MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

PROBLEMAS ABIERTOS EN SERIES DE FOURIER DE JACOBI-SOBOLEV

FRANCISCO MARCELLÁN, BORIS P. OSILENKER Y IGNACIO A. ROCHA

En homenaje al Profesor José Javier Guadalupe Hernández, «Chicho»

ABSTRACT. In this paper we deal with several problems concerning estimates of polynomials orthogonal with respect to Sobolev inner products. These problems have been motivated by some previous work by J. J. Guadalupe et al. when the standard orthogonality using measures with mass points is considered in the study of Fourier expansions in terms of orthogonal polynomials.

1. Introducción

A lo largo de estos últimos años, aproximadamente desde mediados los años 80, los polinomios ortogonales en espacios de Sobolev son objeto de considerable atención por un amplio número de investigadores. Una motivación para este estudio se puede encontrar en el trabajo de D. C. Lewis ([14]) en el que se aborda el problema de la aproximación por mínimos cuadrados con polinomios cuando se exigen algunas condiciones extra de suavidad; es decir, se pretende aproximar una función y, simultáneamente, algunas de sus derivadas a través de aproximantes polinómicos y de las derivadas de estos aproximantes. Cabe esperar que la proyección ortogonal en el espacio usual L^2 carezca de las propiedades deseables para que se satisfagan tales condiciones. Así pues, el problema conduce de forma natural a la consideración de productos escalares de la forma

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,d\mu(x) + \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x)g^{(k)}(x)\,d\mu_k(x)$$

y al estudio de las propiedades de los polinomios ortogonales asociados a dichos productos escalares. Es de suponer que las proyecciones en el correspondiente espacio de Sobolev se comporten de manera adecuada.

Por otra parte, la aplicación de las técnicas de aproximación polinómica en el tratamiento numérico de las ecuaciones en derivadas parciales, específicamente de ecuaciones de tipo elíptico o parabólico, están basadas en discretizaciones mediante

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42C05.

Key words and phrases. Sobolev type orthogonal polynomials, Fourier series, Fourier projectors, estimates.

El trabajo de F. Marcellán ha sido financiado por la Dirección General de Investigación (Ministerio de Ciencia y Tecnología) de España, BFM2000-0206-C04-01, así como por el proyecto INTAS 2000-272.

métodos espectrales. Estos métodos dependen de las propiedades de los operadores de Fourier y las normas naturales que aparecen son las de los espacios de Sobolev. Se requieren entonces resultados de aproximación en este tipo de normas para el análisis numérico de las discretizaciones espectrales tipo Galerkin. Los casos particulares de Legendre y Chebyshev se pueden ver en [6].

Pensando estrictamente en términos de polinomios, se plantean diversos problemas de interés. ¿Se conservan las propiedades analíticas de los polinomios ortogonales con respecto a productos escalares estándar, esto es, productos escalares en que no están involucradas derivadas? ¿Qué ocurre con las propiedades algebraicas de los nuevos polinomios? ¿Existe una teoría de operadores en espacios de Hilbert que discurra paralelamente al estudio de los polinomios ortogonales como en el caso estándar? ¿Qué tipo de aproximantes de Padé aparecen relacionados con estos polinomios?, ¿cómo se comportan? ...

Así pues, el interés del tratamiento de los polinomios ortogonales en espacios de Sobolev responde a diversos motivos, entre ellos:

(a) Comparación con la teoría estándar de los polinomios ortogonales.
(b) Teoría espectral de ecuaciones diferenciales ordinarias.
(c) Análisis de los métodos espectrales en el tratamiento numérico de problemas de contorno para ecuaciones en derivadas parciales.
(d) Búsqueda de algoritmos para computación de series de Fourier-Sobolev en términos de polinomios ortogonales de Sobolev cuando las normas consideradas atañen a la función y a algunas de sus derivadas.

A pesar de los esfuerzos realizados, la mayor parte de los progresos alcanzados se incluyen en la consideración de algunos tipos especiales de estos productos escalares. Específicamente, el llamado producto tipo Sobolev

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,d\mu(x) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=0}^{N_k} M_{k,i} f^{(i)}(a_k)g^{(i)}(a_k), \tag{1}$$

donde $a_k \in \mathbb{R}$, $M_{k,i} \geq 0$ y, finalmente, $K, N_k \in \mathbb{Z}^+$, es en el que se han producido más avances.

Desde el punto de vista de las propiedades algebraicas: relaciones de recurrencia, localización de ceros, fórmulas diferenciales... puede decirse que la tarea está prácticamente completada. El trabajo [2] contienen una buena parte de estos resultados y una primera síntesis del tema la constituye [16].

Por lo que se refiere a las propiedades asintóticas y al estudio analítico de estos polinomios, en [15] y [19] se determina su asintótica relativa cuando μ tiene soporte compacto y se encuentra en la clase de Nevai. En el primero de ellos, [15], se obtiene también la relación existente entre los polinomios de Sobolev y las perturbaciones racionales de la transformada de Cauchy de la medida μ desde la óptica de los aproximantes de Padé, y se estudia además la asintótica cuando el producto considerado no es en general simétrico puesto que contiene la evaluación en puntos del plano complejo de un operador diferencial lineal con coeficientes constantes actuando sobre una de las funciones,

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,d\mu(x) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=0}^{N_k} f^{(i)}(a_k)L_{k,i}(g;a_k).$$

Las propiedades asintóticas en estos trabajos se refieren siempre al comportamiento de los polinomios en el complemento del soporte de la medida de ortogonalidad y de los puntos exteriores en donde intervienen las derivadas de las funciones.

Referente al caso general, la asintótica es conocida cuando la segunda medida que interviene está soportada en el mismo compacto que la primera. Este problema está resuelto en [20], pero se desconoce el comportamiento de los polinomios cuando los soportes no se solapan o incluso cuando existe solapamiento pero sin relación de inclusión entre los diferentes soportes. Las dificultades de su tratamiento derivan de la no existencia de relaciones algebraicas entre los polinomios como ocurre en el producto (1).

2. Series de Fourier

2.1. Medidas de soporte compacto. En el ámbito de las series de Fourier-Sobolev, en el que se pretende situar este trabajo, son todavía pocos los resultados conocidos. Tomando como referencia lo que ocurre en el caso clásico, en [17] y [18] se estudia su comportamiento cuando el producto considerado es (1) con los puntos a_k reales y exteriores al soporte de μ siendo ésta la medida de Jacobi. Se prueba que si $(\widehat{B}_k(x))_{k=0}^{\infty}$ es la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a este producto, esto es,

$$\langle \widehat{B}_n(x), \widehat{B}_k(x)\rangle = \delta_{n,k}, \quad k, n = 0, 1, \dots,$$

entonces

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\langle f, \widehat{B}_n\rangle \widehat{B}_n(x) = f(x), \quad x \in (-1,1),$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}\langle f, \widehat{B}_n\rangle \widehat{B}_n^{(i)}(a_k) = f^{(i)}(a_k), \quad i = 0,\dots,N_k,\ k = 1,\dots,K,$

cuando la función $f(x)$ satisface condiciones estándar. Para alcanzar estas conclusiones, son necesarias estimaciones de los $\widehat{B}_n(x)$ en el intervalo de ortogonalidad y de los polinomios y sus derivadas en los puntos a_k. Por comparación con los polinomios de Jacobi, en el intervalo $(-1,1)$ se encuentra, salvo una constante, la misma acotación que satisfacen éstos,

$$|\widehat{B}_n(x)| \le \frac{C}{(1-x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\,(1+x)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}}, \quad x \in (-1,1),$$

para alguna constante C. Referente a las derivadas en a_k, el resultado es que

$$|\widehat{B}_n^{(i)}(a_k)| \le C\frac{n^{N_k-i}}{|a_k+\sqrt{a_k^2-1}|^n}, \quad i = 0,\dots,N_k,\ k = 1,\dots,K.$$

Esta última estimación es válida no sólo en el caso de la medida de Jacobi sino para cualquier medida que esté en la clase de Szegő.

El papel que juega el hecho de que los puntos a_k sean exteriores a $[-1,1]$ es central, puesto que se utiliza la continuidad en dicho intervalo de la función $\frac{1}{w_N(x)}$, donde $w_N(x)$ es el polinomio cuyos ceros son los puntos a_k con multiplicidad N_k+1 y $N =$

$\sum_{k=1}^{K}(N_k+1)$ es su grado. De hecho, bajo estas condiciones, se ve que el espacio de Sobolev correspondiente se comporta como el producto cartesiano de $L^2(\mu)$ con $\mathbb{R}^N$, lo que hace las cosas especialmente sencillas. Trasladar los a_k al intervalo $[-1,1]$ va a complicarlas inevitablemente. Desde luego, las técnicas utilizadas en estos trabajos se invalidan para el nuevo caso.

En [9] se han estudiado estimaciones de polinomios ortogonales relativos a perturbaciones de pesos generalizados de Jacobi w, esto es,

$$w(x) = h(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\prod_{i=1}^{N}|x-t_i|^{\gamma_i}, \quad x \in [-1,1],$$

donde

(a) $\alpha,\ \beta,\ \gamma_i > -1, \quad t_i \in (-1,1),\ t_i \neq t_j,\ i \neq j;$
(b) h es una función continua y positiva en $[-1,1]$ y $w(h,\delta)\delta^{-1} \in L^1(0,2)$, siendo $w(h,\delta)$ el módulo de continuidad de h.

Dichas perturbaciones consisten en la adición de puntos de masa en $\{\pm 1\} \cup \{t_i\}_{i=1}^{N}$. Esencialmente, se prueba que las estimaciones —cotas superiores en $[-1,1]$— son del mismo orden que las correspondientes a los polinomios ortogonales respecto al peso generalizado de Jacobi w. Así pues, una cuestión natural es el estudio de dichas estimaciones para polinomios ortogonales respecto a productos escalares tipo Sobolev (1) cuando los $(a_k)_{k=1}^{K}$ pertenecen al intervalo $(-1,1)$ y la medida μ es absolutamente continua con $d\mu(x) = w(x)\,dx$.

Problema 1. Un primer paso consistiría en el estudio del peso de Jacobi propiamente dicho en la línea desarrollada en [17] y [18], aunque las fórmulas de Christoffel-Darboux presentan singularidades en los puntos de masa.

Problema 2. En un segundo paso se abordaría la presencia de masas en los puntos ± 1. De esta forma, y utilizando la información de [3], se podrían estudiar problemas de frontera para operadores diferenciales de cuarto orden mediante técnicas de tipo Galerkin. El enfoque de los métodos de colocación para dichos problemas requiere extensiones de la fórmula de cuadratura de Gauss-Lobatto (véase [6], capítulo 5), que se podrían enfocar de modo alternativo utilizando la ortogonalidad respecto a un funcional en los términos desarrollados en [4].

Problema 3. Finalmente, un objetivo más genérico consistiría en extender las estimaciones de [9] cuando se trabaja con productos tipo Sobolev (1) para pesos generalizados de Jacobi.

El interés de dichas estimaciones radica en su aplicación al análisis de la convergencia de las sumas parciales de Fourier-Sobolev de los polinomios ortogonales asociados al producto escalar (1).

Cuestiones relativas a la convergencia uniforme y en media surgen de manera natural y una relectura de los resultados de [10] en este contexto sería de gran interés, tanto teórico como desde la perspectiva de las aplicaciones en los métodos espectrales anteriormente señalados.

2.2. Medidas de soporte no acotado. En el caso de medidas soportadas en intervalos no acotados, los dos modelos canónicos corresponden a los pesos de Laguerre y Hermite. Ambos se pueden subsumir en los denominados pesos de Freud.

El caso tipo Laguerre-Sobolev cuando las masas están localizadas en $x = 0$ fue estudiado por R. Koekoek y H. G. Meijer en [12] desde una perspectiva algebraica, mientras que en [5] se aborda su tratamiento a través de un problema espectral.

Problema 4. Utilizando las conocidas estimaciones para los polinomios de Laguerre (véase [23], Teorema 7.6.4) parece natural abordar la obtención de estimaciones para los polinomios tipo Laguerre-Sobolev distinguiendo los casos en que la masa esté localizada en la frontera del soporte de la medida del caso en que la masa se sitúe en el semieje real positivo. Asimismo, las estimaciones para los núcleos correspondientes a dichos polinomios se pueden deducir de la extensión de la fórmula de Christoffel-Darboux al caso Sobolev.

Problema 5. El estudio de la convergencia en media de las series de Fourier respecto a los polinomios de Laguerre y Hermite fue tratado en [21] y [22]. En [10] se prueba que las perturbaciones de la medida de Laguerre basadas en la adición de una masa en $x = 0$ no altera la validez de los resultados de Muckenhoupt. Nuestro interés se centra en el tratamiento de series de Fourier para polinomios ortogonales respecto al producto escalar (1) cuando disponemos de un único punto de masa en $x = 0$ y μ es la medida de Laguerre o la de Hermite. La extensión al caso de la medida de Freud $d\mu(x) = |x|^{\alpha/2} \exp(-|x|^{\beta})\, dx$, con $\alpha > -1$ y $\beta > 0$ es, sin duda, un problema más ambicioso.

2.3. Producto escalar con dos medidas continuas. Cuando el producto escalar es de la forma

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\, d\mu_0(x) + \int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)\, d\mu_1(x) \tag{2}$$

donde μ_0 y μ_1 son medidas no discretas, se conocen resultados de tipo analítico si estas medidas no están alejadas de las medidas clásicas. Corresponden al denominado caso de par coherente introducido por Iserles et al. [11]. No obstante, un estudio detallado de estimaciones de los correspondientes polinomios ortogonales en la línea descrita para el caso estándar está pendiente de realización.

Si $\mu_0 = \mu_1$ es el peso de Jacobi y $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$ denota la sucesión de polinomios mónicos ortogonales respecto a (2) (que denominaremos de Jacobi-Sobolev), es bien conocido, [7], que existen sucesiones (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) tales que

$$Q_n(x)+a_nQ_{n-1}(x)+b_nQ_{n-2}(x) = P_n^{\alpha,\beta}(x)+c_nP_{n-1}^{\alpha,\beta}(x)+d_nP_{n-2}^{\alpha,\beta}(x), \quad n \geq 2, \tag{3}$$

donde $P_n^{\alpha,\beta}$ denota el enésimo polinomio de Jacobi. Teniendo en cuenta las conocidas estimaciones de los polinomios de Jacobi, parece natural abordar el siguiente

Problema 6. ¿Existen estimaciones para los polinomios (Q_n) y cuál es su orden de magnitud en relación con los $(P_n^{\alpha,\beta})$?

Dada la inexistencia de una fórmula de Christoffel-Darboux para los núcleos asociados a los (Q_n), las técnicas descritas para los productos (1) dejan de ser válidas en este caso.

Problema 7. Obtener estimaciones para los núcleos $L_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{Q}_k(x)\widehat{Q}_k(y)$ donde $(\widehat{Q}_k)$ denota la sucesión de polinomios ortonormales correspondientes a (Q_k).

El estudio de los coeficientes de Fourier en el caso de los polinomios de Legendre-Sobolev ha sido tratado en [11] y ha permitido una comparación entre los proyectores de Fourier de Legendre y Legendre-Sobolev. Un algoritmo para el caso Jacobi ha sido descrito en [13] y en él juega un papel central la relación (3).

Problema 8. Estudiar estimaciones para las sumas parciales enésimas de Fourier referidas a polinomios de Jacobi-Sobolev y analizar la acotación del operador de proyección de Fourier respecto a la norma de Jacobi-Sobolev.

Referencias

[1] M. Alfaro, F. Marcellán y M. L. Rezola, Estimates for Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials, *Appl. Anal.* **67** (1997), 157–174.

[2] M. Alfaro, F. Marcellán, M. L. Rezola y A. Ronveaux, On orthogonal polynomials of Sobolev type: algebraic properties and zeros, *SIAM J. Math. Anal.* **23** (1992), 737–757.

[3] J. Arvesú, R. Álvarez-Nodarse, F. Marcellán y K. Pan, Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials: Second order differential equation and zeros, *J. Comput. Appl. Math.* **90** (1998), 137–158.

[4] R. Álvarez-Nodarse, J. Arvesú y F. Marcellán, On a modification of the Jacobi linear functional: Asymptotic properties and zeros of orthogonal polynomials, *Acta Appl. Math.*, en prensa.

[5] H. Bavinck, J. Koekoek y R. Koekoek, On differential equations for Sobolev-type Laguerre polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), 347–393.

[6] C. Bernardi y Y. Maday, *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*, Mathématiques & Applications **10**, Springer-Verlag, París, 1992.

[7] M. G. de Bruin y H. G. Meijer, Zeros of orthogonal polynomials in a non-discrete Sobolev space, *Ann. Numer. Math.* **2** (1995), 233–246.

[8] A. Foulquié Moreno, F. Marcellán y B. P. Osilenker, Estimates for polynomials orthogonal with respect to some Gegenbauer-Sobolev type inner product, *J. Inequal. Appl.* **3** (1999), 401–419.

[9] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Asymptotic behaviour of orthogonal polynomials relative to measures with mass points, *Mathematika* **40** (1993), 331–344.

[10] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Weighted norm inequalities for polynomial expansions associated to some measure with mass points, *Constr. Approx.* **12** (1996), 341–360.

[11] A. Iserles, J. M. Sanz-Serna, P. E. Koch y S. P. Nørsett, Orthogonality and approximation in a Sobolev apace, en *Algorithms for approximation, II* (Shrivenham, 1988, J. C. Mason y M. G. Cox, eds.), Chapman and Hall, Londres (1990), 117–124.

[12] R. Koekoek y H. G. Meijer, A generalization of Laguerre polynomials, *SIAM J. Math. Anal.* **24** (1993), 768–782.

[13] K. H. Kwon, J. H. Lee y F. Marcellán, Generalized coherent pairs, *J. Math. Anal. Appl.* **253** (2001), 482–514.

[14] D. C. Lewis, Polynomial least square approximations, *Amer. J. Math.* **69** (1947), 273–278.

[15] G. López, F. Marcellán y W. Van Assche, Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a dicrete Sobolev inner product, *Constr. Approx.* **11** (1995), 107–137.

[16] F. Marcellán, M. Alfaro y M. L. Rezola, Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions, *J. Comput. Appl. Math.* **48** (1993), 113–132.

[17] F. Marcellán, B. Osilenker y I. A. Rocha, On Fourier series of Jacobi-Sobolev orthogonal polynomials, *J. Inequal. Appl.*, en prensa.

[18] F. Marcellán, B. Osilenker y I. A. Rocha, On Fourier series of a discrete Jacobi-Sobolev inner product, prepublicación.

[19] F. Marcellán y W. Van Assche, Relative asymptotics for orthogonal polynomials with a Sobolev inner product, *J. Approx. Theory* **72** (1992), 192–209.
[20] A. Martínez Finkelshtein, Bernstein-Szegő's theorem for Sobolev orthogonal polynomials, *Constr. Approx.* **16** (2000), 73–84.
[21] B. Muckhenhoupt, Mean convergence of Hermite and Laguerre series I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **147** (1970), 419–431.
[22] B. Muckhenhoupt, Mean convergence of Hermite and Laguerre series II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **147** (1970), 433–460.
[23] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4.ª edición, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.

Dpto. de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid, Calle Butarque 15, 28911 Leganés, Madrid, Spain
Correo electrónico: pacomarc@ing.uc3m.es

Department of Mathematics, Moscow State Civil Engineering University, Moscow, Russia
Correo electrónico: borosilr@dis.muh.ru

Dpto. de Matemática Aplicada, E.U.I.T. Telecomunicación, Universidad Politécnica de Madrid, Ctra. de Valencia Km. 7, 28031 Madrid, Spain
Correo electrónico: igalvar@euitt.upm.es