

LA SECCION AUREA EN LOS PLANOS DE LA ABADIA DE ALFARO, 1775

Juan F. Esteban L.

“Sección aurea” es el nombre que Leonardo da Vinci dio a la división de un segmento en “media y extrema razón”; él mismo ilustró el extenso tratado que sobre ello y todas sus propiedades escribió su amigo el fraile Luca Pacioli, en la misma corte de Milán pero publicado algo más tarde en Venecia 1509, con el título *De divina proportione*.

Este sistema proporcional lo encontramos en la geometría del pentágono regular y de su estrella el “pentagrama”, así como en la composición del cuerpo humano. Su conocimiento se remonta a la noche de los tiempos, de ello hizo Pitágoras una filosofía y una secta de poder político, destruida en Metaponto hacia el 450 a.J.C. Los conocimientos, secretos y ritos se transmitirán por los divulgadores matemáticos y por las corporaciones de constructores hasta la conocida masonería especulativa que se fundara en 1717 en la logia de Londres como nueva secta de poder político¹.

Conservamos un cuarteto medieval, en versiones alemana y francesa, que reza de la siguiente manera: “Un punto hay en el círculo que en el cuadrado y en el triángulo se coloca. ¿Conoces tu ese punto? ¡Todo saldrá bien! ¿No lo conoces? ¡Todo será en vano!”. Este cuarteto resume los pasos rituales que el aspirante a oficial debía realizar, y realizó en las logias masónicas, para construir la geometría del pentágono.

Ya en la Edad Media Leonardo de Pisa (1202) encontró una progresión matemática de números enteros que por aproximación puede sustituir como-

1. Sobre el tema de la sección aurea ver especialmente Matila G. Ghyka: *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*, Poseidón, Buenos Aires (1.^a ed. París 1927), y años después *El Número de Oro*, Poseidón, Buenos Aires, 1968. Un estado de la cuestión puede verse en P.H. SCHOFIELD. *Teoría de la proporción en la arquitectura*, Labor, Barcelona 1971. En ambos autores se citan trabajos meritorios, de los que queremos destacar por su especial utilidad los de J. HAMBRIDGE: *Dynamic Symmetry, The Greek Vase*, Yale Univ. Press 1918.
José A. FERRER BENIMELI: *La masonería española en el siglo XVIII*, Siglo XXI, Madrid 1974.

damente en agrimensura a la progresión de la sección aurea; en cuyo recuerdo se la conoce como serie de Fibonacci, y en el análisis matemático moderno también por serie de Lamé.

Desde la más remota antigüedad, en la arquitectura de élite, se han usado exquisitos sistemas proporcionales y refinadas correcciones ópticas, por ser ello base objetiva e intelectual de la estética; hasta tal punto que en la segunda mitad del siglo XVIII, y recogiendo palabras de tratadistas anteriores, se basa en ello la distinción del “arquitecto sublime del vulgar”².

No obstante esta ciencia del diseño no se ha transmitido por los tratados de arquitectura y en ellos solamente se dan sumarias explicaciones que no pasan de unas pocas indicaciones sobre la armonía musical aplicada a los espacios y la cita de la diagonal como medida armónica apropiada para las alturas³. Ello nos hace pensar en que era el verdadero secreto de la pericia de los afamados arquitectos, y no como se ha venido diciendo a raíz de Vitruvio que el sistema matemático o geométrico de proporciones era comunmente dominado por la clase de los arquitectos, o que se evita su explicación por incomprendible para el gran público, o que se había perdido en esta o cual época el conocimiento sobre estos sistemas. La realidad parece otra; los sistemas exquisitos y racionales en la buena arquitectura (aquella que ha respetado el juicio y transcurso de la historia) los podemos encontrar en todos los tiempos, unos genéricos otros virtuosos utilizados por muy pocos y todavía ocultos⁴.

Los estudiosos del siglo XIX se consideraron redescubridores de la “sección aurea”, que encontraron en la arquitectura, cerámica y ornamentación

2. Así lo hace Benito BAILS: *Elementos de Matemática, Tomo IX, Arquitectura civil*, Madrid, Joaquín Ibarra 1779-87; texto que fue de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando y así mismo obligatorio en otras muchas escuelas de matemáticas. Tomando palabras de Fr. LORENZO DE SAN NICOLAS (*Arte y uso de Arquitectura*, 1639, 3.^a ed. Madrid 1736) y otros tratadistas como Galiani, Vitruvio, Palladio, Vignola, Scamozzi da distintas observaciones para la buena arquitectura: conviene que sea de planta regular; cuando el solar sea irregular se buscará de tal modo que los ángulos no rectos queden ocultos o con una escalera no principal; hallar los sistemas proporcionales adecuados y las correcciones ópticas etc.
3. Para el tema de las proporciones en la arquitectura del Renacimiento ver R. WITTOKOWER: *La arquitectura en la edad del Humanismo*, Nueva Visión, Buenos Aires 1968; un repaso de la teoría posterior la hace el citado SCHOLFIELD. BAILS en su citado tratado nos trae también un resumen de los principales tratadistas en especial de Palladio, Lorenzo de San Nicolás y Blondel que recomiendan la $\sqrt{2}$ como media armónica y Scamozzi que recomienda la media aritmética; él mismo utiliza los cocientes armónicos musicales usados también por los anteriores.
4. Al descubrimiento de esta labor se dedicaron no pocos estudios desde el siglo XIX: H. WÖLFFLIN: *Zur Lehre von den Proportionen*, 1889. que siguió los pasos de Zeysin quien redescubrió a mediados de siglo la sección aurea en el Partenón. Ver los estudios de Cook, Hambridge, Caskey, Lund, Moessel y otros citados por Ghyka y Scholfield.

griega, por lo que Mark Barr la bautizo con la letra griega Φ (Fi) en homenaje a Fidias. Es así como en lo sucesivo la vamos a llamar⁵.

Los planos objeto de este estudio son los ya presentados en este mismo coloquio por A. Allo e I. Cerrillo, que se refieren al concurso previo a los planes definitivos del palacio abacial de Alfaro. Con toda posibilidad fueron hechos en 1775. Un conjunto de estos planos van firmados por el arquitecto "Pérez" que aunque no conozcamos su personalidad es sin duda educado en la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando, y descubre un plan esteticista y racional a ultranza donde "todo está ordenado conforme al número" y sometido a la simetría de dos ejes; en resumen elabora un plan utópico pero realizable. El otro conjunto viene firmado por (Juan Antonio) Oteyza, arquitecto local que también se ha educado en la misma Academia; su proyecto se ajusta más a las condiciones del terreno y al contacto directo con el abad, usa una disposición de simetría bilateral y repetición uniforme de un mismo motivo o unidad.

Para el análisis armónico de los planos vamos a seguir el siguiente orden: Planos de "Pérez", 1.-Bodegas. 2.-Corte por la línea media de las fachadas. 3.-Planta baja. 4.-Planta principal. 5.-Fachada principal. 6.-"Oteyza". Fachada principal. Los otros planos de Juan Antonio de Oteyza aunque importantes como antecedentes del edificio realizado, carecen de planteamientos armónicos definidos.

5. ϕ se construye partiendo de la diagonal de medio cuadrado lo que da $1/2 + \sqrt{5}/2 = 1 + \sqrt{5}/2$.
2.) Un rectángulo $1/\phi$ tiene unas propiedades asombrosas pues se descompone hasta el infinito en un cuadrado y otro rectángulo semejante dándonos una serie decreciente de ϕ . Se encuentra en la geometría del pentágono y estrella pentagonal que puede reconvertirse hasta el infinito en las mismas figuras dando una serie creciente $\phi, \phi^2, \phi^3...$ o viceversa $\phi, 1, 1/\phi, 1/\phi^2, 1/\phi^3...$ Es una progresión geométrica que une en sí misma la progresión aritmética ya que $\phi + 1 = \phi^2, \phi^2 - \phi = \phi^3$ etc. Esta razón irracional de ϕ es la de crecimiento más lento entre las conocidas que sean geométricas y aritméticas juntamente, lo que la hace muy útil para su aplicación arquitectónica. Debido a su origen geométrico no es nada extraño encontrarla combinada con $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$.

Recientemente ha habido algunos trabajos, que se han dedicado a estos temas, destacamos: CH. FUNCK-HELLET: *Las pinturas del Renacimiento italiano y el Número de Oro*, Hachette, Buenos Aires 1951 (traducción de la primera edición de 1932). Lando BARTOLI: *La rete magica di Filippo Brunelleschi*, Nardini, Firenze 1977. Angel del CAMPO y FRANCES: *La magia de las Meninas*, Coleg. Ingenieros de C., C. y P. Madrid 1978. José de MESA y Teresa GISPERT: "Los esquemas armónicos en la arquitectura del virreinato peruano", en *Traza y Baza*, n.º 5 (1974), 7-29, Isabel MONTERDE: "El trazado armónico en El Salvador de Joan de Joanes", en *Primer Coloquio de Arte Valenciano*, Univ. Valencia 1981, pp. 14-17. Mario PUGA RODRIGUEZ: "Trazado armónico del templo de San Vicente de la Roqueta en Valencia", *Primer Coloquio de Arte Valenciano*, Univ. Valencia 1981, pp. 95-101.

1.- “Bodega”.

En las posibilidades del irregular solar, la dimensión de la fachada es la única medida obligada; así Pérez organizó un rectángulo \emptyset que encierra la red de pilares de cimentación, casi tangente al muro por el interior y pasando por el centro de los 12 pilares. La descomposición del rectángulo \emptyset en un cuadrado y un rectángulo $1/\emptyset$ localiza el espacio central que soportará el hueco de la escalera; la mitad de $1/\emptyset$ es la medida que se utiliza como equidistancia horizontal de los centros de los pilares y de estos a la pared. La semidiagonal del cuadrado facilita además la distancia de los pilares a la pared opuesta, con lo que la nave, central tiene una anchura de $1/\emptyset^2$.

Vemos también que las semidiagonales de los espacios creados (d y d') equivalen a las alturas de otros pisos. Así mismo otro rectángulo \emptyset ligeramente mayor encuadra el exterior de esta red de pilares, este es el rectángulo fundamental, el que tiene de lado mayor la dimensión interior de la fachada, y aparece ligeramente desplazado hacia el Este; esta desviación equivale a la diferencia entre $1 + \sqrt{2}/2$ y \emptyset . Como ya sabemos este desvío se debe a las necesidades funcionales y estéticas de la concepción de las plantas superiores.

En resumen en los cimientos tenemos el rectángulo aureo con los diversos submúltiplos de la serie: $\emptyset, 1, 1/\emptyset, 1/\emptyset^2$, y $\sqrt{2}/2$ que como veremos esta semidiagonal (D) es significativa pues la vamos a encontrar a continuación.

2.- “Perfil cortado...”

Tengamos cuenta que \emptyset es la diagonal del pentágono regular. El corte y las diversas alturas de los pisos del edificio se deben a la geometría del pentágono regular. El ancho interior del edificio nos facilita el lado del pentágono, 1, así como su diagonal es tanto la longitud interna como la determinación de su altura máxima, incluido el adorno de su linterna.

La diagonal paralela a la base localiza la altura de la fachada y piso de la falsa. La mitad de la diagonal determina la altura del piso del ático. El lado del decágono decide el piso de la planta principal y el del icoságono el alto de la estructura de la bodega. Debido a la peculiar disposición de los pilares la altura de la planta baja es similar a la semidiagonal del rectángulo que soporta la escalera (d) y la altura de la planta principal a la de los pseudocuadrados de la bodega (d'). La altura de la fachada es la proyección de la semidiagonal del cuadrado de lado, 1, $\sqrt{2}/2$.

La anchura de la nave central de la bodega, $1/\emptyset^2$, es la tercera parte de la anchura total del edificio, y la cuarta de su altura.

Volvemos a encontrar la serie $\emptyset, 1, 1/\emptyset, 1/\emptyset^2$, además de $\sqrt{2}/2$ y de $\sqrt{5}/2$ que determina el arranque de la cúpula.

3.- Planta baja.

Como ya se ha dicho, todos los pisos de vivienda aparecen divididos longitudinalmente en dos, habitaciones de invierno y de verano.

Del plan de cimentación aflora en esta planta la división longitudinal en tres crujiás, el rectángulo central que es ahora hueco para la escalera, y además el rectángulo fundamental \emptyset .

Veamos como se opera: la mitad del cuadrado determina el pasadizo y las alcobas de los "pajes". Formando un rectángulo central $\sqrt{2}$ se traza un tabique que delimita el tercio correspondiente a las habitaciones de criados. En esta zona las diversas estancias son siempre la mitad del espacio anteriormente disponible.

Los "portales, que por las dos fachadas hacen frente a la escalera, son de planta cuadrada pero corregida.

El tercio del lateral occidental está destinado a las habitaciones de familiares o visitantes; aquí también se divide por la mitad el espacio disponible, partiendo de la mitad del cuadrado anteriormente calculada, a la cual se le suma el desplazamiento que el rectángulo \emptyset había sufrido.

En toda la planta hay dos tipos de estancias que reciben especial atención: unas son los portales aludidos, las otras dos son los "cuartos contiguos del lateral Oeste, cuya altura es la semidiagonal del rectángulo de su planta (las medidas en este caso son aproximadas).

4.- Planta principal.

Organizada similarmente a la planta baja, parte de los mismos principios. Aquí la mitad del cuadrado forma el bloque central, con dos tabiques de fachada a fachada que delimitan los salones principales. El rectángulo $\sqrt{2}$ derivado de ello sigue delimitando la casa del abad de la de servicio, que en este caso es la del ama.

En este bloque central que delimita las estancias públicas, se realizan unas correcciones de suma importancia armónica. El tabique del "pasadizo" se aproxima a la escalera para que adquiera proporción doble (pues esta es la adecuada a un paso). Al recibimiento se le da un poco más de anchura y así su planta será un rectángulo $\sqrt{2}$, este incremento se hace a costa de la "sala principal" que está pensada con otras proporciones. En este caso es una sala "sesquiáltera" con su altura armonizando en la misma proporción; este salón está sometido a armonías musicales, la del "diapente" o quinta musical que en arquitectura se solía llamar sesquiáltera y es la relación existente entre el $3/2$. El "gabinete" tiene como planta un cuadrado y por altura su semidiagonal, recurso que ya hemos visto en la planta baja. El conjunto de "gabinete", capilla y pasillo correspondiente forma un rectángulo \emptyset . Al pasillo de los pajes se le ha dado de anchura el desplazamiento del rectángulo originario \emptyset (de).

En ambas plantas seguimos encontrando la progresión \emptyset , 1, $1.\emptyset$, $1.\emptyset^2$ y además $\sqrt{2}/2$ y ahora un tema armónico musical $3/2$.

5.- Fachada principal.

Ya hemos visto cómo la altura de la fachada principal viene determinada por la geometría del corte y su longitud por el espacio del solar. Esto hace que la fachada se organice en cierto modo como un ente autónomo aunque intimamente ligado a todo el edificio por su sistema proporcional pues está formada por un rectángulo \emptyset^2 , cuya unidad es el alto de la fachada (A-A') que como ya vimos es la proyección de $\sqrt{2}/2$ del trazado de cimientos y corte del edificio.

En este rectángulo Pérez operó del siguiente modo: Descompone el rectángulo en dos cuadrados extremos y un rectángulo central, ($1/\emptyset$ (B-B')) que centra los cinco vanos de cada piso de fachada.

El rectángulo central se divide en otro cuadrado superior y un rectángulo inferior $1/\emptyset^2$ y viceversa, con lo que en el centro sale un rectángulo \emptyset^2 cuyo lado menor es $1/\emptyset^3$ (C-C'). Las diversas diagonales de estos cuadrados y rectángulos determinan los puntos de toda la estructura arquitectónica de los tres vanos de la zona central, así como las horizontales de las diversas partes de la fachada.

Descomponiendo el rectángulo \emptyset^2 por sus diagonales y perpendiculares al ángulo opuesto (1.2 y 3.) se localiza la anchura interior de la puerta, el centro de los vanos intermedios y se confirma la localización de otros puntos. Las diagonales 1-2 determinan la anchura de los vanos intermedios. Los vanos extremos se definen por las diagonales $\sqrt{5}/2$ del correspondiente cuadrado.

El resultado es una distribución simétrica respecto al eje central de los cinco vanos pero a intervalos y luces diferentes, el central más ancho, luego los extremos y más estrechos los intermedios. Se consigue así un equilibrio visual y armonía imperceptible y difícil de explicar como no sea con los trazados geométricos.

la progresión que encontramos es la misma que en los casos anteriores: \emptyset^2 , \emptyset , 1, $1/\emptyset$, $1/\emptyset^2$, $1/\emptyset^3$, más $\sqrt{5}/2$ que también hemos visto en el corte y que es el origen de \emptyset .

Resumiendo la actuación de Pérez podemos ver como, desde el principio hasta el final, en todos los detalles desplegó una teoría basada en el número áureo y sus posibilidades, mostrándonos como se puede aplicar a la arquitectura de un edificio en concreto en un solar irregular y unas necesidades funcionales determinadas por el tipo de cliente. La belleza y armonía del edificio no estaba tanto en el ornato como en lo que de objetivo y comensurable pueda tener la geometría y matemática. En esta base objetiva y racional radica la belleza que además lo es efectivamente para los ojos.

6.- Oteyza. Fachada principal.

La fachada de este arquitecto también se encuentra en un rectángulo \emptyset^2 , de las mismas dimensiones que el de Pérez. Sitúa los vanos de la parte central de manera similar a como lo hace Pérez, pero algo más sencillamente, calculando solo la anchura del vano arquitectónico sobre el que colocará el adorno. Encontrado $1/\emptyset^3$ utiliza esta distancia como comodín para todas las anchuras de los vanos de la planta baja y noble. Los cinco vanos están distribuidos equidistantemente. El centro de los vanos laterales es $1/3$ del lado del cuadrado (aproximadamente el cruce de la diagonal mayor con su perpendicular al ángulo opuesto); la distancia entre estos dos puntos C-C' dividida en cuatro partes localiza el centro de los restantes vanos.

El resultado es una división que se aprecia más monótona careciendo de la armonía de crecimiento orgánico que se intuye en el plano de Pérez. Comparando ambos planos podemos pensar que la fachada de Pérez es hoy todavía un ser vivo y la de Oteyza es ya fósil (estas serían las palabras que usaría el profesor M.G. Ghynka).

7.- Otros cálculos de Pérez.

Abordada la solución de las proporciones de su edificio nuestro arquitecto, como "sublime", no descuidó las correcciones ópticas. Sabido es que con los caminos de recorrido espacial los cuadrados geométricos no son visualmente tales. Es por ello por lo que encontramos en el plano aparentes cuadrados corregidos para que en la realidad así lo pareciesen, tales son los de los "portales" y fundamentalmente la "escalera principal". Esta escalera es estancia dinámica ascendiente y paso, además núcleo central recto cubierto por cúpula, es por ello por lo que debe ser rectángulo que se aproxime al cuadrado para dar este aspecto; pero a la vez poder hacer ver que es un rectángulo por ello distribuyó tramos de escalones 6 y 4, haciéndonos ver la proporción musical que luego utiliza en el salón.

El problema de traducir las proporciones aureas a números enteros de pies tanto en planta como en fachada lo afrontó de sutil manera utilizando la serie de Fibonacci (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...) pues uno de sus números 89 era próximo a la dimensión del espacio en la fachada y lo utilizó para el rectángulo aureo director del plano, acondicionando la serie decreciente \emptyset a los demás números. En la fachada $\emptyset^2 = 96$ pies; aquí debió realizar una reconversión ya que 96 multiplicado por $3/2$ (sesquialtera) da 144 el número que le correspondería en la serie de Fibonacci, así pues multiplicando los subsiguientes números de la serie por $2/3$ surge una nueva serie traducida a pies y tercios de pie (96, $59 + 1/3$, $36 + 2/3$, $22 + 2/3$, 14, $8 + 2/3$...) Así en las plantas y corte encontramos $\emptyset = 89$ pies, $1 = 55$, $1/\emptyset = 34$... y en la fachada $\emptyset^2 = 96$ pies, $\emptyset = 59 + 1/3$, $1 = 36 + 2/3$, $1/\emptyset = 22 + 2/3$... medidas todas fáciles de aplicar por los operarios.

CONCLUSION

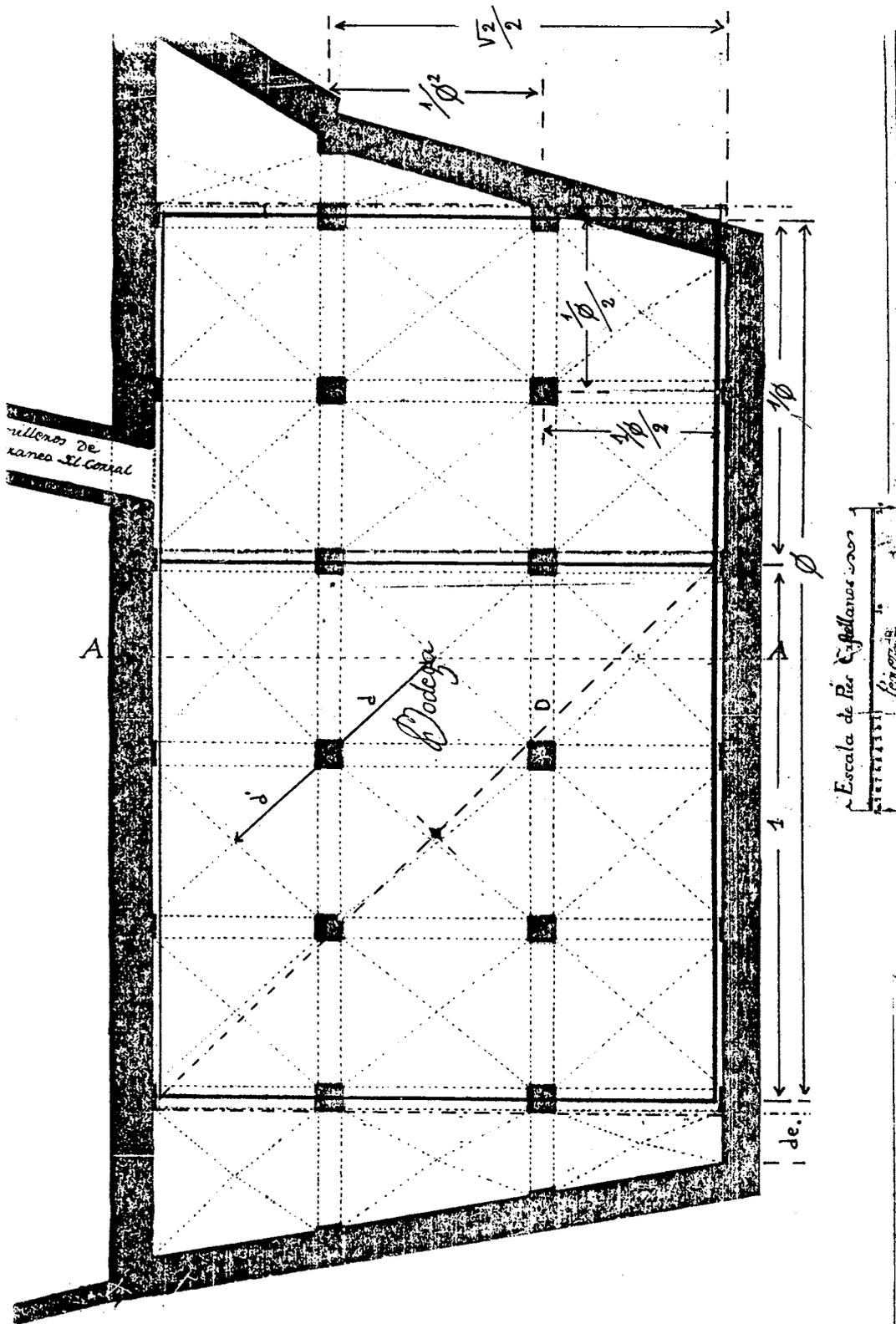
Hemos podido ver el proceso de elaboración de unos exquisitos planos del arquitecto "Pérez", que, aunque hayamos realizado el camino inverso, así debió de ser como los realizó la mente del arquitecto y sin duda quedan más cosas ocultas para este estudio.

Hemos trabajado directamente sobre los planos originales utilizando un sistema geométrico y paralelamente comprobaciones aritméticas; en ello se pueden encontrar errores de 1mm. en el dibujo a mano alzada en las paralelas más distantes y aproximaciones de unas décimas o centésimas que el propio sistema impone.

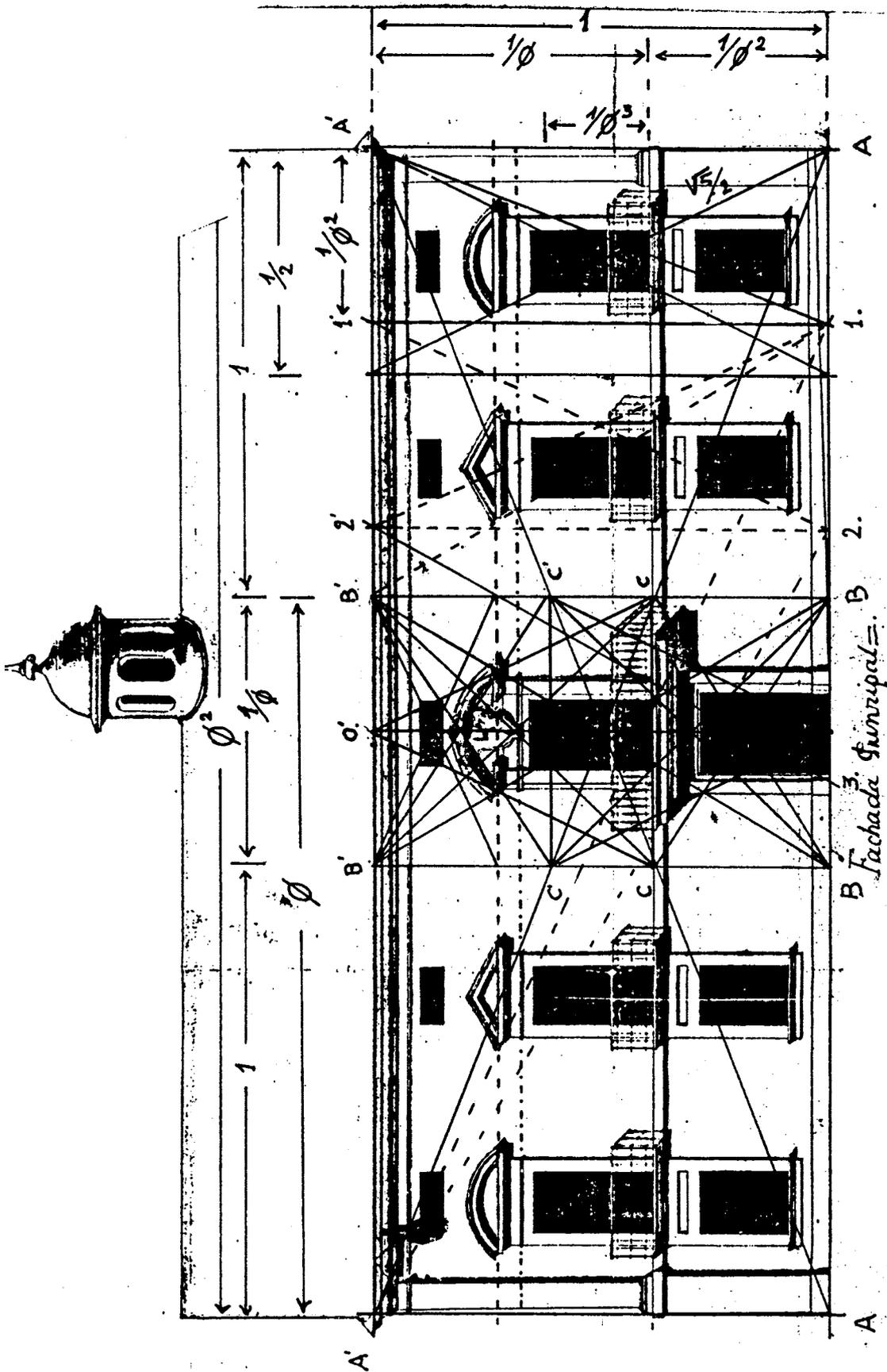
El arquitecto hasta aquella época trabaja con estos sistemas, se hace retratar con instrumentos geométricos y de cálculo, la propia alegoría de la Arquitectura se representa así⁶. Su principal problema debió de ser traducir sus ideas y diseños a números de pies u otra medida, ladrillos etc., fácilmente utilizable por los operarios, que aquí se solucionó con la conocida serie de Febonaci.

Todos estos conocimientos se estudiaban en los tratados matemáticos de la época en los que una parte iba especialmente dedicada a la arquitectura, como otras a la música, relojes, astronomía, hidráulica etc. La sección aurea lejos de haber caído en desuso no es extraña a los demás arquitectos más aferrados a las cómodas tradiciones del obrar cotidiano; pero no es lo mismo conocer que saber hacer, y esto es lo que nos demuestra Pérez en su pequeño diálogo a través de esas líneas con nosotros.

6. Así la encontramos en J.B. BOURDAD: *Iconologie tirée de divers auteurs*, Parma 1759. Todos los tratados contemporáneos a nuestro autor, los de matemáticas, dedican en su parte de álgebra aplicada a la geometría un tema a la sección aurea, si bien sin denominación especial, muchos de estos incluyen un volumen destinado a la arquitectura y una parte a la música y sus cocientes armónicos. Ver los recogidos en *El Libro de Arte en España*, Dir. Gal. de A. y B. Dto. de Arte de la Univ. de Granada, 1975. Destacamos Tomás Vicente Tosca: *Compendio Matemático...* Valencia 1717, 2.^a impresión Madrid 1727, 3.^a Valencia 1757 (uno de sus tomos dedicado a la arquitectura civil). Christiano RIEGER: *Elementos de toda la arquitectura civil*, traducida al castellano en Madrid 1763, hace especial hincapié en la "razón y proporción architectónica como alma de su perfección... se requiere una tan exacta comparación y orden de las piezas entre sí que ni aún una mínima parte de ellas se tolera que no tenga su especial destino y de cuyo uso no pueda dar razón el arquitecto... El primer fundamento de la hermosura estriba en la proporción... un orden y correspondencia conveniente de las partes entre sí y una íntima relación de estas al todo de la obra... ayudados de las matemáticas y estudio de la arquitectura antigua... siempre estriba en la theoria de las razones y proporciones geométricas..."



1. Pérez Bodega.



Escala de Pés Castellanos
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

5. Pérez. Fachada principal.

