades evidenciadas pelos professores.

Frente às discussões que marcaram a trajetória da construção deste artigo, onde tentamos compreender as concepções de prática dos professores alfabetizadores, podemos considerar que estamos a passos muito lentos a caminho de atingir a finalidade de promover a prática reflexiva dos professores, um dos objetivos a que se propôs o PNAIC Matemática.

**Referências bibliográficas**


BRASIL (2012). Pacto Nacional pela alfabetização na idade certa: Formação do professor alfabetizador: Caderno de Apresentação: MEC/SEB. Brasília.

BRASIL (2014). Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Documento Orientador Pacto 2014 / MEC/ SEB. Brasília.

BRASIL.(2014a) Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa. Caderno de Apresentação. MEC/SEB. Brasília.

BRITO Antonia Edna (2006). Formar professores: rediscutindo o trabalho e os saberes docentes. In: MENDES SOBRINHO, J. A. M. C; CARVALHO, M. A**.** Formação de professores e práticas docentes: olhares contemporâneos. Belo Horizonte: Autêntica.

_____. Sobre a formação e a prática pedagógica: o saber, o saber-ser e o saber-fazer no exercício profissional. In: MENDES SOBRINHO, José Augusto de Carvalho (Org.). Formação e prática pedagógica: diferentes contexto e análises. Teresina: EDUFPI, 2007.

KRAMER, Sônia. (2011). Formação de profissionais de educação infantil: questões e tensões. In: MACHADO, M. L. de A. *Encontros e Desencontros em Educação Infantil*. 4. ed. São Paulo: Cortez.

MIZUKAMI, M. G. et al. (2002). *Escola e aprendizagem da docência: processos de investigação e formação*, São Carlos/SP: EdUFSCar.

NÓVOA, Antonio. (1992). Os professores e sua formação**.** Lisboa: Publicações Dom Quixote.

PIMENTA, Selma. Garrido. (1999). Formação de professores: identidade e saberes da docência. In: (Org.). Saberes pedagógicos e atividade docente. São Paulo: Cortez.

TARDIF, Maurice. (2000). Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários – elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e




ISBN 978-84-945722-3-4

suas conseqüências em relação à formação para o magistério. Revista Brasileira de Educação, ANPED, São Paulo, n. 13, jan./abr.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.140

# LOS MUNDOS DE ALEF

Armesto Ramón, Diego Félix
darmesto@edu.xunta.es
I.E.S. Francisco Aguiar. Xunta de Galicia. España

Núcleo temático: VI. Matemáticas y su integración con otras áreas.
Modalidad: CB, Comunicación breve
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: Conocimiento. Universo. Distribuciones. Evolución.

**Resumen**
*Las categorías con las que Russell resuelve el Lenguaje, los tipos con los que Cantor resuelve la Aritmética y la dualidad que contribuye a enunciar Einstein además de otros autores que manifiestan el mismo concepto en diversos ámbitos de la realidad ( la urdimbre humana, etc) nos muestran una realidad dual, a saber, las distribuciones de partículas donde cada una es una identidad y el conjunto de todas ellas cuya interacción conjunta lo hace categóricamente diferente y lo lleva a un tipo superior de aritmética con unas características que lo definen como el medio no localizado en que se realizan los cambios universales en cada uno de los niveles de organización natural y artificial.*
*Postulado: "Existe al menos una manera de comprender toda realidad humana. A saber, proyectarla sobre los ocho mundos aléphicos; los cuatro naturales: Físico-radiológico, Químico-astrológico, Biológico-ecológico y Psicológico-sociológico y los cuatro artificiales: Filológico-matemático, Político-económico, Artístico-tecnológico y Teológico-civilizado".*
*Los mundos de Alef pueden ser interpretados como paradigma de Conocimiento humano, unidad didáctica metodológica o proyecto tecnológico generalizado.*
*Usar esta herramienta no es fácil, exige justicia: "La consciencia de la ignorancia es la puerta de la sabiduría", fortaleza, prudencia y templanza pues preservamos, vemos y servimos de todo.*

Para comprender la finalidad de esta herramienta hay que preguntarse ¿qué es aprender algo? ¿qué se puede aprender? ¿para qué aprender?

Las dos últimas preguntas parecen claras pues ya el informe que Delors entrega en la UNESCO habla de los cuatro pilares de la Educación. Las leyes de Educación plasman los tres contenidos: conceptos, habilidades y valores y normas aunque son reacias a usar la palabra "felicidad" como el fin de la educación. Esos cuatro pilares tienen una interrelación compleja con incluso varias intepretaciones; ya sea a pares, asimilando conceptos para tener


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

la habilidad de aplicarlos y aprendiendo valores y normas para ser feliz desarrollándolos o en cuaternión, asimilando conceptos, habilidades y valores y normas para aumentar la felicidad.

Supongamos que ese concepto se pueda representar lingüísticamente mediante una palabra, entonces alguien sabe un concepto cuando es capaz de discernir entre la veracidad o falsedad de cualquier proposición construible con posibilidad semántica entre la palabra que se aprende y todas las palabras que ya se han aprendido.

Supongamos que esa habilidad se pueda representar técnicamente mediante una acción, entonces alguien habilita una acción cuando es capaz de discernir el momento adecuado para intercalar la acción que aprende entre todas las acciones aprendidas con posibilidad de construir una tarea con una posible finalidad.

Supongamos que esa justicia se pueda representar ética o normativamente mediante un valor o norma, entonces alguien asimila un valor o norma cuando es capaz de discernir la actitud adecuada para actuar ante una circunstancia a la que dicho valor o norma se refieren.

Mi respuesta no está carente de incompletitud e incluso la medida de un aprendizaje se haría imposible si atendiésemos al innumerable censo de proposiciones construibles, tareas definibles o actos realizables si no recurriéramos a un muestreo de algunas de ellas.

En mis clases adoptamos este axioma:

“Escapar de la ignorancia, de la torpeza y de la injusticia es la puerta a la felicidad”.

Los mundos de Alef constituyen como unidad didáctica el diseño de un experimento de aprendizaje de un concepto, del desarrollo de habilidades asociadas y de la aplicación de normas añadidas y la evaluación de muestreo por conglomerados respecto a toda la población de conceptos humanos aprendidos.

En cuanto al nuevo paradigma de conocimiento, los cuatro conglomerados de Conocimiento humano de lo natural responden a las cuatro flechas naturales del tiempo. Tres de ellas bien descritas por Stephen Hawking en su historia del tiempo, a saber, el tiempo físico que transcurre en el sentido de dilatar el espacio y que coincide con el sentido en que la luz se aleja de su origen, el tiempo químico, que tan bien describe Ilya Prigogine, en el sentido termodinámico maximizando la entropía del Universo que coincide con el sentido en que se sintetizan las substancias y se constituyen los astros y el tiempo psicológico en el sentido de recordar solo lo sucedido que coincide con el sentido de desarrollo de la complejidad social.


ISBN 978-84-945722-3-4

Olvida Hawking citar el tiempo biológico, del que Charles Darwin dio buena cuenta, en el sentido de la evolución de las especies que coincide con el sentido de las mutaciones genéticas.

Llegados a este punto, no parece difícil conjeturar los cuatro tiempos artificiales, a saber, el tiempo filológico en el sentido de la linealidad del signo lingüístico, el tiempo tecnológico en el sentido en que se concatenan las acciones de los elementos de una máquina para funcionar, el tiempo económico en el sentido en que fluyen las transacciones comerciales y el tiempo teológico en el sentido en que una civilización conquista los valores y normas sobre los que se sustenta.

Trata este paradigma de plantear la validez de las matemáticas sobre cada uno de los mundos en el sentido aritmético de Cantor, pues todos ellos están formados por elementos, entes o partículas en relación de uno es a uno con alguna parte de los números naturales y por tanto serán aplicables las leyes de la aritmética y el poder descriptivo de los números. Pero también cada mundo supone una categoría de forma que las relaciones entre sus partículas, el conjunto de sus partes, conforman un cuasicontinuo donde ellas mismas evolucionan respecto a las demás y son aplicables las leyes del cálculo y análisis matemático. Supone por tanto una especie de propuesta formal para la antropocognodinámica de los ocho medios continuos.

Como unidad didáctica la incorporo en mi programación anual en base a tres proyectos, uno por trimestre, que responden a las grandes partes de las matemáticas.

1.- Números. Encuentra números y plantea el problema matemático que resuelven para cada una de las 16 realidades de los 8 mundos. El trabajo se hace en pequeños grupos definidos según la metodología “O Bico das Serpes” que garantiza un reparto del liderazgo matemático equitativo para optimizar la consecución de los objetivos en todos los grupos.

2.- Algebra y funciones. Encuentra fenómenos de la realidad definiendo las variables que lo describen, planteando las tablas numéricas que las relacionan, representando gráficamente sus variables y verbalizando la ley o fórmula que las relaciona para cada una de las 16 realidades de los 8 mundos. El trabajo se hace en pequeños grupos. Siendo este año dedicado internacionalmente al turismo sostenible, todos los grupos deberán de coordinarse para construir un trabajo completo que interseque ambos conceptos (fig. 1).

3.- Geometría. Encuentra ejemplos de formas geométricas, describe sus elementos y plantea las leyes y fórmulas que los relacionan para cada una de las 16 realidades de los 8 mundos.


ISBN 978-84-945722-3-4

El trabajo se hace en parejas dentro del pequeño grupo de forma que cada uno construya una realidad de cada mundo.

Objetivo: Comprender los conceptos básicos de las matemáticas mostrando su interrelación con todas las realidades humanas, desarrollar la habilidades básicas de las matemáticas para modelizar todas las realidades humanas y valorar la capacidad matemática para enfrentarse al entendimiento de todo y seguir normas para la colaboración en grupo y la exposición de una idea.

Metodología: Disponen de un mapa conceptual, "Los mundos de Alef" (fig. 2), todos sus libros de texto, ordenador con acceso a INTERNET, hoja de cálculo, procesador de textos y geogebra. Deben de reflexionar como puede ser la respuesta a cada cuestión, coordinarse con los integrantes de su grupo y luego buscar los datos necesarios para justificarla correctamente aunque si no se le ocurre nada puede buscar ideas directamente en sus libros de texto o en INTERNET o como último recurso preguntarle a su profesor.

Así mismo la presentación de los trabajos seguirá unas normas: dieciséis hojas DIN A4, una para cada realidad, y cada una de ellas con encabezado constituido por nombre del centro, fecha de entrega, número y letra del curso, color del grupo y nombre de la actividad, con márgenes y un pié de página con el nombre del autor y espacio para el nombre del corrector.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

La evaluación mediante ítems posibilita la intercorrección discente en la que una vez entregado el trabajo de cada grupo se les reparte a otro grupo para su corrección en clase junto con la rúbrica (fig. 3) para que los mismos alumnos puedan evaluar los trabajos.

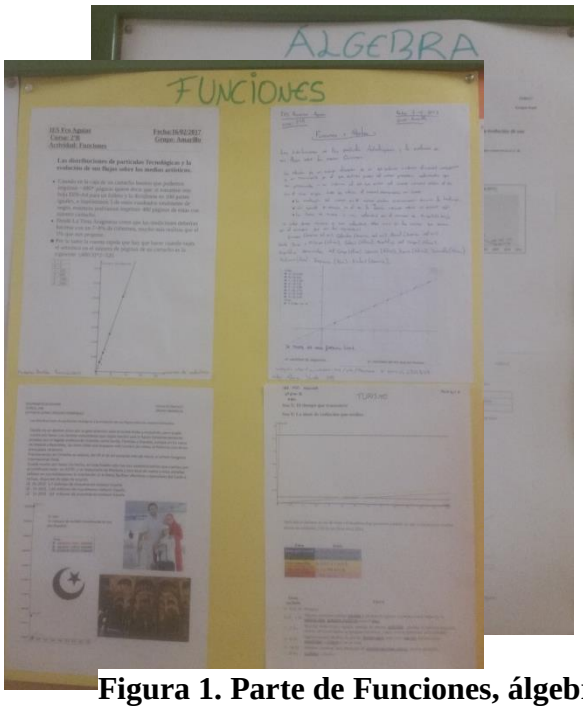



**Figura 1. Parte de Funciones, álgebra y turismo sostenible de 2º E.S.O**

.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

| Rúbrica. Los mundos de Alef. Funciones y álgebra | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Justo | (1 p)<br><br>Encabezado: centro: IES, | (1 p)<br><br>Webgrafía y/o | (1 p)<br>Presentación:<br><br>márgenes, | (1 p) 16 páginas con los 16 títulos diferentes: Las | 4 p |

AGUIAR DPTO. MATEMÁTICAS. E.S.O. LOS 8 MUNDOS DE ALEF. 05/02/2017
Sobre la cognoantropodinámica de los medios continuos

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Enómenos de la realidad as variables que lo describen, las tablas numéricas que las representando gráficamente y verbalizando la ley o las relaciona para cada una ilidades de los 8 mundos. DINA4 estructurada oja (2 páginas)/semimundo.** | LAS DISTRIBUCIONES DE PARTÍCULAS Y LA EVOLUCIÓN DE SUS FLUJOS SOBRE LOS MEDIOS | | | | | |
| | CONOCIMIENTO HUMANO DEL UNIVERSO | | UNIVERSO DE CONOCIMIENTO HUMANO | | | |
| | MAGNITUDES | | MUNDOS | | | |
| | MEDIBLES | CÓGNICAS | CIENCIAS | LETRAS | | |
| PARTÍCULAS Y MEDIOS | Las distribuciones de partículas Astrológicas y la evolución de sus flujos sobre los medios Químicos. | Las distribuciones de partículas Teológicas y la evolución de sus flujos sobre los medios Civilizados. | Las distribuciones de partículas Químicas y la evolución de sus flujos sobre los medios Astrológicos. | Las distribuciones de partículas Civilizadas y la evolución de sus flujos sobre los medios Teológicos. | | |
| | Las distribuciones de partículas Radiológicas y la evolución de sus flujos sobre los medios Físicos. | Las distribuciones de partículas Artísticas y la evolución de sus flujos sobre los medios Tecnológicos. | Las distribuciones de partículas Físicas y la evolución de sus flujos sobre los medios Radiológicos. | Las distribuciones de partículas Tecnológicas y la evolución de sus flujos sobre los medios Artísticos. | | |
| | Las distribuciones de partículas Sociológicas y la evolución de sus flujos sobre los medios Psicológicos. | Las distribuciones de partículas Filológicas y la evolución de sus flujos sobre los medios Matemáticos. | Las distribuciones de partículas Psicológicas y la evolución de sus flujos sobre los medios Sociológicos. | Las distribuciones de partículas Matemáticas y la evolución de sus flujos sobre los medios Filológicos. | | |
| | Las distribuciones de partículas Ecológicas y la evolución de sus flujos sobre los medios Biológicos. | Las distribuciones de partículas Políticas y la evolución de sus flujos sobre los medios Económicos. | Las distribuciones de partículas Biológicas y la evolución de sus flujos sobre los medios Ecológicos. | Las distribuciones de partículas Económicas y la evolución de sus flujos sobre los medios Políticos. | | |

Diego F. Armesto Ramón
Coeff. Att Dwersidad=125%
Página 1 de 1

Figura 2. Mapa conceptual: Los mundos de Alef. Funciones y álgebra

**Figura 3. Rúbrica Los mundos de Alef. Geometría y álgebra**

Otra forma de uso podría ser, en Tecnologías, usar diferentes proyectos de realidades y clasificar toda la información contenida en dichos proyectos según el mundo al que pertenecen para terminar elaborando un proyecto atendiendo a su proyección en todos los ámbitos de la realidad humana.

He desarrollado esta metodología como generalización del concepto de proyecto específico que arquitectos e ingenieros usan para describir sus realidades. En particular, para la interpretación de proyectos de Parques Eólicos y de Instalaciones térmicas y para su posterior valoración a través de un rendimiento generalizado calculado como un producto de dieciséis rendimientos, uno asociado a cada mundo.

También podemos aprender a redactar nuestros proyectos en Tecnología en dieciséis capítulos y así desde las magnitudes físicas que lo definen (planos, temperaturas de funcionamiento, longevidad, masa,…), pasando por los materiales que lo forman (origen y reciclado), instrucciones (montaje, uso, …), impacto ambiental, herramientas necesarias, costes, legislación, apariencia, desgaste,…, hasta el concepto, su importancia y valor.

Incluso en cualquier otra materia específica para comprender la transcendencia de toda cuestión humana (frase, movimiento, belleza, ritmo, …)

Actividad: ¿Fue correcto abandonar la tristeza como pecado capital? Establecer una relación uno es a uno entre los mundos de alef y los pecados-virtudes capitales.

Cuando desarrollo este proyecto nunca sé a dónde me va a llevar, pues nunca tenemos alumnos iguales ni son iguales sus inquietudes, pero siempre aprendemos con este método de investigación cosas de interés específico; recuerdo que en el proyecto de instalaciones térmicas de frio encontramos, al estudiar sus relaciones con la psicología, un casco por el que circulando un líquido refrigerante disminuía el estrés del cuero cabelludo cuando el paciente era sometido a radioterapia y por tanto evitaba la caída del cabello o en geometría cuando buscando su relación con la política, nos encontramos con la distribución de escaños en un hemiciclo.

Hasta ahora, y siempre será así, cualquier método que se utilice para medir la capacitación de un discente se podrá expresar como una combinación de los mundos de Alef. Ya sean


ISBN 978-84-945722-3-4

unas (7 u 8) u otras las competencias sobre las que nuestros gobernantes sepan describir en justicia la educación de la población humana.

Respecto a la transcendencia de este proyecto de conocimiento humano cabe decir que si bien es mejor iniciarlo conceptualmente como dieciséis mundos complejos se hace preferible desarrollar esta estructura sedeniónica como ocho mundos con estructura cuaterniónica, tres aspectos que dan cuerpo al espacio y uno que posibilita el cambio.

En Educación Secundaria Obligatoria adquirimos el plano complejo de Argand donde se desarrollan las ideas, bien podríamos completar en Postobligatoria al espacio cuaterniónico de Hamilton donde se desarrolla la realidad. No podemos estancar la evolución del entendimiento humano en una minucia conceptual, a saber, la relación entre las magnitudes reales y las imaginarias que describen la realidad no es de 1:1 como representa la hermosa identidad de Euler sino como 1:3 como representan las identidades de Hamilton:

$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$$

Para terminar, cuaternionicamente:

"Buscamos la felicidad escapando de la ignorancia, la torpeza y la injusticia. Lo malo es que siempre nos alcanzan; lo bueno es que jamás abandonamos."

**Referencias bibliográficas**

Prigogine, Ilya.( 1983). El nacimiento del tiempo. Barcelona, Tusquets, 1993

Hawking, Stephen.(2011). La historia del tiempo. Madrid. Alianza Editorial

UNESCO. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la educación para el siglo XXI, presidida por Jacques Dlors. La educación encierra un tesoro. www.unesco.org/education/pdf/DELORS_S.PDF / Consultada 24/4/2017

ENCIGA. Asociación de ensinantes de ciencias de Galicia. XXIX Congreso. Boletín 81

Armesto Ramón, Diego Félix. O bico das serpes. http://www.enciga.org/files/boletins/81/IN03_o_bico_das_serpes.pdf / Consultada 20/04/2017


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.141

# UM PANORAMA DAS PESQUISAS BRASILEIRAS SOBRE O ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA.

Adriana Tiago Castro dos Santos– Barbara Lutaif Bianchini
adriana_larissa.le@hotmail.com – barbaralb@gmail.com
FMU – PUC/SP - Brasil

Núcleo temático: Ensino e Aprendizagem da Matemática em diferentes níveis educativos.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Ensino Superior
Palabras clave: Geometria Analítica, Estado da Arte, Ensino Superior, Pensamento Matemático Avançado.

**Resumo**
*O presente artigo tem como objetivo apresentar os resultados de uma pesquisa de doutorado sobre um panorama das pesquisas brasileiras no período de 1991 a 2014 sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria Analítica no Brasil. Utilizamos os pressupostos da Análise de Conteúdo para realizar os procedimentos metodológicos e para a análise dos dados fizemos uso das ideias teóricas de Dreyfus (1991) sobre quais processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) emergiram implicitamente das estratégias pedagógicas abordadas nas produções acadêmicas. Identificamos quarenta e uma produções acadêmicas sobre o tema. Apresentaremos os resultados de nossa análise sobre as produções acadêmicas que não visaram as TICs como foco de pesquisa. Os resultados apontaram que os pesquisadores utilizaram instrumentos como compasso e régua para a construção dos entes geométricos, materiais manipulativos e técnicas da perspectiva isométrica, construção das figuras geométricas em 3D para a resolução de situações-problema. Concluímos que os temas da Geometria Analítica abordados nas pesquisas não mudaram ao longo do período estudado. O que mudou foram as estratégias de ensino e aprendizagem, agora centradas no estudante, possibilitando que o mesmo criasse uma postura mais ativa no processo de aprendizagem sem depender estritamente do professor.*

## Introdução

O surgimento da Educação Matemática, segundo os estudos de Kilpatrick (1992), originou-se a partir da inquietação dos matemáticos e de professores de Matemática quanto à qualidade da divulgação e da socialização da Matemática com as novas gerações. A responsabilidade das universidades europeias, no final do século XIX, em promover a formação de professores secundários contribuiu para o surgimento de especialistas em ensino de matemática. Outro



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

fator que emergiu foram os estudos experimentais realizados por psicólogos desde o início do século XX, que se preocuparam em entender como as crianças aprendiam a Matemática.

No Brasil, a Educação Matemática surgiu no início dos anos de 1990. Nesta fase houve a expansão de um movimento nacional de formação de grupos de pesquisa, a consolidação de linhas de investigação e o surgimento de cursos de mestrado e doutorado em Educação Matemática.

Este crescimento continua no século XXI e, ao percorrermos o sistema de banco de dados da Coordenação Aperfeiçoamento Pessoal do Ensino Superior (CAPES) e encontramos cinquenta e três (53) Programas de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática; o que nos mostra que o número de pesquisas acadêmicas em nível de mestrado e doutorado cresceu de forma significativa.

Assim, é necessário que periodicamente se faça um levantamento do estado do conhecimento destas produções acadêmicas.

Este artigo tem o propósito de apresentar um panorama das pesquisas sobre o Ensino de Geometria Analítica no período de 1991 a 2014, parte dos resultados de uma pesquisa de doutorado (Santos, 2016). É uma pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico. Utilizamos como referencial teórico para a análise, as ideias dos processos do Pensamento Matemático Avançado descrito por Dreyfus (1991).

## Os processos do Pensamento Matemático Avançado

A compreensão de um conceito matemático é mais do que conhecer ou ser hábil e envolve vários processos cognitivos. É importante que o professor de matemática compreenda como ocorrem os processos da aprendizagem da Matemática no estudante. Essa aprendizagem, Dreyfus (1991) menciona que é um processo que acontece na mente do estudante como *insigths* que, além disso, é um fenômeno baseado em uma sequência longa de atividades durante os processos mentais que ocorrem e interagem entre si. Muitos dos processos já estão presentes no pensamento das crianças sobre conceitos matemáticos elementares, como o conceito de número. Eles não ocorrem exclusivamente na matemática avançada e nem são processos exclusivos da Matemática


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

O PMA consiste em uma grande listagem de processos componentes em interação. É importante para o professor de Matemática estar consciente desses processos para que compreenda algumas das dificuldades que seus alunos enfrentam. Dentre esses processos, podemos citar a representação, a visualização, tradução, generalização, abstração, modelagem e a síntese.

Para Dreyfus (1991) é necessário que o professor proponha ao estudante atividades que possibilitem o desenvolvimento desses processos.

**Procedimentos Metodológicos**

O referencial metodológico que traçaram os percursos da pesquisa foi a Análise de Conteúdo descrita por Bardin (2011) como um conjunto de técnicas de análise das comunicações. Inicialmente realizamos uma busca no banco de teses da CAPES (Coordenação Aperfeiçoamento Pessoal do Ensino Superior) e nos *sites* de Programas de Pós-Graduação *Strictu Sensu* que oferecem cursos de Mestrado e Doutorado em Ensino de Matemática. Encontramos 53 instituições de ensino superior.

O processo de coleta de dados foi realizado por meio das ferramentas de busca presentes nos *sites* das bibliotecas das Instituições de Ensino Superior, e para tanto utilizamos as palavras-chave: Geometria Analítica, Ensino de Geometria Analítica, Vetores, Cônicas e Quádricas.

A organização dos dados se deu segundo a metodologia denominada Análise de Conteúdo e é classificada em torno de cinco polos cronológicos: pré-análise, a exploração do material, o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. Esta organização não ocorre de forma sequencial.

Bardin (2011) define a leitura *flutuante* como a primeira atividade a ser feita na pré-análise, ou seja, trata-se da realização do primeiro contato com os documentos a serem analisados e em conhecer o texto, deixando-se invadir por impressões e orientações. A nossa leitura *flutuante* aconteceu por meio dos resumos das produções acadêmicas encontradas por nós, com o objetivo de conhecer se tais produções abordaram temas da Geometria Analítica para que pudéssemos escolher o *corpus*, que é o conjunto dos documentos a serem submetidos aos procedimentos de análise.


ISBN 978-84-945722-3-4

Ao realizar a leitura das 51 produções acadêmicas, encontramos trabalhos que eram destinados a relatar fatos históricos da Geometria Analítica. Assim, escolhemos apenas as produções acadêmicas que estavam relacionadas a seu ensino e aprendizagem, totalizando *41* produções acadêmicas, que foram lidas e analisadas. Após esta etapa, separamos duas categorias: as pesquisas que fizeram uso das TIC como foco principal no ensino e aprendizagem da Geometria Analítica e a segunda categoria: As produções acadêmicas que não utilizaram as TICs como foco principal no ensino e aprendizagem da Geometria Analítica.

Neste artigo trataremos apenas das produções acadêmicas do ensino e aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Superior que não utilizaram as TICs como foco principal de pesquisa.

**Apresentação e Análise dos Resultados**

Encontramos 10 produções acadêmicas referentes a segunda categoria, sendo a pesquisa de Frazon (2004) que realizou uma pesquisa histórica, Jammal (2011) que realizou uma pesquisa sobre análise de livros didáticos e as produções acadêmicas de Cavalca (1997), Silva (1998), Ribeiro (1998), Munhoz (1999), Castro (2001), Guerato (2012) , Perotti (1999) e Goulart (2008).

Constatamos a preocupação de como os tópicos da Geometria Analítica são apresentados nos livros didáticos, pois estes são utilizados pelos professores para compor suas aulas, é o caso da pesquisa que teve o propósito de investigar como os tópicos de estudo de ponto e reta estão contemplados nos documentos oficiais e livros didáticos, constatou que há constante articulação entre as noções de Geometria Plana, Geometria Analítica e Álgebra, além de uma preocupação em mobilizar os conhecimentos dos estudantes e as novas noções.

Observamos nessas pesquisas que houve uma grande preocupação em se analisar como os tópicos da Geometria Analítica estão sendo apresentados nos livros didáticos, e esses trabalhos apresentaram uma lacuna para os futuros pesquisadores que venham a se interessar por livros didáticos: trata-se de propor situações-problema que possibilitem nos estudantes o desenvolvimento dos processos do PMA, tais como mudança de representação, visualização, demonstração, argumentação, generalização e abstração; pois de acordo com os resultados


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

dessas pesquisas são sutis as situações-problema que viabilizaram o desenvolvimento destes processos.

Segundo Dreyfus (1991) os processos de abstração e de representação estão entre os mais importantes para o pensamento matemático avançado, no entanto, eles são somente alguns dentre os vários processos que devem ocorrer e que de fato ocorrem como ligações interagindo simultaneamente. Eles também devem incluir a descoberta, a intuição, a validação, a prova, a definição, entre outros.

Descobrir ou redescobrir relações, por exemplo, é muitas vezes considerado um dos mais eficientes caminhos para o estudante compreender os conceitos da Matemática.

Podemos citar a pesquisa de Cavalca (1997) que concluiu que o estudo das representações gráficas como objeto e não apenas como ferramenta foi fundamental, pois os alunos melhoraram razoavelmente a sua maneira de representar no plano, figuras tridimensionais, além de terem desenvolvido a percepção do caráter simbólico que os grafismos têm. O contato com mais de um tipo de perspectiva permitiu esse progresso, por meio da explicitação das características de cada uma.

A preocupação de Silva (1998) foi a falta da compreensão por parte dos estudantes da Álgebra Linear. A autora propôs atividades com base na teoria do construtivismo que contemplassem a Geometria Analítica como uma ferramenta para a compreensão dos conceitos de Álgebra Linear.

A pesquisa de Ribeiro (1998) apresentou uma similaridade com a de Cavalca (1999), na qual suas atividades partiram de situações concretas para depois analisarem as propriedades do objeto matemático elipse.

Analisando-se as diversas atividades aplicadas nesta investigação, pôde-se constatar que a percepção e a visualização inicialmente trabalhadas, fizeram com que os alunos chegassem mais facilmente aos resultados finais, partindo da exploração do espaço perceptivo para atingir o espaço das representações.

Os estudantes realizaram diversos experimentos e deduziram a equação da elipse e suas propriedades. A visualização e a dedução foram os processos do PMA que emergiram nesta pesquisa.


ISBN 978-84-945722-3-4

Munhoz (1999) realizou uma pesquisa um pouco diferente das demais, pois o autor preocupou-se em pensar como o sentido da linguagem interfere no ensino-aprendizagem e não em investigar a forma que o professor apresenta os temas da Geometria Analítica.

A estratégia da resolução de problemas foi utilizada por Perotti (1999) que ressalta a importância de os estudantes da graduação estabelecerem a relação entre a Geometria Analítica e o Cálculo Diferencial e Integral, ou seja, em compreender o conceito de derivada e sua relação com a equação da reta estudada na Geometria Analítica. Os resultados de sua pesquisa apontaram para a necessidade de introduzir esses conceitos ainda no ensino médio, quando os alunos estudarem a função polinomial de 1˚ Grau (Função Afim).

Vimos uma similaridade entre a pesquisa de Perotti (1999) com a pesquisa de Guerato (2012) que em suas análises apontaram que o estudo do coeficiente angular poderia ter facilitado a resolução das atividades propostas.

Na pesquisa de Guerato (2012) não foi explorado o conceito de coeficiente angular da reta, que poderia ajudar os seus alunos a compreender o conceito de derivada de uma função num ponto, pois ele tem a ver com a representação clássica dos entes geométricos no plano cartesiano, a autora vê esse fato como um aspecto negativo em sua pesquisa.

Constatamos que os resultados apontados nas pesquisas de Castro (2001) e Silva (1998) sobre o estudo de vetores apontaram que os estudantes encontraram dificuldades em reconhecer um vetor na representação gráfica e realizar uma mudança de representação para a algébrica.

Carneiro (2007) salienta que é importante o professor do ensino médio apresentar os primeiros conceitos de vetores após o ensino de matrizes e determinantes e antes do estudo de sistemas lineares.

Um fato interessante emergiu na pesquisa de Goulart (2008), que analisou as notas de aula de um professor do ensino superior. Embora suas notas de aula fossem cópias do livro didático, ao ensinar os conteúdos de Geometria Analítica, ele sempre utilizava a representação gráfica para possibilitar aos alunos a visualização da representação do objeto matemático em estudo. Contudo, este professor priorizou apenas a representação algébrica dos tópicos da Geometria Analítica em suas listas de exercícios e avaliações.

Goulart (2008) salienta que é necessária uma aproximação entre professor e aluno, sendo assim, diálogos e debates potencializarão a participação do aluno durante as aulas.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

É importante que qualquer tópico a ser ensinado seja apresentado aos estudantes por meio de situações-problema (se possível) que possibilitem a relação com outros conceitos dentro da Matemática ou em outras áreas do conhecimento e que viabilizem o desenvolvimento dos processos do PMA.

**Considerações Finais**

As produções acadêmicas tratadas neste artigo apontam que houve uma preocupação para o estudo dos vetores no ensino superior, e dentre as dificuldades dos alunos a mais destacada foi o processo de visualização da representação dos objetos matemáticos no plano e no espaço. O papel do professor é importante, pois este deve propor situações que priorizem o desenvolvimento dessa habilidade.

As estratégias de ensino que emergiram nas pesquisas de campo foram o uso de técnicas da perspectiva isométrica, o uso de figuras em 3D (material manipulativo) para a resolução de problemas, a diversificação entre os registros de representação semiótica, as propostas de situações-problema que desenvolvam o processo de demonstração, para que os sujeitos envolvidos possam elaborar os seus próprios textos.

Em relação aos tópicos da Geometria Analítica que foram mais destacados no ensino superior, o estudo dos vetores no plano. Ressaltamos a importância de se investigar como se dá o ensino de Geometria Analítica no Espaço tendo em vista que os conceitos trabalhados no espaço auxiliam o desenvolvimento da abstração, que é um dos processos para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado.

**Referencias bibliográficas**

BARDIN, L. (2011). *Análise de Conteúdo*: tradução de Luís Antero Reto Augusto Pinheiro, São Paulo: Edições 70.

CASTRO, S. C. (2011). *Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação.* Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP.

CAVALCA, A. V. P. (1997). *Espaço e Representação Gráfica: Visualização e Interpretação.* Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP.


ISBN 978-84-945722-3-4

DREYFUS, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In: Tall, David. *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer Academic Publishers: Dordrecht – Holanda, p. 25-41.

FRANZON, C. R. P. (2004). *Análise do Livro I Geometria de Descartes: apontando caminhos para o ensino da Geometria Analítica segundo uma abordagem histórica*, Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

GOULART, J. S. S. (2008). *Desenhos e Gráficos: Produção de Significados pelos participantes de um curso de Geometria Analítica.* Dissertação (Mestrado) Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana.

GUERATO, E. T. (2012). *Tratamento Vetorial da Geometria Analítica Plana.* Dissertação (Mestrado) – Universidade Bandeirantes, São Paulo.

JAMMAL, E.F. (2011). *Os ostensivos e não ostensivos utilizados no estudo das noções de ponto e reta no plano no Ensino Médio.* Dissertação (Mestrado) – Universidade Bandeirantes. São Paulo.

KILPATRICK, J. (2012). Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico. In: *Zetetiké: Revista de Educação Matemática*, v. 4, n. 5, Campinas: CEMPEM-FE-UNICAMP p. 99 -120, 1996. 1992, no texto.

MUNHOZ, M. **A.** (1999). *Impregnação do sentido cotidiano de termos geométricos no ensino/aprendizagem da Geometria Analítica*. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

PEROTTI, A. R. (1999). *O Estudo da reta a partir das grandezas diretamente proporcionais: uma proposta alternativa de ensino.* Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP.

RIBEIRO, M. A. A. (1998). *ELIPSE - Uma abordagem para o Ensino da Elipse no Curso de Licenciatura em Matemática.* Dissertação (Mestrado) - Universidade Santa Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SANTOS, A.T. (2016). *O "Estado da Arte" das pesquisas brasileiras sobre Geometria Analítica no período de 1991 à 2014.* Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.


ISBN 978-84-945722-3-4

SILVA, C.E. (1998). *A Ação Mediadora da Geometria Analítica no Ensino - Aprendizagem da Álgebra Linear*. Dissertação (mestrado) - Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.142

# TALLERES CON SCRATCH PARA LA ADQUISICIÓN DE APRENDIZAJES MATEMÁTICOS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

José Antonio Rodríguez – José Antonio González-Calero – José Manuel Sáez
joseantonio.rodriguez1@alu.uclm.es – jose.gonzalezcalero@uclm.es – jmsaezlopez@edu.uned.es
UCLM, España – UCLM, España. – UNED, España.

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Primario (6 a 11 años)
Palabras clave: Scratch, pensamiento computacional, resolución de problemas

Resumen:
*Las potenciales ventajas del uso de la programación en el aprendizaje de las matemáticas, sumado a la aparición de lenguajes de programación visuales como Scratch, han reavivado el uso de la programación con objetivos didácticos. Sin embargo, la mayoría de experiencias y estudios se centran en las etapas de Bachillerato y Educación Secundaria. Esta comunicación da cuenta de una experiencia de aula mediante la que se inicia a alumnos de 6º Educación Primaria en el desarrollo del pensamiento computacional y sus posibles beneficios a la hora de la adquisición de conceptos matemáticos. Organizado en forma de talleres, una primera fase de instrucción se encuentra enfocada en el lenguaje de programación y a la gestación de los primeros conceptos relacionados con el pensamiento computacional, y una segunda fase en la que el lenguaje computacional se utiliza como herramienta para el desarrollo de actividades relacionadas a la resolución de tareas matemáticas. La comunicación se centrará en el diseño de los talleres y en las tareas matemáticas resolubles mediante Scratch.*

## Introducción

Los cambios vertiginosos que están ocurriendo en nuestra sociedad actual debido a las innovaciones tecnológicas influyen directamente en todos los niveles de la educación (Cabero y Llorente, 2010). Sin embargo, en el caso de Educación Primaria, la introducción de lenguajes de programación, nunca han sido utilizados de modo extensivo, ni han perdurado en el tiempo (Resnick et al., 2009). Esto puede deberse a que los primeros lenguajes de programación resultaban poco amigables y complejos para estas edades. Ante este problema no han sido pocos los lenguajes de programación que se han intentado adaptar o simplificar con fines educativos (p.ej., *Greenfoot*, *Etoys*, *Alice* o *LOGO*), pero, sin embargo, ninguno de ellos ha conseguido afianzarse dentro de las aulas (Lewis, 2010). En este contexto, el área pedagógica del Masacchussets Institute of Tecnhology (MIT) desarrolló *Scratch*, un lenguaje de programación, orientado especialmente a alumnos de Educación Primaria y Secundaria, que permite programar de manera simplificada y más


ISBN 978-84-945722-3-4

visual (Lee, 2009). Los lenguajes de programación apropiados para estas edades deben ser fáciles de empezar a programar, pero, al mismo tiempo, posibilitar el desarrollo de proyectos complejos con el tiempo y la capacidad de tener un amplio abanico de potenciales proyectos (Resnick et al., 2009).

Aunque en la actualidad coexisten diferentes teorías en relación a la educación y las TIC, la inmensa mayoría abogan por el uso de las nuevas tecnologías y destacan la obligación de un cambio en el paradigma educativo (Wing, 2008). Este autor advierte que, a mediados del siglo XXI, el pensamiento computacional será una competencia clave para nuestro alumnado. El pensamiento computacional se define como la habilidad de resolución de problemas, diseño de sistemas y comprensión del comportamiento humano basado en conceptos y procesos informáticos (Wing, 2008). En Wing (2014) se afirma que los beneficios educativos de poder pensar computacionalmente, comenzando con el uso de abstracciones y de las capacidades de razonamiento, mejoran y refuerzan las habilidades intelectuales y, por lo tanto, pueden transferirse a cualquier dominio. En concreto, conocer cómo funcionan los bucles, los condicionales, las secuencias, el trabajo con variables y el desarrollo de algoritmos está asociado con un desarrollo en la capacidad de los estudiantes de solventar problemas y crear soluciones eficaces (Chao, 2016).

El contexto anteriormente descrito invita a pensar que *Scratch* puede ser una herramienta con potencial educativo en las aulas. Este trabajo pretende evaluar el potencial de alguna de las configuraciones en las que el lenguaje de programación *Scratch* podría aplicarse en los niveles de Educación Primaria.

**Antecedentes**

En 1967, un equipo de investigadores pioneros en la inteligencia artificial y la robótica, entre los cuales destacaba el educador Seymour Papert, encontraron la necesidad de desarrollar un lenguaje de programación con el objetivo de ofrecer una metodología novedosa, especialmente en relación con la enseñanza de las matemáticas. Desde su punto de vista, en esta materia imperaba una enseñanza basada en la aplicación de métodos formales, generalmente tediosos, poco motivadores y mecánicos (Feurzeig, Papert y Lawler, 2011). Papert (1980) deseaba aplicar las teorías constructivistas de Jean Piaget en el ámbito de las matemáticas para que fuera el propio alumno el que impartiendo órdenes a una pequeña tortuga, solucionara problemas matemáticos. De esta forma nació *LOGO*, lenguaje de programación muy cercano al pseudocódigo, que fue muy conocido en la época. Con *LOGO* se establecieron las bases de diferentes proyectos que pretendían instrumentalizar la programación en la enseñanza de las matemáticas.  existen numerosos estudios que destacan las ventajas del uso de este lenguaje de programación en las clases de matemáticas (p.ej., Howe et al., 1982; o, Layman y Hall, 1988). Bar-On (1986) afirmaba que la utilización de *LOGO* "da la oportunidad de explorar el enfoque algorítmico de las operaciones matemáticas, la visualización matemática de objetos, así como facilitar la comprensión y las ideas matemáticas" (p. 400). Autores como Pea y Kurland (1984) detectaron que enseñar a programar con Logo a los alumnos mejora su capacidad a la hora de resolver problemas, mientras que otros, aún reconociendo este elemento positivo, alertaron del riesgo de no utilizar la programación correctamente y de caer en automatismos y ejercicios con escaso sentido didáctico (p.ej., Layman y Hall, 1988). Además, más allá del ámbito de las matemáticas, se encontraron evidencias de que el trabajo con *LOGO* podría generar otros beneficios educativos y de comportamiento. Por ejemplo, Feurzeig y


ISBN 978-84-945722-3-4

Papert (1969) detectó una mejora evidente en las tasas de lectura comprensiva en estudiantes de enseñanza secundaria, así como cambios de comportamiento tales como mayor grado de confianza en sí mismos, actitudes sociales más positivas o ampliación de los intereses intelectuales. A pesar de la existencia de investigaciones que evidencian los posibles efectos positivos del uso de *LOGO*, conviene destacar que la gran mayoría de los estudios se centraron en alumnos con una edad superior a doce años
Sobre *Scratch*, heredero de *LOGO*, se han desarrollado recientemente diferentes estudios que señalan diversos beneficios en el desarrollo del pensamiento matemático como resultado del trabajo con este lenguaje de programación (p. ej., Calao et al., 2015). Otro estudio reciente subraya que la utilización de *Scratch* en sesiones de matemáticas permite que los profesores adapten su propio estilo de enseñanza y experiencia a las necesidades de sus alumnos para comunicar no solo ideas computacionales sino también matemáticas (Benton, Hoyles, Kalas, y Noss, 2017). En la misma línea, Calder (2010) vuelve a poner en el foco de atención en la herramienta al señalar que su utilización obliga a los alumnos a utilizar de forma implícita conocimientos matemáticos en la creación de sus proyectos en *Scratch*, demostrando ser un medio por el cual los programas son fácilmente compuestos y modificados, fomentando así el uso de habilidades críticas, meta-cognitivas y reflexivas siempre relacionadas con las matemáticas. En este sentido, se ha de señalar que, a pesar de que los estudios anteriores presentan elementos de confianza a la hora de valorar el potencial de *Scratch* en la asignatura de matemáticas, son muy escasos los trabajos que identifican mejoras en áreas concretas de las matemáticas.

**Objetivos**

El objetivo principal de este estudio es evaluar la influencia del uso de la herramienta *Scratch* en alumnos de 6º de Primaria en la adquisición de elementos del pensamiento computacional y la adquisición de conceptos matemáticos. En relación con el segundo de los objetivos, el estudio se centra en dos aprendizajes concretos que vienen definidos en el currículo mediante estándares de aprendizaje evaluables (Decreto 54/2014 de Castilla-La Mancha, región española donde se realiza el estudio). Dichos estándares vienen definidos como: *Calcula el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor* y *Describe posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros…*

**Diseño experimental**

Para la realización del experimento se plantea un estudio cuasi-experimental divido en dos fases: una inicial, basada en una serie de talleres de instrucción en Scratch y una segunda fase donde se completan talleres matemáticos relacionados con los estándares de aprendizajes señalados en la sección anterior (véase Figura 2). Tanto el grupo de control como el grupo experimental completa un pre-test antes de la primera fase con el objeto de evaluar su nivel previo en pensamiento computacional. Igualmente antes de iniciar la segunda fase ambos grupos realizan un pre-test para mensurar el nivel previo de los estudiantes en relación con los estándares de aprendizaje seleccionados. Durante la segunda fase del experimento el grupo experimental utiliza *Scratch* como herramienta de trabajo para la resolución de las tareas planteadas en los talleres a lo largo de cuatro sesiones mientras, por otra parte, el grupo de control completa los mismos talleres aunque sin la posibilidad de emplear *Scratch* como herramienta.


ISBN 978-84-945722-3-4

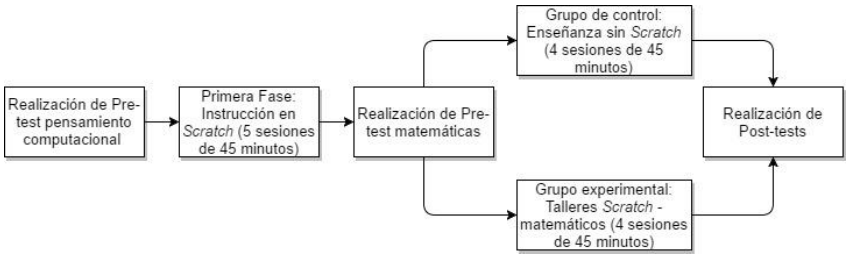



**Figura 2: Organización de fases**

Al finalizar la segunda fase de la experimentación, los participantes de ambos grupos completaron dos post-tests, uno orientado al pensamiento computacional y otro al grado de adquisición de los estándares de aprendizaje de la materia de Matemáticas. La comparación entre pre-tests y post-tests posibilitará tanto comprobar el grado de adquisición de elementos relacionados al pensamiento computacional como el grado de adquisición de los conocimientos matemáticos en ambos grupos.

***Participantes***

En el estudio toman parte 48 estudiantes de dos grupos naturales de sexto curso de Educación Primaria de un colegio público urbano de la región de Castilla-La Mancha (España). El grupo experimental y el grupo de control están formado por 24 estudiantes (10 alumnos y 14 alumnas) y 23 estudiantes (9 alumnos y 14 alumnas), respectivamente.

***Instrumentos***

Debido a la escasez de estudios que aborden el pensamiento computacional en edades tempranas fue necesario el desarrollo de un cuestionario *ad hoc* para evaluar el nivel previo de pensamiento computacional de los estudiantes. El diseño de los ítems se basó en las recomendaciones de Román-González, Pérez-González y Jiménez-Fernández (2015). El cuestionario consta de diez ítems que comprenden cuatro elementos del pensamiento computacional. A continuación se muestra un ejemplo de ítem para cada una de estas cuatro componentes:

- *Secuencias*. Sucesión de instrucciones que se siguen para completar una meta (véase Figura 2 para un ejemplo de ítem ligado a este elemento del pensamiento computacional).
- *Iteración o bucle*. Estructura de control que permite repetir una o más secuencias múltiples veces (Figura 3).
- *Manejo de eventos*. Instrucciones que permiten interactuar con los objetos del entorno (Figura 4).
- *Condicionales*. Instrucciones que permiten realizar, o no, una acción (Figura 5).


ISBN 978-84-945722-3-4

**Figura 3: Ejemplo de ítem sobre secuencias.**

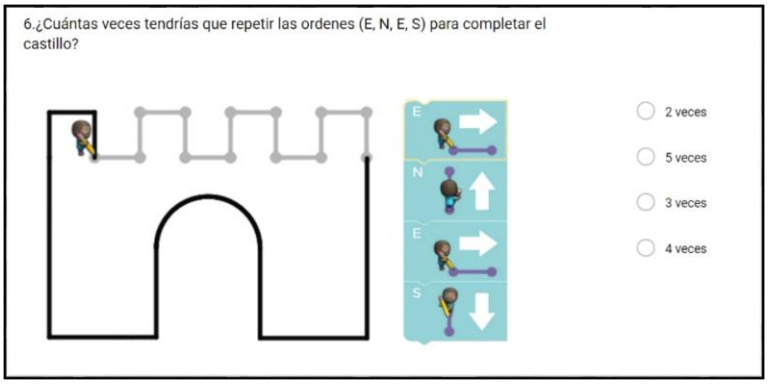



**Figura 4: Ejemplo de ítem sobre bucles.**

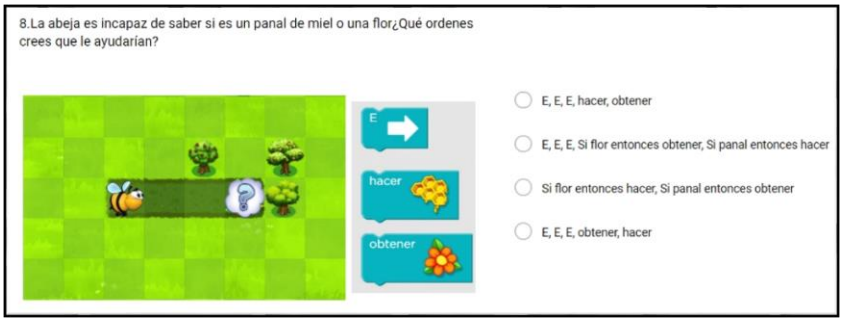



**Figura 5: Ejemplo de ítem sobre eventos.**

**Figura 6: Ejemplo de ítem sobre condicionales.**

El cuestionario post sobre pensamiento computacional es una versión del pre-test con el mismo número de ítems y en el que los ítems son isomorfos a los del pre-test, es decir, son


ISBN 978-84-945722-3-4

variaciones de los ítems utilizados en el cuestionario previo con el objeto de abordar los mismos objetivos. Tanto el pre- como el post-test en pensamiento computacional fueron diseñados como cuestionario *online.*.
El segundo de los instrumentos de evaluación se relación con la evaluación de los estándares de aprendizajes seleccionados de la materia de Matemáticas. Al igual que en el caso del pensamiento computacional, se diseñaron dos versiones del cuestionario (pre-test y post-test) con la misma estructura y características. El cuestionario consta de ocho ítems, cuatro ligadas a cada estándar de aprendizaje. A continuación se incluye un ejemplo de un ítems utilizado para el estándar de aprendizaje *Calcula el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor* (Figura 6).

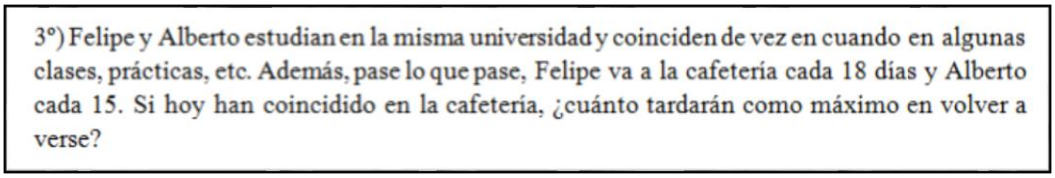

3°) Felipe y Alberto estudian en la misma universidad y coinciden de vez en cuando en algunas clases, prácticas, etc. Además, pase lo que pase, Felipe va a la cafetería cada 18 días y Alberto cada 15. Si hoy han coincidido en la cafetería, ¿cuánto tardarán como máximo en volver a verse?

**Figura 7: Ejemplo de ítem ligado a estándar de aprendizaje**

***Metodología***
La primera fase de la experimentación se centra exclusivamente en una instrucción básica en *Scratch* que posibilite al estudiante su uso como herramienta en la resolución de tareas matemáticas. Esta fase consta de cuatro sesiones de 45 minutos, cada una de las cuales se centra en uno de los siguientes elementos: secuencia, bucles, tratamiento de eventos y condicionales. El diseño de las sesiones está basado en las recomendaciones de Brennan, Balch y Chung (2014). Las sesiones se dividen en dos partes : una inicial con actividades grupales donde se introduce la componente del pensamiento computacional en cuestión en tareas donde no se involucra *Scratch* y, una segunda parte, donde se traslada ese elemento al lenguaje de programación de *Scratch*. Este diseño se basa en las recomendaciones de Benton et al. (2017), quienes sostienen que actividades en las que el alumno actúa un objeto con el que se programa, constituyen una base adecuada para posteriormente identificar las acciones en el lenguaje de programación. En la segunda fase del estudio, ambos grupos completan cuatro talleres de 45 minutos dedicados a la resolución de problemas matemáticos. El grupo experimental, a diferencia del grupo de control, emplea *Scratch* en todas las sesiones como herramienta para la resolución de los problemas planteados

**Consideraciones.**
En la fecha de escritura del presente trabajo está próxima a su conclusión la segunda fase del estudio, la referente a los talleres de contenido matemático. En consecuencia, aún no es posible una evaluación cuantitativa del impacto que la instrucción y el uso de *Scratch* en la resolución de problemas matemáticos pueda tener tanto en el desarrollo del pensamiento computacional como en el adquisición de aprendizajes matemáticos. Sin embargo, sí es posible una valoración previa acerca del diseño e implementación de las diferentes sesiones. En este sentido, es reseñable el hecho de cómo una instrucción de escasa duración en el lenguaje de programación, capacita a los estudiantes para usar *Scratch* de manera autónoma en la resolución de tareas matemáticas. La posibilidad de emplear *Scratch* en la


ISBN 978-84-945722-3-4

etapa de Educación Primaria sin la necesidad de invertir un elevado número de horas en la formación en el propio lenguaje, como se ha atestiguado en este estudio, es un elemento altamente positivo que permite considerar este lenguaje de programación como una herramienta con potencial para ser empleado de manera intensiva en estas edades.

**Referencias bibliográficas**


Bar-On, E. (1986). A programming approach to mathematics. Computers & Education, 10(4), 393-401.

Benton, L., Hoyles, C. Kalas, I., y Noss, R. (2017) Bridging Primary Programming and Mathematics: some findings of design research in England. Digital Experiences in Mathematics Education. Advance online publication. doi: 10.1007/s40751-017-0028-x.

Brennan, K., Balch, C., & Chung, M. (2014). Creative computing. Recuperado de: http://scratched.gse.harvard.edu/guide/

Cabero, J. y Llorente, M.C. (2010). Comunidades virtuales para el aprendizaje. Edutec. Revista Electrónica de Tecnología Educativa, 34, 1-10.

Calao, L. A., Moreno-León, J., Correa, H. E., y Robles, G. (2015). Developing mathematical thinking with Scratch: An experiment with 6th grade students. En G. Conole, T. Klobučar , C. Rensing, J. Konert, y É. Lavoué (Eds). Design for Teaching and Learning in a Networked World, 10th European Conference on Technology Enhanced Learning, EC-TEL 2015 (pp. 17-27). Toledo, Spain: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-24258-3_2

Calder, N. (2010). Using Scratch: An Integrated Problem-Solving Approach to Mathematical Thinking. Australian Primary Mathematics Classroom, 15(4), 9-14.

Chao, P. Y. (2016). Exploring students' computational practice, design and performance of problem-solving through a visual programming environment. Computers & Education, 95, 202-215.

Feurzeig, W. (1969). Programming-Languages as a Conceptual Framework for Teaching Mathematics. Final Report on the First Fifteen Months of the LOGO Project. Cambridge, MA: BBN.

Feurzeig, W., Papert, S. A., y Lawler, B. (2011). Programming-languages as a conceptual framework for teaching mathematics. Interactive Learning Environments, 19(5), 487-501.

Howe, J. A. M., Ross, P. M., Johnson, K. R., Plane, F., y Inglis, R. (1982). Teaching mathematics through programming in the classroom. Computers & Education, 6(1), 85-91.

Layman, J., y Hall, W. (1988). Logo: A cause for concern. Computers & Education, 12(1), 107-112.

Lee Jr, J. (2009). *Scratch programming for teens.* Boston: Cengage Learning.

Lewis, C. M. (2010). How programming environment shapes perception, learning and goals: Logo vs. Scratch. En Proceedings of the 41st ACM technical symposium on Computer science education (pp. 346-350). ACM.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Nueva York: Basic Books.

Pea, R. D. y Kurland, D. M. (1984). On the cognitive effects of learning computer programming. New ideas in psychology, 2(2), 137-168.




ISBN 978-84-945722-3-4

Resnick, M., Maloney, J., Monroy-Hernández, A. M., Rusk, N., Eastmond, E., Brennan, K., … Kafay, Y. (2009). Scratch: programming for all. Communications of the ACM, 52(1), 60-67. doi: 10.1145/1592761.1592779

Román-González, M., Pérez-González, J. C., y Jiménez-Fernández, C. (2015). Test de Pensamiento Computacional: diseño y psicometría general. En III Congreso Internacional sobre Aprendizaje, Innovación y Competitividad (CINAIC 2015), Octubre 14-16, 2015, Madrid, ESPAÑA. doi: 10.13140/RG.2.1.3056.5521

Wing, J. M. (2008). Computational thinking and thinking about computing. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 366(1881), 3717-3725. doi: 10.1098/rsta.2008.0118

Wing, J. M. (2014, 10 de enero). Computational thinking benefits society [Blog post]. Recuperado de: http://socialissues.cs.toronto.edu/2014/01/computational-thinking/


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.146

# EL LABORATORIO DE MATEMÁTICAS COMO ENTORNO DE APRENDIZAJE

Manel Martínez Pascual – Jordi Font González – Roger Grau Roca
mmart659@xtec.cat – jfont@iesbaixamar.com – rgrau@iesbaixamar.com
La Salle Bonanova, Barcelona – Institut Baix a Mar, Vilanova i la Geltrú – Institut Baix a Mar, Vilanova i la Geltrú

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Secundario y bachillerato
Palabras clave: laboratorio, materiales, práctica_productiva

**Resumen**

*Experimentación, descubrimiento, conceptuación y demostración o formalización. Estas son las cuatro etapas que un buen recurso didáctico debería tener. ¿Dónde lo realizamos? ¿Cómo lo hacemos? ¿Qué utilizamos? Estas preguntas, entre otras, son el punto de inicio del laboratorio Maria Antònia Canals del Institut Baix a Mar de Vilanova i la Geltrú (Barcelona) y del laboratorio de matemáticas de la Salle Bonanova de Barcelona.*

*Partiendo siempre de un ambiente de resolución de problemas y retos, el laboratorio es un espacio donde el alumnado tiene disponible material para experimentar. El laboratorio es un lugar que permite trabajar conjuntamente. El laboratorio es un espacio para crear nuevas matemáticas. Desde el laboratorio se irradia matemáticas a todo el centro y a su comunidad; es una auténtica sala de máquinas. El laboratorio es... ¡lo que haga falta! ¿Cómo hemos creado nuestros laboratorios? ¿Qué hemos necesitado? ¿Qué problemas hemos tenido? ¿Qué y cómo trabajamos en el laboratorio? ¿Cómo ha influido el laboratorio en la metodología de impartición de clases de matemáticas? ¡Os compartiremos nuestra receta!*


ISBN 978-84-945722-3-4

## 1. Contextualización del laboratorio

La competencia matemática abarca una gran variedad de habilidades y conocimientos que se tienen que desarrollar en los centros educativos. En la educación secundaria en Catalunya se concretan en 12 competencias matemáticas agrupadas en 4 dimensiones (resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones y, comunicación y representación).

Para poder cumplir los objetivos que determina el currículum, desde los departamentos de matemáticas de La Salle Bonanova y el Instituto Baix a Mar, se creyó que sería muy interesante disponer de un espacio adecuado para realizar unas matemáticas más ricas que fomentaran el logro de dichas competencias: un entorno basado en el aprendizaje compartido y el uso de materiales manipulativos matemáticos. Se podría resumir este propósito en los siguientes objetivos:

- Disponer ordenadamente de materiales del ámbito matemático en bloques de contenidos.
- Facilitar el acceso del profesorado y del alumnado a los materiales manipulativos matemáticos.
- Potenciar y facilitar la creación de materiales matemáticos.
- Fomentar la autonomía del alumno en la resolución de problemas.
- Disponer de un entorno adecuado de trabajo cooperativo y flexible.

Siguiendo las orientaciones del documento de desarrollo de "**Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic**" y también siguiendo la propuesta del maestro Anton Aubanell en el documento de "**Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria a secundària"**, las matemáticas tiene que permitir vivir en primera persona la materia siguiendo, aproximadamente, las siguientes etapas:


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- **Experimentación:** conjeturar, explorar, establecer contacto con las ideas que están en juego, tantear, hacer pruebas, tomar medidas, comparar, contrastar, manipular, construir, etc.
- **Descubrimiento:** observar una regularidad experimental, a menudo sorprendente, que aparece en pruebas sucesivas. No se trata de un conocimiento que viene de fuera sino de un descubrimiento personal, resultado de una experiencia.
- **Conceptuación:** poner en común todo aquello que se ha descubierto, perfilar bien la idea, sentirla como propia, esforzarse en expresarla correctamente para llegar a una formulación compartida.
- **Demostración o formalización**: pasar de la conjetura descubierta a la propiedad demostrada a partir de un razonamiento lógico. En algunos casos, la demostración no será necesaria o no será posible con las herramientas conceptuales de que se dispone o, dicha demostración, no mejora la comprensión de la idea y, en tal caso, es preferible quedarse con la constatación experimental.

Por todos los motivos expuestos anteriormente y de acuerdo con los objetivos fijados, el hecho de disponer de un espacio especializado de matemáticas nos permitirá caminar hacia unas actividades mucho más ricas y mucho más competenciales. Es necesario comentar que la materia de matemáticas en nuestros centros está enfocada hacia un aprendizaje basado en la resolución de problemas, huyendo de actividades más calculísticas y repetitivas, que fomenten la autonomía del alumno, la investigación y la cooperación entre compañeros (las clases de tipo magistral son minoritarias).

Este es el punto de partida inicial de nuestros laboratorios de matemáticas. El motivo de la denominación final de laboratorio la encontramos en la descripción que hace Anton Aubanell en su licencia de estudios:

*"La mayor parte de las actividades prácticas mencionadas en nuestro trabajo pueden ser realizadas en la clase habitual pero, en muchos casos, parece más eficiente llevarlas a cabo en un entorno de laboratorio específico. Por esta razón creemos que el presente trabajo tiene que dedicarle una atención especial a este entorno. En primer lugar, quizás se debería*



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

*justificar la razón por la que hemos optado por utilizar la expresión laboratorio de matemáticas en lugar de las expresiones taller de matemáticas o aula de matemáticas. No parece que esta cuestión de nomenclatura sea esencial pero quizás el vocablo laboratorio – que entronca también con una rica tradición académica y que etimológicamente proviene del término latino "labor" que significa trabajo– sugiere un tipo de actividad más amplio que la palabra taller (muchas veces asociado a tareas de construcción con un fuerte acento tecnológico) y más concreto que el término aula (muy genérico y, por lo tanto, poco descriptivo). Naturalmente esta elección puede ser discutible pero lo que nos parece significativo no es tanto el nombre como el concepto que representa."*

## 2. Proceso de construcción

Para poder poner en marcha un laboratorio de matemáticas es necesario tener en cuenta las siguientes etapas:

### 2.1. **Propuesta del proyecto al equipo directivo**

Desde los respectivos departamentos de matemáticas presentamos un informe exponiendo las necesidades de creación del laboratorio. En el informe se detallaron las características que tenía que tener el espacio, los materiales iniciales necesarios para poner en marcha al proyecto y una justificación metodológica.
(1)

### 2.2. **Diseño del espacio y propuesta de materiales a comprar y construir**

Algunos elementos que se consideraron esenciales fueron la presencia de mesas grandes (para incentivar el trabajo en grupo), disponer de proyector y pizarra blanca, tener una pared con corcho y una zona de estanterías con la finalidad de que el alumno tuviera el material a su disposición para evitar que tuviera que ir abriendo y cerrando armarios.

#### a. El material inicial

Otra cuestión a tener en cuenta es pensar cuales deben ser los materiales con los que se tiene que dotar el laboratorio (hay que optimizar el espacio del laboratorio y los recursos


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

económicos de que se dispone). Para tomar estas decisiones, se deben tener en cuenta las distintas cuestiones:

- Precio: hay materiales que, por su propio precio, son difíciles de adquirir. Entonces… ¿es imprescindible comprarlos?
- Constructividad: ¿es difícil construirlo? ¿aporta algún aprendizaje al alumno? Puig Adam decía que la propia construcción de un material, a menudo, lleva asociada un elevado índice de aprendizaje.
- Precisión: en caso de ser construido, ¿el resultado final será suficientemente bueno para que resulte didáctico en un futuro? Existen materiales que tienen que ser precisos y que, en el caso de no ser así, pierden su valor didáctico (pensemos, por ejemplo, en un puzle que no encajaran sus piezas).

Partiendo de estas premisas, creemos que una primera lista básica de material a adquirir sería la siguiente:

- Numeración y cálculo: las regletas de M. Antònia Canals y los multilink.
- Cambio y relaciones: juego multibase y balanzas.
- Medida: cintas métricas, pesos, reglas, escuadras, cartabones y semicírculos graduados (pequeños y de pizarra).
- Espacio y forma: cuerpos geométricos transparentes que se pueden llenar, juegos de teselaciones y geoplanos (aunque los dos últimos también pueden ser construidos por nuestros alumnos).
- Estadística y azar: cartas, fichas de colores, canicas, dados variados y ruletas.
- Juegos de mesa comerciales "matemáticos": SET, QUARTO, Tantrix, Pylos, ...
- Material fungible: tijeras, celo, cola, rotuladores, grapadora, …

Posteriormente, a medida que sea necesario, el alumnado podrá construir el resto de materiales. Con la irrupción de impresoras 3D en los centros educativos, se abre una gran puerta en esta dirección: diseño y construcción de elementos didácticos para nuestros laboratorios de alta precisión y calidad a un precio bajo.

### 2.3. Construcción del laboratorio



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Durante la última semana de junio y todo el mes de julio del 2015, se construyó el laboratorio M. Antònia Canals del l'Institut Baix a Mar, gracias a la implicación del profesorado de matemáticas durante el mes de julio. Una de las propuestas que se realizó fue que, alumnos con las matemáticas pendientes para septiembre, vinieran a cocrear materiales con el profesorado del centro.

En el caso del laboratorio de matemáticas de La Salle Bonanova, se creó durante el verano del 2016 a partir de los planos y materiales presentados al equipo directivo por parte del departamento de matemáticas. Se estudió incluso su emplazamiento, ubicándose finalmente en la parte central del edificio.

### 2.4. Realización de actividades

Después de sendas inauguraciones (es importante celebrar los eventos positivos!), los laboratorios han sido el punto desde donde se irradian matemáticas a todo el centro: concursos matemáticos, exposiciones de fotografía matemática, talleres de anamorfismos, retos mensuales… sin olvidar el día a día en nuestras clases. En el Baix a Mar semanalmente, los alumnos pasan un mínimo de dos horas lectivas y, en el caso de La Salle Bonanova, es la sede de los grupos de razonamiento matemático (club extraescolar con una actividad de 10 horas semanales), del departamento de matemáticas y, el resto de los alumnos, divididos en 27 clases de secundaria, lo disfrutan, como mínimo, una hora lectiva a la semana.

## 3. Conclusiones finales

El camino por el que pasa el proceso de aprendizaje de un alumno se podría comparar con el de ir a comprar al mercado: uno sale de casa con el cesto vacío y, a medida que va pasando por los puestos del mercado, lo va rellenando con productos diferentes y variados. ¿Qué sucedería si al acudir a nuestro mercado habitual sólo hubiera carnicerías o fruterías? No nos hace falta ser dietistas para afirmar que nuestra dieta saldría pobre y desequilibrada. Pues podemos realizar un paralelismo con nuestras clases: si sólo contienen actividades y recursos poco variados, seremos incapaces de alimentar bien "el estómago" de nuestros alumnos. Así pues, el docente debe planificar secuencias de actividades bien conectadas y variadas para que "el cesto de la compra" de nuestros alumnos acabe lo más lleno posible.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

El hecho de que los centros educativos dispongan de un laboratorio de matemáticas provoca que su gran mercado mejore la variedad del menú de sus alumnos. Estos entornos, con una buena elección de actividades cercanas y abiertas, harán que, muy probablemente, la **motivación** del alumno esté en constante tensión. Por parte de los equipos directivos, la inversión para poder poner en funcionamiento un espacio de estas características no es muy alta: sólo hace falta escoger un lugar con unas mínimas condiciones para crear un ambiente donde las matemáticas fluyan de forma natural. A partir de aquí, las necesidades y disponibilidad económica harán posible disponer de más o menos material manipulativo. No obstante, la creación propia de materiales tiene un gran valor educativo. Disponer de un amplio abanico de materiales de los dos tipos hará ganar muchos enteros a nuestro laboratorio.

Sin embargo, la puesta en marcha y el día a día del laboratorio no siempre es un camino de rosas. Mantener el orden en un laboratorio activo no es tarea fácil: es importante disponer de un responsable del laboratorio (de la misma manera que hay un responsable del laboratorio de ciencias o del taller de tecnología). Otro aspecto a destacar son los diferentes usos (o no usos) del espacio. Pudiera ser que en un centro educativo hubiera una diversidad muy amplia entre el profesorado (vaya, como la hay entre nuestros alumnos). Esta diversidad no ha de ser entendida como un obstáculo para el buen funcionamiento del laboratorio: es una oportunidad para fomentar el debate sobre la metodología del uso del espacio. Un buen debate hará que la didáctica en el aula sea más rica y variada. De esta manera, sería conveniente que aquel profesor que sea más reticente se contagie del entusiasmo y la energía de aquel que no lo es tanto. Asimismo, aquel docente que sea más animado tendrá que reflexionar sobre el cómo lo utiliza. La continua reflexión hará asentar unas bases más sólidas para nuestro proyecto.

La comunicación que en estos momentos concluye, pretende recoger la experiencia de los departamentos de matemáticas de los centros Institut Baix a Mar y La Salle Bonanova, en lo que se refiere a la puesta en marcha y el día a día de los respectivos laboratorios. Esperemos que este documento sirva para que otros centros se propongan y construyan sus propios


ISBN 978-84-945722-3-4

laboratorios. Será necesario pues, que se contagien de la ilusión que hemos puesto en nuestros centros y que, en el supuesto de que aparezcan obstáculos en el camino, se vayan superando. Es muy importante no perder de vista las últimas frases de Anton Aubanell en su licencia de estudios: *"[...] Pero nadie tiene que temer por su manera de andar! Lo que nos tiene que preocupar es estar parados!"*

## 4. Bibliografía


ARC [en línea]. http://apliense.xtec.cat/arc/ [Consultado: mayo, 2017]

Aubanell i Pou, Anton. *Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secun*dària. Supervisor: Alsina Català, Claudi. Memòria de la llicència d'estudi retribuïda corresponent al curs 2005-2006 en l'especialitat de Matemàtiques. Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya.

Aubanell i Pou, Anton. *Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria*. Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat. Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya. Abril 2015.

Barba Uriach, David, Calvo Pesce, Cecilia y Cerezo, Ana. *PuntMat* [en línia]. *http://puntmat.blogspot.com.es/* [Consultado: abril, 2017]

Calvo Pesce, Cecilia, Deulofeu Piquet, Jordi, Jareño Ruiz, Joan y Morera Úbeda, Laura. *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria*. Editorial Síntesis.

Canals i Tolosa, M. Antònia. *GAMAR* [en línia]. http://www.udg.edu/tabid/17145/language/ca-ES/Default.aspx [Consultado: mayo, 2016]




ISBN 978-84-945722-3-4

del Moral Carmona, Sergi. *Jo aprenc, tu aprens, nosaltres aprenem*. http://www.sergidelmoral.net/ [Consultado: mayo, 2016]

Generalitat de Catalunya. *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*. Elaboració: Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat. Edició: Servei de Comunicació i Publicacions. 2a edición actualizada: noviembre de 2015

Institut Baix a Mar. *Matemàtiques a l'INS Baix a mar* [en línia]. http://matematiquesmarines.blogspot.com.es/ [Consultado: mayo, 2016].

López Beltran, Mireia i Riquelme Carvallo, Cyntia. *Banc de recursos del Fem Matemàtiques* [en línea]. http://bancfm.blogspot.com.es/ [Consultado: abril, 2016]

Jareño Ruiz, Joan. *Calaix +ie* [en línea]. http://www.xtec.cat/~jjareno/ [Consultado: abril, 2016]

NRICH [en línea]. http://nrich.maths.org/frontpage [Consultado: abril, 2016]

Pólya, George (1945). *How to Solve It*. Princeton University Press

Puig Adam, Pere (1952). *Didáctica matemática eurística.* Instituto de formación del profesorado de enseñanza laboral.

## ANEXOS - EL LABORATORIO DE MATEMÁTICAS COMO ENTORNO DE APRENDIZAJE

Manel Martínez Pascual – Jordi Font González – Roger Grau Roca
mmart659@xtec.cat – jfont@iesbaixamar.com – rgrau@iesbaixamar.com
La Salle Bonanova, Barcelona – Institut Baix a Mar, Vilanova i la Geltrú – Institut Baix a Mar, Vilanova i la Geltrú

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Secundario y bachillerato
Palabras clave: laboratorio, materiales, práctica_productiva

### *Propuestas didácticas*

La idea es que el laboratorio de matemáticas sea una extensión del aula ordinaria y que, de esta forma, no se realicen actividades diferenciadas en ambos espacios. La secuencia


ISBN 978-84-945722-3-4

didáctica está pensada como una unidad y, si es necesario, los materiales del laboratorio salen de sus cuatro paredes para entrar en el aula. Sin embargo, hay determinadas actividades son más convenientes para ser realizadas en el laboratorio.

Los alumnos pueden agruparse de diferentes maneras para trabajar. En su concepción, siempre se ha pretendido fomentar el trabajo cooperativo sin dejar de lado la posibilidad de que el alumno también realice trabajos de forma individual. Es necesario tener un espacio para poder comunicar, compartir y expresar matemáticas, y a su vez, poder transformarlo en un lugar donde poder reflexionar y pensar de forma individual.

Alumnos experimentando, conjeturando y, sobretodo, compartiendo conocimiento en el laboratorio.

Así pues, podemos dividir las actividades que se realizan en el laboratorio en cinco grandes grupos:

1. ***Actividades/problemas que se realizan en la "libreta":*** actividades de un perfil más clásico, a menudo de carácter individual, pero que siempre parten de algún problema o situación de reto. El aprendizaje siempre se realiza a partir del problema y de que sea el propio alumno quien busca o investiga la mejor manera de resolverlo. Una vez resuelto, el mismo alumno puede formular y explorar generalizaciones del problema o propiedades matemáticas generales.
   *Ejemplos:* Sumas con gomets, Ecuaciones de 2º grado, Hagamos limonada, ¿Donde invertiremos?, Embaldosemos el suelo de la habitación,...



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

2. ***Juegos:*** actividades de carácter más lúdico donde se trabaja a partir del juego. A menudo se utilizan para introducir y familiarizarse con conceptos matemáticos nuevos. De forma natural, en algunos casos, paralelamente al conjunto de conceptos trabajados, el alumnado busca estrategias ganadoras (actividad de un alto nivel didáctico).

   *Ejemplos:* Tres en raya con números enteros, Hundir la flota en forma polar, Cuatro en cuadrado, QUARTO, ...

3. ***Propuestas de investigación con materiales:*** actividades de investigación con presencia de materiales manipulativos. Este perfil de actividades intenta buscar el conflicto matemático y obtener generalizaciones del problema. Las actividades de esta tipología, a menudo, se realizan en grupo y tienen una duración de más de una sesión. Sin embargo, después de trabajar con los materiales, es muy importante que el alumno traslade las conclusiones a la libreta, tablet, blog, … Es necesario que el alumno deje rastro de aquello que ha realizado y aprendido.

   *Ejemplos:* Balanzas con multilinks, Un tangram distinto, Espejito espejito, ¿Cuánto mide el gimnasio?, Experimentos probabilísticos, El triángulo de Pascal con números enteros, Prismas con policubos, …

4. ***Proyectos:*** o los también denominados trabajos. Son actividades con una temporización de varios días y que casi siempre se realizan en grupo. Se les pide a los alumnos la creación de alguna producción en concreto y un dossier con todo el trabajo realizado, incluyendo cálculos, bocetos, metodología, conclusiones,.. A menudo estos proyectos pueden llegar a constituir una unidad didáctica completa.

   *Ejemplos:* Rosetones a partir de funciones, Big data con Quality Time, Diseño de un logotipo, Eje de historia de las matemáticas, La maqueta del instituto, ...

5. ***Construcción de materiales:*** actividades que tienen como objetivo la construcción de un material matemático. Esta tipología de actividades es interesante si la propia construcción incorpora un proceso matemático interesante.


ISBN 978-84-945722-3-4

*Ejemplos:* Máquina de Galton, Puzzles geométricos, Geoplanos, Poliedros con bricks, Demostraciones visuales, ...

Además, también tienen cabida los problemas de los diferentes concursos propuestos por la FEEMCAT y la SCM.

**Atención a la diversidad**

Tal y como se ha comentado anteriormente, el laboratorio es una extensión del aula ordinaria. Como consecuencia, las actividades que se realizan acaban siendo un todo en la programación. La manera de tratar de atender la diversidad de los alumnos es la de diseñar actividades en las que todos los alumnos tengan acceso. De esta manera, no se realizan, en general, actividades diferentes para aquellos alumnos con dificultades de aprendizaje: la idea es que cada alumno "estire" al máximo la actividad en función de sus capacidades o intereses. En este sentido es fundamental el acompañamiento del profesor para poder conseguir el objetivo.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.147

# PRINCÍPIOS E FINALIDADES DO DESENHO AO NATURAL: UMA ANÁLISE DE PROGRAMAS DO ESTADO DE SÃO PAULO

Marcos Denilson Guimarães
markito_mat@hotmail.com
Universidade Federal de São Paulo – UNIFESP/Brasil

Núcleo temático: VIII Historia social de la Educación Matemática en Iberoamérica
Modalidad: CB
Nivel educativo: Ensino Primário
Palabras clave: Programas de ensino; Finalidades; Desenho ao natural; São Paulo.

**Resumo**
*Nesta comunicação é apresentado um exame de programas de ensino para o curso primário do Estado de São Paulo, relativos às duas primeiras décadas do século XX. O objetivo foi identificar como estavam postos princípios e finalidades do ensino do Desenho ao natural, após duras críticas ao seu antecessor, o método geométrico ou método de M. Guillaume, acusado de ser abstrato, dominado exclusivamente pela geometria e de não dar importância para à observação direta das coisas reais presentes na natureza (D'ENFERT, 2016). São adotados como pressupostos teórico-metodológicos os estudos da História Cultural de Roger Chartier (1990) para os quais as percepções socais não são discursos neutros e, de André Chervel para o qual disciplinas escolares se definem por suas finalidades. O exame permitiu identificar como princípios a despretensão de rigor geométrico na execução dos desenhos, a liberdade de escolha pelos alunos, o caráter puramente educativo e a presença de elementos do método intuitivo. E como finalidades de seu ensino o desenvolvimento da observação, da imaginação, da criatividade, do sentido estético e artístico.*

## Considerações iniciais

O Estado de São Paulo ganhou vanguarda nacional no período da chamada Primeira República (1889-1930). Constituindo-se como signo do progresso, a escola paulista logo logrou êxito por dois motivos: pela lógica que presidia a sua institucionalização e pela força exemplar que passava a ter nas iniciativas de remodelação escolar de outros estados (Carvalho, 2000).

Essa remodelação escolar se chamava *grupos escolares* paulistas, os quais surgidos no corpo das leis de 1893, mas somente regulamentados e instalados no Estado a partir de



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

1894 (Vidal, 2006), firmou-se como parâmetros para a organização das escolas públicas republicanas. Dentre outras coisas, representavam todo um conjunto de saberes, de projetos políticos que colocava em circulação o modelo de escolas seriadas e sequencial (Faria Filho e Vidal, 2000; Vidal, 2006).

Para além de uma organização física, administrativa e metodológica do ensino primário nos grupos escolares, houve também uma nova apresentação dos programas de ensino os quais, ao longo dos anos, apresentaram propostas culturais elaboradas pelo Estado para o público escolar (Shieh, 2010). Este processo, longe de ser neutro, é sempre visto como fruto de percepções sociais que buscam "legitimar um projeto reformador ou justificar, para os próprios indivíduos, as suas escolhas e condutas" (Chartier, 1990, p.17).

No processo de identificar e analisar os programas de ensino para o curso primário paulista relativos às duas primeiras décadas do século XX, coube a esta comunicação questionar: que princípios e finalidades do ensino do Desenho foram evidenciados por meio de exame a estes programas[12]?

## Os programas de ensino de São Paulo de 1905, 1918, 1921 e 1925: que principios e finalidades revelam?

Após o primeiro programa paulista de 1894 de caráter ambicioso e, por isso, impraticável na visão de inspetores e diretores de grupos escolares do estado de São Paulo (Souza, 2009), o próximo programa a regulamentar o ensino do Desenho nas escolas modelo e grupos escolares é o programa de 1905. Oficializado pelo Decreto n.1281[13] tinha duração de quatro anos. Assinado por Jorge Tibiriçá e J. Cardoso de Almeida, o programa de 1905 apresentava nova distribuição de conteúdos, apostando, assim, numa organização menos detalhada, como é possível observar no **Quadro 1** em anexo.

[12] Justifica-se a escolha do Desenho por ser a temática estudada no meu Doutorado em andamento e a opção pelos programas das duas primeiras décadas do século XX por constatar um rompimento no modo de pensar o ensino do Desenho em relação ao programa anterior, o programa de 1894, instituído logo após a criação dos grupos escolares paulistas. Oficializado pelo Decreto n. 248 e elaborado por Oscar Thompson, Benedito Maria Tolosa e Antonio Rodrigues Alves Pereira, nele o ensino do Desenho estava em estreita ligação com os saberes geométricos (Leme da Silva, 2014) cuja finalidade era de ajuste do olho e da mão para a construção de figuras geométricas. Outros trabalhos dessa autora e de Frizzarini (2014) tratam também do ensino do Desenho e da Geometria no curso primário brasileiro.

[13] Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/99554>.


ISBN 978-84-945722-3-4

Examinando o referido quadro, após um ensino de Desenho mais atrelado à Geometria com vistas a desenvolver habilidade manual e visual, o Desenho no programa de 1905 ressaltava algumas características diferenciadas. Primeiramente, a despretensão de rigor geométrico na execução dos desenhos. Em segundo lugar, a formação das crianças deveria se diferenciar da anterior e visar à representação de objetos fáceis, simples, a partir do desenho de objetos presentes na natureza. Em terceiro, o traçado executado pelos alunos deveria ser copiado do natural, isto é, livre de regras e definições, prevalecendo assim o exercício do gosto próprio da criança e do desenvolvimento do sentido estético.

Neste sentido, vem de D'Enfert (2016) uma contribuição importante. De acordo com esse pesquisador francês, no início do século XX, o método geométrico ou método de M. Guillaume sofreu duras críticas por parte tanto de professores de desenho quanto dos artistas, de críticos ou de historiadores da arte. Acusado de ser um método abstrato e morto, a primeira crítica referia-se "a dominação exclusiva da geometria, a preeminência da linha e do contorno, mas também dos modelos antigos" (D'Enfert, 2016, p.24). O autor justifica que esse procedimento levava os alunos a só observarem as formas através das linhas geométricas e esculturas antigas, bem como, a reproduzirem fiel e servilmente as figuras, podando toda a criatividade da criança e oferecendo riscos às indústrias da arte do país (D'Enfert, 2016). Outro motivo é que este método "negligenciava a observação direta das coisas reais e da 'natureza viva' [...]" além de não "levar em conta a idade das crianças, suas 'aptidões nativas', e seu 'desenvolvimento natural' (D'Enfert, 2016, p. 24).

Escultor, Eugène Guillaume acreditava que toda forma era decomposta em figuras geométricas simples caracterizando, deste modo, o ensino do desenho linear baseado na geometria elementar. Conforme, Beguery (2003, p.233, *tradução minha*), "Eugène Guillaume propusera um verdadeiro ensino elementar pensado a partir da progressividade de seus elementos, indo do simples para o complexo, respondendo às exigências éticas de uma escola pragmática".

Acusado de não se aproveitar das potencialidades infantis e de continuar atrelado ao método de ensino sintético, caracterizado por partir das partes para o todo, o método geométrico de Guillaume ganha um forte opositor: o filósofo Félix Ravaisson. Orientado pela exigência dos sentidos, Ravaisson, por sua vez, pretendia, em nome da arte, o desenvolvimento de um desenho artístico e acadêmico a partir de modelos em gesso, de


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

estampas e de reprodução. A defesa por uma educação artística, levou Ravaisson a recusar toda a subserviência da arte à racionalidade científica, isto é, à ciência (Beguery, 2003).

Mesmo apresentando pouquíssimas alterações em relação ao programa de 1905, treze anos depois por meio do Decreto n.2944[14], de 8 de agosto de 1918, assinado por Altino Arantes e Oscar Rodrigues Alves, é colocado à disposição do público um novo programa de ensino para os grupos escolares. O Decreto n. 2944 que aprovou o Regulamento para a execução da Lei n. 1579, de 19 de dezembro de 1917, estabeleceu como conteúdos para o ensino do Desenho os que estão apresentados no **Quadro 2** em anexo. Em relação ao programa anterior, a única ressalva é a presença de mais um tipo de desenho: o de invenção. De modo geral, continuamos com uma concepção naturalista respaldada na observação do objeto real.

Prosseguindo... A fim de combater os altos índices de analfabetismo no Estado de São Paulo, Sampaio Dória, sucessor de Oscar Thompson na Diretoria Geral da Instrução Pública, organizou uma Reforma na Instrução Pública do Estado. Regulamentado pela Lei n.1750, de 8 de dezembro de 1920 e instituído pelo Decreto n.3356[15], de 31 de maio de 1921, o programa a ser ministrado nos grupos escolares, tem carga horária reduzida para somente dois anos de duração (ver **Quadro 3** em anexo).

Observando as informações apresentadas no quadro, percebe-se que novamente a natureza exerce o papel principal de fonte de inspiração para a execução dos desenhos. É praticamente ela que dita o ritmo da aprendizagem em Desenho pois torna-se um manancial inesgotável de motivos que as crianças utilizam para reproduzir o que veem, sabem e imaginam. Essa reprodução pelo desenho buscava preparar o aluno para o meio em que ele estava inserido. Lugar este onde teria de agir e exercer alguma atividade futura. Dizia Sampaio Dória que "[...] formar o cidadão não era dotá-lo de um conhecimento enciclopédico [...], mas formá-lo desenvolvendo sua capacidade de conhecer, sentir, querer e agir como tal" (Carvalho, 2010, p.101). A ligação com a vida prática, a vida de todos os dias era algo mais importante.

A este ensino de Desenho se atribuía a função de desenvolver a observação e a imaginação das crianças. Para os defensores deste programa era mais significativo que os desenhos fossem executados sem o auxílio de modelos. Isto é, que as crianças desenhassem como soubessem, ilustrando apenas as imagens que tivessem sobre tais assuntos. Aqui a referência explícita ao método natural não é mais invocada, todavia, sua essência é mantida.

[14] Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/157180>.
[15] Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/157181>.


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Ao que tudo indica, por conta de uma certa naturalização deste método já estabelecida em programas anteriores. As informações resumidas do programa de 1921 não obteve êxito por muito tempo e logo deixaram de ser adotadas pelas escolas. Pois, "A uma escola de alfabetização intensiva contrapunha-se propostas de uma escola integral e renovada" (Souza, 2009, p.120).

O novo programa de ensino aprovado e mandado observar nos estabelecimentos de ensino do Estado (grupos escolares e escolas isoladas) para os cursos primário e médio em 1925 (ato de 19/02/1925) e publicado pela Secretaria do Estado dos Negócios do Interior foi "elaborado visando à unificação do ensino primário de quatro anos de duração numa clara oposição ao estabelecido durante a reforma Sampaio Dória" (Souza, 2009, p.116). Sem dúvidas, o programa paulista de 1925[16] inova em muitas coisas. A passagem pelos quatro anos de curso revela mudanças e rupturas que possivelmente se configuraram a partir da apropriação de ideias pedagógicas oriundas do novo movimento pedagógico chamado Escola Nova[17]. A esse respeito, as reformas de ensino, inspiradas nas ideias escolanovistas, além de terem abalado a supremacia do método intuitivo, marco na renovação e modernização do ensino, também tenderam a ressignificar tempos e espaços escolares (Faria Filho e Vidal, 2000; Souza, 2009). Uma dessas ressignificações era a busca pela homogeneização das turmas, pela centralidade do aluno no processo de ensino e aprendizagem dos saberes, do ajuste às matérias por centros de interesse, e da criatividade e da autonomia como imprescindíveis para o integral desenvolvimento dos alunos.

Nas indicações propostas para o 1º ano está claro que o ensino do Desenho teria fim puramente educativo. Como forma de expressão do pensamento infantil por meio do uso de linguagem natural, não deveria "ser ensinado como arte, mas como uma linguagem viva" auxiliando no desenvolvimento da imaginação, da observação e do sentimento estético das crianças (São Paulo, 1941, p. 14).

Diferentemente da marcha adotada pelo método geométrico cujo entendimento era de que as formas geométricas, consideradas elementares, eram as partes mais simples e acessíveis às crianças, neste programa, bem como nos programas de 1905, 1918 e 1921, foi adotado o método natural o qual, satisfazendo uma necessidade inata da criança, pregava pelo ajuste à natureza da mentalidade infantil, interessando-se não pelas abstrações das formas geométricas, mas sim pelo desenho de objetos da natureza.

[16] Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/99651>.
[17] No Brasil este movimento inicia em 1920 e vai até os anos de 1960.


ISBN 978-84-945722-3-4

Considerando que as crianças possuem certa facilidade em executar graficamente desenhos que expressam suas vontades, seus desejos e seus pensamentos é tomado como ponto de partida para o seu ensino o *desenho espontâneo*. Nesse tipo de desenho, a motivação acontece de dentro para fora na qual as crianças motivadas pelos seus interesses pessoais, teriam "toda liberdade na interpretação não só do que imaginam ou sentem, como também do que observam na natureza" (São Paulo, 1941, p. 14).

Certamente, os estudos que privilegiavam o comportamento humano imprimiram novos rumos ao ensino do Desenho. Em outras palavras, a pedagogia em voga visava com a incorporação dos conhecimentos originários da psicologia de base biológica e fisiológica e também da estatística uma "melhor caracterização da infância (e consequentemente do adulto)" (Monarcha, 2009, p.145). Nesse processo, desde que se respeitasse os interesses individuais em cada idade, toda criança possuía tendência espontânea para desenhar o que viesse a sua cabeça.

No primeiro ano, além do desenho espontâneo, gravitava em torno dos interesses infantis os desenhos inteiramente livres ou sugeridos pelos professores. O objetivo era, portanto, que elas executassem um desenho natural, próprio de sua observação e aguçada imaginação. Constata-se, também, que a prática do desenho estava intrinsecamente ligada ao exercício do olho. Era mais uma de suas finalidades educar a vista das crianças de modo que elas conseguissem alcançar gradativamente uma representação mais aproximada do natural, do objeto real. Para Vidal (2000), a escola deveria oferecer situações em que o aluno, a partir da visão (observação) e da ação (experimentação) pudesse elaborar seu próprio saber. "Deslocado do 'ouvir' para o 'ver', agora o ensino associava 'ver' a 'fazer'" (Vidal, 2000, p.498).

À medida que os anos vão avançando novos modelos são apresentados às crianças e novas sugestões são dadas pelos professores. Esses, além de apontarem as imperfeições do desenho estimulando-as com críticas animadoras, também procuravam habilitá-las a executarem desenhos inteligíveis que representassem o aspecto geral, a forma característica dos objetos copiados. Nesse processo, com mais ênfase no Desenho do natural, as crianças novamente recorriam à observação para examinar o modelo com cuidado a fim de identificar sua forma geral e suas particularidades. Exercitar a criança na cópia direta da natureza,


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

cultivar sua imaginação e desenvolver seu gosto artístico eram as principais finalidades para o segundo ano deste ensino.

Nas terceira e quarta fases da aprendizagem verifica-se um nível de dificuldade mais elevado. Ajunte-se a tudo isso um outro tipo de desenho que só aparece no quarto ano de curso. Trata-se do *desenho geométrico* "executado com instrumentos (régua, compasso e esquadro), servindo de aplicação as noções de geometria prática e, constituindo no desenho de frisos, de ladrilhos e no desenho geometral" (São Paulo, 1941, p.57). Como meio de aplicação à geometria prática este tipo de desenho tinha como finalidade "construir com instrumentos objetos do dia a dia do aluno e não figuras geométricas em si" (Frizzarini, 2014, p.53). O uso de instrumentos de precisão como régua, esquadro e compasso ao final do curso indica que as crianças possivelmente já tinham adestrado a mão e o olho no traçado de linhas gerais em processos realizados anteriormente. Os desenhos de memória e de ornato (composições decorativas) não foram abandonados. Pelo contrário, eram praticados com frequência em todos os anos de curso.

Como vimos, a prática do desenho no programa de 1925 não o considerava como um elemento de deleite usado para os momentos de ócio. Longe de iniciar as crianças ao adestramento gráfico por meio de uma série cansativa de exercícios repetitivos de reconhecimento e construção de figuras geométricas, o ensino do Desenho neste programa, conduzido inicialmente através da manifestação espontânea da criança, era baseado na experimentação e na atividade do aluno. Agora, finalidades como desenvolver a imaginação, a observação, a sensibilidade moral, o gosto artístico, a habilidade manual e visual se constituíam num ambiente de investigações definidas tanto por propostas escolanovistas de renovação didática quanto por preceitos oriundos dos estudos de caráter psicológico pelos quais as crianças deveriam "*aprender*, de acordo com as suas condições de desenvolvimento" (Lourenço Filho, 1930, p.44, *grifo do autor*).

Ora, se é pontuado que a criança desenhe ao natural, é igualmente necessário que ela tenha liberdade para isso. Liberdade para desenhar um objeto simples, uma planta, um animal, uma folha, uma flor etc., enfim, tudo aquilo que seu entorno lhe oferecer e sua imaginação lhe capacitar, afastando, desse modo, a criança do trabalho mecânico de reprodução de figuras geométricas. Tem-se, portanto, a natureza como uma importante fornecedora de modelos permitindo que a criança exprima suas vontades próprias e exerça


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

seu pensamento em harmonia com ela, colocando-lhes numa situação de prazer e observação da realidade através de coisas concretas. Nota-se, de certa forma, que a manutenção da matriz pedagógica do ensino intuitivo se faz presente nessas orientações.

**Referências bibliográficas**


Beguery, J. (2003). Le dessin: vers un problématique enseignement artistique. En D. Denis e P. Kahn (Orgs.), L'école républicaine et la question des savoirs. Enquête au coeur du Dictionnaire de pédagogie de Ferdinand Buisson, Capítulo 9, pp. 221-252. Paris: CNRS Éditions.

Carvalho, M. M. C. (2000). Modernidade pedagógica e modelos de formação docente. São Paulo em Perspectiva, São Paulo, 14, 111-120.

Carvalho, M. M. C. (2010). *Sampaio Dória*. Coleção Educadores MEC. Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana.

Chartier, R. (1990). *A história cultural – entre práticas e representações.* Lisboa: Difel; Rio de Janeiro: Bertrand Brasil S.A.

Chervel, A. (1990). A história das disciplinas escolares – reflexões sobre um campo de pesquisa. Teoria & Educação, 2, 177-229.

D'Enfert, R. (2016). O ensino do desenho e a cultura gráfica na França nos séculos XIX e XX. En G. M. C. Trinchão (Org.), Desenho, Ensino & Pesquisa, Capítulo 1, pp. 13-32. Salvador: EDUFBA; UEFS.

Faria Filho, L. M. e Vidal, D. G. (2000). Os tempos e os espaços escolares no processo de institucionalização da escola primária no Brasil. Revista Brasileira de Educação, 14, 19-34.

Frizzarini, C. R. B. (2014). Do ensino intuitivo para a escola ativa: os saberes geométricos nos programas do curso primário paulista, 1890-1950. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Sao Paulo (UNIFESP), Guarulhos.

Leme da Silva, M. C. (2014). Desenho e geometria na escola primária: um casamento duradouro que termina com separação litigiosa. História da Educação, 18, 61-73.

Lourenço Filho, M. B. (1930). *Introdução ao estudo da Escola Nova.* São Paulo – Cayeiras – Rio de Janeiro: Companhia Melhoramentos de São Paulo.

Monarcha, C. (2009). *Brasil arcaico, Escola Nova: Ciência, técnica e utopia nos anos 1920-1930.* São Paulo: Editora UNESP.




ISBN 978-84-945722-3-4

São Paulo. (1941). Programa de ensino para as escolas primárias. https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/99651. Consultado 16/09/2016.

Shieh, C. L. (2010). O que ensinar nas diferentes escolas públicas primárias paulistas: um estudo sobre os programas de ensino (1887-1929). Dissertação de mestrado, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FEUSP), São Paulo.

Souza, R. F. (2009). *Alicerces da Pátria: história da escola primária no estado de São Paulo (1890-1976).* Campinas, SP: Mercado de Letras.

Vidal, D. G. (2006). Tecendo história (e recriando memoria) da escola primária e da infancia no Brasil: os grupos escolares em foco. En D. G. Vidal (Org.), Grupos escolares: cultura escolar primária e escolarização da infancia no Brasil (1893-1971), Prefácio, pp. 7-20. Campinas, SP: Mercado de Letras.

Vidal, D. G. Escola nova e o proceso educativo (1920-1930). (2000). En E. T. Lopes, L. M. Faria Filho e C. G. Veiga (Orgs.), 500 anos de educação no Brasil, pp. 497-517.

## ANEXOS

**Quadro 1**: Recorte do Programa de São Paulo de 1905 – matérias de Desenho e Geometria

| | | |
|---|---|---|
| **1ºAno** | **Desenho:** Desenhar objetos fáceis no quadro-negro e nas ardósias. Desenho de objetos simples, plantas e animais, sobre papel, a lápis de diversas cores. Desenho ditado e original. | **Geometria:** Esfera, cubo, cilindro, hemisfério, prisma quadrangular e triangular; estudos quanto à superfície, ás faces, quinas ou linhas, aos cantos ou ângulos. |
| **2ºAno** | **Desenho:** Desenhar, a lápis, grupos de objetos. Desenho de animais e plantas, copiado do natural. Desenhos decorativos, ditados e originais. | **Geometria:** Pirâmide e cone, quanto à superfície, ás faces, ás linhas e a os ângulos. Elipsoide e ovoide. Formas das faces dos sólidos; nome dos ângulos e das linhas que limitam a sua superfície. |
| **3ºAno** | **Desenho:** Desenho a lápis: Paisagens simples. Reprodução de modelos geométricos em diversas posições. Desenhos ditado e original. | **Geometria:** Posição das linhas. Construção de perpendiculares e paralelas, de ângulos e triângulos e do quadrado. Medida da superfície do quadrado e do retângulo. Problemas. |


ISBN 978-84-945722-3-4

| | | |
|---|---|---|
| **4ºAno** | **Desenho:**<br>Os mesmos exercícios de anos procedentes. Desenho de animais, plantas, folhas, flores, paisagens etc. Reprodução dos grupos de sólidos geométricos. | **Geometria -** Avaliação da área dos triângulos, quadriláteros e polígonos. Circunferência e suas linhas. Circulo. Construção de polígonos regulares. Problemas. |

**Fonte**: adaptado a partir do Decreto n. 1281, de 1905.

**Quadro 2** – Recorte do Programa de São Paulo de 1918

| | |
|---|---|
| **1ºAno** | **Desenho:**<br>Desenho de objetos simples no quadro-negro, no papel, a lápis ou a giz de cores.<br>Desenho original ou de invenção. |
| **2ºAno** | **Desenho:**<br>Desenhar a lápis: animais, plantas e grupos de objetos do natural. Desenhos decorativos, ditados e originais. |
| **3ºAno** | **Desenho:**<br>Desenho a lápis; paisagens simples: reprodução de modelos em diversas posições.<br>Desenhos de invenção e ditado. |
| **4ºAno** | **Desenho:**<br>Desenho de animais, plantas, folhas, flores, paisagens etc. Reprodução dos grupos de sólidos geométricos.<br>Desenho ditado e original. |

**Fonte**: adaptado a partir de informações coletadas no Decreto n. 2944.

**Quadro 3** – Recorte do Programa de São Paulo - 1921

| | |
|---|---|
| **1ºAno** | **Desenho:**<br>Os assuntos escolhidos para desenho serão tirados da vila local, exprimindo sempre um fato quotidiano: a sucessão das estações a vida agrícola, pastoral, ou industrial, os diferentes aspectos de vida doméstica da localidade serão no manancial inesgotável de motivos que as crianças gestarão de reproduzir pelo desenho.<br>**a)** indagar o que as crianças têm feito;<br>**b)** o que seus companheiros têm feito;<br>**c)** o que tem visto;<br>**d)** o que sabe sobre qualquer coisa;<br>**e)** o que as crianças imaginam;<br>**f)** lembrada as noções que têm sobre os sólidos geométricos já estudados, desenhar alguma coisa (casa, igreja ou monumento) que recorde tais formas etc. |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

| | |
|---|---|
| | Os desenhos serão feitos sem modelo. As crianças desenharão como souberam, evocando apenas as imagens que possuem sobre tais assuntos. |
| **2ºAno** | **Desenho:**<br>Continuação dos exercícios do 1.º ano |

**Fonte**: adaptado do Decreto n.3356 de 1921.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.148

# MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL – EXPERIÊNCIAS DE FORMAÇÃO INICIAL

Neila Tonin Agranionih
ntagranionih@gmail.com
Universidade Federal do Paraná - Brasil

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: CB
Nivel educativo: Inicial (3 a 5 anos)
Palabras clave: Alfabetização matemática, letramento matemático, Educação Infantil, PIBID

**Resumo**
*O artigo objetiva relatar experiências de formação inicial docente realizadas com acadêmicos do Curso de Pedagogia da Universidade Federal do Paraná no Projeto PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência) – Pedagogia 3. Trata-se de um programa do governo federal brasileiro desenvolvido em parceria, universidades e escolas da rede pública de ensino, que promove a inserção dos acadêmicos nas salas de aula para desenvolverem atividades didático-pedagógicas. O Projeto Pegagogia 3 é desenvolvido na Educação Infantil e envolve atividades matemáticas. Busca investigar conhecimentos matemáticos e noções matemáticas que as crianças trazem para a escola bem como elaborar e aplicar atividades lúdicas que os envolvam. Desenvolve atividades voltadas para a alfabetização matemática na perspectiva do letramento, sem a intenção de alfabetizar propriamente por não acreditar que seja este o objetivo da Educação Infantil, mas de vivenciar situações, por meio de brincadeiras, jogos, literatura, resolução de pequenos problemas que envolvam a matemática presente no cotidiano das crianças, tais como brincar de: fazer compras no mercado, comprar ingressos para o parque de diversões, confeccionar capas de super-heróis, entre outras. O projeto contribui significativamente com a formação inicial docente bem como permite conhecer melhor o que crianças pequenas sabem de matemática.*

## O PIBID (Programa de Incentivo a Bolsas de Iniciação à Docência)

O PIBID é um programa da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), fundação vinculada ao Ministério da Educação (MEC) do Brasil, voltado para o aperfeiçoamento e a valorização da formação de professores para a Educação Básica, que visa, por meio de parceria com instituições de ensino superior e rede pública de ensino, incentivar a formação para a docência e promover a inserção de acadêmicos dos cursos de licenciatura no contexto das escolas desde o início da sua formação acadêmica para que



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

desenvolvam atividades didático-pedagógicas sob orientação de um docente da licenciatura e de um professor da escola. Objetiva também proporcionar oportunidades de criação e participação em experiências metodológicas, tecnológicas e práticas docentes de caráter inovador e interdisciplinar que busquem a superação de problemas identificados no processo de ensino-aprendizagem bem como contribuir para a articulação entre teoria e prática necessárias à formação dos docentes, elevando a qualidade das ações acadêmicas nos cursos de licenciatura.

## O projeto Pedagogia 3 – Matemática na Educação Infantil

O projeto Matemática na Educação Infantil é desenvolvido desde o ano de 2014, como parte das atividades do PIBID- Programa de Incentivo a Bolsas de Iniciação à Docência, Pedagogia na Universidade Federal do Paraná (UFPR). Teve origem a partir do interesse e da necessidade de repensar as possibilidades de trabalho com noções matemáticas na Educação Infantil[18] respeitando as especificidades do desenvolvimento das crianças e as características do trabalho pedagógico nessa fase da Educação Básica brasileira.

A Matemática está presente na vida das crianças desde muito pequenas, uma vez que convivem diariamente com uma grande variedade de noções matemáticas, ouvem falar e falam sobre quantidades, comparam, separam, ordenam, localizam-se gradualmente no espaço e no tempo, resolvem pequenos problemas, exploram formas e figuras variadas. Tais noções vão se desenvolvendo na medida em que interagem com pessoas e objetos próprios do seu meio social e cultural, de modo assistemático e natural, nas brincadeiras, jogos, cantos, rodas, enfim, nas atividades próprias do mundo da criança. Considera-se que é nesta fase do desenvolvimento que se inicia o desenvolvimento das estruturas lógicas e do pensamento matemático. Cabe à escola conhecer e estimular o desenvolvimento dessas noções. Para tal, é essencial que o professor conheça esse processo e saiba como estimulá-lo. No entanto, a Matemática da Educação Infantil geralmente reduz-se à escrita numérica dos algarismos de 1 a 10 e a rudimentos de geometria (geralmente voltados às formas geométricas) trabalhados geralmente de modo alheio às atividades próprias da criança. Daí a relevância de promover estudos e análises sobre tais possibilidades a acadêmicos do Curso de Pedagogia, futuros

[18] A Educação Infantil é a primeira etapa da Educação Básica brasileira e é oferecida em creches e pré-escolas, as quais se caracterizam como espaços institucionais não domésticos que constituem estabelecimentos educacionais públicos ou privados que educam e cuidam de crianças de 0 a 5 anos de idade no período diurno, em jornada integral ou parcial, regulados e supervisionados por órgão competente do sistema de ensino e submetidos a controle social. (BRASIL, 2009).


ISBN 978-84-945722-3-4

professores de crianças de 0 a 5 anos nos Centros Municipal de Educação Infantil (CMEI) e Centro de Educação Infantil (CEI) vinculados ao projeto PIBID.

No que tange à formação inicial, o projeto proporciona a vivência da ação docente, ao envolver os acadêmicos na dinâmica: planejamento, prática da docência, avaliação da prática realizada, replanejamento, prática da docência, avaliação, sucessivamente, a partir de atividades de investigação das formas de pensar da criança, mobilizando assim a relação teoria/prática na perspectiva do professor reflexivo e pesquisador. Promove a pesquisa das formas de pensar e resolver problemas das crianças na faixa etária envolvida com vistas a conhecer o pensamento infantil, o desenvolvimento das noções matemáticas e das hipóteses que as crianças constroem sobre situações que envolvem conceitos matemáticos. Enfim, o projeto objetiva desenvolver atividades com os acadêmicos que promovam reflexões sobre as possibilidades de trabalho com a Matemática na Educação Infantil bem como construir práticas pedagógicas lúdicas e interdisciplinares voltadas ao desenvolvimento do pensamento lógico-matemático, mais especificamente ao desenvolvimento de noções numéricas, temporais, espaciais e geométricas em situações próprias do universo infantil. Nesse sentido, envolve, atualmente, 17 acadêmicos do Curso de Pedagogia da UFPR em atividades de estudos e orientações na universidade e práticas pedagógicas realizadas em CMEIs e CEIS da cidade de Curitiba-PR, acompanhamento e aplicação de atividades sob a orientação do professor supervisor nas escolas.

**Atividades desenvolvidas no Projeto Pedagogia 3 – Matemática na Educação Infantil**

As atividades do projeto Pedagogia 3 – Matemática na Educação Infantil envolvem: - fundamentação das atividades em referenciais teóricos sólidos a partir da leitura e de discussões de artigos e livros produzidos por estudiosos da Educação Infantil e da Matemática na Educação Infantil; - análise das diretrizes brasileiras, tais como o Referencial Curricular Nacional da Educação Infantil (RCNEI) e as Diretrizes Curriculares Municipais da Educação Infantil do município de Curitiba com vistas a conhecer as orientações curriculares para o trabalho com a Matemática na Educação Infantil; - conhecimento e análise de diferentes propostas e abordagens teórico-metodológicas, com vistas a construir subsídios para a elaboração de situações didáticas as serem desenvolvidas na Educação Infantil; - elaboração e aplicação de sequências didáticas que envolvam noções matemáticas em


ISBN 978-84-945722-3-4

situações próprias às práticas sociais infantis, ou seja, situações lúdicas de modo interdisciplinar; - pesquisas sobre conhecimentos prévios das crianças sobre os temas abordados e suas hipóteses na resolução de problemas com vistas a conhecer o pensamento infantil nesta faixa etária e planejar situações didáticas que promovam o seu desenvolvimento.

Em 2014 foram realizados estudos dos referenciais curriculares da Educação Infantil, nacionais e estaduais, no sentido de conhecer as orientações seguidas nas escolas envolvidas no projeto. Após, foram desenvolvidos estudos sobre grandezas e medidas, conhecimentos físicos, espaço e forma, números e sistema de numeração, envolvendo notações e escritas numéricas e operações. As sequências didáticas planejadas e aplicadas envolviam esses conteúdos em situações de jogos, brincadeiras e histórias infantis.

Em 2015 o desafio do grupo de acadêmicos participantes do projeto foi planejar sequências didáticas que envolvessem a Resolução de Problemas como metodologia de ensino de matemática (ONUCHIC, 1999). Nessa abordagem, "[...] o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas quanto aprende matemática para resolver problemas." (ONUCHIC, 1999, p. 210-211). Trata-se de ensinar matemática através da resolução de problemas (SCHROEDER; LESTER, 1989, ONUCHIC, 1999), onde estes passam a ser um meio para ensinar matemática ao propiciar um processo de construção de conhecimento ao levar o aluno a buscar soluções. O aprofundamento teórico sobre tal abordagem foi realizado nas reuniões de estudos. O desafio se deu por conta da necessidade de compreender que as problematizações poderiam estar presentes tanto na forma de problemas propostos para as crianças resolverem quanto ao longo das atividades desenvolvidas no âmbito de jogos, brincadeiras, contação de histórias, encenações, desde que fossem desafiadas a pensar, estabelecer relações, levantar hipóteses, expressar pontos de vista, apresentar e registrar alternativas de solução. A sequência didática Resolvendo Problemas a partir da História em Quadrinhos[19] é um exemplo. Tinha como objetivo proporcionar às crianças pensarem sobre o que é necessário para que seja possível equilibrar a gangorra para brincar. Iniciava com a apresentação em power point da história em quadrinhos envolvendo a Turma da Monica, conforme Figura 1. Após a leitura e interpretação conjunta da história com as crianças, quadrinho por quadrinho, no sentido de compreender o que se passava na história, as acadêmicas perguntaram às crianças: **Acad:** - Por que a Monica ficou brava? Seguiu-se o seguinte diálogo. **Cri**: - Porque ela está embaixo! **Acad:** - Mas, porque ela está embaixo? **Cri:** - Por que a Magali só quis brincar na gangorra quando o Cascão e o Cebolinha quiseram também! - Porque ela tinha terminado de comer o sorvete! **Acad**: - O que faz com que um lado da gangorra fique no alto? **Cri:** - O pé esticado! **Acad:** - O que faz com que a gangorra fique de um lado para baixo? **Cri:** - Mais pesado. **Acad:** - E dá para deixar a gangorra reta (equilibrada)? **Cri:** - Ficar de pé. **Cri:** - Ter força. **Cri:** - Não dá, por

[19] A sequencia didática foi elaborada pelas bolsistas do curso de Pedagogia da UFPR: Leticia Camargo e Evelyn Kowalski


ISBN 978-84-945722-3-4

que cai. **Cri:** - Dá sim, uma vez estava brincando com minha prima e ela é gorda, e dai eu e mais 3 amigas deixamos a balança reta. **Acad**: - Tua prima era mais pesada ou mais leve? **Cri:** - Mais pesada. **Acad:** - E você e suas amigas juntas são mais pesadas que sua prima**?** **Cri:** - Não, é igual. **Acad:** - Então o que precisa para deixar a gangorra igual? **Cri:** - Não sei. **Acad:** - E se crianças de pesos diferentes forem brincar na gangorra, ela vai ficar reta? **Cri:** - Não. **Acad:** - E se forem duas crianças com peso igual? **Cri:** - Igual. **Acad:** - Então o que precisa para deixar a gangorra igual? **Cri:** - Não sei!

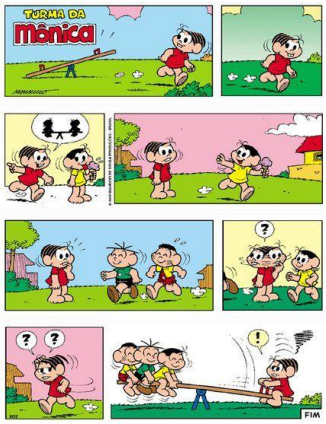



**Figura 1 – História em quadrinhos – Turma da Monica**
Fonte: https://es.pinterest.com/explore/festa-da-monica-953199454142/

A esta atividade, seguiram-se mais duas, em dias diferentes, envolvendo outra história em quadrinhos semelhante e brincadeira de gangorra no pátio da escola. Ambas seguiam-se de problematizações semelhantes, sempre no sentido de provocar as crianças a pensar sobre o que acontecia quando a gangorra ficava em equilíbrio e o que era necessário para que isso acontecesse. Ao final, muitas crianças já se dirigiam à gangorra convidando colegas de peso semelhante ao seu, ou tentavam brincar com duas crianças em cada lado, preocupando-se manter um equilíbrio entre ambos os lados.

No ano de 2016 o tema trabalhado foi Alfabetização Matemática na perspectiva do Letramento Matemático. O tema foi motivado pelo interesse em conhecer a proposta do PNAIC (Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa) - Matemática[20], programa de formação continuada de professores alfabetizadores desenvolvido pelo Ministério da Educação do Brasil em parceria com universidades, secretarias de educação e escolas que objetiva a alfabetização das crianças até o 3º ano do Ensino Fundamental. Tal programa ressaltou a importância de considerar o que diz Soares (2011, p. 29-32) em relação à alfabetização: [...] dos indivíduos já se requer não

[20]Ver: BRASIL, Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Apresentação. Brasília: MEC, SEB, 2014.


ISBN 978-84-945722-3-4

apenas que dominem a tecnologia do ler e do escrever, mas também que saibam fazer uso dela, incorporando-a a seu viver, transformando-se assim seu "estado" ou "condição", como consequência do domínio dessa tecnologia."A autora também chama a atenção para a indissociabilidade entre alfabetização e letramento ao esclarecer que alfabetização se desenvolve por meio de práticas sociais de leitura e escrita, isto é, através de atividades de letramento, e este, por sua vez, só se desenvolve por meio da aprendizagem da escrita propriamente dita, isto é, em dependência com a alfabetização. (Soares, 2004, p. 14.).

A Educação Infantil, no Brasil, não tem como objetivo promover um processo sistemático de alfabetização, mas de proporcionar um ambiente alfabetizador sem antecipação de conteúdos a serem trabalhados no Ensino Fundamental: "[...] um ambiente é alfabetizador quando promove um conjunto de situações de usos reais de leitura e escrita das quais as crianças têm oportunidade de participar" (Brasil, 1998, p. 154). Considerando o que é referido no Art. 8º da Resolução nº 5 de 12 de dezembro de 2009 que fixa as diretrizes curriculares para a Educação Infantil: "A proposta pedagógica das instituições de Educação Infantil deve ter como objetivo garantir à criança acesso a processos de apropriação, renovação e articulação de conhecimentos e aprendizagens de diferentes linguagens, [...]" (Brasil, 2009, Art. 8º), e "[...] que a criança [...] nas interações, relações e práticas cotidianas que vivencia, constrói sua identidade pessoal e coletiva, brinca, imagina, fantasia, deseja, aprende, observa, experimenta, narra, questiona e constrói sentidos sobre a natureza e a sociedade, produzindo cultura (Brasil, 2009, Art. 4º). E, considerando ainda que as crianças interagem com diferentes formas de representação, entre elas a escrita numérica e alfabética, muito antes de entrar na escola, já trazendo consigo noções e hipóteses sobre as mesmas, entendemos que ao promover interações com contextos socioculturais que envolvem diferentes formas de escrita, um ambiente rico de possibilidades de interação com letras e números no contexto de contação de histórias, jogos, brincadeiras, exploração de calendários e de outras atividades próprias desta fase escolar, é próprio que tal ambiente propicie a alfabetização de muitas crianças de modo natural. Por exemplo: fazer compras no mercadinho a partir de uma lista de compras; fazer cupcakes a partir da leitura da receita, verificar medidas e confeccionar capas para brincar de super-heróis com o uso da trena, usar a balança para obter igual massa de argila para modelar, entre outras. Ao colocar a criança em interação com diferentes gêneros textuais no contexto das atividades na Educação Infantil se constitui num momento significativo para o letramento. Sequências didáticas envolvendo essas e outras situações foram elaboradas e aplicadas pelos acadêmicos participantes do projeto Pedagogia 3.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Na sequência didática "Lista de compras: brincando de ir ao mercado"[21] foi proposta a atividade que iniciou com o diálogo: **Acad:** - Vocês já fizeram uma lista de compras para ir ao mercado? **Cri:** Siiiim. **Acad:** E o que nós colocamos nela? **Cri 1**: - O que está faltando em casa. **Acad: -** E para que serve? **Cri 2:** - Para não esquecer nada. **Cri 3:** - Para gastar menos. Algumas crianças já tinham conhecimento de listas de compras e das finalidades de seu uso. A seguir, a turma foi dividida em 5 grupos e cada um recebeu uma lista de compras com um tipo de mercadoria especifica (alimentos, produtos de higiene, frutas, material escolar, guloseimas), conforme exemplo na Figura 2. As crianças foram questionadas sobre os produtos que estavam em suas listas, fazendo uma "leitura" das mesmas com apoio das imagens. Também fizeram a leitura da quantidade de cada item que deveriam comprar no supermercado organizado na sala.

Os produtos do mercado foram dispostos na sala e cada grupo procedeu a compara do produto que estava na lista na quantidade indicada, o que não foi observado pelas mesmas num primeiro momento, gerando a necessidade de maiores esclarecimentos sobre este aspecto. Nas listas estava escrito a quantidade numérica e a imagem do produto, para que assim as crianças tivessem maiores referências na hora da compra.

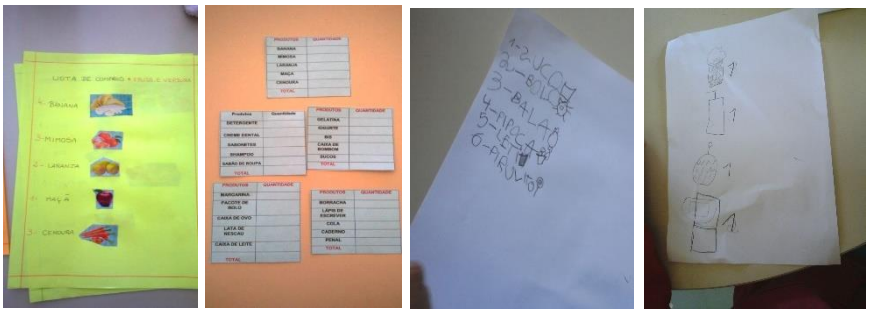


**Figura 2 – Listas e registros**
Fonte: Sequência didática

Como registro desta atividade, foi entregue a cada grupo uma tabela, onde deveriam colocar o produto e a quantidade comprados sem o apoio das listas de compras. (Figura 2). Em outro momento foi solicitado às crianças que fizessem a sua própria lista de compras com produtos que gostariam de comprar no mercado. Após, novamente as crianças realizaram as compras correspondentes às suas listas. (Figura 2)

[21] Elaborada pelas acadêmicas do Curso de Pedagogia da UFPR: Rita Tinte, Leticia Camargo e Evelyn Kowalski



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

## Considerações finais

Consideramos que o projeto PIBID – Pedagogia 3 – Matemática na Educação Infantil tem contribuído significativamente para a formação inicial docente ao proporcionar experiências práticas alicerçadas por estudos teóricos e processos reflexivos sobre a ação educativa. Os acadêmicos participantes do projeto vivenciam situações reais de docência, enriquecidas pela possibilidade de: - investigar as formas de pensar das crianças, conhecer os seus processos de desenvolvimento, seus conhecimentos prévios, hipóteses sobre situações problema e suas diferentes formas de expressão e comunicação de ideias; - colocar em ação conhecimentos advindos do curso de Pedagogia, aliando a teoria à prática, na perspectiva da formação de um professor reflexivo, a partir da avaliação de sua prática a reconstrói continuamente; - verificar a possibilidade de formação de sujeitos críticos e autônomos, diante da possibilidade de conceder a palavra às crianças permitindo que se expressem e ajam positivamente diante de pequenas situações- problema.

## Referências

BRASIL, Resolução CNE/CEB 5/2009. Diário Oficial da União, Brasília, 18 de dezembro de 2009, Seção 1.
https://www.mprs.mp.br/areas/gapp/arquivos/resolucao_05_2009_cne.pdf

ONUCHIC, L. De La R. (1999). Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS. São Paulo: Editora UNESP, p. 199-218.

PIBID – Programa de Institucional de Iniciação à Docência.
http://www.capes.gov.br/educacao-basica/capespibid/pibid

SCHROEDER, T.L., LESTER Jr., F.K. (1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving, TRAFTON, P.R., SHULTE, A.P. (Ed.) *New Directions for Elementary School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

SOARES, M. (2004). Letramento e alfabetização: as muitas facetas. Revista Brasileira de Educação, Rio de Janeiro, 44, 5-17.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.150

# UMA INICIATIVA PARA A MELHORIA NA QUALIDADE DA APRENDIZAGEM NO CURSO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA DO IFC - *CAMPUS* CONCÓRDIA - SC

Samara.Elisa Pelisson – Eliane Suely Everling Paim – Karla Aparecida Lovis
samaraelisa.pelisson@gmail.com – eliane.paim@ifc-concordia.edu.br – karla.lovis@ifc-concordia.edu.br
Instituto Federal Catarinense – Campus Concórdia – Brasil

Núcleo temático: Formação de professores de Matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formação e atualização de ensino
Palavras-chave: matemática básica; evasão; permanência; extensão.

**Resumo**
*O objetivo deste trabalho é apresentar os resultados obtidos com o desenvolvimento de projeto de extensão direcionado aos alunos ingressantes do curso de Matemática Licenciatura do Instituto Federal Catarinense – Campus Concórdia/SC – Brasil, no decorrer do ano de 2015. A finalidade do projeto foi aprofundar os conhecimentos de matemática básica, conceitos essenciais para que os discentes possam se apropriar dos assuntos abordados nas disciplinas do curso. O projeto foi executado em duas etapas: na primeira foram estudados conteúdos de matemática básica, e na segunda os discentes elaboraram uma oficina, que posteriormente foi aplicada para alunos da educação básica, com o intuito de propagar os conteúdos trabalhados e fortalecer a docência. Observou-se que o projeto contribuiu na compreensão dos conhecimentos básicos de matemática, resultando na redução dos índices de evasão e retenção nas disciplinas do curso de Matemática. No que diz respeito à execução do projeto, os acadêmicos destacaram a relevância desse tipo de projeto nas primeiras fases do curso.*

## Introdução

Nos últimos anos, observa-se que os alunos ingressantes nos cursos de graduação têm apresentado acentuada dificuldade nas disciplinas que necessitam do conhecimento matemático ensinado no ensino fundamental e médio. As dificuldades apresentadas pelos alunos evidenciam que os conteúdos matemáticos não estão ou não foram assimilados de forma adequada. O reflexo dessas dificuldades pode ser observado no acentuado índice de reprovações e desistências nas disciplinas que necessitam de matemática básica como pré-



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

requisito. Sabe-se que esse problema ultrapassa os muros das instituições de ensino superior, atingindo também as estruturas constituídas da comunidade.

Ao analisar o conhecimento matemático, destaca-se o quanto ele é importante para a formação social, cultural e profissional dos alunos, proporcionando-lhes desenvolvimento e competências necessárias para a formação cidadã. Em D'Ambrósio (1986) é abordado que o acesso a um maior número de instrumentos e de técnicas intelectuais proporciona, quando devidamente contextualizado, maior capacidade de enfrentar situações e problemas novos, de modelar adequadamente uma situação real para, com esses instrumentos, se chegar a uma possível solução ou curso de ação.

Quanto a relevância do conhecimento matemático, em Brasil (2002) é destacado que cabe ao professor apresentar ao educando, novas informações e instrumentos necessários para que o estudante possa dar continuidade aos seus estudos e consequentemente inserir-se no mercado de trabalho. Parece que cabe também às instituições que oferecem os cursos de licenciatura, desenvolver ações estratégicas visando reduzir essas distorções.

Portanto, com o desenvolvimento desse projeto visualizou-se a perspectiva de sanar as dificuldades referentes aos conhecimentos matemáticos básicos auxiliando o estudante na continuidade dos estudos, na redução de desistências nas diferentes fases de escolaridade, na motivação do gosto pelos cálculos e na interação da comunidade como parte integrante do processo. No tocante à interação com a comunidade, buscou-se por meio da implementação de atividades o contato dos graduandos com os alunos da educação básica.

Acerca disso, este trabalho objetivou também apresentar os resultados obtidos e analisados após um ano da realização do projeto. Foram analisados aspectos que comprovassem a validação do projeto, se este foi relevante e qual é a opinião dos acadêmicos que participaram, sobre as reprovações, retenção e desistências.

## A formação de professores

A condição de docente em um curso de licenciatura em matemática, nos mostra o quanto é importante criar estratégias para fixar os alunos das licenciaturas no curso. Também sabemos da importância que esse profissional vem assumindo, uma vez que uma hora ou outra, todos precisam de professores e eles estão reduzindo, em quantidade. Desta forma, destaca-se a necessidade da discussão sobre a formação de professores.


ISBN 978-84-945722-3-4

A formação de um bom professor é peça chave para que os alunos, quando em contato com esse bom profissional, sintam-se seguros e, dessa forma, possam desenvolver o desejo por aprender, uma vez que, é esse profissional a principal fonte de informação sistematizada em uma sala de aula, todo o ritual escolar está fundamentado nas falas dos professores. Conforme CUNHA (1989) um bom professor deve reunir diversas competências para ser "considerado" como tal. Entre essas competências a autora destaca que deve existir, em primeiro lugar, o domínio do conteúdo que será abordado, assim como saber localizar historicamente esse conteúdo. Ter laços afetivos com os alunos também é importante, conhecer as dificuldades desses alunos, ser claro com as explicações e ter a capacidade de formular perguntas que estimulem o pensamento dos estudantes também é destacado pela autora.

No entanto, a desvalorização desses profissionais é um empecilho importante ao se tratar de estímulos para a continuação da formação dos estudantes de Licenciatura.

> Infelizmente, no Brasil a docência não tem sido vista como uma carreira atrativa aos egressos do ensino médio. De acordo com uma pesquisa recente da Fundação Carlos Chagas (Gatti, 2009) com uma amostra de 1500 alunos de ensino médio brasileiros de 8 cidades, eles reconhecem a função social da profissão e acreditam ser um trabalho nobre e gratificante, no entanto ressaltam a disparidade entre a exigência e o retorno da profissão. Os alunos acham o trabalho muito difícil, ao mesmo tempo em que veem a docência como desvalorizada, social e financeiramente (Brasil, 2010, p. 3).

Contudo, o empenho dos professores em incentivar os graduandos é fundamental, como já citado, há uma falta desses profissionais no mercado e todo o estímulo para os estudantes de licenciatura é bem-vindo. Projetos de formação são bons exemplos de práticas que influenciam a permanência dos estudantes na continuação do curso.

Hoje uma das preocupações dos docentes das várias instituições de ensino, principalmente ensino superior, relaciona-se ao nível reduzido de conhecimento da matemática básica apresentada pelos alunos ingressantes nos cursos de graduação. Essa fragilidade vem comprometendo a qualidade da aprendizagem dos alunos nas disciplinas de ciências exatas. Vem comprometendo também a continuidade dos estudos desses alunos, gerando, em muitos casos, evasão escolar e em consequência, reproduzindo a desigualdade social. Além do nível reduzido de conhecimento com a Matemática básica Silva e Kawamura (2011) fala que,


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

contribuem para a evasão e a desistência também as dificuldades de relacionamento entre professor e aluno e aluno e aluno.

O projeto desenvolvido visou exatamente diminuir esse abismo que há entre docentes e discentes e com as disciplinas ligadas a matemática básica, facilitando a inclusão e o gosto pelo curso.

**Discussões sobre os resultados do projeto**

No IFC – Campus Concórdia, são conhecidos resultados de uma iniciativa tímida já implementada no ano de 2015. Esse trabalho foi desenvolvido por meio de minicursos ofertados aos alunos que apresentaram dificuldades nos conteúdos básicos de matemática.

Percebeu-se que os índices de evasão dessa turma de 2014 teve importante redução, se comparada aos índices de evasão das turmas dos anos anteriores. Observou-se que somente com essa iniciativa foram obtidos resultados satisfatórios e também foi um sinalizador, indicando que era possível melhorar ainda mais esses índices. A experiência mostrou também que projetos desse tipo (com baixo investimento), servem como estratégias para atingir metas com resultados importantes sob o ponto de vista da redução dos índices de evasão e da qualidade dos profissionais que se quer formar.

A principal discussão acerca desse projeto, diz respeito à melhoria da qualidade nos conhecimentos básicos dos alunos ingressantes dos cursos de licenciatura em matemática. Essa melhoria se verificou ao demonstrarem certo grau de segurança, quando necessitaram utilizar conceitos básicos nas aulas da grade curricular das disciplinas de matemática do curso. Esses resultados vem responder à demanda dos alunos que chegam aos cursos de licenciatura em matemática com um déficit de conhecimento básico necessário para que ocorra satisfatório acompanhamento das disciplinas matemáticas do curso de graduação.

Outra reflexão diz respeito ao perfil dos alunos que frequentam os cursos de licenciatura em matemática. São alunos que desenvolvem atividades profissionais durante o dia e não tem tempo disponível para participar de cursos de aperfeiçoamento em outro horário a não ser durante os sábados, esse foi o único horário possível para conseguir público. Esse talvez foi um ponto dificultador do trabalho, visto que não foi possível contar com a presença da maioria dos alunos da primeira fase do curso.


ISBN 978-84-945722-3-4

O atendimento individualizado dos alunos também foi considerado fator importante, visto que o número de alunos que frequentavam o projeto não era expressivo como em uma sala de aula convencional. Esses alunos se mostraram à vontade para apresentar suas dúvidas no decorrer do desenvolvimento do curso, uma vez que esse era o espaço para discussão de dúvidas básicas que não foram sanadas antes da chegada desses alunos na graduação.

Como todo projeto apresenta certo grau de incertezas, foi elaborado e aplicado um instrumento diagnóstico em forma de questionário, durante o desenvolvimento do curso, para investigação quanto a sua validade. No período, todos os alunos responderam positivamente, confirmando que os conteúdos trabalhados estavam atingindo as expectativas e também que contribuíram para a formação acadêmica. Em outro questionamento, foi perguntado se a execução do projeto contribui para a aprovação das disciplinas do curso ou redução da evasão; a maioria respondeu que sim, entretanto, 20% dos alunos responderam que as aulas do projeto somente auxiliam na parte básica das disciplinas; outros ainda responderam que independente das aulas do projeto, eles têm intenção de continuar no curso de licenciatura. Quanto aos motivos que levaram os alunos a frequentar as aulas do projeto, a maioria respondeu que frequentou para incrementar/relembrar conhecimentos básicos, outros responderam que o certificado do curso poderia ser apresentado para contagem de horas curriculares complementares para a integralização do curso.

No que se refere à parte final do projeto que foi a elaboração e aplicação de uma oficina aos alunos da educação básica, todos os acadêmicos responderam que consideraram importante essa implementação, uma vez que, para a maioria dos alunos, foi o primeiro contato com a sala de aula ou com a profissão. Os acadêmicos também destacaram que a aplicação da atividade representou uma espécie de colaboração com a formação docente, bem como a complementação da teoria com a prática.

Em relação à equipe de trabalho, também se tem algumas considerações a fazer. É importante pontuar a coragem da equipe que fez parte do projeto. Pois esse foi um trabalho difícil de ser desenvolvido, já que foi realizado em um horário diferenciado e também por trazer pouca visualização para os gestores das instituições, uma vez que os resultados na área da educação nem sempre são passíveis de avaliação quantitativa. Mas para a equipe, deve fazer parte da essência de que quem trabalha com a área educacional, já deve estar intrínseco esse compromisso com o social.


ISBN 978-84-945722-3-4

A satisfação para a equipe do projeto veio com os resultados obtidos e observados após o período do encerramento do curso. Averiguou-se os índices de reprovação e de evasão e, também, a melhoria na qualidade da aprendizagem dos alunos, cujos aspectos foram o alvo do projeto de extensão. O MEC/SESu conceitua a retenção compreendendo o aluno que permanece com o status de cancelado, trancado ou em abandono após o prazo máximo de integralização, ou seja, o aluno que não foi desligado da IFES (Institutos Federais de Ensino Superior) mesmo após o prazo máximo de integralização (BRASIL, 1997). Dos alunos que participaram do projeto, somente 7% deles evadiram, sendo que os 93% restantes continuaram no curso. Hoje, avaliando a previsão de retenção a partir do grupo que participou do projeto, percebeu-se um índice em torno de 14%. Por outro lado, um estudo apresentado em Rissi e Marcondes (2011) sobre reprovação e retenção nos cursos de graduação em Matemática do período noturno realizado em 2009 na Universidade Estadual de Londrina, apontou um índice de retenção em torno de 33,5%. Outro estudo que consta no relatório do MEC/Inep (BRASIL, 2009) foi constatado um percentual de evasão/retenção de 42,3%.

Portanto, avaliando a previsão de retenção e desistência a partir dos estudos realizados percebe-se uma melhora nos índices apontados a partir do trabalho desenvolvido. Então, é possível afirmar que iniciativas como esta referente ao projeto desenvolvido, são importantes também porque auxiliam no processo da formação de professores assegurando maior aproveitamento do curso.

**Considerações Finais**

Neste artigo foi elencado os resultados referentes a um projeto de extensão direcionado aos alunos dos cursos de licenciatura em matemática, interessados em melhorar a qualidade de seus conhecimentos básicos em matemática. Esse trabalho também poderá servir como estratégia para a redução dos índices de evasão e reprovação dos cursos de licenciatura em matemática do IFC- Campus Concórdia - SC.

Com a avaliação diagnóstica do projeto foi possível confirmar sua validade, tanto sob o ponto de vista da melhoria da qualidade dos conhecimentos básicos de matemática dos acadêmicos quanto da sua importância na aproximação aos estudantes da educação básica, derrubando obstáculos impostos entre esses níveis.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Após a análise de dados obtidos, foi possível validar o propósito do projeto de reduzir as reprovações e evasão do curso de Matemática - Licenciatura do IFC - *Campus* Concórdia, proporcionando aos discentes maior aproveitamento. Constatou-se ainda que projetos desse tipo favorecem a interação entre os alunos do curso, tornando-os mais próximos e proporcionando momentos de trocas de experiências.

Para finalizar é necessário mencionar a inclusão. A necessidade de oferecer um ensino de qualidade para todos os acadêmicos, faz com que seja necessário repensar os métodos e estratégias desenvolvidas nas instituições para que todos consigam apresentar as mesmas condições de aprender e participar das atividades propostas nas disciplinas dos cursos. Então ao propor esse projeto, já estava incorporada a intensão de contribuir para que mais jovens escapem das estatísticas de evasão e repetência nos cursos de graduação.

**Referencias bibliográficas**


Comissão Especial de Estudos sobre a Evasão nas Universidades Públicas Brasileiras. (1996, October). Diplomação, Retenção e Evasão nos Cursos de Graduação em Instituições de Ensino Superior Públicas. Acessado em: Abril 21, 2017, em: http://www.andifes.org.br/wp-content/files_flutter/Diplomacao_Retencao_Evasao_Graduacao_em_IES_Publicas-1996.pdf

BRASIL (2002). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 01/04/2015.

CUNHA, M.(1898). *O bom professor e sua prática*. 24 ed. Campinas: Papirus Editora.

D'AMBROSIO, U. (1996). *Educação Matemática*: da Teoria à Prática. Coleção Perspectivas em Educação Matemática. 17ª ed. Campinas: Papirus Editora

RISSI. M. C, MARCONDES. M. A. S (organizadoras) (2011*). Estudo sobre a reprovação e retenção no cursos de graduação – 2009*. Londrina: UEL.

SILVA, F. A.; KAWAMURA, M. R. D. (2011). *Cursos de Licenciatura em Física: uma revisão sobre os estudos de evasão*. XIX SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE FÍSICA. SNEF 2011- Manaus/AM.

TARDIF, M; LESSARD, C; LAHAYE, L.(1991). Os professores face ao saber - esboço de uma problemática do saber docente. In: *Teoria e Educação*. 4, 215 – 233.




ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.155

# DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL ESTUDIO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN UTILIZANDO SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Cecilia Russo Cáceres – Alejandro Rosas Mendoza – Juan Gabriel Molina
ceciliarusso@msn.com – alerosas@ipn.mx – jmolinaz@ipn.mx
Liceo N° 55, Uruguay – Instituto Politécnico Nacional CICATA-Leg, México

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: CB
Nivel educativo: Medio o Secundario
Palabras clave: Secuencia didáctica, función lineal, software de geometría dinámica

**Resumo**
*En el presente trabajo se expone la elaboración de una secuencia didáctica basada en el uso del software Geogebra, su implementación en una clase de matemáticas y los resultados obtenidos. El objetivo de la secuencia es introducir al estudio del gráfico de una función polinómica de primer grado, a través del trabajo con distintos registros de representación de la función simultáneamente: gráfico, tabular y algebraico. La secuencia didáctica fue diseñada para alumnos de 2° Año de Ciclo Básico de Educación Secundaria de Uruguay (de entre 12 y 13 años de edad). En el estudio participaron 51 estudiantes divididos en dos grupos. En general consideramos que la secuencia elaborada cumple con el objetivo de que los alumnos trabajen con más de un registro de manera simultánea comprendiendo, durante la realización de la misma, la interconexión existente entre los mismos.*

## ANTECEDENTES

Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) presentan un exhaustivo trabajo donde abordan la temática relativa a funciones y gráficos desde el punto de vista de las tareas, del aprendizaje y de la enseñanza. En el mismo trabajo se señala la estrecha relación existente entre las representaciones algebraicas y gráficas de las funciones y cómo en conjunto determinan el concepto de función. En cuanto a la tarea matemática trabajada con estudiantes se plantean cuatro constructos: acción del estudiante, situación, variable y su naturaleza, y atención.

Por acción se refiere a si la tarea es de interpretación o de construcción, dentro de las cuales se pueden encontrar tareas de predicción, de clasificación, de traducción o de escala. Las tareas de traducción son aquellas relacionadas con reconocer la misma función en distintas formas de representación, reconocer qué representación se corresponde con otra de la misma



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

función o construir una representación a partir de otra. Este tipo de tareas en general hacen uso de las herramientas tecnológicas. Por situación se refiere a si la función o la gráfica están contextualizadas o no. Por variable y su naturaleza se hace referencia a los datos de la función o del gráfico. La atención es generalmente interna es decir al sistema de ejes, o las escalas por ejemplo.

En cuanto al aprendizaje de los estudiantes se organiza en dos secciones: intuiciones e ideas equivocadas. Las intuiciones son ideas que tienen los estudiantes y que están relacionadas con sus experiencias diarias. Las ideas equivocadas también pueden provenir de la interferencia de conceptos cotidianos con los conceptos matemáticos. En general estas ideas equivocadas se manifiestan en la discusión de qué es o no función, en la correspondencia, en la continuidad o no de los gráficos, en lo relativo a representar, interpretar y leer funciones, así como también en la notación y en la linealidad, dado que muchos alumnos consideran que solo son funciones aquellas cuya representación gráfica es lineal.

Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990), concluyen que una noción explícita de la correspondencia entre las nociones gráficas y su expresión algebraica es crucial. De hecho, se puede asegurar que es esta correspondencia la que los estudiantes deben aprender. En lo referente a esta bidireccionalidad. Las autoras citando a Zaslavsk establecen que los estudiantes prefieren ir desde el álgebra para representar gráficamente y no al revés. Al mismo tiempo es importante trabajar sobre las conexiones entre los puntos individuales y el conjunto de los puntos de una tabla y todos los puntos de una recta por ejemplo, así como también desarrollar en el estudiante el sentido de dónde buscar la información crítica.

En cuanto a la tecnología las autoras hacen hincapié en que el uso de ésta afecta de forma importante tanto la enseñanza como el aprendizaje de las funciones y el gráfico de estas. Lo que se plantea es la necesidad de investigar más sobre el uso de la tecnología en la enseñanza, así como también cómo afecta su disponibilidad; se pone como ejemplo el hecho que se pueden trabajar aspectos gráficos como la continuidad sin tener el dominio algebraico que hasta ahora se necesita y que esto puede provocar un cambio en la secuencia tradicional de introducir lo referente a funciones y su gráfico. También se hace referencia a la posibilidad que nos da la tecnología de trabajar con al menos dos representaciones simultaneas del mismo objeto, ya que la mayoría de las tecnologías que grafican nos dan además del gráfico de una


ISBN 978-84-945722-3-4

función su ecuación o un par ordenado de números y la representación de dicho punto o una tabla de valores en la que está basada la representación gráfica.

En referencia al trabajo de Biehler (2005) se presenta el hecho de que un mismo concepto matemático puede llegar a tener diferentes significados según el contexto en el que aparezca. En particular realiza su trabajo poniendo como ejemplo el concepto de función. En cuanto al análisis de las representaciones el autor deja en claro que si bien las computadoras dan nuevas posibilidades, los docentes aún no las tienen incorporadas en las clases de matemáticas y se requiere reflexionar sobre ello. Al mismo tiempo asegura que trabajar con diferentes representaciones y relacionarlas entre sí se considera como un elemento básico de una enseñanza significativa y el aprendizaje de las funciones. El software existente amplía la gama de operaciones que se pueden realizar con las funciones y permite a los aspectos geométricos cobrar mayor importancia.

## MARCO CONCEPTUAL

Como se mencionó, el propósito de esta investigación fue el diseño de una secuencia didáctica en GeoGebra para el estudio de las siguientes nociones relacionadas al concepto de función:

• Introducción del concepto de grafico de una función, en particular de funciones polinomicas de primer y segundo grado.

• Relación entre los distintos registros; algebraico, geométrico y/o numérico (tabular)

A continuación se exponen algunos conceptos importantes que se tomaron en cuenta en su elaboración. En primer lugar se describen los principios relacionados con la actividad matemática de este trabajo en sí misma y en segundo lugar los relacionados con el uso de la tecnología en esta secuencia, especialmente el software GeoGebra.

## ACERCA DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

Conviene comenzar por destacar la importancia que tienen tanto la representación gráfica como la relación entre los distintos registros en el proceso de apropiación del concepto función. Como lo precisa Biehler (2005), la aritmetización y la formalización no son suficientes y es necesaria la incorporación de los aspectos geométricos y visuales del concepto que vamos a trabajar.

Los aspectos relacionados con la necesidad de que el alumno incorpore los distintos registros de representación de una función y la relación existente entre ellos desde un primer


ISBN 978-84-945722-3-4

acercamiento al tema se enmarcan en la teoría de representaciones semióticas de Duval. Entendiendo como representaciones semióticas a aquellas relacionadas con un sistema particular de signos y que pueden ser convertidas en otro sistema de representación (Duval, 1999). Propone que hay tres actividades cognitivas estrictamente relacionadas a los sistemas de representación semióticos:

La primera es, evidentemente, la formación de representaciones en un registro semiótico particular… Esta formación implica siempre una selección en el conjunto de los caracteres y de las determinaciones que constituyen lo que se 'quiere' representar. Las otras dos actividades están directamente ligadas a la propiedad fundamental de las representaciones semióticas: su transformabilidad en otras representaciones que conservan sea todo el contenido de la representación inicial, sea sólo una parte de ese contenido. Ahora bien, esta transformación no corresponde a la misma actividad cognitiva según que la transformación se haga al interior del mismo registro, al contrario, que consista en un cambio de registro. Hablaremos de 'tratamiento' cuando la transformación produce otra representación en el mismo registro. Y hablaremos de 'conversión' cuando la transformación produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial.

En Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui (2012) las autoras hacen referencia a lo necesario que se hace el trabajo con distintos registros y representaciones el trabajo con distintos registros semióticos y diferentes representaciones es indispensable para el aprendizaje de la matemática pero no es una tarea natural para los alumnos. Es aquí donde presentan las mayores dificultades. (p. 36)

## ACERCA DEL USO DE GEOGEBRA EN EL DISEÑO DE LA SECUENCIA

La utilización de un dispositivo tecnológico en la enseñanza de la matemática implica un replanteamiento de la clase tradicional (a lápiz y papel y pizarrón) pues genera nuevas situaciones, como el replanteamiento de las tareas asignadas a los estudiantes pues con el poder de representación y de cálculo de dispositivos tecnológicos como calculadoras o computadoras, las tareas tradicionales pueden dejar de tener sentido.

Zbiek, Heid, Blume y Dick (2007) discuten varios constructos teóricos producto de diversas investigaciones que involucran el uso de tecnología y que son usados para explicar ciertos fenómenos o para describir situaciones que ocurren en ellas; a continuación describiré algunos de los que hacemos uso. Uno de esos constructos es privilegiar el cual hace referencia


ISBN 978-84-945722-3-4

a las elecciones que los docentes realizan en relación a su uso de alguna tecnología en clase. Elegimos utilizar GeoGebra para abordar la temática sobre la que se desarrolla la secuencia de este trabajo porque consideramos que brinda mejores posibilidades que el trabajo con lápiz, papel y pizarra pues permite la fluidez representacional, la cual consideramos importante ya que puede permitir al estudiante el tránsito entre distintas sistemas de representación: el algebraico, el gráfico o el numérico, la cual es una idea en la que están basadas las actividades de la secuencia que se propone. El constructo fluidez representacional consiste en la posibilidad que tiene el estudiante de interactuar con la representación o con las distintas representaciones de una misma entidad matemática, extrayendo de ellas distintos significados.

También consideramos que GeoGebra es una herramienta cognitiva con alta fidelidad matemática. Las herramientas cognitivas, según Zbiek, Heid, Blume y Dick (2007) son aquellas tecnologías utilizadas para la actividad matemática tanto en la dimensión técnica como en la dimensión conceptual; este tipo de herramienta da evidencias observables a quien la está utilizando de las acciones que está realizando. Esto es importante ya que le permite al estudiante un mejor acercamiento a la tarea que está llevando a cabo pues le permite observar las representaciones gráficas de las funciones que opera y sus efectos en las representaciones algebraicas. En lo relativo a la alta fidelidad matemática y cognitiva.

Zbiek et. al (2007) señalaron:

> Entendiendo por fidelidad matemática, a la exactitud de la herramienta en relación a las propiedades matemáticas, convenciones y comportamientos mientras que por fidelidad cognitiva entenderemos la exactitud de la herramienta en relación a reflejar los proceso de pensamiento del alumno o decisiones estratégicas tomadas mientras realiza la actividad matemática. (p. 173)

## SECUENCIA DIDÁCTICA

Esta secuencia didáctica está formada por 4 actividades y tiene como objetivo que los alumnos comprendan y utilicen en distintos registros el hecho de que todos los puntos del gráfico de una función tienen como característica que su ordenada es el correspondiente de la abscisa en dicha función. Es de suma importancia que los alumnos tengan claro esta característica y que pueden manejarse con ella en los distintos registros en los que usualmente


ISBN 978-84-945722-3-4

se trabaja en matemática (tabular, gráfico y analítico), debido a que la información que podemos tener de una función puede venir dada en cualquiera de los mencionados registros y además poder relacionarlos sin dificultad da cuenta de un verdadero entendimiento del concepto.

Con la primera actividad se buscó que el alumno arribara a dicha conclusión, GeoGebra nos da la posibilidad de ir mostrando todos los cambios que se dan instantáneamente al variar el punto sobre el gráfico de la función. Es importante destacar que para esta primera actividad se decidió trabajar con una función lineal, por lo simple que es calcular los valores de "y" y eso evita que surjan dificultades o distracciones al objetivo de la actividad. En cuanto al trabajo que deben realizar los alumnos, ellos deben completar una tabla a partir de la cual deberán extraer sus conclusiones. Se esperaba que los alumnos completaran dicha tabla observando lo que se destaca en la animación de la actividad, aunque también podían utilizar algún otro tipo de recurso como la hoja de cálculo que el propio software ofrece o también realizando los cálculos necesarios dado que aparece la expresión analítica de la función con la que se está trabajando. Se buscó que en la primera actividad ya aparecieran los tres tipos de registros mencionados para que los alumnos los manejen con mayor naturalidad.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

**Actividad 1:** Abre el applet geogebra1 e inicia la animación. Detén y activa la animación varias veces para completar la siguiente tabla:

| Coordenadas del punto A | Valor de $x$ | Valor de $f(x)$ |
|---|---|---|
| (  ) | | |
| (  ) | | |
| (  ) | | |
| (  ) | | |
| (  ) | | |

a) ¿Qué relación hay entre las coordenadas del punto A y el par $x, f(x)$
b) ¿Sucede siempre lo mismo?
c) ¿Qué podemos concluir?

**Actividad 2:** Abre el archivo geogebra2. En el archivo puedes ver tres ventanas abiertas. La algebraica, donde aparece la expresión analítica de una función $f$, la gráfica, donde aparece la representación gráfica de la función y la hoja de cálculo donde tienes una tabla para completar.

Ingresa en la hoja de cálculo las coordenadas de 5 puntos que pertenezcan a la gráfica que aparece en la vista gráfica. Puedes corroborarlo creando una lista de puntos.

¿Cómo hiciste para determinar las coordenadas de esos puntos?

El punto (1,1) pertenece al gráfico? ¿Por qué?

Puedes decir las coordenadas de otro punto que no pertenezca al gráfico.

**Actividad 3:** Haciendo uso del gráfico que aparece en el archivo geogebra3, completa la siguiente tabla:

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| -3 | |
| | -10 |
| 0 | |
| | 0 |

**Actividad 4:** Haciendo uso del gráfico que aparece en el archivo geogebra4, completa la siguiente tabla:

| $x$ | $p(x)$ |
|---|---|
| -2 | |
| | 8 |
| -1 | |
| 0 | |
| | 0 |
| $\frac{3}{4}$ | |

La actividad 2 buscó que se trabajara desde el registro tabular para observar como esta información se registra en lo gráfico, aunque también se les dió el apoyo de la expresión analítica. En esta actividad es fundamental el hecho de que usemos un software como GeoGebra ya que le muestra al alumno la misma información en tres registros al mismo tiempo. En una primera instancia los alumnos debieron ingresar una lista de pares ordenados de la forma (x,f(x)) y a medida que lo hicieron seleccionaron la herramienta indicada para que el programa los representara gráficamente. Así pudieron observar que estos puntos quedan contenidos en el gráfico dado de f(x).

En una segunda instancia debieron explicar cómo hicieron para encontrar el par coordenadas que ingresaron. Esto buscó conocer cuál fue el camino que siguió cada uno de los alumnos. Finalmente en una tercera instancia debieron responder y justificar si un punto dado pertenecía o no al gráfico y señalar las coordenadas de un punto que no pertenezca al gráfico.


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Esta etapa de la actividad buscó permitirle a los alumnos trabajar de manera más libre en cuanto al registro que quieran usar y darles así la posibilidad de elegir ellos en cuál querían trabajar y que así se dieran cuenta que en este caso es indiferente el que ellos usen.

En cuanto a las siguientes dos actividades si bien son muy similares se diferencian en su grado de dificultad. El objetivo de ambas es que los alumnos pongan en juego lo concluido en las actividades anteriores y permita al docente tener una idea clara de cómo el alumno va incorporando lo trabajado anteriormente. En ambas actividades haciendo uso del gráfico de una función debe completar una tabla donde aparecen algunos valores ya sea de imágenes o preimagenes asociadas a dicha función.

Se esperaba que el alumno reconociera que estos valores dados en las tablas correspondían a la abscisa u ordenada, según el caso, de puntos en el gráfico de la función. También debía reconocer en cuál de los ejes se ubica el valor dado y en cuál el desconocido. Trabajando así con ambos registros de forma permanente. En la primera de estas dos actividades aparece la cuadrícula en la zona gráfica para brindarle un apoyo al estudiante, pero en la segunda no aparece y es por esto que aumenta la dificultad. Es esperable que dado el hecho de que no se cuente con la cuadrícula el alumno tenga que trabajar con otros aspectos como lo son las rectas paralelas a los correspondientes ejes. Aquí se podía utilizar las herramientas del software (recta paralela, recta perpendicular) para dar mayor precisión que si se trabajaba con lápiz, regla y papel. Suponiendo que el alumno cuenta con el valor de x y debe completar el valor de su imagen, lo deseable era que el alumno trazara, haciendo uso de las herramientas de GeoGebra, una recta perpendicular al eje Ox por el punto (x,0) y luego usando intersección ubicara el punto del gráfico con dicha abscisa, para luego tomar una de las siguientes posibles decisiones, o bien trazar una recta perpendicular a la anterior para ubicar el punto de coordenadas (0,f(x)) o atendiendo a lo que sucede en la vista algebraica observe las coordenadas del punto indicado en el gráfico al usar la herramienta intersección.

## COMENTARIOS FINALES

La secuencia fue aplicada a 51 estudiantes de 2° Año de Ciclo Básico de Educación Secundaria de Uruguay (de entre 12 y 13 años de edad). En general consideramos que la secuencia elaborada cumple con el objetivo de que los alumnos trabajen con más de un registro de manera simultánea comprendiendo durante la realización de la misma la



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

interconexión existente entre los mismos. Esto queda en evidencia a la hora de analizar las respuestas.

Tener presente que el concepto de función puede ser representado en distintos sistemas semióticos y que cada uno de ellos acarrea su dificultad, así como también el cambio de uno de esos sistemas a otro, fue de suma importancia durante la elaboración de la secuencia como durante la aplicación de la misma. Durante la elaboración porque provocó la búsqueda de actividades en las que además de considerar cada uno de los sistemas que se estaban utilizando los alumnos también tuviesen que cambiar de sistema y durante la realización porque implicó prestar atención a que los alumnos estuviesen comprendiendo que se trataba del mismo concepto matemático pero en distintas formas de representación. Buscando que se den tanto la formación como la transformación de representaciones. La formación de representaciones en un sistema en particular, en este caso el gráfico de la función, transformación desde el punto de vista de la conversión de un sistema a otro, en este caso del algebraico al gráfico, del tabular al gráfico o del gráfico al tabular.

**Referencias bibliográficas**

Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task: the concept of function as an example. En J. Kilpatrick et al (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61-81). USA: Springer.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano.* Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Leinhardt, G. et al (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Task, Learning and Teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Zbiek, R. et al (2007). Research on technology in mathematics education. A Perspective of Constructs. En F. K. Lester, Jr (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1169-1207). USA: IAP.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.156

# ANALIZANDO EL RECONOCIMIENTO DE GRAFOS A TRAVÉS DEL MODELO DE VAN HIELE

A. González – J.M. Gavilán-Izquierdo
gonzalezh@us.es – gavilan@us.es
Universidad de Sevilla, España

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: CB
Nivel educativo: 7 no específico
Palabras clave: Teoría de Grafos, Modelo de van Hiele

**Resumen**
*En este trabajo, estudiamos la evolución del proceso de reconocimiento en el campo de la Teoría de Grafos desde la perspectiva del modelo de van Hiele. Así como Gutiérrez y Jaime (1998) plantean dos niveles para este proceso en el área de Geometría (primero visual, y después a través de propiedades), nosotros proponemos además un tercer nivel donde los estudiantes reconocen relaciones entre propiedades y las posibles traslaciones entre modos de representación de grafos. Además, otra diferencia importante con respecto al caso geométrico es que los estudiantes en el primer nivel pueden reconocer toda una serie de propiedades globales de los grafos, pues para figuras geométricas éstas son básicamente el número de vértices y de lados.*

## Introducción

La enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en los niveles universitarios es un área de interés de la investigación en Educación Matemática desde trabajos pioneros como el de Holton (2001) hasta la actualidad, que cuenta con congresos específicos como el INDRUM (First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics). Entre los temas que son emergentes está la Matemática Discreta, que se ocupa del estudio de estructuras basadas en conjuntos discretos (finitos o infinitos numerables), como por ejemplo, los números enteros, los grafos y los códigos, que son fundamentales en el desarrollo de disciplinas tales como las Ciencias de la Computación, entre otras.

Los grafos son habitualmente representados como puntos en el plano unidos por segmentos, lo cual nos permite un primer acercamiento a los mismos como figuras geométricas. Por ello, el modelo de van Hiele es un buen candidato para indagar en la comprensión del concepto de grafo. Otros autores han considerado también este modelo de van Hiele en campos

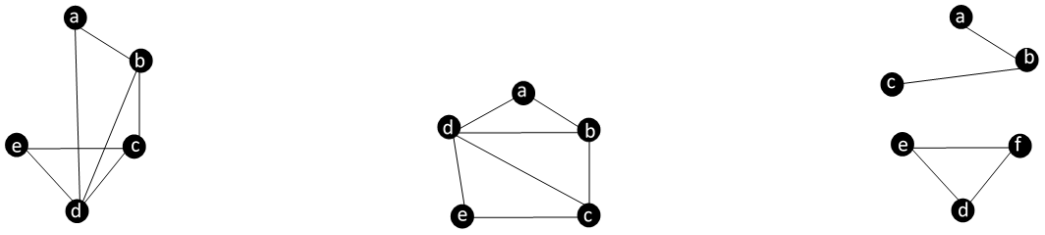

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

distintos de la Geometría; por ejemplo, Llorens (1994) lo extiende al concepto de aproximación local.

Gutiérrez y Jaime (1998) consideran en los niveles de razonamiento de van Hiele en Geometría cinco procesos de razonamiento: reconocimiento, formulación de definiciones, uso de definiciones, clasificación y demostración. En este trabajo, nos centramos en el proceso de reconocimiento de grafos, para lo cual haremos primeramente una breve introducción con los rudimentos básicos de la Teoría de Grafos, seguido de una caracterización general de los niveles de van Hiele para esta área, y finalmente describiremos la evolución del proceso de reconocimiento a lo largo de estos niveles.

**Un poco de Teoría de Grafos**

Un **grafo** $G$ es un par $(V,E)$ donde $V$ es un conjunto (denominado conjunto de **vértices)** y $E$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices de $V$ (llamado conjunto de **aristas**). Para representar un grafo podemos, por ejemplo, dibujar sus vértices como puntos en el plano y sus aristas como segmentos (no necesariamente rectilíneos) que van de un punto a otro (**representación pictórica)**. Una representación de este tipo para el grafo $G=(\{a,b,c,d,e\},\{ab,ad,bc,bd,cd,ce,de\})$ viene dada en la Figura 1(a), la no es única, como ilustra la Figura 1(b), donde el grafo $G$ viene representado ahora sin cruces entre aristas. (En general, diremos que un grafo es **plano** si existe alguna representación pictórica del mismo sin cruces entre sus aristas.) Dos vértices $u,v\in V$ son **vecinos o adyacentes** si están unidos por una arista, es decir, si $uv\in E$; el **grado** de un vértice $u\in V$ es el número de vecinos que tiene $u$ en $G$. (En el ejemplo de la Figura 1(a), el vértice $a$ tiene grado 2, mientras que el vértice $d$ tiene grado 4.) Decimos que $G$ es **conexo** si todo par de vértices $u,v\in V$ está conectado por una secuencia de vértices interconectados por aristas. Por ejemplo, el grafo $H=(\{a,b,c,d,ef\},\{ab,bc,de,df,ef\})$ (ver Figura 1(c)) no es conexo ya que, por ejemplo, los vértices $a$ y $d$ no están interconectados.




(a) (b) (c)



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 1.

Existen familias de grafos clásicas como son los **grafos completos**, que son aquellos tales que todos sus vértices están unidos por una arista; los **ciclos**, que son aquellos grafos conexos tales que todos sus vértices tienen grado 2; y los **caminos**, que son grafos conexos con todos sus vértices de grado 2, salvo dos de ellos, con grado 1. Las Figuras 2(a), 2(b) y 2(c) muestran el grafo completo de 5 vértices, el ciclo de 8 vértices y el camino de 6 vértices, respectivamente.

Un grafo $H=(V',E')$ se dice **subgrafo** de otro grafo $G=(V,E)$ si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. Así, podemos presentar otra familia clásica de grafos como son los denominados **árboles**, que son grafos conexos tales que ninguno de sus subgrafos es un ciclo (ver un ejemplo en la Figura 2(d)). Claramente, la clase de los caminos está incluida en la de los árboles.

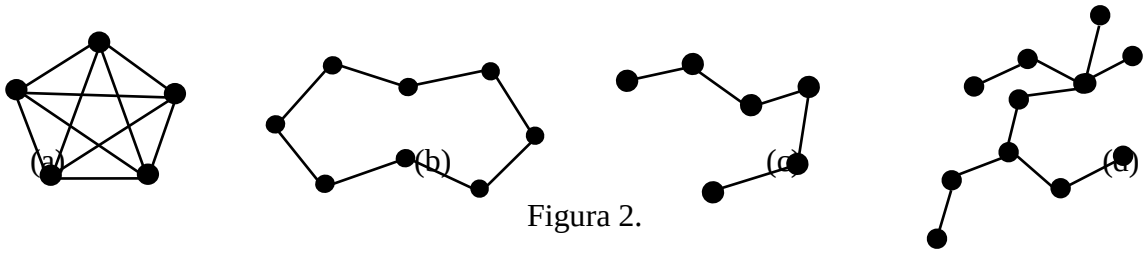


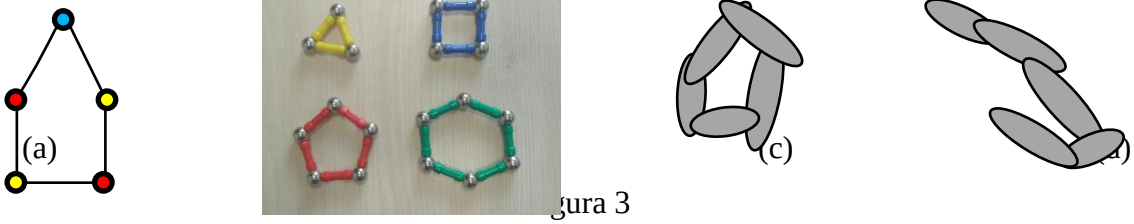

Figura 2.

Un problema muy estudiado de la Teoría de Grafos que tiene múltiples aplicaciones en otras áreas es el coloreado de vértices. Formalmente, **colorear** los vértices de un grafo $G$ con $k$ colores consiste en asignar un elemento de $\{1,2,\ldots,k\}$ (que llamamos conjunto de colores) a cada vértice de $G$ de modo que dos vértices adyacentes no tengan el mismo color; el mínimo $k$ tal que esto es posible se denomina **número cromático** de $G$. La Figura 3(a) muestra una coloración con 3 colores (que es el mínimo posible) del ciclo de 5 vértices.

Por otra parte, es preciso mencionar que existen diferentes modos de **representación de grafos** además de la representación pictórica, cuyos usos pueden convenir según el problema a considerar. Por ejemplo, en la Figura 3(b) se da una representación de los ciclos de 3, 4, 5 y 6 vértices mediante **materiales manipulativos**, de manera que las canicas de acero hacen el papel de los vértices y las barras imantadas representan a las aristas. Otro modo de representación interesante es mediante **intersección de objetos**, que consiste en representar los vértices de un grafo como objetos geométricos en el plano, de manera que las aristas del mismo vienen dadas por pares de objetos geométricos con intersección no vacía. Las Figuras


ISBN 978-84-945722-3-4

3(c) y 3(d) muestran dos representaciones de este tipo para el ciclo y el camino de 5 vértices, respectivamente.




gura 3

**El modelo de van Hiele para la Teoría de Grafos**

El **nivel 1** que proponemos, al igual que en Geometría, está basado en el reconocimiento visual, de manera que no hay aun conciencia de las partes que conforman los grafos (salvo vértices y aristas) ni existe la capacidad de pasar de un modo de representación a otro. Una diferencia importante con respecto al caso geométrico es que, como veremos a continuación, los estudiantes de este nivel pueden reconocer toda una serie de propiedades globales de los grafos, lo cual no ocurre con las figuras geométricas, que básicamente cuentan con el número de vértices y el número de lados como parámetros globales. Algo también característico de este nivel es que los estudiantes, además de formular definiciones con un lenguaje no matemático, pueden hacer uso de ciertas descripciones sencillas como la de coloración, pues esta no requiere del conocimiento de las partes del grafo salvo los vértices y sus adyacencias. En el **nivel 2,** los estudiantes perfeccionan su manera de razonar al reconocer los subgrafos de los grafos y sus propiedades locales, usando estas como herramientas para construir definiciones con un lenguaje más propio de la Matemática. Aunque de manera limitada, los alumnos de este nivel pueden realizar algunas traslaciones entre modos de representación de los grafos. Llegados al **nivel 3**, los alumnos reconocen, además de propiedades de los grafos, las relaciones que existen entre ellas, pues alcanzar este nivel supone un avance en el uso de la lógica matemática (aunque de manera aún informal), el cual les permite dominar completamente las traslaciones entre los distintos modos de representar un grafo. Como ocurría en el caso geométrico, los alumnos son capaces de formular definiciones de manera precisa, así como de hacer clasificaciones inclusivas de los diferentes tipos de grafos en base a propiedades. El **nivel 4** supone el máximo grado de habilidad de razonamiento sobre grafos, caracterizado por un uso de la lógica que les permite a los alumnos poder realizar demostraciones formales y comprender la equivalencia de definiciones.


ISBN 978-84-945722-3-4

El modelo que hemos planteamos para la Teoría de Grafos cumple los requisitos del modelo de van Hiele: secuencialidad fija, adyacencia, distinción, separación, especificidad del lenguaje, y consecución. Por cuestiones de espacio, no desarrollamos esta cuestión que requeriría una caracterización más extensa que la que hemos aportado arriba de cada uno de los niveles.

**El reconocimiento en el nivel 1**

Los estudiantes son capaces de **reconocer los grafos por el aspecto visual** en que se les han presentado, percibiéndolos como unidades, de manera que los únicos elementos que pueden reconocer son vértices y aristas, cuya apariencia suele ser significativamente distinta en cualquier modo de representación (pictórico, material concreto, intersección de objetos, etc...). En el caso de que los alumnos reconozcan distintos tipos de representación para grafos, estos **no tienen aún la capacidad para pasar de un modo a otro** debido a que el reconocimiento en este nivel es puramente visual, y dos modos de representación distintos pueden tener apariencias de lo más dispar.

Una vez adquirido completamente este nivel reconocerán cualquier representación (del tipo que hayan aprendido) para un mismo grafo, pero siempre en función del aspecto visual. Por ejemplo, si los alumnos están familiarizados con la representación pictórica, dada la representación de un grafo, se dan cuenta de que cualquier deformación continua de la misma (como figura geométrica) representa también al mismo grafo (ver Figuras 1(a) y 1(b)). Es preciso destacar que este fenómeno puede verse como generalización de lo que ocurre en Geometría plana, donde las deformaciones continuas que se pueden aplican a las figuras están restringidas exclusivamente al caso de movimientos.

Esta capacidad de reconocimiento hace que los estudiantes de nivel 1 **pueden identificar algunas familias** de grafos que son fácilmente reconocibles por su aspecto visual (caminos, ciclos, algunos grafos completos, etc…) con independencia de la representación dada. Sin embargo, en el caso de familias más complejas, como los árboles, los estudiantes reconocerán aquellos que se parezcan a las representaciones prototípicas que se les haya presentado, pues la diversidad de aspectos con la que cuenta esta clase de grafos hace que sean muchos los casos en que estos no puedan ser reconocidos como tal en este nivel. Ello es debido a que esta familia está definida en función de propiedades locales, las cuales no podrán reconocerse hasta el nivel 2.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Una diferencia importante entre el modelo de van Hiele para Geometría y el que proponemos aquí para la Teoría de Grafos, es que ya en el nivel 1 **pueden reconocerse parcialmente algunas propiedades globales de los grafos**. Nótese que las únicas propiedades globales de las figuras geométricas son básicamente el número de vértices y el número de lados, en contraste con el amplio abanico de propiedades globales que pueden identificarse visualmente en los grafos, como la conectividad o la planaridad. Efectivamente, los estudiantes pueden reconocer visualmente la conectividad de un grafo, pues probablemente estos la entiendan como ser (o no) "de una sola pieza"; y lo mismo ocurre con la planaridad, que puede ser percibida como la capacidad para "deformarse" hasta perder los cruces entre aristas. Sin embargo, este reconocimiento es solo parcial, pues posiblemente no sean capaces de reconocer estas propiedades en ejemplos con un número elevado de vértices y aristas, para lo cual requerirán del uso de propiedades locales de los grafos (nivel 2) o incluso relaciones entre las mismas (nivel 3).

**El reconocimiento en el nivel 2**

Los estudiantes **reconocen los subgrafos** de un grafo, y por tanto las **propiedades locales** del mismo que están basadas en este concepto, como por ejemplo el número de ciclos que pasan por cada vértice. Además, en este nivel **el reconocimiento visual de propiedades globales se perfecciona** a un reconocimiento más complejo, a través de propiedades locales del grafo (lo cual es novedoso con respecto al caso geométrico). Por ejemplo, en el caso de la conectividad, que en el nivel 1 se percibía con la idea de "ser de una sola pieza", ahora se ve además como la propiedad de que dos vértices cualesquiera estén conectados por algún subgrafo camino. Más aun, se **reconocen nuevas familias de grafos**, como por ejemplo los árboles, cuyo reconocimiento era solo parcial en el nivel 1.

Suponiendo que reconozcan distintas formas de representar grafos, como por ejemplo la pictórica y la intersección de objetos geométricos, su **capacidad de trasladarse de un modo a otro será solamente parcial.** Por ejemplo, pueden reconocer la representación del ciclo de cinco vértices como intersección de objetos (ver Figura 3(c)) trasladándola al modo pictórico, pero es posible que no entiendan que no todo grafo puede representarse de la primera forma (pues solo es posible para grafos planos), o sea que la relación entre un tipo de representación y otro no es bilateral. Ello es debido a que en este nivel, el manejo de la lógica proposicional es muy limitado, al igual que ocurre en el caso geométrico.


ISBN 978-84-945722-3-4

**El reconocimiento en el nivel 3**

Los estudiantes **reconocen relaciones entre propiedades** de los grafos, como por ejemplo: si un grafo es plano entonces no contiene al grafo completo de cinco vértices como subgrafo. (A partir de aquí ya pueden deducir que ningún grafo completo con más de cuatro vértices es plano.) También, la mejor comprensión de la lógica proposicional que se da en este nivel les permite comprender que los subgrafos heredan algunas propiedades o relaciones de los grafos de los que provienen, como ocurre por ejemplo con las coloraciones: si un grafo puede colorearse con *k* colores, entonces cualquiera de sus subgrafos también puede colorearse con estos colores.

En caso de que los alumnos hayan aprendido más de una manera de representar grafos, estos son capaces de **trasladarse de un modo de representación a otro**, entendiendo las relaciones entre los mismos (o sea, que no todo grafo admite representaciones en un determinado modo). Es preciso remarcar que un alumno que no sea capaz de reconocer un grafo en una determinada forma de representación no necesariamente tiene que pertenecer al nivel 2, pues podría ocurrir que no hubiera aprendido esa forma de representar grafos. Lo que es útil para discriminar entre los niveles 2 y 3 es que, una vez introducido un nuevo modo de representación de grafos, el alumno sea capaz de trasladarlo a otras formas de representación conocidas (caso de ser posible).

De nuevo, encontramos aquí una diferencia notable con respecto al proceso de reconocimiento en Geometría plana que plantean Gutiérrez y Jaime (1998), pues estos autores proponen el reconocimiento a través de propiedades (nivel 2) como máximo grado de adquisición de este proceso. Sin embargo, creemos que el reconocimiento de las relaciones entre propiedades de grafos y las posibles traslaciones entre modos de representación suponen un paso más en este proceso y que por tanto ayuda a discriminar entre los niveles 2 y 3. Los alumnos de nivel 3 han alcanzado el mayor grado de habilidad de reconocimiento, por lo que **este proceso no serviría para discriminar entre alumnos de los niveles 3 y 4.**

**Conclusiones**

En este trabajo, hemos descrito la evolución que sigue el proceso de reconocimiento de grafos a través de los niveles de van Hiele. Nuestro estudio nos permitirá diseñar trayectorias de aprendizaje de la Teoría de Grafos de la misma manera que lo hacen Jaime y Gutiérrez



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

(1990). En efecto, estos autores describen una segunda parte del modelo de van Hiele conocida como fases de aprendizaje, que proporcionan indicaciones sobre la graduación y organización de las actividades para ayudar a los estudiantes a ascender a un nivel superior de razonamiento. Creemos que la elaboración de estas fases es la continuación natural de nuestro estudio y que será de gran utilidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje tanto en niveles universitarios como en no universitarios.

**Referencias bibliográficas**

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. Focus on Learning Problems in Mathematics, 20 (2/3), 27-46.

Holton, D., (2001). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level, an ICMI Study*. Kluwer Academic.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), Teoría y práctica en educación matemática, pp. 295-384. Sevilla: Alfar.

Llorens, J.L. (1994). *Aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local.* Universidad Politécnica de Valencia.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.157

# ¿QUÉ MOTIVÓ A UN GRUPO DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS A ELEGIR LA DOCENCIA?

Antonio Villarruel — Juan Gabriel Molina — Alejandro Rosas
villarruel@outlook.com – jmolinaz@ipn.mx – alerosas@ipn.mx

Instituto Politécnico Nacional. Cicata-Legaria. México.

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Profesorado
Palabras clave: profesor de matemáticas, elección de profesión, motivos, factores

**Resumen**
*El presente trabajo tuvo como propósito investigar cuáles han sido los motivos o factores que llevaron a un grupo de profesores de Matemáticas a elegir la docencia. Por medio de la plataforma virtual Moodle se cuestionó a un grupo de docentes de Matemáticas acerca de ello. Las características que poseían los encuestados en relación a su práctica docente fueron ampliamente variadas: años de servicio magisterial, el nivel educativo, materias que imparten, estudios universitarios cursados e incluso su lugar de residencia. En la investigación colaboraron docentes de México y algunos de países como Colombia, Ecuador, Uruguay. A través de un cuestionario e interactuando con los profesores en un foro se exploraron cuáles fueron las razones por las que eligieron ser docentes de matemáticas; durante el análisis y procesamiento de la información se logró establecer una categorización de los motivos que originaron su ingreso a la docencia y los que más destacaron fueron: Gusto o habilidad en las matemáticas, 2) Gusto por la docencia y 3) Deseo de ayudar o contribuir en la sociedad.*

## Introducción

En esta investigación se indagó sobre cuáles fueron los motivos o factores que llevaron a los profesores de matemáticas que participaron en el estudio a elegir dicha profesión. Consideramos fundamental el conocer si los motivos referidos por los docentes porque en los últimos años la cantidad de aspirantes a las escuelas normales en México han ido en decremento (Méndez del Ángel, 2016; Navarro, 2015; Thomas, 2016; Vinagre, 2016). De acuerdo a información oficial (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación [INEE], 2015):



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En las normales públicas sólo 72.6% de los lugares disponibles fueron ocupados, y este porcentaje fue mucho menor en las normales privadas (52.4%)… en Baja California, Chiapas y Nuevo León alrededor de la mitad de los lugares ofertados por sus normales públicas quedaron vacíos. En las normales de sostenimiento privado los problemas de ocupación son mayores. En Oaxaca las dos normales privadas registran 145 lugares disponibles, 100 solicitudes, pero ningún alumno de primer ingreso. En Campeche, sólo 22.2% de los lugares disponibles se aprovechó, mientras que en cuatro entidades la ocupación fue menor a 40%: Sinaloa (30.8%), Distrito Federal (35.6%), Guerrero (38.8%) y Morelos (39.2%). Información proporcionada por las autoridades educativas de 13 entidades federativas sobre el número de solicitudes registradas en el ciclo escolar 2014-2015 permite prever una reducción importante (cercana a 30%) en el número de aspirantes a ingresar a la educación normal. (p. 99-101)

Lo señalado podría ser resultado de las reformas constitucionales que se han promulgado en materia de educación en México y el criminalizar en los medios de comunicación a los profesores por su protesta en contra de las imposiciones del Gobierno. Para los programas de formación de profesores, como es el caso de la Maestría en Ciencias en Matemática Educativa del Instituto Politécnico Nacional, resulta interesante investigar la razón del ingreso al servicio docente de profesores de matemáticas pues podría aportar información que ayude a pensar soluciones a los problemas que se enfrentan diariamente los institutos formadores de profesores. En la investigación realizada por Crespo, Homilka y Lestón (2013) se expone como utilidad de su investigación:

Estamos intentando hacer aportes locales a una realidad que enfrentamos de modo cotidiano y que exige que se actúe prontamente para la superación de las dificultades que vemos en las aulas. Sin embargo, es necesario dar evidencias de esas dificultades, para poder transmitir a quienes toman finalmente las decisiones sobre nuestras instituciones… En ese trabajo, se llega a algunas conclusiones que permiten comprender cómo las experiencias, y en particular esas primeras experiencias, son determinantes en la construcción del rol docente. (p. 1776)

Otros resultados encontrados en trabajos previos también han sido utilizados para implementar estrategias que permitan alcanzar los resultados buscados en los programas de


ISBN 978-84-945722-3-4

actualización y permanencia docentes. Bastick (2000) señala que existen diferencias en el tipo de motivos que llevan a profesores de países desarrollados a elegir su profesión respecto a sus colegas de países en vías de desarrollo; este argumento originó que el autor concluyera que estas diferencias encontradas constituían un "factor relevante para los resultados exitosos de los programas de asistencia para el suministro, permanencia y actualización del personal docente en los países del tercer mundo". (p. 347).

Por otra parte, también buscamos impulsar el desarrollo de investigaciones en nuestra región acerca de este planteamiento pues las investigaciones al respecto fueron hechas con profesores de otras partes del mundo pues es interesante conocer qué pasa con profesores de Latinoamérica.

**Revisión de literatura y su rol en la investigación**

La revisión de investigaciones que se han llevado a cabo respecto a las motivaciones que llevaron a los profesores de matemáticas para elegir su profesión permitió conocer los propósitos por las cuales se han realizado estas, las metodologías que fueron empleadas, los lugares del mundo en las que se han aplicado y sobretodo, los hallazgos reportados.

Andrews y Hatch (2002)

En este estudio se exhiben los motivos que influenciaron a los profesores de educación secundaria a tomar la decisión de elegir la profesión docente. La investigación fue realizada a 45 profesores de matemáticas de nivel secundaria de dos regiones de Inglaterra, durante el periodo de 1997 a 1999, mediante entrevistas semiestructuradas con el objeto de discutir sus motivos y conocer las justificaciones de haberse dedicado a la docencia. La importancia de realizar este tipo de estudios es que permiten "facilitar el análisis y crítica de las iniciativas gubernamentales y organismos paraestatales". (2002, p. 187)

Respecto a los resultados obtenidos, en una primera instancia al clasificar cada uno de los motivos señalados por los docentes se determinaron 88 categorías, para posteriormente en un segundo análisis englobar dichos motivos en 5 categorías:



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

I. Consecuencia de sus experiencias como estudiantes de matemáticas. Pudiendo éstas ser agradables o desagradables, y en la mayoría de ellas centradas en lo afectivo más que en los dominios cognitivos o intelectuales.

II. Deseo de trabajar con gente. Para uno de cada tres encuestados, el trabajar con gente e influir en su vida es considerado un motivo profesional muy importante.

III. Sentido de inevitabilidad. Esta categoría considera que la enseñanza ocurrió por situaciones inevitables y en gran parte por circunstancias que el individuo no pudo controlar.

IV. Eventos de serendipia. Casi el 40% de los encuestados señaló que ingresaron a la enseñanza como consecuencia de algún acontecimiento imprevisto u acto irreflexivo.

V. Deseo o necesidad de cambiar de trabajo. La decisión de ser docente se produjo debido al deseo o necesidad de cambiar de trabajo o bien, por la falta de empleo.

Dawson (2007)

Ante una supuesta escasez de profesores calificados de matemáticas y ciencias, la investigación reporta los resultados alcanzados tras aplicar una encuesta a profesores de educación secundaria de dichas materias en Australia. El objetivo de dicha investigación era determinar los factores que motivaron a los estudiantes universitarios a elegir a la enseñanza de estas materias como su profesión laboral.

El estudio consistió en realizar una encuesta escrita a 150 maestros en pre-servicio para la enseñanza de educación secundaria de las materias de ciencias y matemáticas en 5 universidades del poniente de Australia, los entrevistados fueron 76 estudiantes del diplomado en educación (con duración de 1 año), así como 74 estudiantes del doble grado en ciencia y educación (con duración de 4 años). La encuesta consistió en 5 preguntas abiertas (las cuales fueron contestadas de manera anónima) en las que en primera instancia, se les cuestionó a los profesores el por qué habían elegido estudiar para ser docentes, para posteriormente preguntarles específicamente por qué se habían inclinado por la docencia de las matemáticas y las ciencias en su formación universitaria. Los resultados que arroja el estudio señalan que el 36% de éstos decidieron hacerlo por razones altruistas, al querer marcar una diferencia en las vidas de la gente joven, esta motivación está directamente relacionada con el gusto de trabajar con jóvenes, la cual fue señalada por el 25% de los encuestados. Por otra parte, el 26% señaló como motivo las buenas condiciones de trabajo con las que cuentan los docentes, al respecto Dawson (2007) señala lo siguiente: Aunque hay


ISBN 978-84-945722-3-4

descontento en la profesión de enseñar con respecto a los salarios y condiciones, muchos profesores en pre-servicio indicaron que la enseñanza es una profesión con buenas condiciones de trabajo, tales como vacaciones, salario, opciones para viajar, condiciones de trabajo favorables para la familia y la opción de trabajar en zonas rurales. (p. 30).

Otros de los factores que fueron señalados por los encuestados están el amor por las matemáticas/ciencias (21%), percepción de ser buenos maestros basados en experiencias previas (20%), apreciar el conocimiento/educación (15%) y haber tenido un buen maestro de matemáticas/ciencias (13%).

Con respecto a la pregunta específica del por qué se habían inclinado a ser docentes de las materias de matemáticas o ciencias, sorprendentemente el 63% de los encuestados mencionó el amor que le tiene a estas disciplinas, mientras que el 17% refirió los triunfos previos que habían tenido en estas áreas, también el 17% mencionó como motivo el tener un grado en ciencias, el 10% señaló que el haber tenido un buen maestro de matemáticas/ciencias fue una de sus principales motivaciones, por último el 9% mencionó como factor la escasez de profesores en estas disciplinas.

Crespo, Homilka y Lestón (2013)

Esta investigación se llevó a cabo en dos escuelas normales de la ciudad de Buenos Aires, Argentina con el objetivo de averiguar las razones por las cuales los estudiantes del profesorado en Matemática decidieron elegir esta carrera y sus expectativas en la formación que esperan recibir. Los resultados que arrojan estas investigaciones fueron clasificados en grupos de acuerdo al grado de avance en su formación docente. En los tres grupos se encontraron como factores el gusto por la práctica de la matemática y la habilidad para enseñar a otros temas que no fueron comprendidos. Otro de los motivos que fueron mencionados fueron las impresiones que tuvieron los encuestados de sus profesores previos, considerando tanto las experiencias positivas como negativas.

**Método**

El método que se utilizó fue semejante al empleado en las investigaciones consultadas: consistió en aplicar un cuestionario y después de analizar los resultados con base en ellos,


ISBN 978-84-945722-3-4

clasificarlos. El cuestionario está formado por las preguntas: 1) ¿En qué nivel o niveles educativos impartes clases actualmente?, 2) ¿Cuántos años llevas siendo docente? y 3) ¿Podrías señalar cuáles fueron los motivos o factores que te llevaron a convertirte en profesor de matemáticas?

Acerca de los profesores. El cuestionario de aplicó a 67 profesores de los cuales 51 eran de diferentes partes de México, 6 de Uruguay, 5 de Colombia, 3 de Ecuador, de Chile y otro de Argentina. De ellos 52.24% fueron hombres, mientras que el 47.76% fueron mujeres. Por otro lado, en relación a las edades de los entrevistados se puede señalar que el participante más joven contaba al momento de contestar la encuesta con 22 años de edad, mientras que el participante de mayor edad tenía 66 años, contando con una media aritmética en las edades de 35.72 años. Es necesario mencionar que de los encuestados solo el 29.85% realizaron estudios universitarios en áreas relacionadas con la docencia (por ejemplo, licenciatura en Educación, Pedagogía, Profesorado en Matemáticas, etc.), mientras que el 16.42% cursó alguna licenciatura relacionada directamente con las Matemáticas (licenciatura en Matemáticas o Físico Matemáticas).

Todos los profesores estaban tomando un curso propedéutico en línea porque eran aspirantes para estudiar la Maestría en Ciencias en Matemática Educativa del IPN y dentro de este curso fueron invitados a participar en el estudio.

**Clasificación de los datos y resultados**

Acerca de la clasificación de los datos. En los trabajos consultados en la revisión de literatura se observó que con los datos obtenidos los investigadores proponían categorías para mostrar sus resultados; en este trabajo se retomó esa idea y se propuso la siguiente clasificación con sus correspondientes resultados: 1) Factores relacionados con las matemáticas, como el gusto o habilidad por las matemáticas (74.63%). 2) Relacionados con la docencia, gusto por la docencia (71.64%), beneficios de ser docente (19.4%) e influencia de sus profesores o experiencias como estudiantes (35.82%). 3) Sociales, entran aquí factores como el gusto de trabajar con personas (23.88%) y el deseo de ayudar o contribuir en la sociedad (44.78%). 4)


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Relacionados a factores externos como un suceso inesperado (19.40%), insatisfacción con el empleo previo (20.90%), influencia de terceros (20.90%) y 5) Otros motivos (19.40%).

**Conclusiones**

Los factores que llevaron a que los profesores participantes en este estudio eligieran ser profesores de matemáticas son principalmente de naturaleza intrínseca y altruista pues en esta clasificación podríamos incluir los factores más mencionados (1, 2 y 3). De acuerdo con Moran et al. (2001), un motivo altruista presenta a la enseñanza como un acto social relacionado con el deseo de facilitar el desarrollo tanto del individuo como de la sociedad en general. Un motivo intrínseco incluye, entre otras cosas, el deseo de una persona de trabajar con niños, mientras que los motivos, por ejemplo, el salario, las condiciones de trabajo, las vacaciones o el estatus. (p. 17-32). No hubo diferencias destacables entre los profesores de los distintos países por ello no se comenta sobre ello. Los resultado coniciden con lo encontrado el al literatura, una diferencia que se apreció es que los factores extrínsecos no destacaron a pesar de que los países participantes son considerados en vías de desarrollo pues dentro de las investigaciones que se han realizado al respecto se ha reportado una aparente diferencia entre los motivos mencionados por los profesores de países desarrollados respecto a los señalados por docentes de países en vías de desarrollo; donde los primeros manifestaron un mayor número de motivaciones intrínsecas o altruistas en comparación con los últimos, que refirieron con mayor frecuencia factores extrínsecos como razones de su ingreso al servicio docente. (Bastick, 2000, p. 347).

**Referencias bibliográficas**

Andrews, P., & Hatch, G. (2002). Initial motivations of serving teachers of secondary mathematics. *Evaluation & Research in Education*, *16*(4), 185-201.

Bastick, T. (2000). Why teacher trainees choose the teaching profession: Comparing trainees in metropolitan and developing countries. *International Review of Education*, *46*(3), 343-349.


ISBN 978-84-945722-3-4

Crespo, C., Homilka, L., y Lestón, P. (2013). La elección de la carrera de profesorado de matemática: motivos y expectativas. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 26, pp. 1773-1782). México D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dawson, V. (2007). Factors influencing pre-service teachers' decisions to become secondary science and mathematics teachers. *Teaching Science: The Journal of the Australian Science Teachers Association*, *53*(4), 28-31.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2015). *Los docentes en México. Informe 2015*. México: Autor. Recuperado de http://www.inee.edu.mx/images/stories/2015/informe/Los_docentes_en_Mexico._Informe_2015_1.pdf

Moran, A., Kilpatrick, R., Abbott, L., Dallat, J., & McClune, B. (2001). Training to teach: Motivating factors and implications for recruitment. *Evaluation & Research in Education*, *15*(1), 17-32.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.158

# ENSINO DE MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL NO BRASIL: O QUE DIZEM AS PESQUISAS APRESENTADAS NO XII ENEM-2016

Julia de Cassia Pereira do Nascimento – Edda Curi

juliacpn@terra.com.br – edda.curi@gmail.com

Universidade Cruzeiro do Sul - Brasil

Núcleo temático: Núcleo 1. Ensino e aprendizagem da matemática nas diversas formas e níveis de educação.
Modalidade: CB
Nível educativo: 2. Primário (6 a 11 anos)
Palavras chave: Ensino e Aprendizagem de Matemática; Anos iniciais; Formação de Professores

## Resumo

*Este trabalho apresenta uma pesquisa de pós-doutorado em andamento, que busca identificar e analisar os temas, metodologias e aportes teóricos das produções relacionadas ao ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental e a formação de seus professores, apresentadas no XII ENEM-Encontro Nacional de Educação Matemática, realizado no Brasil em 2016. Utilizando a pesquisa documental e a metodologia de estado do conhecimento ou estado da arte, foi feito um recorte em 6 dos 25 eixos propostos no Encontro, analisando 205 trabalhos relacionados ao foco de nossa pesquisa. Para esta comunicação, delimitamos em 30 trabalhos do Eixo Concepções, Crenças e Atitudes em Educação Matemática. Leituras e análises iniciais revelam que apenas 5 deles tratam do ensino e aprendizagem de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A maior preocupação é com a formação do professor e sua prática no ensino de Matemática, não havendo concentração de temas. Esperamos apresentar à comunidade científica os temas mais pesquisados, as lacunas existentes, os desafios e possibilidades, atendendo à necessidade de melhoria no ensino e aprendizagem de Matemática, por meio do conhecimento e discussão sobre as concepções dos professores e formadores de professores que ensinam Matemática, nos diferentes contextos nos quais vivenciam suas práticas.*

## Introdução



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

A preocupação com o ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental e a formação de seus professores, motivou a pesquisa sobre as preocupações didáticas e pedagógicas dos professores que ensinam Matemática neste nível de ensino. Quais são as maiores dificuldades destes professores? Referem-se aos conteúdos? Às metodologias de ensino? Seriam somente alguns temas específicos nos quais os professores esbarram em seu ensino? Estas questões nos levaram à busca de produções acadêmicas e publicações, que nos auxiliassem a encontrar respostas e caminhos de fortalecimento para o ensino e aprendizagem de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A participação no XII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, realizado em 2016, na cidade de São Paulo - Brasil, nos mostrou um caminho de pesquisa fértil. Os participantes deste evento são professores formadores, pesquisadores, alunos de programas de pós-graduação e professores que ensinam Matemática em diferentes níveis de ensino.

Com o objetivo de apontar possíveis lacunas e perspectivas em relação aos temas e fundamentações teóricas mais recorrentes das pesquisas relacionadas ao ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, assim como dar continuidade às discussões propiciadas em nossa tese de doutorado, optamos por desenvolver uma pesquisa em nível de pós doutorado, com supervisão da Profª Dra. Edda Curi, direcionada para uma revisão documental, mapeando os trabalhos apresentados no referido encontro.

**Fundamentação teórica**

Nesta pesquisa pretendemos buscar fundamentação teórica para alcançar o objetivo proposto, com base em dois temas importantes: o ensino e a aprendizagem de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental e a formação de seus professores.

No âmbito da formação de professores, entendemos que este é um assunto recorrente entre os professores formadores e as Instituições de Ensino Superior – IES, por isso vários autores nos mostram que para cada disciplina existem saberes e conhecimentos específicos necessários para seu ensino, os quais devem ser desenvolvidos pelo professor.

Ao pensarmos na formação do professor, egresso do curso de Pedagogia, (uma vez que no Brasil este é o único curso que forma professores para atuarem nos anos iniciais do Ensino Fundamental) é necessário analisar e compreender a complexidade deste trabalho, visto que o professor deverá atuar no ensino de diferentes disciplinas, sem ser especialista em nenhuma


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

delas, sendo o ensino de Matemática uma grande preocupação dos formadores e dos professores.

Nesta pesquisa, para embasar teoricamente nossas considerações sobre os trabalhos analisados, conforme nossos objetivos estabelecidos, utilizaremos as contribuições de Curi (2005) e Serrazina (1999). Além disso, a partir das análises realizadas, na interpretação dos resultados obtidos, buscamos autores que pudessem trazer suporte à pesquisa e justificassem nossas colocações, colaborando na aquisição de novos conhecimentos que poderão ser ampliados na prática da sala de aula ou em pesquisas realizadas em sua formação continuada.

**Procedimentos metodológicos**

Para alcançar o objetivo proposto, foi escolhida a metodologia de pesquisa documental, analisando-se os trabalhos apresentados no XII ENEM-2016, sobre o tema proposto. Segundo Gil (2008) neste tipo de pesquisa analisam-se os documentos inéditos, assim como os que já foram analisados, mas são passíveis de novas interpretações, como é o caso das produções que se pretende aqui analisar.

Elegemos a metodologia do Estado da Arte ou Estado do Conhecimento para o desenvolvimento desta pesquisa, por entendermos que com sua adoção, poderemos mapear e levantar os temas discutidos nas Comunicações Científicas dos eixos escolhidos do XII ENEM, contribuindo para o aprofundamento destes temas, assim como dos referenciais teóricos adotados.

Segundo Romanowski & Ens (2006), este tipo de pesquisa pode mostrar tendências, evoluções, características, focos, referenciais teóricos, lacunas e contribuições para romper, ressignificar ou perpetuar com as pesquisas que abordam os temas há um determinado tempo. Para Fiorentini (1994, p.32) as pesquisas do tipo Estado da Arte ou Estado do Conhecimento "[...] procuram inventariar, sistematizar e avaliar a produção científica numa determinada área de conhecimento".

Para a categorização dos trabalhos, nos pautamos em Bardin (2007) com sua proposta de análise de conteúdo. Segundo a autora, a análise de conteúdo é um conjunto de técnicas de análise das comunicações, que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens. A autora propõe as seguintes etapas para a organização da análise de conteúdo: 1. Pré-análise; 2. Exploração do material e 3. Tratamento dos resultados obtidos e interpretação.


ISBN 978-84-945722-3-4

**Delimitando o foco da pesquisa**

Por se tratar de um congresso recente, entendemos que as informações levantadas nos trabalhos submetidos ao XII ENEM – 2016, podem mostrar as tendências de pesquisa e temas, em seus 25 eixos de submissões. (Anexo 1).

Para atender à nossa proposta, delimitamos nossa busca em todos os trabalhos apresentados na modalidade "Comunicação Científica", separando pelos eixos temáticos relacionados com o foco deste projeto. Neste primeiro passo, elegemos seis eixos, totalizando 202 trabalhos, que consideramos diretamente relacionados com o foco de nossa pesquisa. (Anexo 2).

**A análise dos dados**

Utilizamos os três procedimentos propostos por Bardin (2007), para analisar e categorizar as produções existentes sobre o tema, a fim de evidenciarmos a relevância da presente investigação. A seguir descrevemos cada passo da aplicação destes procedimentos.

**Pré-análise**

Bardin (2007) define a pré-análise como a fase que envolve a preparação do material e a leitura flutuante. Nesta fase houve o primeiro contato com os documentos escolhidos, com a coleta dos resumos nos anais do XII ENEM, a partir da pesquisa dos eixos escolhidos e a leitura dos mesmos, para encontrarmos os objetivos das pesquisas destes trabalhos, delimitando no objetivo de nossa investigação, tal seja o ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Para este artigo apresentamos um recorte nos trabalhos apresentados no Eixo 13, Concepções, Crenças e Atitudes em Educação Matemática, Esta escolha deve-se aos dados levantados em nossa tese de doutorado, que evidenciaram a influência das crenças e concepções das professoras acerca da Matemática em sua prática e ensino.

**Exploração dos resultados**

Neste eixo encontramos 30 trabalhos publicados nos anais do evento, como Comunicação Científica (Anexo 3).

Em um primeiro momento, para que pudéssemos passar à fase de exploração do material proposta por Bardin (2007) fizemos a leitura dos resumos, a fim de identificar os objetivos de cada trabalho, para podermos selecionar aqueles cujas pesquisas estavam direcionadas do 1º ao 5º do Ensino Fundamental. A partir das leituras dos 30 resumos de trabalhos analisados,


ISBN 978-84-945722-3-4

identificamos o nível e pesquisa realizada. Após, foi feita a leitura na íntegra dos trabalhos procurando referências ao ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Com isso, no eixo Concepções, Crenças e Atitudes em Educação Matemática, delimitamos nossa pesquisa em 5 trabalhos cujas pesquisas estão direcionadas do 1º ao 5º do Ensino Fundamental, uma vez que os demais trabalhos traziam temas que não se inseriam no foco de nossa pesquisa. (Anexo 4).

**Exploração do material**

Segundo Bardin (2007) esta fase envolve a administração sistemática dos rumos definidos pelo pesquisador, ou seja, momento em que se escolhem a unidade de registro e as categorias das análises.

Após a leitura flutuante, que nos permitiu encontrar os trabalhos objetos de nossas pesquisa, iniciamos a exploração do material, para levantarmos as tendências de pesquisa atuais, no que se refere ao ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Além disso, selecionamos também os conteúdos mais explorados e os autores que fundamentaram teoricamente estes trabalhos, a partir da leitura completa dos 5 trabalhos selecionados, cuja exploração dos resultados nos mostrou diferentes focos (Anexo 4).

A exploração dos materiais nos levou a uma delimitação maior dos trabalhos obtidos. Em virtude de nosso foco estar direcionado para o ensino de Matemática e portanto para a prática dos professores que atuam em sala de aula com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, entendemos que os trabalhos que fazem uma revisão bibliográfica, embora mostrem uma preocupação de seus autores com os conteúdos e a prática em sala de aula, não traduzem especificamente esta prática. Por isso selecionamos os trabalhos que discorrem sobre projetos ou pesquisas relacionadas e aplicadas diretamente com os alunos e professores, seja em sua formação ou em sua prática no ensino e aprendizagem em sala de aula. Por utilizarem esta metodologia, entendendo que os mesmos nos trarão mais subsídios para a análise da prática dos professores, foco de nossa pesquisa, analisamos dois trabalhos:

1. Almeida, D. M.; Pizaneschi, F. P. M. & Darsie, M. M. P..(2016). *O erro no processo de ensino e aprendizagem em Matemática: sua relação com as dificuldades de aprendizagem no contexto escolar.*
2. Tarouco, V. L.; Silva, G. P. & Silva A. C. (2016) *Marcas do ensino tradicional sobre a compreensão da operação de multiplicação em professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental.*

**Interpretação dos resultados**



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Esta fase, denominada por Bardin (2007) de tratamento dos resultados obtidos e interpretação, é a fase em que os dados são analisados e confrontados com as teorias que sustentam a pesquisa. Nesta fase mostramos a interpretação dos dados obtidos nos dois trabalhos selecionados, à luz das contribuições teóricas dos autores citados.

A preocupação do primeiro trabalho, estava na compreensão do significado dado pelo professor ao erro do aluno, e sua correlação com as dificuldades de aprendizagem no processo do ensino da matemática.

Os autores destacam que puderam verificar que as concepções dos professores participantes da pesquisa frente ao erro, em especial na disciplina de Matemática, têm se reconfigurado de modo a superar a visão negativa e contextual de insucesso, sendo que o erro é visto como uma pista para entender os caminhos que o aluno percorre para conhecer, devendo ser refletido junto aos alunos, para superar e avançar na aprendizagem.

Entendemos, assim como orientado nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN de Matemática (1997), que na aprendizagem o erro é inevitável e, cabe ao professor interpretá-lo como um caminho na busca do acerto. Quando por meio da observação e o diálogo, o professor consegue identificar como o aluno está pensando, poderá descobrir o que ele não está compreendendo e interferir para auxiliá-lo. Se o professor identifica a causa do erro, planeja a intervenção adequada para auxiliar o aluno a avaliar o caminho percorrido.

Assim também destaca Cury (2013), ao afirmar que o erro do aluno de alguma forma mostra um saber, construído de alguma forma mas ainda não elaborado um saber que ele possui, sendo necessário por parte do professor elaborar intervenções didáticas que desestabilizem suas certezas, levando-o a um questionamento sobre as suas respostas. Desta forma, a análise de erros se configura como uma metodologia de ensino, que a partir de atividades elaboradas em sala de aula permite que os erros dos alunos sejam explorados e aproveitados como ferramentas para a aprendizagem.

Para isso, entendemos que o professor deve ter não só o conhecimento matemático para ensinar, mas também saber como ensinar este conhecimento, a exemplo do que preconiza Ball (2008). A autora destaca que entende o conhecimento matemático para o ensino como aquele necessário para desenvolver o trabalho de ensinar Matemática. Importante notar novamente que sua definição ressalta o ensino, e não os professores. Sua preocupação volta-se para as tarefas envolvidas no ensino e nas demandas matemáticas dessas tarefas. Porque


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

segundo ela, ensinar Matemática envolve mostrar aos alunos como resolver problemas, responder às suas perguntas, e conferir os trabalhos destes alunos, o que exige uma compreensão do conteúdo do currículo escolar.

Já no segundo trabalho, o foco está em verificar se as práticas pedagógicas dos professores que ensinam Matemática são influenciadas por sua trajetória escolar, assim como de que forma essas práticas favorecem ou não o aprendizado efetivo do conhecimento matemático relativo à multiplicação. Percebemos que embora o foco seja o conteúdo da multiplicação, as maiores preocupações voltam-se para a influência das crenças dos profesores em seu ensino e consequente aprendizagem dos alunos.

As considerações dos autores mostram que as professoras tiveram sua trajetória escolar marcada pelo ensino tradicional, entretanto, segundo eles essas marcas estão se perdendo. Perceberam que as professoras que tiveram sua formação pautada nesse tipo de ensino, ainda hoje mostram algumas dessas marcas em sua atuação, como por exemplo, ao limitar as formas de pensar dos sujeitos, pois sua aprendizagem se deu em um ambiente em que era dada pouca ênfase aos processos que levassem a compreensão do objeto de estudo. Os autores indicam também que o ensino deve permitir que os alunos estabeleçam relações e, construir, através delas, as estruturas necessárias para dominar e agir frente ao conteúdo matemático.

De fato, as contribuições de Curi (2005) acerca das concepções e práticas dos professores indicam que a influência da trajetória pré-profissional em sua atuação docente, no caso dos conhecimentos para ensinar Matemática às crianças, estão muito ligadas aos mitos e medos que costumam estar atrelados à trajetória escolar de grande parte das pessoas. Assim também Serrazina (1999) destaca que os conhecimentos matemáticos dos professores que atuam nos anos iniciais, na maioria das vezes restringem-se aos conhecimentos que trazem de seus estudos na escola básica. Desta forma sofrem influências de suas crenças e concepções, na maneira como concebem a Matemática e seu ensino.

**Considerações Finais**

No que diz respeito ao nosso objetivo inicial, no mapeamento das preocupações didáticas e pedagógicas dos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, consideramos que o recorte feito no eixo 13 do XII ENEM/2016, nos trouxe algumas reflexões importantes.


ISBN 978-84-945722-3-4

Pudemos perceber que, neste eixo, as maiores dificuldades destes professores estão relacionadas à prática pedagógica e às metodologías de ensino, não tendo se destacado um conteúdo específico. Esperávamos que as preocupações dos profesores nos mostrassem fragilidades em algum conteúdo ou conhecimento matemático, porém isso não ocorreu.

Os trabalhos analisados após a delimitação feita, mostram dois temas que, a nosso ver são recorrentes: os erros dos alunos na aprendizagem matemática e as crenças ou concepções que as professoras trazem de sua formação e que se refletem em sua prática pedagógica.

No que diz respeito aos erros, é importante destacar que, se durante muito tempo foram fatores de exclusão em sala de aula, hoje, são instrumentos de reflexão e discussão, superando dúvidas e provendo avanços para professores e alunos. Cabe a nós professores, auxiliar na construção do conhecimento dos alunos, encorajando-os a pensar e refletir principalmente sobre seus insucessos, para que desenvolvam também a autoconfiança, autonomia e tenham sucesso no enfrentamento dos próprios erros.

Por outro lado, o professor poderá trabalhar o erro de forma construtiva, se não se deixar levar por crenças e concepções que, arraigadas em sua formação, não permitem ter um olhar diferenciado para sua prática e sobre novas perspectivas de ensino, que certamente permitirão seu crescimento juntamente com o de seus alunos.

Para mudar estas concepções e modificar a forma como os professores ensinam Matemática é preciso levar o futuro professor a refletir sobre currículos, práticas e especialmente sobre o significado de ensino e aprendizagem de Matemática.

Percebemos então que as pesquisas mostram um professor mais reflexivo, mais preocupado com a aprendizagem de seus alunos e mais envolvido com sua própria prática, independente doconteúdo trabalhado.

**Referências bibliográficas**

Ball, D. L. (2008). *Content knowledge for teaching**:** what makes it special?* Journal of Teacher Education, v. 59, n. 5, p. 389-407, Nov./Dec.

Bardin, L. (2007). *Análise de conteúdo.* Lisboa: Edições 70.

Brasil. (1997).Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais : matemática / Secretaria de Educação Fundamental*. – Brasília : MEC/SEF. 142p.

Curi, E.(2005). *A matemática e os professores dos anos iniciais.* São Paulo: Musa, (Biblioteca Aula Musa Educação Matemática; v.2).


ISBN 978-84-945722-3-4

Cury, H. N. (2013). *Uma proposta para inserir a análise de erros em cursos de formação de professores de matemática*. São Paulo: Educação Matemática Pesquisa, v.15, n.3, pp.547-562.

Fiorentini, D. (1994). *Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática: o caso da produção científica em cursos de pós-graduação*. Campinas: Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

Gil, A. C. (2008). *Como elaborar projetos de pesquisa.* São Paulo: Atlas 4. ed.

Romanowski, J. & Ens, R.(2006). *As pesquisas denominadas do tipo "Estado da Arte" em Educação.* Revista Diálogo Educacional, Curitiba, PR. v. 6, n. 19, p. 37-50, set.-dez.

Serrazina, M. L.(1999). *Reflexão, conhecimento e práticas lectivas em matemática num contexto de reforma curricular no 1º ciclo*. Lisboa: Quadrante , v. 8, n, 1-2, p.139-167.

## ANEXOS

**Anexo 1.**

| Eixo | Título |
|---|---|
| **1** | Avaliação em Educação Matemática |
| **2** | Currículos em Educação Matemática |
| **3** | Recursos Didáticos e Educação Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental |
| **4** | Recursos Didáticos e Educação Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e no Ensino Superior |
| **5** | Inclusão e Educação Matemática |
| **6** | Educação de Jovens e Adultos e Educação Matemática |
| **7** | Tecnologias e Educação a Distância no contexto da Educação Matemática |
| **8** | Resolução de Problemas em Educação Matemática |
| **9** | Modelagem em Educação Matemática |
| **10** | Educação Matemática, Cultura e Diferença |
| **11** | Dimensões Filosóficas e Sociológicas na Educação Matemática |
| **12** | Cognição e Educação Matemática |
| **13** | Concepções, Crenças e Atitudes em Educação Matemática |
| **14** | Políticas públicas na educação básica |
| **15** | Educação Matemática na educação infantil |
| **16** | Comunicação e argumentação nas aulas de Matemática |
| **17** | Educação Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental |
| **18** | Formação de Professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio |
| **19** | Formação de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental |
| **20** | A parceria universidade e escola: o professor, o futuro professor e o formador de professores de Matemática |
| **21** | Formação de professores de Matemática e Tecnologia |
| **22** | Histórias de formação de professores de matemática |
| **23** | História da Educação Matemática e ensino |


ISBN 978-84-945722-3-4

| | |
|---|---|
| **24** | História da Educação Matemática: grupos culturais específicos, a produção científico-acadêmica em Educação Matemática e seus agentes |
| **25** | História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática |

**Quadro 1**. **Eixos apresentados no XII ENEM/2016**

## Anexo 2

| Eixo | Título | Trabalhos |
|---|---|---|
| **3** | Recursos Didáticos e Educação Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental | 17 |
| **8** | Resolução de Problemas em Educação Matemática | 41 |
| **13** | Concepções, Crenças e Atitudes em Educação Matemática | 30 |
| **17** | Educação Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental | 33 |
| **19** | Formação de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental | 65 |
| **20** | A parceria universidade e escola: o professor, o futuro professor e o formador de professores de matemática | 16 |
| **Total de trabalhos** | | **202** |

**Quadro 2. Eixos do XII ENEM/2016, delimitados de acordo com o foco desta pesquisa Anexo 3.**

| **Nº total de trabalhos** | **Foco** | **Tipo de Pesquisa** |
|---|---|---|
| 5 | Ensino e aprendizagem de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental | 2 - Revisão bibliográfica e análise de livros didáticos<br><br>3 - Pesquisa com alunos e professores |
| 7 | Ensino e aprendizagem de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental | 1 - Revisão bibliográfica<br><br>1 – Mapeamento<br><br>5 – Pesquisa com alunos e professores |
| 7 | Ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio | 7 - Pesquisa com alunos e professores |
| 5 | Professores formados e licenciandos do curso de Matemática | 1 – Mapeamento<br><br>4 – Pesquisa com alunos e professores |
| 3 | Estudantes do curso de Engenharia | 3 - Pesquisa com alunos |
| 1 | Ensino de Matemática com crianças em situação de risco | 1 – Pesquisa com alunos |
| 2 | Ensino e aprendizagem de Matemática (Geral) | 1 - Revisão bibliográfica e análise de livros didáticos<br><br>1 – Mapeamento |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

| **Total – 30 trabalhos** |
|---|

**Quadro 3. Focos dos 30 trabalhos inscritos no Eixo 13 do XII ENEM/2016**

**Anexo 4**

| **Título** | **Autores** | **Metodologia** | **Aportes teóricos** |
|---|---|---|---|
| *A matemática escolar reduzida a fazer contas: uma representação da matemática escolar*? | Cabanas, M. I. C.<br><br>Mazzotti, T. | Revisão bibliográfica<br>Análise documental | *Battersby, 2003; Brasil, 1998, 2013, 2015; Mandarino, 2006; Mazzotti, 2013; Thompson, 1992;Vaccaro, 2010* |
| *Estatística e Matemática no Ensino Fundamental I pela atividade orientadora de ensino* | Miranda, M. A.<br><br>Araújo, E. S. | Revisão bibliográfica | *Araújo, 2010; Caraça, 2010 ; Leontiev, 1964; Lopes, 1998 ; Makarenko, 1938; Moura ,1992; 1996; 2001 ; Rubinstein, 1973; Vygotsty, 1979; 2000* |
| *Noções básicas de probabilidade: o que os livros sugerem, o que os professores conhecem.* | Santana, M. R. M. | Revisão bibliográfica<br>Análise documental | *Batanero (1999)*<br>*Belfort & Mandarino (2004)*<br>*Brasil, ( 1997, 2007)*<br>*Oliveira (2007*<br>*Vergnaud (1986)* |
| *O erro no processo de ensino e aprendizagem em Matemática: sua relação com as* | Almeida, D. M.<br><br>Pizaneschi, F. P. M.<br><br>Darsie, M. M. P. | Pesquisa com professores, revisão teórica | *Abrahão (2007, P.190), Berti (2007, P.35), Carvalho (1997, Chabanne (2006, P.17) Costa (2013),Cury, 1994, P.20).Davis (1991, P.200) D'ambrósio (2001),* |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

| | | | |
|---|---|---|---|
| *dificuldades de aprendizagem no contexto escolar.* | | | *Fonseca (2014), Silva (2013). La Taille (1997, P,32), Muniz (2001);Pinto (2009)* |
| *Marcas do ensino tradicional sobre a compreensão da operação de multiplicação em professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental* | Tarouco, V. L.<br><br>Silva, G. P.<br><br>Silva A. C. | Pesquisa com alunos e professores | *Bittar, Freitas E Pais (2013)*<br>*Brasil (1997) – Pcn Matemática*<br>*Danyluk (1998)*<br>*Kamii E Housman ( 2002)*<br>*Nunes E Bryant (1997)*<br>*Piaget (2007)*<br>SILVA (2009; 2012) |

**Quadro 4. Trabalhos submetidos ao eixo 13 do XII ENEM**



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.159

# UN ESTUDIO EXPLORATORIO DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA EN 7º GRADO PARA LA APLICACIÓN DE DIFERENTES CONCEPCIONES DE LA NOCIÓN DE FRACCIÓN

Autora: Yuraima Lilibeth Ramírez Rondón.

yura2572@gmail.com

Universidad Pedagógica Experimental Libertador- IPC. Venezuela

**Modalidad:** CB

**Nivel educativo:** Secundaria

**Núcleo temático:** Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos

**Palabras claves:** Concepciones, didáctica, fracciones, transposición.

**Resumen:** La necesidad por crear una herramienta didáctica que le permita al docente en ejercicio gestionar de manera idónea los conocimientos que los jóvenes poseen sobre los temas de fracción, decimales y porcentajes fue la motivación para el diseño de una propuesta de enseñanza. Esta pretende atrapar la atención del estudiante sobre el proceso con el cual aprendió sobre estos temas y reconstruya sus conocimientos en caso de necesitarlo. Este estudio se elabora basándose en tres concepciones de la construcción del concepto de fracción "El fraccionamiento de la unidad, la fracción como operador y el cociente exacto", uniendo la manipulación y la realidad del contexto social del estudiante, hasta alcanzar un aprendizaje significativo en ellos. Se aplicó a los alumnos del Liceo Bolivariano Leopoldo Aguerrevere en el año escolar 2013-2014 con una continuidad de trabajo en los años posteriores 2015 y 2016, se utilizó una investigación observacional, participativo de tipo cualitativo, y bajo el paradigma interpretativo. Como instrumento de evaluación se contó con un abanico de posibilidades sin centrarse en los procesos tradicionales de evaluación de la matemática.

**Desarrollo del trabajo:** Uno de los problemas más candentes que tiene actualmente la educación está ubicado en el dominio de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Es


ISBN 978-84-945722-3-4

alarmante la cantidad de estudiantes de educación básica y media diversificada que presentan problemas en el aprendizaje de ciertos contenidos del programa de Matemática, contenidos que además son aplicados en su día a día. Por ello, la investigación y búsqueda de soluciones es uno de los principales retos a los que se enfrenta el área de Didáctica de las Matemáticas en la actualidad.

Las operaciones con números racionales es uno de los primeros temas con que se encuentran los alumnos de 8° grado de educación básica, este tema tiene la particularidad de ser básico y sirve como herramienta clave para todos los niveles que le siguen.

Año tras año, se puede confirmar que el aprendizaje de este tema resulta problemático, una evidencia de esto se ubica en que alumnos de los últimos años de educación media, incluso estudiantes universitarios presentan errores continuos en las operaciones con racionales (incluyendo todas sus representaciones; fracciones, decimales, porcentajes y gráficos). Aún cuando logran aprobar los primeros niveles de educación básica y diversificada, en el área de matemática, y hasta con un buen rendimiento en muchos casos, fracasan o no tienen buen desempeño al desarrollar actividades en niveles posteriores que requieran de la reflexión y del uso adecuado de las definiciones estudiadas en el desarrollo del tema. En algunos casos el desempeño es pobre, sobretodo, cuando enfrentan situaciones nuevas, no estructuradas, a pesar de ser algo usual para ellos, en situaciones cotidianas el uso de proporciones, decimales y porcentajes.

En cuanto a su enseñanza, el tratamiento que se sigue es básicamente "tradicional", se les explican las definiciones con las propiedades, usando una sola concepción, para luego enfrentarlos a ejercicios algorítmicos, aplicando los conceptos estudiados.

Adicionándole a esto que en este momento se encuentran en una etapa de transición, donde deben afrontar los problemas propios del cambio entre la escuela primaria y la media, que incide notablemente en el aprendizaje de la matemática. Es por esto que necesitan disponer de un dominio adecuado de los conocimientos y habilidades para poder superar los futuros obstáculos.

Este proyecto esta planteado con la finalidad primordial de realizar un estudio exploratorio de una propuesta didáctica, en el 7º grado (primer año de la tercera etapa de la educación básica en Venezuela), que contenga una serie de actividades de enseñanza – aprendizaje que


ISBN 978-84-945722-3-4

muestren diferentes concepciones de la noción de fracción.

Para lo cual se desea responder a las siguientes cuestiones:

1. ¿En qué consiste el conocimiento matemático: fracciones y números decimales en la institución escolar?
2. Las diferentes concepciones de los números racionales: medida, operador, cociente exacto, razones, proporcionalidad, aproximación, etc. ¿qué limitaciones tienen? ¿Cómo se articulan?
3. ¿Qué situaciones escolares dan sentido a los números racionales?
4. ¿Cuáles son los principales errores y obstáculos que deben superar los alumnos?

**Objetivo general:** Realizar un estudio exploratorio que permita diseñar una propuesta didáctica para realizar en la clase de 7º grado una serie de actividades de enseñanza – aprendizaje que muestren diferentes concepciones de la noción de fracción.

**Objetivos específicos: 1.** Seleccionar todo un marco teórico de Didáctica de las Matemáticas apropiado que permita abordar adecuadamente el objetivo general propuesto.

2. Determinar cuales son los principales errores y obstáculos que deben superar los alumnos, en el conocimiento matemático: fracciones, decimal, porcentajes, etc.

3. Proponer en clase una serie de actividades de enseñanza – aprendizaje que muestren diferentes concepciones de la noción de fracción.

4. Validar el modelo de aprendizaje diseñado.

**Antecedentes:** Humberto De León e Irma Fuenlabrada (s/f. pp 282) en su trabajo Procedimientos de solución de niños de primaria en problemas de reparto, afirman que: "Uno de los aspectos que determinan el fracaso, es la pobreza conceptual que se maneja en la práctica escolar". Afirma que la enseñanza le da prioridad al significado del fraccionamiento de la unidad así como el dominio en las reglas de cálculo y dejan de lado una gran variedad de situaciones que están vinculadas con el significado de las fracciones.

Brousseau (1986) determina que en toda situación de enseñanza existe un conjunto de relaciones establecidas tanto de forma explícita como implícita entre un estudiante o un grupo de estudiantes, un medio (que vislumbra ocasionalmente instrumentos y recursos) y un sistema educativo (representado por el docente) con el fin de lograr que estos estudiantes alcancen un saber formado o en vías de formación.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Pero no únicamente se debe tener en cuenta este conjunto de relaciones sino que, por otro lado, a pesar de toda la complejidad en situaciones de enseñanza - aprendizaje, las estructuras mentales de los alumnos pueden ser comprendidas y que tal comprensión ayudará a conocer mejor los modos en que el pensamiento productivo y el aprendizaje tiene lugar. (Schoenfeld, 2000)

Para esto es necesario situar a la didáctica de la matemática dentro de las interacciones entre múltiples disciplinas: Psicología, Pedagogía, Sociología, Matemática, etc.

Por otro lado, todo aprendizaje, implica necesariamente rupturas cognitivas, acomodaciones, cambio de modelos implícitos (concepciones), de lenguajes, de sistemas cognitivos. Si se obliga a un alumno (o a un grupo) a una progresión paso a paso, el mismo principio de adaptación puede contrariar el rechazo, necesario, de un conocimiento inadecuado. Las ideas transitorias resisten y persisten. Estas rupturas pueden ser previstas por el estudio directo de las situaciones y por el indirecto de los comportamientos de los alumnos.

Cuando a los alumnos se les enseña un concepto matemático, éste adquiere el status de objeto matemático; es decir, se les presenta como un ente abstracto.

Este objeto emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo o tipo de problemas matemáticos (Godino y Batanero, 1994).

Cuando nos interesamos por la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, no sólo debemos tener en cuenta las definiciones precisas de los objetos matemáticos, sino también por el campo de problemas que les dan origen, por las representaciones, las técnicas, las propiedades involucradas y sus respectivas justificaciones. Los conceptos matemáticos, interpretados de esta manera antropológica, se convierten en un objeto dinámico que se va construyendo progresivamente a medida que se van ampliando los tipos de problemas abarcados, las operaciones y el discurso que las organiza y justifica.

**Los números decimales en la institución escolar: concepciones asociadas:** Se abordará esta sección basándose en el trabajo de Luisa Ruiz Higueras (2004), en él se lleva a cabo una reflexión epistemológica sobre las diferentes concepciones que se emplean en la institución escolar para introducir las fracciones y, en consecuencia, los decimales. Esta autora asume la noción de concepción en el sentido de Brousseau (1998): "Las concepciones diferentes de una cierta noción– son diferentes en el sentido en que cada una permite más fácilmente ciertas


ISBN 978-84-945722-3-4

interpretaciones, ciertos cálculos, el reconocimiento de la noción en ciertas circunstancias, mientras que ocurre lo contrario con otras".

1.- Concepción C1: Extensión natural del sistema de numeración decimal (SND):

2.- Concepción C2: Los números decimales a partir del SMD.

3.- Concepciones de origen fraccionario: Las fracciones decimales como caso particular de las fracciones $\frac{n}{p}$

3.1. Concepción C3: Fraccionamiento de la unidad.

3.2. Concepción C4: Fracción como operador.

4. Concepción C5: Fracción como cociente exacto.

5. Concepción C6: La fracción como razón.

**Los problemas en la enseñanza y el aprendizaje. Los Obstáculos:** Brousseau (1998) afirma que los caracteres esenciales que nos permiten identificar, en los comportamientos de los alumnos, un obstáculo son:

. Siempre se trata de un conocimiento, no de una ausencia de conocimiento

. Este conocimiento permite al alumno producir respuestas correctas en determinados dominios de problemas

. Este mismo conocimiento engendra respuestas erróneas para ciertos campos de problemas,

. Los errores producidos no son esporádicos sino muy persistentes y resistentes a la corrección

En esta investigación se abordarán los obstáculos desde sus diferentes tipos: Los ontogenéticos que se refieren a los procesos de maduración y de las estructuras de conocimiento que posea y pueda desarrollar. Los epistemológicos relativos a los errores que derivan del propio conocimiento matemático y los didácticos que son aquellos que introducen los maestros y que no derivan de propiedades del objeto de estudio.

Según Ruiz Higueras (2004), los alumnos previo a conocer los números decimales han visto y dominan ampliamente el conjunto de los números naturales, este conocimiento se convierte en un gran obstáculo para ellos debido a que en el conjunto de los números naturales algunas afirmaciones son ciertas, pero cuando los alumnos los aplican a otros dominios numéricos,


ISBN 978-84-945722-3-4

como el de las fracciones o los números decimales, les provocan errores persistentes o bien inadaptaciones locales que conllevan pérdidas de sentido.

Esta investigación es de tipo cualitativo, ya que se apoya en una metodología observacional y participativa, centrándose en la comprensión por parte de los alumnos del tema de fracciones y sus diferentes representaciones, se hacen registros descriptivos, certificadas con fotografías de las actividades aplicadas. La profesora responsable (docente del aula) conoce a los estudiantes lo que permite una interacción activa en las situaciones propuestas por lo que escogió el modelo interactivo (citado por Correa, 2006. pp. 13) que espera "producir cambios en la realidad educativa con la participación del docente y los alumnos, ya que ambos son protagonistas de las mejoras de la educación y, en este caso particular, de las actividades de enseñanza que se construyan".

Para realizar dicha investigación primero se produce una indagación en Internet sobre artículos que trataran sobre transposición e ingeniería didáctica y el tema de la relación entre las diferentes representaciones del concepto "Número Racional", escogiendo y utilizando para esta propuesta, el análisis de las concepciones y situaciones didácticas presentadas en el trabajo, "La construcción de los decimales. De las fracciones a la notación decimal". Ruiz Higueras, L. (2005). Por lo que se diseñaron actividades para los estudiantes, determinando un proceso de enseñanza aprendizaje valorable, significativo y continuo para ellos, con la intencionalidad de que ellos evalúen y reestructuren, de ser necesario, sus conocimientos previos para alcanzar los conceptos necesarios.

La población, está conformada 304 estudiantes de 7° grado del Liceo Bolivariano "Leopoldo Aguerrevere", del año escolar 2013-2014, institución pública, situado en una zona residencial de clase media a baja, dotado de todos los servicios y con muy pocos recursos instruccionales. La muestra utilizada en esta investigación fue de 39 alumnos, (única sección que administraba la autora), con 12 varones y 27 mujeres, correspondientes al 12,82% de la población y un promedio de notas en el I lapso de 13,4 puntos.

**La Propuesta:** Se siguió para el diseño de las sesiones el esquema de Callejo, M. L. (1992), de su trabajo "Orientaciones para la elaboración de Unidades Didácticas", para la organización de la propuesta, en cuanto a:

| | | |
|---|---|---|
| .- Los objetivos | .- Contenidos | .- Material utilizado |
| .- Las actividades | .- El tiempo | .- La organización de los alumnos |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Para la validación de la Propuesta Didáctica, se aplicará la misma y se registran las observaciones percibidas por el docente en cada sesión.

El análisis por sesión se realizará con la aplicación de la escala de consolidación de aprendizajes del trabajo de Trasancos (s/f) en cuanto a Trabajo en grupo, Presentación de la tarea final, Conclusiones, Clima de trabajo y Elaboración de tareas; usando una escala como la que sigue Escasa consolidación (1); Aprendizaje medio (2); Buen aprendizaje (3); y Excelencia en el aprendizaje (4). Por último se aplicará la siguiente escala de estimación: Escasa consolidación (5-9); Aprendizaje medio (10-14); Buen aprendizaje (15-19) y Excelente aprendizaje (20).

El trabajo se dividió en dos partes: 1. Análisis del currículo de primaria y secundaria de Venezuela. 2. Diseño de Propuesta Didáctica.

**Estructura de la propuesta didáctica:** Se dividió la propuesta didáctica en: Una sesión diagnóstica, cuatro sesiones de clase teórico-prácticas y una sesión de resolución de problemas redactados por los estudiantes, la cual fue tomada como evaluación final de la propuesta. El desarrollo de la propuesta se hizo bajo una misión, darle la oportunidad al alumno de manipular y desglosar los diversos elementos para crear, usando sus conocimientos previos, enmarcando las situaciones problemáticas, en muchos casos cotidianas para ellos, en un contexto real, vinculándolos con su entorno, en busca de desarrollar motivaciones para que el aprendizaje sea significativo para ellos. La actividad principal de cada sesión fue la discusión abierta entre los diferentes grupos de participantes, esto se debe a que se buscaba que los estudiantes no sólo desarrollaran confianza en sí mismos sino además que se prepararan o, al menos, se preocuparan por prepararse para cada discusión. Para lograr todo esto previo a la creación de la propuesta didáctica (Modelo de aprendizaje) se realizó un análisis del aprendizaje de los alumnos (Situaciones problema).

**Conclusiones:** El impacto de la propuesta se percibió por medio del cambio de actitud y estilo de aprendizaje de los grupos de estudiantes, adicionemos a esto lo comprensible que resultó el proceso de los temas tratados, logrando un cambio en el carácter tradicional y reproductivo del conocimiento.

Los estudiantes presentaron cambios en diferentes aspectos, entre ellos se tiene:

1. Incremento de notas parciales en el área de matemática.
2. Mayor participación en el aula.


ISBN 978-84-945722-3-4

3. Actitud positiva hacia el aprendizaje de nuevos temas.
4. Valoración de la importancia de manejar los temas de fracciones, números decimales y porcentajes en la vida diaria.
5. El trabajo en grupo ayudó a la superación de otras asignaturas.

Siendo el objetivo principal de esta investigación diseñar una propuesta didáctica, se juzgó pertinente analizar los resultados en varios puntos: la prueba diagnóstica, las sesiones, la actividad final y la actuación del docente como ente participativo del proceso.

**La construcción escolar de las fracciones y los decimales**: Se ha constatado que la construcción de los números decimales y las fracciones en situación escolar es muy compleja, ya que existen diversas concepciones que es necesario articular con sentido y funcionalidad, teniendo en cuenta las dificultades ligadas a las restricciones de cada una de las magnitudes en donde "viven" estos objetos matemáticos.

**El proceso de autoformación de los estudiantes:** La autogeneración de conocimiento no siempre puede adaptarse a los temas en matemática, sin embargo, es válido reforzar en los estudiantes la idea de autoformación, en este trabajo se le dio la oportunidad a los estudiantes para que ellos mismos, redactaran, expusieran y defendieran actividades y problemas matemáticos.

**La actitud de los alumnos hacia la matemática:** Se evidenció el efecto positivo en los resultados finales de la aplicación. La actitud de los alumnos hacia la matemática cambió radicalmente, lograban aplicar los contenidos matemáticos en su vida cotidiana, este cambio fue tanto desde el punto de vista cualitativo como cuantitativo.

**REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS :**

**Brousseau, G**. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques*, vol 7, 2, P. 33-115. (Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Traducción de Dilma Fregona y Facundo Ortega). Argentina.

**Callejo de la Vega, María Luz** (1992Orientaciones para la elaboración de Unidades Didácticas: Área de Matemática. IEPS

**Chevallard, Y.** (1991). *La Transposición didáctica: Del Saber Sabio Al Saber Enseñado.* Traducción: Claudia Gilman. Aique Grupo Editor S.A. Argentina.


ISBN 978-84-945722-3-4

**Contreras, A.** (2000). La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de Universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. *Actas del IV Simposio de la SEIEM.* España: Huelva.

**Giménez Rodríguez, J**. (1997). Evaluación en Matemática. Una integración de perspectiva. Editorial Síntesis Madrid España.

**Godino J.D. y Batanero, C**. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14, nº 3. (pp. 325-355).

**Ruiz Higueras, L.** (2004) La construcción de los números decimales en la escuela Primaria: de las fracciones a la notación decimal. En Chamorro, M.C. (Ed*) Números, formas y volúmenes en el entorno del niño*, p. 189- 233. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia

**Ruiz Higueras, L**. (1998) *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

**Rodríguez Fernández José Luis, Ruiz Higueras Luisa**. La transparencia de los hechos didácticos en la enseñanza de las matemáticas. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, ISSN 1130-488X, Nº 32, 1999, pags. 69-78


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.160

# COMUNICAÇÃO ESCRITA NA AULA DE MATEMÁTICA: PRÁTICAS DE ALUNOS DO ENSINO BÁSICO

Manuel Vara Pires – Cristiana Leite – Elisabete Costa
mvp@ipb.pt – cristianapintoleite@gmail.com – elisabete_costa_87@hotmail.com
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança, Portugal

Núcleo temático: Comunicação e divulgação matemática
Modalidade: CB
Nível educativo: Primário (6 a 11 anos)
Palavras-chave: aprendizagem matemática, comunicação matemática, comentários escritos, resolução de tarefas matemáticas

**Resumo**
*É fortemente reconhecida a centralidade da comunicação na aula de matemática. Este texto apresenta e reflete sobre dois estudos centrados na capacidade de comunicação escrita dos alunos em sala de aula, que seguiram uma abordagem qualitativa e interpretativa e envolveram alunos do 5.º ano, que resolveram individualmente três tarefas matemáticas ou comentaram em grupo trabalhos apresentados pelos restantes colegas. A análise das respostas suportou-se em quatro categorias definidas previamente (clareza, fundamentação, lógica, profundidade) e em três níveis de desempenho (baixo, médio, elevado). Os resultados apontam para desempenhos médios em clareza e para maiores dificuldades nas restantes categorias, especialmente nas justificações e conexões para suportar as ideias e raciocínios e no domínio dos temas matemáticos trabalhados, reforçando a necessidade de os alunos terem oportunidades de exprimir os seus pontos de vista e justificar os processos seguidos.*

## 1. Contexto dos estudos

Esta comunicação apresenta e analisa dois estudos exploratórios desenvolvidos pelas segunda e terceira autoras nos seus estágios profissionais integrados na prática de ensino supervisionada do Mestrado em ensino do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico e registados nos respetivos relatórios finais de estágio (Costa, 2015; Costa & Pires, 2016; Leite, 2016; Leite & Pires, 2017), orientados pelo primeiro autor. Nos estágios profissionais, realizados ao longo de um ano letivo, cada uma das autoras assegurou o trabalho letivo em todas as áreas disciplinares (língua portuguesa, matemática, estudo do meio, expressões) do 1.º ciclo e em português, história e geografia de Portugal, ciências naturais e matemática do 2.º ciclo, assumindo, como eixo integrador das experiências de ensino e aprendizagem, a importância do desenvolvimento de capacidades comunicativas dos alunos. Esta importância,



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

amplamente reconhecida por potenciar aprendizagens mais sólidas e significativas (Guerreiro, Tomás Ferreira, Menezes & Martinho, 2015; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2017), foi concretizada através da proposta de resolução e discussão de tarefas que permitiram aos alunos apresentar, justificar e validar ideias e processos seguidos.

Integrando-se numa investigação mais ampla sobre a comunicação dos alunos em sala de aula e realizada em todas as áreas disciplinares dos respetivos estágios profissionais, os estudos centram-se, neste texto, na área da matemática, envolvendo duas turmas do 5.º ano do ensino básico. Os dois trabalhos pretenderam analisar aspetos da capacidade de comunicação escrita dos alunos, em quatro dimensões (clareza, fundamentação, lógica, profundidade), na resolução individual de tarefas matemáticas ou no registo de comentários em grupo sobre trabalhos apresentados pelos restantes colegas.

## 2. Aspetos da comunicação escrita em sala de aula

O desenvolvimento de uma boa competência comunicativa deve ser uma "prática produtiva" associada a uma aprendizagem matemática de qualidade (NCTM, 2017). Em sala de aula, a comunicação pode ser caracterizada pelo uso das linguagens oral e escrita e desenvolve-se através das formas como o professor e os alunos estruturam e partilham o seu conhecimento (Guerreiro, Tomás Ferreira, Menezes & Martinho, 2015).

Nestes processos comunicativos, os registos escritos realizados pelos alunos podem desempenhar um papel muito significativo, pois são uma forma de os ajudar a estruturar o seu pensamento, permitindo-lhes clarificar e refletir sobre as noções desenvolvidas na aula (NCTM, 2017; Ponte & Serrazina, 2000). Seguindo esta perspetiva, Ponte et al. (2007) referem que "a linguagem escrita (...) é uma forma de comunicação que tem um papel complementar fundamental no ensino-aprendizagem" (p. 45), apoiando-se num conjunto de representações facilitadoras dos processos de comunicação (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008).

A comunicação escrita pode, então, ser analisada tendo em conta as diferentes dimensões que lhe podem ser associadas e que a caracterizam, como a coerência, a lógica ou a clareza. Exemplificado com a clareza, esta dimensão característica da comunicação escrita está relacionada com a utilização de vocabulário (também matemático) apropriado e de formas


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

de representações adequadas à situação (Costa & Pires, 2016; Leite & Pires, 2017). Fazendo a associação dos três modos de representação interativos de Bruner às produções escritas na resolução das tarefas matemáticas, os alunos apelam: (i) a representações ativas, quando recorrem à manipulação ou experiência direta sobre os objetos; (ii) a representações icónicas, quando recorrem a esquemas, tabelas, desenhos ou diagramas, ilustrando conceitos ou procedimentos; e (iii) a representações simbólicas, quando recorrem a linguagem simbólica, através de símbolos matemáticos ou outras linguagens (Boavida et al., 2008).

## 3. Enquadramento metodológico

Para a apreciação dos dois estudos exploratórios foi realizada uma análise documental (Bogdan & Biklen, 2012). Ambos os trabalhos seguiram uma abordagem qualitativa e interpretativa orientada para a compreensão do que é único, particular e significativo para os sujeitos (Pires, 2006) e muito adequada à natureza e objetivos do problema em análise (Bogdan & Biklen, 2012) e ao contexto da investigação sobre a própria prática. A análise da comunicação escrita suportou-se num instrumento (ver Anexo A), que teve em conta aspetos já referidos em outros estudos (Castanheira, 2014), com quatro categorias (clareza, fundamentação, lógica, profundidade), definidas previamente, e três níveis de desempenho (baixo, médio, elevado) em cada uma delas.

O trabalho de Costa (2015) envolveu onze alunos que constituíam uma turma de matemática do 5.º ano de escolaridade (turma A). O estudo foi orientado para a questão "Como é que os alunos comunicam por escrito os seus raciocínios quando resolvem individualmente tarefas matemáticas?" com o propósito de identificar e analisar a capacidade de comunicação escrita dos alunos, nas quatro dimensões, quando resolvem tarefas matemáticas de forma individual. A recolha de dados foi feita através das respostas escritas dadas pelos alunos numa aula de noventa minutos na resolução de três tarefas matemáticas abordando os conceitos de perímetro e área de figures poligonais. Cada resolução foi lida, analisada por categoria e incluída num dos níveis previstos.

O trabalho de Leite (2016) envolveu uma turma de vinte e dois alunos do 5.º ano de escolaridade, distribuídos por seis grupos (turma B). O estudo foi enquadrado pela questão "Como é que os alunos comunicam por escrito as suas ideias e comentários acerca de trabalhos de grupo apresentados pelos colegas?", procurando analisar os comentários escritos dos alunos, atendendo às quatro dimensões referidas. A recolha de dados concretizou-se


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

através dos comentários que cada grupo escreveu sobre as resoluções das tarefas registadas pelos restantes grupos num diário de bordo elaborado ao longo de quatro aulas de noventa minutos no desenvolvimento de um projeto sobre organização e tratamento de dados. Os comentários produzidos por cada grupo relativamente ao trabalho dos colegas foram lidos e analisados em todas as categorias e associados, no seu aspeto global, a um dos níveis de desempenho em cada uma delas.

## 4. Apresentação e análise de resoluções e comentários dos alunos

Esta secção começa com as resoluções individuais recolhidas no estudo de Costa (2015), seguindo-se a apresentação dos comentários escritos em grupo relativos aos estudo de Leite (2016). Para cada caso, explicita-se a tarefa matemática trabalhada, apresentam-se resultados sistematizados em tabelas e ilustrados com produções dos alunos e analisam-se aspetos da capacidade comunicativa escrita dos alunos, atendendo às quatro categorias previamente definidas e aos respetivos níveis de desempenho.

### 4.1. Análise das resoluções individuais dos alunos da turma A (Costa, 2015)

Os alunos resolveram individualmente três tarefas relacionadas com os conceitos de área e perímetro, que solicitavam justificações e comentários a afirmações. Os níveis globais de desempenho atribuídos a cada aluno estão apresentados na tabela 1, verificando-se, em termos gerais, um nível médio em "clareza", um nível baixo em "lógica" e "profundidade" e uma oscilação entre os níveis baixo e médio em "fundamentação".

**Tabela 1. Nível global atribuído aos alunos da turma A nas quatro categorias.**

| Alunos | Clareza | | | Fundamentação | | | Lógica | | | Profundidade | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | b | m | e | b | m | e | b | m | e | b | m | e |
| Abel | | x | | x | | | x | | | x | | |
| André | | x | | | x | | x | | | x | | |
| Beatriz | | x | | x | | | x | | | x | | |
| Cláudio | x | | | x | | | x | | | x | | |
| Cátia | | | x | | x | | | x | | | x | |
| Dino | | x | | x | | | x | | | | x | |
| Dinarte | | x | | | x | | x | | | x | | |
| Fabiano | | x | | | x | | x | | | x | | |
| Glória | | x | | | x | | | x | | | x | |
| Rui | x | | | x | | | x | | | x | | |
| Telmo | | x | | | x | | | x | | | x | |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (total) | 2 | 8 | 1 | 5 | 6 | 0 | 8 | 3 | 0 | 7 | 4 | 0 |

Legenda: b - nível baixo; m - nível médio; e - nível elevado.

Neste texto, para ilustração, recorremos a resoluções de uma dessas tarefas (ver figura 1), com duas alíneas, em que os alunos tinham de justificar raciocínios e comentar afirmações feitas por duas crianças.

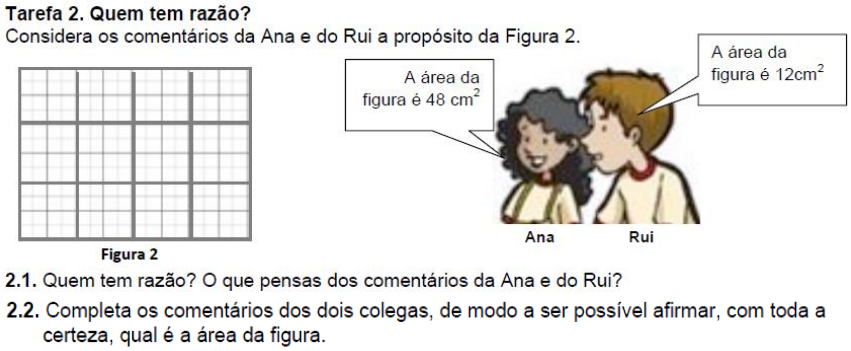



**Figura 1. Enunciado da tarefa (turma A).**

Foi na categoria "clareza" que se observaram os melhores desempenhos, tendo a generalidade dos alunos expressado, globalmente, os seus pontos de vista com vocabulário compreensível e com representações ajustadas à situação (ver figura 3). Na categoria "fundamentação", os níveis globais atribuídos oscilaram entre o baixo e o médio. Embora alguns alunos tivessem apresentado justificações ou argumentos adequados sobre os processos seguidos, outros houve que sentiram dificuldades em explicitar os seus pontos de vista. Vejam-se, nas figuras 2 e 3, as produções de dois alunos com desempenhos considerados bastante divergentes. O primeiro aluno reconheceu que as duas afirmações poderiam estar corretas, mas não conseguiu apresentar nem justificar as ideias, revelando dificuldades na apresentação de argumentos. Em contrapartida, o segundo aluno expôs o seu ponto de vista de forma precisa, com vocabulário correto e recorrendo a representações adequadas, a par de procurar fundamentar as suas ideias e formular adequadamente os seus argumentos.

**Figura 2. Resposta de nível baixo em todas as categorias.**

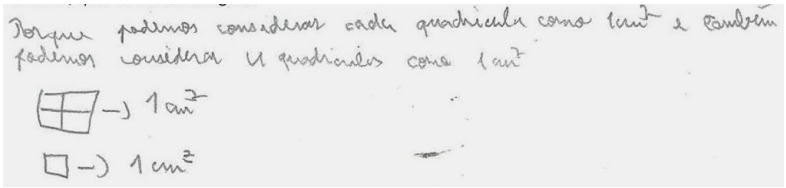


**Figura 3. Resposta de nível médio em "clareza" e em "fundamentação".**



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

A categoria "lógica" registou fracos desempenhos com muitas respostas associadas ao nível baixo, revelando pouco raciocínio e coerência nos registos e evidenciando pouca conexão entre as ideias, de que é exemplo a resposta apresentada na figura 4. Embora o aluno remeta para a noção de unidade de medida, não são explicitadas as conexões concetuais que pretende estabelecer.

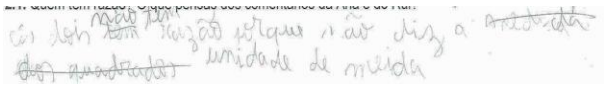


**Figura 4. Resposta de nível baixo em "lógica" .**

Igualmente, a generalidade dos alunos revelou dificuldades no domínio de aspetos mais complexos do conceito de área, estabelecendo pouca ligação entre as noções de medida e de unidade de medida, originando desempenhos globais fracos em "profundidade" e concentrados no nível baixo. Na figura 5, pode observar-se a produção de um alunos que relacionou os conceitos matemáticos envolvidos e adiantou justificações para os resultados encontrados.

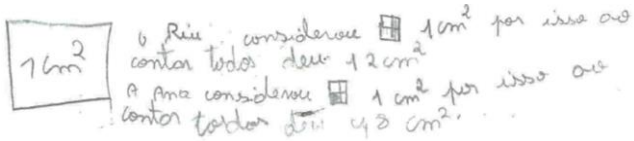


**Figura 5. Resposta de nível médio em "profundidade".**

### 4.2. Análise dos comentários escritos pelos grupos da turma B (Leite, 2016)

Os alunos, em grupo, desenvolveram o projeto estatístico "Organizar e tratar dados é cá comigo!", que permitiu o trabalho estatístico relacionado com a recolha, organização, interpretação e apresentação dos resultados, fazendo os respetivos registos num diário de bordo que foram organizando. Na caixa seguinte, apresenta-se o guião de uma das tarefas trabalhadas. No final, cada um dos grupos comentou, por escrito, as resoluções dos outros grupos registadas no respetivo diário de bordo.

**Guião de trabalho – "Analisando lançamentos de um dado"**
Cada elemento do grupo lança o dado três vezes, registando os acontecimentos no diário de bordo (quantas vezes sai cada número de pintas do dado). (a) Construir uma tabela de frequências absolutas e de frequências relativas dos dados obtidos. Qual é moda? Justificar a resposta. (b) Inserir os dados numa tabela *Excel*. Construir o gráfico de barras que obtiveram no *Excel*. Não esquecer de colocar o título no gráfico. (c) Discutir, com os colegas, cuidados a ter na construção de um gráfico de barras e registar os resultados e conclusões obtidos.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Na tabela 2 estão sistematizados os níveis globais de desempenho globais atribuídos aos seis grupos relativos aos cinco comentários formulados por cada um deles sobre o trabalho apresentado pelos restantes grupos.

**Tabela 2. Nível global atribuído aos grupos da turma B nas quatro categorias.**

| Grupos | Clareza | | | Fundamentação | | | Lógica | | | Profundidade | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | b | m | e | b | m | e | b | m | e | b | m | e |
| 1 | | x | | | x | | | x | | | x | |
| 2 | | x | | x | | | | x | | | x | |
| 3 | | x | | x | | | | x | | x | | |
| 4 | | x | | | x | | | x | | x | | |
| 5 | | x | | x | | | | x | | x | | |
| 6 | | | x | | | x | | x | | | x | |
| (total) | 0 | 5 | 1 | 3 | 2 | 1 | 0 | 6 | 0 | 3 | 3 | 0 |

Legenda: b - nível baixo; m - nível médio; e - nível elevado.

Nas categorias "clareza" e "lógica", foi atribuído, globalmente, o nível médio dado que todos os grupos ligaram e expressaram bem, embora alguns com erros ortográficos, as respetivas ideias, manifestando coerência nos registos escritos que produziram, conforme se pode verificar nas figuras 6, 7 e 8.

Já as categorias "fundamentação" e "profundidade" recolheram os níveis mais baixos. Embora alguns grupos tivessem justificado, de forma bem adequada, as suas ideias (ver figura 7) e revelassem, por vezes, um bom domínio dos tópicos estatísticos, houve outros em que as opiniões registadas não foram muito precisas nem justificadas, omitindo (ver figura 8) ou referindo-se pouco aos assuntos em estudo.

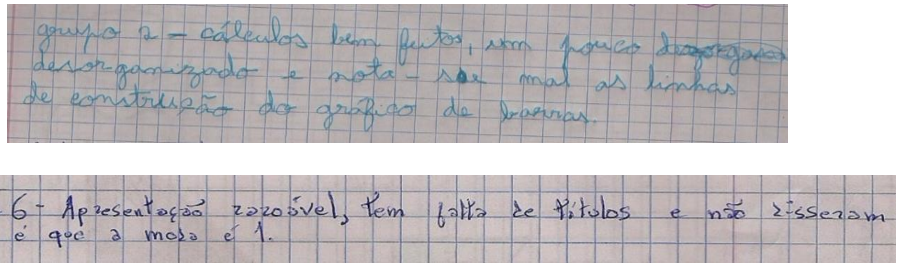



**Figura 6: Comentários dos Grupos 2 e 6 aos Grupos 5 e 3, respetivamente.**

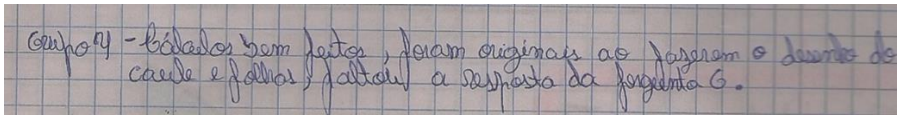



**Figura 7. Comentário de nível médio em "fundamentação".**



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

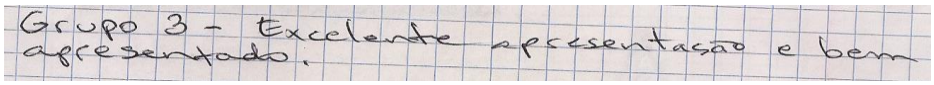



**Figura 8. Comentário de nível baixo em "fundamentação" e em "profundidade".**

## 5. A concluir

A análise das resoluções escritas individuais apresentadas pelos alunos do estudo de Costa (2015) permite concluir que, globalmente, a sua capacidade de comunicação escrita pode ser enquadrada no nível médio em "clareza", no nível baixo em "lógica" e em "profundidade" e oscila entre o nível baixo e o nível médio em "fundamentação". Já a análise dos comentários escritos elaborados pelos grupos de alunos do estudo de Leite (2016) aponta para desempenhos médios em "clareza" e em "lógica" e para maiores dificuldades em "fundamentação" e em "profundidade", oscilando entre o nível baixo e o nível médio. Os resultados permitem, ainda, concluir que o nível elevado tem alguma expressão em "clareza" (nos dois estudos) e em "fundamentação" (no estudo de Leite), mas é quase inexistente nas categorias "lógica" e "profundidade".

Em "clareza", os alunos dos dois estudos expressaram-se com ideias bastante precisas, sem grandes redundâncias, com vocabulário correto e poucos erros ortográficos e recorreram a representações icónicas e simbólicas adequadas (Boavida et al., 2008) acompanhando o estudo de Castanheira (2014). Também em "fundamentação", os resultados foram bastante próximos, tendo alguns alunos revelado dificuldades na justificação das suas ideias e processos seguidos (Guerreiro et al., 2015), mas metade dos grupos justificaram ou fundamentaram, de forma razoável, os comentários que fizeram. Globalmente, em "lógica" e em "profundidade", os alunos do estudo de Leite revelaram melhores desempenhos, demonstrando uma boa coerência nos registos escritos, com conexão entre as ideias apresentadas, e um razoável domínio dos diferentes aspetos dos temas estatísticos em questão, comentando tópicos matemáticos como a média, a moda ou os gráficos de barras.

Os dois estudos reforçam a necessidade de valorizar as diferentes dimensões da comunicação escrita em matemática na sala de aula (Guerreiro et al., 2015; NCTM, 2017; Ponte & Serrazina, 2000), dando aos alunos oportunidades de expressar, registar e justificar, com correção e coerência, as suas ideias e processos e de integrar, com profundidade, os tópicos matemáticos nessas justificações, para consolidar e atribuir mais sentido às aprendizagens matemáticas que vão realizando.


ISBN 978-84-945722-3-4

## Referências bibliográficas

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: DGIDC, Ministério da Educação.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2012). *Qualitative research for education: an introduction to theories and methods* (6th ed.). Boston: Pearson Education.

Castanheira, G. (2014). *Um modelo de ensino para o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática em alunos do 5.º ano do ensino básico*. Dissertação de mestrado, Instituto Politécnico de Viseu, Viseu, Portugal.

Costa, E. (2015). *Prática de ensino supervisionada em ensino do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico*. Relatório final de estágio, Instituto Politécnico de Bragança, Bragança, Portugal.

Costa, E., & Pires, M. V. (2016). Comunicar por escrito em matemática: um estudo com alunos do 5.º ano. In M. H. Martinho, R. Tomás Ferreira, I. Vale & H. Guimarães (Eds.), *Atas do XXVII Seminário de investigação em educação matemática*, pp. 405-419. Porto: Associação de Professores de Matemática.

Guerreiro, A., Tomás Ferreira, R., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: a perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké, 23*(4), 279-295.

Leite, C. (2016). *Prática de ensino supervisionada em ensino do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico*. Relatório final de estágio, Instituto Politécnico de Bragança, Bragança, Portugal.

Leite, C., & Pires, M. V. (2017). Comentários escritos produzidos pelos alunos na aula de matemática: um estudo no ensino básico. In L. Menezes, A. Ribeiro, H. Gomes, A. P. Martins, F. Tavares & H. Pinto (Eds.), *Atas do XXVIII Seminário de investigação em educação matemática*, pp. 217-230. Viseu: Associação de Professores de Matemática.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2017). *Princípios para a ação: assegurar a todos o sucesso em matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Pires, M. V. (2006). *Os materiais curriculares na construção do conhecimento profissional do professor de matemática. Três estudos de caso.* Tese de doutoramento, Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, Espanha.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didática da matemática do 1.º ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

## Anexo A

### Instrumento de análise da comunicação escrita (categorias e níveis de desempenho)

(Costa & Pires, 2016; Leite & Pires, 2017)

### Clareza

O aluno expressa, por escrito, as suas ideias, recorrendo a vocabulário correto e a representações adequadas.

Considera-se *nível baixo* quando o aluno apresenta ideias imprecisas, utiliza vocabulário incorreto ou incompreensível e recorre a representações inadequadas.

Considera-se *nível médio* quando o aluno apresenta ideias precisas, mas utiliza vocabulário pouco preciso ou compreensível e recorre a representações pouco adequadas.


ISBN 978-84-945722-3-4

Considera-se *nível elevado* quando o aluno apresenta ideias precisas, utiliza vocabulário preciso e correto e recorre a representações adequadas.

**Fundamentação**

O aluno justifica, de forma escrita, os seus processos ou ideias, apresentando argumentos plausíveis.

Considera-se *nível baixo* quando o aluno justifica os seus processos ou ideias de forma imprecisa

Considera-se *nível médio* quando o aluno justifica razoavelmente os seus processos ou ideias.

Considera-se *nível elevado* quando o aluno justifica adequadamente os seus processos ou ideias.

**Lógica**

O aluno manifesta raciocínio e coerência nos registos escritos, apresentando conexões entre as ideias registadas.

Considera-se *nível baixo* quando o aluno revela pouco raciocínio e coerência nos registos escritos, não mostrando conexão entre as ideias.

Considera-se *nível médio* quando o aluno revela algum raciocínio e coerência nos registos escritos, a par de alguma conexão entre as ideias.

Considera-se *nível elevado* quando o aluno revela raciocínio e coerência nos registos escritos, manifestando conexão entre as ideias.

**Profundidade**

O aluno revela, de forma escrita, o domínio de aspetos importantes e complexos sobre o assunto a trabalhar.

Considera-se *nível baixo* quando o aluno revela, frequentemente, não dominar aspetos importantes sobre o assunto.

Considera-se *nível médio* quando o aluno revela, algumas vezes, o domínio de aspetos importantes e complexos sobre o assunto.

Considera-se *nível elevado* quando o aluno revela, frequentemente, dominar os aspetos mais complexos sobre o assunto.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.162

# VARIAÇÕES EM TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: UMA ANÁLISE AO TRABALHOS DESENVOLVIDO POR FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA NO ÂMBITO DA SUA FORMAÇÃO INICIAL

António Guerreiro
aguerrei@ualg.pt
Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve, Portugal

Núcleo temático: Formação de Professores de Matemáticas
Modalidade: CB
Nível educativo: Formação e atualização docente
Palavras-chave: simetrias; frisos; padrões; formação de professores

**Resumo**
*Nesta comunicação pretendo apresentar um conjunto de ideias resultantes da abordagem das transformações geométricas, numa superfície plana, em resultado da identificação de simetrias, rosáceas, frisos e padrões na natureza, na arte e na arquitetura. Numa perspetiva teórica, abordo algumas variações em torno dos conceitos e das relações geométricas, nomeadamente das isometrias, reforçando as simetrias e a composição de transformações. O trabalho empírico resultou de um conjunto de aulas no ensino superior com futuros professores de um curso de mestrado de ensino do 1.º ciclo do ensino básico e de matemática e ciências naturais no 2.º ciclo do ensino básico (alunos dos 6 aos 12 anos). A metodologia utilizada na análise dos dados assumiu uma natureza interpretativa com recurso aos registos áudio de todas as aulas, às notas do professor e às produções dos futuros professores no contexto das aulas e dos trabalhos realizados autonomamente. Os dados apontam para uma redescoberta, por parte dos futuros professores, do conceito de simetria, envolvendo simetrias, rosáceas, frisos e padrões, através de um novo olhar matemático sobre a natureza, a arte e a arquitetura, tendo em atenção o trabalho em sala de aula com alunos do 2.º ciclo do ensino básico.*

## 1. Abertura: Contextualização, Participantes e Propósito

As isometrias do plano são abordadas nos primeiros anos de escolaridade através de representações gráficas sem grande formalização, habitualmente em torno de simetrias de reflexão – construção de figuras com eixo de simetria e identificação de eixos de simetria em figuras planas. No 2.º ciclo do ensino básico, o Programa e Metas Curriculares de Matemática (PMCM) (MEC, 2013) prevê, no 6.º ano de escolaridade, a lecionação das transformações geométricas de reflexão e de rotação e as respetivas simetrias. Do mesmo modo, o anterior Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (ME, 2007) defendia que "as isometrias permitem desenvolver nos alunos o conceito de congruência (…). Este tipo de



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

transformações permite a exploração, construção e classificação de frisos e rosáceas" (p. 37), apresentando como conteúdo matemático a lecionar as reflexões, rotações e translações e as simetrias axial e rotacional.

Apesar das distintas abordagens educacionais dos dois programas, o tema das transformações geométricas – reflexões e rotações – está presente em ambos os programas, no mesmo ciclo de ensino. A abordagem proposta pelo PMEB (ME, 2007) é didaticamente mais integradora do que a abordagem do PMCM (MEC, 2013) que remete os professores para um conjunto de metas curriculares com uma perspetiva axiomática da geometria. Como nos refere Bastos (2007),

> As isometrias (…) devem ser trabalhadas em conjunto porque é na comparação das suas propriedades – pontos fixos, orientação dos originais e das imagens e outras – e nas composições e relações entre elas que reside a tal estrutura que devemos ir progressivamente revelando aos alunos, ao longo da escolaridade (p. 27).

No âmbito do mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico, destinado à formação de professores dos anos iniciais, lecionei a unidade curricular de Transformações Geométricas no 1.º semestre do 2.º ano do referido curso de mestrado. A turma era constituída por seis futuros professores detentores de uma licenciatura em Educação Básica. Nesta licenciatura, os futuros professores frequentaram cinco unidades curriculares na área científica da matemática, envolvendo as subáreas dos números, geometria, medida, álgebra, estatística e probabilidades. Assim sendo, os futuros professores tinham uma formação global no contexto da matemática para o ensino nos primeiros anos de escolaridade. Contudo, o conhecimento sobre transformações geométricas era pouco consistente, em consonância com o estudo realizado por Gomes (2012) em que os "futuros professores não parecem estar preparados para ensinar transformações geométricas. (…) Aparentemente o modo como as transformações geométricas foram abordadas não permitiu ultrapassar/colmatar muitas das dificuldades/erros apresentadas pelas alunas" (p. 241).

Nesta comunicação irei abordar as ideias matemáticas de simetria, rosácea, friso e padrão, a partir das conceções dos seis futuros professores no decorrer das aulas de mestrado, tendo por propósito realçar as conceções explícitas e as práticas subsequentes que resultaram numa alteração das ideias matemáticas iniciais dos futuros professores.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

## 2. Simetria: Conceções, Definição e Prática

As simetrias abordadas nos primeiros anos de escolaridade reduzem-se à reconstrução de uma figura a partir da sua *metade*, através da reflexão em relação a um eixo vertical ou horizontal. Os futuros professores tinham, no ano letivo anterior, lecionado, em contexto de supervisão, no 1.º ciclo do ensino básico. Apenas um dos futuros professores tinha abordado o tema no contexto das suas aulas supervisionadas – «Dei as simetrias [1.º ciclo] (…) foi só mesmo desenhar de um lado para o outro» [Inês] – em torno da reflexão de uma figura segundo um eixo e não da identificação do eixo de reflexão numa figura com simetria axial.

*Simetria Axial.* As conceções dos futuros professores, apesar de todo o percurso escolar anterior, resultavam no conceito de simetria restrito à simetria axial – «Segundo um eixo, uma linha no centro da imagem (…) quando sobrepostos tem que haver coincidência total dos pontos» [Sara]. Questionados sobre as simetrias do quadrado, os futuros professores identificaram as quatro simetrias axiais do quadrado, associadas às duas diagonais do quadrado e às duas mediatrizes dos pares de lados paralelos ao quadrado – «[As] transformações que tu podes fazer para obter a mesma figura (…) Só conseguimos colocar o espelho em quatro posições» [Helena].

*Simetria Rotacional.* Interrogados sobre a simetria de um quadrado após a rotação de um quarto de volta, de meia volta ou de três quartos de volta da figura plana com centro no ponto de interceção das suas diagonais, os futuros professores observaram que «estamos a rodar em relação a um ponto e não a um eixo» [Ana], reconhecendo que a imagem no seu todo mantem-se inalterada. Este confronto originou uma questão de uma futura professora: «Para ser simétrica tem que ser em relação a um eixo ou não?» [Helena].

*Simetria Axial e Rotacional.* Esta interrogação despoletou a necessidade de apresentar a definição de simetria em figuras planas:

> Numa figura, a *simetria* consiste numa transformação que mantém a figura invariável na medida em que, depois de submetida a essa transformação, mantém, globalmente, o seu aspeto inicial, embora alguns dos seus pontos possam ser deslocados em consequência da mesma (Devlin, 2002, p. 152).

A partir da definição de simetria em figuras isométricas, particularizou-se os casos da simetria axial e da simetria rotacional. A sistematização do conceito resultou num reconhecimento, por parte dos futuros professores, que as suas conceções sobre as simetrias


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

divergiam da definição – «[As definições] são mais completas do que as ideias que nós tínhamos (…) aquilo que aprendemos e fizemos na escola» [Sara] – em resultado de práticas letivas muito associadas às simetrias axiais e pouco exploradas no que respeita às simetrias rotacionais.

A partir da definição de simetria em figuras planas ocorreu a exploração de situações extremas e a reflexão sobre a simetria de uma figura com uma rotação de zero graus. Perante o questionamento do número de simetrias de um segmento de reta, os futuros professores começaram por identificar uma simetria de reflexão segundo um eixo perpendicular ao segmento no seu ponto médio (mediatriz) e uma simetria de rotação de meia volta em torno do ponto médio do segmento – «Tem simetria de reflexão e em termos de rotação, se nós fizermos assim (roda com centro no ponto médio) só uma, só tem uma simetria, não vamos contar com o zero» [Sara]. A identificação da simetria axial com eixo coincidente ao segmento de reta e a simetria rotacional de volta inteira não surgiu de modo imediato, mas em resultado da exploração da definição de simetria e da noção de dimensão zero das linhas em geometria.

A identificação das simetrias axiais e rotacionais de um polígono regular, após a discussão inicial em torno do quadrado, transformou-se num mero exercício. Contudo, a generalização do círculo como um polígono regular de *infinitos* lados não foi pacífica – «Quantas simetrias axiais e rotacionais tem um circulo? As simetrias axiais e rotacionais são exatamente as mesmas» [Sara] «Se calhar não é infinito» [Helena] «Já não é um polígono regular, aquilo pode já não se verificar!» [Rúben]. O questionamento em relação às suas próprias conceções gerou um aprofundamento do conhecimento matemático e a não assunção óbvia, apesar da sua evidência, do círculo como uma figura simétrica com reflexões em qualquer diâmetro e rotações à volta do centro em qualquer ângulo. A exploração de simetrias axiais e rotacionais gerou um reconhecimento em diversos contextos como por exemplo na natureza (figuras 1 e 2) ou na arquitetura (figura 3).

Figura 1: Feijões

Figura 2: Aloe polyphylla

Figura 3: Porta



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Estes casos de simetrias axiais (figura 1), com uma reflexão vertical, de simetria rotacional (figura 2), com uma rotação no centro da planta e um angulo de 72º (setenta e dois graus) e de simetria de translação (figura 3) (imaginando um prolongamento da transformação), com o vetor de *meia porta*, retratam as simetrias de reflexão, rotação e translação. Esta abordagem didática a partir de artefactos naturais ou culturais é defendida pelos futuros professores como uma forma dos alunos autonomamente construírem o seu conhecimento matemático – «Um trabalho que poderia ser realizado com os alunos, desde a recolha de fotografias, à sua análise» [Ana].

## 3. Rosáceas: Definição e Representações

Dá-se o nome de rosácea às figuras que admitem repetições dentro de uma região limitada do plano, em torno de um ponto, isto é, que admitem simetrias rotacionais, mesmo que não tenham simetrias axiais. No caso de terem apenas simetrias rotacionais, as rosáceas são grupos cíclicos; no caso de terem, em igual número, simetrias axiais e rotacionais são grupos diedrais (Bellingeri, Dedò, di Sieno & Turrini, 2003). Numa rosácea os eixos de simetria, quando existem, passam todos pelo centro de rotação (único) de todas as simetrias rotacionais. A associação das rosáceas à forma circular parece condicionar as perspetivas dos futuros professores à classificação de outras formas em rosáceas, como por exemplo algumas letras maiúsculas do alfabeto. A propósito da discussão em torno das simetrias da letra S (naturalmente que depende do tipo de letra), os futuros professores identificaram-na como uma rosácea cíclica – «[O S] tem 180 [meia volta]. Só tem rotacional» [Sara]. Este mesmo confronto com as conceções de rosácea ocorreu a propósito de uma gravura do pintor Nassos Daphnis (figura 4) utilizada para ilustrar um exemplo de rotação por meia volta sem reflexões – «Já viram, não tem aspeto de rosácea [cíclica]» [Cátia].

Figura 4: Nassos Daphins (1978)

Num estudo (Batista, Guerreiro & Lopes, 2015), desenvolvido no 2.º ciclo do ensino básico, alguns alunos identificaram na gravura (figura 4) uma simetria de meia volta com centro no centro da gravura – ponto de interceção das diagonais do quadrado, contudo outros alunos imaginaram erradamente a existência de reflexões nesta gravura.


ISBN 978-84-945722-3-4

## 4. Frisos: Definição e Representações

Os motivos repetidos numa única direção, através de translações, são grupos infinitos e denominam-se grupos de frisos. A classificação de frisos sem reflexões horizontais mas com reflexões deslizantes (figura 5), de entre os sete tipos de frisos, geraram maior discussão em motivo da dificuldade de identificação da célula do friso (figura 6):

Figura 5: Friso

Figura 6: Possível célula do friso

Os futuros professores identificaram com facilidade a reflexão vertical e a ausência de reflexão horizontal – «Acho que tem um eixo vertical (…) e depois não tem eixo horizontal» [Inês] – mas mostraram maior dificuldade na identificação da reflexão deslizante – «Tem uma horizontal deslizante (…) vai para baixo e desliza um bocadinho» [Cátia]. A identificação da célula do friso – motivo mínimo que reconstrói o friso apenas por translações – tornou-se um auxiliar importante na classificação dos frisos.

A classificação do friso (figura 7), sem atender à irregularidade da faixa de fundo, gerou controvérsia até à identificação da célula do friso.

Figura 7: Friso

Os futuros professores começaram por não identificar qualquer simetria – «Não tem reflexão vertical, tem horizontal e não tem rotação» [Sara] –, em resultado das dimensões distintas dos círculos, ou reconhecer apenas reflexões verticais – «Tem vertical [Ana e Inês]». A identificação da célula do friso gerou um maior conhecimento sobre o mesmo – «Uma (círculo) inteira e duas metades, assim já tem» [Helena] –, gerando uma correta classificação do friso – «Para mim tem tudo» [Cátia].

Os futuros professores classificaram diferentes tipos de frisos e desenvolveram atividades de geração de novas composições de frisos, a partir de um friso existente, por variação das regras dos grupos de simetrias (Pires, Silva, Alves, Dametto & Vecchia, 2013). Esta abordagem foi desenvolvida por uma futura professora a partir de frisos dos gradeamentos dos balcões de varandas de estilo pombalino (século XVIII), destacando a importância da relação com os artefactos culturais na construção do conhecimento matemático:


ISBN 978-84-945722-3-4

> Este olhar diferente para diversos elementos nomeadamente gradeamentos, azulejos, portões, portas, máscaras, tecidos, entre outros, tanto em contexto de sala de aula como fora desta, foi um aspeto fundamental e potenciador de aprendizagens, uma vez que todos eles permitiam momentos de análise e de discussão permitindo uma aprendizagem constante [Cátia].

Decorrente da análise dos frisos com reflexões deslizantes ou com meia volta, os futuros professores identificaram a existência meia volta, rodando a figura, através da verificação da manutenção da configuração global e, após a identificação ou não da meia volta, discutiram a existência de reflexões verticais, horizontais ou deslizantes.

## 5. Padrões: Definição e Representações

Os padrões são motivos (célula de malha) repetidos em duas direções cujos vetores das translações estruturam uma rede retangular, quadrada ou rômbica (Veloso, 2012). Numa investigação de Viseu, Menezes e Almeida (2013) com professores do 1.º ciclo do ensino básico, os "professores do estudo reconhecem a noção de figura padrão de uma pavimentação mas não identificam as transformações geométricas necessárias para pavimentar o plano" (p. 175), quando solicitados a delimitar a unidade padrão na pavimentação (figura 8) e a referir como se obtém a pavimentação.

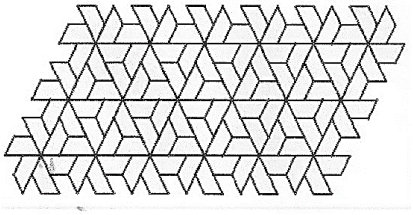


Figura 8: Pavimentação

Todos os futuros professores, durante o trabalho com padrões, identificaram como figura padrão um trapézio, a figura composta por seis trapézios (hélice) ou o triângulo (composição de três trapézios), tal como no caso dos professores, e o losango (dois triângulos com seis trapézios), como célula de malha, que não ocorreu no estudo referido. Os futuros professores reconstroem o padrão a partir de translações em duas direções (horizontal e oblíqua) a partir da hélice (6) e do losango (5), denotando um conhecimento da estrutura de um padrão.

Contudo, no questionamento sobre a identificação da célula da malha de padrões de azulejos de inspiração árabe, sem atender às cores, os futuros professores revelaram dificuldades na comunicação matemática especifica a propósito do padrão representado (figura 9): «Um



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

quadrado (…) tem como vértice o centro das flores (…) o centro do quadrado é o centro da flor» [Inês]; «Um vértice nas coisinhas azuis (…), essas coisinhas azuis fora da flor (…) e vai ter ao outro vértice da coisinha azul da flor que está ao lado» [Rúben].

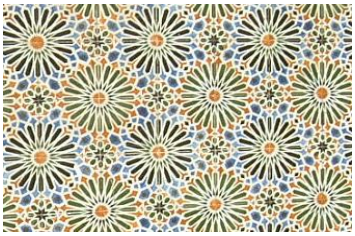


Figura 9: Padrão

Figura 10: Plano da célula da malha

A tentativa de identificar uma célula de malha menor originou a identificação da região do plano contido na célula da malha (figura 10), a partir do qual se constrói o padrão com outras simetrias para além das translações:

> Cátia: – Tenho uma peça pequenina (…) dois vértices no centro das flores e dois vértices nas estrelinhas alternadamente.
>
> Professor: – Será que reproduz?
>
> Cátia: – Não reproduz nada (…) tem de ser refletido.

O estudo das transformações geométricas resultou num treinar do olhar matemático para estes futuros professores – «Treinar o olhar torna-se uma ferramenta quase essencial para despertar a curiosidade e o interesse simultâneo em assuntos que à partida nada teriam em comum» [Helena] –, o que originou um olhar distinto sobre a produção cultural da sociedade, como referem Lopes, Alves e Ferreira (2015), "a percepção de padrões simétricos em traços arquitetónicos e nas artes é reflexo da produção cultural de uma sociedade" (p. 570), perspetiva assumida pelos futuros professores – «Partir desse elemento particular da arquitetura algarvia [chaminés algarvias], não só permite uma maior contextualização do trabalho, como ao mesmo tempo é dada uma relevância aos aspetos culturais, que muitas vezes são esquecidos ou colocados de parte» [Sara].

## 6. Fecho: Destaques

A redução das conceções dos futuros professores sobre simetrias de uma figura às simetrias axiais ilustrou a necessidade de formação complementar sobre transformações geométricas. Neste sentido, a análise de situações extremas como segmentos de reta originou um aprofundamento do conceito e uma valorização do conhecimento matemático. A exploração de rosáceas distintas da *forma circular* constituiu uma abordagem que reforçou o



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

conhecimento da definição e da identificação de rosáceas cíclicas e diedrais em contextos artísticos, valorizando o olhar matemático sobre os artefactos culturais. Os frisos com reflexões deslizantes e com dois eixos de reflexão vertical apresentaram dificuldades acrescidas na sua classificação. A identificação da célula da malha de um padrão e a respetiva comunicação das suas características constituiu o maior entrave à classificação de padrões. O reforço do conhecimento matemático resultou de uma diversidade de exemplos de simetrias, rosáceas, frisos e padrões.

**Referencias bibliográficas**


Bellingeri, P., Dedò, M., di Sieno, S. & Turrini, C. (2003). *O ritmo das formas*. Lisboa: Atractor.

Bastos, R. (2007). Transformações Geométricas. *Educação e Matemática*, 94, 23-27.

Batista, D.; Guerreiro, A. e Lopes, A. (2015). Arte Contemporânea no Ensino das Transformações Geométricas. *Educação e Matemática,* 131,38-44.

Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões*. Porto: porto Editora.

Lopes, L., Alves, G., Ferreira, A. (2015). *Educação & Realidade*, 40 (2), 549-572.

Ministério de Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: ME.

Ministério de Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: MEC.

Pires, J., Silva, A., Alves, C., Dametto, A. & Vecchia, L. (2013). Padrões de Simetrias e Recursão em Ladrilhos Hidráulicos e Bandeiras: Exercícios Didáticos e Construção de Conhecimento Sobre Patrimônio Histórico. *XVII Conference of the Iberoamerican Society of Digital Graphics: Knowledge-based design.* Valparaíso: UTFSM.

Veloso, E. (2012). *Simetria e Transformações Geométricas*. Lisboa: APM

Viseu, F., Menezes, L. & Almeida, J. (2013). Conhecimento de geometria e perspetivas de professores do 1º ciclo do ensino básico sobre o seu ensino. *Revemat*. 08 (1), 156-178.




ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.168

# FORMAÇÃO DE PROFESSORES DOS ANOS INICIAS: DESAFIOS DE APRENDER E ENSINAR MATEMÁTICA COM TECNOLOGIA[22]

Cármen Lúcia Brancaglion Passos
carmenpassos@gmail.com
Universidade Federal de São Carlos

Núcleo temático: IV – Formación del profesorado en Matemáticas
Modalidade: CB
Nível educativo: Formação e atualização docente
Palavras chave: Formação docente, Narrativa, Ensino de matemática e tecnologia.

**Resumo**
*As contribuições de um curso de extensão online ao promover reflexões e espaços de aprendizagem relativos ao ensino de matemática e ao uso de tecnologia informática para o processo de aprender e de ensinar matemática nos anos iniciais é o foco desta comunicação. Analisa-se o processo percorrido por professoras dos anos iniciais e licenciandos de Pedagogia ao longo do curso e os conhecimentos mobilizados por eles e suas aprendizagens. Como dados tomou-se as narrativas escritas e os depoimentos dos participantes registrados durante a formação. O enquadramento teórico considerou referenciais sobre a tecnologia digital, a prática pedagógica para aprender e ensinar matemática e à formação docente, estabelecendo um paralelo com as ideias de Shulman (2004) e de Mishra e Koehler (2006). A análise dos diálogos reflexivos ocorridos entre os participantes revelaram a importância de espaços de formação que elejam o trabalho com o outro como estratégia formativa, conectada por estudos de referenciais que articulem tecnologia e o ensino de matemática, análise e experimentação de softwares, análise, planejamento e replanejamento de situações de ensino com o uso de recursos tecnológicos nas aulas de matemática. As narrativas compartilhadas promoveram diálogos reflexivos durante a formação evidenciando-se como um importante dispositivo de pesquisa e formação.*

## Introdução

Apresentamos uma investigação que decorre da pesquisa "Educação Matemática nos anos iniciais: tarefas exploratório/investigativas, tecnologias informáticas e narrativas de formação[23]", realizada em parceria com a pesquisadora Ana Paula Gestoso de Souza[24] durante o pós-doutoramento "Tecnologia informática na formação e na atuação de

[22] Apoio parcial FAPESP. Processo n. 2017/03757/6.
[23] Financiamento CNPq.Processo n. 311383/2013-0
[24] Financiamento CAPES-PNPD-Institucional. Processo n. 2288/2011.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental". Com o objetivo de identificar saberes curriculares relativos à matemática produzidos em ação pelos professores e licenciandos em Pedagogia foi desenvolvido em processo de formação continuada, com a utilização de recursos tecnológicos. Investigam-se, sob a ótica dos participantes as contribuições de um curso de extensão universitária *online* que buscou promover reflexões e espaços de aprendizagem relativos ao ensino de matemática e à tecnologia informática, para o processo de aprender a ensinar matemática.

Na primeira seção deste texto, discute-se os aportes teóricos relativos a incorporação da tecnologia digital às práticas pedagógicas e à formação docente. Em seguida, analisa-se os depoimentos participantes da extensão focalizando o processo que percorreram ao longo do curso, os conhecimentos mobilizados e as aprendizagens.

**Enquadramento teórico**

Consideramos que os recursos tecnológicos digitais são bens culturais, assim a comunidade escolar e não pode fechar suas portas a essa tecnologia, precisa superar a ideia de modismo, reconhecendo que todos têm direito de aprender a ler as "novas" mídias, afinal, "estar conectado, saber ler, participar do mundo digital e da rede de comunicação, são condições prévias e alimentadoras da liberdade – e por ela alimentadas" (Almeida; Silva, 2011, p. 8), são condições para o desenvolvimento de uma leitura crítica da cultura digital.

A incorporação da tecnologia digital nas escolas públicas brasileiras, via de regra, tem ficado restrita à gestão administrativa, não impactando as práticas pedagógicas de professores. Em alguns casos, a ferramenta tecnológica é utilizada nas aulas como modismo, em outros apenas como um elemento motivador, ou, ainda, somente na realização de atividades que podem ser feitas manualmente.

Penteado; Borba; Gracias (1998, p. 83), há mais de uma década alertavam que recurso tecnológico não substitui e nem complementa o ser humano, é uma ferramenta que "reorganiza a forma como se pensa e como se age"; as "novas" mídias influenciam o conhecimento em sua forma de expressão e produção e isso influência o modo como se concebe e se concretiza o currículo escolar.

Para a integração entre tecnologia digital e prática pedagógica exige-se que o professor, principalmente o que ensina matemática nos anos iniciais, movimente-se para uma zona de


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

risco (Borba; Penteado, 2001), desconhecida, incerta e imprevisível, que pode ser originada por problemas técnicos e por perguntas, referentes ao conteúdo escolar ou ao próprio aplicativo, que não são previsíveis. Além disso, o uso do computador portátil conectado a internet coloca a conectividade na mão dos estudantes e do professor, abrindo espaço para outros canais de comunicação (Almeida e Prado, 2008).

Estabelecendo um paralelo com as ideias de Shulman (2004) sobre a Base de Conhecimento para ensinar, vale ressaltar que saber utilizar os recursos tecnológicos engloba dominar o conteúdo específico da matéria; bem como compreender e saber utilizar os diferentes modos de representação de um conceito e/ou ideia, considerar as maneiras como os alunos aprendem os conteúdos e seus conhecimentos prévios acerca deles, e também conhecer os aspectos que facilitam ou dificultam a compreensão de determinado conteúdo - esses conhecimentos englobam a categoria do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo.

Baseando-se nos pressupostos teóricos de Shulman sobre a Base de Conhecimento, Mishra e Koehler (2006) integram a essa teoria o Conhecimento Tecnológico propondo as seguintes categorias: a) Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (descrito no parágrafo anterior), b) Conhecimento Tecnológico Pedagógico, c) Conhecimento Tecnológico do Conteúdo e d) Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo, este resulta da união das três categorias anteriores.

Segundo Mishra e Koehler (2006), o Conhecimento Tecnológico articulado ao Pedagógico resulta em saber integrar as tecnologias com estratégias pedagógicas gerais, implica em conhecer as limitações e os potenciais da tecnologia para o processo de ensino e aprendizagem, as variações metodológicas que podem ser feitas de acordo com o recurso tecnológico e os contextos educacionais em que cada recurso é mais adequado. Ademais, o professor precisa conhecer as maneiras de utilizar a tecnologia para o ensino da matéria, este é o Conhecimento Tecnológico do Conteúdo e engloba saber quais tecnologias são mais apropriadas ao ensino de determinado conteúdo.

Mishra e Koehler (2006) apontam que a articulação dos conhecimentos descritos anteriormente resulta no Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo. Isto implica a necessidade do professor dominar os três campos de conhecimento (tecnológico, pedagógico e conteúdo específico) e suas relações, sabendo quais tecnologias podem ser


ISBN 978-84-945722-3-4

utilizadas no ensino de determinada matéria considerando as diferentes representações desta e suas especificidades de aprendizagem.

**O contexto da pesquisa**

O curso de extensão universitária *online* "A matemática nos anos iniciais: resolução de problemas na formação e na atuação de professores" foi ministrado por duas pesquisadoras em um trabalho com o professor e com o futuro professor, em grupo, coletivo e reflexivo, envolvendo diálogo, ação e reflexão compartilhada, apoio e respeito mútuo. O estudo meta-analítico de Passos et al. (2006) mostra que os grupos colaborativos podem promover a reflexão - individual e coletiva - sobre a prática docente e sobre os conhecimentos e processo de aprendizagem dos professores e licenciandos acerca de determinado conteúdo específico, bem como se configurar como uma fonte de apoio para enfrentar os desafios e as dificuldades da docência.

Outro aspecto da proposta de extensão refere-se à interação estabelecida em um curso a distância. Corrobora-se com Valente (2011) acerca da importância de desenvolver uma interação intensa, pois, em um curso *online*, muitas vezes, os alunos sentem-se sozinhos. A intervenção docente é um elemento imprescindível, sendo fundamental estabelecer uma abordagem do tipo "estar junto virtual" (Valente, 2011), cujas características são: interação intensa entre professor e alunos e entre os próprios estudantes, *feedbacks* rápidos, atividades síncronas e assíncronas. Essa dinâmica promove a criação de uma rede de aprendizagem e de cooperação.

O desenvolvimento do trabalho com características de colaboração envolveu a interação e o diálogo constante, contou com 20 estudantes de Pedagogia e 05 professores dos anos iniciais. Os participantes elaboraram uma narrativa inicial na qual deveriam registrar uma reflexão sobre a integração entre tecnologia digital e o ensino de matemática.

Escrever sobre as experiências formadoras foi como se o narrador contasse para si mesmo a própria história com a tecnologia e a matemática. Josso (2002) afirma que nesse processo são revelados valores que se atribuem a aquilo que já foi vivido. A autora adverte que essa maneira de narrar é como se estivéssemos dizendo a nós mesmos que nossas vivências têm intensidade particular, que elas se impõe à nossa consciência e que podemos extrair dela informações relevantes para nossa convivência conosco mesmo. Ela compreende que na


ISBN 978-84-945722-3-4

construção da experiência, observam-se três modalidades de elaboração: “ter experiências”: vivências de acontecimentos que ocorreram durante a vida e se tornaram significativos, sem terem sido provocados; “fazer experiência”: vivências que nós próprios provocamos; criamos, de propósito, as situações para fazer experiências; “pensar sobre as experiências”: tanto sobre aquelas que tivemos sem procurá-las, quanto sobre aquelas que nós mesmos criamos.

Posteriormente, foram discutidos, por meio das ferramentas *chat* e fórum de discussão *online*, aspectos teórico-metodológicos da matemática e seu ensino com recursos da tecnologia informática. Foram analisados *softwares* e propostas tarefas exploratório/investigativas que envolviam o ensino de matemática nos anos iniciais com o auxílio de recursos da tecnologia informática. Foram elaboradas situações de ensino e aprendizagem para serem desenvolvidas em salas de aula. Os participantes elaboraram uma narrativa reflexiva sobre o processo formativo percorrido ao longo do curso e o último *chat* englobou o encerramento da extensão.

**Concepções manifestas, indícios de mudanças e aprendizagens**

Identificamos algumas concepções dos participantes, seus conhecimentos mobilizados, indícios de mudança de concepções e algumas aprendizagens relacionadas aos elementos da Base de Conhecimento para a docência integrando o componente do Conhecimento Tecnológico. As primeiras narrativas revelou que a maioria dos participantes justificou que as tecnologias digitais precisam estar presentes nas escolas em razão dos avanços tecnológicos e como forma de motivar os alunos. Contudo, verificou-se que, ao longo do curso, a partir dos diálogos e estudos teóricos, que apresentaram outros elementos referentes ao uso pedagógico da tecnologia.

Amanda e Fernanda, por exemplo, destacaram que apenas compreenderam o conceito de simetria ao participarem do *chat* no qual elaboraram um mosaico simétrico no *Paint Brush* e depois dialogaram sobre as imagens criadas pelos colegas. Os trechos dos depoimentos a seguir ilustram essa perspectiva.

> *[...] só após fazermos nossos mosaicos é que as coisas se clarearam. Portanto, com o auxílio do software e as intervenções do professor o processo de ensino-aprendizagem fica facilitado com as várias possibilidades que se apresentam, como por exemplo, a utilização do Paint Brush para desenvolver uma figura simétrica à outra figura a partir do eixo de simetria. (Amanda – Chat – At. 3).*



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

> *Fez toda a diferença praticarmos no Paint Brush o conceito de simetria. Pelo menos para mim, o entendimento do assunto foi bem melhor. O diferencial está justamente em "colocar a mão na massa", neste caso, no computador. (Fernanda - Chat – At. 3).*

Ainda sobre a proposição de superar a subutilização do recurso tecnológico, aponta-se o comentário de Amanda. Ao retomar uma das análises de Barros e Oliveira (2010) sobre o videojogo *Lego Digital Designer* - jogo que possibilita a manipulação e montagem de peças de Lego virtuais, Amanda destacou que neste caso a tecnologia possibilita que o jogador faça algo que não conseguiria fazer facilmente com o bloco Lego real, pois para ela no videojogo o usuário *"consegue visualizar de forma mais clara os movimentos realizados, facilitando assim a compreensão e aprendizagem".* (Amanda.Fórum.At. 7).

Analisando os comentários das cursistas pode-se fazer um paralelo com as ideias de Gravina e Basso (2012) ao destacarem que as ferramentas interativas, postas pela tecnologia digital, agregam sistemas dinâmicos de representação. Estes podem servir para externar, consolidar e comunicar a matemática ou ainda dar sustentação aos processos cognitivos que produzem o conhecimento matemático, nessa dinâmica, os alunos fazem "experimentos de pensamento".

Infere-se que os depoimentos das cursistas com relação à produção de um mosaico simétrico no *Paint Brush*, à construção e exploração de gráficos no *Excel* e ao uso do jogo *Lego Digital Designer* expressam a perspectiva de que o uso que se pode fazer desses recursos possibilita que os alunos façam "experimentos de pensamento" e nesse cenário, a visualização é fundamental.

Um dos elementos presentes nos depoimentos desses cursistas é o destaque para o fato das problematizações, originadas por um jogo eletrônico, poder levar o aluno a analisar seu raciocínio, as possibilidades de jogadas e as estratégias, tanto individualmente quanto coletivamente. Infere-se que isso envolve o aluno em um processo de argumentação e verificação e propicia o desenvolvimento do pensamento abstrato. Ademais, Barros e Oliveira (2010) verificaram que o alto nível de interação teve como consequência uma dinâmica produtiva para a aprendizagem, bem como pode proporcionar que os estudantes ampliem seus repertórios de estratégias e que poderão ser utilizadas em outras situações.

Constata-se que esses participantes mobilizaram ideias relativas ao Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo. Identifica-se a integração desses três componentes-



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

chave, isto é, a articulação entre o ensino da Matemática a partir de estratégias de ensino (Resolução de Problemas, por exemplo) e suas potencialidades e o uso apropriado dos recursos tecnológicos considerando o processo de aprendizagem do conteúdo específico, como por exemplo, a noção de simetria, construção e análise de gráficos, noção espacial (transformações geométricas, especificamente translação e rotação) e classificação de figuras geométricas.

Além disso, observou-se que o Conhecimento Tecnológico Pedagógico pode ser ampliado quando manifestaram que o professor necessita analisar criticamente um recurso tecnológico. Verificou-se que o *chat* no qual houve a análise de duas propostas de uso do computador para a interpretação de gráficos foi um dos momentos relevantes para a ampliação desse olhar. Ao elaborar a narrativa final Fernanda retomou a importância desse momento de problematização feito no *chat:*

> *O chat em que discutimos a utilização da tecnologia por meio da construção de gráficos foi o que mais me chamou a atenção e me fez refletir, até mesmo para a construção do plano de aula. (Fernanda – narrativa).*

O planejamento das aulas, englobando discussão em grupo, *feedback* das professoras/pesquisadoras e revisão do plano, foi outro momento importante.Eles perceberem que a escolha de um recurso tecnológico precisa estar atrelada com os objetivos de aprendizagem e que o uso do recurso vai além de um fim em si mesmo. Mobilizaram conhecimentos presentes na categoria Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo.

Na narrativa produzida no final do curso, alguns participantes indicaram que o processo de planejar as aulas foi fundamental para se pensar em maneiras de utilizar a tecnologia de forma que não fosse um apêndice. Como exemplo, apresenta-se os seguintes depoimentos:

> *Posso dizer que o momento decisivo desta mudança de concepção* [perceber que a tecnologia não é simplesmente um apêndice da aula] *se deu no momento de elaboração do plano de aula, foi o fazer e refazer do plano que verifiquei as possibilidades de inserção de um software na elaboração de uma aula, [...] foi o ponto alto da minha aprendizagem, buscar, analisar, refletir e elaborar fizeram com que todo o curso fizesse sentido. (Mirian – narrativa final)*
>
> [Sobre o processo de planejamento, englobando o feedback, e a socialização dos planos] *me permitiu conhecer novas tecnologias educacionais e aprender diferentes estratégias pedagógicas que podem ser utilizadas para abordar conceitos matemáticos com o apoio das Tecnologias. (Jéssica – narrativa final).*


ISBN 978-84-945722-3-4

> [A partir das intervenções da professora na elaboração do plano de aula] *vimos que não podemos deixar de destacar que a tecnologia a ser utilizada precisa ter o propósito em atingir o objetivo proposto pelo professor ao elaborar seu plano de aula. (Rosa – narrativa final).*

Além dessas constatações, nas narrativas elaboradas ao final da extensão, outros participantes relataram que com o curso compreenderam que precisam elaborar situações de ensino e de aprendizagem que não subutilizem o recurso tecnológico.

Ao analisar outros depoimentos, ficou clara a perspectiva da maioria dos cursistas de que o computador não substitui o professor.

Mirian declarou que o *software* deve ser utilizado como um recurso a favor da aprendizagem e que o ensino não de ser subordinado ao aplicativo. Juliana, concordando com Mirian, afirmou que o uso do computador nas aulas de matemática não significa que seja *"uma aula de informática simplesmente, mas o professor é importantíssimo como mediador entre o conhecimento, o aluno e o computador". (Juliana – Fórum – At. 7).* Esse apontamento de Juliana é importante, pois mostra que o computador, em uma perspectiva pedagógica do ensino de matemática, não pode ser visto na escola como o objeto de estudo, isto é, como o conteúdo a ser ensinado abordando os elementos constituintes do computador e seus funcionamentos.

**Algumas considerações**

A discussão realizada neste artigo apresentou o processo percorrido por licenciandos e professores em um curso de extensão universitária *online,* seus conhecimentos mobilizados e suas aprendizagens. Sendo possível, constatar algumas contribuições do curso de extensão para o processo de aprender a ensinar matemática. Revelou indícios de mudanças das concepções dos participantes sobre o uso da tecnologia nas aulas de Matemática uma vez que no início do curso muitos participantes consideravam que qualquer forma de uso da tecnologia informática no ensino de matemática era adequada, bem como que seu uso era importante em razão de estimular o interesse do aluno pelo conteúdo. Mostrou importância de eleger o diálogo e o trabalho com o outro como estratégias formativas, conectadas por momentos de estudos de referenciais sobre a articulação entre tecnologia informática e o ensino de matemática.

**Referências bibliográficas**


ISBN 978-84-945722-3-4

Almeida, M.E.B.; Prado, M.E.B.B. (2008). A formação de educadores em serviço com foco nas práticas escolares com o uso do laptop educacional em uma escola pública. In: XIX Simpósio Brasileiro de Informática na Educação. Anais**...** Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2008. p. 1-11.

Almeida, M.E.B.; Silva, M. G.M. (2011).Currículo, tecnologia e cultura digital: espaços e tempos de web currículo. Revista e-curriculum, São Paulo, v.7 n.1.

Barros, C.; Oliveira, I.R. (2010). Videojogos e aprendizagens matemáticas na educação pré-escolar: um estudo de caso. Educação, Formação & Tecnologias. Nov. 3 (2), pp.95-113.

Borba, M.C.; Penteado, M.G. (2001). Informática e Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica.

Gravina, M.A.; Basso, M.V.A. (2012). Mídias digitais na educação matemática. In: Gravina, Maria Alice et al. (orgs). Matemática, mídias digitais e didática: tripé para formação de professores de matemáticas. Porto Alegre: Evangraf.

Josso, M-C. (2002). Uma experiência de vida e formação. Lisboa: EDUCA.

Mishra, P.; Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. Teachers College Record, 108(6), pp. 1017-1054.

Passos, C.L.B.; et al. (2006). Desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática: uma meta-análise de estudos brasileiros. Revista Quadrante. XV (1 e 2), pp. 193-219.

Penteado, M.G.; Borba, M.C.; Gracias, T.S. (1998). Informática como veículo para mudança. Zetetiké, Campinas, CEMPEM, v.6, n.10, p. 77-86, jul./dez.

Shulman, Lee. (2004). Those who understand: knowledge growth in teaching. In: Wilson, S. M. (Ed.).The wisdom of pratice: essays on teaching, learning and learning to teach. 1. ed. United States of America: Jossey-Bass, pp.189-215.

Valente, J. A. (2011). Educação a distância: criando abordagens educacionais que possibilitem a construção de conhecimento. In: Arantes, V.A. Educação a distância**.** São Paulo: Summus. p. 13-44.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.169

# ACCESIBILIDAD MATEMÁTICA A TRAVÉS DE LA TECNOLOGÍA

Clelia Adriana Giménez – Laura Gabriela Loidi

cleliaadriana@gmail.com – lauraloidi@yahoo.com

Universidad Nacional de Lanús - Argentina

Modalidad: CB

Nivel educativo: 5. Formación y actualización docente

Núcleo temático: VII Investigación en Educación Matemática

Palabras clave: Matemática, Accesibilidad, Diseño Universal

**Resumen**

*La investigación en la que trabajamos y compartiremos se desarrolla en la Universidad Nacional de Lanús, Departamento de Desarrollo Productivo y Tecnológico y Campus Virtual. Aborda el caso presentado en la Licenciatura en Sistemas, Área Matemática I al momento de la inscripción de un estudiante ciego.*

*El desafío consistió primeramente en detectar las diferentes improntas que subyacen a la hora de enseñar y dar significancia a ciertos contenidos" (Loidi, 2012, p.8), teniendo presente que deberán ser accesibles a estudiantes ciegos. Otra de las implicancias es inferir como estas selecciones configuran formas de pensar, formas de razonar, formas de aprender la matemática.*

*El análisis evidenció la necesidad de replantear un modelo coherente y comprensivo de los componentes y etapas que implican en el proceso de enseñanza aprendizaje a fin de alcanzar la accesibilidad.*

*Para lo planteado recurrimos a un aula de apoyo proporcionada por la plataforma Moodle, generando un entorno que permite abordar contenidos de matemática, fomentando la presencia de estudiantes con discapacidad visual en la universidad y difundiendo el proceso de adecuación a las necesidades y capacidades de los estudiantes en otros ámbitos universitarios. No obstante, también continuamos estudiando distintos dispositivos y aplicaciones que complementan el entorno.*

## Introducción

La Comisión Asesora de Discapacidad de la UNLa, en el ámbito del Vicerrectorado, creada según Resolución 046/14 del Consejo Superior, tiene como objetivo instalar el debate sobre la temática de la discapacidad dentro del ámbito universitario como una cuestión de derechos humanos, intercambiando conocimientos y experiencias en las áreas de docencia,


ISBN 978-84-945722-3-4

cooperación e investigación, comprometiendo a toda la dinámica de la Universidad y buscando incidir en el diseño e implementación de políticas públicas.

Busca optimizar los recursos necesarios (humanos y materiales) para eliminar barreras culturales, físicas y comunicacionales, en favor de las personas con discapacidad, mediante el abordaje multiactoral de la temática, articulando permanentemente con los diferentes Departamentos y Direcciones de la Universidad.

Si bien el Programa contempla la discapacidad en todas sus expresiones, la discapacidad visual requiere una cuota extra de recursos (e imaginación) según el área de estudios. Frente al ingreso de un estudiante ciego, en la Licenciatura en Sistemas, entre los casi 120 de cada una de las dos comisiones que comenzaban a cursar Matemática I en 2015, tuvimos que rever todo aquello que creíamos, a priori, tener organizado los docentes de la cátedra.

Es así que desde el Campus Virtual, en convocatoria de Proyectos de Tecnologías para la Inclusión Social (PROCODAS) del Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación Productiva (2015), comenzamos la investigación de herramientas para lograr un entorno tecnológico para que el estudiante ciego alcance las mismas expectativas y objetivos que nos proponemos para sus compañeros.

La permanencia de un estudiante ciego en el nivel universitario y en particular cursando Matemática en la carrera mencionada no sería algo simple, requeriría de un gran trabajo interdisciplinario.

**Primera aproximación**

Ante la falta de conocimiento de programas accesibles (estrategias) que permitan efectuar la apropiación de los contenidos obligatorios de la materia del nivel fue necesario indagar y abordar en forma colaborativa la tarea, por lo que hemos generado un equipo interdisciplinario para investigar el tema. Comenzamos indagando en Universidades nacionales si existían casos similares y frente a la poca información que obtuvimos investigamos en la Universidad Nacional de Educación a Distancia y en La ONCE, España, en oportunidad de recibir el premio al Mejor Proyecto TIC Educación Inclusiva, Igualdad y Diversidad en Simo Educación 2015. (Educación 3.0, 2015) (Campus.unla.edu.ar, 2016). La información obtenida en el viaje citado nos abrió las puertas al *software* que nos permitió abordar los contenidos y desarrollar la mayoría de las actividades propuestas.


ISBN 978-84-945722-3-4

El propósito general del proyecto contempló el desarrollo de un entorno virtual para la enseñanza y el aprendizaje matemático garantizando el derecho de igualdad y acceso a la educación en lo referente a la discapacidad visual. Asimismo y de acuerdo a las necesidades observadas, generar un aula virtual de apoyo que permita ampliar el entorno "virtual" que a modo de repositorio es reconocido por los lectores de pantalla y permite organizar los contenidos, audios, enlaces, actividades, y realizar las operaciones necesarias para llegar a los resultados en los procedimientos del área.

**Análisis de condiciones y descripción de la propuesta**

Para abordar la problemática que el proceso de enseñanza-aprendizaje implicaría, se llevó a cabo un análisis inicial de los contenidos que proponía por la cátedra de Matemática I de la Licenciatura en Sistemas de la UNLa y el testeo de accesibilidad que brinda la plataforma virtual y distintas herramientas digitales online y apps de celulares y tablets que se utilizan en prácticas pedagógicas.

Los contenidos considerados fueron Resolución de problemas, Conjuntos numéricos, Introducción al álgebra, Funciones, Geometría y Trigonometría, y Análisis combinatorio.

Las herramientas digitales sometidas a análisis fueron: aula en *Moodle*, con los recursos y actividades que plantea el área, el *software* Lambda, los navegadores *Mozilla Firefox* y *Google Chrome*, *SoundCloud* y carpetas en *Drive* para archivos de audio y las herramientas *WhatsApp* y *mail* para la comunicación.

El análisis concluyó con la necesidad de replantear un modelo coherente y comprensivo de los componentes y procesos que implica en el proceso de enseñanza aprendizaje por parte de un estudiante ciego y la posibilidad, a corto plazo, de utilizar el entorno para todos los estudiantes del aula.

Al momento del replanteo del modelo, en relación a nuestro estudiante, se consideraron aspectos imprescindibles de los contenidos a desarrollar y otros que resultaban consecuencia de ellos (o accesorios) y de los cuales se podría prescindir a fin de lograr el propósito buscado: la matemática, en la carrera de un Analista de Sistemas, resulta una herramienta invalorable a la cual debe poder echar mano cuando sea necesario.

La cátedra propone el aprendizaje basado en la resolución de problemas. En estos casos no concluye en la solución misma, sino que a través de ella se establecen nuevas relaciones, se


ISBN 978-84-945722-3-4

modifican los conocimientos previos, se rechazan algunos y se enriquecen otros. Esto no se consideró un escollo sino por el contrario, un buen modo de llegar a movilizar el interés por los distintos contenidos.

La propuesta se desarrolla en un aula de apoyo a la enseñanza presencial, entorno *Moodle*, y la complementación con herramientas *web* y *software* accesible específico del área.

En cuanto al *software*, como interfaz de práctica y desarrollo de actividades que complementan la teoría propia de los contenidos curriculares, comenzamos analizando distintas aplicaciones, sistemas operativos, aplicaciones para tabletas y celulares y llegamos a la conclusión que para esta primera experiencia, utilizaríamos LAMBDA como *software* principal.

LAMBDA relaciona los signos o expresiones matemáticas entre *Braille* y la correspondiente representación visual. Es preciso seguir una determinada metodología a la hora de introducir la signografía matemática y requiere de un tiempo previo de estudio para entender la interfaz a través de los lectores de pantalla (compatible con JAWS y NDVA), tanto para el profesor como para el estudiante.

Para que los ejercicios sean revisados y presentados de la misma forma que se desarrollan en un cuaderno, Lambda proporciona compatibilidad con el estándar MathML definido por el Consorcio Internacional *W3C*. La normativa MathML marca las pautas que debe seguir el formato de los archivos que contengan información para la representación, conversión e intercambio de formulaciones científicas. De este modo, al usuario de Lambda, le es posible intercambiar información con el profesor, estudiantes y otros programas que soporten el estándar MathML, tal como lo muestran

las dos imágenes que continúan.


ISBN 978-84-945722-3-4

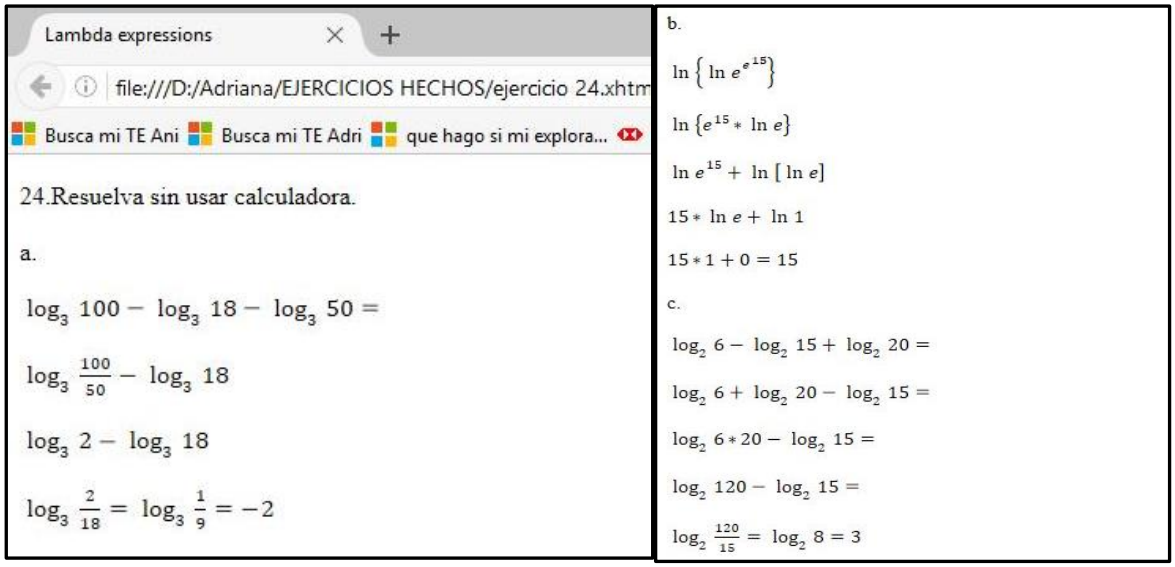



Imagen 1 -Interfaz de archivo HTML visualiza la Signografía matemática y el desarrollo de las expresiones.

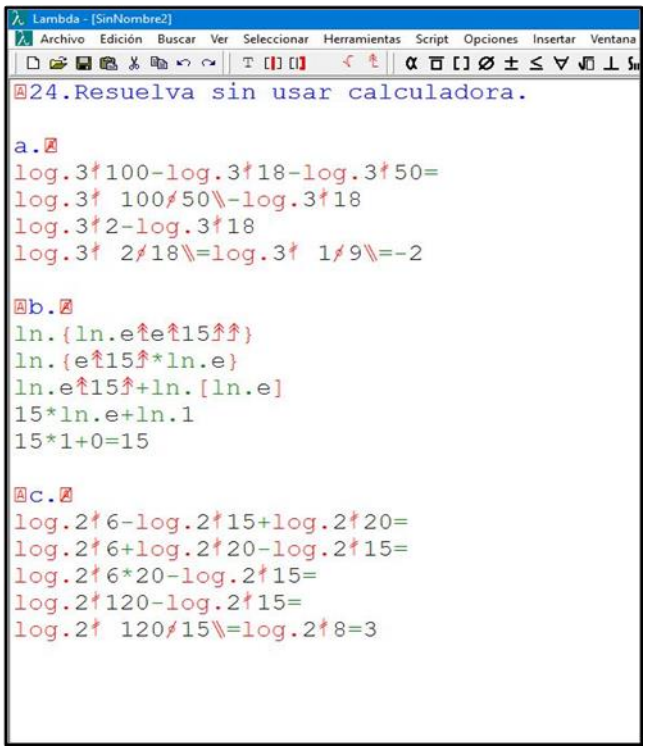



Imagen 2 - Interfaz de archivo Lambda, entorno que lee el lector de pantalla.

Como tal, los contenidos que el estudiante relaciona, comprende y desarrolla siguiendo los procesos matemáticos, se basan en audio que debe recordar y "visualizar" mediante las lecturas de los lectores que utiliza a través de la interfaz.

En algunas ocasiones, el lenguaje matemático que utiliza el profesor del área, no concuerda con el lenguaje que transmite el *software* por lo que hay que hacer ajustes en las explicaciones y actividades para lograr el aprendizaje.

Como complemento de las TIC, y para abordar la problemática de la expresión gráfica, en un principio se recurrió a un tablero de corcho, buen representante de las dos dimensiones en


ISBN 978-84-945722-3-4

las que se trabajó (mostraba con pegamento sobre relieve los ejes cartesianos y las escalas pretendidas, a la par que chinches de distintos aspectos al tacto se convirtieron en la sucesión de puntos que daban lugar a los distintos entes geométricos e incluso a funciones). En lo que a funciones se refiere, se pudieron representar rectas, ya sean secantes, paralelas o perpendiculares; como así también reconocer parábolas y sus elementos, y otras. Unos meses después al limitarse las actividades en algunos casos, por las funciones a representar, ampliamos el equipo de trabajo, sumando a Marianela Pavicich (Licenciada en Diseño Industrial de la Universidad), quién desarrollo un *kit* de instrumentos de dibujo con diseño universal "Rina" (*kit* conformado por un tablero de coordenadas, una regla, una escuadra y un transportador, donde todos los elementos presentan un diseño versátil que permite adaptarse a los diferentes usuarios). Esta incorporación al equipo de trabajo posibilitó a nuestro estudiante ciego mejorar la expresión gráfica de manera excepcional más allá de lo logrado hasta el momento.

**Resultados y conclusiones**

El estudiante logró expresarse utilizando los diferentes lenguajes propios de la matemática, aunque se trató de no complejizar, en tanto extensión de algunas propuestas. Los logros obtenidos fueron altamente satisfactorios de acuerdo a los contenidos propuestos, a tal punto que el estudiante logró alcanzar los requerimientos de la cátedra y aprobar la cursada.

La interfaz encontrada produjo un cambio notable en las posibilidades de evaluación de la materia, porque permite al estudiante analizar el recorrido realizado para alcanzar el resultado y aprender del error. Asimismo, ofrece un entorno de convergencia tecnológica ubicua, con interfaces fáciles tanto para el estudiante y el docente guía del proceso. Recorriendo la plataforma *Moodle* con los lectores de pantalla podemos asegurar luego de varios testeos que es accesible para la lectura de los contenidos.

Se analizaron las fortalezas y debilidades del uso de la interfaz de comunicación del aula en diferentes dispositivos.

Al momento se continúa investigando, en la búsqueda de algún software que describa las gráficas y aporte alguna innovación en lo referente a este modo de expresión.


ISBN 978-84-945722-3-4

En lo sucesivo algunos interrogantes nos motivan a avanzar : ¿Es posible encontrar una interfaz de comunicación y diálogo para estudiantes ciegos que aseguren su óptima comprensión? ¿Son éstos *software* accesibles para todos los estudiantes de la comisión?

"El desafío consiste en detectar las diferentes improntas que subyacen a la hora de enseñar y dar significancia a ciertos contenidos" (Loidi, 2012, p.8), teniendo presente que deberán ser accesibles a estudiantes ciegos. Otras de las implicancias es inferir como estas selecciones configuran formas de pensar, formas de razonar, formas de aprender la matemática.

A largo plazo, la pretensión no es menos ambiciosa, se buscará articular los niveles secundario y universitario del sistema educativo con el fin de garantizar el acceso a la educación de las personas ciegas.

A la hora de proponerse una estrategia posible debe tenerse en cuenta que "tanto las concepciones como las creencias tienen un componente cognitivo" (SOAREM, 2008. p.3), e influyen fuertemente tanto en la selección de contenidos como en la evaluación de los estudiantes, en la concepción de su propio rol como docente y el contrato didáctico que establecerá en su práctica.

**Referencias bibliográficas**


Campus.unla.edu.ar (2016). Premio internacional para una docente del Campus Virtual UNLa. Recuperado de http://campus.unla.ar/premio-internacional-para-una-docente-del-campus-virtual-unla/ Consultado 24/04/2017

Compartolid.es – Valoración y guías teniendo en cuenta la accesibilidad. (2016). Recuperado de: Compartolid.es. http://www.compartolid.es / Consultado: 24/04/2017

Educación 3.0, &. (2015) *Lista de ganadores de la III edición de los Premios a la Innovación Educativa en Simo Educación 2015*. Recuperado de: http://www.educaciontrespuntocero.com/noticias/lista-de-ganadores-de-la-iii-edicion-de-los-premios-a-la-innovacion-educativa-en-simo-educacion-2015/29537.html/ Consultado 24/04/2017




ISBN 978-84-945722-3-4

Lambda Project Linear Access to Mathematic for Braille Device and Audio-synthesis, (2011) *Guía de instalación del Software Lambda*. Recuperado de: http://www.compartolid.es/lambda/ Consultado: 30/09/2016

Las experiencias del personal docente de matemática en el trabajo de aula con la población no vidente. Recuperado de: http://repositoriocdpd.net:8080/bitstream/handle/123456789/1375/Art_BolanosGonzalezH_Experienciasdelpersonaldocentedematematica_2016.pdf?sequence=1 Consultado 24/04/2017

Ley Nº 51 de igualdad de Oportunidades No Discriminación y Accesibilidad Universal de las personas con Discapacidad (Liondau). Recuperado de: https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2003-22066/ Consultado: 28/09/2016

Ley Nº 24.521 de Educación Superior. Recuperado de: http://servicios.infoleg.gob.ar/in foleg Internet/anexos/25000-29999/25394/texact.htm/ Consultado 28/09/2016

Ley Nº 25.573 de Educación Superior, modificatoria de Ley 24.521 Recuperado de: http://servicios.infoleg.gob.ar/infolegInternet/anexos/70000-74999/73892/ norma. htm/ Consultado 28/09/2016

Ley Nº 26.206 de Educación Nacional. Recuperado de: http://ser vicios.infoleg.gob.ar/infolegInternet/anexos/120000-124999/123542/norma.htm Consultado 28/09/2016

Ley Nº 26.378 Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad y su protocolo facultativo. Recuperado de http://www.conadis.gov.ar/ doc_publicar /legales/ ley26378. pdf / Consultado 28/09/2016

Loidi, L. (2012): *Abordaje de los números irracionales*. (Tesis de Licenciatura-inédita) Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Avellaneda, Argentina.

Resolución de creación del Programa de Inclusión Universitaria para Personas con Discapacidad. Recuperado de http://www.unla.edu.ar/documentos/eventos/R.CS.N_108-13--20.05.13%20Res%20Creacion%20Programa%20Inclusion%20Discapacidad.pdf/ Consultado 20/03/2017


ISBN 978-84-945722-3-4

SOAREM (Noviembre de 2008) *Concepciones y creencias de profesores sobre enseñanza y aprendizaje de la matemática.* Recuperado de: http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:l3tQQ0VUgJQJ:www.soarem.org.ar/Documentos/59%2520Crespo.pdf+&cd=2&hl=es&ct=clnk&gl=ar Consultado 24/04/2017

Ley Nº 26.378 Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad y su protocolo facultativo. Recuperado de; http://www.conadis.gov.ar/doc_publicar/legales/ley26378.pdf / Consultado 28/09/2016

Loidi, L. (2012): *Abordaje de los números irracionales*. (Tesis de Licenciatura-inédita) Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Avellaneda, Argentina.

Resolución de creación del Programa de Inclusión Universitaria para Personas con Discapacidad. http://www.unla.edu.ar/documentos/eventos/R.CS.N_108-13--20.05.13%20Res%20Creacion%20Programa%20Inclusion%20Discapacidad.pdf/ Consultado 20/03/2017

SOAREM (Noviembre de 2008) *Concepciones y creencias de profesores sobre enseñanza y aprendizaje de la matemática.* Recuperado de: http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:l3tQQ0VUgJQJ:www.soarem.org.ar/Documentos/59%2520Crespo.pdf+&cd=2&hl=es&ct=clnk&gl=ar Consultado 24/04/2017


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.172

# LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA EN EL CURRÍCULUM: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA SU DESARROLLO EN EL AULA.

Daniel Fernández Contreras
danfernandez.ac@gmail.com
Chile

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: Comunicación Breve (CB)
Nivel educativo: Medio o Secundario (12 a 15 años)
Palabras clave: Demostración, Razonamiento en el aula.

**Resumo**

*El presente trabajo, consiste en realizar una propuesta didáctica sustentada en la Teoría de Procesos de Prueba de Nicolas Balacheff (2000) para desarrollar la habilidad de demostrar en el aula. La propuesta, responde a la necesidad impuesta por los ajustes curriculares realizados por el Ministerio de Educación de Chile (2016) que reubican el trabajo de esta habilidad, que antes se trabajaba en el país sólo en la universidad y en carreras asociadas al campo matemático. En este afán, se busca entregar una sugerencia de cómo promover el razonamiento en el aula por medio de diferentes recursos ya utilizados por los docentes, material concreto, TICs, entre otras, verificando así su papel heurístico.*
*Este proyecto propone actividades didácticas con el objetivo de hacer transitar a las estudiantes desde actividades iniciales en el ámbito de las pruebas pragmáticas, hasta actividades orientadas a las pruebas intelectuales, para conseguir que ellos se acerquen al razonamiento y lenguaje matemático, logrando así, esencialmente que se efectúe una transición en el conocimiento, pasando de lo concreto a lo abstracto.*

## Planteamiento del problema:

La enseñanza de la matemática siempre ha sido fuente de preocupaciones para profesores y apoderados. A lo largo de la historia de la Educación, el aprendizaje de la matemática ha presentado constantes obstáculos y dificultades en la mayoría de los estudiantes. Además, en los últimos años han existido diversos cambios en el currículum nacional, con el último ajuste se introdujeron las Bases Curriculares, que son orientaciones respecto a lo que debe enseñarse en cada asignatura perteneciente a los planes de estudio del currículum nacional, propuestas por el Ministerio de Educación de Chile para la educación básica, en dichas bases se indica


ISBN 978-84-945722-3-4

para la asignatura de matemática que se debe desarrollar la habilidad de demostrar, tanto en el eje de Geometría como en el de Álgebra (Ministerio de Educación, 2012), volviéndose complejo para docentes el enseñar algo cuya noción no es del todo clara.

Además, en dos grandes pruebas internacionales que miden y analizan el rendimiento y logros educativos en los estudiantes, se tiene por una parte que "por primera vez Chile alcanza el primer lugar de Latinoamérica en todas las áreas evaluadas: Matemática, Lectura y Ciencias." (Agencia de calidad de la educación, 2013, p. 11), sin embargo, se ubica muy por debajo de los demás países participantes, ya que, "Chile se encuentra a 71 puntos del promedio de la OCDE y entre el lugar 50-52 de los 65 países evaluados." (Ibid, p. 16). Cabe destacar que en matemática, el país obtuvo 423 puntos y que, en esta misma área, un 52% de los estudiantes demuestra no poseer una base mínima de preparación para enfrentar los desafíos que impone la sociedad moderna (Ibid, p. 13). Por otra parte, en la prueba TIMSS (Agencia de Calidad de la Educación, 2012), el puntaje promedio obtenido por los estudiantes de 4º básico (9 a 10 años) en Matemática, es de 462 puntos. Esto indica que el 23% de los estudiantes chilenos queda fuera de los niveles de clasificación y solamente el 2% alcanza el nivel Avanzado. Un 33% alcanza solo el nivel Bajo, que corresponde a capacidades y conocimientos básicos en Matemática. Por otro lado, 30% de los estudiantes llega al nivel Intermedio, ellos logran aplicar conocimientos básicos en situaciones sencillas. Solamente el 12% de los estudiantes chilenos ha alcanzado el nivel Alto, lo que indica que logran aplicar su conocimiento y comprensión para resolver problemas matemáticos. (Agencia de calidad de la educación, 2013, pp. 14 – 16)

Lo anteriormente expuesto ha influido considerablemente en el proceso de enseñanza-aprendizaje, por esto las metodologías de los docentes deben ir modificándose para que estén acorde con lo que el nuevo currículum exige, y en consecuencia, el promover el desarrollo de nuevas habilidades en los alumnos se vuelve esencial.

La didáctica de la matemática es una disciplina que se ocupa del estudio de los fenómenos del proceso de Enseñanza y Aprendizaje ligados al saber matemático. Por lo expuesto anteriormente, se hace evidente la necesidad de utilizar teorías basadas en la didáctica de la matemática, ya que cumplen una función de guía para lograr exitosamente el aprendizaje significativo de los conocimientos matemáticos.


ISBN 978-84-945722-3-4

Este trabajo es una propuesta para la enseñanza de la habilidad de demostrar (Dreyfus, 2000), en estudiantes de nivel medio o secundario, en la cual se utilizó como sustento teórico, la tipología de prueba de Nicolas Balacheff (2000), que consiste en una descripción de las tipologías de pruebas que suelen presentar los estudiantes cuando se les solicita realizar una demostración de alguna propiedad matemática.

La motivación para llevar a cabo esta propuesta es complementar y aportar a las investigaciones referentes al tema de la demostración, debido a que es una habilidad compleja por el nivel de abstracción que se requiere para realizarla, es por eso que se considera necesario realizar un análisis de la información disponible y una propuesta con un sustento teórico apropiado, lo cual será de suma relevancia para los docentes de matemática.

Además se espera que el alumno sea capaz de construir su propio conocimiento a través de la teoría, que está sustentada en una concepción constructivista. La idea principal es presentar un instrumento innovador para que los docentes puedan trabajar con sus alumnos y así generar un aprendizaje significativo, logrando en ellos el desarrollo del razonamiento y el pensamiento crítico.

## Objetivos

I. Reflexionar en torno a los métodos de enseñanza de las demostraciones en educación básica planteados por el Ministerio de educación a través de las bases curriculares y textos de estudios.

II. Proponer un diseño didáctico sustentado en la tipología de prueba de Nicolás Balacheff, para ser utilizada por estudiantes de 6° año básico (11 a 12 años) a 2° año medio (15 a 16 años).

III. Evaluar la propuesta didáctica sustentada en la tipología de prueba de Nicolás Balacheff, como herramienta heurística en la construcción de la noción de demostración matemática.

## Marco teórico



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

La Tipología de Prueba de Nicolas Balacheff (2000), es un modelo centrado en el Razonamiento Matemático. Este modelo clasifica las pruebas proporcionadas por los estudiantes en dos tipos: las Pragmáticas y las Intelectuales, cuando los docentes logran comprender las diferencias entre éstas, puedan utilizarlas en beneficio de promover en los estudiantes una apropiada forma de razonar y construir los conocimientos. Para explicarlas utilizaremos un ejemplo del álgebra: "Probar que la suma de tres números naturales consecutivos, es siempre múltiplo de tres."[25]

Las Pruebas Pragmáticas son aquellas que están ligadas a la acción, a la experimentación y la justificación, que se realizan a través de material concreto con el fin de asegurar la validez de un enunciado. Dentro de estas pruebas pragmáticas encontramos tres categorías:

1. El empirismo ingenuo, es cuando el estudiante afirma que un enunciado es verdadero después de observar que se cumple en determinadas circunstancias. En este caso el estudiante diría: 3 + 4 + 5 = 12 es múltiplo de 3; 5 + 6 + 7 = 18 es múltiplo de 3 extrayendo la conclusión a partir de un número acotado de casos.

2. La experiencia crucial escoge una experimentación cuyo efecto permite distinguir entre dos suposiciones, siendo verdadera sólo una de ellas. Se generaliza a partir de un caso lo menos particular posible, por ejemplo: 350000 + 350001 + 350002 = 1050003

3. Por último, tenemos el ejemplo genérico que se refiere a que el estudiante escoge un ejemplo cualquiera y afirma que el enunciado es verdadero tras comprobar que se cumple para dicho ejemplo, avanzando hacia una formulación más general, para el ejemplo:

"4 + 5 + 6 = 4 + (4 + 1) + (4 + 2) = (4 x 3) + 3 y pasa lo mismo si en vez de 4 pongo cualquier otro número."

Las Pruebas Intelectuales, requieren de un razonamiento específico e interiorizado, en el cual se dejan de lado los objetos materiales, transitando de lo concreto a lo abstracto del pensamiento. Dentro de las pruebas intelectuales encontramos tres categorías:

1. La experiencia mental se sustenta en la independencia de la representación de un objeto, con el razonamiento. Se consideran ejemplos que no son tomados como elementos de convencimiento, pero sirven para estructurar la justificación o apoyar la argumentación. En el ejemplo presentado se darían respuestas como: "Si pienso un número, el que sigue tiene uno más y el que sigue tiene dos más. Si los sumo tengo 3 y tres veces el primer número."

[25] Dirección Provincial de Educación Superior y Capacitación Educativa. (2008). Los alumnos como productores de conocimiento matemático. San Bernardo, Argentina.


ISBN 978-84-945722-3-4

2. La demostración es un tipo de prueba que presenta una sucesión de enunciados que se organizan siguiendo un orden definido, cada uno de los cuales es una definición, un axioma, un teorema (demostrado previamente) o un postulado, utilizando un lenguaje reconocido por la comunidad matemática. En el ejemplo, aunque en forma resumida, sería:

"Sean n, n+1 y n+2 tres números naturales consecutivos, se tiene qué:

$n + (n + 1) + (n + 2) = 3\,n + 3 = 3\,(n + 1)$"

3. Por último, tenemos el cálculo sobre enunciados, que trata de pruebas autónomas de la experiencia y donde no se trabaja ni con ejemplos ni con dibujos. Crean razonamiento o construcciones intelectuales fundamentadas en teorías formalizadas que se originan en una definición o propiedad basándose en la transformación de expresiones simbólicas formales.

Las actividades de demostración en los alumnos desarrollan la capacidad de elaborar procedimientos de resolución frente a un problema que después tendrán que demostrar a partir de argumentos que puedan convencer a otros de su veracidad: "La demostración es una herramienta esencial de prueba; ésta conduce a un ejercicio práctico, que hace posible la comunicación y la evaluación a la vez."(Balacheff, 2000, p.2)

**Metodología**

El presente estudio busca establecer la relación existente entre la aplicación de un método de enseñanza basado en la Tipología de Prueba de Nicolas Balacheff (2000) y el desarrollo de la habilidad de demostración en geometría. Se busca establecer la relación existente entre las variables en estudio, es decir, confirmar la hipótesis de que la propuesta de enseñanza colabora para construir un razonamiento geométrico en la habilidad de demostrar. Por lo anterior, se deduce que la investigación tendrá una lógica deductiva, ya que lo que se pretende es confirmar la hipótesis planteada.

Se considerarán dos variables: la variable dependiente será el desarrollo de la habilidad de demostrar, en las estudiantes de 6to año básico, que comprenden edades entre 11 y 12 años, del Colegio España en Concepción "La variable dependiente no se manipula, sino que se mide para ver el efecto que la manipulación de la variable independiente tiene en ella." (Hernández, Fernández, Baptista, 2010, p. 123) y la variable independiente serán los estudiantes de la muestra.


ISBN 978-84-945722-3-4

Se ha escogido para el desarrollo de la propuesta, contenidos de geometría para estudiantes de nivel medio o secundario.

Así, las actividades iniciales están orientadas a que los estudiantes observen ejemplos de triángulos y mediante la medición de sus ángulos y la suma de ellos, se aventuren a conjeturar que esta suma siempre es 180º. Posteriormente se les invita a realizar una verificación de su conjetura, aún con material concreto, mediante el uso de un triángulo de papel que deben recortar, para ubicar los ángulos de manera de formar un ángulo extendido y visualizar que la suma de los tres, efectivamente es 180º. A continuación, se introduce el apoyo del software Cabri para mostrar que podemos modificar los vértices de un triángulo y la propiedad continúa cumpliéndose. Todo lo anterior se desarrolla en el ámbito de las pruebas pragmáticas. El objetivo es ir acercando gradualmente a los estudiantes a las pruebas intelectuales para conseguir que desarrollen la habilidad de demostrar. Para esto, se ha diseñado una actividad que mediante la utilización de los conocimientos previos referentes a ángulos entre paralelas cortadas por una secante, va guiando a los estudiantes hacia una verdadera demostración. Finalmente, se debe comprender que por ser el primer acercamiento que tienen los alumnos a una habilidad tan compleja como la demostración, no se puede esperar que comprendan de inmediato toda la rigurosidad ni el lenguaje formal que esto requiere, por lo que la actividad final, se realiza mediante términos pareados, entregándoles una serie de sentencias que deben ordenar según lo observado hasta el momento, de modo de poder utilizarlo como base para la redacción de una verdadera demostración del Teorema trabajado.

La unidad de análisis que se utilizará, serán estudiantes de 6º año básico (11 a 12 años) y 2° medio (15 a 16 años), la población escogida corresponde a los estudiantes de dichos niveles pertenecientes a establecimientos municipales de la comuna de Concepción y, dentro de esta población, se ha escogido como muestra a estudiantes del Colegio España. Se ha optado por una muestra no probabilística, el criterio utilizado para la selección de la muestra es por conveniencia, ya que por las limitaciones de tiempo resulta más factible realizar la propuesta en un colegio determinado. Con respecto a la temporalidad, el presente estudio es de corte transversal porque no existe continuidad en el eje del tiempo, ya que los datos serán recogidos durante una cantidad de tiempo limitada, aplicando la prueba para medir el desarrollo de la habilidad de demostrar una sola vez sin posteriores repeticiones.


ISBN 978-84-945722-3-4

## Resultados y Conclusiones

Se ha podido constatar a través de las actividades propuestas en el diseño de enseñanza, que si bien, el paso de las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales no es natural como lo plantea Duval (2005), se puede provocar por medio de esta intencionalidad. Si bien durante la aplicación se pudo observar que no era una tarea fácil de abordar para los estudiantes, pues inicialmente les resultaba difícil esta abstracción de alcanzar la concepción demostración, durante y en el avance de las actividades comenzaron a realizar inferencias y conjeturas que los llevaron al acercamiento de la rigurosidad, incluso en la escritura de las justificaciones utilizadas para argumentar por medio de los criterios de congruencias las propiedades o teoremas en juego. Así se puede evidenciar un tránsito entre la tipología de pruebas, pues la primera forma de abordar los problemas, fue utilizando el software para medir y corroborar que la propiedad se cumplía, posteriormente justificaban sus construcciones y elementos de ella por medio de definiciones y propiedades, pero aun necesitando el dibujo de la construcción. Finalmente hubo un grupo de 3 estudiantes que logró formalizar con herramientas teóricas la veracidad de los distintos teoremas, alcanzando así una cercanía a las pruebas intelectuales. Se debe destacar que la Geometría Dinámica, en este caso, el software CABRI II juega un rol de real importancia, pues es éste, quién ayuda y motiva a los estudiantes a explorar, inferir, conjeturar, justificar, etc. Si bien, este es sólo el artefacto por el cual se desarrolla el tránsito de la visualización a la prueba, es quien cumple el rol de convencer a los estudiantes de la veracidad de las propiedades puestas en juego en el diseño propuesto, en particular, por medio de la percepción visual ellos identifican los elementos necesarios para la construcción utilizando el modelo teórico como referente en sus posteriores justificaciones.

## Referencias bibliográficas

Agencia de Calidad de la Educación (2013). *Resultados PISA 2012 Chile*. Santiago: Agencia de Calidad de la Educación.


ISBN 978-84-945722-3-4

http://educacion2020.cl/sites/default/files/resultadospisa2012chile_agencia.pdf Consultado 06/09/2015

Agencia de Calidad de la Educación (2012). *Resultados TIMSS 2011. Chile*. Santiago: Agencia de Calidad de la Educación. http://www.agenciaeducacion.cl/wp-content/uploads/2013/02/resultados-timss-18-dic-2012.pdf Consultado 06/09/2015

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente, Universidad de los Andes.

Dreyfus, T. (2000). *La demostración como contenido a lo largo del currículum*. En Gorgorió i Solá, M. (coord.) Matemáticas y educación: retos y cambios desde una perspectiva internacional. Madrid: Graó, pp. 126 – 134.

Duval, R. (2005). *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements.* Annales de Didactique et Sciences Cognitives,10, 5 - 53.

Ministerio de Educación Chile. (2012). *Bases Curriculares de Enseñanza Básica*. Santiago: Chile.

Ministerio de Educación Chile. (2016). *Bases Curriculares de Enseñanza Media*. Santiago: Chile.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.173

# LADIMA: LABORATÓRIO DIGITAL DE MATEMÁTICA NUMA PLATAFORMA VIRTUAL PARA O APRENDIZADO DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Midiele Dantas Gomes – André Ricardo Magalhães – Géssica Bruna Bahia de Souza
midieledantas@hotmail.com – andrerm@gmail.com – gessica_estrela@hotmail.com
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (BR) – Universidade Estadual da Bahia (BR) – Instituto Federal Baiano (BR)

Núcleo temático: Ensino e aprendizagem da matemática em diferentes modalidades e níveis educacionais.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Médio ou Secundário (12 a 15 anos)
Palabras clave: Laboratório Digital de Matemática, aprendizagem, Teoria das Situações Didáticas

**Resumo**

*Esta sugestão desenvolvida neste trabalho, é uma pesquisa aplicada, com o objetivo de discutir e promover um ambiente de aprendizado através do LADIMA, laboratório digital de matemática, numa plataforma virtual, com o intuito de criar uma ferramenta que possa auxiliar a compreensão dos conceitos envolvidos nas relações trigonométricas, com estudantes do 9º ano do ensino fundamental do colégio Roberto Santos, em Salvador-BA. Optou-se por trabalhar com as relações trigonométricas, uma vez que identificou-se a grande resistência dos estudantes em conceber essa noção. Assim, buscamos responder: Em que medida o uso de objetos digitais de aprendizagem podem potencializar o ensino de Relações Trigonométricas para os estudantes? Nesta perspectiva, baseamos na Teoria das Situações Didáticas, proposta por Guy Brousseau (2008), onde propõe-se que o estudante possa fazer parte da construção do seu conhecimento, investigando sobre o domínio a ele apresentado, não somente ingerindo uma informação pronta e acabada apresentada pelo professor. Do ponto de vista metodológico, utilizamos a abordagem qualitativa, e além disso, empregamos a Engenharia Didática baseada nos objetivos da Teoria das Situações Didáticas (TSD). A conclusão aponta que os objetos digitais intermediados pelas sequencias didáticas podem trazer benefícios nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática.*

## 1. Teoria das Situações Didáticas

A **Teoria das Situações Didáticas** foi idealizada por Guy Brousseau, e tem produzido significantes contribuições para a pesquisa sobre o ensino e aprendizagem da


ISBN 978-84-945722-3-4

matemática. Ela tem como princípio a problematização matemática e sustenta-se na ideia de que se produz um certo conhecimento matemático por meio da adaptação a um dado ambiente que causa instabilidade e desequilíbrios para o aluno, apresentando-se portanto como uma contraproposta ao modelo didático clássico, que tem como destaque a exposição de conteúdos sistematizados.

Considerada hoje como ferramenta científica, a Teoria das Situações Didáticas se originou quando o ensino e a aprendizagem de Matemática eram tomados unicamente pela visão cognitiva, induzida pela epistemologia de Piaget.

A teoria é tida como parâmetro no campo da Educação Matemática e não expõe os alunos como ponto principal, mas sim a situação didática, onde existem interações entre alunos, professores, ambiente e saber matemático, em busca da aprendizagem, ou seja, o que se propõe a aprender e como isso ocorre. Para o autor uma situação didática se caracteriza sempre que houver uma intencionalidade do professor em propiciar ao aluno a aprendizagem de um dado conhecimento. Conforme a afirmação Brousseau (1986):

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certe meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimento pertinentes. (p.8)

Por meio da análise das situações didáticas é possível avaliar a problemática da aprendizagem matemática e prever possíveis fatores que possam ocorrer no desenvolvimento da resolução de problemas e durante a construção dos conceitos pelos alunos. O que estimula o desenvolvimento da aprendizagem matemática são as atividades que o professor seleciona para trabalhar durante as aulas, o exercício pedagógico inicia-se, portanto, com a definição de um problema adequado, que precisa corresponder com o grau de conhecimento do educando.

Assim, Brousseau (1986) desenvolveu uma tipologia de situações didáticas analisando as principais atividades específicas na aprendizagem matemática que segundo Machado (2010):

> Situação de ação – quando o aluno, que se encontra ativamente empenhado na busca de solução de um problema, realiza determinadas ações mais imediatas, que resultam na produção de um conhecimento de natureza mais operacional.



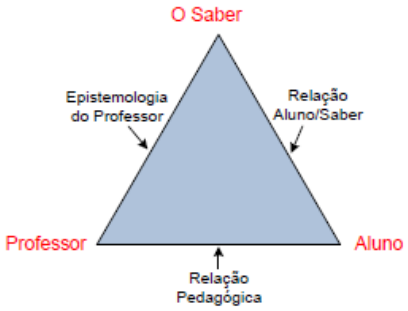
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

> Situação de formulação – o aluno já utiliza, na solução do problema estudado, alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos, além de mostrar um evidente trabalho com informações teóricas de uma forma bem mais elaborada, podendo ainda utilizar uma linguagem mais apropriada para viabilizar esse uso da teoria.
> Situação de validação – o trabalho do aluno não se refere somente, às informações em torno do conhecimento, mas a certas afirmações, elaborações, declarações a propósito desse conhecimento. Nessas situações, é preciso elaborar alguma prova daquele que já se afirmou.
> Situação de institucionalização – sistematização por meio da apresentação de definições, propriedades e teoremas, em linguagem matemática mais formalizada, onde deve ocorrer uma socialização, professor e alunos dialogam sobre conhecimentos matemáticos historicamente construídos relativos ao problema. (p. 95 a 103)

Portanto, para que se consiga uma perspectiva que contemple a teoria das situações didáticas o principal a se considerar são os procedimentos metodológicos, onde o professor fornece ao aluno meios para que através de conhecimentos que ele já adquiriu ele consiga produzir um novo conhecimento mesmo que inicialmente informal sobre o que foi proposto diante dele, estimulando assim, que o aluno participe de fato da construção de um novo saber. Quando o aluno internaliza um conhecimento através dessa concepção, ele torna-se apto a produzir outras aprendizagens por meio de suas próprias experiências, suas relações com o meio, mesmo quando está em ambientes que não tenham um fim educacional.

Assim, "o objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, na qual são identificadas as interações entre professor, aluno e saber" (ALMOULOUD, 2007, p. 32).

Para modelar a teoria das Situações Didáticas, Brousseau (1996) propõe o sistema didático stricto sensu ou triângulo didático (figura 1), que é composta por três elementos: o aluno, o professor e o saber, que interagem de forma dinâmica e complexa, a relação didática, que trata as interações entre os elementos humanos que são o professor e os alunos, mediadas pelo elemento não humano que é o saber, que decide a maneira como essas interações se estabelecerão.




Fonte: (POMMER, 2008, p. 2)


ISBN 978-84-945722-3-4

Brousseau (1996a) expõe como ideia básica *aproximar* o trabalho do aluno do modo como é produzida a atividade científica verdadeira, ou seja, o aluno se torna um pesquisador, testando conjecturas, formulando hipóteses, provando, construindo modelos, conceitos, teorias e socializando os resultados. Cabe ao professor, assim, providenciar situações favoráveis, de modo que o aluno nessa ação efetiva sobre o saber, o transforme em conhecimento.

## 2. Contrato Didático

Essa teoria tem sido referência para o desenvolvimento da aprendizagem matemática nos ambientes educacionais abrangendo o professor, o aluno e conteúdos matemáticos. Trata-se de uma grande contribuição para a educação matemática que, tanto reconhece os conhecimentos que são impulsionados pelo aluno e sua contribuição na construção no novo saber matemático, como também aprecia o trabalho do professor que fundamenta-se em gerar condições necessárias para que seu aluno alcance o conhecimento matemático proposto.

Desta maneira, o professor ao organizar o *meio* tem perspectivas sobre a atuação e cooperação dos alunos e estes, por outro lado, tentam compreender o que está sendo proposto para que possam desenvolver suas ações.

O *meio* é onde acontecem as intervenções do indivíduo, é nele que produz-se transformações buscando desestruturar o modelo clássico, causando perturbação e uma expectativa de surgir um novo conhecimento. Nesse ambiente, as situações didáticas são conduzidas por uma série de deveres tanto do professor, quanto do aluno, mesmo que não estejam expostas envolvendo o conteúdo matemático escolhido, que é o que se chama de *contrato didático*. Assim, as noções de *meio* e de *contrato didático* são fundamentais para o diagnóstico de situações didáticas.

## 3. O papel do professor/aluno/saber na Teoria das Situações Didáticas



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

O princípio basilar da teoria de Brousseau (1996a) é o fato de que o papel do aluno precisa estar incorporado na situação onde será desenvolvida a atividade de produção de conhecimento, ou seja, ele se transforma em um pesquisador, testando e analisando suposições, levantando hipóteses e comprovando-as. Assim, a função do professor é de promover circunstancias propícias, para que assim o aluno atue de forma concreta e palpável sobre o saber, conseguindo portanto a construção do conhecimento. O autor evidencia que essas situações de ensino precisam ser elaboras e delicadamente pensadas pelo professor, para que se tenha uma aproximação entre aluno e saber, este do qual ele necessita apossar-se.

O professor precisa ter cautela ao elaborar e planejar uma situação didática, ele precisa escolher bem a atividade a ser desenvolvida para que ela atenda a construção do novo saber e que não dê respostas imediatas, como afirma Brousseau

> a resposta inicial que o aluno pensa frente à pergunta formulada não [deve ser] a que desejamos ensinar-lhe: se fosse necessário possuir o conhecimento a ser ensinado para poder responder, não se trataria de uma situação de aprendizagem (BROUSSEAU, 1996b, p. 49).

Desta maneira, a resposta inicial do aluno apoiada em conhecimentos que ele já possui propiciará a ele responder parte da questão, mas não totalmente. Acontece assim, uma certa instabilidade e desequilíbrio, que estimulará o aluno a procurar mudança dos seus métodos iniciais por meio de adaptações na organização de conhecimentos, modificando-os e com isso, se dará a aprendizagem.

## 4. Metodologia e Resultados

Esta pesquisa foi realizada com uma turma do 9º ano do ensino fundamental do colégio Roberto Santos, em Salvador-BA. Inicialmente foi feito o convite a escola e ao professor responsável pela turma, para participar do projeto. Depois de aceitar o convite entrevistamos o professor para sondar como o conteúdo de relações trigonométricas foi trabalhado na turma. Em posse dessas informações, fizemos a apresentação do que se tratava o LADIMA (Laboratório Digital de Matemática) para os alunos.


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Em seguida, agendamos a visita deles ao laboratório na Universidade do Estado da Bahia, pois a escola não tinha laboratórios de informática funcionando em perfeito estado. Vale salientar que a universidade fica próxima a escola escolhida, fica na mesma rua e o acesso é fácil.

No dia da visita dos alunos, começamos a atividade dividindo os alunos em duplas, depois explicamos como iria funcionar a atividade proposta. Foram colocados diante deles uma situação problema do conteúdo optado, e pedimos que eles analisassem e tentassem resolver com os conhecimentos que eles já tinham.

Inicialmente, notou-se um pouco de receio deles, mas não chegou a caracterizar uma resistência. Porém, como é uma atividade diferenciada do que é habitual a eles, a princípio eles queriam que nós orientadores da atividade dessem um ajuda para interpretar a questão para que eles conseguissem logo resolve-la

Com o passar dos minutos observou-se o empenho deles, mas também um certo desequilíbrio e começaram a levantar hipóteses acerca de como se chegar ao resultado. Através das tentativas, e posteriormente da organização das ideias levantadas por eles, a maioria das duplas conseguiu compreender e desenvolver a atividade. Feito isso, pedimos que eles tentassem formalizar o que eles tinham utilizado para alcançar o resultado e com as suas palavras, eles o fizeram. Passada essa etapa, nós professores fizemos a apresentação formal do conteúdo e pudemos observar que os estudantes estavam extremamente atentos e fazendo considerações a todo momento.

## 5. Considerações Finais

Esta investigação teve como objetivo discutir e promover um ambiente de aprendizado através do LADIMA, propondo uma situação didática apoiada na Teoria das Situações Didática, com uma turma do 9º ano do ensino fundamental.

Este estudo nos possibilitou reconhecer que as atuações dos professores de Matemática cooperam para entendimento das suas práticas, a partir disso, o professor, na condição de mediador durante a aquisição do saber, ele precisa reconhecer que seu aluno pode sim construir conhecimento através do que previamente ele já adquiriu. Além disso, o professor deve fazer as escolhas certas, conhecendo seu aluno, como também os conteúdos


ISBN 978-84-945722-3-4

a serem trabalhados, as ferramentas pedagógicas, levando em consideração as ligações que acontecerão entre professor, aluno e saber.

A análise e apresentação dos dados indicam que a teoria e prática podem andar juntas. O professor ao optar por uma aula expositiva estipula uma relação didática diferente, uma formalidade que não inclui a construção do conhecimento. Ao ministrar uma aula a partir de situações problemas, apoiada na visão da teoria idealizada por Brousseau, é possível gerar um outro tipo de contrato, sendo capaz de ter a modelagem das situações didáticas: ação, formulação, validação e institucionalização.

**Referencias bibliográficas**


**Fundamentos da Didática da Matemática**
Almouloud, S. A. (2007) Paraná: UFPR.

**Introdução ao Estudo das Situações Didáticas. Conteúdos e Métodos de Ensino.**
Brousseau, G. (2008). São Paulo, Editora Ática.

**Fondements et méthodes de la didactique dês mathématiques. Recherches em Didactique dês Mathématiques**
Brousseau, G. (1986). Grenoble.

**Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática**.
Brousseau, G. (1996a) In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. Cap. 1. p. 35-113

**Os diferentes papéis do professor.**
Brousseau, G. (1996b) In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (org). Didática da Matemática: Reflexões Psicológicas. Porto Alegre: Artes Médicas. Cap. 4. p. 48-72

**Teoria das Situações Didáticas**
Freitas, J. L. M. (2010). In: Machado, S. D. A. Educação Matemática: (uma nova) introdução. (pp.77- 111). São Paulo. EDUC.

**Equações Diofantinas Lineares: Um Desafio Motivador para Alunos do Ensino Médio**
Pommer, W. M. 2008. 155f. Dissertação de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática, PUC/SP.




ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.174

# CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS ESCOLARES DE ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA DE EDUCACIÓN PRIMARIA AL INICIO DE SU FORMACIÓN PROFESIONAL

[1]Eugenio Chandia, [2]Francisco Rojas, [3]Andrés Ortíz, [1]Cristian Reyes – eugenio.chandia@ciae.uchile.cl, frojas@uc.cl, aortiz@ucsc.cl, cristian.reyes@ciae.uchile.cl
[1]Universidad de Chile, Chile
[2]Pontificia Universidad Católica de Chile
[3]Universidad Católica de la Santísima Concepción

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas
Modalidad: CB.
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Sistema de selección, Formación Inicial de profesores, Conocimiento Matemático Escolar.

**Resumen**

*En los países considerados exitosos al formar profesores, dos medidas son comunes en las políticas públicas: una rigurosa selección para acceder a la Formación Inicial (FI) y un proceso de formación de calidad (Mourshed, Chijioke, y Barber, 2010). Considerando lo anterior, nos preguntamos sobre el conocimiento de la matemática escolar (CME) y las creencias (C) sobre la matemática, su aprendizaje y enseñanza de estudiantes de pedagogía básica al comienzo de su FI. En cuanto al CME, foco de esta presentación, diversas investigaciones lo señalan como clave para el éxito futuro de los profesores en términos del aprendizaje de sus alumnos (Klassen et al., 2014). Para medir este conocimiento hemos diseñado un cuestionario que recoge los aprendizajes curriculares matemáticos de 1º a 6º año básico establecidos por el currículum chileno. Así, cada ítem creado obedece a un indicador de contenido y a un dominio cognitivo específico. Hasta ahora, hemos observado que la alta carga de contenido curricular no articulada dificulta la selección de contenidos nucleares, y a su vez obstaculiza la asignación de dominios cognitivos de manera clara. Los resultados empíricos en junio, nos permitirán conocer la distribución de CME de los estudiantes de la muestra, información fundamental para la FI.*

## Antecedentes

En la actualidad existe claridad y consenso, a nivel nacional e internacional, en cuanto a la importancia de reflexionar e investigar en torno a los procesos de formación inicial docente (FID) puesto que la calidad de los profesores es un elemento clave para el logro de aprendizajes en los estudiantes, tal como lo demuestran variadas evidencias internacionales (e.g. Darling-Hammond, 2000; Darling-Hammond, Johnson, & Chung Wei, 2009).



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Analizando qué habían hecho los países considerados exitosos en relación al proceso de formación de profesores, Mourshed, Chijioke, y Barber (2010) encontraron dos medidas comunes en las políticas públicas en este ámbito: una rigurosa selección para acceder a la formación inicial y un proceso de formación de calidad.

De los procesos de selección utilizados para el acceso a la FID en los programas considerados de éxito, es de interés para este proyecto conocer qué aspectos consideran como clave para que un individuo acceda al programa de formación, más que el proceso de selección en sí mismo. Mourshed, Chijike y Barber (2010) encontraron que algunas características observables que se desea tengan los candidatos a futuros profesores son: un alto nivel general en lenguaje y aritmética, fuertes capacidades interpersonales y de comunicación, el deseo de aprender y motivación para enseñar. En una revisión de literatura más general sobre los criterios de selección de candidatos para ser profesor, Ramli et al. (2013) identificaron tres dimensiones principales: conocimiento del contenido, habilidades de comunicación y personalidad y una variedad de instrumentos y métodos para medirlos. Los análisis para determinar el conocimiento del contenido del candidato convergen en un solo aspecto que es centrarse en los conocimientos que el futuro profesor va a enseñar y no en otros, lo que reafirma Klassen et al. (2014) al observar que los sistemas de selección, en cuanto a la verificación de conocimientos, debieran ser diferenciados para los candidatos que postulan a primaria o secundaria. Para analizar las habilidades de comunicación y la personalidad, Ramli et al. (2013) destacan los procesos de entrevista, escritura de ensayos con foco en la enseñanza de algún contenido y el uso de instrumentos psicológicos. A modo de ejemplo, podemos mencionar el caso de Singapur donde el proceso de selección parte verificando si los candidatos están dentro del 30% superior de su promoción escolar, luego realizan entrevistas con foco en el interés por la enseñanza y por los niños, posteriormente, mediante pruebas, verifican los conocimientos que el candidato deberá enseñar y las aptitudes para esto, además de monitorear al candidato en el proceso de formación.

Los estudios mencionados coinciden en señalar la importancia de recabar información acerca de los estudiantes cuando ingresan en los programas de FID, en particular respecto de los aspectos sobre las creencias respecto de la enseñar y aprendizaje y el conocimiento de los contenidos a enseñar, diferenciando en este último punto entre los programas de FID para primaria y secundaria.


ISBN 978-84-945722-3-4

En el caso de la formación en Chile no existe un sistema de selección para el acceso a la FID y tampoco instrumentos validados a nivel nacional que permitan conocer qué conocimiento de los contenidos a enseñar y qué creencias respecto de la enseñanza y aprendizaje tienen los estudiantes cuando ingresan a los programas de FID. Por esta razón el objetivo principal de este proyecto es diseñar y validar un instrumento que permita realizar un diagnóstico de los estudiantes al comienzo de la FID, respecto de los conocimientos del contenido matemático de los niveles que se enseñarán, además de evaluar las creencias sobre la matemática escolar que traen los estudiantes desde su formación escolar, las creencias respecto de cómo se enseña esta disciplina en educación básica y respecto de cómo se aprende, incluyendo en este último punto, creencias respecto del aprendizaje según género. En particular en este documento se visualizará la construcción y resultados preliminares de la prueba.

**Metodología**

El proyecto que presentamos tiene por objetivo determinar cuáles son los conocimientos de la matemática escolar de 1° a 6° básico que tienen los estudiantes al comenzar la carrera de Pedagogía en Enseñanza Básica, respecto de la matemática escolar, su enseñanza y aprendizaje. Con el fin de elaborar un instrumento que se adecúe a la realidad de los estudiantes que ingresan a la Formación Inicial de Profesores (FIP) en nuestro contexto país, planteamos un diseño exploratorio-descriptivo haciendo uso de una metodología mixta (cualitativa/cuantitativa) en tres fases. En la primera fase se diseñará una entrevista en base a la revisión de literatura especializada referida a creencias de los futuros profesores. Esta permitirá explorar las creencias emergentes de los estudiantes y validar, en el contexto chileno, constructos sobre las creencias acerca de la matemática escolar, su enseñanza y aprendizaje presentadas por la literatura. En paralelo se analizarán distintos instrumentos relacionados con la medición de los conocimientos matemáticos escolares (CME) con el fin de seleccionar algunos ítems. Esta etapa culmina con una aplicación cualitativa para testear ítems. En la segunda fase se elaborará un cuestionario que permita evaluar creencias y conocimientos relativos a la matemática escolar y será aplicado a una muestra de estudiantes con el fin de testear su validez, confiabilidad y otras características psicométricas. Finalmente en una tercera etapa se trabajará en la elaboración del informe y difusión del trabajo realizado y sus resultados.


ISBN 978-84-945722-3-4

**Muestra:** Considerando que la población de estudio son estudiantes que ingresan a las carreras de pedagogía en Educación Básica y similares, y que en el proceso de admisión 2017 se van a conjugar diversas políticas de ingreso a la educación superior como el sistema de gratuidad y la entrada en vigencia de la nueva ley de Carrera Docente que, entre otras cosas, establece como puntaje mínimo de ingreso a las carreras de pedagogía en 500 puntos y obliga a los carreras estar acreditados, es que la muestra del estudio se seleccionará de manera intencionada estratificada (Patton, 2001), considerando las siguientes variables: (i) los puntajes de ingreso a las carreras de los estudiantes de las universidades participantes, diferenciando por cuartiles en el rango de puntajes de la Prueba de Selección Universitaría (PSU) de entrada de todas las instituciones con programas de formación y (ii) universidades tradicionales y no tradicionales. Ahora, para tener alguna idea de la distribución de las variables anteriores antes nombradas, consideremos que en el proceso de admisión 2016 a pedagogía en Educación Básica los puntajes ponderados en el Rango Inter-Cuartilico (RIC) estuvieron entre 523 y 578, con un máximo de 640,6 y mínimo menor a 500 puntos, esto último por las universidades que aceptaron matricular a estudiantes sin PSU. Por otra parte, de los 1623 matriculados en pedagogía Básica de este año, 1065 estudiantes lo hicieron en universidad no tradicionales. De esta forma, todas las muestras de estudiantes para cada una de las etapas del desarrollo de los instrumentos se seleccionarán considerando la partición de la población que muestra la Tabla 1, la cual surge de cruzar las variables
PSU y tipo de universidad

| | Distribución PSU | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1º cuartil[26] | 2º cuartil | 3º cuartil | 4º cuartil |
| Tradicionales | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ |
| No tradicionales | $M_5$ | $M_6$ | $M_7$ | $M_8$ |

Tabla 1: Partición de la población de estudio considerando el cruce de las variables: PSU y Universidad tradicional y no tradicional.

**Resultados parciales**

**Análisis de instrumentos para la selección.** Dado que nuestro objetivo es la elaboración de un test para a estudiantes de primer año de una carrera de pedagogía de enseñanza básica, se

[26] En el primer cuartil se consideran los estudiantes a los que no se les pide puntaje de ingreso


ISBN 978-84-945722-3-4

descartaron instrumentos que midan conocimientos o habilidades que se adquieren en la formación inicial de un futuro profesor, como el proyecto LMT, acerca del conocimiento específico del profesor, y el instrumento elaborado en el marco de la investigación "Evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros", realizada por investigadores de la Universidad de Granada, y otros del tipo. No se encontraron muchos test asociados a la selección de estudiantes de pedagogía, si bien existen procesos de selección específicos para estudiantes de pedagogía, éstos no considera test de conocimiento. También existen test de matemática, pero no específicamente para estudiantes de pedagogía, lo más usual es que existan exámenes generales, tipo PSU, que cubren, principalmente, la enseñanza secundaria. Los exámenes de admisión identificados a lo largo de la revisión que guardan relación con conocimiento matemático a comenzar la FID son:

- Praxis, examen utilizado por algunas universidades de EEUU para el ingreso de estudiantes a carreras de pedagogía.
- Vakava, el examen de admisión a los programas de formación de profesores, en Finlandia.

En ambos casos, Vakava y Praxis, los sujetos que rinden las pruebas, no son estudiantes que recién egresan de la educación secundaria, sino que son sujetos que vivieron algún tipo de educación post-secundaria. Por lo tanto, cubren tópicos más especializados que los que nuestro proyecto necesita medir. En algunos casos, cubren temas que se espera que un estudiante domine al final de su formación inicial de una carrera de pedagogía, como es el caso de Praxis II.

Construcción de los ítems.

Tomando en cuenta que los test con ítems de opción múltiple permiten la evaluación de diferentes niveles cognitivos y la aplicación de conocimiento para resolver problemas variados (Haladyna, 2012; Haladyna, Downing, & Rodriguez, 2002), el presente proyecto ha optado por el desarrollo de ítems de selección múltiple. Al seguir los procedimientos para su construcción y medición de calidad, los instrumentos que los usan arrojan resultados con fuerte evidencia del constructo que se mide (Haladyna, 2012). A pesar de esto, este tipo de ítems no son muy bien evaluados, por cuanto solo servirían para medir resultados de procesos


ISBN 978-84-945722-3-4

más que estos mismos, y por ende niveles de complejidad cognitivas bajas. Sin embargo, Haladyna (2002, 2012) plantea que si los ítems se construyen adecuadamente estos podrían medir tareas cognitivas complejas, así como también todos los pasos de un proceso. De lo anterior, y luego de determinar los conocimientos escolares matemáticos a medir y los niveles de complejidad cognitiva que los trascienden, comenzó el proceso de construcción usando dos tipos de ISM: Simples y complejos. Los ISM simples que consiste en un enunciado o pregunta o un enunciado con pregunta el cual se completa con varis opciones de respuesta, entre las cuales el estudiante deberá identificar la respuesta correcta entre los distractores desarrollados. Los ISM complejos por otro lado, proponen elegir la opción correcta de una serie referida a un conjunto previo de opciones (ver ejemplos en Anexo 2)

En cada uno de los ítems se debe seleccionar la opción correcta entre alternativas que distraen al estudiante. Haladyna (2002, 2012) plantea que los distractores cumplen tanto una función de aprendizaje respecto de las características en conocimiento y habilidades de los evaluados con el ISM como también determina la calidad de la pregunta. Un distractor debe ser una opción de respuesta plausible para aquel estudiante que no alcanza el nivel de conocimiento y habilidad para determinar la respuesta correcta del ISM. En cuanto al número de distractores, Haladyna (2012) plantea que si bien hay controversia respecto de cuántos distractores son adecuados, dos es el ideal, sin embargo, plantea que, si bien puede haber un tercer distractor, la construcción de esta debe ser cuidadosa dado que temas no permiten tantas opciones de distractores, tomando en cuenta las condiciones de construcción como son la proximidad a la opción correcta en su significado o en su apariencia. También destacan los distractores que resulten de errores comunes o de cálculo (Haladyna, 2012)

Particionada la matriz de especificación en 4 grandes bloques, cada integrante del equipo procedió a construir los ítems considerando los indicadores de conocimiento como los de habilidad. Luego se procedió a realizar un proceso de evaluación cruzada y total para salvaguardar la pertinencia inicial de los ítems. De esta manera, se llevó a cabo la revisión cruzada de los ítems 3 veces y dos revisiones globales con la presencia de todo el equipo constructor, 4 académicos. De este proceso resultaron 75 ítems para 69 indicadores de conocimiento, distribuidos considerando los pesos curriculares de los conocimientos escolares, tal como muestra la Tabla 7.


ISBN 978-84-945722-3-4

| | Habilidad | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Conocimiento** | **Conocer** | **Aplicar** | **Razonar** | **Total** |
| Números | 12 | 9 | 2 | **23** |
| Medición | 5 | 7 | 3 | **15** |
| Geometría | 8 | 7 | 3 | **18** |
| Algebra | 3 | 2 | 2 | **7** |
| Datos y probabilidades | 2 | 4 | 6 | **12** |
| **Total** | **25** | **28** | **16** | **75** |

Tabla 7: Número de ítems por dominio de conocimiento y nivel cognitivo.

La distribución de cantidad de ítems según nivel de complejidad obedece a la proporción 40-40-20 aproximadamente, asegurando así que la mayoría de los estudiantes puede contestar al menos el 60% de los ítems; además de que el 20% de razonar permite discriminar los respondientes de mayores capacidades.

Definida la matriz de especificación, el proyecto a determinado usar el juicio de expertos para estimar la validez de contenido, una de las formas declaradas por Sireci, (1998). El juicio de experto se basa en la evaluación de la relevancia y representatividad de los ítems usando una escala Likert, donde se evalúa en qué medida el ítem se ajusta al constructo de interés. De lo anterior, la selección de expertos es crucial considerando el constructo del conocimiento matemático escolar, así se ha invitado a 26 académicos relacionados a la formación inicial y continua de profesores de Educación Básica en matemática de 13 Instituciones formadoras de Chile. 67 ítems tienen valores superiores o iguales a .8 en el indice de Valides de cotenido de Ayken y superiores a .2 en el coeficiente de validez de contenido, así se proceden a eliminar 8 ítems.

**Conclusiones**

El proceso de construcción del instrumento para medir el conocimiento matemático escolar de los estudiantes que quieren ingresar a pedagogía, el cual deberán enseñar si es que el currículo escolar de Chile no se modifica en los 5 años que dura el proceso de formación, requiere de la selección de los temas nucleares en un currículo cargado de contenido disciplinar. Esta selección ha requerido de la eliminación de contenidos matemáticos que pueden ser parte del conocimiento profundo de la matemática escolar, aquel conocimiento que debe conocer un profesor para enseñar el contenido escolar, con la justificación de que este debiera poder alcanzarse en el procedo de formación inicial.


ISBN 978-84-945722-3-4

Si bien, aún no tenemos la aplicación empírica del instrumento por lo tanto datos para analizar respecto de los conocimientos de los profesores en formación, procedo que se realizará en junio, si comparamos los contenidos de la prueba de selección universitaria de Chile, con los contenidos de nuestra propuesta, creemos que la distribución de los puntajes en ambas pruebas no se correlacionarían dada la diferencia en las matrices de contenido de ambas. Esto, justifica la necesidad de una prueba de selección de diferenciada para ingresar a los procesos de formación inicial de profesores en Chile.

**Referencias bibliográficas**

Darling-Hammond, L. (2000). Teacher quality and student achievement. Education policy analysis archives, 8, 1.

Darling-Hammond, L., Johnson, C., & Chung Wei, R. (2009). Teacher preparation and teacher learning: A changing policy landscape. In G. Sykes, B. Schneider & D. N. Plank (Eds.), Handbook of education policy research (pp. 613–636): Routledge.

Haladyna, T. M. (2012). Developing and validating multiple-choice test items. Routledge.

Haladyna, T. M., Downing, S. M., & Rodriguez, M. C. (2002). A review of multiple-choice item-writing guidelines for classroom assessment. Applied measurement in education, 15(3), 309-333.

Klassen, R., Durksen, T., Rowett, E., & Patterson, F. (2014). Applicant Reactions to a Situational Judgment Test used for Selection into Initial Teacher Training. IJEP-International Journal of Educational Psychology, 3(2), 104-124.

Mourshed, M., Chijioke, Ch. y Barber, M. (2010). How the world's most improved school systems keep getting better.

Mourshed, M., Chijioke, Ch. y Barber, M. (2010). How the world's most improved school systems keep getting better.


ISBN 978-84-945722-3-4

Patton, M. (2001). Qualitative evaluation and research methods (3a ed.). Newbury Park, CA: Sage Publications.

Ramli, R., Ghazali, M. I., Ibrahim, H., Kasim, M. M., Kamal, F. M., & Vikneswari, S. (2013). A Hybridized Competency-Based Teacher Candidate Selection System.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.175

# SITUACIONES PROBLEMA EN ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD PARA EL CICLO III DE PRIMARIA

Augusta Osorio Gonzales – Elizabeth Advíncula Clemente
arosorio@pucp.edu.pe – eadvincula@pucp.edu.pe
Pontificia Universidad Católica del Perú - Perú

Núcleo temático: II La Resolución de Problemas en Matemáticas.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Primario (6 a 11 años)
Palabras clave: Situaciones problemáticas, estadística, probabilidad

**Resumo**
*Esta investigación nace de la necesidad que tienen los profesores de un acompañamiento para el trabajo en el área de Estadística y Probabilidad dentro del aula. Esta necesidad la detectamos durante los talleres de fortalecimiento es estas áreas que venimos aplicando desde el 2014. El trabajo de esta investigación lo hemos iniciado para el ciclo III (niños de 7 y 8 años) y hemos partido de la revisión con los profesores de los estándares nacionales para la competencia Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de Gestión de Datos e Incertidumbre. Establecimos con los profesores el ordenamiento de los indicadores propuestos a lo largo del año escolar y poder tener un marco para la creación de las situaciones problemáticas a trabajar en el aula. Posteriormente revisamos las aplicaciones que algunos de los profesores implementaron con el fin de mejorar las situaciones creadas y poder difundirlas entre otras comunidades.*

Este trabajo lo hemos realizado con la participación de los docentes del ciclo III de seis colegios nacionales de provincia, tres en Nuevo Chimbote y tres en Arequipa, en coordinación con las Unidad de gestión educativa local (UGEL) de Santa y de Arequipa Sur. La investigación nació de la necesidad de los profesores de un acompañamiento especializado para el trabajo en el área de Estadística y Probabilidad dentro del aula; la cual fue detectada durante los talleres de fortalecimiento en contenidos de estas áreas, los cuales venimos aplicando en estas dos UGEL desde el 2014. El trabajo se ha iniciado con profesores del nivel III en el 2016 y este año se están incorporando profesores del ciclo IV (niños de 9 y 10 años).

## Metodología



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

El trabajo que desarrollamos durante el 2016 partió de un primer encuentro con los profesores involucrados en el estudio y de la revisión de los indicadores de desempeño para el ciclo III, MINEDU (2015), que comprenden los estándares nacionales en estas áreas.

Realizamos inicialmente el fortalecimiento de los conocimientos de los profesores en los contenidos del ciclo III para la competencia matemática relacionada con la Gestión de datos y la Incertidumbre. Para ello trabajamos con la propuesta del ciclo PPDAC que corresponde a la dimensión 1 de la propuesta del Pensamiento Estadístico de Wild and Pfannkuch (1999).

Seguidamente, trabajamos con el acomodamiento de los indicadores de desempeño del ciclo III en el ciclo PPDAC, por ejemplo para el primer grado (niños de 7 años) se trabajó el siguiente ciclo PPDAC:

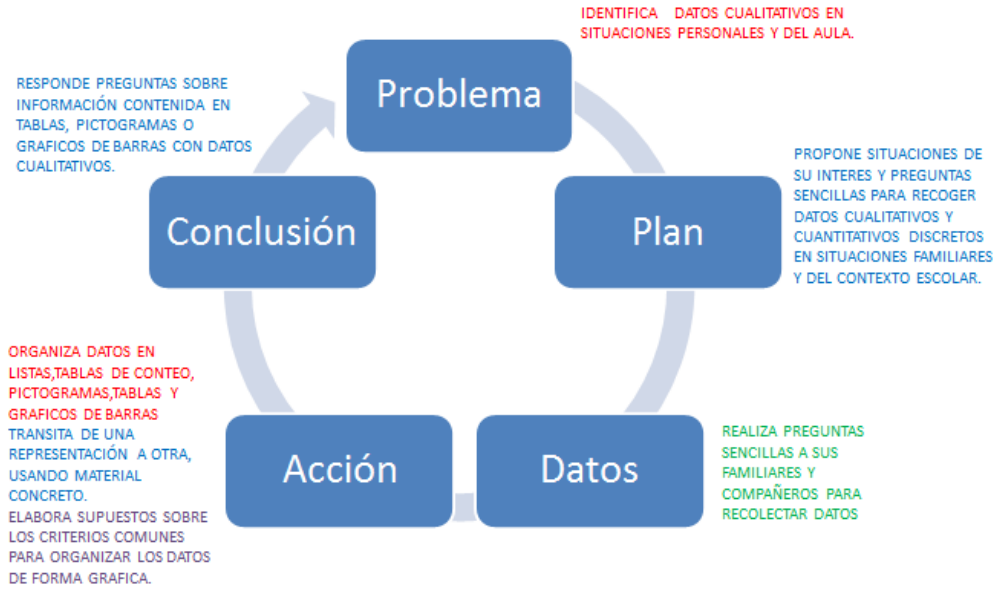



Figura 1. Ciclo PPDAC para primer grado de primaria

Luego, revisamos los conceptos para trabajar en la creación de situaciones problema para la competencia de Incertidumbre, básicamente los conceptos: situación de incertidumbre, posibilidad, espacio muestral y suceso. También revisamos la clasificación de sucesos: sucesos posible, imposible y seguro.


ISBN 978-84-945722-3-4

Posteriormente, establecimos con los profesores el ordenamiento de estos indicadores a lo largo del año escolar para tener claro lo siguiente:

- Una idea de la cantidad de actividades a realizar durante el año escolar.
- Un marco para la creación de los problemas a trabajar en el aula durante cada bimestre.

Finalmente, con cada grupo de docentes planteamos una situación problema base en gestión de datos y otra en incertidumbre, para que puedan aplicarlas en sus aulas. En el caso de la situación problema para gestión de datos utilizamos el orden de las etapas del PPDAC y los indicadores esperados para el bimestre correspondiente.

Estas primeras actividades fueron aplicadas por algunos profesores que luego nos compartieron sus experiencias y para otros profesores fueron la base para la creación de sus propias situaciones problema, que luego fueron compartidas para su análisis.

**Resultados obtenidos**

Las dificultades encontradas durante el trabajo del 2016 fueron de diversos tipos. Entre ellas tenemos: las relacionadas con el dominio de los contenidos a enseñar, las relacionadas con la creación de problemas y las relacionadas con la programación de clases.

En el caso de las dificultades encontradas en los profesores relacionadas con el dominio de los contenidos a enseñar podemos mencionar las siguientes:

- dificultad en definir los conceptos básicos: variable estadística, situación de incertidumbre y suceso.
- dificultad en aplicar los conceptos estadísticos: variable estadística, población, pregunta de una encuesta y recopilación de datos en un problema cotidiano.
- dificultad para poder secuenciar el trabajo con datos ante un problema cotidiano.

En el caso de las dificultades encontradas en los profesores relacionadas con la creación de problemas podemos mencionar las siguientes:

- dificultad para encontrar un problema en un contexto cotidiano.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- dificultad para poder relacionar la situación problema propuesta en la actividad a trabajar con los objetivos propuestos para dicha actividad.
- dificultad en poder identificar los indicadores de desempeño de la competencia en la situación problema propuesta.
- dificultad para variar alguno de los indicadores de desempeño para así poder modificar la situación problema propuesta.

En el caso de las dificultades encontradas en los profesores relacionadas con la programación de clases podemos mencionar las siguientes:

- dificultad para programar suficientes aplicaciones de actividades en la competencia Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de Gestión de Datos e Incertidumbre, durante el años escolar.

Por otro lado, de las experiencias que se compartieron para el análisis, podemos establecer algunos hallazgos encontrados por los propios profesores. Para ilustrar dichos hallazgos presentamos los siguientes ejemplos:

La profesora Alejandrina Cueva Vasquez del colegio Nº 88336 "Gastón Vidal Porturas" aplicó una actividad en el 1º "C" para indagar sobre la fruta preferida del grupo. A continuación tenemos la narración de la parte inicial de la actividad que hizo la profesora:
"Se inició la sesión con la dinámica "la canasta revuelta". Los estudiantes nombraron las frutas que se mencionaron en la dinámica y nombraron también las frutas que se iban a utilizar en la actividad próxima para preparar una ensalada de frutas en nuestra aula."
Estas frutas fueron colocadas en la pizarra y se planteó la siguiente pregunta: ¿Cuál es la fruta preferida en el salón?
"Para obtener respuesta a la pregunta de la etapa problema del ciclo PPDAC: ¿qué debemos obtener de cada alumno del aula para saber la fruta preferida del salón?, los niños mencionaban mayormente el nombre de una fruta o indicaban el mercado; y solo el alumno David manifestó que los niños tienen que mencionar la fruta que les gusta.
La profesora señalo que la fruta tiene que ser de la lista de frutas que está en la pizarra."


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En la reunión de análisis con el grupo de profesores de la ciudad de Chimbote, una de las participantes también mencionó dificultades similares para el trabajo con estudiantes de segundo grado. En la reunión conversamos que lo más adecuado para el segundo grado era trabajar la etapa Problema del ciclo PPDAC con una situación problema de manera similar que en el primer grado, presentado figuras para que los alumnos elijan el dato a recoger y recién en las siguientes actividades aplicadas durante el año hacer la pregunta de forma abierta. Así los alumnos pueden acostumbrarse a identificar el dato a recoger para resolver la situación problema.

Durante el trabajo con la competencia Gestión de datos y para el indicador de logro respectivo, el alumno de segundo grado propone preguntas sencillas para recoger datos cualitativos y cuantitativos discretos en situaciones familiares y del contexto. Las profesoras de la ciudad de Chimbote manifestaron dificultades

La profesora Cristina Vazquez Cáceres del colegio Nº 88336 "Gastón Vidal Porturas" aplicó una actividad en el 2º "B" para determinar el producto a retirar de la tiendita del aula. A continuación tenemos la narración de la parte inicial de la actividad que hizo la profesora:
"Cuando se les mostró el gráfico de barras que había en el texto y a las preguntas: ¿Si alguna vez vieron un gráfico como este?, ¿Dónde?, la mayoría respondió que no lo había visto antes. Entonces me di cuenta que no había sido muy significativo su aprendizaje respecto a ese tema en el primer grado.
Luego les dije que hoy aprenderemos a elaborar un gráfico de barras con ayuda de nuestra tiendita. Les dije que había observado que hay cuatro productos dulces en la tiendita que casi no se venden. Por ello he decidido retirar uno de estos productos y así tener más espacio para traer productos nuevos. Estos son los productos: jugo pulp, maní, galleta integral y el cereal. Les propuse la siguiente pregunta ¿Cuál es el producto que elegirá el grupo para ser retirado de la tiendita?
Pedí a Luigui y a Génesis que sacarán las imágenes de los productos indicados de la tiendita y los pegaran en la pizarra. Les indiqué a los alumnos que deberían decirme una pregunta cuya respuesta sea uno de los productos que están en la pizarra. En este ejercicio nos pasamos


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

casi quince minutos ya que los estudiantes no sabían cómo preguntar. Por último les dije que la pregunta podría ser: ¿Qué producto no te agrada de los cuatro que están en la pizarra?. Todos muy emocionados respondieron que habían comprendido".

En la reunión con el grupo de profesora de la ciudad de Chimbote, comentamos sobre el tema de la elaboración de preguntas para el recojo de los datos en el segundo grado y recomendamos que el niño debería experimentar el crear preguntas antes de iniciar el trabajo con este indicador de la competencia Gestión de datos. Una posibilidad es que los niños se entrenen teniendo un trabajo con comprensión lectora. En ese caso en vez de darle siempre las preguntas, se le da las respuestas para que ellos creen las preguntas y así practican. Lo recomendable es hacer este trabajo con las preguntas principales: ¿Qué?, ¿cómo?, ¿quién?, ¿dónde?, ¿cuándo? y ¿por qué?.

**Comentarios finales**

El trabajo realizado durante el 2016 con estos profesores no rindió todos los frutos esperados, en función de la cantidad de actividades creadas y aplicadas.

Muchas de las profesoras en la ciudad de Chimbote desistieron de continuar en el grupo de trabajo a partir de la segunda reunión y en la ciudad de Arequipa la aplicación documentada no se dio. Esto nos obligó a buscar estrategias que nos produjeran las sesiones aplicadas para seguir investigando sobre los logros de los alumnos del III Ciclo de la EBR en la competencia Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de Gestión de datos e Incertidumbre. Para ello, desde octubre del 2016 hemos iniciado un ciclo de clases modelo con pequeños grupos de alumnos de este ciclo. A estas clases asisten las profesoras de la ciudad de Arequipa que iniciaron el proyecto con nosotros y otras profesoras invitadas. Luego de la clase modelo podemos conversar de la experiencia y comentar sobre las dificultades encontradas.

**Referencias bibliográficas**

Estrada, A. (2007). Actitudes hacia la Estadística: un estudio con profesores de educación primaria en formación y en ejercicio. Actas del XI Simposio de la SEIEM, pp. 121-140.


ISBN 978-84-945722-3-4

MINEDU (2015). Resolución Ministerial 199-2015. Ministerio de Educación del Perú. http://ccec.edu.pe/files/RM-199-2015-MINEDU-Modifica-DCN-2009.pdf Consultado 07/03/2017

Wild, C.J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. International Statistical Review, 67, 3, 223-265.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.177

# REFLEXÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM FORMAÇÃO INICIAL SOBRE PAPÉIS DE PROFESSOR E ALUNOS NA SALA DE AULA

Luciano Feliciano de Lima
7lucianolima@gmail.com
Universidade Estadual de Goiás – Brasil

Núcleo temático: IV. Formación del profesorado en Matemáticas.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Ensino Superior
Palabras clave: Educação matemática, abordagem dialógica e investigativa, formação inicial de professores de matemática

**Resumo**
*Na formação inicial cabe dialogar sobre: abordagens pedagógicas que privilegiem a participação dos alunos no processo de aprendizagem e; o papel do professor na criação de ambientes para a produção de conhecimentos. A partir disso, o presente trabalho, em curso, objetiva refletir sobre a abordagem dialógica e investigativa, no Ensino Fundamental (EF), derivada das reflexões de licenciandos durante a disciplina de Metodologia do Ensino Fundamental (MEF), do curso de licenciatura em matemática do Campus Cora Coralina da Universidade Estadual de Goiás. Nela refletiu-se sobre abordagem dialógica e investigativa e a utilização de recursos variados para o ensino e a aprendizagem da matemática. Os licenciandos dialogaram com um professor de Matemática de uma escola pública do EF e desenvolveram tarefas matemáticas de Geometria, trabalhadas em quatro sextas-feiras consecutivas, numa turma do sexto ano do EF do referido professor. As produções escritas dos licenciandos, sobre o trabalho realizado, mostraram indícios de compreensões, em relação aos alunos da educação básica, como sujeitos, a ser incentivados, por meio de ambientes de aprendizagem, na produção de conhecimentos sobre o objeto de estudo. Trabalhos desse tipo podem contribuir, na universidade, com uma reflexão crítica sobre papéis de professor e de alunos na aula de matemática.*

## Introdução

A motivação para o desenvolvimento do presente trabalho surge de nossa experiência com a disciplina Metodologia do Ensino Fundamental (MEF) no curso de Licenciatura em Matemática da UEG Campus Cora Coralina em Cidade de Goiás (GO). A MEF contribui com reflexões sobre: teorias e perspectivas para o ensino de matemática na educação básica; relações entre teoria e prática para a tomada de soluções mais apropriadas à atuação profissional; alunos como sujeitos de aprendizagem; o professor como profissional



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

competente para criar desenvolver capacidades e atitudes de análise crítica com seus alunos, de inovar e investigar sua ação pedagógica, dentre outras.

Em nossos encontros, na universidade, refletimos sobre abordagens pedagógicas que possam ir além das práticas e teorias convencionais. Tais práticas geralmente estão centradas no professor, ao expor informações, conceitos e exemplos de aplicação seguidos de exercícios para os alunos reproduzirem como uma maneira de treinar técnicas ora ensinadas. Percebemos, no cotidiano de nossa ação variações nesse processo, com o professor oferecendo maior ou menor oportunidade aos alunos para resolverem os exercícios: individualmente, em grupo, por meio de recursos como jogos, dentre outros. Contudo, como afirma Pérez Gómez (2015, p. 12) "as descobertas e os resultados, obviamente provisórios e parciais, das investigações em ciências da educação não parecem nem ao menos inspirar e iluminar as práticas pedagógicas convencionais".

Para nós, a formação inicial pode ser um momento oportuno de experimentar e de refletir sobre o potencial de alternativas pedagógicas para um trabalho com a matemática. Por isto, buscamos criar uma situação didática para refletirmos juntos sobre um ensino que viabilize aos alunos condições para produzirem conhecimentos sobre o objeto de estudo.

Então, decidimos propor aos licenciandos um trabalho em conjunto com o prof. Saulo, do Lyceu de Goyáz, escola de Ensino Fundamental, com uma única turma, o sexto ano, considerada pelos profissionais da escola com um comportamento difícil em relação à disciplina e resistente quanto à realização das tarefas. Desafio aceito. Realizamos quatro encontros consecutivos com os alunos às sextas-feiras, todos envolvendo tarefas de Geometria.

Na elaboração das tarefas matemáticas, visamos nos concentrar em estratégias que pudessem estimular os alunos e promover a participação nas aulas. Para isto refletimos sobre literatura que considera o aluno sujeito de aprendizagem como, por exemplo, Freire (1996) ao sugerir uma pedagogia para o desenvolvimento da autonomia dos educandos e Skovsmose (2000) ao refletir sobre possíveis cenários que podem promover o envolvimento dos alunos nas aulas.

Nossas reflexões contribuíram com a elaboração de tarefas matemáticas que foram trabalhadas com os alunos organizados em grupos, utilizando recursos variados como: papel sulfite, cola e caneta para construir a faixa de Moebius; fichas de tarefas para refletir sobre a


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

relação entre a área e o perímetro de retângulos; Data Show para projetar imagens de figuras geométricas espaciais para uma aula sobre poliedros, fichas de tarefas impressas para os alunos recortarem e explicarem porque umas continham a planificação do cubo e outras não, o objetivo era de reconhecerem possíveis planificações de um cubo; GeoGebra para refletir sobre a relação entre a área e o perímetro de retângulos.

A partir das aulas com os alunos do Lyceu os licenciandos foram convidados a refletir sobre as potencialidades da abordagem dialógica e investigativa para a aula de matemática. Nosso interesse, a partir do material escrito pelos licenciandos, é refletir sobre como consideram possíveis contribuições da abordagem dialógica e investigativa para o envolvimento dos alunos na aula de matemática.

## Abordagem dialógica e investigativa

Para uma maior participação dos alunos durante a aula a literatura discute papéis de alunos e de professor. Grosso modo, o aluno é considerado sujeito ativo no processo de produção do próprio conhecimento, cabendo ao professor exercer um papel fundamental na organização de ambientes que promovam a aprendizagem e a produção de novos conhecimentos.

Por exemplo, Freire (1996) aconselha o estabelecimento de um diálogo verdadeiro entre professor e alunos. Para ele, este diálogo só é possível se professor e alunos estiverem, simultaneamente, conversando sobre um objeto inteligível a ambos. Cria-se, desse modo, um ambiente para a promoção de um espírito crítico e investigativo no aluno, algo fundamental para que o mesmo possa se tornar um sujeito mais autônomo. Pérez Gómez (2015), no mesmo sentido, considera que a escola precisa preparar os alunos para resolverem situações problemas possivelmente diferentes das vivenciadas no presente. Num mundo de incertezas e de mudanças econômicas, sociais e culturais faz-se necessário lidar com contextos desconhecidos em campos pessoais, sociais ou profissionais. Por isso, entende a escola como uma formadora de indivíduos com "capacidades de aprender a aprender e aprender como autorregular a própria aprendizagem" (PÉREZ GÓMEZ, 2015, p. 29).

Para Freire (1996), ambientes de interação dialógica podem promover aprendizagens tanto aos alunos quanto ao professor. A aprendizagem é vista como uma ação, um movimento


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

de superação da curiosidade ingênua (senso comum) que se transforma em curiosidade crítica. Segundo Freire (1996, p. 77) "aprender para nós é construir, reconstruir". As construções e reconstruções, visando à aprendizagem e produção de um pensamento crítico, ocorrem com as interações entre alunos e professor. Sem o diálogo para o desenvolvimento da criticidade "não há comunicação e sem esta não há a verdadeira educação" (FREIRE, 2011, p. 98).

Concordamos com Freire (1996) ao afirmar que, quando o professor, no lugar de criar um ambiente dialógico para o aluno construir o conhecimento do objeto de estudo, faz uma exposição detalhada do conteúdo, visando sua assimilação e reprodução na íntegra, prejudica o desenvolvimento de uma aprendizagem mais autônoma. Aprender tem a ver com se posicionar, refletir, apropriar-se de conteúdos para uma visão mais abrangente de mundo. Por isso, entendemos com Mantoan (2015) que "aprender implica ser capaz de dar significado a objetos, fatos, fenômenos, à vida. Expressar, dos mais variados modos, o que sabemos implica representar o mundo com base em nossas origens, em nossos valores e sentimentos" (MANTOAN, 2015, p. 22).

Na aula de matemática é possível produzirmos, como professores, um ambiente em que o aluno possa atribuir significado aos conteúdos e conceitos estudados expressando e refletindo, com o professor e com os demais colegas, sobre seu entendimento do assunto trabalhado. A abordagem investigativa pode ser uma alternativa pedagógica nesse sentido.

Na aula de investigação o professor busca, constantemente, incentivar o aluno a realizar a tarefa. Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) sugerem questões abertas, por exemplo, como uma maneira de aumentar o interesse dos alunos, pois estas questões podem ter diferentes interpretações e possibilidades de resposta. Por meio delas o professor faria questionamentos visando "criar nos alunos um espírito interrogativo perante as ideias matemáticas" (p. 48).

Em relação aos problemas, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de matemática os consideram como situações "que demandam a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado" (BRASIL, 1998, p. 33). Assim, é possível dizer que para resolver um problema fechado criam-se caminhos para encontrar uma solução e, em problemas abertos, para além da criação de caminhos é preciso defender as ideias que justifiquem uma das possíveis respostas ao problema. Vianna (2002) reforça que os


ISBN 978-84-945722-3-4

problemas devem ser interessantes aos alunos e não ao professor, destacando que "a noção de problema não tem sentido se o sujeito puder aplicar um sistema de respostas inteiramente constituído" (VIANNA, 2002, p. 403).

Outra maneira de tornar a aula interessante pode ser o trabalho em grupo. Trabalhar em pequenos grupos pode potencializar a colaboração entre os alunos e o diálogo matemático na defesa das próprias ideias e no respeito às ideias do outro.

Quando os alunos estão investigando em grupos, o professor avalia o progresso observando se compreenderam a tarefa sugerida e se ela representa, ou não, um desafio. Ao acompanhar o trabalho de cada grupo de alunos o professor faz perguntas, pede explicações, os ouve, busca compreender seus pontos de vista. Quanto maior a sensibilidade do professor para ouvir os alunos tanto mais irá buscar estratégias de interação. Cabe lembrar que uma avaliação constante do progresso dos alunos, não raro, demanda o redimensionamento do tempo da aula, podendo levar o professor a tomar decisões como "conceder mais tempo à realização da investigação, fazer uma pequena discussão intermediária com toda a turma ou, até mesmo, passar à discussão final" (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2005, p. 49).

Durante a realização da tarefa investigativa  o professor apoia o trabalho dos alunos por meio de questionamentos mais ou menos diretos, fornecendo ou recordando informação relevante, fazendo sínteses e promovendo a reflexão dos alunos. Quando os alunos lhe fazem questionamentos sobre o modo de resolução do problema, no lugar de explicar os procedimentos a serem seguidos, o professor faz outras perguntas convidando-os a refletir sobre o seu problema estudado (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006).

Alrø e Skovsmose (2006) consideram as abordagens investigativas como um conjunto de propostas pedagógicas desafiadoras das aulas de Matemática ambientadas no paradigma do exercício. O paradigma do exercício está diretamente relacionado a um modelo educativo em que o professor atua como transmissor de informações, cabendo aos alunos seguir métodos, previamente ensinados, para resolverem os exercícios propostos. Dentre as abordagens investigativas eles citam a resolução de problemas, o trabalho com projetos, a modelagem matemática etc. Para estes pesquisadores, tarefas investigativas são muito mais significativas aos alunos do que a simples resolução de exercícios.

Skovsmose (2000) entende que para a abordagem investigativa promover um cenário para investigação dois elementos básicos devem ser considerados: i) os alunos não podem


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

ser obrigados a realizar a tarefa, o professor os convida, caso aceitem, haverá o envolvimento dos mesmos; ii) é necessário um processo aberto sem procedimentos a serem seguidos ou resultados e conclusões previamente determinados.

Trabalhar com uma abordagem diferente, compartilhando com os alunos a responsabilidade de producir conhecimentos, não é simples. Por isso, ao refletir sobre a possibilidade de uma educação matemática que contribua para uma educação crítica, Skovsmose (2001) propõe um trabalho que integre diferentes assuntos trabalhados na escola. Para uma educação crítica, o autor considera fundamental haver igualdade entre professor e alunos, assim como o envolvimento dos alunos no processo educativo. Segundo ele, em um ambiente como esse, quando se acrescenta a cooperação entre os professores, é "possível eliminar as demarcações entre os assuntos escolares, tirar o 'horário' de cena, e dar espaço para períodos longos e contínuos de trabalho" (p. 33).

## Considerações

As reflexões escritas dos licenciandos, sobre o trabalho realizado, estão em fase de análise. Contudo, podemos destacar que apontam o professor como mediador e alunos como sujeitos de aprendizagem. Nos textos encontramos críticas, por exemplo, ao ensino baseado na reprodução de conteúdos destacando a importância de o professor oferecer oportunidades para os alunos construírem o próprio conhecimento. Consideram que aulas mais abertas implicam em situações inesperadas, mas com a recompensa de aprendizagem também para o profesor. Entendem que a abordagem investigativa, como um meio para promover a participação dos alunos, pode ser potencializada com os alunos trabalhando em grupos. Destacam essa abordagem pedagógica como possibilidade de interação entre alunos considerados normais e com deficiência. Reforçam a importancia da utilização de recursos variados como forma de tornar a aula mais prazerosa e com significado aos alunos. Como afirma Van de Walle (2009, p. 08) "O que é mais fundamental na Matemática é simplesmente que ela faz sentido!".

Não poderíamos deixar de dizer que ao finalizarmos os encontros na escola, refletimos com o prof. Saulo sobre o impacto do trabalho desenvolvido com a turma do sexto ano. Embora tenham sido somente quatro encontros de duas aulas geminadas, o professor


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

nos informou que os alunos estavam mais participativos na aula. Respondiam mais às perguntas que lhes eram feitas e realizavam as tarefas que lhes eram propostas. Parece que este tipo de aula fez sentido aos alunos talvez porque ao adotar a abordagem dialógica e investigativa oferecemos situações para que os alunos experimentassem, tirassem suas conclusões e as defendessem diante dos demais colegas e com o professor.

Procuramos nos esforçar para que o papel do professor não fosse o de confirmar ou infirmar uma resposta dos alunos, mas de promover a reflexão deles por meio de questionamentos sobre a tarefa que realizavam. A abordagem dialógica e investigativa parece ter surtido um efeito positivo nos alunos participantes deste trabalho, pois buscamos estabelecer um diálogo com os mesmos, no qual o professor atua "como um facilitador ao fazer perguntas com uma postura investigativa tentando conhecer a forma com que o aluno interpreta o problema" (ALROE; SKOVSMOSE, 2006). Neste sentido, entendemos que houve um "empenho crítico do aluno de ir *entrando* como sujeito em aprendizagem [e, nesse processo, estabelecer] a verdadeira relação de comunicação entre mim, como professor, e ele, como aluno" (FREIRE, 1996, p.134).

Defendemos aulas dialógicas e investigativas porque acreditamos que elas podem contribuir com uma leitura crítica de mundo pelos alunos, visando não somente a inserção destes indivíduos na sociedade, mas oferecendo-lhes meios para, como cidadãos e, exatamente por isso sujeitos ativos, poderem transformar o ambiente em que vivem. Nesse sentido, concordamos com Paulo Freire ao considerar a cidadania "como apropriação da realidade para nela atuar" (HERBERT, 2010, p. 67).

Por meio da reflexão sobre problemas matemáticos os alunos podem adquirir competências para lidar com situações de suas vidas. Adentrar nessa busca de compreensão para solucionar um problema implica em um envolvimento na ação de aprender. Para Freire (1996, p. 77), essa ação tem a ver com "construir, reconstruir, constatar para mudar, o que não se faz sem abertura ao risco e à aventura do espírito". E nós entendemos com ele que o ato de aprender não pode ser como uma coisa recebida, passivamente, por meio de informações ditadas pelo professor a ser memorizadas pelos alunos.

A ação de aprendizagem requer um sujeito interessado e, por isto mesmo, envolvido em sua produção de conhecimentos. Capaz de refletir e de se posicionar sobre o objeto de estudo, relacionando-o com conhecimentos anteriores. Alroe & Skovsmose (2006)


ISBN 978-84-945722-3-4

consideram uma atividade como ação quando pressupõe intencionalidade e a possibilidade de fazer escolhas, deste modo "[...] agir pressupõe tanto o envolvimento da pessoa quanto uma abertura" (p. 47).

Acreditamos que um trabalho como aqui apresentado mostra um cuidado em contribuir com a formação inicial de professores de matemática, como defende Gatti (2016):

> Cuidar dos professores é fundamental ao se pensar em transformações educacionais com visão na construção de uma sociedade mais justa, mais equitativa. Isso implica transformações em sua formação se se levar em conta os conhecimentos que temos sobre a formação hoje oferecida. (GATTI, 2016, p. 42).

Trabalhos desse tipo podem favorecer, aos futuros professores, o entendimento da aula de matemática como um ambiente para estimular a participação dos alunos. Afinal, por meio de uma aula dialógica e investigativa o professor pode viabilizar situações para refletir com os alunos sobre situações que abarcam o cotidiano dos mesmos. Com um estudo atravessado pela vida os alunos tem maior possibilidade de analisar criticamente o mundo que os cerca.

**Agradecimento** pelo apoio recebido da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG) para participação no evento.

**Referencias bibliográficas**

Alrø, H; Skovsmose, O. (2006). *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática*. Trad. Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica.

Brasil, Secretaria de Educação Fundamental. (1998) *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC / SEF.

Freire, P. (1996). *Pedagogia da autonomia*: saberes necessários à prática educativa. Coleção Leitura. São Paulo: Paz e Terra.

Freire, P. (2011) *Extensão ou Comunicação?* Tradução de Rosisca Darci de Oliveira. 15. ed. São Paulo: Paz e Terra.

Gatti, B. A. Questões: professores, escolas e contemporaneidade. En ANDRÉ, M. (org), Práticas inovadoras na formação de profesores, Capítulo 2, pp. 35-48. Campinas, SP: Papirus.

Herbert, S. P. (2010). *Dicionário Paulo Freire*. Verbete Cidadania. Belo Horizonte: Autêntica.

Mantoan, M. T. E. (2015). *Inclusão escolar – O que é? Por quê? Como fazer?* São Paulo: Summus.


ISBN 978-84-945722-3-4

Pérez Gómez, A. I. (2015). Educação na era digital: a escola educativa. Trad. Marisa Guedes. Porto Alegre: Penso.

Ponte, J. P.; Brocardo, J. ; Oliveira, H. (2005). *Investigações matemáticas na sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Boletim de Educação Matemática*. São Paulo: UNESP, Rio Claro.

Skovsmose, O. (2001). *Educação matemática crítica*: a questão da democracia. Campinas, Papirus.

Walle, V. (2009). Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula, 6ª ed.

Vianna, C. R. (2002). Resolução de Problemas. In: Temas em Educação I. Curitiba: Futuro Congressos e Eventos.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.178

# A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA POR CRIANÇAS DO PRÉ-ESCOLAR

Florbela Soutinho – Ema Mamede
soutinhoflorbela@gmail.com - emamede@ie.uminho.pt
AE Viseu Norte, Portugal - CIEC – UMinho, Portugal

Núcleo temático: La Resolución de Problemas en Matemáticas.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Nivel educativo inicial (3 a 5 años)
Palabras clave: Resolução de problemas; raciocínio multiplicativo; pré-escolar

**Resumo**
*Durante muito tempo pensou-se que as crianças só conseguiriam resolver problemas de estrutura multiplicativa depois de dominarem estruturas aditivas, o que faria supor a existência de uma fase aditiva preditiva do raciocínio multiplicativo. Contudo, novas investigações evidenciam que o raciocínio multiplicativo parece estar ao alcance das crianças tão novas quanto as de 6 anos.*
*Esta comunicação descreve um estudo que procura perceber como raciocinam as crianças dos 4 aos 6 anos (N=90), a frequentar a educação pré-escolar, quando resolvem alguns problemas de estrutura multiplicativa. O estudo procura responder às questões: que desempenhos apresentam na sua resolução? Que argumentos usam para justificar as suas respostas? Os participantes resolveram 12 problemas, 8 de Isomorfismo de Medidas e 4 de Produto de Medidas (Vergnaud, 1983). A análise quantitativa sugere que, apesar dos problemas de Produto de Medidas se afigurarem como mais difíceis de resolver do que os de Isomorfismo de Medidas, é possível a sua resolução por crianças do pré-escolar. Elas conseguem refletir sobre a sua ação e apresentam argumentos válidos para justificar as resoluções corretas.*

## Introdução

Durante muito tempo a multiplicação parecia só poder ser entendida depois de dominada a adição e subtração. Mais recentemente, a investigação tem sugerido que não será tanto assim (Vergnaud, 1983; Thompson, 1994; Nunes, Bryant, & Watson, 2009). Desde já há indicadores que sugerem que também os problemas de estrutura multiplicativa estão igualmente ao alcance das crianças mais novas.

## Sobre o raciocínio multiplicativo



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

O raciocínio multiplicativo, entendido como a base da compreensão sobre relações proporcionais (Wright, 2011) envolve as situações de correspondência de um-para-muitos e situações de relações entre variáveis, no qual as variáveis envolvidas estão ligadas por uma relação que se mantem constante entre si. Estas situações podem ser analisadas como problemas de proporção simples ou múltiplas, nos quais normalmente é necessário multiplicar ou dividir (Nunes et al., 2009; Thompson, 1994). A relação conceptual entre a multiplicação e a divisão remete para uma interpretação dos problemas baseada na sua estrutura, o que leva à distinção entre problemas de estrutura aditiva e problemas de estrutura multiplicativa.

A compreensão que as crianças têm das estruturas multiplicativas inicia-se informalmente, antes de entrarem na escola, em situações do dia-a-dia e com base nos esquemas de ação de correspondência um-para-muitos e distribuição. As crianças compreendem algumas situações simples de raciocínio proporcional, conseguindo construir conjuntos equivalentes com base na relação fixa que se estabelece entre duas quantidades de natureza distinta.

Estudos sobre a compreensão da proporcionalidade indicam que a dificuldade que as crianças registam sobre o raciocínio proporcional se deve à falta de compreensão sobre o raciocino multiplicativo (Vergnaud, 1983). A dificuldade inerente ao raciocínio multiplicativo conduziu a diferentes perspetivas sobre quando é que as crianças começam a dominar as operações de pensamento necessárias à resolução de problemas de multiplicação e divisão.

A partir de finais dos anos 80, observam-se estudos envolvendo crianças mais novas, centrados na compreensão de problemas de divisão (ver Frydman & Bryant, 1988; Correa, Nunes & Bryant, 1998; Kornilaki & Nunes, 2005) e nas estratégias de resolução de problemas de divisão e multiplicação (ver Carpenter, Ansell, Franke, Fennema & Weisbeck, 1993), excluindo problemas de Produto de Medidas ou mesmo problemas de Quarto Proporcional, que Vergnaud (1983) inclui nos problemas de Isomorfismo de Medidas. Ainda assim, a maior parte dos estudos desenvolvidos sobre problemas de estrutura multiplicativa envolvem crianças que já frequentam a escolaridade básica, tendo algum contacto com a instrução formal sobre operações aritméticas (ver Kouba, 1989; Mulligan, 1992; Park & Nunes, 2001).

Dos estudos já desenvolvidos, parece haver problemas mais difíceis de resolver do que outros. Nunes e seus colaboradores (2009) argumentam que esta dificuldade deriva da


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

interpretação que as crianças fazem das ações e relações descritas nos problemas, e das operações de pensamento necessárias à sua interpretação e resolução. Os problemas de Isomorfismo de Medidas, nas suas formas de Multiplicação, Divisão Partitiva e Divisão por Quotas parecem ser os mais fáceis, e os mais difíceis os problemas de Produto de Medidas e Proporções Múltiplas (Vergnaud, 1983).

Fuson (2004) argumenta que as situações de correspondência de um-para-muitos parecem estar ao alcance das crianças de 5 e 6 anos, desde que a linguagem envolvida seja simples, os números sejam pequenos e as crianças tenham acesso a material para manipular as situações. Elas conseguem encontrar estratégias que refletem os esquemas de correspondência um-para-muitos e de distribuição que lhes permitem resolver alguns problemas de estrutura multiplicativa. No entanto, Becker (1993) alerta para o facto de que, dentro destas situações, a correspondência 3:1 parecer suscitar mais dúvidas do que a correspondência 2:1. Os problemas que envolvem "Produtos Cartesianos" ou "Medidas de Conversão" são considerados mais difíceis de resolver (Mulligan, 1992; Fuson, 2004), mesmo para as crianças do 1.º e 2.º ano da escolaridade básica (Vergnaud, 1983), sendo de difícil compreensão que cada elemento de um conjunto deve ser cruzado com cada elemento do outro conjunto.

Em suma, a investigação tem mostrado que as crianças conseguem resolver problemas de raciocínio multiplicativo antes de estar completamente desenvolvido o raciocínio aditivo, e antes mesmo de lhes ser formalmente ensinado as operações de multiplicação e divisão. Contudo, parecem permanecer excluídos os problemas de Produto de Medidas e Quarto Proporcional. Assim, faz sentido perceber como é que as crianças portuguesas, a frequentar a educação pré-escolar, resolvem problemas que envolvem o raciocínio multiplicativo. Desenvolveu-se um estudo que procurou dar resposta às questões: 1) Que desempenhos apresentam as crianças quando resolvem problemas de estrutura multiplicativa? 2) Que argumentos apresentam na resolução desses problemas?

## Metodologia

Foram conduzidas entrevistas individuais a 90 crianças do pré-escolar, dos 4 aos 6 anos (n=30), de Viseu e Aveiro, Portugal. As crianças foram desafiadas a resolver 12 problemas de estrutura multiplicativa: 8 de Isomorfismo de Medidas e 4 de Produto de medidas


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

(Vergnaud, 1983). Os problemas apresentados foram adaptados de Vergnaud (1983) e de Nunes, Campos, Magina e Bryant (2005). A Tabela 1 mostra exemplos dos problemas apresentados às crianças.

**Tabela 1 - Exemplos de Problemas de Estrutura Multiplicativa.**

| PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA | | | |
|---|---|---|---|
| **TIPO DE PROBLEMA** | | **EXEMPLO** | **MATERIAIS** |
| Isomorfismo de Medidas | Multiplicação | Nesta rua há 3 casinhas. Em cada casinha moram 2 coelhinhos. Quantos coelhinhos moram, ao todo, nas 3 casinhas? | |
| | Divisão Partitiva | Tens estes grãos de milho (12) para dar a 3 pintainhos. Todos têm que comer a mesma quantidade. Quantos grãos de milho é que vai comer cada pintainho? | |
| | Divisão por Quotas | O Pedro tem estes balões (15) para dar aos amigos. Cada amigo vai receber 3 balões. A quantos amigos ele vai dar balões? | |
| | Quarto Proporcional | Quando faço sopa para mim (1 pessoa) coloco 2 batatas. Se eu quiser fazer sopa para 3 pessoas, quantas batatas tenho que colocar? | |
| Produto de Medidas | Multiplicação | Três meninos e 2 meninas estão num baile. Todos os meninos querem dançar com todas as meninas. Quantos pares se conseguem fazer? | |
| | Divisão | A Rosa consegue vestir 6 roupas diferentes com 3 saias e algumas camisolas. De quantas camisolas ela precisa? | |

A ordem das questões foi pré-estabelecida e igual para todas as crianças. A entrevista foi aplicada com recurso a histórias e materiais. As crianças não tiveram feedback sobre as suas resoluções e no final de cada resolução era-lhes pedido para justificarem a resposta dada. Para cada criança foram contabilizadas as resoluções certas e erradas nos problemas de Isomorfismo de Medidas e nos problemas de Produto de Medidas, tendo sido atribuído o valor de 1 a cada resposta certa e 0 a cada resposta errada. Os dados foram recolhidos com recurso à videografia e notas da investigadora.

## Resultados



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Foram analisados os resultados das crianças, bem como a justificação das respostas corretas. A Tabela 2 resume a média das proporções dos desempenhos das crianças na resolução dos problemas de estrutura multiplicativa, de acordo com a idade.

**Tabela 2 - Média das proporções (desvio padrão) das respostas certas das crianças na resolução de problemas de estrutura multiplicativa.**

| | | MÉDIA (desvio padrão) | | |
|---|---|---|---|---|
| **TIPO DE PROBLEMAS** | | 4 anos (n=30) | 5 anos (n=30) | 6 anos (n=30) |
| Isomorfismo de Medidas | Multiplicação | .28 (.31) | .45 (.38) | .78 (.34) |
| | Divisão Partitiva | .28 (.34) | .45 (.44) | .72 (.34) |
| | Divisão por Quotas | .30 (.41) | .60 (.42) | .75 (.41) |
| | Quarto Proporcional | .02 (.09) | .11 (.29) | .25 (.39) |
| Produto de Medidas | Multiplicação | .04 (10) | - | .06 (.31) |
| | Divisão | .17 (.38) | - | .10 (.31) |

Os resultados mostram que os problemas não são resolvidos com igual sucesso por todas as crianças. Crianças mais velhas têm melhores desempenhos do que as crianças mais novas. Percebe-se também que os problemas que obtêm melhores resultados são os problemas de Isomorfismo de Medidas, e que os problemas de Produto de Medidas se afiguram como muito difíceis para todas as crianças.

Nos problemas de Isomorfismo de Medidas, os problemas de Multiplicação parecem ser de mais fácil resolução do que os restantes, seguido dos problemas de Divisão por Quotas, com níveis de sucesso superiores aos problemas de Divisão Partitiva. Os problemas de Quarto Proporcional, os de maior dificuldade. Contudo, é de salientar o sucesso alcançado nestes problemas, que se situa acima dos 33% em crianças de 6 anos e nos 20% em crianças de 5 anos.

Os problemas de Produto de Medidas assumem-se como mais difíceis, o que teve expressão nos níveis de sucesso apresentados. Também nestes se observam melhores desempenhos nas crianças de 6 anos, no entanto, salienta-se que houve problemas que foram resolvidos corretamente por crianças de 4 anos enquanto que as de 5 anos não o conseguiram. Os problemas que parecem ter sido mais fáceis foram os de Divisão, ao contrário dos problemas de Multiplicação.


ISBN 978-84-945722-3-4

De forma a perceber em que medida as crianças eram capazes de explicar o seu raciocínio, foram também analisadas as suas justificações. A argumentação foi analisada considerando as categorias de argumentos "Válidos", "Parcialmente Válidos", "Inválidos" e "Sem Argumentos". Os argumentos "Válidos" consideram os casos em que a explicação dada pela criança atende a todas as quantidades envolvidas no problema (quando, no problema "A Rita vai arrumar 15 livros em 3 prateleiras. Quantos livros ficam em cada prateleira?", a criança responde "5 em cada prateleira" e argumenta "porque em cada grupo estão 5, e nas prateleiras tinha que dividir e não sobrar nenhum, então estão 5"). Os argumentos "Parcialmente Válidos" consideram os casos em que a criança atende a uma parte do problema e a sua explicação não é completa (quando, depois de responder "3" ao problema "A Mara tem 12 livros num baú para emprestar às suas amigas. Cada amiga vai receber 4 livros. A quantas amigas a Mara vai emprestar livros?", a criança justifica de forma incompleta "porque são 4"). Os argumentos "Inválidos" foram atribuídos aos casos em que a justificação é inconclusiva e descontextualizada não servindo como justificação para a resposta correta do problema (quando a criança responde acertadamente "5" ao problema "O Pedro tem 15 balões para dar a alguns amigos. Cada amigo vai receber 3 balões. A quantos amigos ele vai dar balões?", e argumenta "porque são muitos"). A categoria "Sem Argumento" foi considerada nos casos em que a criança, tendo dado uma resposta correta, perante a necessidade de justificar a sua resposta, não consegue verbalizar a sua explicação, ficando calada ou respondendo "não sei". A Tabela 3 apresenta a percentagem de argumentos dados nas resoluções corretas.

**Tabela 3 - Argumentos registados nas resoluções certas dos problemas de estrutura multiplicativa, de acordo com a idade.**

| | **TIPO DE PROBLEMAS** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Isomorfismo de Medidas** | | | **Produto de Medidas** | | |
| **ARGUMENTOS** | 4 anos (%) | 5 anos (%) | 6 anos (%) | 4 anos (%) | 5 anos (%) | 6 anos (%) |
| Válido | 41.5 | 54.1 | 63.4 | 60 | - | 28.6 |
| Parcialmente válido | 3.8 | 4.1 | 3.3 | - | - | - |
| Sem argumento | 18.9 | 12.2 | 8 | 20 | - | 71.4 |
| Inválido | 35.8 | 29.6 | 25.3 | 20 | - | - |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Era espectável que crianças pequenas, de 4, 5 e 6 anos, manifestassem alguma dificuldade em expressar de forma válida o seu raciocínio na resolução dos problemas propostos. No entanto, o que se verifica são percentagens consideráveis de argumentos "Válidos", em ambos os tipos de problemas, e mesmo em crianças de 4 anos, chegando a 60% nos problemas de Produto de Medidas. As crianças de 6 anos não apresentaram argumentos "Parcialmente Válidos" neste tipo de problemas, o que poderá querer indicar que, tratando-se de problemas considerados como muito difíceis para crianças em pré-escolar, elas preferissem ficar caladas do que dar uma justificação que não fosse coerente com a sua resolução correta. A argumentação válida que se regista remete para a consciência com que as crianças resolvem os problemas propostos. Quando uma criança de 6 anos justifica a resposta correta que dá ao problema de Quarto Proporcional (em que se pretende saber quantas colheres de açúcar levam 4 pudins, sabendo que 2 pudins levam 3 colheres de açúcar) da seguinte forma: "então, aqui estão 2 pudins, esta colher é para este [coloca debaixo da figura do pudim uma colher], esta é para este [coloca debaixo do 2.º pudim outra colher] e esta colher é meia para este e para este [coloca a 3.ª colher por baixo mas no meio dos dois pudins], agora mais 2 são 4 [pudins]. São 6 colheres, um para este [coloca uma colher debaixo do 3.º pudim], outra para os 2, meia [coloca outra colher por baixo entre o 3.º e o 4.º pudim, balançando o dedo para um e para outro quando refere a "meia"] e outro para este [coloca a 6.ª colher debaixo do 4.º pudim] 6. Porque 3 se nós fizermos 2 [pudins], mas agora mais 3 para cada um [pretende referir conjunto de 2 pudins]", não se pode afirmar que esta criança não reflete sobre a ação que realizou, ou sobre a elaboração do seu pensamento. Este foi um exemplo dos vários argumentos válidos observados neste estudo. Reveste-se de notável importância atendendo à dificuldade que caracteriza o problema, em que as relações estabelecidas não são de fácil compreensão, dada a compreensão de 2 pudins como 1 conjunto e a correspondência 3:1, 3 colheres para 1 conjunto.

## Conclusões

De uma forma geral, as crianças de 4, 5 e 6 anos conseguem resolver alguns problemas de estrutura multiplicativa, sobretudo problemas de Isomorfismo de Medidas, ainda que o seu desempenho seja influenciado pela idade. A diferença que não se regista significativa entre


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

as crianças de 4 e 5 anos leva a supor que é a partir dos 6 anos que elas se tornam mais competentes para resolver a maioria destes problemas.

Ainda que a taxa de sucesso observada neste estudo nos problemas de Produto de Medidas se situe abaixo dos 20%, pode-se considerar que é possível, a crianças dos 4 aos 6 anos, resolverem estes problemas com apoio de materiais.

Pode-se também depreender que as crianças estão cientes do que fazem ao resolver as tarefas propostas, o que é comprovado pela argumentação que usam para justificar as suas respostas. Era compreensível que crianças desta idade tivessem dificuldade em se expressar e demonstrar a forma como raciocinaram para resolver os problemas que lhes foram propostos, devido à sua ainda pouca maturidade de expressão. Contudo, é interessante verificar a percentagem de argumentos "Válidos" em todas as idades. Neste estudo verifica-se que muitas crianças de 6 anos e algumas de 5 e 4 anos revelam uma capacidade de introspeção relativa ao seu procedimento e têm consciência das relações elaboradas pelo seu pensamento para encontrar o resultado correto, comprovado pela percentagem de argumentos "Válidos". Assim, e ainda que os problemas de Isomorfismo de Medidas tenham obtido, neste estudo, melhores resultados do que os problemas de Produto de Medidas, sustenta-se a possibilidade de estes últimos serem também resolvidos por crianças de 4 e 6 anos. Ora, tal como também defendem Hurst e Hurrell (2016), o desenvolvimento de situações exploratórias da compreensão do raciocínio multiplicativo, com exploração simultânea de situações de multiplicação e divisão, permite às crianças uma maior proficiência no seu raciocínio e também na resolução de problemas.

## Referências bibliográficas


Becker, J. (1993). Young children's numerical use of number words: Counting in many-to-one situations. *Developmental Psychology, 19*, 458-465.

Carpenter, T., Ansell, E., Franke, M., Fennema, E. & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematical Education, 24*, 428-441.

Correa, J., Nunes, T. & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a non-computational task. *Journal of Educational Psychology, 90*, 321-329.

Frydman, O. & Bryant, P. (1988). Sharing and the understanding of number equivalence by young children. *Cognitive Development, 3*, 323-339.




ISBN 978-84-945722-3-4

Fuson, K. (2004). Pre-K to grade 2 goals and standards: achieving 21st century mastery for all. In J. S. D. Clements, *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 105-148). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Hurst, C. & Hurrell, D. (2016). Investigating children's multiplicative thinking: implications for teaching. *European Journal of STEM Education 1(3)*, 1-10.

Kornilaki, E. & Nunes, T. (2005). Generalizing principles in spite of procedural differences: Children's understanding of division. *Cognitive Development, 20*, 388-406.

Kouba, V. (1989). Children's solution strategies for equivalents set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematical Education, 20*, 147-158.

Mulligan, J.(1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: A longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal, Vol 4 (1)*, 24-41.

Nunes, T., Bryant, P. & Watson, A. (2009). *Key understandings in mathematics learning.* Nuffield Foundation.

Nunes, T., Campos, T., Magina, S. & Bryant, P. (2005). *Educação matemática – Números e operações numéricas.* São Paulo: Cortez Editora.

Park, J. & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development, 16*, 1-11.

Thompson, P. (1994). The development of the concept of speed and its relationships to concepts of rate. In G. Harel, & J. C. (Eds.), *The development of multiplication reasoning in the learning of mathematics* (pp. 181-236). Albany, N.Y.: State Universit.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Resh, & M. L. (Orgs.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Wright, V. (2011). *The development of multplicative thinking and proportional reasoning: models of conceptual learning and transfer : models of conceptual learning and transfer*. (Tese de Doutoramento). University of Waikato, Waikato. Recuperada de https://researchcommons.waikato.ac.nz/handle/10289/5984, consultado em 13/04/2017.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.180

# PROPUESTA DE UTILIZACIÓN DE TÉCNICAS DE APRENDIZAJE COLABORATIVO PARA ANALIZAR EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS EN EL GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Laura Conejo – Matías Arce – Cristina Pecharromán – Tomás Ortega
lconejo@am.uva.es – arcesan@am.uva.es – cristina.pecharroman@uva.es – tomas.ortega@uva.es
Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid, España

Núcleo temático: IV. Formación del profesorado en Matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Aprendizaje Colaborativo, Grado en Educación Primaria, Currículo de Matemáticas.

**Resumen**

*En la presente comunicación se describe una metodología llevada a cabo con alumnos del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Valladolid. En ella se plantea la utilización de técnicas de aprendizaje colaborativo para el análisis del currículo de Educación Primaria de Matemáticas. La utilización de dicha metodología está motivada por el escaso interés que el estudio del currículo suscita en los futuros maestros, a pesar de ser una de las competencias básicas que deben desarrollar, así como por las evidencias de la baja comprensión de la estructura curricular que los alumnos tienen al finalizar las asignaturas de Didáctica de la Matemática. La metodología está basada en la aplicación de la técnica "Rompecabezas", en la que los alumnos se especializan en diferentes partes del currículo, y posteriormente se generan grupos de expertos en las diferentes partes con el propósito de resolver actividades basadas en un análisis global del currículo de matemáticas. Los resultados de las primeras aplicaciones de la experiencia muestran una mayor predisposición y motivación para el estudio del currículo, así como una cierta mejora en los resultados de aprendizaje del currículo.*

## Introducción

La experiencia didáctica que se presenta en esta comunicación se desarrolla en el marco de un Proyecto de Innovación Docente, concedido por la Universidad de Valladolid, cuyo objetivo principal es mejorar el estudio del Currículo de Matemáticas de Educación Primaria de los estudiantes del Grado en Educación Primaria a través de la utilización de técnicas de aprendizaje colaborativo (Barkley, Cross & Major, 2007). Esta experiencia nace de la observación del hecho de que una de las partes del temario que menos atractiva resulta de



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

trabajar para los alumnos en las asignaturas del área de Didáctica de la Matemática (de ahora en adelante, DM) de este grado es el estudio del Currículo de Educación Primaria, a pesar de que una de las competencias de las asignaturas de DM del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Valladolid es "conocer el currículo escolar de matemáticas". Además, al finalizar la asignatura, no parece que los alumnos hayan interiorizado la estructura ni las implicaciones en su futuro profesional que tiene este documento, a pesar de haber trabajado con él.

Con anterioridad a este proyecto, la forma de trabajar el currículo de Ed. Primaria en las asignaturas de DM ha consistido, o bien en clases de carácter expositivo, o bien en proyectos didácticos en los que los alumnos debían realizar un análisis de los documentos curriculares pertinentes, con el objetivo de que llegaran a ser capaces de relacionar los distintos elementos del mismo (contenidos, criterios de evaluación,…) y de sintetizar dichas relaciones para tener una buena visión general de cuáles son las Matemáticas que deben enseñar a los alumnos en la etapa de Ed. Primaria y cómo se organizan. Sin embargo, se observaba frecuentemente que muchos alumnos se limitaban a copiar información del currículo, sin apenas conectar o relacionar sus elementos.

Con los objetivos de facilitar el estudio de esta parte de las asignaturas de DM y de mejorar el conocimiento de los alumnos en este tema, hemos considerado la utilización de técnicas de aprendizaje colaborativo. La utilización de estas técnicas presenta numerosas ventajas desde el punto de vista de la enseñanza. Son más motivadoras para el alumnado debido a que las interacciones entre los estudiantes facilitan la comprensión. Además, forman parte de la filosofía del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) porque, tal y como defienden Álvarez-Teruel y Gómez-Lucas (2011, p. 23), "una de las competencias más demandadas socialmente y que debería tener un mayor protagonismo en el contexto de trabajo educativo universitario es el trabajo colaborativo". Además, estos autores abogan por la utilización de metodologías docentes adecuadas a las competencias a desarrollar, y que, como dice Alías, Gil, Riscos, Valcárcel y Vicario (2006), en todo caso debe procurarse el uso de metodologías activas que impliquen una mayor participación de los estudiantes. Por esta razón, decidimos implementar la técnica "Rompecabezas" descrita por Barkley, Cross y Major (2007), con una propuesta que se explica en los siguientes apartados. Anticipamos los resultados positivos de las primeras implementaciones: los estudiantes demostraron mayor motivación para trabajar


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

el currículo y resultados de aprendizaje algo mejores, lo que representan razones suficientes para pensar en continuar con la experiencia, refinando la propuesta, y planteando su implementación en otros grupos de alumnos y en otras asignaturas en las que se estudien documentos curriculares.

**Descripción de la experiencia**

La técnica de aprendizaje colaborativo seleccionada para el desarrollo de esta experiencia es el "Rompecabezas" (Barkley, Cross & Major, 2007). Se trata de una técnica de aprendizaje colaborativo desarrollada por Aronson (2013) en los años 70, en Austin (Texas), para evitar posibles situaciones conflictivas en un ambiente demasiado competitivo dentro de una comunidad que tradicionalmente había estado racialmente segregada. Lo que buscaban era crear un ambiente de colaboración que permitiera crear lazos interraciales y reducir el odio.

Actualmente, su utilización no se restringe a ambientes conflictivos, sino que es una técnica de gran utilidad para "motivar a los estudiantes a que asuman la responsabilidad de aprender algo suficientemente bien como para enseñárselo a sus compañeros y ofrece a cada alumno la oportunidad de ser el centro de atención" (Barkley, Cross & Major, 2007, p. 128). Así, hasta los estudiantes con más dificultades para hablar en público toman el rol de profesor y lideran la actividad en un determinado momento.

La técnica consiste en lo siguiente (ver Figura 1):

- El profesor elige el tema que se quiere tratar mediante esta técnica, y lo divide en subtemas independientes, es decir, que cada uno de ellos no sea imprescindible para poder estudiar los demás, y puedan trabajarse por separado sin depender o necesitar de los otros.
- Se divide a los alumnos de la clase entre el número de subtemas que se han diseñado. Esta primera división constituirá los llamados *grupos de expertos*. A cada uno de estos grupos se le asignará uno de los subtemas propuestos inicialmente, y deberán trabajar conjuntamente para que todos los alumnos dominen el subtema que les ha sido asignado.
- Una vez dominado cada subtema dentro de los *grupos de expertos*, se deshacen estas agrupaciones y se crean unas nuevas, llamadas *grupos rompecabezas* en las que habrá al menos un integrante de cada uno de los *grupos de expertos*. De esta forma, cada alumno debe enseñar su subtema a los demás, así como aprender el resto de


ISBN 978-84-945722-3-4

subtemas de sus compañeros. Finalmente se les propondrá una tarea cuya resolución requiera del conocimiento de todos los integrantes, lo que genera la interdependencia necesaria para que todos los alumnos tomen los roles de "profesor" y "alumno" dentro de los *grupos rompecabezas*.

El papel del profesor en esta dinámica consiste en dividir el tema en subtemas, supervisar que todos los *grupos de expertos* dominen los respectivos subtemas, planificar una serie de tareas adecuadas que requieran del conocimiento de todos los subtemas y evaluar los resultados obtenidos, siempre con el objetivo de resolver posibles errores que se produzcan en cada fase de la implementación de la técnica.

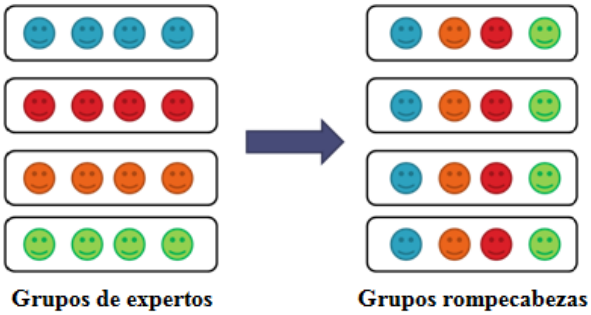



Figura 1. Esquema de la técnica "Rompecabezas".

Esta técnica la hemos implementado tanto en el curso 2015-16, que procederemos a describir a continuación, como en el curso actual, 2016-17, cuya implementación y análisis de resultados aún está en curso. En el curso 2015-16, la experiencia se llevó a cabo en la asignatura *Fundamentos de la forma y el volumen y estrategias didácticas para su enseñanza* (de ahora en adelante, FFVEDE) del 2º curso del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Valladolid. En concreto, en la Facultad de Educación de Soria, en el turno de mañana. En ese turno había matriculados 69 alumnos divididos en dos grupos de práctica de aula (de 37 y 32 alumnos respectivamente). En cada grupo, los alumnos fueron divididos en cuatro *grupos de expertos*, atendiendo al orden alfabético, y asignando un subtema a cada grupo.

Los contenidos matemáticos de esta asignatura son los relativos a la Geometría, así que el tema elegido para trabajar mediante la técnica *Rompecabezas* es la parte de Geometría del Currículo de Educación Primaria actual (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014), en particular, en la concreción curricular de Castilla y León (Conserjería de Educación de la


ISBN 978-84-945722-3-4

Junta de Castilla y León, 2014), comunidad autónoma en la que se ubica la implementación. Esos contenidos han sido divididos en cuatro subtemas: "Situación en el plano y en el espacio", "Figuras planas", "Figuras espaciales" y "Regularidades y simetrías".

Para dirigir a los alumnos dentro de la fase de expertos, se les proporcionó un guion que les ayudara a profundizar en su subtema, y que debían realizar individualmente antes de la sesión en clase. En ese guion se les solicitaba la identificación de los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables relativos a su subtema, así como la relación entre dichos elementos, es decir, qué criterios de evaluación y qué estándares correspondían a cada contenido.

Tras ese trabajo previo individual, se dedicó una primera sesión de clase, de 2 horas, a trabajar en los *grupos de expertos*, en la que todos ellos pudieran profundizar en sus conocimientos sobre el subtema trabajado, y elaboraran una descripción de la evolución del subtema que les había sido asignado a lo largo de toda la Educación Primaria. Dicha descripción ha sido recogida y revisada por la profesora investigadora (y primera autora de la comunicación) para comprobar que cada grupo de expertos había profundizado lo suficiente en el conocimiento de su subtema.

Unas semanas después, en otra sesión de 2 horas, los alumnos se colocaron en los *grupos rompecabezas* para, en primer lugar, poner en común lo que sabían de todos los subtemas. Posteriormente, debían escribir una descripción de la evolución de toda la Geometría a lo largo de la etapa de Educación Primaria (similar a la tarea recogida en los *grupos de expertos* pero para desarrollar un informe que englobe todos los subtemas), y clasificar una serie de 7 actividades diferentes extraídas de libros de texto de Educación Primaria, en las que debían identificar el curso aproximado al que correspondía cada una de ella (en virtud de la información extraída del currículo), los contenidos que se trabajan y, por último, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables asociados a dicha actividad (ejemplo en la Figura 2).


ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 2. Actividad de un libro de Ed. Primaria propuesta para su clasificación.

Las producciones de cada *grupo rompecabezas* (descripción de la evolución de los contenidos y clasificación de actividades) fueron recogidas y revisadas por la profesora investigadora (y primera autora), quien posteriormente proporcionó a los alumnos comentarios y correcciones a sus tareas que fueron colgadas en el aula virtual de la asignatura para que, de esa manera, los alumnos pudieran utilizar este material en su estudio para preparar el examen final de la asignatura (en el que se les hicieron preguntas relacionadas con el currículo). Esta técnica se les presentó como un facilitador para preparar el examen, pero sin que su participación en esta experiencia y los objetos generados tuvieran un peso en la calificación final de la asignatura.

**Análisis de resultados**

A la hora de llevar a cabo la implementación de la experiencia, de los 69 alumnos matriculados en el turno de mañana de la asignatura, únicamente 31 participaron en toda la experiencia (44,9%), dado que a la primera sesión de aula asistieron 52 alumnos, pero no todos ellos asistieron a la segunda. Además, en esta primera sesión, muy pocos alumnos habían realizado su trabajo individual (en torno a 2 o 3 alumnos en cada grupo de práctica de aula), y de algunos subtemas había muy pocos alumnos que hubieran asistido a clase. Esto nos llevó a redistribuir a los alumnos en los *grupos de expertos* para que estuvieran equilibrados y a realizar en el tiempo de clase todo el trabajo que tenían que haber realizado en casa. Si bien esto produjo cierta disfuncionalidad en la implementación, finalmente todos los alumnos subieron al aula virtual el trabajo realizado en estas dos horas. Posteriormente, en la segunda sesión de trabajo en el aula, sólo 31 alumnos participaron en la experiencia. Esto produjo que los *grupos rompecabezas* tuvieran más de cuatro integrantes, pues no había el mismo número de expertos en cada subtema, considerando indispensable que hubiera al


ISBN 978-84-945722-3-4

menos un experto de cada tipo en los *grupos rompecabezas*, aunque pudiera haber más de uno en algún caso.

De los 31 alumnos que participaron en la experiencia, todos se presentaron al examen final de la asignatura de la parte de Didáctica, en el cual, 5 de las 20 preguntas tipo test estaban basadas en la experiencia. Las preguntas contenían actividades de libros de texto, que tenían que clasificar de forma similar a lo que habían realizado en la experiencia. De estos 31 alumnos, 21 (67,7%) contestaron correctamente a 3 o más de las 5 preguntas basadas en la experiencia. Por su parte, de los 28 alumnos restantes que se presentaron a dicho examen, y que no completaron la experiencia de trabajo colaborativo, sólo 15 (53,5%) contestaron correctamente a 3 o más de estas 5 preguntas.

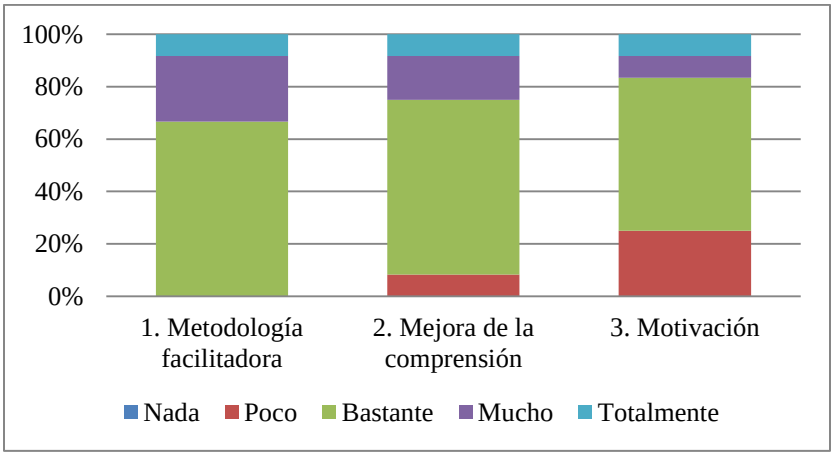



Figura 3. Resultados de la encuesta sobre la técnica Rompecabezas.

Por último, se realizó en clase una encuesta personal sobre la opinión de los alumnos en la que se les preguntó, utilizando una escala tipo Likert, si (1), la técnica les había facilitado el estudio del currículo, (2), si habían comprendido mejor la organización del currículo y (3), si la técnica resultaba más motivadora que otras formas de abordar el currículo, además de dos preguntas de respuesta abierta sobre los puntos fuertes y los puntos débiles que hubieran detectado en la técnica Rompecabezas. Los resultados, que se pueden observar en la Figura 3, fueron bastante positivos, dado que todos los alumnos consideraron que la técnica facilitaba bastante, mucho o totalmente el estudio del currículo y sólo un 10% consideró que mejoraba poco la comprensión de la estructura del mismo. Por su parte, el ítem de la motivación es el que peor resultados obtuvo, con un 25% de los alumnos que afirmaron que la técnica había sido poco motivadora.


ISBN 978-84-945722-3-4

**Conclusiones y experiencias futuras**

En un principio, consideramos que la baja participación de los alumnos en la experiencia se debía, en gran parte, a que la participación en la actividad y las tareas generadas no han formado parte directa de la evaluación de la asignatura. Es decir, un alumno puede estudiar la parte del currículum por su cuenta y contestar correctamente las preguntas del examen, o aprobar el examen contestando correctamente otras preguntas no basadas en esta dinámica y superar la asignatura. Sin embargo, esta experiencia se está llevando a cabo en el curso actual, tanto en la asignatura FFVEDE como en la asignatura del curso 1º del Grado en Educación Primaria, *Fundamentos numéricos y estrategias didácticas para su enseñanza* (FNEDE), esta última en las Facultades de Educación de Soria y Segovia, y por el momento, la participación en la asignatura FFVEDE fue del 46,5% y en la asignatura FNEDE de la Facultad de Educación de Soria fue del 60,6% (en la Facultad de Segovia aún no se ha finalizado su implementación). Esto nos hace pensar que no sólo influye el factor calificación sino el grado de implicación en las asignaturas que tengan los alumnos del grupo en cuestión. No obstante, a partir de los datos de las experiencias del presente curso consideraremos la posibilidad de evaluar las competencias adquiridas mediante esta experiencia a partir del trabajo y de las tareas desarrolladas en clase.

En cuanto a las calificaciones obtenidas por los alumnos, se observa un mayor porcentaje de acierto en aquellos que sí han participado en la experiencia, lo que nos reafirma en nuestra hipótesis de que el trabajo colaborativo mediante esta técnica es positivo y, por tanto, consideramos que debemos seguir trabajando mediante la misma en futuros cursos y que podría extenderse tanto a otras asignaturas de DM (en concreto, en la Universidad de Valladolid los alumnos tienen que cursar otra asignatura obligatoria en 4º curso del Grado en Educación Primaria, sobre contenidos de medida y de tratamiento de la información y azar), como a otras asignaturas de otras áreas que contengan contenidos de carácter curricular.

En cuanto a la opinión de los alumnos, creemos que las respuestas dadas en la encuesta personal son suficientemente positivas para pensar que los alumnos consideran útil la dinámica para trabajar los documentos curriculares. Además, en el transcurso de las clases, algunos alumnos expresan opiniones favorables a la actividad de clasificación de actividades de libros de texto, dado que lo ven como algo más relacionado con su futura práctica profesional, algo que suele gustarles en general.


ISBN 978-84-945722-3-4

Sin embargo, creemos que también existen varios aspectos a mejorar en la implementación de la técnica. Por ejemplo, en relación a las actividades propuestas, creemos necesario proponer una tarea que tenga un carácter aún más colaborativo que la de clasificación de actividades, como por ejemplo, que el grupo tenga que diseñar tareas para Ed. Primaria para trabajar, de forma entrelazada, varios conceptos de los diferentes subtemas. Esto se está implementando en curso actual, lo que nos dará datos para comprobar si supone una mejoría respecto al curso anterior.

**Agradecimientos**

Este trabajo forma parte de un Proyecto de Innovación Docente titulado "Patrones de aprendizaje colaborativo para el estudio del currículo de Ed. Primaria", aprobado y apoyado económicamente por la Universidad de Valladolid.

**Referencias bibliográficas**

Alías, A., Gil, C., Riscos, A., Valcárcel, M. y Vicario, E. (Eds.) (2006). Actas del Encuentro sobre la Formación del Profesorado Universitario. Almería: Universidad de Almería.

Álvarez-Teruel, J. D. y Gómez-Lucas, M. C. (2011). El Espacio Europeo de Educación Superior, las competencias, el trabajo colaborativo, la calidad… Algunas pinceladas. En M. C. Gómez-Lucas y J. D. Álvarez-Teruel (Eds.) *El trabajo colaborativo como indicador de calidad del Espacio Europeo de Educación Superior* (pp. 17-34). Alicante: Marfil.

Aronson, E. (2013). *Jigsaw Classroom. Social Psychology Network*. Disponible en: http://www.jigsaw.org/

Barkley, F. E., Cross, P. K., & Major, C. H. (2007). *Técnicas de aprendizaje colaborativo*. Madrid: Morata.

Conserjería de Educación de la Junta de Castilla y León (2014). ORDEN EDU/519/2014, de 17 de junio, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación primaria en la comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León, 117*, 44181-44776.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52*, 19349-19420.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.183

# LETRAMENTO ESTATÍSTICO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: FORMAÇÃO DOCENTE E PRÁTICAS EDUCATIVAS

Michel da Costa – Maria Elisabette Brisola Brito Prado
michel.costa@unimes.br – bette.prado@gmail.com
Universidade Anhanguera de São Paulo - UNIAN

Núcleo temático: Formação do Professor em Matemática
Modalidade: Comunicação Breve (CB)
Nível educativo: Formação e Atualização Docente
Palavras-chave: Letramento Estatístico, Formação Docente, Observatório da Educação.

**Resumo**
Trata-se de um estudo realizado no âmbito da parceria da Universidade Anhanguera de São Paulo com o Governo Federal, por meio do Programa Observatório da Educação, onde foram realizadas ações formativas com o objetivo de analisar as possibilidades que um curso de formação continuada pode proporcionar no que tange ao letramento estatístico em grupo de docentes que atuam no Ensino Fundamental, tendo como foco o ambiente colaborativo e práticas pedagógicas adequadas ao nível em que atuam. Para a coleta de dados, foram utilizados questionários, portfólios de atividades desenvolvidas, filmagens e gravações ocorridas durante o curso. As reflexões proporcionadas à luz dos princípios teóricos de Batanero e Gal concernentes à Didática da Estatística e presentes nos textos das duas primeiras versões da Base Nacional Comum Curricular desvelaram aspectos ainda não consolidados na prática do professor acerca do letramento estatístico, pois o grupo demonstrou que trabalham os conteúdos de estatística descritiva, mas deixam de lado importantes aspectos pertinentes à estatística inferencial no desenvolvimento de uma matemática para a criticidade que favorece a formação cidadã.

## 1. Contexto Curricular da Estatística na Educação Básica

A estatística está presente em diversas áreas do cotidiano, ultrapassando os muros escolares, pois são constantes os tratamentos de dados em reportagens diversas: políticas, científicas, esportivas, entre uma grande variedade de outros ramos no quais os nossos alunos, com as mídias tão constantes e atual mundo globalizado, possuem cada vez mais contato precoce com tais conteúdos que tanto auxilia a humanidade em suas múltiplas formas de organização de dados, e consequentemente dão suporte à criticidade e que nos permite cada vez mais ampliarmos o raciocínio na compreensão da sociedade multifacetada.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Em face da relevância da estatística, a escola não pode deixar de cumprir o seu papel na formação de indivíduos capazes de compreender as múltiplas variáveis que o cercam e com isso consigam tirar conclusões e tomar decisões. Dessa forma, as políticas nacionais brasileiras reconheceram, no final dos anos 1990, o tratamento da informação como indispensável aos conhecimentos dos alunos da Educação Básica.

Lopes (2010) indica que a estatística ainda não alcançou o espaço necessário, pois em diversos países ainda não está sendo efetiva e regularmente abordada pelos professores nas aulas de matemática.

Os estudos propostos pelo Governo Federal da Base Nacional Comum Curricular – BNCC já indicaram a Estatística como eixo necessário aos conteúdos mínimos que todos os alunos brasileiros precisam aprender, deixando a estatística de ser apenas um suporte para outras áreas do conhecimento e conexões dentro da matemática e passa a ser valorizada enquanto parte intrínseca, não menos importante que às demais que compõem a BNCC: números, geometria, álgebra e grandezas e medidas.

O atual quadro docente de nosso país ainda possui restrições no que tange aos conhecimentos de estatística, bem como metodologias para desenvolver o letramento em nossos alunos. Tal demanda é oriunda de uma formação inicial em que pouco ou nada foi contemplada de educação estatística, já que é recente a valorização de tais conteúdos nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação desses docentes.

Biajone (2010) indica que a formação nos cursos de pedagogia deve contemplar estudos de estatística que conduzam uma metodologia diferenciada, pois deve dar espaço à associação com práticas sociais que os alunos desenvolvam competências para a resolução de problemas e consequentemente a tomada de decisões, ao invés da ênfase nos procedimentos, memorização de fórmulas e aspectos computacionais descontextualizados.

Considerando o panorama indicado, o objetivo desse estudo é analisar quais as possibilidades proporcionadas pela formação de professor no que tange ao letramento estatístico em um grupo de docentes que atuam no Ensino Fundamental, tendo como foco o ambiente colaborativo e práticas pedagógicas adequadas ao nível em que atuam.

## 2. Letramento Estatístico na Formação Continuada de Professores

Batanero (2001, 2015), Watson (2001), Gal (2002), Carzola et al (2010), Campos et al (2013) argumentam a favor do letramento estatístico desde os primeiros anos de


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

escolarização, considerando uma pessoa letrada em estatística aquela que consegue interpretar e avaliar criticamente informações estatísticas, necessárias competências para agir local e globalmente em contextos distintos.

Kataoka et al (2011) afirmam que o termo letramento estatístico fora utilizado pela primeira vez por Wallman, em 1993, onde afirma ser:

> (...) a competência para compreender e avaliar criticamente resultados estatísticos que permeiam nossas vidas diárias junto à capacidade de reconhecer a contribuição que o pensamento estatístico pode trazer para as decisões públicas e privadas, profissionais e pessoais. (p. 874-875)

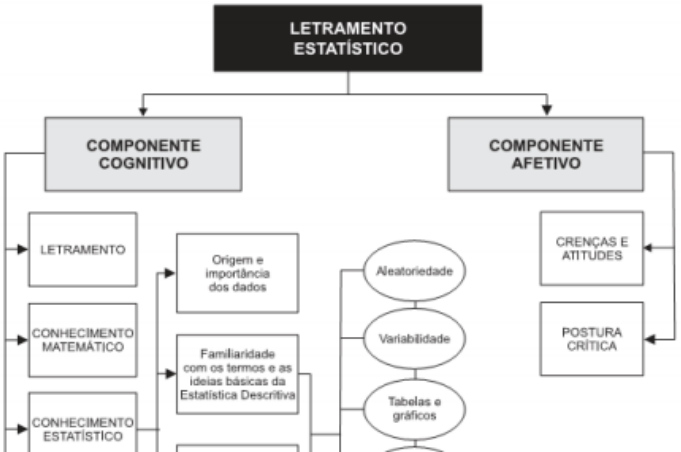
Nesse sentido, corroboramos que em nossa cultura há a exigência de cada vez mais a compreensão das relações existentes entre as variáveis e dados para uma análise crítica, sendo então o letramento estatístico primordial na construção de conjecturas e desenvolvimento de competências essenciais ao raciocínio na tomada de decisões pertinentes e coerentes com o contexto.

Silva (2007) afirma que letramento e alfabetização são em nosso país utilizados por muitas vezes como sinônimo, o que não acontece em outros países. Nesse trabalho utilizaremos o termo letramento, já que é mais abrangente, pois além dos procedimentos e conceitos também faz utilização destes para resolver situações hipotéticas ou reais, extravasando o que a alfabetização estaria apenas suficiente para decodificar.

Nesse mesmo sentido, Carvalho (2003) indica que o letramento estatístico está ligado à dinâmica do saber, já que representa a mobilização de competências para resolver problemas e não apenas está restrito à aquisição de conhecimentos.

O letramento estatístico é definido por Watson (1997) como a capacidade de compreensão de textos e das possíveis implicações dos dados estatísticos em contextos distintos, onde envolve simultaneamente a linguagem e os conceitos, assim como o desenvolvimento de atitudes investigativas e críticas. O modelo indicado pela figura 1 ilustra como melhor esses componentes estão relacionados entre si:

**Figura 1 – modelo de letramento estatístico de Gal (2002)**






VIII CONGR
ISBN 978-84

Fonte:<http:avale.iat.educacao.ba.gov.br/index.php?option=com_content&vie=article>

Gal (2002) indica um esquema na construção do modelo de letramento estatístico, onde são desenvolvidas as competências para interpretar e avaliar criticamente informações estatísticas, assim como são trabalhadas as competências para comunicar e discutir articulando tais informações.

Nesse sentido, o letramento estatístico torna-se essencial para os alunos, pois por meio desse irá transgredir na compreensão do mundo que os cerca, possibilitando a ampliação de suas capacidades de fazer conjecturas e analisar situações com competência e criticidade.

## 3. Curso "Letramento Estatístico no Ensino Fundamental"

Realizado no âmbito do Projeto Observatório da Educação, em parceria da Universidade Anhanguera de São Paulo com o Governo Federal, o curso foi ofertado aos professores que atuam no ensino fundamental, tendo a participação de 23 docentes no curso de formação continuada.

Com o propósito de comprender as lacunas existentes na formação inicial foi realizada uma atividade com caráter diagnóstico para identificar as dificuldades que esses professores possuíam em relação aos conceitos, práticas pedagógicas voltadas para o letramento estatístico.

O curso desenvolveu-se por meio de 8(oito) encontros presenciais de quatro horas, abrangendo conteúdos relacionados a estatística elementar, tratamento de dados em tabelas, gráficos e outras representações dos resultados de uma pesquisa, medidas estatísticas de tendência de posição e de dispersão e distribuição probabilística pela curva normal.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Já no que tange à metodologia relacionada à prática desses educadores foram trabalhados os aspectos ligados à reflexão sobre a relevância da estatística no currículo desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, bem como a troca de experiências ocorridas de forma colaborativa entre os participantes.

Durante a realização do curso, os participantes elaboraram projetos ou sequências didáticas para seus alunos, adequando às vivências formativas às particularidades de suas salas de aula. Nos dois últimos encontros, houve apresentações dessas atividades desenvolvidas no grupo, com a sistematização da temática abordada.

## 4. Análise e Resultados

A análise dos dados apresenta-se categorizada em três aspectos: currículo, conhecimentos de estatística e aspectos metodológicos do letramento estatístico.

### 4.1.Currículo

A maioria dos participantes desde o início já demonstrou considerar importante o letramento estatístico, no entanto, deste grupo dois participantes tiveram opinião contrária:

> Considero que meus alunos possuem o conhecimento necessário já que para esse nível o que é necessário é ler dados, pois é o que caí no *SARESP* e *Prova Brasil* [avaliações externas dos governos]. E os meus estão super bem e eu acompanho de perto e sei o que estou dizendo. (...) (Participante A)
>
> Não sei até que ponto a estatística é importante. Eu acho que o mais importante para os anos iniciais é ler, escrever e fazer contas. Sabendo isso, o restante flui... (Participante B)

A fala do participante A demonstra conhecimento restrito do currículo, já que considera que as avaliações externas balizam as práticas educativas. Por muitas vezes, negligenciando dessa forma o potencial para o aluno desenvolver competências essencial à formação, já que essas não fazem parte da matriz que compõem tais avaliações.

Quanto ao segundo depoimento, o mesmo indica uma visão bastante equivocada do participante B, já que o letramento estatístico ao contrário de restringir os conhecimentos de leitura, produção textual e matemática, proporciona uma melhor conexão desses às práticas sociais, correlacionando os componentes cognitivos aos afetivos presentes nas distintas situações, como evidencia Gal (2002).

### 4.2 Conhecimentos de Estatística

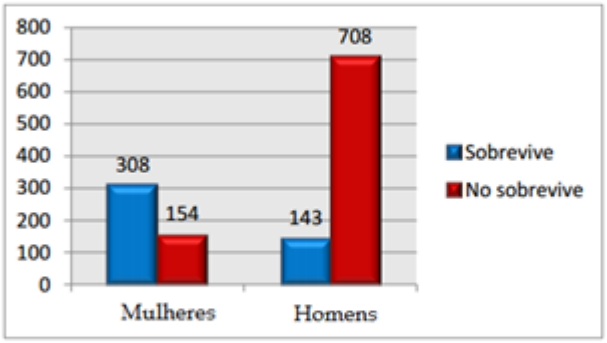
Para compreender melhor quais conhecimentos os professores participantes possuíam em relação à estatística, problematizamos uma situação-problema adaptada de um trabalho de Batanero (2015), conforme a figura 2:



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

**Figura 2 – situação-problema: Titanic e seus dados**

**O naufrágio do navio Titanic, de um total de 1313 passageiros, houve apenas 451 sobreviventes, conforme mostra o gráfico:**




a) Quantas mulheres e quantos homens sobreviveram à tragédia do Titanic?

b) Você consegue fazer mais alguma observação a respeito dos dados deste gráfico? Qual?

Fonte: Extraído de Batanero (2015, p.4)

Todos os participantes responderam corretamente a primeira pergunta, uma vez que envolvia apenas leitura de dados em gráficos, esse fato indica que os mesmos recorreram a elementos da estatística descritiva. Quanto à segunda pergunta, menos da metade do grupo relacionou a falta de proporção entre os sobreviventes em relação ao gênero, indicando falta de elementos na compreensão da correlação entre as variáveis.

Em continuidade a essa atividade fornecemos dados de uma tabela, considerando o mesmo contexto, para análise, conforme a figura 3:

**Figura 3 - questão de atividade formativa do 2º encontro**

**A tabela a seguir, nos mostra a distribuição das vítimas e sobreviventes do naufrágio do Titanic, conforme a classe social do navio:**

Tabela Distribuição observada de passageiros segundo sobrevivência e classe social.

| | Sobrevive | No sobrevive | Total |
|---|---|---|---|
| Primeira Classe | 194 | 128 | 322 |
| Segunda Classe | 119 | 161 | 280 |
| Terceira Classe | 138 | 573 | 711 |
| Total | 451 | 862 | 1313 |

Você consegue tirar alguma conclusão ao analisar essa tabela? Em caso afirmativo, qual (is)?

Fonte: Extraído de Batanero (2015, p.5)



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Em relação a essa questão, o número de professores participantes que a responderam foi de 60,8% (14/23), onde ao compartilharmos as respostas no encontro seguinte 12 dos participantes recorreram apenas ao conhecimento do contexto, já que a situação do naufrágio é historicamente de domínio público e 2 recorreram aos cálculos dos percentuais, porém não conseguiram argumentar de forma a atender a comanda da questão. Com a interação do grupo, foi bastante produtiva no ambiente colaborativo onde realizaram intercâmbio de ideias e conhecimentos que favoreceram a ampliação do letramento estatístico.

Analisando simultaneamente as respostas oferecidas oralmente, o diálogo proporcionado pelo grupo e as respostas presentes nos protocolos individuais dos participantes, percebemos que há um descompasso entre os conhecimentos desses professores em relação à estatística inferencial em relação à descritiva, já que conseguem ler e comparar numericamente dados em tabelas e gráficos, no entanto, não conseguem fazer conjecturas e tirar possíveis conclusões, essas duas últimas, habilidades essenciais às práticas sociais e exercício pleno da cidadania.

4.3 Aspectos Metodológicos do Letramento Estatístico

Durante o curso foram propostos que os professores participantes elaborassem no decorrer do Curso um Projeto Didático com seus alunos ou uma sequência didática relacionada à estatística.

Muitos professores demonstraram bastante criatividade e criticidade na elaboração de seus projetos e sequências didáticas, valorizando o contexto dos alunos, incentivando-os a comunicação de resultados em pesquisas realizadas. As temáticas abordadas nessas práticas contemplavam assuntos de interesses dos educandos: hábitos alimentares, gêneros musicais, previsão do tempo, questões socioambientais e dados científicos presentes em revistas, mostrando preocupação com ensino significativo e que considere aspectos motivacionais.

Nossa análise possibilitou verificar a necessidade da melhoria na prática pedagógica dos participantes, pois estão restritos aos elementos da estatística descritiva, onde pouco se trabalha questões discursivas e críticas, estando na maioria das vezes tendo a preocupação em que a pesquisa ou atividade tenha um percurso convencional e que pouco desenvolve competências essenciais ao exercício de dialogicidade, convencimento e relações entre as múltiplas variáveis que compõem o mundo real. Tais restrições demonstradas pelos participantes indicam que os mesmos ainda não estão convencidos que a estatística deva


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

extrapolar a construção de tabelas e gráficos e esses são meros instrumentos na construção de interpretações que possibilitem uma sociedade mais justa e igualitária, onde inclusive não necessariamente a atividade termine no gráfico, mas pode proporcionar a elaboração de gêneros textuais diversos, ou ainda, um debate rico entre os educandos.

**Considerações Finais**

A educação estatística vem conquistando seu espaço no ambiente acadêmico e nas instituições de ensino que atendem a educação básica, no entanto os professores que ensinam matemática nessa etapa demonstram lacunas na formação em virtude da recente inserção desses conhecimentos desde o início da escolarização.

O curso de formação em questão proporcionou reflexões e ampliações dos conhecimentos dos professores participantes, pois no decorrer das aulas, muitos demonstraram mais interesse, adaptando propostas vivenciadas no curso para seus alunos.

A análise dos dados obtidos indica conhecimentos razoáveis relacionados à estatística descritiva, porém muitas fragilidades quando os relacionam com dados implícitos que exigem maior compreensão para possíveis considerações, argumentações e realizações de conjecturas em panoramas diversos, construindo dessa maneira uma educação para autonomia em que sejam favorecidos  raciocínio, reflexão e criticidade.

**Referências bibliográficas**

BATANERO, C. (2001). Didáctica de la Estadística. Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática, 2001. Disponível na Internet. <http://www.ugr.es/~batanero>. Consultado em 27/02/2016.

BATANERO, C. DIAZ, C. LOPEZ-MARTIN, M. D. M. CAÑADAS, G. R. (2015). Interpretando las tablas de contingencia. UNO, pp. 1-12.

BIAJONE, J. (2010) *Projeto estatístico na pedagogia: promovendo aprendizagens e (re)significando atitudes.* in LOPES, C. E.; COUTINHO, C. Q. S. ; ALMOULOUD, S.A. (Orgs). Estudos e reflexões em educação estatística. Campinas: Mercado de Letras. pp.173-192.

BRASIL. Base Nacional Curricular Comum (BNCC). 2ª Versão Revista. Brasília: Ministério da Educação, 2016. Disponível na Internet. <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=36131>. Consultado em 02/01/2017.

BRASIL. Base Nacional Curricular Comum (BNCC). 3ª Versão. Brasília: Ministério da Educação, 2017. Disponível na Internet. <http:// http://basenacionalcomum.mec.gov.br/> Consultado  em 15/05/2017.

CAMPOS, C. R. WODEWOTZKI, M. L. L. JACOBINI, O. R. (2013). Educação estatística? Teoria e prática em ambientes de modelagem em matemática. Belo Horizonte: Autêntica.


ISBN 978-84-945722-3-4

CARZOLA, I.; KATAOKA, V.Y.; SILVA, C. B. (2010). Da Trajetória e perspectivas da educação estatística no Brasil: um olhar a partir do GT12. In: LOPES, C.; COUTINHO, C. de Q. e S.; ALMOULOUD, S. (Orgs). Estudos e reflexões em educação estatística, pp.19-44. Campinas: Mercado de Letras.

GAL, I. (2002). Adults Statistical Literacy: meaning, components, responsibilities. International Statistical Review, The Netherlands, 70, 1-25.

KATAOKA, V. Y. VENDRAMINI, C. M. M. SILVA, C. B. OLIVEIRA, M. H. P. Evidências de validade de uma prova de letramento estatístico: um estudo com estudantes universitários de cursos tecnológicos. Boletim de Educação Matemática, Campinas: 24. pp.873-895.

LOPES, C. E. (2010). Os desafios para educação estatística no currículo de matemática. In: LOPES, C.; COUTINHO, C. de Q. e S.; ALMOULOUD, S. (Orgs). Estudos e reflexões em educação estatística. Mercado de Letras, pp.47-63. Campinas: Mercado de Letras.

SILVA, C. B. (2007). Pensamento estatístico e raciocínio sobre variação: um estudo com professores de matemática. Tese de Doutorado da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC), São Paulo.

WATSON, J. (2001). Profiling teachers competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. Journal of Mathematics Teacher Education, 4, pp. 305-337.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.184

# COMPORTAMENTO ECONÔMICO, PSICOLOGIA E TOMADA DE DECISÃO: UMA CONTRIBUIÇÃO PARA A CRIAÇÃO DE AMBIENTES DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA ESCOLAR NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Ivail Muniz Junior
ivailmuniz@gmail.com
Colégio Pedro II/ETEJLN/CSB - Brasil

Núcleo temático: III - Aspectos socioculturales de la Educación Matemática / VI - Matemáticas y su integración con otras áreas.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Medio o secundario/Terciario o Bachillerato.
Palabras clave: Tomada de decisão, Ambientes de Educação Financeira Escolar, Psicologia Econômica, Ensino e aprendizagem de matemática.

**Resumo**
*O objetivo desse artigo é mostrar como alguns estudos do comportamento econômico sobre a tomada de decisão humana, advindos da Psicologia Econômica, em especial os de Kahneman e Tversky, podem contribuir para a criação e investigação de Ambientes de Educação Financeira Escolar (AEFE) nas aulas de matemática, em especial os relacionados à tomada de decisão. Para isso, apresentaremos alguns dos resultados dessa área, com foco nas heurísticas e vieses, para em seguida, mostrar articulações desses modelos comportamentais com a Educação Financeira Escolar (EFE), extraídas de nossa investigação de doutorado (de natureza qualitativa e do tipo etnográfico) sobre o processo de tomada de decisão em ambientes de educação financeira escolar por alunos de Ensino Médio. Os resultados indicam que as conexões entre a Psicologia e a EFE podem ser úteis tanto na criação dos AEFE que contemplem aspectos matemáticos e não matemáticos da tomada de decisão humana, incluindo os culturais, sociais e comportamentais, como na compreensão dos discursos e estratégias apresentadas pelos estudantes para tomar decisões nesses ambientes e, potencialmente, fora deles.*

## Introdução.

A abordagem de situações econômico-financeiras (SEF) na educação básica tem sido cada vez mais alvo de pesquisas em Educação Matemática no Brasil, principalmente nos últimos 10 anos, e aparecem associadas à Matemática Financeira, presente nos livros didáticos de matemática para o Ensino Médio no Brasil, ou a algum tipo de concepção ou proposta de Educação Financeira nas Escolas conforme apontam, por exemplo, (Rolim & Motta, 2014; Silva & Powell, 2013; Pessoa, 2016). Apesar desse crescimento, os estudos da Psicologia


ISBN 978-84-945722-3-4

Econômica não têm sido levados em consideração na fundamentação teórica e nem na metodologia de análise em tais pesquisas que investigam tais AEFE. Esse artigo, decorrente de nossa investigação de doutorado, realizada em 2015/2016 com 40 alunos de duas escolas do Rio de Janeiro-Brasil, conforme (Muniz, 2016a), pretende contribuir para reduzir essa lacuna.

Sabemos que as pessoas tomam decisões o tempo todo, tendo ou não consciência. São muitos os contextos em que os julgamentos e escolhas acontecem, incluindo os de natureza pessoal, familiar, acadêmica, social e profissional. Tomamos decisões importantes mobilizando nossa capacidade lógica e ferramentas analíticas, incluindo as envolvendo matemática, e em outros casos ignoramos completamente isso, agindo de forma que parece que não estamos no comando, influenciados pelo afeto, emoções, ou por coisas que sequer temos consciência. Há ainda situações em que tomamos uma brilhante decisão quase que instanteamente, e nos perguntamos depois como isso foi possível, como se pode ver, por exemplo, em (Kahneman, 2012; Damásio, 2012; Ferreira, 2008).

Dentre os variados contextos e áreas nos quais a tomada de decisão humana se insere, temos as envolvendo o dinheiro e suas consequências. E no século XXI, a capacidade de lidar com situações que envolvam a obtenção, o uso e a distribuição do dinheiro, dentre elas as relacionadas ao planejamento, endividamento, consumo, renda, financiamentos, seguros e previdência vem sendo cada vez mais importante, principalmente diante das novas tendências econômicas, sociais, demográficas, trabalhistas, tecnológicas e ambientais, conforme se pode ver em (OCDE, 2005; Mandell 2008; Lusardi & Mitchel, 2010; Arthur, 2012; Aprea et al, 2016).

Diante do aumento da demanda dessa capacidade de lidar com o dinheiro, diversas iniciativas têm surgido para se educar financeiramente a população, geralmente restritas à esfera governamental ou por meio de instituições financeiras, impulsionadas pela Organização para Cooperação do Desenvolvimento Econômico (OCDE) através de seu *Financial Education Project* (2005). (OCDE, 2005; Xiao, 2008; Atkinson & Messy, 2012; Britto, 2012; Hofmann, 2013; BRASIL-COREMEC, 2014; Muniz, 2016a).

Considerando essas variadas iniciativas, estão as que se voltam para crianças e jovens estudantes da Educação Básica. É nesse contexto que se insere a Educação Financeira Escolar que defendemos, e para a qual olharemos nessa comunicação breve ao trazer uma discussão


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

sobre como alguns estudos do comportamento econômico sobre a tomada de decisão humana, em especial os de Daniel Kahneman e Amos Tversky, podem contribuir para a criação e investigação de Ambientes de Educação Financeira Escolar (AEFE) nas aulas de matemática que privilegiem a tomada de decisão, bem como para a compreensão dos discursos e estratégias apresentadas pelos estudantes para tomar decisões nesses ambientes e, potencialmente, fora deles.

**Ambientes de Educação Financeira Escolar**.

Antes de apresentarmos o que entendemos por Ambientes de Educação Financeira Escolar, é preciso estabelecer nossa visão de educação financeira escolar. Concebemos e defendemos que a Educação Financeira Escolar deva ser um convite à reflexão sobre as atitudes e ações das pessoas diante de situações econômico financeiras (SEF) envolvendo aquisição, utilização e distribuição do dinheiro, tais como consumo, poupança, financiamentos, investimentos, seguros, previdência e doações, bem como as suas possíveis consequências no curto, médio e longo prazos, numa perspectiva individual, familiar e social, olhando tanto para oportunidades quanto para as armadilhas do mercado. Um convite que leve em consideração o contexto social e econômico dos estudantes, as características culturais e singularidades sociais da região em que vivem. Essa EFE é baseada em quatro princípios: convite à reflexão, a lente multidisciplinar, a dualidade e a conexão didática, e busca convidar à ação num movimento dinâmico, plural e democrático, conforme apresentamos em Muniz (2016a).

Defendemos também que esse tipo de Educação Financeira Escolar pode ser uma poderosa ferramenta na formação dos estudantes, principalmente quando olhamos para as potencialidades de compreensão do mundo; de produção de conhecimentos para resolver problemas; de criação de formas de atuação nos espaços produtivos; e de desenvolvimento de competências de representação, comunicação, investigação, compreensão e contextualização sociocultural.

A partir dessa concepção de Educação Financeira que se volta para a Educação Básica, entendemos que *Ambientes de Educação Financeira Escolar* são criados quando professores, alunos e/ou pesquisadores, convidam professores, alunos e/ou pesquisadores a pensar sobre questões financeiras que envolvam ideias matemáticas, mas que não se limitem a elas. AEFE


ISBN 978-84-945722-3-4

são formados por momentos, situações, aulas, e de uma forma geral, por um conjunto de interações entre estudantes, professores, pesquisadores e outros agentes educacionais em que essa Educação Financeira Escolar é posta em movimento, ou seja, que a interação entre tais agentes envolva a reflexão e a produção de significados para as situações econômico financeiras que envolvam aspectos matemáticos e não matemáticos, conforme apresentamos em (Muniz, 2015; 2016a; 2016b). São nesses AEFE que nossa investigação acontece, e são neles que a produção de significados dos estudantes para as situações financeiras envolvendo a tomada de decisão – por meio de tarefas desenhadas com influência da Psicologia Econômica –, ocorre e é analisada com o auxílio dos estudos dessa área.

**Psicologia Econômica e AEFE**.

Para deixar explícito a visão de Psicologia Econômica usada nesse artigo e nossa visão sobre o seu papel na construção de AEFE, comecemos com duas perguntas provocativas: como as pessoas tomam decisões financeiras? Qual o papel da racionalidade nesse processo?

Para a Economia Clássica, representada por Economistas como John S. Mill, Gary Backer, Milton Friedman e J. Savage, dentre outros, o agente da teoria econômica é racional (busca maximizar sua utilidade de forma logicamente consistente), egoísta e seu gosto não muda. O modelo, baseado essencialmente nessas três características, que prescreve esse "super-homem" foi chamado de modelo do agente racional. Conforme comenta o Economista Raj Patel (2010, p.31) "A premissa de Mill era de que, em geral, as pessoas não desperdiçam recursos, e os utilizavam da melhor forma possível a fim de obter o que desejam. A criatura ganhou vida própria. Eis o Homo economicus [...]".

Por outro lado, para um grupo de pesquisadores em comportamento humano e tomada de decisão é evidente que as pessoas não são nem completamente racionais, nem completamente egoístas e que seus gostos podem ser tudo, menos estáveis. Para Daniel Kahneman, por exemplo, os HUMANOS têm uma visão de mundo limitada pela informação que está disponível a um dado momento e, desse modo, não podem ser tão consistentes e lógicos como o Homem (ECONS) definido pela economia. São às vezes generosos, e com frequência estão dispostos a contribuir para o grupo ao qual estão ligados. E normalmente fazem pouca ideia sobre do que irão gostar no próximo ano ou até mesmo amanhã. (Kahneman, 2012, p.335).



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Dito isto, podemos considerar que Psicologia Econômica é "uma busca para compreender a experiência humana e o comportamento humano em contextos econômicos" (Kirchler e Holzi, 2003, p.29 apud Ferreira, 2008, p.43), fornecendo modelos econômicos descritivos, e não normativos, como faz a Economia. Ainda nessa direção, Ferreira (2008) comenta que:

> A Psicologia Econômica nasce, portanto, da necessidade, identificada por pensadores sociais, juristas, economistas e psicólogos, de acrescentar um enfoque mais abrangente à Economia, que não daria conta de explicar suficiente a apropriadamente os fenômenos econômicos, sempre influenciados pela participação humana e, consequentemente, pelas limitações, bem como por movimentos, por vezes inesperados, que lhe são inerentes. Ao observar que o comportamento econômico de indivíduos e grupos divergia consideravelmente do que seria esperado, caso as premissas econômicas fossem tomadas como leis, pensadores sociais e economistas e, mais tarde, psicólogos passaram a expor seus questionamentos, e buscar dados que refutassem as alegações dos economistas tradicionais – aqueles que aceitam os preceitos da teoria neoclássica, que postula a racionalidade dos agentes econômicos. (Ferreira, 2008, p.43)

Os psicólogos Daniel Kahneman e Amos Tversky, e a partir deles outros pesquisadores, identificaram alguns atalhos mentais conhecidos como heurísticas, e tendências (vieses) que levam os indivíduos a se desviarem das decisões que seriam as tomadas segundo as premissas do modelo do agente racional. A *falácia do planejamento*, por exemplo, leva-nos a subestimar quanto tempo nossos projetos vão demorar e quanto dinheiro vão custar. A *heurística da disponibilidade* nos leva a fazer julgamentos e tomar decisões baseados em qualquer coisa que nos venha mais prontamente à cabeça, por ser algo de que lembramos ou que experimentamos recentemente. Os *efeitos de enquadramento* influenciam nossas decisões de acordo com a semântica cm que as opções são apresentadas. Por exemplo, apresentar um preço de tabela de 1000 reais com desconto à vista de 10% ou a alternativa de duas vezes "sem juros" de 500 reais costuma ser considerado mais atrativo do que apresentar o preço do mesmo produto como 900 e um parcelamento com juros de duas vezes de 500 reais. As duas situações são equivalentes do ponto de vista econômico, mas são enquadradas como diferentes pelas pessoas, incluindo os estudantes participantes de nossa pesquisa (Muniz, 2016a).

Vejamos um exemplo de como a Psicologia nos ajudou tanto na construção de uma tarefa que permitiu a geração de um dos AEFE em nosso estudo, como na análise dos significados produzidos pelos estudantes nesse AEFE. Na figura 1 temos uma tarefa envolvendo duas


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

SEF equivalentes do ponto de vista econômico, mas que costumam mobilizar mecanismos psicológicos tais como aversão a perdas e associação de custos a benefícios que podem fazer as pessoas considerá-las bem diferentes, conforme se pode ver em Kahneman (2012) e Nofsinger (2006).

Figura 1: Tarefa envolvendo aspectos comportamentais na tomada de decisão.

Uma pessoa tem planos de, daqui a seis meses, passar uma semana de férias em Porto de Galinhas. Isso custará 6.000 reais. A pessoa tem duas opções de pagamento:

Opção I – seis prestações mensais e iguais de 1.000 reais, durante os seis meses que antecedem as férias.
Opção II – seis prestações mensais e iguais de 1.000 reais, durante seis meses, após a volta das férias.

**Considerando um cenário sem inflação, qual das duas opções você escolheria? Justifique.**

Uma pessoa planeja comprar, dentro de seis meses, um fogão, uma geladeira e alguns eletrodomésticos para a casa nova. Juntos eles custarão 6.000 reais. A pessoa tem duas opções de pagamento:
Opção I – seis prestações mensais e iguais de 1.000 reais, durante os seis meses que antecedem a chegada dos eletrodomésticos.
Opção II – seis prestações mensais e iguais de 1.000 reais, durante seis meses, a começar após a entrega.

**Considerando um cenário sem inflação, qual das duas opções você escolheria? Justifique!**

Fonte: Muniz (2016a, p.255)

Do ponto de vista econômico as duas situações são equivalentes, e se forem analisadas na perspectiva do agente racional, pagar depois é melhor nas duas, pois o dinheiro se transforma no tempo e o cenário é de preços fixos (sem inflação). Mas será que férias pré-pagas são mais agradáveis do que as pós-pagas? As pessoas pensam segundo o modelo do agente racional considerando equivalentes essas SEF? Como foi a decisão dos estudantes nos AEFE mediados por essa tarefa no estudo realizado, que justificativas apresentaram? Como a psicologia econômica têm explicado como as pessoas tomam decisões como essas? Essas são apenas algumas questões que podem ser levantadas a partir dessa tarefa, que foi desenhada com essa intenção. Em Muniz (2016a), os estudantes tomaram decisões que se alinham com os modelos de descrição da Psicologia Econômica, conforme mostra o quadro a seguir.

| | Tarefa 9b Compra dos eletrodomésticos | | Tarefa 9c Pacote de viagem de Férias | |
|---|---|---|---|---|
| | 6 de 1000 antes | 6 de 1000 depois | 6 de 1000 antes | 6 de 1000 depois |
| Buco | | X | X | |
| Lu | X | | X | |
| Tom | X | | X | |
| Gabi | X | | X | |
| Mari | | X | X | |
| Bril | | X | X | |
| Sami | | X | X | |
| Carlos | | X | X | |

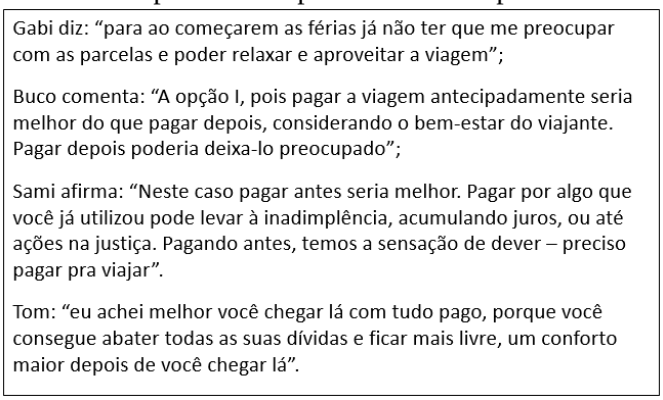
Quadro 1: Distribuição das respostas dos participantes para as duas SEF
Fonte: Muniz (2016a, p. 272).



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Analisando os discursos dos estudantes identificamos que as justificativas apresentadas para as decisões tomadas se alinhavam com as explicações e modelos comportamentais da aversão a perdas e associação de custos a benefícios, advindos de estudos da Psicologia Econômica, conforme se pode ver na figura 2.

Figura 2: Justificativas apresentadas pelos estudantes para as decisões tomadas.




Fonte: (Muniz, 2016a, p.275-276)

Podemos concluir essa sessão, com a análise do cientista comportamental John Nofsinger (2006, p.67): "[...] em geral, férias pré-pagas são mais agradáveis do que as pós-pagas, pois a dor do pagamento já se foi. Se o pagamento é feito depois, reduzem-se os benefícios das férias pelo simples pensamento do quanto custará esse prazer". Ainda segundo esse pesquisador, as pessoas não gostam de pagar dívidas por algo comprado e já consumido, de modo que financiar as férias não é uma solução das mais agradáveis, pois gera um custo de longo prazo por um benefício de curto prazo.

## Considerações Finais

Nesse artigo mostramos como alguns resultados da Psicologia Econômica, na perspectiva de Kahneman e Tversky, têm ajudado na compreensão dos julgamentos e tomada de decisão humana, e de como isso pode ter um papel importantíssimo tanto para a criação de AEFE nas aulas de matemática, incluindo os relacionados à tomada de decisão, bem como nas múltiplas investigações dos discursos dos estudantes nos AEFE.

Entendemos que esses resultados podem contribuir para a criação de AEFE, pois: (i) permitem a criação de tarefas que trazem situações com as quais as pessoas lidam de fato; (ii) convidam os estudantes a refletirem sobre os aspectos matemáticos e não matemáticos



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

que levam em consideração para tomar de decisões; (iii) permitem a comparação entre as decisões ótimas com decisões que se desviam do ótimo, influenciadas por heurísticas e vieses, o que pode ajudar os estudantes a refletirem sobre suas decisões, e a tomarem novas atitudes em relação a diversas escolhas em SEF. Finalmente, queremos sinalizar que não estamos dizendo que as pessoas não fazem uso de modelos matemático-financeiros para tomar suas decisões, mas sim reforçando que podem não usá-los. Entendemos também que a construção e utilização de modelos quantitativos não deixam de ser importantes para se tomar decisão, diante das heurísticas e vieses. Olhar para como as pessoas tomam decisões é olhar para uma rede complexa de estratégias envolvendo aspectos matemáticos e não matemáticos, que é tecida de diferentes formas, influenciada por aspectos econômicos, financeiros, culturais, sociais e comportamentais, dentre outros, de modo que esse olhar multidisciplinar pode contribuir para a geração de AEFE que contribuam para uma formação ampla e crítica necessária ao cidadão do século XXI.

**Referências**


Aprea, C. et al. (2016). *International Handbook of Financial Literacy*. New York: Springer.

Arthur, C. (2012). *Financial Literacy Education. Neoliberalism, the consumer and the Citizen*. Education Futures: Rethinking Theory ant Pratice. Rotherdan: Sense Publishers.

Atkinson, A. and F. Messy (2012), "Measuring Financial Literacy: Results of the OECD / International Network on Financial Education (INFE) Pilot Study", *OECD Working Papers on Finance, Insurance and Private Pensions*, No. 15, OECD Publishing, Paris. http://dx.doi.org/10.1787/5k9csfs90fr4-en. Consultado 01/04/2016

BRASIL/COREMEC. (2014). Programa de Educação Financeira nas Escolas. Distrito Federal. http://www.edufinanceiranaescola.gov.br.Consultado 01/04/2016.

Britto, R.R. (2012). **Educação Financeira:** Uma Pesquisa Documental Crítica. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Juiz de Fora. Brasil.

Damásio, A. (2012). *O erro de Descartes: emoção, razão e o cérebro humano*. 3 ed. São Paulo: Companhia das letras.

Ferreira, V.R.M. (2008). *Psicologia Econômica: comportamento econômico e tomada de decisão*. Rio de Janeiro: Elsevier.

Hofmann, R. M. (2013). Educação financeira no currículo escolar: Uma análise comparativa das iniciativas da Inglaterra e da França (Tese de Doutorado). Universidade Federal do Paraná, Curitiba – PR, Brasil.

Kahneman, D. (2012). *Rápido e Devagar: duas formas de pensar*. Rio de Janeiro: Objetiva.

Lusardi, A; Mitchell, Olivia (2010). Financial Literacy among the Young: Evidence and Implications for Consumer Policy. Journal of Consumer Affairs, 44(2), 358 – 380.




ISBN 978-84-945722-3-4

Mandell, L. (2008). Financial Literacy of High School Students. En Jing Jian Xiao (Ed.), Handbook of Consumer Finance Research. New York: Springer.

Muniz, I. Jr. (2016a). Econs ou Humanos? Um estudo sobre a tomada de decisão em Ambientes de Educação Financeira Escolar. Tese de Doutorado, UFRJ/COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.

Muniz, I. Jr. (2016b). Educação Financeira e a sala de aula de matemática: conexões entre a pesquisa acadêmica e a prática docente. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática. 2016, São Paulo. Anais... ISSN 2178-034X. São Paulo, Brasil: XII ENEM, pp 1-12.

Muniz, I. Jr. & Jurkiewicz, S. (2015). Uma investigação sobre a abordagem de situações financeiras envolvendo taxas de juros no Brasil em um curso pós-médio. In: XIV Conferência Interamericana de Educacion Matemática. Tuxtla. Actas del XIV CIAEM, Tuxtla, México.

Nofsinger, J. R. (2006). *A lógica do Mercado*. Como lucrar com finanças comportamentais. Rio de Janeiro: Fundamento.

OECD. (2005). Improving financial literacy: Analysisofissuesandpolicies. OECD. Disponível em http://www.browse.oecdbookshop.org/oecd/pdfs/product/ 2105101e.pdf.

Patel, R. (2010). O valor de nada. Porque tudo custo mais caro do que pensamos. Rio de Janeiro: Zahar.

Pessoa, C.A.S. (2016). Educação Financeira: O que tem sido produzido em mestrados e doutorados defendidos entre 2013 e 2016 no Brasil? In: Carvalêdo, J.; Carvalho, M.V.; Araújo, F (orgs.). Produção de conhecimentos na Pós-graduação em educação no nordeste do Brasil: realidades e possibilidades. Teresina: EDUPI.

Rolim, M.R.L.B; Motta, M.S. (2014). O estado da arte das pesquisas em matemática financeira nos programas de mestrado e doutorado da área de ensino da Capes. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.16, n.2, 537-556.

Silva, A.; Powell, A. (2013). *Um Programa de Educação Financeira para a Matemática Escolar da Educação Básica*. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Anais do XI ENEM, Curitiba.

Xiao, J.J. (2008). *Handbook of Consumer Finance Research*. New York: Springer.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.185

# RESOLVENDO PROBLEMAS DE MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO, ENVOLVENDO O AGRUPAMENTO EXPLÍCITO E O AGRUPAMENTO IMPLÍCITO

Fernanda Augusta Lima das Chagas – Síntria Labres Lautert – Ernani Martins dos Santos
chagasfernanda@hotmail.com – sintrialautert@gmail.com – ermasantos@gmail.com
UGR (Espanha) UFPE (Brasil) UPE (Brasil)

Núcleo temático: La Resolución de Problemas en Matemáticas.
Modalidade: CB
Nível educativo: Educación Primaria
Palavras chave: Estrutura multiplicativa, Agrupamento explícito e implícito, Crianças

**Resumo**
*O presente estudo investigou se e como a noção de agrupamento explícito poderia favorecer o raciocínio matemático das crianças na resolução de problemas de multiplicação e divisão (partição e quota) de proporção simples de um-para-muitos. De forma específica, analisou as estratégias utilizadas pelas crianças para resolver essa classe de problemas. O estudo fundamenta-se na Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gérard Vergnaud. Cento e dezenove estudantes, de ambos os sexos, com idades entre 6 e 11 anos, cursando 2º, 3º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental de escolas públicas da cidade do Recife foram entrevistados individualmente em duas sessões, sendo solicitados a resolver 12 problemas, envolvendo o agrupamento explícito e implícito. Os dados foram analisados em função do número de acertos e das estratégias utilizadas. Quatro tipos de estratégias foram detectadas: inconsistente, pensamento aditivo, transição e pensamento multiplicativo. Tanto em relação ao desempenho como às estratégias implementadas os resultados revelam não existir diferença significativa nos problemas de agrupamento explícito, quando comparado com os de agrupamento implícito.*

## Introdução

Magina, Santos e Merlini (2010) apresentam a existência de dois tipos de problemas que a princípio foram chamados de coleção e não coleção, denominados por nós de agrupamento explícito e implícito respectivamente nesse estudo. O agrupamento explícito pode ser compreendido nos problemas de estrutura multiplicativa, quando todos os elementos envolvidos no cálculo do problema estabelecem relação, representando uma quantidade de agrupamentos de objetos de mesma natureza que os demais elementos. Como pode ser constatado no exemplo a seguir: Em um pacote de figurinhas vem 4 figurinhas. Quantas



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

figurinhas vem em 3 pacotes? Na solução, 4 x 3 = 12, os valores 4 e 12 (cardinais) representam contagem do mesmo objeto (figurinhas). Observa-se ainda que o valor 3 (cardinal) tem o seu significado ligado ao mesmo objeto mencionado, por se tratar de uma contagem de grupo de figurinhas. Sendo assim, pode-se ler a solução deste problema de agrupamento explícito da seguinte maneira: Quatro figurinhas, vezes três agrupamentos de figurinhas são iguais a 12 figurinhas, que continuam sendo agrupamento do mesmo objeto, figurinhas.

No que diz respeito ao problema de agrupamento implícito pode ser encontrado, quando um dos elementos envolvidos no cálculo não pode ser subtendido como contagem de agrupamentos de objetos de mesma natureza que os demais, tal como pode ser observado no exemplo a seguir: Luísa comprou 18 canetas para dar de presente aos seus sobrinhos. Ela deu 2 canetas a cada um deles. Quantos sobrinhos de Luísa receberão canetas? Na solução, 18/2 = 9, envolve dois valores referentes à quantidade de canetas (18, 2) e outro (9) referente à contagem de um objeto de natureza distinta (sobrinhos) que não pode ser entendido como mero agrupamento de canetas, visto que um sobrinho não é formado por canetas.

Vergnaud (1990, 1997, 2009) em sua teoria psicológica da conceitualização da realidade, apresenta a possibilidade de estudar os elos e as rupturas existentes entre os saberes. Para esse teórico, o domínio dos conceitos ocorre por meio de três aspectos: um conjunto de representações simbólicas, gráficas, gestuais, linguísticas; um conjunto de invariantes operacionais e um conjunto de situações que dão sentido aos conceitos. O Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas é definido como um conjunto de situações, cujo domínio requer uma operação de multiplicação, de divisão, ou a combinação entre elas. O raciocínio multiplicativo tem por invariante conceitual a relação fixa que é estabelecida entre pelo menos duas variáveis, duas grandezas ou duas quantidades iguais ou de natureza distintas, numa relação constante entre si. Por exemplo: Uma caixa tem 12 lápis. Quantos lápis têm 6 caixas? Neste exemplo o que varia são o número de lápis e o número de caixas, sendo a relação fixa entre eles está baseado na relação parte-todo. Assim, busca-se um valor numa variável que corresponda a um valor dado na outra variável. Os problemas de divisão envolvem a ideia de partição e quota. Nos problemas de partição é dado um valor inicial, o qual terá que ser dividido em partes iguais, devendo-se encontrar o tamanho da parte. Por exemplo: Antônio tem 12 lápis e deseja colocar os lápis em 6 caixas. Quantos lápis Antônio


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

colocará em cada caixa? Na divisão por quota é dado um valor inicial que deve ser distribuído em quotas pré-estabelecidas. Por exemplo: Antônio tem 12 lápis e deseja colocar 6 lápis em cada caixas. Quantas caixas de lápis Antônio formou?

Nunes e Bryant (1997) chamam atenção, ainda, para a estrutura do tipo correspondência que pode ser um-para-muitos ou muitos-para-muitos. A correspondência um-para-muitos, foco desse estudo, consiste numa situação problema onde há uma relação constante entre dois conjuntos, por exemplo: Um carro tem quatro rodas. Quantas rodas têm em dois carros? Neste caso, um carro tem quatro rodas (1 para 4), sendo assim dois carros terão oito rodas (2 para 8), configurando-se em correspondência um-para-muitos.[27]

Em relação aos objetos utilizados nos problemas, Vergnaud (2009) diz que os mesmos possuem características específicas, nomeada de descritores[28] (cor, forma, tamanho), que permite o seu enquadramento numa determinada classe. Para o mesmo autor, o ato de juntar objetos é uma atividade que inicia desde muito cedo nas crianças. Nesse processo ela estabelece comparações dos objetos entre si e investiga as suas semelhanças e diferenças, equivalência e complementaridade. Os agrupamentos formados podem ser compreendidos a partir do modo de pensar das crianças, levando em conta os grupos que as mesmas formam mentalmente dos objetos de mesma natureza e de natureza distinta, mencionados nos problemas a serem resolvidos. De modo que no agrupamento explícito a manipulação dos elementos ocorre estabelecendo uma estreita relação entre si, uma vez que todos possuem a mesma natureza e se completam, formando um objeto ou um arranjo novo, interessante e significativo. Em contrapartida, nos agrupamentos implícitos os elementos utilizados nos problemas não possuem a mesma natureza, por isso, não é possível estabelecer uma relação de complementariedade entre os objetos (ver exemplos Quadro 1).

Magina, Santos e Merlini (2010) verificaram que em situações de multiplicação, o agrupamento explícito (a ideia de coleção) facilitou a resolução dos problemas pelos alunos do 2º ao 9º ano. Já para os estudantes do 3º e 5º ano, a divisão por quota envolvendo situação de não coleção foi significativamente mais fácil que a de coleção. No estudo realizado os

[27] Maiores informações em ambos tipos de correspondência podem ser obtidos em Nunes e Bryant (1997), Magina, Santos e Merlini (2010).

[28] "Um descritor é então um conjunto de propriedades distintas, e uma propriedade é o valor assumido por um descritor." (Vergnaud, 2009. p. 99)



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

autores não exploram os problemas de divisão por partição. Será que existiriam diferenças no desempenho e nas estratégias implementadas considerando o agrupamento implícito e explícito também nos problemas de partição? Mediante ao exposto, investigamos se e como o agrupamento explícito poderia favorecer o modo de pensar matemático das crianças na resolução de problemas de multiplicação e divisão (partição e quota) de proporção simples de um-para-muitos.

## Método

O estudo foi realizado com 119 estudantes de escolas públicas da cidade do Recife, frequentando Ensino Fundamental, alocados em quatro grupos: 27 crianças do 2º ano; 26 crianças do 3º ano; 30 crianças do 4º ano e 36 crianças do 5º ano. Todos estudantes foram solicitados em uma entrevista individual, em duas sessões a resolverem 12 problemas, envolvendo proporção simples um-para-muitos, abarcando o agrupamento explícito e implícito (quatro de multiplicação, quatro de divisão por partição e de divisão por quota - ver Quadro 1). Após a resolução os estudantes foram solicitados a explicitar as bases do raciocínio que utilizou para resolver os problemas apresentados.

**Quadro 1:** Exemplos de problemas de proporção simples adotados na investigação

| Agrupamento explícito | Agrupamento implícito |
|---|---|
| Um álbum é formado por figurinhas. Para completar esse álbum Luís comprou alguns pacotes de figurinhas na banca de revista. Em um pacote de figurinhas vem 4 figurinhas. Quantas figurinhas vem em 3 pacotes? (multiplicação) | Para fazer uma receita de brigadeiro Maria usa vários ingredientes. Um dos ingredientes que Maria usa é o chocolate em pó. Maria usa 4 colheres de chocolate para fazer uma receita de brigadeiro. Quantas colheres de chocolate Maria usará para fazer 3 receitas de brigadeiro? (multiplicação) |
| Uma caixa é formada por lápis de cor diferentes. Felipe ganhou 36 lápis de cor diferentes e deseja colocar os lápis em 6 caixas. Cada caixa terá a mesma quantidade de lápis de cor. Quantos lápis de cor Felipe colocará em cada caixa? (divisão por partição) | Um professor comprou 36 chocolates e deseja distribuir os chocolates com 6 de seus alunos. Cada aluno receberá a mesma quantidade de chocolates. Quantos chocolates cada um dos seus alunos receberá? (divisão por partição) |
| Uma caixa é formada por latinhas de refrigerantes. Ricardo tem 24 latinhas de refrigerante e deseja guardar as latinhas em caixas. Ele vai colocar 3 latinhas de refrigerante em cada caixa. Quantas caixas Ricardo precisa para guardar todas as latinhas? (divisão por quota) | Rafael tem 24 bolas de gude para dar de presente aos seus amigos. Ele deu 3 bolinhas de gude a cada um dos seus amigos. Quantos amigos de Rafael ganharam bolinhas de gude? (divisão por quota) |

A ordem de apresentação dos problemas foi randomizada, metade dos participantes realizou inicialmente os problemas de agrupamento explícito e em seguida os de agrupamento implícito; e a outra metade dos participantes, realizou na ordem inversa.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

**Resultados e discussão**

Os resultados foram analisados em relação ao desempenho (número de acertos) e em relação às estratégias implementadas pelos estudantes durante a entrevista individual. Inicialmente são apresentados os resultados referentes ao desempenho e posteriormente os resultados referentes às estratégias. Como pode ser observado na Tabela 1 os estudantes apresentam desempenhos semelhantes nos dois tipos de agrupamento em todos os anos investigados, com exceção dos estudantes do 2º ano nos problemas de divisão por quotas.

Tabela 1: Média de acertos nos problemas de multiplicação, divisão por partição, divisão por quota em função do tipo de agrupamento (explícito e implícito) e por escolaridade.

| Escolaridade | Multiplicação | | Divisão por partição | | Divisão por quota | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Explicito | Implícito | Explicito | Implícito | Explicito | Implícito |
| 2º ano | **0.26*** | **0.15** | **0.22** | **0.26** | **0.26** | **0.07** |
| 3º ano | **0.58** | **0.58** | **0.35** | **0.46** | **0.42** | **0.35** |
| 4º ano | **1.07** | **1.13** | **0.73** | **0.73** | **0.70** | **0.53** |
| 5º ano | **1.17** | **1.25** | **0.92** | **1.00** | **0.75** | **0.89** |

**Nota:** Número máximo de acertos dois por tipo de problema.

Na análise foi aplicado o Teste t para amostras pareadas. Os resultados revelaram não haver diferenças significativas entre o agrupamento explícito e implícito, nos problemas de multiplicação e divisão (partição e quota) nos anos investigados. Constata-se que o tipo de agrupamento não favoreceu no desempenho dos estudantes, o qual parece ser influenciado pela instrução do conteúdo no contexto escolar.

**Análise das estratégias de resolução**

As estratégias utilizadas na resolução dos problemas foram construídas tomando como referência o estudo de Magina e cols. (2010), sendo identificado quatro tipos: Tipo 1 *(inconsistente):* são as estratégias inadequadas em que o estudante não consegue explicitar o que realizou, apresenta grafismos sem que se possa estabelecer uma relação com o problema proposto, repete os dados do enunciado ou escolhe um número sem que se consiga entender a razão para tal. Tipo 2 (p*ensamento aditivo):* são as estratégias em que o estudante faz uma adição ou subtração, usando os dados fornecidos no problema de forma simbólica e/ou



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

pictórica. Tipo 3 *(transição):* são as estratégias que o estudante agrupa os dados fornecidos, de forma pictórica ou simbólica, formando as quotas até chegar na quantidade total informada no problema, podendo adotar adição ou subtração repetida. Tipo 4 *(pensamento multiplicativo):* o estudante adota estratégias eficientes, do campo das estruturas multiplicativas, de forma específica utiliza as operações de multiplicação ou divisão e explica considerando a operação de multiplicação ou divisão por ele adotada.

Todas as estratégias foram analisadas por dois investigadores independentes, obtendo-se, um índice de concordância de 94.5% entre eles. Os casos discordantes foram avaliados por um terceiro investigador, também independente, cuja análise foi considerada final.

A Tabela 2 mostra a distribuição dos participantes em cada ano escolar de acordo com o tipo de estratégia utilizada na resolução dos problemas explícito e implícito de multiplicação, divisão por partição e divisão por quotas. Como pode ser observado, os estudantes apresentam percentuais semelhantes dos tipos estratégias em função do tipo de agrupamento (explícito e implícito).

**Tabela 2:** Frequência e percentual (entre parênteses) dos tipos estratégias para resolver os problemas de multiplicação, divisão por partição e divisão por quota envolvendo agrupamento explícito e explícito.

| **Escolaridade** | **Multiplicação** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Explícito** | | | | **Implícito** | | | |
| | T1 | T2 | T3 | T4 | T1 | T2 | T3 | T4 |
| 2º ano | 35 | 11 | 8 | 0 | 36 | 9 | 9 | 0 |
| (n= 54)* | (65) | (20) | (15) | (0) | (66) | (17) | (17) | (0) |
| 3º ano | 14 | 17 | 13 | 8 | 12 | 17 | 14 | 9 |
| (n= 52) | (27) | (33) | (25) | (15) | (23) | (33) | (27) | (17) |
| 4º ano | 4 | 14 | 20 | 22 | 3 | 16 | 16 | 25 |
| (n= 60) | (7) | (23) | (33) | (37) | (5) | (27) | (27) | (41) |
| 5º ano | 1 | 18 | 15 | 38 | 3 | 16 | 8 | 45 |
| (n= 72) | (1) | (25) | (21) | (53) | (4) | (22) | (11) | (63) |
| Total | 54 | 60 | 56 | 68 | 54 | 58 | 47 | 79 |
| (n= 238) | (23) | (25) | (24) | (28) | (23) | (24) | (20) | (33) |
| | Divisão por partição | | | | | | | |
| | Explícito | | | | Implícito | | | |
| | T1 | T2 | T3 | T4 | T1 | T2 | T3 | T4 |
| 2º ano | 36 | 12 | 6 | 0 | 37 | 11 | 6 | 0 |
| (n= 54) | (67) | (22) | (11) | (0) | (69) | (20) | (11) | (0) |
| 3º ano | 16 | 23 | 7 | 6 | 15 | 21 | 9 | 7 |
| (n= 52) | (31) | (44) | (13) | (12) | (29) | (41) | (17) | (13) |
| 4º ano | 8 | 22 | 12 | 18 | 6 | 18 | 15 | 21 |
| (n= 60) | (13) | (37) | (20) | (30) | (10) | (30) | (25) | (35) |
| 5º ano | 0 | 18 | 11 | 43 | 2 | 13 | 16 | 41 |
| (n= 72) | (0) | (25) | (15) | (60) | (3) | (18) | (22) | (57) |
| Total | 60 | 75 | 36 | 67 | 60 | 63 | 46 | 69 |
| (n=238) | (25) | (32) | (15) | (28) | (25) | (27) | (19) | (29) |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

| Divisão por quota | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Explícito | | | | Implícito | | | |
| | T1 | T2 | T3 | T4 | T1 | T2 | T3 | T4 |
| 2º ano | 30 | 13 | 11 | 0 | 39 | 11 | 4 | 0 |
| (n= 54) | (56) | (24) | (20) | (0) | (72) | (20) | (8) | (0) |
| 3º ano | 16 | 19 | 10 | 7 | 16 | 23 | 7 | 6 |
| (n= 52) | (31) | (37) | (19) | (13) | (31) | (44) | (13) | (12) |
| 4º ano | 4 | 21 | 18 | 17 | 11 | 22 | 15 | 12 |
| (n= 60) | (7) | (35) | (30) | (28) | (18) | (37) | (25) | (20) |
| 5º ano | 0 | 20 | 12 | 40 | 0 | 26 | 12 | 34 |
| (n= 72) | (0) | (28) | (17) | (55) | (0) | (36) | (17) | (47) |
| Total | 50 | 73 | 51 | 64 | 66 | 82 | 38 | 52 |
| (n=238) | (21) | (31) | (21) | (27) | (28) | (34) | (16) | (22) |

Nota: n = número de respostas

A associação entre os tipos de agrupamentos (explícito e implícito) e as estratégias de resolução (inconsistente, pensamento aditivo, transição e pensamento multiplicativo) não foi significativa no geral ($X^2_{(2)} = 0.19$; p = .9792) e por tipo de problema [multiplicação ($X^2_{(2)} = 0,19$; p= 8519), divisão por partição ($X^2_{(2)} = 0,91$; p= .823 divisão por quotas ($X^2_{(2)} = 2,32$; p = .5087)].

No que diz respeito às estratégias, nos problemas de multiplicação, os estudantes que não receberam instrução sobre a multiplicação (2º ano) tendem a realizar estratégias apenas do Tipo 1 (Inconsistentes), Tipo 2 (Pensamento aditivo) e Tipo 3 (Transição), sendo elas concentradas em maior índice no Tipo 1 (Inconsistentes), demonstrando assim que esses estudantes não conseguem em seu discurso explicar a estratégia utilizada para resolver o problema e não adotam estratégias do Tipo 4 (resolução através da multiplicação).

Em relação às estratégias nos problemas de divisão por partição e por quota foi constatado, de modo geral, que os estudantes que não receberam instrução sobre divisão (2º ano) fizeram uso de estratégias do Tipo 1 (Inconsistente), Tipo 2 (Pensamento aditivo) e Tipo 3 (Transição), sendo elas concentradas em maior média no Tipo 1 (Inconsistentes), demonstrando assim que esses estudantes não conseguem em seu discurso explicar o tipo de estratégia utilizada para resolver o problema, como também não houve estudantes que adotaram a estratégias do Tipo 4 (resolução através da divisão). Diferentemente dos estudantes que foram instruídos sobre a multiplicação e a divisão que tendem a fazer uso de estratégias mais sofisticadas à medida que aumenta o grau de instrução formal.

## Conclusões


ISBN 978-84-945722-3-4

Os resultados obtidos mostraram que os estudantes não apresentaram médias com diferenças significativas no desempenho e nos tipos de estratégias implementadas nos problemas de multiplicação e divisão (partição e quota), envolvendo o agrupamento explícito, quando comparado aos problemas, envolvendo o agrupamento implícito, em nenhum dos anos investigados (2º, 3º, 4º e 5º ano). Dessa forma, pode-se afirmar que o tipo de agrupamento não favoreceu o desempenho e as estratégias, de modo geral, de maneira que o nível de instrução formal parece ter facilitado na resolução. Esse resultado se contrapõe ao estudo de Magina, Santos e Merlini (2010) que revelam um melhor desempenho nos problemas de multiplicação, envolvendo a noção de agrupamento explícito denominado pelas autoras no estudo de ideia de coleção. Isso talvez ocorra pelo fato dos problemas utilizados apresentarem uma situação prototípica da multiplicação, permitindo que o aluno pense em multiplicar como adição repetida.

Considerando os resultados dessa investigação, constata-se que o presente estudo ampliou o olhar no que diz respeito à noção intuitiva de agrupamento explícito e de agrupamento implícito nos problemas de multiplicação e divisão (partição e quota), de proporção simples um para muitos. No entanto, ressalta-se as limitações dessa investigação visto que foram apresentados por exemplo, dois tipos de problemas de multiplicação e de divisão (por partição e por quota) o que pode não ter sido suficiente para explorar a compreensão dos estudantes do 2º ao 5º ano. Outro ponto a ser destacado é que pesquisa investigou apenas problemas que trazem a correspondência um-para-muitos e que poderia ser ampliado inserindo os problemas que apresentam a correspondência muitos-para-muitos.

**Referencias bibliográficas**

Magina, S., dos Santos, A., & Merlini, V. (2010). Quando e Como devemos introduzir a divisão nas séries iniciais do Ensino Fundamental? Contribuição para o debate. *Em Teia*| *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana-ISSN: 2177-9309*, *1*(1).

Nunes, T., & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique dês Mathématiques*, vol.10 n°2-3, pp.133-170.


ISBN 978-84-945722-3-4

Vergnaud, G. (1997). *The nature of mathematics concepts*. In T. Nunes,; P. Bryant (Orgs.), Learning and teaching mathematics: an international perspective. p. 5-28. Sussex: Psychology Press.

Vergnaud, G. (2009). *A Criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar*. Curitiba: Ed. da UFPE.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.186

# INTEGRACIÓN TECNOLÓGICA EN LA PRÁCTICA DEL DOCENTE DE MATEMÁTICAS, EN LA ERA DIGITAL

Sergio Rubio-Pizzorno – Gisela Montiel Espinosa
sergio.rubio@cinvestav.mx (www.zergiorubio.org) – gmontiele@cinvestav.mx
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav). (Chile) México

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas.
Modalidad: CB.
Nivel educativo: Formación y actualización docente.
Palabras clave: integración digital, geometría dinámica, práctica docente.

**Resumen**

*La Tecnología Digital ha penetrado e impactado en la Sociedad y, por lo tanto, a la educación en general y a la educación matemática en particular. Su efecto se ha manifestado de forma diferente en el ámbito oficial y en el no oficial, lo cual ha provocado diferencia en el ritmo del progreso tecnológico en cada uno de ellos. En este trabajo pretendemos dar muestra de esta diferencia, para el caso de la geometría dinámica, dando evidencia del gran progreso del ámbito no oficial, comparado con el oficial, mediante el análisis de la construcción social de la tecnología digital, específicamente de GeoGebra.*

*Esto nos permite ensayar una explicación sobre el tipo de organización social propiciada por la tecnología digital, que junto con consideraciones epistémicas, configuran un marco respecto del desarrollo del pensamiento geométrico en la era digital.*

*Sumado a lo anterior, reconocemos la actual relevancia de integrar la tecnología digital a la escuela, donde un actor clave para lograrlo es el profesorado, a quienes concebimos como un mediador entre el mundo oficial y no oficial. De esta manera y con base en el marco general declarado, presentamos nuestra propuesta de Integración Digital a la Práctica del Docente de Matemáticas.*


ISBN 978-84-945722-3-4

**La tecnología digital en la educación**

La presencia de la tecnología digital en los ambientes y contextos educativos comenzó a mediados del siglo XIX (Freiman, 2014), y ha ido progresivamente ganando cada vez mayor terreno en todos los ámbitos de la educación. Organismos internacionales dictan pauta para que las naciones promuevan políticas que ayuden a disminuir, en primera instancia, la brecha digital de acceso (planes para entregar un computador o tableta por estudiante); y en segundo lugar, diseñar programas de alfabetización digital o atención a las competencias del siglo XXI, para abordar el problema que representa la brecha relacionada con las habilidades digitales y buen uso de estas tecnologías.

Enmarcamos estos esfuerzos por potenciar la presencia de las tecnologías digitales en la educación, en un *ámbito oficial* de acción, representado por organismos internacionales preocupados por la educación (Unesco, ONU, OEA, entre muchos otros), gobiernos centrales y locales, universidades y centros de formación en general, así como también las escuelas, entre muchos otros. Sin embargo, estas acciones llevadas a cabo por el ámbito oficial:

> Se preocupan de incorporar la tecnología teniendo en cuenta sus necesidades institucionales (…). Es decir, atendiendo las directrices establecidas por políticas de los países, que fomentan el uso de tecnología en las escuelas, pero sin considerar cómo llevar a cabo magna tarea.
>
> (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2017)

A la atención del ámbito oficial responder a razones institucionales al impulsar la presencia de las tecnologías digitales en la educación lo caracterizamos como una instancia de *inclusión digital*, entendiendo la inclusión como "poner algo (la tecnología digital) dentro de una cosa (la educación)" (Rubio-Pizzorno, Farfán-Cera y Montiel, 2017, p. 1070).

Como respuesta a este fenómeno y con Internet como herramienta insigne de la era digital, las personas y las comunidades a las cuales pertenecen, comenzaron a atender sus propias necesidades educativas "motivados por la posibilidad de las personas para incidir en cambios locales, personales y colectivos, con efectos y resultados instantáneos" (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2017).

A este tipo de esfuerzos personales y colectivos los enmarcamos en un ámbito *no oficial* de acción, puesto que se actúa sin la necesidad e incluso la negación de la institucionalidad y el mundo oficial. En particular, los esfuerzos no oficiales por dar respuesta a necesidades


ISBN 978-84-945722-3-4

propias y colectivas empleando tecnología digital, lo denominamos *integración digital*, entendiendo la integración como "hacer que algo (la tecnología digital) pase a formar parte de un todo [vida personal y cotidiana]" (Rubio-Pizzorno, Farfán-Cera y Montiel, 2017, p. 1070). De esta manera, consideramos a la integración digital como un proceso natural que se va desarrollando en ámbitos no oficiales de la vida de las personas, cuando se dan a la tarea de resolver sus problemas de manera autónoma o con la ayuda de su comunidad.

Debido a sus características, el progreso tecnológico se ha desarrollado con distintos ritmos entre el ámbito oficial y no oficial. Para dar muestra de esta diferencia en la educación matemática, se analiza el caso de la geometría dinámica, particularmente a la Comunidad GeoGebra, dando evidencia del gran progreso del ámbito no oficial, comparado con el oficial.

**Construcción social de GeoGebra**

La elección de GeoGebra está basada en sus características técnicas, que lo hacen un excelente representante de los softwares de geometría (o incluso matemática) dinámica, así como un en sus características sociales, que lo hacen un caso ejemplar de una comunidad digital, con el propósito de generar conocimiento.

GeoGebra nació como un software de geometría dinámica para, con el paso del tiempo, convertirse en un software de matemática dinámica y en una comunidad global. En este apartado se exponen los principales resultados que aportan a la construcción social de GeoGebra, como una tecnología propia de la cultura digital.

Debido a que en un ambiente de geometría dinámica "un figura [diagrama geométrico] mantiene todas las propiedades de acuerdo a las cuales fue construida y todas las consecuencias que conlleva la geometría euclidiana en el proceso de construcción" (Leung, 2015, p. 467), se puede acceder a la noción de *transformación* (a través del arrastre). Esta noción fue fundamental para la completa determinación de la geometría realizada por Klein (1985), en la cual se considera a una geometría como aquellas propiedades que permanecen *invariantes* a través de ciertas transformaciones espaciales. En este sentido, el par transformación-invariante representa la característica dinámica de la geometría, a la cual es posible acceder en términos didácticos por medio de un ambiente de geometría dinámica. En


ISBN 978-84-945722-3-4

cambio, tal mediación dinámica es imposible realizarla en ambientes estáticos, como el papel y lápiz.

En consecuencia a lo anterior, estos ambientes emergen como un espacio para experimentar, explorar y probar con los diagramas geométricos y la geometría misma, a través de su característica dinámica. Esto permite, entre muchos otros, usar los ambientes de geometría dinámica como un mediador entre aspectos geométricos teóricos y perceptuales (Hölzl, 2001).

Debido a este motivo, proponemos a los ambientes de geometría dinámica como un laboratorio geométrico o, en general, los ambientes de matemática dinámica (como GeoGebra) como un laboratorio matemático.

En cuanto a los aspectos sociales, GeoGebra también se ha constituido en una comunidad digital de características globales, cuyo origen ocurrió sólo después que pasara a ser *software* libre, pues se aprovechó las implicaciones sociales de este tipo de *software*, entre ellas, su potencial para compartir (Hohenwarter, 2013).

Debido a estas amplias implicaciones sociales, proponemos una caracterización del *software* respecto de la comunidad, como una construcción social de GeoGebra, la cual se propone mediante tres principios que corresponden a una adaptación de los principios de la Scot (*Social Construction Of Technology*) tomados de Pinch (2015) y Klein y Kleinman (2002), y los elementos que brinda Castells (1999) para caracterizar la cultura digital:

- **Comunidad digital**: GeoGebra está constituido por diferentes grupos sociales relevantes, los cuales pueden tener sus propios objetivos específicos respecto a su uso del software, que está relacionado con la interpretación o significado que cada uno de ellos asocia a GeoGebra. A pesar de tales diferencias, todos estos grupos están aunados bajo un mismo propósito, el cual "de alguna manera los conecta con la enseñanza o educación matemática" (Hohenwarter, 2013, 40:45-42:11).
- **Estabilidad tecnológica**: el desarrollo de GeoGebra, como software y como comunidad, se da a partir de una continua y horizontal relación entre las necesidades e inquietudes de los miembros de la comunidad, y los proyectos de desarrollo de GeoGebra. A partir del deseo de querer responder a las necesidades educativas reales de los estudiantes, a los usuarios de GeoGebra les surgen dudas e inquietudes respecto


ISBN 978-84-945722-3-4

al uso del software, las cuales son reportadas al grupo de desarrolladores, quienes junto al equipo central de GeoGebra, trazan la ruta de desarrollo del software, el cual queda estabilizado en sus distintas versiones. Por ejemplo, en la versión 4.4 se lanzó el CAS (Computer Algebra System), en la 5.0 se lanzó la vista gráfica 3D, etc.

- **Marco tecnológico**: la estructura social a partir de la cual la comunidad GeoGebra se construye a sí misma es una *estructura de red* (en el sentido de Castells, 1999), donde "el proceso de creación de conocimiento es eminentemente social y abierto, utilizando el espacio social de la Red" (Contreras, 2003, p.138). Por consiguiente, el tipo de la estructura social de red que articula la comunidad GeoGebra es una *inteligencia-red* o, dicho en otras palabras, "el conjunto de procesos sociales de creación y distribución de conocimiento configura una inteligencia-red" (Ibid., p. 138).

Esta caracterización de la comunidad GeoGebra como una construcción social nos permite identificar los elementos que han hecho de GeoGebra el software de geometría (y en general de matemática) dinámica con mayor representatividad en la educación matemática, ya que puso los ambientes de geometría dinámica a disponibilidad de todas las personas (Sinclair et al., 2016). También, nos permite identificar a GeoGebra como una comunidad cuya cultura es propia de la era digital, aspecto que aporta a nuestra propuesta de integración digital en la práctica de los docentes de matemáticas, presentada a continuación.

**Conclusión: Propuesta de integración digital en la práctica del docente de matemáticas**

Son varias las investigaciones que han escogido una ruta de integración digital que se enfocan en cómo usar la tecnología digital para enseñar o aprender matemáticas (Hoyles y Lagrange, 2010). Goos (2010) da un paso más y propone enfocarse en cómo la tecnología puede ser usada para explorar las matemáticas.

En nuestro caso, y a la luz de lo presentado en este escrito, nos aventuramos a proponer una perspectiva de integración digital que pretende ser sensible a la realidad, tanto de los ambientes oficiales como no oficiales, reconociendo por un lado que existen necesidades institucionales que los profesores se ven obligados a cumplir, y por otro lado, las necesidades educativas reales de sus estudiantes, las cuales están más cerca de inquietudes y problemáticas de la cultura digital, que de las imposiciones del sistema educativo.


ISBN 978-84-945722-3-4

De esta manera nuestra propuesta de integración digital está pensada en dos sentidos, entre la práctica docente y la cultura digital. De esta manera, se pretende que el profesor se integre a la cultura digital, para que pueda integrar prácticas digitales en su quehacer docente.

En una experiencia con docentes de educación básica, se han evidenciado algunos casos de esta propuesta de integración digital. Por ejemplo, algunos profesores han comenzado a usar videollamadas por Facebook con sus estudiantes para organizar actividades extracurriculares; otros están usando grupos GeoGebra para compartir la versión digital del libro de estudio, puesto que sólo disponen de tres ejemplares para más de 30 alumnos; todos los docentes que participan en la experiencia están utilizando los Libros GeoGebra para elaborar diseños didácticos, atendiendo las características híbridas del ambiente, con lo cual se reconoce que las restricciones de usar sólo papel y lápiz o sólo GeoGebra, son dificultades artificiales producidas por el sistema educativo. De tal manera, se toma en consideración el uso de herramientas materiales, concretas, y digitales para la elaboración del diseño, decisión que se basa en aspectos epistémicos del saber geométrico estudiado.


ISBN 978-84-945722-3-4

**Referencias bibliográficas**

Freiman, V. (2014). Types of Technology in Mathematics Education. En *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 623–629). doi:10.1007/978-94-007-4978-8

Goos, M., Soury-Lavergne, S., Assude, T., Brown, J., Kong, C. M., Glover, D., Grugeon, B., Laborde, C., Lavicza, Z., Miller, D. & Sinclair, M. (2010). Teachers and Teaching: Theoretical Perspectives and Issues Concerning Classroom Implementation. En C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (pp. 311–328). Springer US. doi: 10.1007/978-1-4419-0146-0_14

Hohenwarter, M. (2013). *Dynamic Mathematics for Everyone* [Video]. Rescatado de youtu.be/Yq1eBZjz16I

Hölzl, R. (2001). Using Dynamic Geometry Software to Add Contrast to Geometric Situations – A Case Study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(1), pp. 63–86. ISSN 1573-1766. doi: 10.1023/A:1011464425023.

Hoyles, C., y Lagrange, J.-B. (2010). Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. En C. Hoyles y J.-B. Lagrange, (Eds.) *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* (Vol. 13). Boston, MA: Springer. doi: 10.1007/978-1-4419-0146-0_7

Klein, Felix (1985). El Programa de Erlangen. *Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación*, **3**. Rescatado de http://valle.fciencias.unam.mx/titulacion/4e.pdf

Leung, A. (2015). Discernment and Reasoning in Dynamic Geometry Environments. En S. J. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 451–469). Cham: Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-319-17187-6_26


ISBN 978-84-945722-3-4

Rubio-Pizzorno, S.; Farfán-Cera, C. y Montiel, G. (2017). Estrategia de planeación para el trabajo con profesores, integrando tecnología digital. En D. Cobos Sanchiz; E. López-Meneses; A. H. Martín Padilla; L. Molina-García y A. Jaén Martínez (Eds.), *INNOVAGOGÍA 2016. III Congreso Internacional sobre Innovación Pedagógica y Praxis Educativa. Libro de Actas* (pp. 1069 - 1077). AFOE Formación: Sevilla, España. ISBN: 978-84-608-8348-7

Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017). Aprendizaje invisible en Educación Matemática. En L. A. Serna Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, en prensa. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. ISSN: 2448-6469.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM - Mathematics Education, 48*(5), 691–719. doi: 10.1007/s11858-016-0796-6

CB-1.187

TITULO: **A QUESTÃO DO TRAPÉZIO: UM ESTUDO SOBRE CÁLCULO DE ÁREA E PERÍMETRO**.

Andréa Paula Monteiro de Lima – Maria das Dores de Morais
aappml@gmail.com – dora.pe@gmail.com
UFPE / Brasil – UFPE / Brasil

Modalidade: Breve Comunicação (CB)
Nível: Ensino Médio
Núcleo temático: II Solução de Problema em Matemática
PALAVRAS CHAVES: trapézio, área, perímetro e Vergnaud.

RESUMO:
O objetivo deste estudo foi analisar procedimentos utilizados para o cálculo de *área e perímetro de um trapézio ABCD, de medidas em cm: AB=4, BC=*$4\sqrt{2}$*, CD=10 e DA=*$2\sqrt{5}$ por 30 estudantes do 3° ano do ensino médio de uma escola estadual de Pernambuco-Brasil. Como aporte teórico usamos o modelo didático de Douady e Perrin-Glorian (1989) para conceituação de área e perímetro enquanto grandeza e os invariantes operatórios de Vergnaud (1996), que considera dois aspectos como mecanismos de resolução de problemas matemáticos: teorema-em-ação e conceito-em-ação. A partir do referencial supracitado e estudos desenvolvidos na área, aplicamos o problema em suportes distintos: malha quadriculada, malha pontilhada e sem uso de malha. A partir das respostas, pode-se chegar a conclusão de que a maioria dos estudantes, utiliza de forma assertiva, mais conceitos em ação em relação ao cálculo de área do que perímetro. Ao analisar os teoremas em ação, pode-se identificar uso predominante da fórmula para cálculo de área, mesmo sem necessidade, quando a figura estava na malha. Um aspecto que precisa ser revisto no ensino dessas grandezas é a necessidade de utilização da unidade de medida, ao se calcular medidas de figuras planas, pois nenhum dos estudantes utilizou em suas respostas.

## 1. Introdução

Normalmente no ensino de conteúdos matemáticos são propostas resoluções de situações problemas. Muitas vezes são observados equívocos de estudantes ao resolverem tais problemas, seja ao mobilizarem os conceitos em jogo, seja nas estratégias utilizadas para encontrar a solução. Mesmo assim, as situações problemas são essenciais para conduzir a formação de conceitos matemáticos. Segundo Pais (2015, p.57) “Verganud esclarece que, para o aluno, o sentido de um conceito está fortemente associado à atividade de resolução de problemas”. Partimos do pressuposto de que uma situação problema pode instigar o estudante a refletir sobre os conceitos matemáticos necessários à resolução. Nesta reflexão



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

entre em cena aspectos da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) desenvolvida por Gerard Vergnaud (1996), tais como: conceito-em-ação e teorema-em-ação.

Em relação a resolução de situação problema é importante considerar que a forma como a situação está enunciado pode ampliar ou limitar os níveis de reflexão, visto que o problema pode exigir apenas os significados do conceito já compreendidos pelos sujeitos. Para Pais (2015, p.58) "é apropriado planejar situações que favoreçam a expansão do significado do conceito para o aluno". Nesta perspectiva realizamos um estudo que visa analisar os procedimentos utilizados por estudantes do 3º ano do Ensino Médio ao calcularem medidas de área e de perímetro de um trapézio representado em suportes distintos: na malha quadriculada, na malha pontilhada ou sem uso de malha. A inspiração para nosso estudo emergiu da disciplina sobre Grandezas e Medidas cursada no EDUMATEC-UFPE[29], quando analisamos procedimentos de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. No estudo preliminar percebemos confusões com os conceitos-em-ação e teoremas-em-ação mobilizados pelos estudantes ao resolverem problemas envolvendo área e perímetro.

## 2. A Teoria dos Campos Conceituais

A TCC foi desenvolvida para estudar as condições que conduz o sujeito à compreensão de um conceito. Para Vergnaud (1996) um conceito se constitui de diversas situações e a aprendizagem de um conceito não ocorre de modo isolado, demandando assim uma variedade de situações relativas ao conceito. Segundo o autor, um conceito se forma de três elementos: o conjunto de situações (S); os invariantes operatórios (I) e as representações simbólicas (&). Em suma, um conceito é formado pela tríade (S,I,&). Os invariantes operatórios vem á tona a partir dos esquemas mobilizados pelos estudantes. Esses esquemas, por sua vez, são constituídos por conceito-em-ação e teorema-em-ação. Apesar da proximidade entre esses termos é importante não confundi-los. Para esclarecê-los traremos resumos a partir do olhar de Landim (2015, p. 54-55).

**Quadro Resumo**

| Conceito-em-ação | Teorema-em-ação |
|---|---|
| "é o atributo que lhe permite dentre um vasto campo de conhecimento, *localizar* quais deles serão mobilizados para a formulação dos teoremas necessários à resolução do desafio que se apresenta." | "são proposições que os estudantes consideram para escolher determinado procedimento na resolução de uma tarefa [...] podendo garantir tanto o sucesso quanto o fracasso do estudante na resolução do problema." |

[29] Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – UFPE. Brasil



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

O campo conceitual que focamos neste estudo é o campo das grandezas geométricas. Dentre os conceitos pertencentes a este campo abordamos os de área e de perímetro, tendo em vista a sua relevância social e as confusões e equívocos que ocorrem frequentemente na resolução de problemas envolvendo tais conceitos.

## 3. O campo das grandezas geométricas

O campo das grandezas e medidas é o que mais se articula com outros campos matemáticos, além da forte relevância social e da constante presença nas atividades profissionais, é também o campo que mais faz conexão com outras disciplinas escolares. Isso tudo, mostra o quanto é importante seu estudo e a aprendizagem de seus conteúdos. Contudo, há ainda resultados insatisfatórios relativos à aquisição de conteúdos pertencentes ao campo, tais como os relativos às grandezas geométricas.

Um dos problemas que envolvem o ensino e a aprendizagem das grandezas geométricas é a necessidade de compreensão dos conceitos relativos aos objetos físicos, matemáticos e gráficos, bem como suas relações. Essas relações nos fornecem modelos abstratos que fazem parte do conhecimento matemático formal, conforme a figura 1.

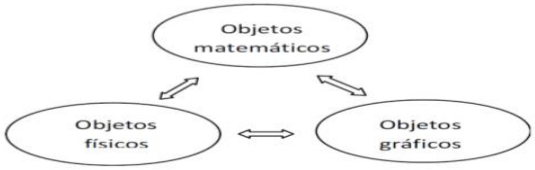



Figura 1[30]

De acordo com Lima e Bellemain (2010 – p.172)

> no estudo da geometria e das grandezas geométricas entram em cena três componentes, os objetos do mundo físico, as representações gráficas e as figuras geométricas [...] isto não significa que eles sejam dissociados uns dos outros. Ao contrario, são estreitamente interrelacionados. Cada um deles pode ser utilizado para representar os outros dois, no contexto da sala de aula.

Para modelização das grandezas geométricas precisamos de outros elementos tais como: as medidas e as grandezas. Assim, teríamos outro modelo na figura 2.

[30] As figuras 1 e 2 foram retiradas da Coleção Explorando o Ensino: v.17. Capitulo 8: Grandezas e Medidas. Páginas 172 e 173, respectivamente. (referencia completo ao final do texto)


ISBN 978-84-945722-3-4

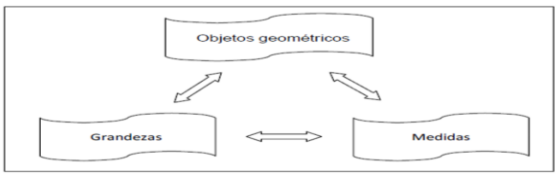


Figura 2[2]

Neste modelo há uma relação intrínseca entre os domínios: geométricos (objetos), das grandezas (unidades de medidas) e das medidas (número). Convêm destacar, que para um mesmo objeto geométrico, podem ser associados mais de um atributo (grandeza) e consequentemente serem encontradas distintas medidas (número).

Dentre as várias grandezas geométricas, investigamos neste estudo a grandeza comprimento (perímetro) e a grandeza área, em virtude das confusões que comumente ocorrem com esses conceitos.

### 3.1 Perímetro e Área

Situações envolvendo perímetro e área tem sido foco de diversas pesquisas, nas quais são identificados dificuldades e erros cometidos por estudantes. De acordo com Bellemain e Lima (2002) vários estudos relativos à aprendizagem de grandezas geométricas têm apontado diversos erros cometidos pelos alunos que evidenciam dificuldades em dissociar área e perímetro.

De acordo com o estudo de Douady e Perrin-Glorian (1989) as hipóteses para os erros recorrentes de estudantes ao mobilizarem os conceitos de perímetro e área se pautam na carência de compreensão das relações entre os campos geométricos e numéricos; na concepção de que há um amálgama entre área e perímetro e por fim no campo geométrico relativo a interação entre os pontos de vistas estáticos e dinâmicos que são necessários para a conceitualização da grandeza área e na dissociação do comprimento.

Os erros cometidos pelos estudantes envolvendo os conceitos de área e de perímetro ocorrem em situações variadas. Há, segundo Bellemain e Lima (2002), três tipos de situações que mobilizam os conceitos de perímetro e área e suas relações: situações de comparação, situações de medida e situações de produção. Para as situações de comparação pode-se propor comparar área ou perímetro de duas ou mais figuras geométricas planas, para as situações de medida pode-se propor medir área ou perímetro de figuras geométricas planas e


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

para as situações de produção pode-se propor produzir figuras geométricas planas a partir de área ou perímetro fornecido.

Para essas situações serem vivenciadas no âmbito escolar são utilizados diversos recursos didáticos tais como: softwares dinâmicos, o corte e colagem de papel, a malha quadriculada, entre outros. Neste estudo, utilizaremos a malha quadriculada e a malha pontilhada para representar a questão do trapézio.

## 4. Objetivos

- Analisar os procedimentos utilizados por estudantes do 3º ano do Ensino Médio ao calcularem medidas de área e de perímetro de um trapézio representado em suportes distintos: na malha quadriculada, na malha pontilhada ou sem uso de malha.

-Verificar se houve equívocos nos conceitos-em-ação mobilizados por estudantes do 3º ano do Ensino Médio ao resolverem a questão de área e de perímetro do trapézio em suportes distintos.

-Identificar os teorema-em-ação utilizados por estudantes do 3º ano do Ensino Médio ao resolverem a questão de área e de perímetro do trapézio em suportes distintos.

## 5. Metodologia

Em toda pesquisa investigativa é necessários um "instrumento de pesquisa" que segundo Rudio (1986) constitui-se como o elemento de *coleta de dados*. Nesta pesquisa, nosso *instrumento* foi um teste aplicado com 30 estudantes do 3º ano do Ensino Médio, onde os mesmo tiveram que responder as seguintes questões: *cálculo de medida de área ou cálculo de medida de perímetro do trapézio*[31] *ABCD, cujas medidas em centímetro é de: AB=4, BC=*$4\sqrt{2}$*, CD=10 e DA=*$2\sqrt{5}$ .

A questão ou solicitando o cálculo da medida de área ou solicitando ou cálculo da medida de perímetro foi representada em suportes distintos: ora na malha quadriculada, ora na malha pontilhada, ora sem uso de malha (neste último caso as medidas dos comprimentos dos lados da figura foram informadas e nos demais casos não). A aplicação ocorreu de modo que cada estudante investigado respondeu a uma questão em apenas um dos suportes citados.

## 6. Discussão dos Resultados

[31] As medidas do trapézio foram retiradas de uma atividade realizada na disciplina sobre Grandezas e Medidas ministrada pela Professora Dra. Paula Baltar, no EDUMATEC – UFPE em 2016.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Ao verificar os conceitos-em-ação mobilizados pelos estudantes ao resolverem a questão de área e de perímetro do trapézio constatamos mais equívocos cometidos com o conceito de perímetro. Conforme é apresentado na tabela 1.

**Tabela 1 – Conceitos-em-ação Mobilizados**

| | ARÉA | | PERÍMETRO | |
|---|---|---|---|---|
| | Certo | Errado | Certo | Errado |
| **Sem malha** | **88,9%** | **11,1%** | **60,0%** | **40,0%** |
| **Quadriculado** | **100,0%** | **0,0%** | **87,5%** | **12,5%** |
| **Pontilhado** | **90,0%** | **10,0%** | **60,0%** | **40,0%** |

Ainda observamos na tabela 1 que os estudantes foram mais assertivos ao mobilizarem os conceitos-em-ação quando o suporte da questão era o *malha quadriculada.* Esse resultado nos leva a crer que esses estudantes tenham tido mais contato com problemas de área e de perímetro representados na *malha quadriculada* do que nos outros suportes ou de que esse suporte facilite o entendimento do estudante, porém neste estudo não tivemos elementos suficientes para confirmar essas hipóteses.

Em relação aos teoremas-em-ação utilizados pelos estudantes ao resolverem o problema de perímetro identificamos três categorias: uso de fórmula[32], soma direta dos lados da figura, contagem de quadriculado ou de pontilhado[33]. Em alguns casos, não conseguimos compreender os procedimentos utilizados pelo sujeito, por isso classificamos esses teoremas como "outros"[34], conforme tabela 2.

**Tabela 2 – Teoremas-em-ação Utilizados para Perímetro**

| | Uso de Fórmula | Soma direta dos lados da figura | Contagem de Quadriculado ou de Pontilhado | Outros |
|---|---|---|---|---|
| **Sem malha** | **30,0%** | **60,0%** | **0,0%** | **10,0%** |
| **Quadriculado** | **25,0%** | **0,0%** | **75,0%** | **0,0%** |
| **Pontilhado** | **60,0%** | **0,0%** | **40,0%** | **0,0%** |

Ao analisar a tabela 2 percebemos que o "uso de fórmula" foi maior quando o suporte foi a *malha pontilhada*. Esse resultado nos surpreendeu, uma vez que esperávamos que esse procedimento aparecesse mais com o suporte *sem uso de malha*, tendo em vista a pouca possibilidade de estratégias que o suporte sugere. Outro dado percebido quando o suporte era a *malha quadriculada* foi que o procedimento de "contagem de

[32] A categoria "uso de fórmula" se faz presente para perímetro, pois alguns estudantes utilizaram equivocadamente a fórmula de área para resolver a questão perímetro.

[33] A categoria "contagem de quadriculado ou de pontilhado" abrange estratégias envolvendo contagem direta de quadradinhos ou de pontos, mas também por decomposição-recomposição, complementação de partes das superfícies unitárias, contagem de lados dos quadradinhos, contagem e soma, entre outras.

[34] Ver exemplos desses e de outras categorias nos apêndices.


ISBN 978-84-945722-3-4

quadriculado ou de pontilhado" apareceu com mais frequência. Essa era uma estratégia esperada tanto no caso da *malha quadriculada* quanto da *malha pontilhada*, considerando que essa é uma alternativa viável para muitos problemas de perímetro e também de área, representados em tais suportes. Contudo, essa não é uma alternativa interessante para a questão que propomos devido a configuração do trapézio[35] na malha.

No caso dos teoremas-em-ação utilizados pelos estudantes para o cálculo de área consideramos duas categorias: uso de fórmula e contagem de quadriculado ou de pontilhado. Além de também não conseguimos compreender em alguns casos as estratégias dos estudantes, de modo que classificamos esses teoremas como "outros", conforme a tabela 3.

**Tabela 3 – Teoremas-em-ação Utilizados para Área**

| | Uso de Fórmula | Contagem de Quadriculado ou de Pontilhado | Outros |
|---|---|---|---|
| **Sem malha** | **88,9%** | **0,0%** | **11,1%** |
| **Quadriculado** | **100,0%** | **0,0%** | **0,0%** |
| **Pontilhado** | **90,0%** | **0,0%** | **10,0%** |

Na tabela 3, é possível perceber a predominância pelo "uso de fórmula" nos três suportes pesquisados, em detrimento ao procedimento de "contagem de quadriculado ou de pontilhado". Esse resultado, nos leva a crer que esses sujeitos possam ter tido contato efetivo com a fórmula de área do trapézio, contudo não temos meios de confirmar essa hipótese a partir dos dados coletados.

## 7. Considerações Finais

Ao realizar esse estudo, tínhamos inicialmente, a hipótese de que estudantes do 3º ano do Ensino Médio investigados ainda cometeriam equívocos ao mobilizarem conceitos-em-ação para resolverem uma questão de área e de perímetro de um trapézio representado em suportes distintos: na malha quadriculada, na malha pontilhada ou sem uso de malha. Essa hipótese se confirmou, significativamente, nos casos que foram solicitados o cálculo de perímetro. Esse resultado, de certo modo, foi semelhante ao estudo de Pessoa (2010, p.109), "assim como nos estudos de Douady e Perrin-Glorian, (1989) e Bellemain e Lima (2002), o aluno apresentou dificuldade em dissociar a área do perímetro, embora solicitado o cálculo da área da figura ele determinou o perímetro."

35 Ver modelo no apêndice.


ISBN 978-84-945722-3-4

Outra hipótese inicial era que os estudantes ao calcularem a área do trapézio teriam predileção por utilizar como teorema-em-ação a "contagem de quadriculado ou de pontilhado" por não precisar lembrar-se de procedimentos e de fórmulas, no entanto o "uso de fórmula" se mostrou bastante presente nas estratégias utilizadas pelos estudantes. Acreditamos que esse resultado, contrário a nossa hipótese, tenha ocorrido pelo fato do "uso de fórmula" ser uma indicação presente nas propostas curriculares brasileiras já a partir dos últimos anos do Ensino Fundamental, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais "obter e utilizar fórmulas para cálculo da área de superfícies planas" (1998, p.82). Ou seja, os estudantes do 3º ano investigados podem já vir utilizando fórmulas para resolver problemas de área há algum tempo.

Outro ponto que nos chamou atenção no estudo é que nenhum dos estudantes utilizou as unidades de medidas para informar suas respostas. Acreditamos que esse aspecto precisa ser mais considerado no ensino de grandezas geométricas.

Alguns resultados encontrados precisam ser aprofundados em novos estudos que possibilitem a coleta de mais dados, para responder a questões que emergiram da pesquisa, tais como: quais os tipos de suportes são mais explorados nas atividades escolares envolvendo área e perímetro? O uso de fórmula é frequente nas aulas relativas ao cálculo de área e de perímetro? E quais os suportes que podem gerar mais dificuldade para a resolução de problemas de área e perímetros?

## 8. Referências


BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática (5ª ao 8ª série)**. Brasília, 1998.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental e médio.** Série Textos de História da Matemática, vol. 8. Natal, 2002.

LANDIM, E. **Menos com menos é menos ou é mais? Multiplicação e divisão de números inteiros na sala de aula.** Curitiba: Appris, 2015.

LIMA, P. F.; BELLEMAIN, P. M. B. **Coleção Explorando o Ensino; v.17. Capítulo 8: Grandezas e Medidas**. Brasília: MEC, p.167-200, 2010.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. **Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. Educational Studies in Mathematics** . p. 387-424, 1989.

PAIS, L. C. **Coleção Tendências em Educação Matemática. Didática da Matemática: uma analise da influência francesa**. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015



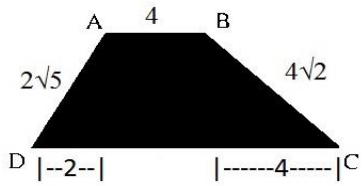
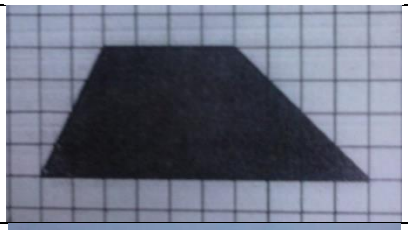
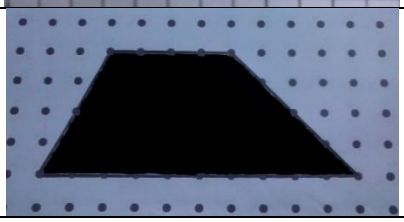

ISBN 978-84-945722-3-4

PESSOA, G. S. **Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada: influência de algumas variáveis.** Dissertação. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. UFPE. Recife, 2010.
RUDIO, F. V. **Introdução ao projeto de pesquisa científica**. Petrópolis: Vozes, 1986.
VERGNAUD, G. **Didáticas das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. 1996.

## APÊNDICE

TITULO: **A QUESTÃO DO TRAPÉZIO: UM ESTUDO SOBRE CÁLCULO DE ÁREA E PERÍMETRO**.

MODELOS DE SUPORTES PARA AS QUESTÕES DO TRAPÉZIO

| | |
|---|---|
| SEM MALHA |  |
| MALHA QUADRICULADA |  |
| MALHA PONTILHADA |  |

TIPOS DE QUESTÕES PARA O TRAPÉZIO

| |
|---|
| Observe a figura do trapézio e calcule sua área em cm. |
| Observe a figura do trapézio e calcule seu perímetro em cm. |

CATEGORIAS DE TEROEMAS-EM-AÇÃO DE ÁREA

| | |
|---|---|
| Uso de fórmulas | Independente da fórmula ser indicada para o conceito. |
| Contagem de quadriculados ou de pontilhados | Qualquer situação que leve a crer que o sujeito usou como principal ferramenta a contagem de quadriculados ou pontilhados ou partes deles. |
| Outros | Procedimento não identificado |

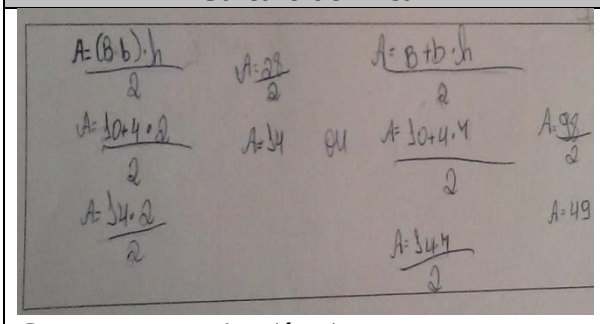
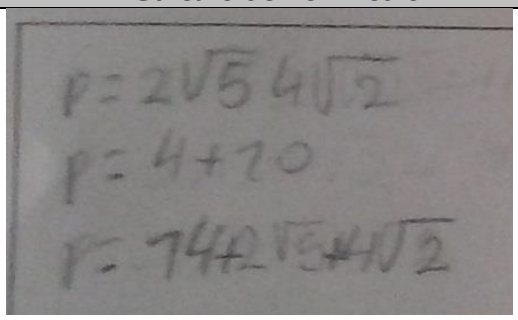
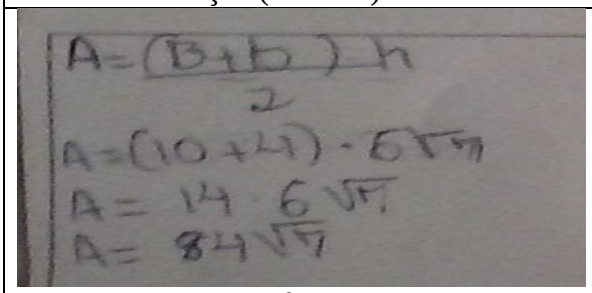
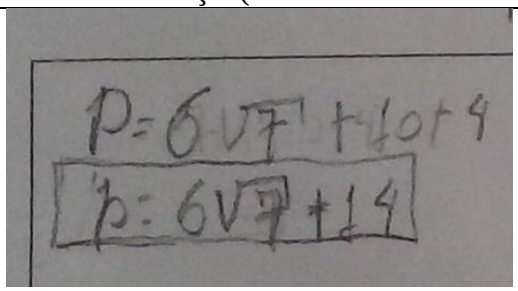
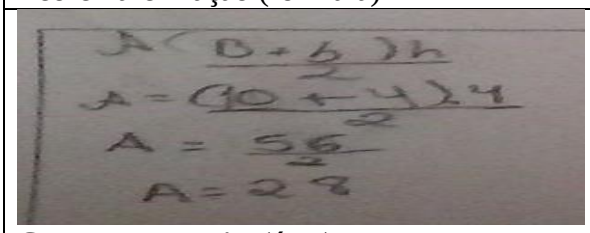
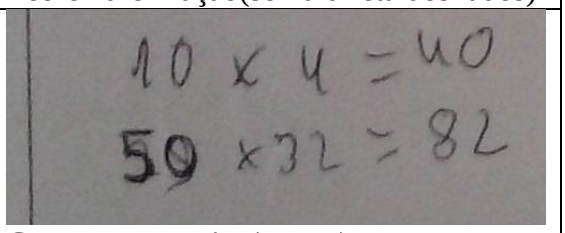
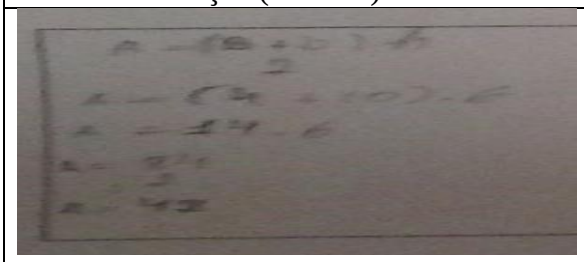
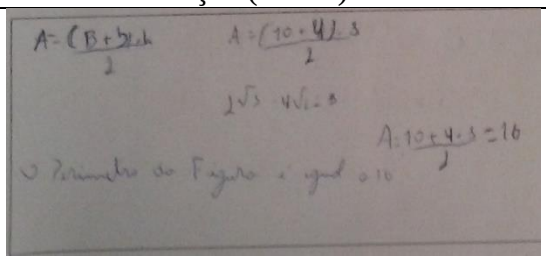
CATEGORIAS DE TEROEMAS-EM-AÇÃO DE PERÍMETRO

| | |
|---|---|
| Uso de fórmulas | Independente da fórmula ser indicada para o conceito. |
| Soma direta dos lados da figura | Qualquer tipo de soma de valores fornecidos para os lados da figura. |


ISBN 978-84-945722-3-4

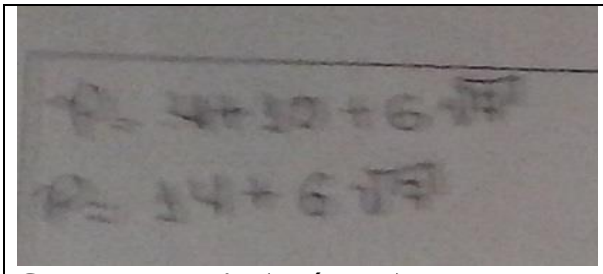
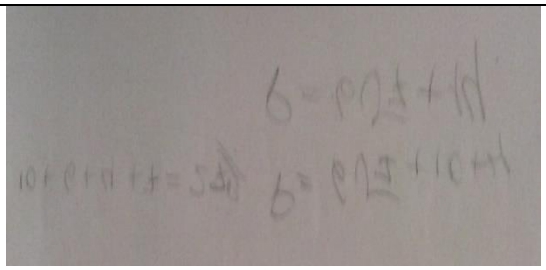
| | |
|---|---|
| Contagem de quadriculados ou de pontilhados | Qualquer situação que leve a crer que o sujeito usou como principal ferramenta a contagem de quadriculados ou pontilhados ou partes deles. |
| Outros | Procedimento não identificado |

EXEMPLOS DE PROTOCOLOS – SUPORTE SEM MALHA

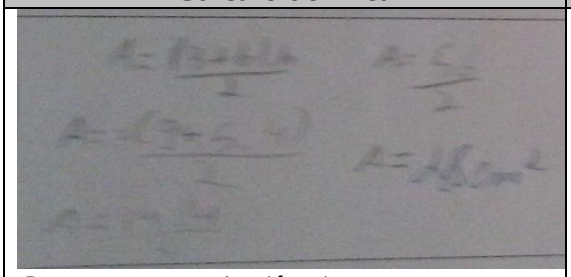
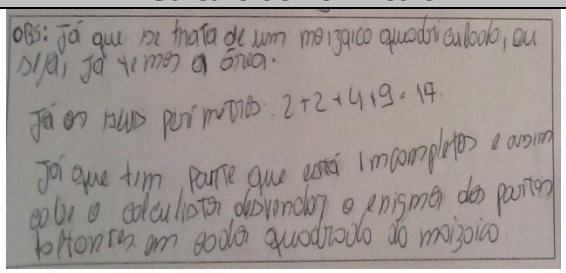
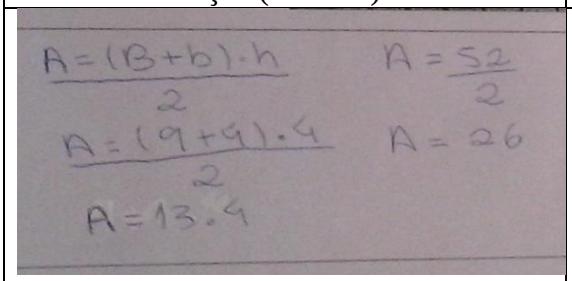
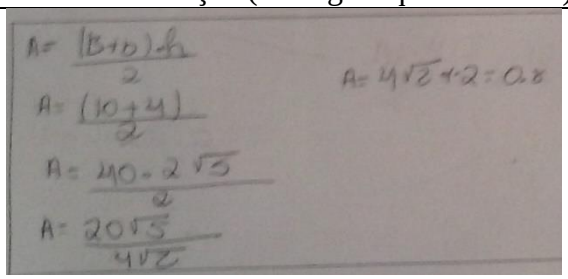
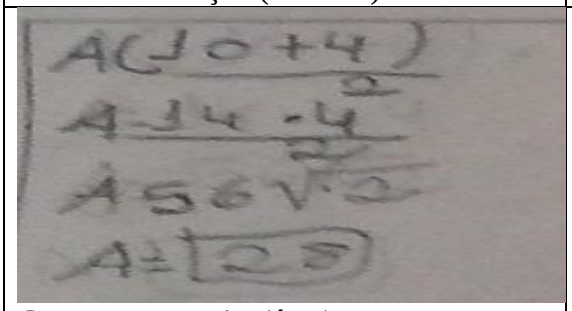
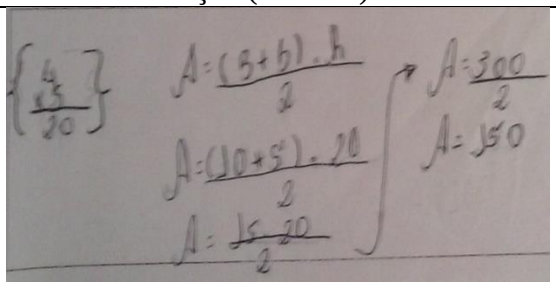
| **Cálculo de Área** | **Cálculo de Perímetro** |
|---|---|
|  <br>Conceito-em-ação (área)<br>Teorema-em-ação (fórmula) |  <br>Conceito-em-ação (perímetro)<br>Teorema-em-ação(soma direta dos lados) |
|  <br>Conceito-em-ação (área)<br>Teorema-em-ação (fórmula) |  <br>Conceito-em-ação (perímetro)<br>Teorema-em-ação(soma direta dos lados) |
|  <br>Conceito-em-ação (área)<br>Teorema-em-ação (fórmula) |  <br>Conceito-em-ação (outros)<br>Teorema-em-ação (outros) |
|  <br>Conceito-em-ação (área)<br>Teorema-em-ação (fórmula) |  <br>Conceito-em-ação (área)<br>Teorema-em-ação (fórmula) |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

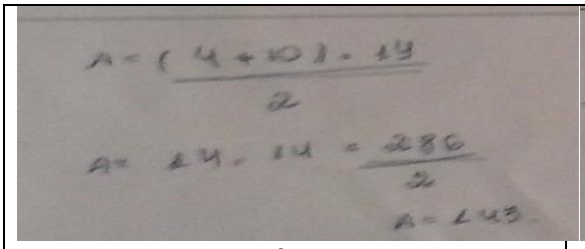
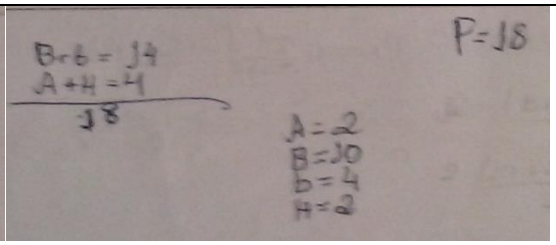
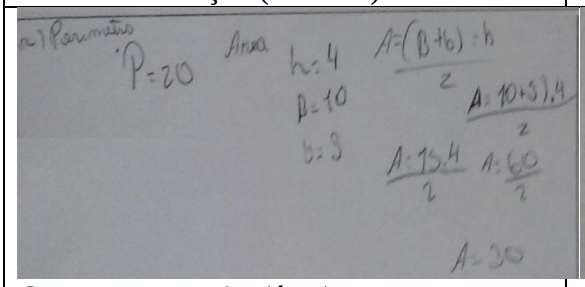
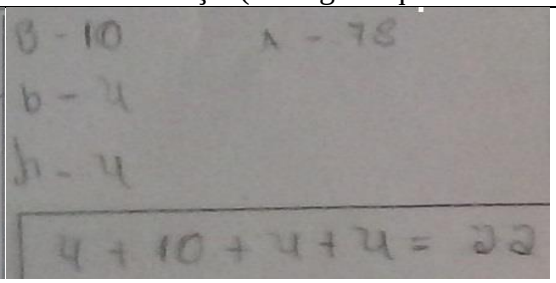
| | |
|---|---|
|  |  |
| Conceito-em-ação (perímetro)<br>Teorema-em-ação (outros) | Conceito-em-ação (perímetro)<br>Teorema-em-ação(soma direta dos lados) |

EXEMPLOS DE PROTOCOLOS – SUPORTE MALHA QUADRICULADA

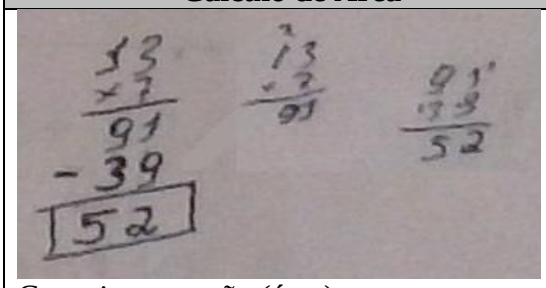
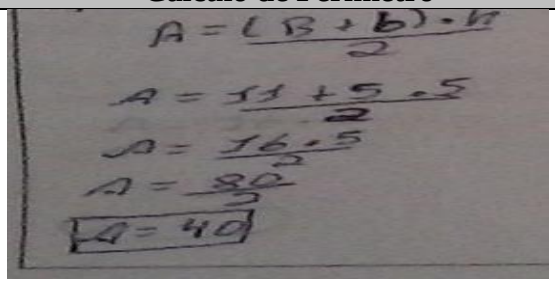
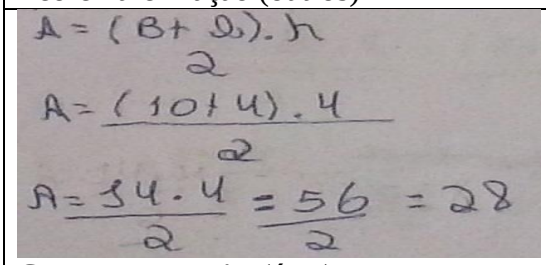
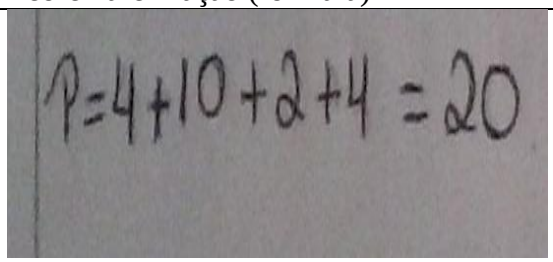
| **Cálculo de Área** | **Cálculo de Perímetro** |
|---|---|
|  <br>Conceito-em-ação (área)<br>Teorema-em-ação (fórmula) |  <br>Conceito-em-ação (perímetro)<br>Teorema-em-ação (contagem quadradinhos) |
|  <br>Conceito-em-ação (área)<br>Teorema-em-ação (fórmula) |  <br>Conceito-em-ação (área)<br>Teorema-em-ação (fórmula) |
|  <br>Conceito-em-ação (área)<br>Teorema-em-ação (fórmula) |  <br>Conceito-em-ação (área)<br>Teorema-em-ação (fórmula) |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

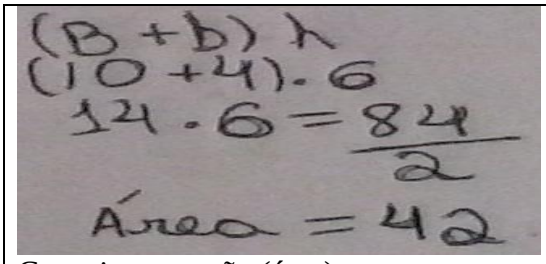
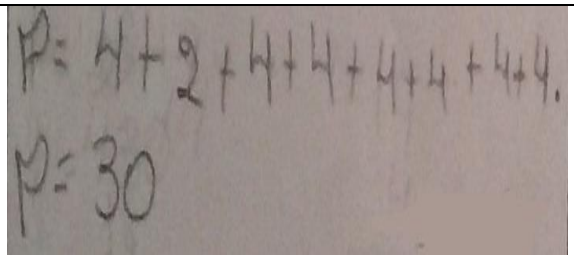
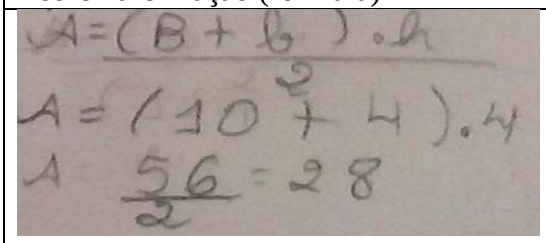
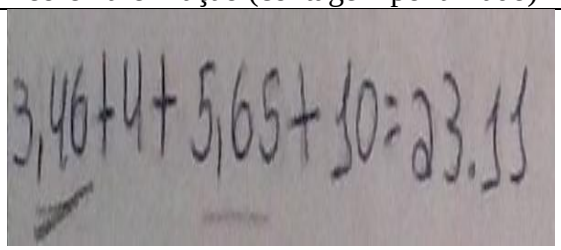
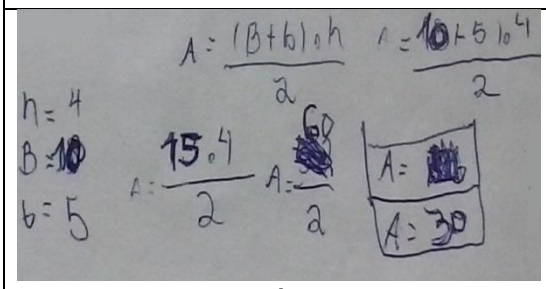
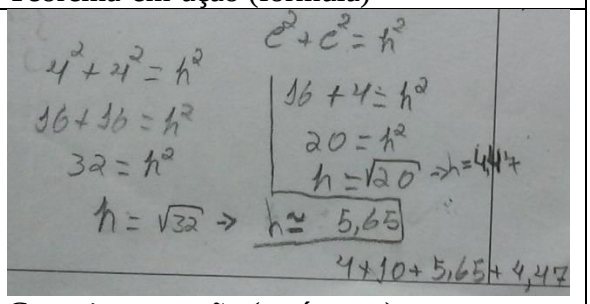
| | |
|---|---|
|  |  |
| Conceito-em-ação (área)<br>Teorema-em-ação (fórmula) | Conceito-em-ação (perímetro)<br>Teorema-em-ação(contagem quadradinhos) |
|  |  |
| Conceito-em-ação (área)<br>Teorema-em-ação (fórmula) | Conceito-em-ação (perímetro)<br>Teorema-em-ação(contagem quadradinhos) |

EXEMPLOS DE PROTOCOLOS – SUPORTE MALHA PONTILHADA

| **Cálculo de Área** | **Cálculo de Perímetro** |
|---|---|
|  |  |
| Conceito-em-ação (área)<br>Teorema-em-ação (outros) | Conceito-em-ação (área)<br>Teorema-em-ação (fórmula) |
|  |  |
| Conceito-em-ação (área)<br>Teorema-em-ação (fórmula) | Conceito-em-ação (perímetro)<br>Teorema-em-ação (contagem pontilhados) |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

| | |
|---|---|
|  <br>Conceito-em-ação (área)<br>Teorema-em-ação (fórmula) |  <br>Conceito-em-ação (perímetro)<br>Teorema-em-ação (contagem pontilhado) |
|  <br>Conceito-em-ação (área)<br>Teorema-em-ação (fórmula) |  <br>Conceito-em-ação (perímetro)<br>Teorema-em-ação (fórmula) |
|  <br>Conceito-em-ação (área)<br>Teorema-em-ação (fórmula) |  <br>Conceito-em-ação (perímetro)<br>Teorema-em-ação (fórmula) |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.189

# CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE PROFESORES CHILENOS CUANDO ABORDAN LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

Yocelyn Parra Urrea – Luis Pino-Fan
yocelynparra@gmail.com – luis.pino@ulagos.cl
Universidad San Sebastián, Universidad de Los Lagos, Chile

Modalidad: Comunicación Breve **(CB)**
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Núcleo temático: Formación del Profesorado en Matemáticas
Palabras clave: Función, Conocimiento didáctico-matemático.

**Resumen**
*Esta investigación pretende caracterizar los conocimientos requeridos por los profesores de matemática para gestionar idóneamente los aprendizajes sobre la noción de función, además de identificar los significados que el profesor implementa en el desarrollo de sus clases. Para lograr nuestro objetivo, reconstruimos el significado holístico de referencia mediante una revisión de tipo histórico-epistemológico. Además, exploramos y caracterizamos aspectos relevantes asociados al conocimiento didáctico-matemático de un profesor chileno en formación inicial cuando aborda la noción de función potencia. Para el análisis nos apoyamos en las nociones teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), y en algunas dimensiones y herramientas propuestas por el modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM). Como resultado del estudio, evidenciamos que los profesores presentan dificultades para resolver actividades relacionadas con el conocimiento de contenido común y ampliado. En cuanto a la dimensión didáctica, los profesores movilizan representaciones principalmente de tipo algebraica y gráfica. Asimismo, se han identificado errores y ambigüedades cuando el profesor conceptualiza la noción de función potencia.*

## Planteamiento del Problema

El análisis y reflexión de las prácticas docentes es una de las problemáticas que ha desatado gran interés en la educación matemática. Diversos estudios han reportado una variedad de dificultades en los procesos de instrucción matemática, impidiendo a los estudiantes apropiarse, comprender y dar significado a la noción de función.

Norman (1992) constata que los profesores poseen dificultades en la conceptualización de las funciones, es decir, aprueban definiciones informales consideradas como útiles para determinar la funcionalidad de las relaciones y las perciben como definiciones matemáticamente formales, además sólo identifican ejemplos estándares de funciones y no


ISBN 978-84-945722-3-4

reconocen situaciones físicas que representan relaciones funcionales. En este mismo sentido, Even (1993) prueba que la apreciación de la naturaleza arbitraria de las funciones está ausente y muy pocos profesores pueden explicar la importancia y origen del requerimiento de la univalencia. Por su parte Wilson (1994) establece que la idea de los profesores respecto a la noción de función es consistente con la concepción que poseen sobre las matemáticas, entendida como la colección de procedimientos para responder a problemas bien definidos. En cuanto a la utilidad de las funciones, los docentes manifiestan poca apreciación por el uso de las funciones y el conocimiento que se tenía en esta área era limitado y fragmentado.

En Chile se evidencian dificultades en contenidos matemáticos específicos asociados con el álgebra, dentro de esta área el trabajo con las funciones es tratado en general desde un punto de vista estrictamente formal (Aravena, 2001). De acuerdo con Figueiredo (2010) la introducción de la noción de función en el nivel prealgebraico tiende a basarse en representaciones verbales y tabulares. No obstante, rápidamente la construcción de dicha noción se centra en representaciones algebraicas y geométricas. Font y Acevedo (2003) aun cuando no estudian directamente las concepciones de los profesores, establecen cómo éstos tienen la creencia de que el uso de metáforas dinámicas en su discurso facilita la comprensión sobre funciones. Los profesores usan de manera poco consciente estas metáforas y creen que sus efectos en la comprensión de sus estudiantes son inocuos; contrariamente, los estudiantes estructuran su conocimiento sobre las funciones en los términos metafóricos que ha utilizado el profesor de manera inconsciente (Acevedo, Font y Giménez, 2004). Godino, Wilhelmi y Bencomo (2006) explicitan que una instrucción didáctico-matemática idónea requiere que el profesor posea un conocimiento profundo de los diversos significados de la noción de función. Por ello, conocer su evolución histórica, representa un conocimiento relevante para la enseñanza de las funciones ya que permite tener una visión más amplia del objeto función (Font, 2011). Amaya, Pino-Fan y Medina (2016) mencionan dificultades que los profesores poseen en torno a la función. Algunas de ellas se relacionan con identificar relaciones funcionales, modelar situaciones utilizando funciones, entre otras. Una de las interrogantes que surge posterior a la revisión de la literatura es *¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático de profesores chilenos en formación cuando abordan la noción de función?* En este trabajo presentamos un estudio de caso con el cual tratamos de caracterizar algunos aspectos relevantes del CDM sobre funciones.


ISBN 978-84-945722-3-4

**Marco Teórico**

Describir y caracterizar los conocimientos didácticos-matemáticos que los profesores deberían tener para gestionar eficazmente la enseñanza y garantizar el aprendizaje de sus estudiantes, ha sido una de las problemáticas de interés en la educación matemática. Pino-Fan y Godino (2015) presentan un modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor basado en el "enfoque ontosemiótico" (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007). Este modelo plantea tres grandes dimensiones: Matemática; Didáctica; y Meta didáctico-matemática. Pino-Fan, Assis y Castro (2015) definen la dimensión matemática del CDM, como "*los conocimientos que permiten al profesor, resolver una actividad matemática que se pretende implementar en el aula y vincularlo con objetos matemáticos que se encuentran más adelante en el currículum de matemáticas. Incluye dos subcategorías de conocimientos: conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido"* (p. 1433). El conocimiento común del contenido es entendido como aquel que permite resolver tareas matemáticas propuestas por el currículo de matemática en un nivel educativo específico (Pino-Fan y Godino, 2015). El conocimiento ampliado del contenido refiere al conocimiento que se sitúa más adelante que aquel que se está estudiando, además permite vincular la noción con otros objetos matemáticos (Ibíd.).

La dimensión didáctica del CDM *incluye seis subcategorías del conocimiento: Conocimiento especializado de la dimensión matemática (faceta epistémica); Conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes (faceta cognitiva); Conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes (faceta afectiva); Conocimiento sobre las interacciones que se originan en el aula (faceta interaccional); Conocimiento sobre los recursos que pueden favorecer los aprendizajes de los estudiantes (faceta mediacional); y Conocimiento sobre los aspectos curriculares, sociales, políticos, económicos, que influyen en la gestión de los aprendizajes (faceta ecológica)* (Pino-Fan, Assis y Castro, 2015). Las seis facetas de la dimensión didáctica del CDM pueden contemplarse para examinar y caracterizar el conocimiento de los profesores en cualquier fase del proceso de enseñanza: estudio preliminar, planificación o diseño, implementación y evaluación (Pino-Fan y Godino, 2015). En este documento nos enfocaremos a los conocimientos relacionados con la faceta epistémica del CDM.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Pino-Fan y Godino (2015) definen la dimensión meta didáctico-matemática del CDM como "*los conocimientos sobre las normas y metanormas, las condiciones y restricciones contextuales. Conjuntamente involucra criterios de idoneidad que permiten al profesor reflexionar sobre su propia práctica y determinar mejoras potenciales de la misma"* (p. 103).

**Metodología**

La siguiente investigación trata de un estudio de caso mediante el cual se caracteriza el conocimiento didáctico-matemático de un profesor chileno en formación inicial (Profesor A), cuando afronta la enseñanza de la noción de función potencia. Conjuntamente, se pretende identificar los significados parciales que el profesor implementa en el desarrollo de sus clases. En esta comunicación por motivos de espacio sólo se presentará el análisis de la dimensión matemática del (CDM) y de una de las seis facetas que componen la dimensión didáctica del (CDM) –faceta epistémica–. Al momento de la experimentación, el profesor A estaba cursando el sexto semestre de la carrera de pedagogía media en matemática cuya duración total es de ocho semestres. Algunas de las asignaturas que el profesor A había cursado a lo largo de su formación son: álgebra básica, álgebra de funciones, cálculo diferencial, cálculo integral, entre otras. Cabe señalar que el estudio de la función potencia se realiza en Chile en cuarto año medio, es decir, con estudiantes de 17-18 años. Para la recolección de la información se filmó una clase simulada en la que profesores en formación de sexto semestre cumplieron el rol de estudiantes de cuarto año medio.

**Resultados**

Significado Holístico de la noción de función

En un estudio previo (Parra, 2015), se identificaron seis significados parciales que constituyen el significado holístico de referencia de la noción de función: *La función como correspondencia, como relación entre variables, como expresión gráfica, como expresión analítica, como correspondencia arbitraria y desde la teoría de conjuntos*.

Descripción Clase sobre Función Potencia

La profesora A comienza el proceso de enseñanza explicitando el objetivo de la clase: "*Conocer y comprender el concepto de función potencia y su representación gráfica"*. Durante el inicio de la clase refuerza los conceptos de potencia y ecuación exponencial. Inmediatamente después procede a definir la noción de función potencia como: "*Es toda aquella función de la forma* $f(x) = ax^n$ *donde a es un número real distinto de cero y n debe*



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

*ser un número natural mayor que cero*". A continuación la Profesora A alude a que existen cuatro casos de funciones potencia y señala: "*La función potencia con exponente par se define como: "si $n$ es un número par sabemos que para cualquier $x$ su resultado será positivo, por lo que ambas ramas (simétricas al eje $y$) crecen con la misma rapidez en el mismo sentido"*. Luego expresa *"Un ejemplo de esta ecuación"* corrige rápidamente e indica *"Un ejemplo en esta función es* $f(x) = x^6$" y muestra la representación gráfica de la función. En seguida explica "*Si el coeficiente $a$ es positivo las ramas se abren hacia arriba y si el coeficiente $a$ es negativo las ramas se abren hacia abajo"*. Posteriormente, a modo de ejemplo plantea la función $f(x) = 2x^4$ y efectúa la representación gráfica, para ello recurre a una representación tabular asignando valores a $x$ y obteniendo los valores de $y$. Cabe destacar que la Profesora A al momento de graficar ubica erradamente el par ordenado en el plano –intercambiando la posición de las coordenadas– al cabo de unos minutos corrige el error y alude a que la representación corresponde a una parábola positiva. Seguidamente señala que otro caso de función potencia es aquella cuyo exponente es impar. La profesora A manifiesta "*Este tipo de función puede ocasionar mayor dificultad*", una vez que presenta la función $f(x) = 2x^5$ pregunta a sus estudiantes ¿Qué ocurre si $x$ es cero? La profesora expone que "*si* $x = 0$, *entonces* $y = 0$ *por ende este tipo de función potencia siempre va a partir del cero y se obtendrán los valores positivos y negativos en la rama 1 y 2 respectivamente, es decir, los valores numéricos serán iguales en cada rama pero con signo contrario*".

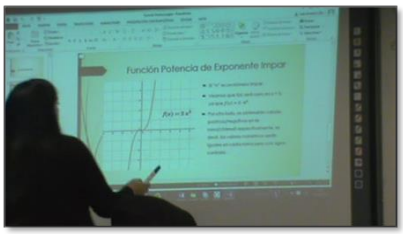



**Figura 8. Explicación representación gráfica función potencia exponente impar**

A continuación, la profesora plantea como actividad algunas representaciones algebraicas y solicita realizar sus respetivas representaciones gráficas. Entre sus comentarios, sugiere transitar desde la representación algebraica a la tabular y luego a la gráfica. Posteriormente expone el caso de la función $f(x) = ax^n$ con $n = 1$ y señala*:* ¿Cómo se comporta la gráfica


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

de esta función? rápidamente manifiesta: "*Efectivamente la gráfica es una recta, por ende representa la gráfica de una función lineal. Por lo tanto, no es una función potencia, ya que su representación no corresponde a una parábola*"

Otra inquietud que la profesora plantea a sus estudiantes es: ¿Cómo se comporta la gráfica de la función $f(x) = x^0$? Ante esta pregunta la profesora estima conveniente efectuar la gráfica, para ello, utiliza la representación tabular asignado los siguientes valores (-1, 0, 1) a la variable $x$ y menciona que los valores de la variable $y$ son (1, 1, 1) respectivamente, concluye que en este caso se trata de una función constante y no de una función potencia. Ante esta situación, uno de los estudiantes consulta: ¿$0^0 = 1$? La profesora A alude que en ese momento no puede explicarlo, pero que durante la próxima clase aclarará aquella inquietud. Posteriormente, la profesora se apoya de la tabla 1 para explicar el dominio y el recorrido de la función potencia.

**Tabla 1. Dominio y recorrido función potencia**

| | Función par cóncava hacia arriba | Función par cóncava hacia abajo | Función impar |
|---|---|---|---|
| **Dominio** | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| **Recorrido** | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}^-$ | $\mathbb{R}$ |

Al finalizar la profesora realiza una síntesis de lo abordado durante la clase y refuerza lo siguiente: "*Recordemos que en las funciones potencia el exponente siempre debe ser un número natural mayor que 1 pues si fuese igual a uno se trataría de una función lineal y si fuese igual a cero se trataría de una función constante*".

**Análisis de resultados**

A partir de las definiciones, argumentos y justificaciones proporcionadas por la profesora A en el proceso de enseñanza sobre función potencia, podemos concluir que la profesora posee un dominio parcial del *conocimiento común del contenido*. Esto particularmente porque no logra dar respuestas matemáticamente satisfactores a más de una tarea que ella misma propone. Cabe destacar que las actividades planteadas se corresponden con las que se sugieren en el currículo de cuarto año medio. Durante el proceso de instrucción no se logra percibir el dominio del *conocimiento ampliado del contenido* de la profesora A. Asimismo, no se observan conexiones de la noción de función potencia con objetos matemáticos de niveles educativos más avanzados.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Basados en los componentes y descriptores de los criterios de la idoneidad epistémica, la profesora A define 'erradamente' la noción de función potencia, esto se evidencia principalmente cuando señala que "*dada la función* $f(x) = ax^n$ *n debe ser un número natural mayor que cero".* Otro error que se visualiza es definir dominio y recorrido como conceptos independientes de la noción de función. Además, se perciben ciertas ambigüedades cuando la profesora A, al inicio de la clase, define la función potencia y explica que el valor de *n* debe ser un número natural mayor que cero y luego cuando efectúa el resumen de la clase señala que *n* debe ser un número mayor que uno, pues de lo contrario la expresión representa una función lineal y no una función potencia. Con respecto a la *riqueza de los procesos* y la *representatividad* según Pino-Fan, Assis y Castro (2015) el profesor, además de las matemáticas que le permiten resolver diversas problemáticas donde activa su conocimiento común y ampliado, debe poseer un conocimiento matemático 'perfilado' para la enseñanza, es decir, debe ser capaz de abordar diversas representaciones del objeto matemático función. Durante el proceso de enseñanza, la profesora A moviliza diversas *representaciones*. No obstante, sólo transita desde representaciones algebraicas a tabulares y luego a gráficas. En cuanto a los *procedimientos* que presenta en el desarrollo de las actividades que propone, sólo se identifica la valoración de expresiones algebraicas y ubicar pares ordenados en el plano. En relación a vincular la noción de función potencia con otros objetos matemáticos, la profesora A se refiere a los *conceptos* de potencia y ecuaciones exponenciales como nociones esenciales para el estudio de la función potencia. Sin embargo, no refuerza ni se refiere a la noción de función. Con respecto a las *justificaciones* y *argumentaciones* que proporciona la profesora A, se identifican ciertas imprecisiones, esto se evidencia cuando plantea la expresión $f(x) = x^0$ y no logra explicar la situación, cuando definir el dominio de la función respondería a la problemática. Los tipos de *problemas* que se desarrollan durante la clase sobre función potencia son problemas para ejemplificar definiciones presentadas y problemas no contextualizados, para reforzar las definiciones introducidas. No se identifican tareas contextualizadas que requieran de funciones potencias para modelar fenómenos.

**Reflexiones Finales**



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En este estudio se demuestra cómo el uso de las dimensiones y/o herramientas propuestas por el modelo del conocimiento didáctico matemático (CDM) son útiles para analizar el conocimiento de una profesora chilena cuando aborda la función potencia.

Como resultado del análisis, se evidencia que la profesora posee un dominio parcial del conocimiento común del contenido, además se observan errores y ambigüedades en la conceptualización de la noción de función potencia y se perciben impresiones en los argumentos y/o justificaciones a tareas propuestas en el desarrollo de la clase. La enseñanza desarrollada por la profesora A, se basa principalmente en procesos mecánicos, esto se visualiza cuando se presenta el algoritmo para transitar desde representaciones algebraicas a tabulares y luego a gráficas. Por otro lado, a partir del proceso de enseñanza y de acuerdo al tipo de problemas, definiciones, representaciones, propiedades, procedimientos y argumentos propuestos, el significado de la noción de función potencia pretendido por profesora A no es representativo del significado holístico de referencia, esto pues el enfoque que se le da al objeto matemático se basa fundamentalmente en su acepción de representación gráfica y en un significado que involucra elementos de la teoría conjuntista.

Finalmente, describir y caracterizar otras facetas de la dimensión didáctica del CDM es sin duda una de las problemáticas que se podrían abordar en investigaciones futuras.

**Agradecimientos**

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del proyecto de investigación Fondecyt 11150014, financiado por CONICYT de Chile.

**Referencias bibliográficas**

Acevedo, J.L., Font, V., & Giménez, J. (2004). Class Phenomena related with the use of metaphors, the case of the graph offunctions. In J. Giménez, G. Fitzsimons, C. Hahn (Eds.), *Globalisation and mathematics education CIEAEM 54*, pp. 336 - 342. Barcelona: Graó.

Amaya, T., Pino-Fan, L., & Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática, 28*(3), 111-144.

Aravena, M. (2001). Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica. (Tesis Doctoral). Universidad de Barcelona, España.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(2), 94-116.


ISBN 978-84-945722-3-4

Figueiredo, C. (2010). Los ejemplos en clase de matemáticas de secundaria como referente del conocimiento profesional. (Tesis Doctoral). Universidad de Extremadura, España.

Font, V., & Acevedo, J. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(3), 405-418.

Font, V. (2011). Las funciones y la competencia disciplinar en la formación docente matemática. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 56, 86-94.

Godino, J., Wilhelmi, M., & Bencomo, D. (2006). Idoneidad de un proceso de instrucción matemática sobre la noción de función con estudiantes de ingeniería. Coloquio Internacional para la Enseñanza de la Matemática a Estudiantes de Ingeniería. Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Norman, A. (1992). Teachers mathematical knowledge of the concept of function. In G. Harel, E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy, vol. 25, MAA notes* (pp. 215-232). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Parra, Y. (2015). Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función. (Tesis de Magíster). Universidad de Los Lagos, Chile.

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA, 36*(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of tearchers didactic-mathematical knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Techonology Education, 11*(6), 1429-1456.

Wilson, M.R. (1994). One preservice secondary teacher's understanding of function: The impact of a course integrating mathematical content and pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(4), 346-370.


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.191

# SI AL-KHWARIZMÍ LEVANTARA LA CABEZA...A LA ABSTRACCIÓN DEL ALGEBRA DESDE LA MANIPULACIÓN

Luis Cros Lombarte
lluis.cros@sarria.epiaedu.cat
Escola Pia Sarrià-Calassanç de España.

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Medio o Secundario (12 a 15 años)
Palabras clave: manipulativo, álgebra, policubo, polinomios.

**Resumen**

*En esta comunicación se presenta como se ha llevado al aula la introducción a las expresiones polinómicas y las operaciones básicas entre polinomios: suma, resta y producto. Por su extrema abstracción las expresiones polinómicas y su operatividad es algo que suele bloquear a los alumnos y las estrategias que se intentan utilizar para romper esos bloqueos no suelen ser todo lo eficientes que debería. Recordando como el material manipulativo ayuda en las primeras etapas del aprendizaje de las matemáticas a consolidar los conceptos abstractos de cantidad he diseñado una experiencia de aula en la que los primeros pasos en el mundo de los polinomios los alumnos los hagan con material manipulativo, más en concreto con policubos. La versatilidad que dan para unirse y separarse permite simbolizar fácilmente los diferentes grados del polinomio. Este curso ha sido la primera vez que he llevado esta experiencia al aula y la presentación en este congreso tiene como objetivo principal compartirla con docentes de otros niveles y localizaciones para poderla enriquecer y hacerla más potente y eficiente en el aula, en hacer más sencilla la comprensión de esta herramienta tan abstracta como es el lenguaje algebraico.*



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

**El álgebra, descripción.**

El álgebra es la rama de la matemática que estudia la combinación de números, letras y signos para representar operaciones aritméticas de una manera general. Se podría resumir que el álgebra es la generalización del algebra. En nuestro currículum encontramos bajo el epígrafe álgebra las expresiones algebraicas, los polinomios, las ecuaciones o las funciones. El álgebra forma parte de nuestro currículum de manera notable, se le da mucha importancia.

Expresión algebraica:
El doble de un número más su consecutivo: $2 \cdot x + (x+1)$

Polinomio:
$P(x) = 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 1$

Ecuación:
$3 \cdot (x - 1) = 2 \cdot x - 2$

Función:
$y = f(x) = 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1$

**El álgebra, historia.**



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Para encontrar el origen de la palabra álgebra nos tenemos que remontar al año 820 cuando el matemático y astrónomo persa Muhàmmad ibn Mussa al-Khwarazmí (conocido como Al-Khwarizmí o Al-Juarismi) publica la obra *Al-Jabr wa-al-Muqabilah* (Compendio de cálculo por reintegración y comparación) Por esto Al-Khwarizmí es considerado el padre del algebra tal como la conocemos hoy en día. La palabra álgebra de nuestro idioma proviene por tanto del árabe, en concreto de la palabra *al-ŷabar (Al-Jabr)* su traducción vendría a ser algo así como restauración, reponimiento o reintegración. Si fuésemos a su traducción literal de *Al-Jabr* sería la reunión de partes rotas por eso durante la Edad Media un algebrista era un restaurador o alguien que arregla huesos rotos, hoy en día esta acepción está en desuso aunque en el diccionario de la RAE (Real Academia Española) su segunda entrada para algebrista es: "Cirujano dedicado especialmente a la curación de dislocaciones de huesos"

**Al-Khwarizmí, matemático y astrónomo persa (???-850d.C)**

Los matemáticos árabes de la edad media son los que dan el primer empujón al álgebra, anteriormente a ellos los matemáticos babilónicos, griegos, chinos o egipcios desarrollaron métodos algorítmicos y geométricos para resolver problemas que hoy se suelen resolver mediante ecuaciones.

El salto cuantitativo y cualitativo para el álgebra se dio durante la Edad Moderna con el establecimiento de los signos (+) y (-) 1518 Grammateus, signo (=) 1557 Recorde, signo (x) 1618, signo (·) 1631 Harriot, signo (:) 1684 Leibniz… que se popularizaron durante el siglo XVIII. Toda esta simbología facilitó el trabajo algebraico y condujo, durante el siglo XIX, a crear áreas del álgebra abstracta absolutamente independientes de nociones aritméticas o geométricas.

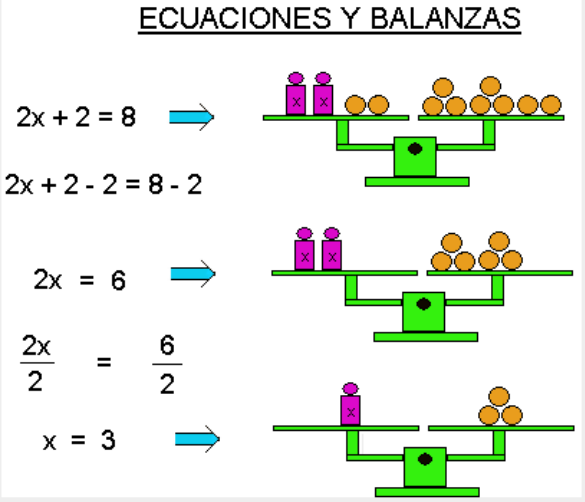
**El aprendizaje del álgebra.**

La principal dificultad que nos encontramos en la enseñanza de conceptos algebraicos es la enorme complejidad y abstracción que conlleva. Las matemáticas se aprenden de manera



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

intuitiva y natural, nos rodean en muchos de los procesos que hacemos de manera cotidiana. Para optimizar su utilización debemos formalizar y en el paso de la matemática natural a la matemática formal muchas personas se pierden. Para que este paso sea sencillo y accesible para todos los niveles se debe hacer paulatino, empezar con actividades o situaciones reales, proponer el reto de buscar un método más óptimo para hacer lo mismo y hacer el método formal y natural en paralelo para acabar dejando el método manipulativo-natural al lado y proceder de manera formal, dejando el material manipulativo o la situación real para recordar el camino al formalismo. En la siguiente imagen se muestra como sería el paso intermedio, los alumnos han estado resolviendo situaciones de balanzas o similares con el material simplemente, cuando se amplía el número de elementos el material empieza a ser incómodo así que se propone una solución mejor, una manera de expresar los elementos de la balanza de manera general y se trabaja con las dos situaciones de manera paralela como se ve en la imagen:




En el siguiente paso sería eliminar la balanza y hacer ecuaciones sin el material, si alguna situación no está clara se volvería a recurrir al material.

**Experiencia de aula.**

La actividad que quiero compartir se ha realizado este curso 2016-2017 con un grupo de 9 alumnos de tercero de ESO de la Escola Pia de Sarrià-Calassanç de Barcelona que tienen


ISBN 978-84-945722-3-4

especial dificultad en el aprendizaje de las matemáticas y sobre todo en comprender la abstracción que conlleva todo el bloque de álgebra.

El tema que se les quería explicar era las expresiones polinómicas y las operaciones entre polinomios básicas: suma, resta y multiplicación.

Este grupo ya había trabajado con álgebra en la resolución de ecuaciones de primer grado y la traducción a lenguaje algebraico de expresiones verbales. Durante el aprendizaje de estos temas se observó que trabajar con material manipulativo reducía la angustia de afrontar un tema nuevo, que se llegaba a la abstracción cuando el alumno comprendía bien el sentido real de lo que estaba haciendo y que en el momento que se olvidaba algún paso era más fácil conectar con el aprendizaje realizado en sesiones anteriores. La principal dificultad que se observó durante el trabajo con ecuaciones fue el paso a la expresión abstracta, con el objeto manipulativo (cajas de cerillas y fichas de parchís) acompañando al aprendizaje se entendía a la perfección, sin el objeto al lado la expresión: $2 \cdot x$ no quedaba claro que fuese $x + x$ y a la pregunta: "¿Cuántas x hay aquí: $2 \cdot x + 3 \cdot x$?" en la mayoría de las ocasiones la respuesta era "2" que son las que se observan, con el objeto manipulativo al lado la respuesta era "5".

**Material manipulativo utilizado para hacer ecuaciones de primer grado.**

**Reto propuesto: ¿cuántas fichas de parchís hay en las cajas de cerillas para que en los dos lados haya las mismas fichas?**

Ante esta situación era necesario disponer en el aula de un material que permitiese simbolizar los diferentes grados de un polinomio y que fuera suficientemente versátil para unirse como suma y como multiplicación o separarse como resta de manera natural. Para esto se pensó en policubos (cubos de 2cm de arista que se pueden encajar para hacer prismas de base cuadrada de diferentes alturas) y regletas (prismas de base cuadrada de diferentes alturas, son rígidos, no se

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

pueden separar en composiciones más pequeñas o unir en composiciones más grandes)

Para conseguir que mis alumnos comprendan el concepto de polinomio y las operaciones básicas entre polinomios se emplearon ocho sesiones de 50 minutos.

El objetivo de la primera sesión es que los alumnos creen su propio conocimiento sobre los polinomios y las operaciones de suma de polinomios y resta de polinomios. Para llevar a cabo la sesión se ha de preparar el aula con dos mesas centrales, una para los policubos y otra para las regletas, en las que se simbolizan como x, $x^2$, $x^3$, $x^4$ y $x^5$ los prismas de alturas uno, dos, tres, cuatro y cinco respectivamente. En estas mesas también se deja un polinomio escrito de manera algebraica y simbolizado con el material.

**Material de las mesas centrales**

También se prepararán cuatro espacios marcados con las letras: A, B, C y D en cada espacio hay cuatro papeles por el lado visible aparece la letra del espacio y por el lado oculto hay: en dos un polinomio escrito de manera algebraica y en los otros dos las operaciones con polinomios, en uno una suma y una resta de polinomios (los polinomios que se tienen que operar son los que están en las otras dos hojas) en el otro un producto de monomios. En los papeles de las operaciones se indica que no se puede descubrir hasta que se indique (la idea era primero revisar si la composición de los polinomios es correcta, si lo es ya se pueden hacer las operaciones)



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

**Espacios para cada uno de los grupos participantes.**

Una vez preparada el aula los alumnos, formando tres parejas y un grupo de tres, pasan al aula y se les asigna un espacio. Entonces se les indica que deben dar la vuelta a una de las hojas y hacer lo que pone: "Representa este polinomio: $P(x) = 4x^4 - 2x^3 + 3x - 1$" (cada grupo tenía dos polinomios diferentes en sus dos hojas que podían dar la vuelta) si no saben que hacer se les dice que pueden ir a mirar las mesas centrales.

Al principio los alumnos se ven sorprendidos y no saben que hacer, preguntan qué es lo que quiero que hagan pero la respuesta en todo es: "No sé, mira las instrucciones de las hojas de tu espacio y observa la información de las mesas centrales. Cuando creáis que habéis hecho correctamente la instrucción avisadme y lo valido para que paséis a la hoja que no se puede tocar…"

Ninguno de los grupos consiguió hacer la representación de los polinomios a la primera. De los cuatro grupos, uno consiguió representar los polinomios y hacer la suma y la reta bien, dos consiguieron hacer hasta la suma de polinomios pero no dieron con la tecla para hacer la resta y otro grupo fue incapaz de conseguir hacer las operaciones, acabaron consiguiendo representar los polinomios. Lo mejor de esta parte de la actividad fue como se ayudaban entre


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

ellos, una de las alumnas consiguió bastante rápido conectar la simbología y cuando consiguió representar los polinomios se le pedía que explicara porque era así y todos los compañeros se aprovecharon de las explicaciones y justificaciones que hacía ella.

En la segunda sesión nos pusimos toda la clase en una mesa para 10, entre el grupo donde estaba la alumna que lo había entendido más rápidamente y yo mismo revisamos toda la simbología y como se hacía la representación y las operaciones de suma y resta de polinomios, incluso el grupo que la sesión anterior estuvo muy perdido durante esta explicación se enteró de todo el procedimiento. Acabamos la sesión haciendo producto de monomios.

En la tercera sesión comenzamos a trabajar las operaciones de manera simbólica, primero se escriben los polinomios algebraicamente, a continuación se simbolizan usando el material manipulativo. Se hace la operación manipulativamente y se escribe el resultado algebraicamente. Cuando queda claro esta relación se hace mediante una tabla colocando solo los coeficientes de cada término y se comprueba con el material manipulativo.

En la cuarta sesión se puede introducir el producto de polinomios si está suficientemente consolidado el proceso de suma y resta. El producto se realiza directamente con la tabla sin recurrir a los policubos, ningún alumno lo usa ni para hacer el producto de monomios. En esta sesión ya hay algunos alumnos que han conectado con la parte abstracta y dejan de usar el material manipulativo, a pesar de esto lo tienen a su alcance para poder recordar alguna idea que no queda del todo clara.

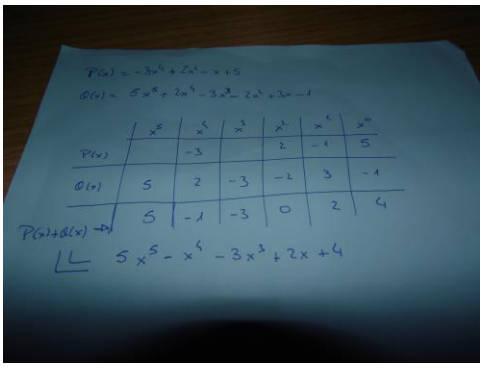


**Tabla para resolver operaciones polinómicas de manera abstracta.**

En las siguientes sesiones [illegible] e realizado cada alumno a su ritmo y con el material [illegible] vidualmente el trabajo que van haciendo y vamos co[illegible]minan la realización de las operaciones con la tabla se le se propone intentar hacer las operaciones en línea: $P(x) + R(x) = (3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4) + (-5x^3 + 2x^2 + x + 5) = 3x^4 – 7x^3 + 4x^2 + x + 1$.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En la novena sesión se realiza la prueba escrita, ninguno de los 9 alumnos del grupo utiliza el material manipulativo durante la prueba ni la operación en línea, todos usan las tablas. Los 9 alumnos aprobaron la prueba, a la semana de la actividad no recordaban casi nada de lo que se había trabajado pero cuando se hacía mención a los policubos se recordaban las metodologías y se podía volver a trabajar con estos conceptos sin problemas, esto se observó en la preparación de la prueba trimestral realizada unas semanas después y en los resultados obtenidos.

**A modo de conclusión.**

Llegar a la formalización y a la abstracción en los conceptos matemáticos es necesario ya que optimiza la utilización de las matemáticas y la mejor manera de hacerlo es haciendo una transición paulatina de una matemática cercana y natural a una matemática formal y abstracta, para hacer este camino ayudarnos de material manipulativo facilita el tránsito.
Esta propuesta de aprendizaje ha sido experimentada en una sola ocasión y con un grupo reducido, la compartición de esta práctica con los docentes asistentes al congreso tiene un objetivo claro, que se pueda llevar al aula y tener un feedback para mejorar la práctica y hacerla más potente y eficiente.

**Referencias bibliográficas**

Escuelapedia (2017). Historia del álgebra. http://www.escuelapedia.com/historia-del-algebra/ Consultado 23/05/2017

Wikipedia (2016). Álgebra. https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra Consultado 20/05/2017


ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.192

# Un proyecto de geometría en el contexto de las ciencias agrarias

Xinia Avendaño Cartín
xmavenda@earth.ac.cr
Universidad EARTH, Costa Rica

Núcleo temático: VI. Matemáticas y su integración con otras áreas.
Modalidad: Comunicación Breve.
Nivel educativo: secundario y terciario.
Palabras clave: Geometría, ciencias agrarias, proyecto.

**Resumen**
*El objetivo de esta comunicación es compartir la experiencia de un proyecto de clase, que a la vez permita reflexionar acerca de actividades que se pueden realizar, de manera integrada, entre temas de geometría y cursos de las ciencias agrarias.*
*En este caso, los estudiantes de primer año de la Universidad EARTH realizan un proyecto en el curso de Destrezas Básicas en Matemáticas, como parte de un módulo de Geometría, con el cual se pretende plasmar parte de las conexiones y aplicaciones que tiene la geometría en el contexto de las ciencias agronómicas y de ahí obtener aprendizaje significativo, mediante el mismo.*
*Parte de la logística consiste en que los estudiantes deben: formar equipos de trabajo, elegir un tema de los propuestos por la profesora, presentar un avance explicando cómo y qué van a plasmar en la maqueta, exponer al grupo dando los detalles técnicos-agronómicos, así como los conceptos, figuras y fórmulas geométricas involucradas. Tanto el avance, el diseño de la maqueta, como la exposición, tienen una valoración con diferentes rúbricas, por parte de la profesora y compañeros de clase, la cual será parte del puntaje final del módulo.*

Esta comunicación tiene como objetivo compartir la experiencia de un proyecto de clase y que a la vez sirva para reflexionar acerca de la importancia de realizar trabajos o proyectos que integren diferentes disciplinas, que permitan vincular los saberes de los estudiantes de niveles secundario o terciario; en este caso particular, el del pensamiento geométrico con otros cursos de las ciencias agronómicas de los estudiantes de primer año de la Universidad EARTH.

La Universidad EARTH, es una universidad internacional, ubicada en la provincia de Limón en el Caribe de Costa Rica, fundada hace 27 años. Se imparte una única carrera: Ingeniería



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Agronómica, la cual se desarrolla en 4 años, la población estudiantil está compuesta por aproximadamente 430 estudiantes de 41 países diferentes, incluyendo 13 países de África. La actividad aquí expuesta pertenece al curso de Destrezas Básicas en Matemáticas II, impartido en el segundo trimestre a los cuatro grupos de primer año. Los estudiantes realizan un proyecto como parte del módulo de Geometría (plana y espacial), en el cual se pretende plasmar algunas de las conexiones y aplicaciones que tiene la geometría en el contexto de las ciencias agronómicas y de ahí obtener experiencias de aprendizaje mediante el mismo. Lo cual es muy congruente con el modelo educativo, de dicha universidad, de aprender haciendo. Este proyecto tiene como propósito principal que el estudiante pueda reconocer y destacar la geometría que hay en algunas de las áreas técnicas de las ciencias agrarias, como pueden ser en: cultivos, pecuaria, forestales o maquinaria, entre otras; ya sea estudiando las figuras geométricas que están en el modo de sembrar determinado cultivo, la forma que tienen algunas copas de árboles semejantes a cuerpos geométricos y la sombra que proyectan, la capacidad de las maquinarias de secado de granos , el volumen de almacenamiento y forma de los silos, las diferentes maneras de calcular la cantidad de madera aprovechable según la madera aserrada. Básicamente, la idea con este proyecto es utilizar al máximo la geometría implícita en los arreglos espaciales de siembra o en las infraestructuras de la producción agropecuaria, para que el estudiante de agronomía pueda evidenciar, reconocer y estudiar geometría de una manera más activa y en relación con otras disciplinas de su área técnica.

A continuación la logística que indica la profesora para la elaboración del proyecto:

1. Formar grupos de 3 estudiantes.
2. Cada grupo elige un tema de los 8 sugeridos por la docente (anexo 1) o proponen uno nuevo.
3. Cada grupo envía por correo electrónico, a la docente, un avance de lo que representarán en la maqueta, que se entrega en semana 13, siguiendo los requisitos abajo anotados.
4. Devolución del avance con la corrección y retroalimentación de la profesora.
5. Exposición de la maqueta a todo el grupo de compañeros y evaluación según rúbrica (anexo2), en semana 15.

El avance debe tener los siguientes requisitos:


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- Encabezado: nombre de los integrantes, tema, trimestre, año.
- Razones técnicas agronómicas para el diseño del producto:

  Un ejemplo: “Los pequeños productores requieren un uso muy eficiente del terreno; el sistema de siembra más recomendable para ellos es el de tresbolillo o pata de gallo. En grandes plantaciones donde se usa maquinaria agrícola, el sistema más adecuado es el rectangular.” (MAG, 2002)
- ¿Cómo se realizará el producto? : Se representará un sistema de 3 bolillos y otro rectangular.
- Diseño e información técnica: siguiendo el ejemplo anterior: “El tres-bolillo consiste en distribuir el plantío de modo …”
- Materiales que se utilizarán en la construcción de la maqueta: estereofón (poliestireno expandido), palillos de dientes, plastilina, papel crepé, acuarelas, pinceles, pegamento, otros.
- Referencias bibliográficas.

Cada punto anterior tiene valor para la evaluación sumativa del curso y de una prueba parcial del módulo correspondiente.

**Referencias bibliográficas**

Ministerio de Agricultura y Ganadería MAG (2002). Guía para el cultivo de mango. http://www.mag.go.cr/bibioteca_virtual_ciencia/tec-mango.pdf / Consultado 18/07/2016

## Anexos

### Anexo 1

Temas a escoger para la maqueta:

1. Geometría aplicada a estudiar la arquitectura de diferentes especies de árboles forestales.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

2. Geometría y cálculo de volumen de madera aserrada.
3. Geometría y equipo-maquinaria agrícola.
4. Geometría e infraestructura para almacenamiento de granos.
5. Geometría e infraestructura para producción pecuaria.
6. Geometría y la relación sombra-producción de cultivos perennes (cacao, café) en sistemas agroforestales.
7. Geometría y arreglos espaciales de siembra de los cultivos frutales.
8. Geometría e infraestructura para el procesamiento post-cosecha del café.


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

**Anexo 2**

Rúbrica para evaluar la maqueta
Nombre del evaluador: ____
Tema de la maqueta:___

| Criterios. | Sí | No |
|---|---|---|
| El grupo estuvo preparado a tiempo para la presentación. | | |
| La calidad del trabajo de la maqueta :<br>• Estéticamente la construcción es de calidad. | | |
| • Está etiquetada con el tema | | |
| • Tiene el nombre de los integrantes. | | |
| • Tiene la escala utilizada (opcional). | | |
| La presentación está completa según lo solicitado: | | |
| •Explicación clara y coherente de lo que representa la maqueta. | | |
| •Figuras geométricas usadas correctamente. | | |
| •Figuras geométricas nombradas correctamente. | | |
| •Fórmulas usadas correctamente | | |
| El uso del tiempo se ajustó al asignado (15 minutos). | | |


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-1.196

# MATH IS IN THE AIR

David Ballesteros Álvarez – Nerea Casas Bernas- Egoitz Etxeandia Romero
david@ceoaberto.com – mathmysterybox@gmail.com- etxeandiaromero@gmail.com
ADCIM: Asociación para la divulgación de la ciencia y matemática- España

Núcleo temático: Divulgación
Modalidad: CB
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: Charla, espectáculo, matemáticas, divulgación,

**Resumen**

*Las matemáticas están presentes en todos los aspectos de nuestra vida, ¿pero somos conscientes de ello?*

*La propuesta es una charla innovadora, que de forma amena y divertida, permita acercar las matemáticas de una manera visual y atractiva a estudiantes y público general.*

*Para alcanzar este objetivo, se ha diseñado la charla combinando dos tipos de contenidos. Por un lado, referencias históricas sobre la evolución de las matemáticas desde sus orígenes como una mera herramienta para contar hasta la complejidad actual, que las hace imprescindibles para el desarrollo del conocimiento científico y para el avance de la sociedad. La otra vertiente de la charla se centra en ofrecer una visión de las matemáticas ligada a nuestra vida cotidiana partiendo de correlaciones llamativas con nuestras vivencias cotidianas.*

*Así, se tratan temas como los vínculos de las matemáticas con nuestra percepción de la belleza, el uso de la estadística para ganar en los juegos de azar, su importancia en la búsqueda del amor o cómo la presencia de patrones matemáticos en la música pop.*

*Nuestra intención es despertar en los asistentes la curiosidad por las matemáticas, mostrando su cara más desconocida, descubriendo los fascinantes aspectos que oculta esta maravillosa rama del conocimiento.*

## Introducción

Tradicionalmente, las matemáticas han sido percibidas por la población general como una temática árida y compleja. A medida que los cursos avanzan, éstas van alejándose progresivamente de su uso en la vida cotidiana (exceptuando la aritmética). Además, la comprensión de las matemáticas requiere un poco de esfuerzo, pero sobre todo, un alto nivel de abstracción.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Se trata de un hecho grave que la sociedad en general tenga una visión tan negativa de las matemáticas- o del estudio de éstas- ya que de forma directa o indirecta este sentimiento se traslada a los niños y a los adolescentes provocando un "efecto Pigmalión" de carácter negativo que en ocasiones va acompañado de la frase "las matemáticas sólo valen para aprobar los exámenes".

El conocimiento de las matemáticas es indispensable para el aprendizaje de todas las materias del ámbito científico (ciencias puras, ingenierías, arquitectura, medicina, etc.), y del ámbito de las ciencias sociales (sociología, economía, etc.). Incluso las disciplinas de los ámbitos conocidos como de "letras" (psicología, historia, etc.) también necesitan de las matemáticas.

A medida que las diferentes asignaturas van apareciendo en el currículum de los alumnos, éstos comienzan a forjar opiniones sobre ellas. En el caso de las matemáticas, se trata de una asignatura que ya desde Educación Infantil se encuentra presente entre las materias y competencias a trabajar en el aula. Es pues en este momento en el que comienzan a desarrollarse opiniones y actitudes hacia la asignatura incorporando en éstas mismas su propia experiencia -breve al comienzo- y todo aquello que sienten y escuchan, adoptando como propio, de sus referentes: padres, madres, hermanos, docentes, compañeros… como sugieren Bell, Costello y Küchermann (1988).

Por todo ello, hay un consenso general en que se hacen necesarias acciones divulgativas para todo tipo de públicos. Xuxo Ruiz (2013) afirma que "...Nosotros les pedimos a los niños que no se distraigan en nuestras clases, pero en la vida real están hiperestimulados e hipnotizados... la cultura de la satisfacción inmediata". Y esto podemos conseguirlo con una charla, tanto para estudiantes como para población general.

En el presente artículo abordamos el modo en que comunicamos las matemáticas tradicionalmente y el enfoque que consideramos más adecuado y que se deriva de nuestras experiencias como comunicadores-divulgadores del ámbito científico matemático. Para ello, vamos a partir de la situación real que nos lleva a plantearnos cómo enfocar una charla de matemáticas.

## ¿Por qué una charla de matemáticas?


ISBN 978-84-945722-3-4

Cuando pensamos en una charla, solemos generar en nuestra mente la idea de un evento de cierta seriedad, en la que un ponente docto en una materia expone sus conocimientos a un público deseoso de aprender. Por suerte o por desgracia, esta visión hasta cierto punto idealizada no es lo habitual.

Nuestra visión es que una charla debe tener un enfoque similar al de un espectáculo. No debe precisar de un público especialmente predispuesto a aprender, sino estar diseñada como una actividad que resulte atractiva desde el principio con un discurso y una estructura narrativa diseñados con esmero.

Tenemos que crear un producto atractivo para el gran público, que descubra a medida que avanza la charla que la propuesta está llena de contenidos apasionantes. En este caso que puedan descubrir la belleza intrínseca de las matemáticas al igual que el hecho de que las éstas están totalmente integradas en su vida diaria.

**Diseñando una charla: metodología y estructura.**

No existe una receta mágica para el diseño de una charla matemática. Pero sí es posible establecer una metodología para el diseño de una actividad potencialmente atractiva. Para ello se han de tener en cuenta los siguientes factores:

- ¿Tiene experiencia en comunicación el ponente? Aunque aporta un cierto bagaje, no es lo mismo impartir una clase que dar una charla. Tenemos que ser conscientes de nuestras capacidades y limitaciones. Por ejemplo, no deberíamos pretender presentarnos antes 300 personas si nunca hemos estado ante un auditorio de 100.
- ¿Qué queremos explicar? Debemos tener clara desde el principio la finalidad de nuestra ponencia. No se trata de aglutinar un conjunto de elementos, debemos diseñar una narrativa que nos lleve a comunicar lo que queremos.
- ¿Cuál es nuestro público objetivo? Debemos adaptar la charla al auditorio. No podemos pretender que suceda lo contrario.
- ¿Nuestros gustos son importantes? En ocasiones, queremos introducir a cualquier precio elementos que nos parecen de gran atractivo pero que posiblemente no lo sean para personas sin un conocimiento profundo del tema.


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- ¿Pensamos incorporar elementos audiovisuales? A menudo, infravaloramos la importancia del uso de músicas, cortes de películas, sonidos o presentaciones bien diseñadas para el resultado final de una ponencia. Todos hemos asistido a actividades en las que el relator utilizaba una presentación mal diseñada o carente de un enfoque adecuado.
- ¿Me gusta mi ponencia? Parece una pregunta retórica, pero debemos sentirnos identificados con lo que pretendemos comunicar. No podemos pretender captar la atención del público si nosotros mismos no disfrutamos en el momento de comunicar.

Una vez valorados todos estos elementos, debemos pasar a estructurar. En nuestra opinión, es fundamental cumplir unas premisas iniciales:

- Empezar con un elemento o explicación impactante y que nos permita captar la atención del público desde el primer momento.
- Ninguna explicación debe alargarse más allá de los 7-8 minutos.
- En lo posible, debemos interaccionar con el público. Sea solicitando voluntarios sea lanzando preguntas.
- Incorporar elementos audiovisuales. Debemos buscar un equilibrio entre las explicaciones del ponente y los contenidos digitales. Es un error tanto su uso excesivo como su no incorporación. Dichos elementos cobran gran fuerza si incluyen guiños hacia los asistentes. Si conocemos de forma anticipada la edad y perfil de este podemos, por ejemplo, utilizar películas o canciones que les alcancen emocionalmente (no es lo mismo utilizar Frozen con adultos que con niños que han crecido con sus canciones)
- Finalizar con un elemento de gran fuerza.
- La ponencia no debe superar los 50 minutos.
- No olvidar nunca que somos gente de Ciencia y que queremos compartir nuestros conocimientos. Es importante hacer sentir al público que son una parte importante y no meros receptores inertes de nuestra sapiencia.

**Un ejemplo de charla: Math is in the air**

La charla que presentamos a continuación fue diseñada para la feria científica Galiciencia, auspiciada por el Parque Tecnológico de Galicia y que cuenta con el apoyo de la Xunta de


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Galicia y la Fundación Española para la Ciencia y Tecnología (FECYT). Todo su diseño partió de la idea de buscar un enfoque diferente, que resultara atractivo para un público adolescente -por lo general poco interesado en el mundo de las matemáticas- y que asiste como parte de una visita a la feria de ciencias. La finalidad última era transmitir nuestra pasión por las matemáticas.

Partimos de un esquema muy abierto, que nos permitiera presentar aspectos llamativos del mundo de las matemáticas sin renunciar al rigor y a la inclusión de contenidos curriculares.

A grandes rasgos, la charla ofrece los siguientes contenidos.

En la primera parte de la charla, la explicación se centra en la aritmética y los números, planteándonos reflexiones sobre por qué contamos de una determinada manera. Como elementos impactantes hablamos sobre el número 13 y el 666 como ejemplos de números con cargas mágicas o incluso diabólicas (sic).

El siguiente tema abordado es la necesidad de las matemáticas y su evolución para el avance de las restantes disciplinas científicas. Aquí se incluye un fragmento de la película Contact en la que Jodie Foster recibe señales extraterrestres codificadas a base de números primos.

Para estimular la participación del público, se le reta a doblar el máximo de veces un folio (previamente repartido en los asientos). Posteriormente, se repite con un papel de grandes dimensiones que va de un extremo a otro de la sala.

A continuación, nos adentramos en el aparentemente aburrido mundo de la estadística y la probabilidad. Para darle un enfoque rompedor, se habla de estudios que plantean correlaciones entre nuestras relaciones sentimentales y su éxito partiendo de modelos matemáticos. También se proyecta un fragmento de la película “The Pelayos” basada en una historia real que muestra cómo la estadística puede permitirnos hacer saltar la banca de un casino sin trampas de juego. Para cerrar esta parte, se hace participar a un espectador en un “programa de televisión” en el que debe de elegir una caja y se le da la opción de cambiar de opinión simulando y explicando de esta forma la paradoja de Monty Hall.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Entrando en el tramo final de la charla, nos centramos en la relación entre belleza y matemáticas. Así, entre una explicación y otra cantamos a coro con el público un fragmento de un video de Frozen y comprobamos la belleza de voluntarios buscando simetrías áureas en su cuerpo.

Como elemento final, abordamos la relación entre música y matemáticas, escuchando fragmentos de canciones que repiten "intervalos musicales que están de moda". Y el gran final de fiesta -o charla si se prefiere- es observar la forma de onda de diferentes melodías utilizando un tubo de Rubens. Así, entre llamas con geometrías sinusoidales damos por terminada la charla.

Siempre, una vez acabada, ofrecemos al público subir a charlar con nosotros o ver de cerca los materiales utilizados. Es algo simple y muy efectivo que siempre genera un extraordinario feedback. Nos permite romper la distancia escenario-patio de butacas que siempre se genera.

**Percepción del público- percepción del ponente**

El público de la charla se puede subdividir en tres segmentos: estudiantes, profesores y público general ya que es el perfil del espectador el que condiciona la percepción de la misma. Otro aspecto importante a tener en cuenta es la actitud y edad del ponente (suele detectarse una mayor conexión con el grupo más próximo en edad, que tiene los mismos referentes culturales).

Alumnos y profesores (especialmente los del ámbito científico) esperan un tipo de actividad concreta, mientras que los visitantes, que podemos llamar "generales", normalmente esperan no aburrirse durante la charla, y con suerte, aprender alguna cosa.

Para mantener la atención y conseguir el disfrute de todos los grupos de espectadores, se incorporan guiños específicos.

Estudiantes: A veces están acostumbrados a asistir a charlas en las que se aburren porque el target no eran ellos. Es por eso que puede ser que se esperen "un rollo" más. Por ello, desde el principio incorporamos elementos específicos que nos permitan captar su interés.


ISBN 978-84-945722-3-4

- Guiños a su generación (referencias a películas, canciones, etc...)
- Curiosidades. Es un elemento de enganche para todo tipo de públicos.
- Humor.

Profesores. Suelen ser los espectadores más predispuestos. Son conscientes de la necesidad de actividades inspiradores y de fomento de las vocaciones para sus alumnos. Valoran positivamente.

- Que la charla integre contenidos curriculares y recursos utilizables en el aula.
- Que despierte el interés en sus alumnos.
- Experiencias prácticas en las que participe el mayor número posible de espectadores.

De forma común, se favorece la atención y el interés de los espectadores con algunos elementos de fácil aplicación.

- Sentido escénico. Bajo este término nos referimos a plantear la actividad como un espectáculo. Desde el momento en que se accede a la sala todo debe ser pensado para despertar el interés. No podemos tener como imagen inicial una mesa con un ordenador y un ponente sentado y con expresión seria. En los primeros 10 segundos, los asistentes toman decisiones inconscientes que van a determinar su actitud y predisposición durante el resto de la actividad tal como dicen Siong, Brass, Heinze y Haynes (2008).
- Habilidades comunicativas del ponente. Todo es entrenable, y la forma de comunicar también. Es fundamental que el relator de la charla transmita entusiasmo y disponga de las herramientas necesarias para la correcta gestión de la actividad.

**Conclusiones**

Tal como recogen diversos informes (Estudio sobre las vocaciones científicas de FECYT & La Caixa), es fundamental la incorporación al proceso educativo de actividades que complementen la formación reglada. Del mismo modo, la percepción de la Ciencia en la sociedad sigue teniendo poco impacto y se hace necesario aproximarla a la población general (VII Encuesta de Percepción Social de la Ciencia, de FECYT, 2016).


ISBN 978-84-945722-3-4

Las charlas son una de los caminos más interesantes para fomentar el interés por la Ciencia, pero requieren una adaptación en su enfoque a los intereses del público y un esfuerzo por parte de los ponentes en dicho proceso.

Con todo, es posible establecer unas pautas comunes en el diseño de las charlas y actividades de forma que "garanticen" hasta cierto punto un impacto positivo en los asistentes.

Siempre quedará un margen difícil de cuantificar que no podremos controlar. Perfil sociológico del público, estado ánimo del ponente, público con perfiles muy diversos, etc..Pero en líneas generales, es posible tener un diseño que nos permita contar con ciertas garantías de éxito en nuestra comunicación.

Los datos que nos permiten avalar nuestra metodología proceden de la Fundación Barrié. Dentro de su proyecto de fomento de las vocaciones científicas, hemos impartido más de cincuenta charlas con una media de espectadores superior a cien personas. Tras ellas, todo el profesorado y parte del alumnado debe cumplimentar unas encuestas de valoración. En ellas, nuestras ponencias reciben una valoración media superior a 4,5 sobre 5, lo que nos sitúa como una de las actividades con mayor aceptación entre profesorado y alumnos.

**Referencias bibliográficas**

Batanero.C, Fernades. J.A., Contreras, J.M., (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *Suma*. 62, 11-18.

Bell, A.W., J. Costello & D. Küchmann. (1988). *Attitudes, Research on Learning and Teaching*. Oxford.

Contact. (1997). Robert Zemeckis. Warner Bros Pictures.

Frozen. (2013). Chris Buck y Jennifer Lee. Walt Disney Animation Studios. Walt Disney Pictures.

Livio, M. (2002). *La proporción áurea*. Booket.


ISBN 978-84-945722-3-4

Obra Social La Caixa, FECYT y Everis. (2015) ¿Cómo podemos estimular una mente científica?. Estudio sobre vocaciones científicas. Recuperado de: https://obrasociallacaixa.org/documents/10280/614053/estudio_sobre_vocaciones_cientificas_es.pdf/0c480d37-c16d-439f-8d75-85611ed1848c

Ruiz,X. (2013). *Educando con Magia*. Narcea ediciones.

Siong,C., Brass, M., Heinze, H.J. & Hayness, J.D. (2008). Unconscious determinants of free decisions in the human brain. *Nature neuroscience.*11, 543-545.

The Pelayos (2012). Eduard Cortés.Alea Docs Films. Bausan Films.


ISBN 978-84-945722-3-4