

## Un método para determinar los coeficientes no lineales de segundo orden en cerámicas piezoeléctricas

J. E. GARCÍA, R. PÉREZ

Departament de Física Aplicada. Universitat Politècnica de Catalunya. Jordi Girona 1-3. Campus Nord, modul-B4. 08034 Barcelona.

El uso de materiales piezocerámicos está limitado por su comportamiento no lineal. Sus medidas son complicadas debido a que su comportamiento depende de los términos de segundo y tercer orden. La generación de segundo armónico es un buen método para aislar los términos de segundo orden de los de tercer orden. Se propone un método que permite discriminar los coeficientes no lineales de segundo orden. Se modela un transductor de Langevin, trabajando alrededor de la frecuencia de resonancia, en el cual se han colocado cuatro anillos cerámicos con polarización alternada, tomando la forma de un transformador o bipuerto eléctrico. El sistema está definido por dos parámetros: la impedancia eléctrica conectada al segundo puerto y la frecuencia de excitación. Para cada experiencia la corriente debe ser medida, en módulo y fase, a frecuencias  $\nu$  y  $2\nu$ . Teniendo en cuenta que en el circuito equivalente de este sistema las no linealidades aparecen como cuatro fuentes diferentes de tensión, y que para cada experiencia sólo dos cantidades pueden ser medidas a frecuencia  $2\nu$ , es necesario realizar un mínimo de dos experiencias suficientemente distintas para determinar los cuatro coeficientes.

*Palabras clave:* no linealidad, cerámica, piezoeléctrico.

### A method to determine of second order nonlinear coefficients in piezoelectric ceramics

The use of piezoelectric materials is limited by their nonlinear behavior. Their measurement is rather cumbersome due to that their behavior depends on both second and third order terms. Second order terms can be isolated by the measurement of second harmonic generation. A method for discriminate the different nonlinear second order coefficients is proposed. A Langevin transducer, which has four alternating poled rings in order to behave as an electrical biport, is modeled. The system is defined by two parameters: the electrical load connected to the second port and the excitation frequency. For each experience the modulus and the phase of the current must be measured in both ports at the frequency  $\nu$  and  $2\nu$ . The system must be fully characterized as a linear electrical biport at both frequencies. Taking into account that in the equivalent circuit the nonlinearity appears as four voltage generators, and that only two variables can be measured at frequency  $2\nu$  for each experience, at least two experiences, different enough, must be done to determine all four coefficients.

*Key words:* nonlinearity, ceramic, piezoelectric.

### 1. INTRODUCCIÓN

El uso de una cerámica piezoeléctrica está limitado por la alteración que sufren sus propiedades, a causa de la no-linealidad que aparece al aplicarles una alta señal y debido a efectos producidos por calentamiento. Estos dos fenómenos pueden separarse teniendo en cuenta la gran diferencia que existe entre las dos constantes de tiempo relativas a ellos (1).

La teoría no lineal de la piezoelectricidad puede ser descrita como una alteración de la función energía del sistema. Su descripción es unívoca si se expresa en función de los "desplazamientos" mecánico y eléctrico,  $S$  y  $D$ :

$$U(S, D) = U_o(S, D) + \lambda_{SSS} S^3 + \lambda_{SSD} S^2 D + \lambda_{SDD} S D^2 + \lambda_{DDD} D^3 + \lambda_{SSSS} S^4 + \dots \quad [1]$$

La función energía contiene términos elásticos, eléctricos y mixtos. Si la no linealidad es débil, esta puede describirse por los dos primeros términos no lineales del desarrollo en serie; si es fuerte, el desarrollo en serie deja de ser útil.

El desplazamiento de la frecuencia de resonancia y la disminución del factor de calidad mecánico son dos efectos de la no linealidad que pueden observarse a la propia frecuencia de excitación; a otras frecuencias, el comportamiento no lineal puede ser estudiado por intermodulación y a través de la generación de armónicos (sobretonos).

Los términos no lineales pueden separarse en términos de orden par y términos de orden impar. Los términos de orden impar influyen por efecto directo sobre la frecuencia de excitación mientras que los términos de orden par influyen por efecto indirecto (2). Sólo es posible separar los dos efectos conociendo los términos de orden par por una experiencia adicional.

Asumiendo el desarrollo en series de potencia de la energía, los efectos no lineales a la frecuencia de excitación son, en primera aproximación, despreciables debido a que el término no lineal más simple es de tercer orden. En la generación de segundo armónico solo intervienen por efecto directo los términos no lineales de segundo orden, siendo sus distintas contribuciones vectorialmente aditivas. Teniendo en cuenta esto las ecuaciones constitutivas sólo contienen términos no lineales

les de segundo orden y se pueden escribir como sigue:

$$T = c^D S - hD + 3\lambda_{SSS} S^2 + 2\lambda_{SSD} SD + \lambda_{SDD} D^2 \quad [2]$$

$$E = -hS + \beta^S D + \lambda_{SSD} S^2 + 2\lambda_{SSD} SD + 3\lambda_{DDD} D^2 \quad [3]$$

donde a:

$$\Phi(S, D) = 3\lambda_{SSS} S^2 + 2\lambda_{SSD} SD + \lambda_{SDD} D^2 \quad [4]$$

$$\Psi(S, D) = \lambda_{SSD} S^2 + 2\lambda_{SSD} SD + 3\lambda_{DDD} D^2 \quad [5]$$

las denominaremos funciones no lineales;  $\lambda_{SSS}$ ,  $\lambda_{SSD}$ ,  $\lambda_{SDD}$  y  $\lambda_{DDD}$  los denominaremos coeficientes no lineales de segundo orden.

Cada término de las ecuaciones constitutivas puede ser desglosado en armónicos; por lo que podemos escribir dichas ecuaciones, a la frecuencia fundamental, como sigue:

$$T^I = c^D S^I - hD^I \quad [6]$$

$$E^I = -hS^I + \beta^S D^I \quad [7]$$

y, para el segundo armónico, se tiene:

$$T^{II} = c^D S^{II} - hD^{II} + \Phi^{II} \quad [8]$$

$$E^{II} = -hS^{II} + \beta^S D^{II} + \Psi^{II} \quad [9]$$

Con el objetivo de poder separar, a través de la generación de segundo armónico, la contribución a la no linealidad de cada uno de los términos no lineales de segundo orden, es conveniente utilizar, como sistema de medida, un transformador o bipuerto eléctrico; se tienen dos parámetros ajustables: la frecuencia de excitación y la impedancia eléctrica conectada al segundo puerto y pueden realizarse dos medidas eléctricas: la corriente en ambos puertos.

El trabajo ha sido restringido a un estudio en modo extensional de espesor con el objetivo de realizar una determinación sin ambigüedad de cada uno de los coeficientes no lineales de segundo orden.

**2. DESCRIPCIÓN FÍSICA DEL BIPUERTO ELÉCTRICO.**

Un transductor simétrico de tipo Langevin es modificado y empleado como bipuerto eléctrico (Figura 1).

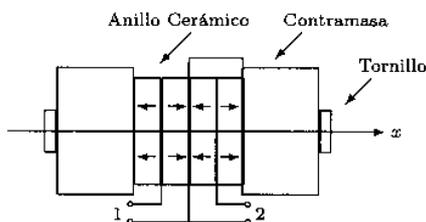


Figura 1. Transformador simétrico

Cuatro cerámicas en forma de anillos con polarización alterna, son utilizadas para disponer de dos puertos a los que se les atribuye el mismo comportamiento lineal y no lineal. Las cerámicas se unen por un tornillo que al dar una cierta pretensión, garantiza el contacto acústico y nos permite medir en diferentes condiciones de trabajo, propias de un determinado dispositivo. Dos contramasas se ponen en los extremos, garantizando así que la función  $S(x)$  pueda considerarse uniforme dentro de la cerámica. Las contramasas están unidas eléctricamente con la masa eléctrica, por lo que cada par de cerámicas constituye un puerto eléctrico.

**2.1. Circuito equivalente lineal**

Suponiendo que no existen movimientos apreciables en la dirección radial y que se trabaja en el entorno de la resonancia, se desarrolla un modelo lineal para el bipuerto a partir de un modelo eléctrico propuesto por Mason para el transductor piezoelectrico en modo de vibración extensional (3). Dos circuitos equivalentes de Mason, uno para cada lado, son unidos mecánicamente, obteniéndose un esquema eléctrico con dos puertos simétricos (Figura 2).

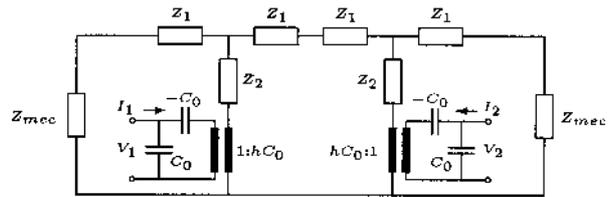


Figura 2. Modelo eléctrico del bipuerto

Haciendo unas simples transformaciones circuitales se reduce el circuito equivalente a un esquema eléctrico sencillo (Figura 3).

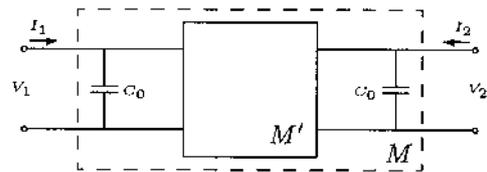


Figura 3. Circuito equivalente lineal

Este sistema puede ser totalmente caracterizado para cada frecuencia y su frecuencia doble a partir de la determinación experimental de la matriz de transmisión  $(M_{ij}(v))_{2 \times 2}$  que lo caracteriza (4). El valor de  $C_0$  puede ser medido con suficiente exactitud.

**2.2. Circuito equivalente no lineal**

Al modelar un transductor piezoelectrico no lineal en modo de vibración extensional, se obtiene un circuito equivalente de Mason modificado por la adición de un elemento no lineal en la rama eléctrica y tres en la rama "motional" que pueden ser

considerados fuentes no lineales de tensión (Figura 4).

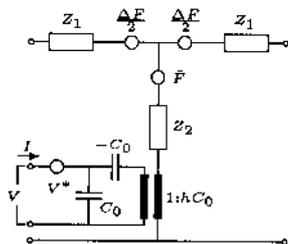


Figura 4. Circuito equivalente de Mason modificado.

Al suponer que la función  $S(x)$  es uniforme y como  $D(x)$ , por Ley de Gauss, también lo es, suponemos que las funciones no lineales  $\Phi(x)$  y  $\Psi(x)$  también lo son, por lo que no aparecen términos antisimétricos de  $\Phi$  ni soluciones particulares de  $S$ , siendo  $\Delta F=0$  (5).

El circuito equivalente no lineal se simplifica notablemente apareciendo, para cada transductor, sólo dos fuentes de tensión: una sobre el puerto eléctrico y otra sobre la rama "motional" que denominaremos  $V_\Psi$  y  $V_\Phi$  respectivamente. A partir de estas consideraciones se obtiene, de manera muy sencilla, el circuito equivalente no lineal para nuestro sistema (Figura 5).

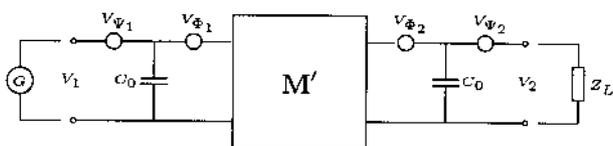


Figura 5. Circuito equivalente no lineal.

### 3. MATRIZ DE COEFICIENTES NO LINEALES

Los términos no lineales,  $\Phi$  y  $\Psi$ , que aparecen en las ecuaciones constitutivas a frecuencia doble tienen una relación lineal con los coeficientes no lineales a través de los productos  $SS$ ,  $SD$  y  $DD$  a esa frecuencia. Esta relación se puede escribir en forma matricial a través de una matriz  $(\mathbf{B})_{4 \times 4}$  como sigue:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Psi_1 \\ \Phi_2 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3S_1S_1 & 2S_1D_1 & D_1D_1 & 0 \\ 0 & S_1S_1 & 2S_1D_1 & 3D_1D_1 \\ 3S_2S_2 & 2S_2D_2 & D_2D_2 & 0 \\ 0 & S_2S_2 & 2S_2D_2 & 3D_2D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{SSS} \\ \lambda_{SSD} \\ \lambda_{SDD} \\ \lambda_{DDD} \end{pmatrix} \quad [10]$$

Los términos  $SS$ ,  $SD$  y  $DD$  son las componentes de frecuencia  $2v$  de los productos  $\mathbf{SS}$ ,  $\mathbf{SD}$  y  $\mathbf{DD}$ , los cuales se obtienen a partir de sus amplitudes complejas  $S^I$  y  $D^I$  a frecuencia  $v$ . Los desplazamientos  $S^I$  y  $D^I$  se obtienen a partir de la medida de las corrientes,  $I^I$ , a frecuencia  $v$  y su relación se establece mediante la caracterización lineal del bipuerto a la frecuencia y pretensión de trabajo.

La relación entre las funciones no lineales,  $\Phi$  y  $\Psi$ , y las tensiones no lineales  $V_\Psi$  y  $V_\Phi$  viene descrita por la matriz diago-

nal  $(\mathbf{K})_{4 \times 4}$  que depende de la geometría de las cerámicas. Si  $W$  es el área de un anillo cerámico y  $l$  el doble de su espesor, podemos escribir esa relación como sigue:

$$\begin{pmatrix} V_{\Phi_1} \\ V_{\Psi_1} \\ V_{\Phi_2} \\ V_{\Psi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{W}{hC_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{W}{hC_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Psi_1 \\ \Phi_2 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad [11]$$

A partir del comportamiento lineal del bipuerto a frecuencia doble, se obtiene una relación entre las tensiones no lineales,  $V_\Psi$  y  $V_\Phi$ , y las corrientes de segundo armónico,  $I^I$ , designada por la matriz  $(\mathbf{A})_{2 \times 4}$ .

Conocidas las matrices  $(\mathbf{A})$ ,  $(\mathbf{K})$  y  $(\mathbf{B})$ , su producto,  $(\mathbf{C})_{2 \times 4}$  nos indica la relación entre las corrientes de segundo armónico y los coeficientes no lineales de segundo orden para una determinada experiencia.

$$\begin{pmatrix} I_1^I \\ I_2^I \end{pmatrix} = (\mathbf{C}(S_1^I, D_1^I, S_2^I, D_2^I)) \begin{pmatrix} \lambda_{SSS} \\ \lambda_{SSD} \\ \lambda_{SDD} \\ \lambda_{DDD} \end{pmatrix} \quad [12]$$

### 3.1. Condiciones de medida

Debido a que para cada experiencia se dispone de dos ecuaciones para cuatro incógnitas, es necesario realizar la medida en un mínimo de dos experiencias suficientemente distintas. Hay que tener en cuenta que no todas las condiciones de medida, dadas por la frecuencia  $v$  y la impedancia,  $Z_L$ , conectada al segundo puerto, aportan información significativamente distinta. En el primario, la relación entre  $D_1$  y  $(h\epsilon)S_1$  viene dada por la frecuencia; en la resonancia ambos términos son iguales. En el secundario, la relación entre  $D_2$  y  $(h\epsilon)S_2$  viene dada por el valor de la impedancia eléctrica  $Z_L$  en relación con la impedancia eléctrica asociada al condensador  $C_0$ . En ambos puertos la corriente total es proporcional a  $D$  y la corriente "motional" es proporcional a  $S$ .

Al hacer estudios no lineales es necesario comunicar la máxima energía al sistema, por lo que es conveniente trabajar siempre en resonancia ajustando la frecuencia en función de  $Z_L$ . Teniendo en cuenta esto podemos tomar valores para  $Z_L$  que garanticen al menos dos experiencias suficientemente distintas; en un caso, si  $Z_L$  es muy pequeña se tiene que  $D_2$  será aproximadamente igual a  $(h\epsilon)S_2$  mientras que en otros casos, si  $Z_L$  es comparable a  $C_0$ , ya sea resistiva o reactiva, se tiene que  $D_2$  será significativamente menor que  $(h\epsilon)S_2$ .

### 4. CONCLUSIONES

El montaje de las cerámicas en forma de transductor de Langevin modificado como bipuerto eléctrico permite la medida de los distintos términos de segundo orden de la no linealidad en modo de vibración extensional, facilitando la resolución entre ellos.

Este montaje permite la aplicación de campos razonablemente uniformes, aumenta el número de parámetros ajustables y el número de medidas; además, permite hacer un estu-

dio a distintas pretensiones permitiendo estudiar el material en sus posibles condiciones de trabajo.

El método, en principio, está limitado a no linealidades débiles. El sistema aumenta la complejidad de las medidas y no puede medirse en ausencia de pretensión. En el diseño del bipuerto hay que tener en cuenta que los modos espurios de resonancia pueden imposibilitar la medida.

Las medidas mecánicas podrían ser útiles para simplificar la medida de la deformación del sistema a ambas frecuencias aumentando su exactitud.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido posible gracias al proyecto TAP98-0911-C03-02 de la CICYT, España.

## BIBLIOGRAFÍA

1. M. Planat and D. Hauden. "Nonlinear properties of bulk and surface acoustic waves in piezoelectric crystals". In Taylor, Gagnepain, Meeker, Nakamura, and Shuvalov, editors, *Piezoelectricity*. Gordon and Breach, New York, 1985.
2. J. K. Na and M. A. Breazeale. "Ultrasonic nonlinear properties of lead zirconate-titanate ceramics". *J. Acoust. Soc. Am.*, **95**(6): 3213-3221, June 1994.
3. Takuro Ikeda. *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford University Press, New York, 1990.
4. R. Pérez, M. Tresanchez, J. L. Villar, L. Benadero, A. Albareda, and J. A. Gorri. "Transformador piezoeléctrico en modo radial". *Bol. Soc. Esp. Ceram. Vidr.*, **30**(5): 392-396, 1991.
5. R. Pérez, E. Minguella, and J. A. Gorri. "Weak nonlinearities in piezoelectric transducer. Equivalent circuit". *Proc. of the Eleventh IEEE Int. Sym. on Appl. of Ferroelectrics*, 247-250, (1998).