

## Problema de selección de cartera utilizando optimización semi-infinita

Alina Fedossova<sup>1</sup>, Jose J. Sierra<sup>2</sup>, y Rodrigo A. Britto<sup>3</sup>

(1) Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.  
(correo-e: [afedosova@unal.edu.co](mailto:afedosova@unal.edu.co))

(2) Departamento de Matemáticas, Universidad Externado, Bogotá, Colombia.  
(correo-e: [Josej.sierra@uexternado.edu.co](mailto:Josej.sierra@uexternado.edu.co))

(3) Facultad de Administración, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia. (correo-e: [ro-britt@uniandes.edu.co](mailto:ro-britt@uniandes.edu.co))

Recibido Nov. 3, 2021; Aceptado Ene. 5, 2022; Versión final Feb. 18, 2022, Publicado Jun. 2022

---

### Resumen

En este trabajo se utiliza un método de optimización matemática para resolver el problema de selección de cartera. Se plantea como un problema de programación semi-infinita (PSI). Se resuelve usando una versión del método estocástico de aproximaciones externas en MATLAB. El método sustituye el problema original por una secuencia finita de problemas de optimización. Los resultados se comparan con otras estrategias de selección de cartera como la desarrollada por Markowitz. Se realizan experimentos numéricos utilizando cinco años de datos de ocho importantes empresas colombianas que cotizan en bolsa. Los resultados indican que el portafolio PSI es similar al portafolio de varianza mínima y que ambos son portafolios diversificados. El rendimiento máximo no es un portafolio diversificado y debe ser descartado. Aunque el portafolio “ingenuo” es diversificado, presenta un menor desempeño y retorno esperado, pero menor riesgo que el de mínima varianza y el PSI. Se concluye que el método propuesto proporciona soluciones competitivas en comparación con el método de Markowitz.

*Palabras clave:* programación semi-infinita; portafolio; inversión; diversificación; método; aproximaciones externas

## Semi-infinite optimization of the portfolio selection problem

### Abstract

The present study applies a mathematical optimization method to solve the portfolio selection problem. This is formulated as a semi-infinite programming (SIP) problem and is solved by using a version of the stochastic outer approximation method in MATLAB. This method replaces the original problem with a sequence of optimization finite problems. The results are compared with other portfolio selection strategies such as Markowitz. Numerical experiments are performed using five years of data from eight Colombian companies that trade in the stock market. The results show that the SIP portfolio is similar to the minimum variance portfolio and that both are diversified portfolios. The maximum return portfolio is not diversified and should be discarded. Even though the naive portfolio is diversified, its performance and returns are lower than expected, but its risks are less than that of minimum variance and SIP. It is concluded that the proposed method provides satisfactory solutions when compared to the Markowitz method.

*Keywords:* semi-infinite programming; portfolio investment; diversification; outer approximation method

## INTRODUCCIÓN

La optimización busca, dado un dominio definido, encontrar la mejor solución de una función objetivo. Esta incluye una variedad de distintos tipos de funciones objetivo y distintos tipos de restricciones. Un problema de programación semi-infinita (PSI) es un problema de optimización con un número finito de variables y un conjunto infinito de restricciones. Un problema PSI de minimización se muestra en la Ecuación (1), donde  $T$  es un conjunto infinito de puntos.

$$\begin{aligned} \min_x f(x), \\ \text{sujeto a } g(x, t) \geq 0 \quad \forall t \in T \end{aligned} \quad (1)$$

PSI se considera una extensión natural de un problema de programación matemática, pero, dado que hay un conjunto infinito de restricciones, son más difíciles de resolver. Sin embargo, la implementación de esquemas de eliminación de restricciones en PSI nos permite trabajar con restricciones relevantes, o activas, lo que reduce significativamente su complejidad. Además, la Programación Lineal Semi-Infinita (PLSI) puede ser considerada una extensión natural de la Programación Lineal (PL). A menudo, problemas que son inherentemente “continuos” han sido resueltos mediante PL utilizando un proceso de discretización. No obstante, esto crea un grado de incertidumbre relacionada al conjunto de restricciones. Mas importante aún, esta operación incrementa el nivel de arbitrariedad intrínseca del modelo matemático, que, aunque inevitable, debería mantenerse lo más pequeño posible. PSI supera estos problemas al incluir un número de restricciones “continuo”.

La inversión es un tema de gran importancia en las finanzas. Por lo tanto, cómo y por qué un inversionista asigna los recursos ha sido un tema de estudio. Los incentivos cíclicos y autónomos incluyen: inversión provocada por la demanda, inversión a largo plazo, inversión provocada por cambios en los precios y costos, cambios inducidos cíclicamente en la intensidad del capital, el progreso técnico e inversión inducida por el ahorro. En general, el propósito principal de una inversión es crear un mecanismo que genere retornos a partir del capital existente. El conjunto de inversiones de capital gestionadas por una persona o empresa se conoce como una cartera de inversiones y la forma en que se debe distribuir el dinero en una cartera afecta su rendimiento y depende del perfil de riesgo del inversor. Markowitz (1952) sentó las bases de la teoría moderna de la cartera. En su trabajo la cartera es entendida y analizada considerando la relación entre riesgo y retorno de activos. Un problema importante en el problema de selección de cartera es la estimación de los parámetros utilizados en los modelos. Por lo tanto, a la hora de elegir un modelo se debe dar prioridad a aquellos con riesgos mínimos, que se consideran los más estables (Cesarone et al., 2020).

Khedmati y Azin (2020) propusieron un algoritmo de selección de cartera en línea, en el que se toma una decisión sobre la cartera óptima en cada periodo y ésta es actualizada al comienzo de cada nuevo periodo. Los resultados indican que el algoritmo propuesto tiene mejor rendimiento que otros. Cuando métodos clásicos no logran una solución exacta, se diseñan técnicas heurísticas para encontrar una solución aproximada. (Wang et al., 2022; Yaman y Dalkılıç, 2021). Wang et al., (2022) usaron un algoritmo genético multiobjetivo para optimizar una cartera de préstamos evitando las limitaciones del método analítico y mejorando la eficiencia de optimización que es muy importante para los inversionistas. Yaman y Dalkılıç, (2021) desarrollaron un enfoque metaheurístico híbrido mediante la combinación de redes neuronales no lineales y algoritmos genéticos para la optimización de la cartera de restricciones de cardinalidad. El algoritmo se utilizó en datos de la Bolsa de Valores de Estambul (ISE-301).

Un problema de selección de cartera puede ser formulado como un problema de optimización. Yu, et al., (2020) examinaron un modelo de varianza media que considera tanto las actitudes de búsqueda de ambigüedad como las de aversión a la ambigüedad. Los autores resolvieron un problema de optimización que conduce a una cartera eficiente y a la frontera cuasi-eficiente en forma cerrada. Puerto et al., (2020) propusieron un método para resolver el problema de selección de cartera mediante la combinación de la agrupación de clústeres y técnicas de optimización de cartera. Los autores resolvieron un problema de Programación Lineal Entera Mixta sin tener que diferenciar entre dos pasos distintos: primero agrupamiento y luego selección.

Por su parte, Lhabitant (2017) estudió un problema de optimización finita usando las ideas originales de Markowitz, en donde dos tipos de cartera se pueden configurar: una cartera con varianza mínima y una cartera con rendimiento máximo. En este trabajo se utiliza optimización semi-infinita (PSI) para resolver el problema de selección de cartera. Como fue mencionado previamente, la programación semi-infinita funciona con un número finito de variables (para el propósito de este trabajo, se usarán las cantidades invertidas) y un conjunto factible de restricciones (para los cuales varían los rendimientos esperados de los activos) que pueden ser descritas por un número infinito. Por lo tanto, el valor final de la cartera, o la función objetivo del modelo, es una función lineal.

Después de formular el problema de PSI, se escoge un método apropiado para resolverlo. El algoritmo utilizado es una versión del método estocástico de aproximaciones externas (Volkov y Zavriev, 1997). El método aproxima el problema original usando una sucesión de problemas con un número finito de restricciones que son obtenidas al usar esquemas activos de eliminación de restricciones para quedarse con las más relevantes. Otros estudios ya han usado esta metodología y han probado que es efectiva en la selección de cartera. Por ejemplo, Vercher (2008) considera los retornos difusos puesto que en algunos casos no es posible una representación finita del problema debido a que aparecen problemas con restricciones finitas indexadas por un parámetro en un conjunto compacto. Por lo tanto, PSI puede obtener carteras adecuadas para diferentes tipos de inversionistas.

Se han realizado investigaciones de selección de cartera utilizando datos de países latinoamericanos. Berggrun y Jaramillo (2010) estudiaron el rendimiento de fondos de pensión en Colombia entre 2004 y 2008 utilizando la técnica estadística de componentes principales multivariados. Medina (2003) usa la teoría de cartera de Markowitz para generar dos carteras compuestas por cinco acciones del mercado colombiano de valores. Estas carteras toman en consideración dos inversionistas que tienen distintos niveles de aversión al riesgo. Arcos et al., (2010) establecen las carteras óptimas que tienen inversiones en los siete mercados de valores más representativos en Latinoamérica del 2001 al 2006 y estudia su composición y estabilidad.

Este trabajo tiene como objetivo estudiar las aplicaciones del problema de optimización semi-infinita en una cartera de inversiones para maximizar su valor final mediante una estrategia de selección, utilizando un marco teórico y práctico. También se compara este enfoque con otros métodos utilizados para seleccionar o maximizar el valor final de una cartera. El método propuesto se aplica utilizando datos del mercado de valores colombiano que es uno de los mercados más concentrados de América Latina (Uribe et al., 2013). De hecho, alrededor del 50% del volumen total negociado diariamente está concentrado en cinco acciones (PFBCELOM, ECOPETROL, GRUPOSURA, ÉXITO, HCOLSEL).

## MÉTODOS Y MATERIALES

El enfoque numérico de un PSI se ha convertido en un área activa de investigación (Vercher, 2008; Okuno, 2020; Ghate, 2020). Desde un punto de vista matemático, resolver un PSI es mucho más complicado que resolver un problema finito (PF). Según cómo se generan los problemas finitos para un PSI, existen tres tipos de métodos para su solución: i) métodos de discretización, ii) métodos de reducción local, y iii) métodos de intercambio. El método aplicado en este trabajo para resolver el problema PSI puede ser clasificado como un método de tipo intercambio, que consiste en generar secuencias de problemas finitos sucesivos haciendo intercambio de restricciones activas de sus conjuntos factibles.

### Método estocástico de aproximaciones externas

El enfoque general del método estocástico de aproximaciones externas implementado en Volkov y Zavriev (1997) consiste en un mecanismo de búsqueda activa de restricciones relevantes y de eliminación de las irrelevantes (mediante la técnica de intercambio) y solucionar un problema que puede ser descrito mediante las ecuaciones (2) - (4):

$$P^0: \text{Encontrar } x \in \mathbb{X}_{opt}^0 \quad (2)$$

$$\mathbb{X}_{opt}^0 = \left\{ x \in \mathbb{X}^0 \mid f(x) = \min_{x' \in \mathbb{X}^0} f(x') \right\}, \quad (3)$$

$$\mathbb{X}^0 = \{x \in X^0 \subset R^k \mid g(x, y) \leq 0 \quad \forall y \in Y^0\}, \quad (4)$$

donde  $Y^0$  es un conjunto infinito de índices. Para resolver el problema  $P^0$  este se reemplaza con una sucesión de problemas finitos  $P^n = P[Y_n]$  (5), con el conjunto factible  $\mathbb{X}[Y_n]$  descrito mediante un número finito de desigualdades, tal y como se indicada en (6). En consecuencia, la solución a cada problema  $P^n$ ,  $n=1, 2, \dots$  permite crear una trayectoria  $\{x^n\}$  que converge al conjunto óptimo del problema original  $P^0$  (Volkov y Zavriev, 1997).

$$P[Y_n]: \text{Encontrar } x \in \mathbb{X}_{opt}[Y_n] \quad (5)$$

$$\mathbb{X}_{opt}[Y_n] = \left\{ x \in \mathbb{X}[Y_n] \mid f(x) = \min_{x' \in \mathbb{X}[Y_n]} f(x') \right\},$$

$$\mathbb{X}[Y_n] = \{x \in X^0 \mid g(x, y) \leq 0 \quad \forall y \in Y_n\}, \quad |Y_n| < +\infty. \quad (6)$$

Estudios pioneros sobre los métodos de aproximaciones externas indican que la cardinalidad de los conjuntos de parámetros  $|Y_n|$  asociados a la sucesión de problemas  $P^n$  crece a un ritmo que hace que resolver alguno

de estos sea tan complejo como el problema original  $P^0$ . Para evitar este inconveniente, se proponen reglas para formar los conjuntos  $X_{opt}$  a través de esquemas de eliminación que permiten reducir el tamaño del conjunto de restricciones. Además, Volkov y Zavriev (1997) propusieron un método que usa funciones cuasi-óptimas como criterio de parada basándose en el esquema aleatorio activo. En la Tabla 1, se presenta una versión de este método que se desarrolló en este trabajo para resolver numéricamente el problema de solución de portafolio.

Tabla 1: Método SMETH.ACTIV.port.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><i>Método SMETH.ACTIV.port</i></p> <p>Datos:<br/> <math>x^0 \in X^0</math>.</p> <p>Parámetros:<br/> <math>\delta</math>.</p> <p>Paso 0.<br/> <math>n = 1, \quad Y_1 = \{ \}</math>.</p> <p>Paso 1. Encontrar <math>x^n \in X^0</math> solución al problema <math>P[Y_n]</math>.</p> <p>Paso 2. Llamar al procedimiento SPROC.ACTIV.port con <math>x^0</math> y <math>Y_n</math>.<br/> Se obtienen: <math>\theta_n, \Delta Y_n</math>.</p> <p>Paso 3. Formar nuevo<br/> <math display="block">Y_{n+1} = \Delta Y_n \cup \bigcup_{\substack{j: \theta_j &gt; \delta \\ i \leq j \leq n-1}} \Delta Y_j</math></p> <p>Paso 4. <math>n=n+1</math> y ir al Paso 1.</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

En la Tabla 2, el conjunto  $A_f(Y^0)$  determina el conjunto de subconjuntos finitos de  $Y^0$ . Los pasos principales de la búsqueda de restricciones activas para los problemas aproximados  $P^n$  se definen mediante un procedimiento estocástico iterativo, donde también se aplica el criterio de parada del algoritmo. En Tabla 2, se detallan las cuatro etapas del procedimiento estocástico SPROC.ACTIV.port.

Tabla 2: Procedimiento SPROC.ACTIV.port.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><i>Procedimiento SPROC.ACTIV.port</i></p> <p>Datos:<br/> <math>x \in X^0, Y \in A_f(Y^0)</math>.</p> <p>Salida:<br/> <math>\theta \in R^+ \cup \{0\}, \Delta \llbracket Y \in A \rrbracket \_f(Y^0)</math>.</p> <p>Parámetro:<br/> <math>\gamma &gt; 0</math>.</p> <p>Etapas 0. (Inicialización) <math>i=1</math>.</p> <p>Etapas 1. Aplicar el algoritmo de búsqueda local - método de proyección de gradiente - para solucionar el problema:<br/> <math>\max_{y \in Y^0} g(x, y)</math><br/> empezando desde un punto aleatorio <math>y_i \in Y^0</math> para encontrar el punto<br/> <math>y_i^* : g(x, y_i) \leq g(x, y_i^*)</math>.</p> <p>Incluir<br/> <math>y_i^* \in \llbracket \Delta Y \rrbracket \_i</math>.</p> <p>Etapas 2. Calcular<br/> <math>\theta_i = \theta(x, \llbracket \Delta Y \rrbracket \_i)</math>. (Función cuasi-óptima).</p> <p>Etapas 3. Si<br/> <math>\llbracket i\theta \rrbracket \_i \leq \gamma: \quad i = i + 1</math>.<br/> Si <math>i=1000</math> terminar el algoritmo. En otro caso ir a la Etapa 1.</p> <p>Etapas 4. ( <math>\llbracket i\theta \rrbracket \_i &gt; \gamma</math> ):<br/> Establecer<br/> <math>\llbracket \Delta Y = \Delta Y \rrbracket \_i</math>,<br/> <math>\theta \llbracket = \theta \rrbracket \_i</math>.<br/> Volver a SMETH.ACTIV.port.</p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Modelo matemático para el problema de selección de cartera

En el problema de solución de cartera, se considera un cierto capital invertido en una cartera que consta de  $N$  activos. Al final de un periodo determinado, el retorno de un dólar invertido en el activo  $i$ ,  $y_i > 0$  es un valor aleatorio y se supone que se distribuye uniformemente sobre todo el conjunto  $Y$ . El objetivo es determinar la cantidad  $x_i$  a invertir en el activo  $i$ ,  $i=1, \dots, N$  con el fin de maximizar el valor de la cartera al final del período  $y^T x$ . Dado que se desconoce el valor de  $y$ , se asume que  $y$  varía en algún conjunto compacto  $Y \subset \mathbb{R}^n$ . Luego, moviendo la función objetivo descrita anteriormente sobre el conjunto de restricciones, es posible establecer el problema de optimización semi-infinita considerado por Stein y Still (2003) (7):

$$\begin{aligned}
 P[Y]: \quad & \max_{x, x_{N+1}} x_{N+1} \\
 \text{sujeto a} \quad & g(x, y) = x_{N+1} - y^T x \leq 0, \quad y \in Y, \\
 & \sum_{i=1}^N x_i = 1, \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, N. \\
 \text{donde} \quad & Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \bar{y}_i)^2}{\sigma_i^2} \leq \theta^2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

En (7)  $\bar{y}_i$  es el retorno esperado por cada dólar invertido en el activo  $i$ ,  $\sigma_i$  es la desviación estándar del  $i$ -ésimo retorno esperado del activo  $i$  (basándose en una base de datos histórica) y  $\theta$  mide la aversión al riesgo del inversionista (a mayor valor de  $\theta$ , más aversión). Se requiere introducir una variable auxiliar ( $x_{N+1}$ ) para mover la función objetivo en el conjunto de restricciones. Por tanto, la función objetivo  $x_{N+1}$  está determinada por  $y^T x$ . Las variables  $x_1, \dots, x_n$  se denominan variables de decisión. La cantidad  $x_i$  a ser invertida en el activo  $i$  se mide como un porcentaje del capital total invertido en el portafolio, y, por lo tanto, se supone que el conjunto de posibles rendimientos  $Y$  es un conjunto compacto.

Para resolver el problema formulado en (7), se utilizó la versión del método estocástico de aproximaciones externas (Tablas 1 y 2). El problema  $P[Y]$  se reemplazó por una sucesión de problemas tipo  $P[Y_n]$  cada uno con conjunto finito de restricciones  $Y_n$ . También se asume que  $x = (x_1 \dots x_n) \in [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_{n+1} \in \mathbb{R}$ ,  $y \in Y \subset \mathbb{R}^n$ . Para evaluar la calidad de  $x \in [0, 1]^n$  como una solución local al problema  $P[Y_n]$  se emplea la función cuasi-óptima (8)

$$\Theta(x, Y_n) = \max \left( f(x) - \max_{\substack{x \in [0, 1]^n \\ g(x, y) \leq 0, \forall y \in Y_n}} f(x), \max_{y \in Y_n} g(x, y) \right), \tag{8}$$

donde  $f(x)$  representa la función objetivo determinada por  $x_{N+1}$ . Nótese que si  $\bar{x}$  es una solución al problema  $P[Y_n]$ , entonces  $\Theta(\bar{x}, Y_n) = 0$ . Cualquier trayectoria generada por SMETH.ACTIV.port converge al conjunto cuasi-óptimo del problema original  $P[Y]$  si la función  $\Theta$  cumple las condiciones A1 y A2 dadas en Volkov y Zavriev (1997). A1 establece que cada problema finito  $P[Y_n]$  tiene una solución, mientras A2 establece que la función cuasi-óptima satisface condiciones de continuidad. Fedossova, Kafarov, y Mahecha (2005) muestran que la función cuasi-óptima (8) cumple con esas condiciones, y por consiguiente, la sucesión de aproximaciones a la raíz según la versión del método SMETH.ACTIV.port converge al conjunto cuasi-óptimo con probabilidad 1.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Al resolver el problema PSI (7) con la versión SMETH.ACTIV.port del método estocástico de aproximaciones externas usando una cartera compuesta por tres y ocho activos se obtuvieron los resultados presentados en las Tablas 3 y 4. Así mismo, fue estudiado el caso de cuatro activos como resultado de un portafolio de ocho. Los experimentos numéricos fueron realizados en MATLAB dado que este software tiene un solucionador de problemas de optimización finita que se usó para resolver problemas  $P^n$  (Vaz y Ferreira, 2009). Adicionalmente, MATLAB reduce el número de operaciones dado su estructura matricial permitiendo trabajar con una gran cantidad de datos en tiempos razonables (Fedossova, Fedosov y Britto, 2019) y se ha utilizado en modelos de optimizaciones multi-objetivo (Grisales-Díaz, Prado-Rubio y Olivar-Tost, 2020).

La primera columna de la Tabla 3 contiene el número de iteraciones realizadas en la parte de SMETH.ACTIV.port. El punto de partida ( $x_0$ ) se muestra en la segunda columna. La tercera columna muestra el número de restricciones activas que usa cada uno de la sucesión de problemas aproximadas de optimización y que coincide con la primera columna dado que en cada iteración el método encuentra en el procedimiento SPROC.ACTIV.port una nueva restricción activa. La cuarta columna presenta el vector de solución, el cual representa el porcentaje de capital a invertir en cada activo. La quinta columna muestra el valor de la función objetivo  $x_{N+1}$  y el desempeño de la cartera definió como la razón entre el retorno y riesgo se encuentra en sexta columna. La séptima columna presenta el retorno esperado de la cartera al final del

periodo y la última columna muestra el riesgo de la cartera, el cuál mide la rentabilidad de la cartera basándose en la rentabilidad histórica.

Las Tablas 4 y 5 presentan los resultados del problema de Programación Semi-infinita (PSI) para la obtención de una cartera de 8 activos y 4 activos, respectivamente, partiendo de un portafolio de 8 activos. los activos que tengan retornos esperados negativos deben ser eliminados de la cartera para que el valor final del portafolio sea mayor.

Tabla 3: Solución cartera de tres activos usando PSI.

| # iter. en SMETH | x0            | # Restricciones activas | Solución               | f óptimo, $x_{N+1}$      | Desempeño | Retorno esperado (%) | Riesgo (%) |
|------------------|---------------|-------------------------|------------------------|--------------------------|-----------|----------------------|------------|
| 6                | (1 0 0)       | 6                       | (0,4324 0,4586 0,1070) | $-0,6143 \times 10^{-5}$ | 0,14      | 0,58                 | 4,08       |
| 4                | (0,3 0,4 0,3) | 4                       | (0,4089 0,4299 0,1571) | $-0,1406 \times 10^{-5}$ | 0,13      | 0,54                 | 4,10       |
| 7                | (0,7 0,3 0,0) | 7                       | (0,4386 0,4181 0,1417) | $-0,1392 \times 10^{-8}$ | 0,14      | 0,56                 | 4,10       |
| 8                | (0,0 0,5 0,5) | 8                       | (0,4118 0,4488 0,1385) | $-0,1962 \times 10^{-8}$ | 0,13      | 0,55                 | 4,09       |
| 16               | (0,2 0,2 0,6) | 16                      | (0,4176 0,4391 0,1425) | $-0,9303 \times 10^{-9}$ | 0,14      | 0,56                 | 4,10       |

Tabla 4: Solución obtenida para ocho activos.

| # iter. en SMETH | x0                          | # restricciones activas | Solución                                                  | f óptimo, $x_{N+1}$      | Desempeño | Retorno esperado (%) | Riesgo (%) |
|------------------|-----------------------------|-------------------------|-----------------------------------------------------------|--------------------------|-----------|----------------------|------------|
| 33               | (1 0 0 0 0 0 0 0)           | 33                      | (0,1339 0,2139 0,0821 0,0825 0,0920 0,1906 0,1413 0,0626) | $-0,2275 \times 10^{-5}$ | 0,042     | 0,15                 | 3,53       |
| 35               | (0,2 0 0 0,1 0,1 0,3 0 0,3) | 35                      | (0,1252 0,2030 0,1059 0,0863 0,1 0,1805 0,1255 0,0729)    | $0,41723 \times 10^{-8}$ | 0,058     | 0,21                 | 3,54       |
| 37               | (0,5 0,5 0 0 0 0 0 0)       | 37                      | (0,1085 0,2032 0,1004 0,1097 0,1088 0,1950 0,1155 0,0580) | $-0,7953 \times 10^{-7}$ | 0,052     | 0,18                 | 3,52       |
| 41               | (0 0 0 0 0 0,3 0,7 0)       | 41                      | (0,1339 0,2097 0,0994 0,0964 0,0890 0,1756 0,1383 0,0573) | $-0,1648 \times 10^{-7}$ | 0,047     | 0,17                 | 3,52       |
| 8                | (0,1 0,1 0,1 0,1 0,1 0,3)   | 8                       | (0,1083 0,2530 0,1139 0,0436 0,0659 0,2206 0,1052 0,0575) | $-0,3546 \times 10^{-6}$ | 0,080     | 0,28                 | 3,51       |

Tabla 5: Ocho activos adaptados a cuatro activos.

| # iter. en SMETH | x0                    | # de restricciones activas | Solución                      | f óptimo, $x_{N+1}$       | Desempeño | Retorno esperado (%) | Riesgo (%) |
|------------------|-----------------------|----------------------------|-------------------------------|---------------------------|-----------|----------------------|------------|
| 12               | (1 0 0 0)             | 12                         | (0,4354 0,2005 0,2203 0,1454) | $-0,2278 \times 10^{-9}$  | 0,212     | 0,93                 | 4,40       |
| 36               | (0,25 0,25 0,25 0,25) | 36                         | (0,4650 0,2006 0,2063 0,1302) | $0,9237 \times 10^{-10}$  | 0,214     | 0,94                 | 4,39       |
| 4                | (0,2 0,5 0,15 0,15)   | 4                          | (0,4550 0,1528 0,2558 0,1173) | $-0,8113 \times 10^{-8}$  | 0,201     | 0,87                 | 4,32       |
| 52               | (0 0 0,1 0,9)         | 52                         | (0,4431 0,2000 0,2229 0,1361) | $-0,1540 \times 10^{-10}$ | 0,212     | 0,93                 | 4,39       |
| 20               | (0 0,5 0 0,5)         | 20                         | (0,4604 0,1925 0,2107 0,1384) | $-0,3222 \times 10^{-8}$  | 0,212     | 0,93                 | 4,39       |

### Cartera Markowitz vs. Cartera PSI

Con los resultados obtenidos es posible hacer comparaciones entre estos dos tipos de cartera. No es un objetivo de este artículo demostrar que la cartera PSI obtiene mejores resultados que la cartera Markowitz (1952), sino que se pretende mostrarlo como un método alternativo de selección de cartera. El PSI también considera un mayor número de condiciones logrando que la solución sea más cercana a la realidad que en un problema finito. Los resultados se obtuvieron usando datos recolectados de la base de datos Bloomberg de las empresas colombianas estudiadas que cotizan en la Bolsa de Valores de Colombia y están relacionados a variaciones en los precios de las acciones de estas empresas en los años 2010-2015.

### Cartera de tres activos

La Tabla 6 muestra un resumen de cuatro tipos de cartera que tienen tres activos: varianza mínima, "ingenuo", rendimiento máximo y PSI con punto inicial (1 0 0). En este caso en una cartera "ingenua" se realiza una inversión igual en todos los activos. La Tabla 6 exhibe el porcentaje total de capital invertido en cada compañía y el desempeño, retorno, riesgo asociado con cada tipo de cartera. Los resultados presentados en la Tabla 6 indican que la cartera PSI es muy similar a la cartera de varianza mínima en términos de desempeño, retorno y riesgo asociado; adicionalmente, ambas son carteras diversificadas. El rendimiento máximo es una cartera no diversificada, tiene mayor desempeño y retornos esperados, pero con un riesgo mayor que el de varianza mínima y el PSI. La Figura 1 muestra las cantidades invertidas en las empresas A, B y C con base en los resultados presentados en la Tabla 6 donde se escogen los portafolios con desempeño, retorno y riesgo esperado similares, es decir, el portafolio de mínima varianza y PSI.

Tabla 6: Resumen de tres carteras de activos.

| Tres carteras de activos | Varianza mínima | Ingenua | Rendimiento máximo | PSI (1 0 0) |
|--------------------------|-----------------|---------|--------------------|-------------|
| Firma A (x1)             | 61,73%          | 33,3%   | 0%                 | 43,24%      |
| Firma B (x2)             | 33,01%          | 33,3%   | 100%               | 45,86%      |
| Firma C (x3)             | 5,26%           | 33,3%   | 0%                 | 10,70%      |
| Desempeño                | 0,14            | 0,10    | 0,19               | 0,14        |
| Retorno                  | 0,55%           | 0,43%   | 0,85%              | 0,58%       |
| Riesgo                   | 4,05%           | 4,41%   | 4,43%              | 4,08%       |

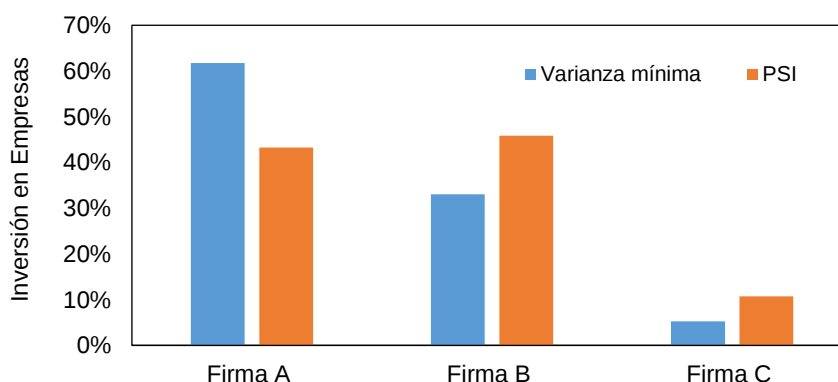


Fig. 1: Portafolio PSI y varianza mínima.

### Carteras de ocho activos

En la Tabla 7 se presenta un resumen de los resultados de cinco tipos de portafolios que se estudiaron a lo largo de este trabajo y el desempeño, retorno, riesgo para el caso de ocho activos. En la Tabla 7 se observa que el portafolio PSI (8 activos como 4) es muy parecido al portafolio de rendimiento máximo y es posible notar que son las mejores opciones entre las 5 que se presentan. Al igual que en el caso anterior, al comparar de manera directa los portafolios de rendimiento máximo y PSI (8 activos como 4) se obtiene la Figura 2 que muestra las cantidades que deben ser invertidas en las compañías 2, 3, 5 y 8 (las cuales no tienen retornos esperados negativos) usando los resultados presentados en la Tabla 7. En estos casos se eligieron las carteras con un desempeño, retorno y riesgo esperado similares, esto es, el portafolio de rendimiento máximo y PSI (tanto 8 activos como 4).

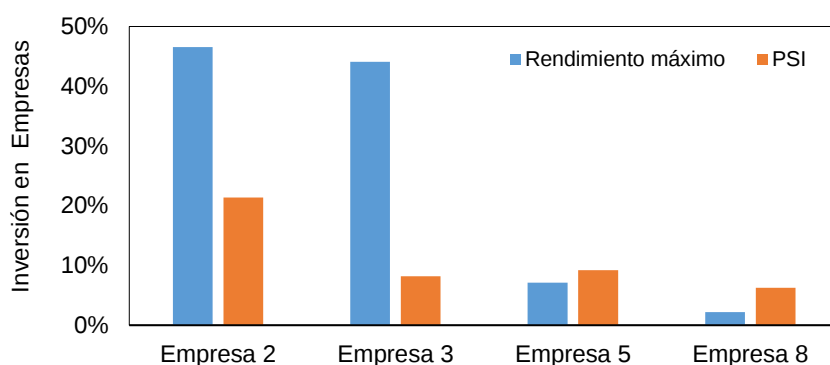


Fig. 2: Portafolio rendimiento máximo y PSI (8 activos como 4).

Tabla 7: Resumen de carteras de ocho activos.

|           | Varianza mínima | Ingenua | Rendimiento máximo | PSI   | PSI (8 activos como 4) |
|-----------|-----------------|---------|--------------------|-------|------------------------|
| Empresa 1 | 18,06%          | 12,5%   | 0%                 | 13,3% | 0%                     |
| Empresa 2 | 8,28%           | 12,5%   | 46,58%             | 21,3% | 43,54%                 |
| Empresa 3 | 10,91%          | 12,5%   | 44,09%             | 8,21% | 20,05%                 |
| Empresa 4 | 19,68%          | 12,5%   | 0%                 | 8,25% | 0%                     |
| Empresa 5 | 4,24%           | 12,5%   | 7,15%              | 9,20% | 20,03%                 |
| Empresa 6 | 24,06%          | 12,5%   | 0%                 | 19,0% | 0%                     |
| Empresa 7 | 14,46%          | 12,5%   | 0%                 | 14,1% | 0%                     |
| Empresa 8 | 0,31%           | 12,5%   | 2,18%              | 6,26% | 14,54%                 |
| Desempeño | -0,03           | 0,05    | 0,243              | 0,04  | 0,21                   |
| Retorno   | -0,10%          | 0,2%    | 1,22%              | 0,15% | 0,93%                  |
| Riesgo    | 3,40%           | 3,6%    | 5,04%              | 3,53% | 4,40%                  |

## CONCLUSIONES

En este estudio se propuso un modelo matemático PSI para solucionar el problema de selección de cartera usando un caso real de inversiones en Colombia. Para ello se llevaron a cabo experimentos numéricos en MATLAB usando variaciones en diferentes parámetros de varias acciones de compañías colombianas indexadas en bolsa. Para la comparación se emplearon métricas tales como desempeño, retorno esperado y riesgo.

Los resultados obtenidos indican que el portafolio PSI es similar al portafolio de varianza mínima y que ambos son portafolios diversificados. El de rendimiento máximo no es un portafolio diversificado y por lo tanto debe ser descartado. Aunque el portafolio “ingenuo” es diversificado presenta un menor desempeño y retorno esperado, pero menor riesgo que el de mínima varianza y el PSI. Además, las carteras de PSI son propuestas como una alternativa a las carteras de Markowitz; estas tienen la premisa de que un PSI admite más condiciones que un problema finito y por consiguiente la solución debe ser más cercana a la realidad.

El número de iteraciones para encontrar restricciones activas con el método implementado es mayor para el caso  $N=8$  que para el  $N=3$ , y por ello se espera que con el aumento de  $N$  el número de iteraciones aumente. Finalmente, los experimentos numéricos demuestran que la cartera PSI presentada en este trabajo es similar a algunas de las diferentes propuestas previamente utilizadas y es competitiva. Los resultados indican que las carteras consideradas como problemas PSI se encuentran entre las carteras que tienen varianza mínima y rendimiento máximo.

## REFERENCIAS

- Arcos, M., Benavides, J., y Breggrun, L., Optimal portfolio allocation for Latin American stock indices, <https://doi.org/10.11144/Javeriana.cao23-40.opaf>, Cuad. Adm., 23(40), 191-214 (2010)
- Berggrun, L., y Jaramillo, F., Performance evaluation, fund selection and portfolio allocation applied to Colombia's pension funds, [https://doi.org/10.1016/S0123-5923\(10\)70132-7](https://doi.org/10.1016/S0123-5923(10)70132-7), Estud. Gerenc., 26(117), 13-40 (2010)
- Cesarone, F., Mango, F., y otros tres autores, On the stability of portfolio selection models, <https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2020.10.003>, J. Empir. Finance, 59, 210-234 (2020)

- Fedossova, A.V., Fedosov, V. V., y Britto, R.A., Dispersión de las partículas de emisiones industriales en el problema de optimización semi-infinita del área contaminada, <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642019000100333>, Inf. Tecnol., 30(1), 333-344 (2019)
- Fedossova, A.V., Kafarov, V., y Mahecha, D.P., Solución numérica al problema de control de contaminación de aire, Revista Colombiana de la Computación, 4(2), 21-34 (2005)
- Ghate, A., Inverse optimization in semi-infinite linear programs, <https://doi.org/10.1016/j.orl.2020.02.007>, Oper. Res. Lett., 48(3), 278-285 (2020)
- Grisales-Díaz, V. H., Prado-Rubio, O. A., y Olivar-Tost, G., Evaluación energética y económica de la recuperación *in situ* de butanol aplicando vacío cíclico en un reactor con múltiples alimentaciones, <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642020000400153>, Inf. Tecnol., 31(4), 153-164 (2020)
- Khedmati, M., y Azin, P., An online portfolio selection algorithm using clustering approaches and considering transaction costs, <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2020.113546>, Expert Systems with Applications, 159, 113546 (2020)
- Lhabitant, F. S., Portfolio diversification, 1ª ed., ISTE Press - Elsevier, ISBN: 9780081017869, Londres, Inglaterra (2017)
- Markowitz, H., Portfolio selection, <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>, J Finance, 7(1), 77-91 (1952)
- Medina, L.Á., Aplicación de la teoría del portafolio en el mercado accionario colombiano, Cuad. Econ., 22(39), 129-168 (2003)
- Okuno, T., y Fukushima, M., An interior point sequential quadratic programming-type method for log-determinant semi-infinite programs, <https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.112784>, J. Comput. Appl. Math., 376, 112784 (2020)
- Puerto, J., Rodríguez-Madrena, M., y Scozzari, A., Clustering and portfolio selection problems: A unified framework, <https://doi.org/10.1016/j.cor.2020.104891>, Comput. Oper. Res., 117, 104891 (2020)
- Stein, O., y Still, G., Solving semi-infinite optimization problems with interior point techniques, <https://doi.org/10.1137/S0363012901398393>, SIAM J. Control Optim., 42(3), 769-788 (2003)
- Uribe, J., Mosquera, S., y Restrepo, N., Mercado de acciones colombiano. Determinantes macroeconómicos y papel de las AFP, Soc. Econ. (24), 207-230 (2013)
- Vaz, A.I. F., y Ferreira, E. C., Air Pollution Control with Semi-infinite Programming, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2008.05.008>, Appl. Math. Model., 33(4), 1957-1969 (2009)
- Vercher, E., Portfolios with fuzzy returns: Selection strategies based on semi-infinite programming, <https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.02.017>, J. Comput. Appl. Math., 217(2), 381-393 (2008)
- Volkov, Y.V., y Zavriev, S.K., A general stochastic outer approximations method, <https://doi.org/10.1137/S0363012994263202>, SIAM J. Control Optim., 35(4), 1387-1421 (1997)
- Wang, Z., Zhang, X., Zhang, Z., y Sheng, D., Credit portfolio optimization: A multi-objective genetic algorithm approach, <https://doi.org/10.1016/j.bir.2021.01.004>, Borsa Istamb. Rev., 22(1), 69-76 (2022)
- Yaman, I., y Dalkılıç, T. E., A hybrid approach to cardinality constraint portfolio selection problem based on nonlinear neural network and genetic algorithm, <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2020.114517>, Expert Syst. Appl., 169, 114517 (2021)
- Yu, X., Shen, Y., Li, X., y Fan, K., Portfolio selection with parameter uncertainty under  $\alpha$  maxmin mean-variance criterion, <https://doi.org/10.1016/j.orl.2020.08.008>, Oper. Res. Lett., 48(6), 720-72 (2020)

Página en blanco