CONTRIBUCIONES CIENTÍFICAS
EN HONOR DE MIRIAN ANDRÉS GÓMEZ
(Laureano Lambán, Ana Romero y Julio Rubio, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2010.

LA TEORÍA DE HERSTEIN Y SUPERÁLGEBRAS

JESÚS LALIENA Y SARA SACRISTÁN

En memoria de Mirian Andrés Gómez, una buena compañera de trabajo y una extraordinaria persona

Resumen. En esta nota damos una breve introducción a superálgebras y superálgebras de Lie y asociativas. Exponemos a continuación algunos de los resultados publicados sobre la estructura de Lie de una superálgebra asociativa simple o prima. Finalmente, hacemos un desarrollo similar sobre la estructura de Lie del conjunto de elementos antisimétricos de una superálgebra asociativa con superinvolución que es simple, prima o semiprima.

Abstract. We give a very short introduction about superalgebras and Lie and associative superalgebras. After we make a survey of some of the published results about the Lie structure of an associative superalgebra which is simple or prime. And we do the same with the Lie structure of the set of skewsymmetric elements of an associative superalgebra with superinvolution which is simple, prime or semiprime.

1. Introducción

El álgebra no asociativa tiene quizás su componente más importante en las álgebras de Lie. Un ejemplo sencillo de álgebra de Lie es el conjunto de los vectores del espacio vectorial euclídeo con el producto vectorial. Tenemos en este conjunto tres operaciones, la suma de vectores, el producto por escalar y el producto vectorial que cumple estas dos identidades:

$$\begin{aligned} a \times a &= 0 \\ a \times (b \times c) &= (a \times b) \times c + b \times (a \times c), \end{aligned} \tag{1}$$

y que definen a las álgebras de Lie. El producto vectorial es un producto no commutativo, y tampoco es asociativo, algo usual en las álgebras de Lie.

Otro ejemplo importante de álgebra de Lie es el conjunto de los campos vectoriales en una variedad diferencial con la operación corchete, que consiste en lo siguiente: si X, Y son dos campos vectoriales sobre una variedad diferenciable entonces la operación corchete viene dada por la composición denotada $[X, Y] = XY - YX$. Esta operación resulta ser cerrada en este conjunto, lo mismo que la suma y producto por escalar, y así los campos vectoriales en una variedad diferenciable constituyen un álgebra de Lie.

Key words and phrases. Associative superalgebras, superinvolutions, Lie structure.

Realmente las álgebras de Lie fueron introducidas por Sophus Lie (1849-1925) al estudiar propiedades de las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales. Más concretamente asoció a cada grupo de transformaciones continuas de un sistema de ecuaciones diferenciales un álgebra de Lie, y estableció una aplicación del álgebra de Lie al grupo a través de los grupos monoparamétricos. Las transformaciones del conjunto de soluciones producen otras soluciones y esto da mucha información acerca de ellas y del sistema.

Con esto hemos querido poner de relieve que las álgebras de Lie aparecen y ponen en relación distintas cosas: La Física (campos vectoriales), las Ecuaciones Diferenciales, las Estructuras algebraicas .... Ciertamente, en su origen, las álgebras de Lie fueron realmente una idea genial de S. Lie poniendo en conexión cosas que parecen dispares (álgebras de Lie y soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales). Este hecho de relacionar cosas distintas, en principio, parece ya una constante en muchas de las grandes teorías que se han desarrollado hasta ahora en Matemáticas.

Aquí no vamos a profundizar en esta relación (para el lector interesado una lectura adecuada puede ser [1]), pero sí seguiremos dando algunos ejemplos más de este tipo de álgebras. Tomemos ahora un álgebra asociativa, como puede ser el álgebra de matrices $M_3(\mathbf{R})$, y cambiemos el producto usual de matrices por el siguiente (que recuerda al de los campos vectoriales): $[A, B] = AB - BA$ tenemos una nueva álgebra que ya no es asociativa, pero sí es de Lie, y que se denota $M_3(\mathbf{R})^-$. El Teorema de Poincaré- Birkhoff-Witt prueba que en realidad cualquier álgebra de Lie es una subálgebra de una A^- con A un álgebra asociativa, un resutado bastante útil en el trabajo con álgebras de Lie.

Otro modo de obtener ejemplos es pensar en un álgebra asociativa A con una involución, que no es más que una aplicación lineal $*\colon A \to A$ que verifica $(ab)^* = b^*a^*$. Una involución es por ejemplo la transposición en el álgebra de matrices $M_3(\mathbf{R})$. Al tomar el conjunto de elementos antisimétricos, $K = \{a \in A : \quad a^* = -a\}$, respecto de la involución (en nuestro ejemplo de matrices serían las matrices antisimétricas) con la operación suma y producto por escalar de A y el producto corchete $[a, b] = ab - ba$ se obtiene un álgebra de Lie.

Y finalmente una última forma de obtener álgebras de Lie, que en realidad no va a ser importante en lo que sigue pero que resulta difícil no citar, es la siguiente: A partir de un álgebra cualquiera (no necesariamente asociativa), A, consideremos las derivaciones sobre A, es decir, las aplicaciones lineales $D\colon A \to A$ tales que verifican que $D(xy) = D(x)y + xD(y)$. Por ejemplo, en el álgebra de polinomios $\mathbf{R}[X, Y]$ son derivaciones las derivadas parciales $\partial/\partial x, \partial/\partial y$. El conjunto de las derivaciones sobre A con la operación corchete obtenida a partir de la composición de funciones $[D, D'] = DD' - D'D$ es un álgebra de Lie.

Si nos quedamos con los dos primeros métodos de obtener álgebras de Lie, observamos que en ambos se parte de un álgebra asociativa A y en el primer caso cambiamos el producto para obtener una nueva álgebra A^-, y en el segundo caso suponemos que en A tenemos una involución y con los elementos antisimétricos K formamos también una nueva álgebra con el mismo producto que A^-.

En el estudio de las álgebras de Lie importó enseguida clasificarlas, y para ello, las más básicas, las simples, las que no tienen ideales triviales, resultaron ser en varios casos álgebras obtenidas de esta forma a partir de asociativas que a su vez fueran simples con su producto.

La Teoría de Herstein está inspirada en su inicio en este hecho, y de las varias componentes que tiene (fundamentalmente 3) una se dedica a estudiar cómo son los ideales de las álgebras A^- y K, que podríamos llamar ideales de Lie, y si tienen alguna relación con los ideales de A como álgebra asociativa. I.N. Herstein, y varios de sus alumnos de doctorado, desarrollaron esta teoría al final de los años 50, que está recogida fundamentalmente en los libros [4], [5]. Por ejemplo probó que si A es simple los ideales de Lie de A^- están contenidos en el centro $Z = \{x \in A : \quad xa = ax \ \forall a \in A\}$ ó contienen al álgebra derivada $[A, A]$ (el submódulo de A que generan los productos $[a, b], \ a, b \in A$ y que resulta ser también un álgebra de Lie con la operación corchete) salvo si A es un álgebra 4-dimensional sobre Z. También que si A es simple y con involución los ideales de Lie de K están contenidos en el centro ó contienen a $[K, K]$, salvo si A es de dimensión 16 sobre su centro. La utilidad de la Teoría completa ha sido grande, como prueba el hecho del gran número de citas que han recibido estos dos libros y los artículos que recogen.

Esta Teoría fue ampliada por Herstein y sus discípulos a casos menos exigentes, por ejemplo cuando A es prima, es decir, que no existen ideales no cero en A cuyo producto sea cero, ó cuando A es semiprima, es decir, sin ideales no cero de cuadrado cero. Pero ahora pasemos a hablar de superálgebras.

2. Superálgebras

Las superálgebras surgieron en el contexto de la Física y en concreto en el marco de la Supersimetría. A continuación intentaremos dar una idea del porqué de la aparición de esta teoría. La historia de la Física puede mirarse en cierto modo como una búsqueda de las leyes que rigen el universo a todos los niveles (cosmos y microcosmos), tratando de encontrar aquellas que unifiquen las distintas conocidas en cada campo, y den explicación a los fenónemos físicos que se observan.

Por ejemplo, en el siglo XVII Isaac Newton probó que el movimiento de los cuerpos en el espacio y en la tierra obedecía las mismas leyes dinámicas y gravitacionales. También en la segunda mitad del siglo XIX James Maxwell unificó las leyes de la electricidad y el magnetismo, y estableció también la relación entre la teoría del campo electromagnético y la óptica, probando que la luz consistía en ondas electromagnéticas. Y el siglo XX la Teoría de la Relatividad de Albert Einstein conecta el espacio y el tiempo y la energía y la masa, con lo que se pasa a unir el espacio-tiempo a la gravitación. Esta Teoría y la Teoría Cuántica de Max Plank, que establece la dualidad onda-corpúsculo de las partículas subatómicas, hacían comprensibles cuestiones inexplicables a la luz de las Teorías de Newton y Maxwell. La Teoría de la Relatividad dió respuesta a algunas contradicciones entre las leyes de Newton de la Mecánica y la Teoría de Maxwell de la Electrodinámica respecto al movimiento relativo, incluyendo ambas teorías en una más general. La Teoría Cuántica se desarrolló ante la imposibilidad de explicar con las leyes de Newton de la Mecánica el comportamiento de los electrones.

Pues bien, el hecho de que las partículas subatómicas se muevan a menudo a velocidades próximas a la de la luz hace que su descripción cuántica tenga que ser consistente con la Teoría de la Relatividad, y esto puso de manifiesto la necesidad de una teoría agrupando a ambas. Uno de los intentos más prometedores aparecidos en esta linea es la Teoría de las Supercuerdas. Esta teoría arranca del descubrimiento a principios de los años 70 de un tipo nuevo de simetría geometrica (distinta por ejemplo de las tradicionales basadas en las traslaciones y rotaciones) llamada supersimetría. La característica novedosa de la supersimetría es que dotaba de un marco geométrico común a las partículas subatómicas básicas que se agrupan en dos clases: bosones y fermiones. Esta teoría apunta a que el mundo es entonces supersimétrico y en este contexto es donde nacieron las superálgebras. Los últimos experimentos realizados en 2008 con aceleradores de partículas mostraron que esta teoría no es una elucubración abstracta sino que es real.

Pero a partir de ahora centrémonos más en las matemáticas y en esta nueva estructura. Una superálgebra es una estructura algebraica graduada, o más precisamente, un álgebra A tal que $A = A_0 + A_1$ con $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$ (con los índices sumados módulo 2) con una componente par (A_0) que recogería el comportamietno de los bosones y una componente impar (A_1) representando a los fermiones.

Quizás las superálgebras más conectadas con la Física son las superálgebras de Lie. Ejemplos de superálgebras de Lie se pueden obtener de una manera similar a como se obtienen ejemplos de álgebras de Lie a partir de álgebras asociativas. Una superálgebra asociativa es un álgebra asociativa $\mathbf{Z}_2$-graduada: $A = A_0 + A_1$. Si cambiamos ahora el producto interno de A por el siguiente producto que podríamos llamar supercorchete:

$$[a, b] = ab - (-1)^{\bar{a}\bar{b}}ba,$$

donde $\bar{a} = 0$ si $a \in A_0$ y $\bar{a} = 1$ si $a \in A_1$, se obtiene una superálgebra de Lie. Si ahora tenemos que la superálgebra asociativa A es con superinvolución, es decir, con una aplicación lineal graduada $*\colon A \to A$ (graduada quiere decir que $A_0^* = A_0, A^* = A_1$) tal que verifica

$$a^{**} = a, \quad (ab)^* = (-1)^{\bar{a}\bar{b}}b^*a^*,$$

entonces el conjunto de elementos antisimétricos $K = \{a \in A : \quad a^* = -a\}$ es una superálgebra de Lie también y es subálgebra de A^-.

Una superálgebra de Lie es un álgebra $\mathbf{Z}_2$-graduada que verifica las identidades:

$$\begin{aligned} &[a, a] = 0 \\ &[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, [a, c]]. \end{aligned} \tag{2}$$

Como puede observarse, la definición de superálgebra de Lie tiene un gran parecido con la de álgebra de Lie que aparece en (1). Tan solo se diferencian en que se ha introducido en cada sumando de la identidad un (-1) por cada permutación de las variables con respecto al primer sumando. Esto ya podíamos haberlo hecho notar cuando hemos definido la operación supercorchete, ó también en la definición de superinvolución.

Las superálgebras de Lie simples finito dimensionales fueron clasificadas por V. G. Kac en 1977 (ver [6]), y simple quiere decir en este contexto sin ideales graduados no triviales. De nuevo aquí en la clasificación, como en el caso no graduado, varios de los tipos vienen de tomar superálgebras asociativas simples A y considerar A^-, o son subálgebras de elementos antisimétricos de superálgebras asociativas con superinvolución. Por este motivo resulta nuevamente de interés estudiar una Teoría de Herstein en superálgebras.

Pero antes de entrar en cómo ha ido el desarrollo de esta Teoría, hay que mencionar que la clasifiación de las superálgebras simples asociativas finito dimensionales está hecha desde 1964 por C. Wall (ver [13]) y la de superálgebras primitivas y semiprimitivas con superinvolución está publicada por M. Racine en 1998 en [12]. También damos a continuación tres ejemplos de superálgebras asociativas que usaremos en lo que sigue:

i) Sea $A = M_n(F)$, el álgebra de las $n \times n$ matrices sobre F, y tomemos como parte par e impar
$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a \in M_r(F), b \in M_s(F) \right\},$$
$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} : c \in M_{r\times s}(F), d \in M_{s\times r}(F) \right\},$$
con $r + s = n$. Esta superálgebra se denota $M_{r,s}(F)$.

ii) Consideremos ahora el álgebra de cuaternios generalizados sobre un cuerpo F, $\mathbf{H}(\alpha, \beta)$ con base $\{1, u, v, uv\}$, tal que $u^2 = \alpha, v^2 = \beta$, y $uv = -vu$. Si elegimos ahora que u and v sean impares, esto determina una $\mathbf{Z}_2$-graduación en $\mathbf{H}(\alpha, \beta)$, en la cual $\mathbf{H}(\alpha, \beta)_0 = F.1 + F.uv$ y $H(\alpha, \beta)_1 = F.u + F.v$. Diremos que $\mathbf{H}(\alpha, \beta) = \mathbf{H}$ es una superálgebra de cuaternios.

iii) Sea (V, q) un espacio vectorial sobre un cuerpo F con una forma cuadrática q. Si $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base en V consideremos el álgebra generada por estos elementos atendiendo a que el producto $e_i e_j$ verifica la siguiente regla $e_i e_j = -q(e_i, e_j) e_j e_i$ (donde $q(\ ,\ )$ es la forma bilineal asociada a q). El álgebra que resulta es la conocida álgebra de Clifford, que denotaremos $(C(n), q)$. Esta álgebra es también una superálgebra con la siguiente graduación: $C(n)_0 = F < e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_{2s}} :\ e_{i_j} \in B, s \in \mathbf{Z}^+ >$ y $C(n)_0 = F < e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_{2s+1}} :\ e_{i_j} \in B, s \in \mathbf{Z}^+ >$. En realidad las superálgebras del ejemplo ii) son un caso particular de superálgebras de este tipo.

3. Ideales de Lie en superálgebras

El inicio del estudio de la estructura de Lie de una superálgebra asociativa simple se debe a F. Montaner y a S. Montgomery (ver [10] y [11]). Ambos, de forma independiente, clasificaron en los años 90 los ideales de Lie de una superálgebra asociativa en realidad un poco más general, es decir, cuando la superálgebra asociativa es prima (es decir, sin ideales graduados no triviales con producto cero).

Para entender esta clasificación hay que explicar lo que se entiende por un orden central o una clausura central de una superálgebra. Supongamos que A es una superálgebra prima y consideremos su centro, $Z(A) = \{a \in A : \quad ab = ba\, \forall b \in A\}$, que es fácil probar que es una superálgebra, es decir que que es una subálgebra graduada de A, denotemos la parte par del centro por $Z = Z(A)_0$, y supongamos que no es cero. Consideramos la localización $Z^{-1}A = \{z^{-1}a : \quad 0 \neq z \in Z, a \in A\}$. Este conjunto resulta ser una superálgebra asociativa prima central sobre el cuerpo $Z^{-1}Z$ con las operaciones heredadas de A de modo natural. A la superálebra $Z^{-1}A$ la llamaremos la clausura central de A, y diremos que A es un orden central en $Z^{-1}A$. Este nombre es un poco engañoso porque habitualmente el término supone en álgebras usar en vez del centro el centroide extendido, pero es el que se está usando en superálgebras.

Notemos que si L es un submódulo de una superálgebra asociativa A tal que $L \subseteq Z$ entonces se verifica que $[L, A] = 0$ y así L es un ideal de Lie de A. También otro modo de construir ideales de Lie es tomar un ideal I de la superálgebra A, y considerar el submódulo $[I, A]$, ya que $[[I, A], A] \subseteq [I, A]$ por ser I ideal.

Con este preámbulo se tiene el siguiente resultado para los ideales de A^-, es decir, para los ideales de Lie de A. Esencialmente el resultado dice que los ejemplos dados de ideales de Lie son básicamente el modo de obtener todos, salvo en el caso en que A sea muy especial.

Teorema 3.1. *Si A es una superálgebra asociativa prima, y L es un ideal de Lie de A entonces se sigue una de las siguientes situaciones:*

(i) *Existe un ideal no cero I de A tal que $[I, A] \subseteq L$,*
(ii) *$L \subseteq Z$,*
(iii) *A es un orden central en $M_{1,1}(F)$ y $F.L = F.1 + F.e_{12}$ ó $F.L = F.1 + F.e_{21}$, donde $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ es la base canónica del álgebra de matrices, y $F = Z^{-1}Z$.*

Como una consecuencia se obtiene el siguiente resultado para superálgebras simples:

Corolario 3.2. *Sea A una superálgebra asociativa simple y denotemos por $F = Z^{-1}Z$. Si L es un ideal de Lie no cero de A entonces se tiene una se las siguientes situaciones:*

(i) *$L = Z \subseteq F$,*
(ii) *$[A, A] \subseteq L$,*
(iii) *$A = M_{1,1}(F)$ y $L = F.1 + F.e_{12}$ ó $L = F.1 + F.e_{21}$, donde $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ es la base canónica del álgebra de matrices.*

En su estudio tanto F. Montaner como S. Montgomery fueron más allá, y teniendo en cuenta que también $[A, A]$, es decir, el submódulo graduado de A generado por los elementos $[a, b]$ con $a \in A_i, b \in A_j$, es una superálgebra de Lie, clasificaron los ideales de Lie de esta superálgebra. Los ideales de Lie de $[A, A]$ resultan ser así:

Teorema 3.3. *Sea A una supeálgebra prima y L un ideal de Lie de $[A, A]$, entonces una de las siguientes situaciones se sigue:*

(i) *Existe un ideal graduado no cero de A, I, de modo que $[I, A] \subseteq L$,*
(ii) *$L \subseteq Z$,*
(iii) *A es un orden central en un orden central en un álgebra $C(2)$ ó $C(3)$.*

Más adelante, a finales de los 90, C. Gómez-Ambrosi, J. Laliena e I. Shestakov probaron en [3] otra clasificación para los ideales de Lie de una superálgebra asociativa prima. Previamente comentaremos que un submódulo M de la superálgebra A se dice denso si existe un ideal no cero de A, I, de modo que I esté contenido en la subálgebra que genera M. Así se tiene:

Teorema 3.4. *Sea A una superálgebra asociatva prima no trivial (es decir, con parte impar distinta de cero). Si L es un ideal de Lie de A entonces ó $L \subsetneq Z$ ó L es denso en A, salvo si A es un orden central en una superálgebra de cuaternios.*

Este resultado permite deducir como consecuencia que

Corolario 3.5. *Si A es una superálgbra asociativa simple no trivial y L es un ideal de Lie de A entonces $L \subseteq Z$ salvo si A es un orden central en una superálgebra de cuaternios.*

A mediados de los 90 C. Gómez-Ambrosi e I. Shestakov (ver [2]) inauguraron un proyecto de Teoría de Herstein para superálgebras asociativas con superinvolución. Se trataba de describir los ideales de Lie de la superálgebra de elementos antisimétricos K, cuando la superálgebra A es simple con superinvolución. El trabajo llevó entre otras a la conclusión que aparece en el siguiente teorema. Antes de enunciarlo observemos que cualquier submódulo graduado de K contenido en Z es un ideal de Lie de K y también que cualquier submódulo graduado de K que contiene a la superálgebra de Lie $[K, K]$ es un ideal de Lie de K. El teorema dice que salvo casos excepcionales estos son los únicos que hay.

Teorema 3.6. *Sea A una superálgebra asociativa simple con superinvolución tal que no es un álgebra $C(2)$ o $C(4)$, entonces si U es un ideal de Lie de K se tiene que $U \subseteq Z$ ó $[K, K] \subseteq U$.*

En esta situación, en supeálgebras con superinvolución, ocurre como en superálgebras, también la superálgebra $[K, K]$ es una superálgebra de Lie. La clasificación de los ideales de $[K, K]$ (ver [2]) resultó ser la siguiente:

Teorema 3.7. *Sea A una superálgebra asociativa simple que no es un álgebra $C(2), C(3)$ ó $C(4)$. Si U es un ideal no cero de $[K, K]$ entonces $U \subseteq Z$.*

Con parecidas técnicas a las desarrolladas para demostrar los anteriores teoremas y algunos resultados técnicos añadidos, se describieron en [3] los ideales de Lie de K y $[K, K]$, cuando A es una superálgebra prima con superinvolución. Previamente notemos que para cada ideal distinto de cero I de A se tiene que $[I \cap K, K]$ es un ideal de Lie de K. En efecto, $[[I \cap K, K], K] \subseteq [I \cap K, K]$ ya que $[I \cap K, K] \subseteq I \cap K$ ya que I es ideal y K superálgebra de Lie. Además en [3] se prueba que este ideal de Lie de K es distinto de cero si A es supeálgebra prima y no es un orden central en un álgebra $C(2)$.

Teorema 3.8. *Sea A una supeálgebra prima no trivial con superinvolución. Si U es un ideal de Lie de K, entonces ó $U \subseteq Z$ ó para algún ideal no cero I de A se tiene que $[I \cap K, K] \subseteq U$, salvo si A es un orden central en un álgebra $C(2)$ ó $C(4)$.*

Al considerar la superálgebra de Lie $[K, K]$ en una superálgebra de Lie prima con superinvolución se tiene también el resultado:

Teorema 3.9. *Sea A una superálgebra prima no trivial con superinvolución. Si U es un ideal de Lie de $[K, K]$ entonces ó $U \subseteq Z$ ó para algún ideal no cero Ide A se tiene que $[I \cap K, K] \subseteq U$ salvo si A es un orden central en un álgebra $C(2)$, $C(3)$ ó $C(4)$.*

Cabe preguntarse ahora por la clasificación de los ideales de Lie de K en condiciones más débiles. Por ejemplo cuando A es semiprima en vez de prima.

Se puede demostrar que una superálgebra semiprima es una suma subdirecta de superálgebras primas, ya que igual que en el caso no graduado se prueba que la intersección de los ideales primos graduados de la superálgebra es cero. Así si $\{P_i\}$ es la familia de ideales graduados primos de una superálgebra prima A, entonces $\pi\colon A \to \prod A/P_i$ es un monomorfismo graduado tal que $\pi_i \circ \pi$ es suprayectiva, con $\pi_i\colon A \to A/P_i$ la proyección canónica, y notemos que A/P_i son superálgebras primas. Esto es, A es una suma subdirecta de superálgebras primas. Notemos que también es cierto el recíproco, cualquier suma subdirecta de superálgebras primas es una superálgebra semiprima.

Para estudiar los ideales de Lie de K en este caso semiprimo, parece que lo propio es estudiar lo que ocurre en cada componente prima A/P_i, pero esto tiene un problema, y es que la superinvolución no se traslada directamente al cociente A/P_i. Para ello necesitaríamos que $P_i^* \subseteq P_i$, lo cual no tiene por qué cumplirse en todos los casos.

También en superálgebras semiprimas tenemos un problema añadido con la clausura central. Si A es una superálgebra con superinvolución entonces no podemos definir de forma natural una superinvolución en $Z^{-1}A$. Para ello ya en el caso no graduado C. Lanski (ver [9]) consideró en vez del centro, el conjunto de los elementos simétricos del centro, y esto se puede hacer en superálgebras también. Es decir que tomaremos $V = \{z \in Z : \quad z^* = z\}$ en vez de Z. Se prueba que si $Z \neq 0$ entonces $V \neq 0$ y entonces considerando $V^{-1}A = \{v^{-1}a : \quad v \in V - \{0\}, a \in A\}$ se tiene una superálgebra con superinvolución dada por $(v^{-1}a)^* = v^{-1}a^*$ que tiene por elementos antisimétricos $K^{-1}A$. Además si A es prima entonces $V^{-1}A$ también lo es. Curiosamente, hecha esta construcción se observa que $V^{-1}A = Z^{-1}A$ ya que para cada $0 \neq z \in Z, a \in A$ tenemos que $z^{-1}a = (zz^*)^{-1}(z^*a)$. Es decir, que la construcción asegura tener en la clausura una superinvolución definida de forma natural, pero no resulta ser nada diferente.

El siguiente resultado clasifica los ideales de Lie, U, en una superálgebra asociativa semiprima con superinvolución A. Se obtiene que ó nuevamente existe un ideal no cero I de A de modo que $[I \cap K, K] \subseteq U$ ó de modo alternativo la proyección de U en algunas de las componentes primas es central y entonces en el resto de componentes primas se da una situación muy particular. Para describir esto con más precisión definiremos previamente lo que se entiende porque A verifique $S(n)$. Diremos que una superálgebra semiprima A verifica $S(n)$ si cada imagen prima de A es un orden central en una superálgebra simple a lo más n^2-dimensional sobre su centro. Podemos ahora enunciar entonces el siguiente resultado que aparece demostrado en [7]:

Teorema 3.10. *Sea A una superálgebra semiprima con superinvolución, y sea U un ideal de Lie de K. Entonces ó A es una suma subdirecta de dos imágenes homomorfas semiprimas A', A'', de modo que A' satisface $S(4)$ y la imagen de U en A'' es central, ó existe un ideal I de A tal que $0 \neq [I \cap K, K] \subseteq U$.*

Todos estos resultados vienen a poner en evidencia la conexión entre la estructura asociativa de A y la de Lie de K. Por ejemplo en [8] queda también puesta de relieve esa relación. En ese trabajo se prueba que toda superálgebra semiprima tal que satisfaga la propiedad de que $[K^2, K^2] = 0$ debe verificar que es una superálgebra que verifica $S(2)$.

En la actualidad hay un gran interés en el estudio de las superálgebras. Las superálgebras han ayudado a resolver diversos problemas abiertos del álgebra y a simplificar construcciones. Desde su punto de vista se tiene una perspectiva nueva que ha ayudado, y va a seguir ayudando, a resolver y entender muchas cosas. Por ello, hay que conocerlas en profundidad, incluidas todas esas particularidades distintas de las álgebras correspondientes y los casos concretos, nuevos y especiales que surgen y que seguramene (como ha ocurrido en el pasado) tendrán un gran interés desde el punto de vista físico, y harán volver la teoría a sus orígenes.

Referencias

[1] N. Bourbaki. *Groupes et algebres de Lie.* Hermann, 1972.

[2] C. Gómez-Ambrosi, I. Shestakov. On the Lie Structure of the Skew Elements of a Simple Superalgebra with superinvolution. *Comm. Algebra* **208**, 43–71, 1998.

[3] C. Gómez-Ambrosi, J. Laliena, I. Shestakov. On the Lie Structure of the Skew Elements of a Prime Superalgebra with Superinvolution. *Comm. Algebra* **28** (7), 3277–3291, 2000.

[4] I. N. Herstein. *Topics in Ring Theory.* The University of Chicago Press, 1969.

[5] I. N. Herstein. *Rings with involution.* The University of Chicago Press, 1976.

[6] V. G. Kac. Lie Superalgebras. *Adv. Math.* **28**, 8–96, 1977.

[7] J. Laliena, S. Sacristán. Lie structure in semiprime superalgebras with superinvolution. *J. Algebra* **315**, 751–760, 2007.

[8] J. Laliena, S. Sacristán. On certain semiprime associative superalgebras. *Comm. Algebra* , –, 2009.
[9] C. Lanski. Lie structure in semi-prime rings with involution. *Comm. Algebra* **4** (8), 731–746, 1976.
[10] F. Montanter. On the Lie structure of associative superalgebras. *Comm. Algebra* **26**(7), 2337–2349, 1998.
[11] S. Montgomery. Constructing simple Lie Superalgebras from Associative Graded Algebras. *J. Algebra* **195**, 558–579, 1997.
[12] M. Racine. Primitive superalgebras with superinvolution. *J. Algebra* **206**, 588-614, 1998.
[13] C. T. C. Wall. Graded Brauer Groups. *Jour. Reine Angew. Math.* **213**, 187–199, 1964.

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Spain
Correo electrónico: `jesus.laliena@unirioja.es`

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Spain.
Correo electrónico: `sara.sacristan@unirioja.es`