

ANÁLISE DAS RELAÇÕES ENTRE A VOLATILIDADE HISTÓRICA E IMPLÍCITA E A VOLATILIDADE REALIZADA DO ÍNDICE PSI-20

Elisabete Fernanda Mendes Duarte, Instituto Politécnico de Leiria

RESUMO

A volatilidade desempenha um papel importante na avaliação dos activos financeiros, daí que proliferem na literatura estudos com vista à sua especificação e medida. Um vasto conjunto de estudos conclui que a análise do melhor previsor da volatilidade deve ser efectuada atendendo às especificidades do mercado financeiro onde se pretende fazer a aplicação.

O objectivo do presente trabalho é, através de uma simulação empírica determinar qual dos métodos de modelação da volatilidade, a volatilidade histórica e a volatilidade implícita, constitui o melhor previsor da volatilidade do índice PSI-20. No que se refere à volatilidade implícita, de forma a evitar alguns erros bastante citados na literatura, a análise da volatilidade implícita é efectuada com dados sobrepostos e não sobrepostos.

A análise da capacidade explicativa das séries de volatilidade histórica e implícita, efectuadas ao longo do presente trabalho, permitiram antever que nenhuma se apresenta como um estimador eficiente e não enviesado da volatilidade realizada. Não obstante, constata-se que o poder explicativo da volatilidade implícita é superior ao da volatilidade histórica. Contrariamente ao verificado em estudos empíricos congéneres, verifica-se que os resultados obtidos na modelação da volatilidade implícita com dados sobrepostos são superiores aos obtidos com dados não sobrepostos.

PALAVRAS-CHAVE: Volatilidade histórica, volatilidade implícita.

INTRODUÇÃO

A relação risco-rentabilidade serve de “guia” aos investidores, que apenas estarão dispostos a incorrer num risco superior se tiverem como contrapartida um lucro igualmente superior. Baseando-se nesta relação para a tomada de decisões de investimento, o problema de medir e prever o risco e a rentabilidade dos investimentos tornou-se num problema de importância crucial para os mercados financeiros. Este problema que se apresenta como deveras importante sob um ponto de vista prático, tornou-se também um desafio fundamental para mundo académico: encontrar valores cada vez mais próximos da realidade para estes dois parâmetros. A importância dada ao cálculo da volatilidade resulta do papel central que esta ocupa enquanto medida da variação do preço de um activo em torno da média, para um intervalo fixo de tempo. Assim, o parâmetro da volatilidade torna-se fundamental para o estabelecimento de estratégias de investimento fidedignas, nos mercados financeiros.

De entre os principais tipos (no sentido de mais utilizados pelos investigadores e investidores dos mercados financeiros) de modelação da volatilidade podem seleccionar-se a volatilidade histórica e a volatilidade implícita.

A volatilidade histórica assume que no futuro a volatilidade permanecerá similar aos valores que manteve no passado, pelo que o seu cálculo se torna relativamente simples. Embora possa ser levado a cabo de diferentes

formas, a utilização deste tipo de abordagem da volatilidade, usualmente pressupõe o cálculo do valor do desvio-padrão das rentabilidades do activo, num período histórico anterior ao que se pretende prever.

Baseando-se no modelo de Black e Scholes, foi encontrada uma medida que é amplamente considerada como a volatilidade futura do activo subjacente à opção para o período de tempo remanescente até à maturidade: a volatilidade implícita¹. Embora não esteja isenta de erros, a volatilidade implícita é largamente utilizada pelos analistas dos mercados financeiros como fonte de previsão da volatilidade futura.

Admitindo que o modelo de Black e Scholes de determinação do valor das opções é usualmente utilizado no mercado em estudo, então o valor obtido corresponderá à expectativa que os investidores têm para a volatilidade que irá vigorar durante o período de vigência da opção. Assim sendo, este parâmetro adquire importância especial na medida em que permite auscultar a opinião geral do mercado acerca da volatilidade de um activo em particular. Dado que contém expectativas quanto à volatilidade futura, admite-se pois, que incorpora informação que vai para além da que é fornecida pela volatilidade histórica.

Sabendo que a volatilidade tem tomado um papel cada vez mais importante na análise do risco inerente aos mercados financeiros, a literatura sobre o assunto não é, no entanto, unânime na análise da qualidade relativa dos valores previsionais da volatilidade dos activos financeiros fornecidos pelos diferentes modelos. No actual texto pretende-se avaliar o desempenho da volatilidade histórica e implícita como estimadores da volatilidade futura tendo como referência a volatilidade realizada para o mesmo período, para o índice PSI-20, o principal índice do mercado de acções português. De facto, um conjunto significativo de estudos conclui que a modelação da volatilidade a utilizar nos diferentes mercados financeiros deve ser adaptada às especificidades de cada um.

Assim, no ponto 1. do presente artigo, são desenvolvidas as formas de estimação da volatilidade histórica e volatilidade implícita. No ponto 2. é modelada a volatilidade previsional do índice PSI-20. No ponto 2.1. é efectuada a estimação da volatilidade histórica e no ponto 2.2. é efectuada a estimação da volatilidade implícita. Dado que existe na literatura evidência de que os resultados da aplicação da modelação da volatilidade implícita dependem da utilização de dados com e sem sobreposição, para garantir que os resultados obtidos são os mais correctos são efectuadas simulações nos pontos 2.2.2. e 2.2.3. com e sem dados sobrepostos. Os valores obtidos nas duas estimações são posteriormente comparados no ponto 2.2.4.. O ponto 3. apresenta as conclusões.

1. VOLATILIDADE

1. VOLATILIDADE HISTÓRICA

A forma mais simples de estimação da volatilidade é através da utilização da volatilidade histórica. Este método de estimação, na sua formulação mais simples, consiste em calcular o desvio-padrão do rendimento periódico dos activos, durante um período anterior aquele para o qual se pretende prever a volatilidade. Por norma, no cálculo da volatilidade utiliza-se um período histórico imediatamente anterior e com uma duração similar ao período que estamos a analisar

A volatilidade, medida pelo desvio-padrão da rentabilidade do activo com risco, σ , é dada pela seguinte expressão:

¹ Repare-se que o termo “volatilidade implícita” se refere a uma forma de cálculo da volatilidade em que, tomando como base um modelo de avaliação de opções, o parâmetro é obtido igualando o valor teórico e o valor real da opção. O presente texto apenas se refere ao cálculo do valor teórico da opção obtido através do modelo de avaliação de opções de Black e Scholes, pelo que a expressão volatilidade implícita empregue ao longo do texto deverá ser sempre entendida como tal.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}} \quad (1)$$

onde y_t representa a rentabilidade do activo no momento t e n o número de observações. O método mais simples de cálculo da volatilidade histórica passa pela introdução dos preços de encerramento diários na fórmula da rentabilidade. Este método leva à necessidade de obtenção de uma observação diária da rentabilidade do activo cuja volatilidade se pretende estudar. Note-se que, considerando observações diárias da rentabilidade, vamos obter a volatilidade diária, pelo que se torna necessário anualizar este valor. Para tal ao valor anteriormente obtido terá de ser multiplicado pelo valor da raiz quadrada do número de dias em que houve transacções.

Utilizar toda a amostra para o cálculo, uma vez que este método pressupõe peso igual para todas as observações, não permite que as informações recentes sejam realçadas. Paralelamente, é normal, com séries temporais, considerar que, quanto mais recentes os dados, maior a sua valia e também que quanto maior o número de observações, melhor será a qualidade da estimação. No caso da volatilidade estas duas regras têm que ser encaradas com alguma reserva. Assim, dados muito distantes podem, contrariando a regra geral, piorar e não melhorar a estimação. Por outro lado considerar apenas dados mais recentes será ignorar informação histórica que pode ser útil.

A inexistência de consenso e a verificação das limitações deste método de estimação, levaram alguns autores a propor algumas variantes. Assim, Parkinson (1980) propôs um método que considera a oscilação do preço do activo dentro do próprio dia. Admite-se que um maior volume de informação contribua para melhorar a estimativa. Garman e Klass (1988) sugeriram um estimador que além de considerar a mesma informação do método sugerido por Parkinson, acrescenta informação relativa às cotações do activo no seu valor de fecho diário.

Segundo Evnine (1988) ao introduzir os valores extremos, juntamente com os preços de encerramento, o método de Garman e Klass para previsão da volatilidade, torna-se cerca de cinco vezes mais eficiente do que uma estimativa de volatilidade que os não inclua. Tal afirmação baseia-se no facto de que os valores extremos das séries contém sempre um conjunto de informação significativo acerca da série que pretendem descrever.

Numa tentativa de eliminar algumas limitações do desvio padrão histórico, nomeadamente o facto de ponderar de igual forma as observações mais e menos recentes, foi definido um método que tomou o nome de *Processo de Alisamento Exponencial*. Neste modelo a volatilidade vem expressa através de dois termos: um primeiro autoregressivo e o segundo que representa a rentabilidade no momento histórico imediatamente anterior. O primeiro dos termos aproxima-se do próprio desvio padrão histórico, pelo que é o segundo elemento que faz a diferença. Este segundo termo, o valor do quadrado dos rendimentos obtidos, devidamente ponderado vai aligeirar os “choques” aleatórios (os tais valores extremos) que normalmente estão presentes em todas as séries temporais financeiras.

A grande objecção à utilização da volatilidade histórica como previsor da volatilidade é a de que os valores históricos dificilmente se poderão repetir. No entanto a volatilidade histórica pode também ser relevante como previsor dos seus valores futuros, na medida em que contribui para a formação de expectativas, visto que frequentemente se verifica empiricamente que as duas séries temporais estão correlacionadas.

1.2. VOLATILIDADE IMPLÍCITA

Tal como atrás foi referido o termo volatilidade implícita refere-se ao cálculo da volatilidade através da igualdade entre o preço teórico e o preço real da opção. Neste trabalho escolheu-se modelo de avaliação de opções de Black e Scholes para o cálculo do valor teórico da opção. A razão que presidiu a esta escolha é o facto deste ser o modelo mais comumente utilizado nos mercados financeiros para o cálculo da volatilidade implícita. A volatilidade implícita assenta, pois, no modelo Black e Scholes e, se o mercado em causa for eficiente, deverá constituir uma previsão da volatilidade futura, na medida em que contém em si toda a informação de que o mercado dispõe.

O primeiro artigo publicado acerca da estimação da volatilidade implícita foi o de Latané e Rendleman (1976), sendo, contudo, um domínio sobre o qual se debruçaram um conjunto muito vasto de autores. Schmalensee e Trippi (1978) tal como outros investigadores posteriores estudaram a capacidade da volatilidade implícita das opções de compra, constituir um bom predictor da volatilidade futura. Os primeiros resultados foram animadores: a volatilidade implícita é efectivamente melhor predictor da volatilidade futura do que o simples desvio padrão das rentabilidades passadas. Existe, não obstante, um vasto conjunto de literatura dedicado ao estudo empírico da eficiência da volatilidade implícita como predictor da volatilidade futura. Os resultados quanto à eficiência da volatilidade implícita, como estimador da volatilidade futura, dividem-se. Assim, Jorion (1995) constata que a volatilidade implícita é um estimador eficiente, embora enviesado da volatilidade futura para futuros sobre divisas; Day e Lewis (1992) concluem que se trata de um estimador enviesado e ineficiente numa aplicação às opções sobre o índice S&P500 (1985-1989) e a mesma conclusão é retirada por Lamoureux e Lastrapes (1993) para um conjunto de 10 acções (1982-1984); Canina e Figlewski (1993) são ainda mais extremistas quando, numa aplicação às opções sobre o índice S&P100, concluem pela inexistência de qualquer relação entre a volatilidade implícita e a volatilidade futura, concluindo mesmo que a volatilidade implícita não comporta a informação recentemente incorporada nos mercados financeiros. Estes resultados são fortemente contestados por Christensen e Prabhala (1998) que, num ensaio identicamente aplicado ao índice S&P 100, concluem que os desempenhos obtidos pela volatilidade implícita ultrapassam largamente os obtidos com a volatilidade histórica. Contrastando com as anteriores tentativas de explicação dos resultados de Canina e Figlewski que apontavam como explicação um ineficiente processamento da informação sobre a volatilidade pelos mercados de opções, ou a incorrecta aplicação do modelo de Black e Scholes aos mercados de opções sobre índices², estes autores explicam os resultados anteriores pelo facto de a série testada não ser suficientemente longa, de ter utilizado dados sobrepostos e ainda pelo facto de as observações utilizadas terem uma frequência muito alta.

Christensen e Prabhala (1998) consideram que os seus resultados diferem tanto dos anteriores porque tiveram mais cuidado na selecção da amostra, utilizando séries temporais mais longas (Novembro de 1983 a Maio de 1995) e com dados não sobrepostos³.

Matematicamente, é impraticável a inversão da fórmula de Black e Scholes, o que torna o cálculo da volatilidade implícita não linear. Não existe, então, uma forma fechada que permita a sua rápida obtenção, pelo que encontrar o valor exacto passa por um processo de busca iterativo. Para tal têm-se em conta que o preço de uma opção de

² Relacionados com os custos de transacção proibitivos associados às posições de cobertura de opções sobre índices.

³ Contrariamente ao que acontece nos estudos de Day e Lewis (1992), Lamoureux e Lastrapes (1993) e Canina e Figlewski (1993), todos eles aplicados aos mercados de activos financeiros.

compra é função crescente da volatilidade⁴. De forma a tornar este método operacional, têm surgido na literatura diversos procedimentos numéricos sendo o mais conhecido e utilizado o de Newton-Raphson. Uma vez que este procedimento se torna tanto mais eficaz quanto mais próximo do valor exacto se encontra a estimativa inicial, foram desenvolvidos alguns métodos de determinação do valor inicial, sendo o mais conhecido o algoritmo desenvolvido por Manaster e Koehler (1982).

Brenner e Subrahmanyam (1988) sugeriram, igualmente, uma fórmula de estimar a volatilidade implícita. Os procedimentos que estabeleceram, muito mais simples do que os anteriores dado que não recorrem a uma busca iterativa, proporcionam estimativas muito razoáveis da volatilidade implícita desde que as opções utilizadas estejam *at-the-money*. Os resultados tornam-se particularmente bons se forem utilizadas opções de compra europeias que não gerem dividendos. Brenner e Subrahmanyam argumentam que a fórmula que desenvolveram, embora tenha algumas limitações que a leva a não ser exacta quando o preço da opção de afasta de *near-the-money*, proporciona no entanto um valor de partida mais próximo da volatilidade exacta do que o procedimento de Manaster e Koehler. O valor fornecido por esta fórmula pode, então, ser utilizado como valor de partida para o procedimento de Newton-Rapson, o que pode ser uma vantagem porque acelera a velocidade de convergência. Bharadia, Christofides e Salkin (1995) e Corrade e Miller (1996) estenderam, ainda, este estudo, para aumentar a sua exactidão, a uma banda de opções *moneyness*⁵.

Um outro método de obter a volatilidade implícita é o método bissecional. Este método requer duas estimativas da volatilidade. Uma primeira, baixa, de volatilidade implícita σ_L à qual corresponde um valor da opção C_L . Uma segunda, alta, de volatilidade implícita σ_H , à qual corresponde um valor da opção C_H . Nestas condições o valor da opção estará entre C_L e C_H . A volatilidade obtida através da estimativa bissecional é dada então por:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_L + (C_M - C_L) \frac{\sigma_H - \sigma_L}{C_H - C_L} \quad (2)$$

Se C_M representar o preço de mercado da opção e $|C_M - C(\sigma_{i+1})| \leq \xi$, sendo ξ o grau de exactidão pretendido, então σ_{i+1} representa a volatilidade implícita.

São muitos os estudos que demonstram que o modelo clássico de Black e Scholes com volatilidade constante, não descreve adequadamente a dinâmica dos preços dos activos subjacentes às opções que o modelo pretende avaliar. No modelo de Black e Scholes assume-se que o processo estocástico seguido pelo activo subjacente tem volatilidade constante. Nessas circunstâncias, todas as opções sobre esse activo, para um dado prazo, deveriam ter a mesma volatilidade implícita. Ora são diversos os estudos empíricos que comprovam exactamente o

⁴ Bergman, Grundy e Wiener (1996) concluem, sob a forma de teorema, que os preços das opções são positivamente correlacionados com a volatilidade do activo subjacente. Note-se que, apesar de ser geralmente aceite, dado que muitos estudos realizados sobre a volatilidade implícita parecem confirmar este teorema, existem estudos empíricos que rejeitam este teorema, quer parcial, quer totalmente, um exemplo é o estudo, atrás citado, de Canina e Figlewski (1993).

⁵ Refere-se a uma medida da profundidade com que as opções estão *in* ou *out-of-the-money*. Usualmente divide-se o preço corrente do activo subjacente pelo respectivo preço de exercício actualizado. O grau de *moneyness* será menor quanto mais perto da unidade for o valor obtido (o preço de exercício é igual ao preço do activo subjacente) e o activo estará mais *deep-in-the-money* quanto maior for o valor e estará mais *deep-out-of-the-money* quanto menor for o valor.

contrário, ou seja, que a volatilidade implícita de opções com a mesma data de expiração e preços de exercício diferentes, é alta para opções *out-of-the-money* e *in-the-money* e baixa para opções *at-the-money*. Ou seja, a volatilidade implícita baseada neste modelo exhibe dependência do *moneyness*. Este efeito é vulgarmente conhecido como o efeito “sorriso” da volatilidade. A existência deste efeito leva a que, os valores da volatilidade implícita estejam sistematicamente correlacionados com os preços de exercício.

As investigações levadas a cabo em torno desta temática têm demonstrado que os valores obtidos estão tanto mais próximos dos reais quanto mais os preços das opções estão *at-the-money*. Esta situação é frequentemente explicada pelo facto de serem, usualmente, as opções mais transaccionadas e também por serem as que menos reflectem erros advindos do *spread bid-ask* ou derivados de os preços utilizados estarem desfasados no tempo quando deveriam ser simultâneos.

Paralelamente existe a necessidade de evitar o uso de opções com diferentes maturidades uma vez que traduzem diferentes expectativas quanto ao comportamento da volatilidade de curto, médio e longo prazo, o que resulta numa “estrutura de prazo das volatilidades”. Na literatura empírica sobre o tema, observa-se que as volatilidades implícitas das opções com maturidades maiores são, usualmente, superiores às volatilidades implícitas das opções com maturidades mais curtas.

Apesar de todas as limitações atrás referidas a volatilidade implícita continua a ser uma das aplicações mais frequentes do modelo de Black e Scholes. A volatilidade implícita tem sido utilizada para testar a própria validade do modelo em que se baseia e também para obter estimativas de volatilidade para os mercados. Torna-se particularmente importante na medida em que permite auscultar a opinião geral do mercado acerca da volatilidade de um activo em particular permitindo, assim, delinear estratégias de comercialização. Note-se que a estimativa da volatilidade futura proporcionada pela volatilidade implícita estará tanto mais próxima da realidade quanto mais eficiente for o mercado, dado que, num mercado eficiente a volatilidade implícita contém toda a informação que está incorporada nas variáveis de informação do mercado. O facto de se obterem várias volatilidades sobre um mesmo activo, e para o mesmo prazo, é normalmente contornado utilizando-se diversos esquemas de ponderação.

2.MODELAÇÃO DA VOLATILIDADE DO ÍNDICE PSI-20

Neste ponto do trabalho pretende-se testar os dois modelos de volatilidade determinística (volatilidade histórica e volatilidade implícita), com o objectivo de verificar o que melhor se adapta ao caso do índice PSI-20.

Devido ao facto de se usarem métodos de estimação diferentes existe necessidade de utilizar duas séries de dados. A primeira estimação utiliza as séries diárias da rentabilidade do índice PSI-20 e a segunda as séries de dados diárias/mensais⁶ das opções sobre o PSI-20.

Dado que o objectivo da análise é encontrar um bom previsor da volatilidade da rentabilidade diária do índice PSI-20, é sobre esta última série que recai a breve análise que se segue.

A série temporal utilizada na estimação da volatilidade é o índice PSI-20 com os dados obtidos desde 19 de Março de 1999 até ao final de Março de 2002. A escolha do período de simulação surge devido à necessidade de utilização dos dados das opções sobre o PSI-20. Assim, a escolha do actual período de simulação baseia-se nas datas em que existiram opções sobre o PSI-20, negociadas na bolsa portuguesa. O início da negociação de opções sobre o PSI-20 ocorreu em 19 de Março de 1999 e, a partir de Abril de 2002, apesar de continuarem

⁶ A série de dados diária é utilizada para a modelação com dados sobrepostos e a série mensal para a modelação com dados não sobrepostos.

listadas, as opções deixaram de ser negociadas, pelo que deixou de existir processo de formação de preços. Foram utilizados os dados de fecho diários e a rentabilidade instantânea do índice.

A análise da volatilidade realizada do PSI-20⁷ em conjunção com a análise do crescimento das cotações para todo o período permite identificar dois sub períodos com comportamento bastante distintos:

- 19.03.99 a 10.03.00 – Período de volatilidade média-alta com subida das cotações.
- 11.03.00 a 28.03.02 – Período de volatilidade média-alta com descida das cotações.

A identificação destes dois sub períodos permite estudar com mais pormenor o seu comportamento, dado que os níveis de volatilidade não se alteram muito ao longo de todo o período mas o crescimento das cotações tem um comportamento completamente inverso.

O período de 10.03.99 a 10.03.00 é sem dúvida, dentro do lapso de tempo considerado, o período em que o PSI-20 teve um comportamento de molde a atrair os investidores. Neste período existiu um crescimento das cotações, apesar do nível de volatilidade não ser muito baixo. A partir de Abril de 2000 o mercado português iniciou um processo de queda gradual das cotações. Mantém-se os elevados níveis de volatilidade mas agora com queda das cotações. O período à volta do 11 de Setembro de 2001 merece uma referência particular dado que há uma queda muito brusca das cotações paralelamente com uma elevação da volatilidade. No entanto este processo é momentâneo, voltando o mercado, muito rapidamente, para os níveis iniciais.

A análise das rentabilidades e volatilidades para o período, na sua globalidade e excluindo os dez dias posteriores ao 11 de Setembro, para cada um dos subperíodos identificados, é apresentada no quadro 1 e permite analisar com mais rigor estas situações.

Quadro 1 – Rentabilidade e volatilidade do índice PSI-20 para os diferentes períodos

Períodos	Valor médio	Rentabilidade Média (%)	Volatilidade Anual
10-03-99 a 10-03-00	10831,45	0,15	17,31
11-03-00 a 28-03-02	9846,94	-0,13	19,17
19-03-99 a 28-03-02	10168,12	-0,04	18,68
19-03-99 a 28-03-02 (a)	10209,56	-0,02	18,23

(a) mesmo período mas excluindo os 10 dias posteriores ao 11 de Setembro

A análise do quadro 1 permite verificar que no segundo período identificado, o nível de volatilidade é superior em cerca de dois pontos percentuais, com uma média inferior em cerca de 984 pontos índice. Consta-se, igualmente, que o nível de rentabilidade média diária tem um comportamento precisamente oposto, apresentando um valor de cerca de 0,15% para o primeiro e de -0,13% para o segundo período.

O segundo período analisado apresenta-se como muito conturbado para as bolsas em geral, e no caso português, agravado pelo esgotamento das privatizações.

Quadro 2 – Estatísticas descritivas da série do PSI-20 para os diferentes períodos

	19-03-99 a 28-03-02	10-03-99 a 10-03-00	11-03-00 a 28-03-02
Média diária (%)	-0,0356678	0,1503149	-0,1253512
Máximo (%)	4,2976280	3,4072485	4,2976280
Mínimo (%)	-4,5670590	-4,2355002	-4,5670590
Desvio-Padrão (%)	1,1762766	1,0879289	1,2063850
Assimetria	-0,1758089	0,0139694	-0,2063059
Curtose	1,3479810	1,3521842	1,3018667
Jarque-Bera (prob)	5610,85 (0,000)		

⁷ Ao longo de todo o texto vai utilizar-se o termo “volatilidade realizada” para referir a volatilidade efectiva no período, calculada *ex-post*.

A análise do quadro 2 permite verificar que a rentabilidade média diária apresenta comportamentos muito diferentes nos dois sub períodos identificados, um facto importante que pode ser mascarado quando se considera o comportamento da rentabilidade na globalidade do período. O comportamento dos valores máximos e mínimos da rentabilidade diária levam a constatar o porquê da volatilidade no segundo sub período ser mais elevada. Uma maior oscilação das cotações a par com uma rentabilidade média negativa, são as características que mais se destacam no comportamento da rentabilidade no período de 11.03.2000 a 28.03.2002.

2. APLICAÇÃO EMPÍRICA

2.1. VOLATILIDADE HISTÓRICA

2.1.1. PROCEDIMENTO AMOSTRAL

A utilização da volatilidade histórica, como previsor da volatilidade futura, nos mercados financeiros é muito frequente. A utilização deste tipo de modelação da volatilidade resulta sobretudo da sua simplicidade. Embora existam diversas formas de modelação da volatilidade histórica, neste tipo de estimação não há garantias, nem suporte teórico, de os valores obtidos estejam próximos dos efectivamente verificados. Assim sendo, optou-se por utilizar nas estimações que se seguem, o método mais simples de estimação da volatilidade histórica. Utilizou-se, pois, o desvio padrão do rendimento diário dos activos, devidamente anualizado, durante o período imediatamente anterior, e com a mesma duração (um ano), do período em análise.

Para a avaliação da volatilidade histórica foram feitas comparações entre a série obtida e a volatilidade realizada calculada *ex-post*, para os mesmos períodos de tempo. A avaliação comparativa das séries é iniciada com uma análise comparativa das estatísticas descritivas das duas séries.

É usual fazer a análise da eficiência de um estimador da volatilidade recorrendo a uma análise convencional da estimação, através do método dos mínimos quadrados ordinários, da capacidade explicativa desse estimador em relação à volatilidade realizada. Assim, optou-se por estimar o modelo:

$$\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_h H_t + e_t \quad (3)$$

onde σ_t é a volatilidade realizada calculada *ex-post* para o período t e H_t representa a volatilidade histórica no início do período t .

Três hipóteses podem aqui ser testadas:

- Se a volatilidade histórica contém alguma informação acerca da volatilidade realizada, nesse caso: $\alpha_h \neq 0$.
- Se a volatilidade histórica é uma estimativa não enviesada da volatilidade realizada, nesse caso: $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_h = 1$.
- Se a volatilidade histórica é um previsor eficiente da volatilidade realizada, nesse caso e_t deverá ser um ruído branco, não correlacionado com qualquer variável do conjunto de informação de mercado.

2.1.2. RESULTADOS

O cálculo da volatilidade histórica, para o período em apreço, permite obter os valores para a série de volatilidade histórica que são comparados com a volatilidade realizada, calculada *ex-post* para o mesmo período. A comparação das estatísticas descritivas das duas séries permitiu obter o quadro seguinte.

Quadro 3 – Estatísticas descritivas das séries de Vol. Realizada e Vol. Histórica

	Vol. Realizada	Vol. Histórica
Média	0,1872	0,2040
Desvio Padrão	0,0146	0,0340
Máximo	0,2168	0,2907
Mínimo	0,1643	0,1643
Assimetria	0,5044	1,2107
Curtose	-1,1118	0,4080

A análise das estatísticas relativas aos primeiros quatro momentos da distribuição das duas séries, serve para concluir que existe uma grande diferença entre as duas, que acaba por se traduzir em valores muito dispares de qualquer um dos primeiros quatro momentos da distribuição. A série de volatilidade realizada apresenta uma menor assimetria, embora ambas as séries apresentem assimetria positiva. Ao nível da curtose verifica-se um comportamento oposto entre a volatilidade realizada e a volatilidade histórica.

A estimação da regressão descrita na fórmula (3), permite avaliar a informação contida na volatilidade histórica, acerca da volatilidade realizada. A aplicação da fórmula leva à obtenção dos seguintes resultados:

Quadro 4 – Informação contida na volatilidade histórica

α_0	α_h	R^2	Dw
0,1597 (0,003087)	0,134 (0,014886)	0,0976	0,0046

(entre parêntesis é apresentado o desvio padrão)

O facto de α_h apresentar um valor diferente de zero significa que a volatilidade histórica contém alguma informação acerca da volatilidade realizada. Não obstante, α_h aproxima-se mais de zero do que da unidade.

Dado que α_0 é diferente de zero e α_h diferente da unidade, pode afirmar-se que a volatilidade histórica é um estimador enviesado da volatilidade realizada.

Uma análise comparativa com os resultados de Christensen e Prabhala (1998), para o mercado de opções sobre o índice S&P 100, permite verificar que, no mercado português, o poder explicativo da volatilidade histórica é inferior ao encontrado no mercado americano (0,138 para o mercado português e 0,57 para o mercado americano).

A estatística R^2 na regressão anterior permite concluir que efectivamente a capacidade previsional da volatilidade histórica, em relação à volatilidade realizada, é muito baixa. A estatística de Durbin-Watson (Dw) apresenta um valor de 0,0046, o que é indicativo de existência de correlação positiva na série de resíduos. Esta análise permite concluir que a volatilidade histórica é um previsor ineficiente da volatilidade realizada.

2.2. VOLATILIDADE IMPLÍCITA

2.2.1. PROCEDIMENTO AMOSTRAL

Uma segunda tentativa de modelação da volatilidade do índice PSI-20 passa pela utilização da volatilidade implícita. A investigação deste tipo de volatilidade aplicada ao índice PSI-20 enfrenta à partida diversas limitações, para além das usualmente referidas em estudos empíricos aplicados a mercados estrangeiros congêneres, e que passam pelo efeito sorriso da volatilidade, bem como pela detecção de uma estrutura de prazo da volatilidade.

Em Portugal trabalhar a volatilidade do índice PSI-20 através da volatilidade implícita implica utilizar as opções sobre o PSI-20 que têm por activo subjacente os futuros sobre o PSI-20. A utilização de opções sobre futuros não é a mais correcta porque, como está devidamente descrito na literatura, a volatilidade dos futuros é sistematicamente maior do que a volatilidade do índice.

A série é relativamente curta dadas as condicionantes do mercado português sobre o PSI-20. O mercado de opções sobre o PSI-20 é um mercado jovem com um reduzido número de transacções e consequentemente com pouca liquidez. Muitos foram os dias em que não existiu qualquer transacção, facto que se intensificou em particular ao longo do ano 2000.

Apenas a partir de Maio de 2001 é que se verifica uma reanimação do mercado com intensificação da quantidade de transacções. A partir de Junho constata-se, mesmo, que existem transacções na maioria dos dias em que o mercado esteve aberto, sendo vários os contratos que foram diariamente transaccionados. Este aumento na actividade da bolsa de derivados é, muito provavelmente, um reflexo da ligação entre a BVLP e a MEFF que teve o seu arranque no princípio de Abril de 2001. Este período de maior volume de transacções é, no entanto, muito curto para a análise que se pretende efectuar.

Quadro 5 – Transacções de contratos de opções sobre o índice PSI-20

	1999	2000	2001	2002
Pos. Abertas (final do ano)	4975	4547	1002	0
Nº negócios	557	328	860	1155
Volume de contratos	26781	27277	20090	876019

(fonte: Relatório sobre a situação dos mercados de valores imobiliários – dados da BVLP)

Note-se que se, em relação ao número de negócios efectuados, 2001 se apresenta como um ano de desenvolvimento do mercado de opções, a avaliação do valor transaccionado, por comparação com anos anteriores, já é uma antevisão do que acaba por suceder em 2002 em que os contratos só foram negociados durante os três primeiros meses. Após um acréscimo de actividade de 1999 para 2000, em 2001 a quebra no mercado de opções é notória. Registe-se ainda o facto de o número de posições abertas no final de 2001 ser de apenas 1002. No ano de 2002 o facto de em apenas três meses existir um maior número que de negócios quer de volume de contratos resulta do facto de ter existido, no dia 05 de Fevereiro a negociação de um volume de 850000 contratos de opções com vencimento a um mês. Esta foi uma situação esporádica, apresentando durante o resto do ano, um volume de negócios praticamente nulo.

A análise que agora se efectua centra-se nas opções de compra porque as opções de venda tiveram volumes de negociação muito baixos, de apenas cerca de 50% dos verificados com as opções de compra.

Para além dos factos atrás mencionados a maioria das opções transaccionadas dizem respeito a prazos de vencimentos muito curtos. Esta tendência acentua-se ao longo de todo o período em análise. Por exemplo, em 2001 existem apenas 9 dias com transacções de opções de prazos superiores a 30 dias. No mercado de opções sobre o PSI-20 as transacções de opções com prazos de vencimento superiores a 30 dias dizem respeito, salvo raras excepções, ao contrato com vencimento no mês seguinte. Por último existe ainda como limitação o facto de que existe um conjunto muito significativo das opções transaccionadas que não se encontravam *at-the-money*.

Para encontrar os valores da volatilidade implícita – dados sobrepostos – recorreu-se ao método bissecional com um grau de exactidão de 0,01%. Para este estudo, e para evitar o problema da “estrutura de prazo da volatilidade” optou-se por ignorar as transacções que diziam respeito a opções cuja data de expiração seja superior a 30 dias, o que, como atrás ficou referido, levou à eliminação de um conjunto muito reduzido de

transacções. Para os dias em que foram efectuadas transacções de opções com diferentes preços de exercício as volatilidades obtidas foram ponderadas pelos respectivos volumes de transacções, a exemplo do procedimento usualmente utilizado em aplicações empíricas congêneres.

Para que se pudesse fazer a comparação, uma vez que nem em todos os dias houve transacções e consequentemente formação de preços no mercado de opções, considerou-se, para os dias em que não existiram transacções, o valor da volatilidade implícita observada no dia imediatamente anterior.

Christensen e Prabhala (1998) consideram que muitos dos estudos empíricos que aplicam a volatilidade implícita enfermam de dois erros principais: o uso de séries de dados curtas e a utilização de dados sobrepostos. Quanto ao uso de séries mais ou menos curtas, o mercado português sobre o índice PSI-20 tem obviamente a limitação do tempo de negociação das opções ser muito curto. Quando se tenta trabalhar com valores não sobrepostos existe a necessidade de trabalhar com valores mensais, o que encurta ainda mais a série. No caso português a utilização de dados não sobrepostos leva à obtenção de uma série de apenas 36 observações.

A série de dados mensais da volatilidade implícita – dados não sobrepostos – foi obtida da seguinte forma: atendendo a que o último dia de negociação é a terceira sexta-feira do mês de vencimento, avançou-se para a segunda-feira seguinte à expiração de um contrato. Foi então retirado do mercado informação relativa: ao valor de mercado do índice, ao preço da opção de compra que, expirando dentro de um mês, seja aquela cujo valor está mais *at-the-money* (em ambos os casos valores de fecho diários), ao respectivo preço de exercício e à taxa de juro Euribor com vencimento a um mês.

Dado que mercado de opções sobre o PSI-20 não foi, durante o período em análise, muito activo, existiu alguma dificuldade em cumprir exactamente com estas regras. Assim, sempre que se verificou a ausência de negociação no dia previsto passou-se para o dia imediatamente seguinte em que existiu negociação do contrato com vencimento a um mês. Este problema tornou-se mais notório ao longo do ano de 2000, onde apenas no mês de Dezembro existiram negociações do contrato com vencimento a um mês, na segunda-feira posterior à terceira sexta-feira do mês. Ao longo do ano 2000, as discrepâncias atingem o limite máximo de 11 dias levando a que os contratos analisados tenham vencimentos que oscilam entre os 30 e os 16 dias. Para os restantes anos em análise, a oscilação das maturidades dos contratos é substancialmente menor variando entre os 30 e os 25 dias. Para cada observação do preço da opção calculou-se então a volatilidade implícita recorrendo-se ao método bissecional com um grau de exactidão de 0,01%. Note-se que, correspondendo ao objectivo visado, a série obtida não apresenta qualquer sobreposição, sendo sim um conjunto de opções com vencimentos sucessivos e maturidade de um mês.

A análise da eficiência da volatilidade implícita, enquanto estimador da volatilidade realizada, é efectuada seguindo os mesmos passos dados na análise da volatilidade histórica. A volatilidade realizada é calculada *ex-post* para os períodos de tempo que oscilam entre a data em que é feito o cálculo da volatilidade implícita e a maturidade do respectivo contrato de opção⁸. As duas séries de volatilidade são comparadas com base nas respectivas estatísticas descritivas.

A análise da eficiência da volatilidade implícita como estimador da volatilidade futura pretende averiguar se a informação contida na volatilidade implícita é relevante para a previsão da volatilidade futura, fazendo comparações com o nível de volatilidade realizada calculada *ex-post* para os mesmos períodos. A análise

⁸ O que implica o uso de séries de volatilidade realizada, calculadas *ex-post*, diferentes das utilizadas para a comparação com a série de volatilidade histórica.

convencional utilizada neste tipo de testes é obtida através de uma estimação, através do método dos mínimos quadrados ordinários, do modelo apresentado na equação seguinte:

$$\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_i I_i + e_t \quad (4)$$

onde σ_t representa a volatilidade realizada, calculada *ex-post*, para o período t e I_i representa a volatilidade implícita no início do período t (devido à necessidade de coincidência dos períodos para os quais se analisa a volatilidade implícita e a realizada).

Tal como para a volatilidade histórica, são aqui testadas três hipóteses:

- Se a volatilidade implícita contém alguma informação acerca da volatilidade realizada.
- Se a volatilidade implícita é uma estimativa não enviesada da volatilidade realizada.
- Se a volatilidade implícita é um previsor eficiente da volatilidade realizada.

2.2.2. RESULTADOS – DADOS SOBREPOSTOS

Foram calculadas as estatísticas descritivas da série, que apresentadas no quadro que se segue.

Quadro 6 - Estatísticas descritivas das séries (volatilidade implícita e realizada) – dados sobrepostos

	Vol. Realizada	Vol. Implícita
Média	0,1693	0,2420
Desvio Padrão	0,0680	0,0738
Máximo	0,0043	0,0056
Mínimo	0,0001	0,0005
Assimetria	1,0541	1,5831
Curtose	1,3691	4,2821

Ao analisar as estatísticas descritivas das séries verifica-se com facilidade a discrepância existente entre elas. Embora apresentem desvio padrões com valores próximos, verifica-se que, em média, a volatilidade implícita é superior à volatilidade realizada, para o mesmo período.

Embora ao nível da assimetria se verifique que a série de volatilidade implícita apresenta uma assimetria positiva superior é ao nível da curtose que se encontra a maior diferença, apesar de ambas as séries serem leptocúrticas.

A análise da eficiência da volatilidade implícita como estimador da volatilidade futura, pretende averiguar se a informação contida na volatilidade implícita é relevante para a previsão da volatilidade futura, fazendo comparações com o nível de volatilidade realizada calculada *ex-post* para os mesmos períodos. Assim, a estimação do modelo apresentado na fórmula (4) permite obter os seguintes resultados:

Quadro 7 – Informação contida na volatilidade implícita – dados sobrepostos

α_0	α_i	R^2	Dw
0,11968 (0,008)	0,2052 (0,03)	0,0497	0,2320

(entre parêntesis é apresentado o desvio padrão)

A análise do quadro anterior permite concluir que α_0 e α_i são diferentes de zero. Dado que, adicionalmente, α_i é diferente de um, pode afirmar-se que a volatilidade implícita, calculada com dados sobrepostos, é um estimador enviesado da volatilidade realizada.

O facto de α_i apresentar um valor de 0,2052 significa que contém alguma informação acerca da volatilidade realizada, apesar do seu valor não ser muito significativo. A comparação com os resultados de Christensen e Prabhala (1998) permite concluir que os valores obtidos para o mercado português são bastante inferiores aos obtidos para um mercado americano congénere (0,2052 contra 0,76 encontrado na aplicação ao mercado de opções sobre o índice S&P 100).

A estatística R^2 apresenta um valor muito inferior à unidade, o que reforça a conclusão de que a volatilidade implícita não constitui um bom estimador da volatilidade realizada. A estatística de Durbin-Watson apresenta, também, um valor muito baixo sugestivo da existência de correlação positiva nos resíduos da estimação. Assim, a volatilidade implícita, para além de enviesada é ainda um estimador ineficiente da volatilidade realizada.

2.2.3. RESULTADOS – DADOS NÃO SOBREPOSTOS

Por definição a volatilidade implícita dá-nos uma previsão da volatilidade *ex-ante*, assim, e porque o objectivo é encontrar um bom predictor da volatilidade, calculou-se o desvio padrão da rentabilidade do índice PSI-20, *ex-post*, para os mesmos períodos de tempo. Uma análise das estatísticas descritivas das séries permite obter os seguintes valores:

Quadro 8 – Estatísticas descritivas das séries (volatilidade implícita e realizada) – dados não sobrepostos

	Vol. Realizada	Vol. Implícita
Média	0,1729	0,2385
Desvio Padrão	0,0579	0,0390
Máximo	0,0036	0,0030
Mínimo	0,0009	0,0016
Assimetria	1,2432	-0,3065
Curtose	2,1526	-0,5219

A análise do quadro anterior permite verificar que efectivamente existe uma grande diferença entre as estatísticas descritivas das séries. Ao nível da média a diferença atinge 6,56 %, apresentando-se a volatilidade implícita com valores, em média, bastante superiores. Ao nível do desvio padrão mantém-se a discrepância das séries, mas é na análise da assimetria e da curtose que as maiores diferenças se verificam. A volatilidade realizada apresenta assimetria positiva e a volatilidade implícita assimetria negativa. Já no que respeita à curtose o comportamento inverso mantém-se, com a volatilidade realizada com uma distribuição leptocúrtica e a volatilidade implícita com uma volatilidade planicúrtica.

A estimação da regressão (4) aplicada aos dados mensais permite obter os seguintes valores:

Quadro 9 – Informação contida na volatilidade implícita – dados não sobrepostos

α_0	α_i	R^2	Dw
0,20414 (0,0604)	-0,130867 (0,025)	0,00776	1,315

(entre parêntesis é apresentado o desvio padrão)

A análise da regressão cujos resultados são apresentados no quadro anterior leva a que se encontrem valores para α_0 e α_i diferentes de zero, apresentado agora α_i um valor negativo e bastante diferente da unidade. Tal como no caso anterior, pode concluir-se que a volatilidade implícita é um estimador enviesado da volatilidade

realizada. A estatística R^2 confirma que este estimador da volatilidade realizada contém pouco valor explicativo do seu comportamento.

Apenas a estatística de Durbin-Watson apresenta uma nota discordante, dado que apesar de bastante diferente de 2, apresenta um valor muito mais próximo do que na análise da regressão anterior.

Os resultados obtidos no quadro 9 podem, no entanto, ser postos em causa. Para tal contribui o facto de se estar a trabalhar com uma amostra muito pequena. Assim, a significância estatística dos resultados anteriores tem de ser encarada com alguma reserva.

2.2.4. VOLATILIDADE IMPLÍCITA COM DADOS SOBREPOSTOS E NÃO SOBREPOSTOS

A análise executada nos pontos 2.2.2 e 2.2.3 foi efectuada separadamente porque o cálculo da volatilidade realizada teve que ser feita de acordo com diferentes critérios. Assim, os resultados apenas podem ser comparados em termos de diferenças nas estatísticas descritivas das séries e dos parâmetros obtidos nas regressões.

Verifica-se pois que, apesar de a segunda série tratar dados não sobrepostos, a sua diferença em relação à volatilidade realizada é significativa quando comparada com dados idênticos mas sobrepostos. A comparação dos quadros 6 e 8 conduz à conclusão de que apesar da diferença de médias ser superior no caso da utilização de dados sobrepostos, a análise dos restantes momentos da distribuição garante uma maior aproximação da série de volatilidade implícita e volatilidade realizada, no caso de utilização de dados sobrepostos. Repare-se que a volatilidade implícita é em média superior à volatilidade realizada em 7,26% no caso do uso de dados sobrepostos e em 6,56% no caso do uso de dados não sobrepostos. Apesar de, no caso de utilização de dados sobrepostos a volatilidade implícita apresentar, em média uma diferença superior, quando se comparam as diferenças verifica-se que, no caso de utilização de dados não sobrepostos, a diferença apenas diminui cerca de 0,7%. Repare-se que ao nível da assimetria e curtose das distribuições das séries de volatilidade realizada e implícita (com dados sobrepostos) existe alguma proximidade. Assim, ambas as séries são assimétricas positivas e leptocúrticas (apesar da curtose da volatilidade realizada ser muito superior à da volatilidade implícita). No caso da utilização de dados sobrepostos a distribuição da série de volatilidade implícita altera-se completamente apresentando assimetria negativa e valores de curtose negativos.

A comparação dos α_i obtidos nas duas regressões efectuadas, conferem também um maior poder explicativo da volatilidade realizada, à série que utiliza dados sobrepostos.

Os resultados obtidos na aplicação ao mercado de opções português são opostos dos obtidos por Christensen e Prabhala (1998). A explicação para as conclusões obtidas poderá residir no facto de, no caso dos dados não sobrepostos, se estar a trabalhar com uma amostra muito reduzida (a série apresenta apenas 36 observações). O uso de uma série tão pequena diminui a significância estatística dos resultados, e os próprios Christensen e Prabhala (1998) apresentam este factor como explicativo de alguns desempenhos menos bons, em aplicações empíricas, da volatilidade implícita.

Tendo em conta toda a análise anterior, e apesar dos resultados da estimação da volatilidade implícita com dados sobrepostos serem superiores aos da série com dados não sobrepostos, pode concluir-se que, nas actuais

condições de funcionamento do mercado português, a volatilidade implícita não constitui um bom previsor da volatilidade futura.

3.CONCLUSÕES

Pode dizer-se que o mercado Português constitui um caso de contornos muito específicos. Trata-se de um mercado periférico sem grande liquidez e profundidade e que está longe de poder ser considerado um mercado bastante activo, nomeadamente na parte relativa aos mercados de derivados. O presente trabalho pretende, pois, examinar a relação entre a volatilidade histórica e a volatilidade realizada *ex-post* do índice PSI-20 e a volatilidade implícita e a volatilidade realizada *ex-post* do índice PSI-20, de forma a verificar qual das duas especificações da volatilidade é o melhor previsor da volatilidade futura e se o faz, ou não, de forma eficiente.

A análise da capacidade explicativa das séries de volatilidade histórica e implícita, efectuadas ao longo do presente trabalho, permitiram antever que nenhuma se apresenta como um estimador eficiente e não enviesado da volatilidade realizada. Não obstante, constata-se que o poder explicativo da volatilidade implícita é superior ao da volatilidade histórica. Contrariamente ao verificado em estudos empíricos congéneres, verifica-se que os resultados obtidos na modelação da volatilidade implícita com dados sobrepostos são superiores aos obtidos com dados não sobrepostos.

BIBLIOGRAFIA

- ABKEN, P.; COHEN, H. (1994): Generalized method of moments estimation of Heath-Jarrow-Morton models of interest rate contingent claims. *Federal Reserve Bank of Atlanta*, pp. 94-98
- Abken, P.; Nandi, S. (1996): Options and volatility. *Economic Review - Federal Reserve Bank of Atlanta*, pp. 21-35
- AMIN, K.; MORTON, A. (1994): Implied volatility functions in arbitrage-free term structure models. *Journal of Financial Economics*, 35, pp.141-180
- BATES, D. (1995): Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in deutschemark options. *Review of Financial Studies*, 9, pp. 69-107
- BECKERS, S. (1981): Standard deviation implied in option prices as predictors of future stock price variability. *Journal of Banking and Finance*, 5, pp.363-382
- BHARADIA, M.; CHRISTOFIDES, N.; SALKIN, G.R. (1995): Computing the Black-Scholes implied volatility: generalization of a simple formula. *Advances in futures and options research*, vol. 8, pp.15-29
- BLAIR, B.; POON, S.; TAYLOR, S. (2001): Forecasting S&P100 volatility: The incremental information content of implied volatilities and high frequency index returns. *Journal of Econometrics*, 105, pp.5-26
- BRENNER, M.; SUBRAHMANYAM, B. (1988): A simple formula to compute the implied standard deviation. *Financial Analysts Journal*; pp.80-83
- CANINA, L.; FIGLEWSKI, S. (1993): The informational content of implied volatility. *Review of Financial Studies*, 6, pp.659-681
- CHRISTENSEN, B.; PRABHALA, N.R. (1998): The relations between implied and realized volatility. *Journal of Financial Economics*, 50, pp.169-196
- DAY, T.; LEWIS, C. (1992): Stock market volatility and the information content of stock index options. *Journal of Econometrics*, 52, pp.267-287
- EVNINE, J. (1988): Estimating volatility. *Portfolio insurance: a guide to dynamic hedging*, Wiley, New York
- FLEMING, J. (1998): The quality of market volatility forecast implied in S&P100 index option prices. *Journal of Empirical Finance*, 5, pp.317-345

- GARMAN, M.; KLASS, M. (1988): On the estimation of security price volatilities from historical data. *Journal of Business*, 53, pp. 67-78
- JORION, P. (1995): Predicting volatility in the foreign exchange market. *Journal of Finance*, 50, pp. 507-528
- LAMOUREUX, C.; LASTRAPES, W. (1993): Forecasting stock return variance: towards understanding implied volatility. *Review of Financial Studies*, 6, pp.293-326
- LATANÉ, H.; RENDLEMAN, R. (1976): Standard deviations of stock price ratios implied in option prices. *Journal of Finance*, 31,2, pp.369-381
- MANASTER, S.; KOEHLER, G. (1982): The calculation of implied variances from the Black e Scholes model: a note. *Journal of Finance*, vol. 37, 1, pp.227-230
- PARKINSON, M. (1980): The random walk problem: extreme value method for estimating the variance of the displacement. *Journal of Business*, 53, pp.61-65
- SCHAMALENSEEE, R.; TRIPPI, R. (1978): Common stock volatility expectations implied by option premium. *Journal of Finance*, 55, pp.129-147