

¿POR QUÉ SE LES LLAMA NATURALES A LOS LOGARITMOS CUYA BASE ES EL NÚMERO e ?

F. Damián Aranda Ballesteros

1.- EL NÚMERO e . BREVE IDEA DE CÓMO SE INVENTARON LOS LOGARITMOS

En Matemáticas existen algunos números que son muy famosos. Conocemos entre otros el número π y el número áureo ϕ . Vamos a hablar del número e , que debe su nombre al matemático suizo Euler. El número e es irracional, y se obtiene como límite

de la sucesión $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Lo anterior supone que, aumentando suficientemente el valor que sustituamos por n , más decimales del número e obtendríamos:

$$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 1'01^{100} = 2'704813\dots; \quad \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 1'001^{1000} = 2'716023\dots;$$
$$\left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} = 1'00001^{10000} = 2'718280\dots; \quad e = 2'718281828459045\dots$$

2.- UN POCO DE HISTORIA

Desde hace mucho tiempo el hombre ha necesitado efectuar laboriosos y precisos cálculos para resolver problemas que afectaban a su vida cotidiana. Durante el siglo XVI, la realización de cálculos complicados se presentaba en asuntos mercantiles y trigonométricos, estos últimos de gran incidencia en la navegación o la agrimensura.

Con la reducción del trabajo de varios meses de cálculo a unos pocos días, el invento de los logaritmos parece haber duplicado la vida de los astrónomos. (Laplace)

Antes de la invención de los computadores, el nivel de precisión exigido en algunas cuestiones técnicas era bastante grande, requiriéndose operar con números de 5 o más decimales. *En las Tablas de logaritmos vulgares*, de D. Vicente Vázquez Queipo, «obra declarada de texto por el consejo de instrucción pública y premiada en la Exposición Universal de París de 1887», se comenta, en el prólogo de su vigésima octava edición:

... es superfluo en la mayoría de los cálculos astronómicos el empleo de más de cinco decimales, pues los errores de observación son mayores en lo general que la quinta unidad decimal y nunca llega la precisión a la sexta. ¿A qué conducen, pues, la exactitud y prolijidad en los cálculos, si los datos a que se aplican no las consienten? A nada absolutamente, a no ser en el análisis trascendental y en las ciencias que de ella dependen indirectamente, en las cuales se necesitan siete y a veces hasta diez decimales, como en la Geodesia. Fuera de estos casos sobra y basta con seis.

La cuestión es: ¿cómo actuaban los técnicos y científicos cuando tenían la necesidad de realizar numerosos y complejos cálculos? Lo hacían utilizando las tablas de logaritmos.

La invención de los logaritmos la dio a conocer el escocés Juan Neper, barón de Merchiston, que los publicó por primera vez en 1614. De manera paralela a Neper, también los descubrió el suizo Bürgi. Su idea se basaba en la observación, ya realizada por Arquímedes, de ciertas propiedades de las progresiones geométricas, estableciendo una correspondencia «uno a uno» entre los valores de las potencias y los exponentes de dichas potencias.

3.- IDEA PRIMITIVA DE LOGARITMO

Consideremos, por ejemplo, la progresión geométrica de primer término 2 y razón 2:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a ^N	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

Si quiero multiplicar 8 (término n° 3 de la progresión) por 128 (término n° 7) me basta con sumar los términos (3+7=10) y comprobar el número que le corresponde a la suma: 1024 = 8 x 128.

Esto no es más que aplicar la propiedad de que $2^m \times 2^n = 2^{m+n}$.

Como $2^m / 2^n = 2^{m-n}$, para dividir dos términos de la progresión se miran los lugares que ocupan y se restan estos lugares, el resultado será el número correspondiente al resultado de la resta: 128 (n° 7) entre 16 (n° 4) da 8 (n° 3 = 7 - 4)

Dicho de otra forma, multiplicar dos términos de la progresión se traduce en sumar sus posiciones en la secuencia, y dividirlos en restarlos. ¿Cómo se elevará un término de la progresión? Para hallar 16^2 , miro el lugar que ocupa 16 en la serie (4), lo multiplico por la potencia (2) y obtengo 8. Volviendo a mirar el número que corresponde al lugar 8, comprobamos que se trata de 256, que es el resultado de la potencia.

¿En qué propiedad de las potencias se basa la observación anterior? ¿Cómo obtener fácilmente la raíz cuadrada de 1024? ¿Y la raíz cúbica de 512?

A los lugares que ocupaban las sucesivas potencias de base 2 se les llama *logaritmos de base 2*: $\log_2 2 = 1$; $\log_2 4 = 2$; $\log_2 8 = 3$; etc. De lo observado anteriormente, se tienen las siguientes propiedades:

$$\log_2 (a \cdot b) = \log_2 a + \log_2 b; \log_2 (a/b) = \log_2 a - \log_2 b; \log_2 a^b = b \cdot \log_2 a.$$

De la definición de logaritmo, también se tienen: $\log_2 2^b = b$ y $2^{\log_2 b} = b$

Igual que hemos considerado la progresión geométrica de razón 2 podíamos haberlo hecho con la de razón 3, dando lugar a los logaritmos de base 3, lo mismo sería con cualquier otra base. En realidad, conociendo los logaritmos de una base es fácil conocer los logaritmos en cualquier otra. Como $\log_q x = \log_q (p^{\log_p x}) = \log_p x \cdot \log_q p$, se tiene que $\log_p x = \log_q x / \log_q p$

Resulta así más cómodo realizar las operaciones aritméticas ya que rebajamos la complejidad de las mismas al cambiar los productos por sumas, cocientes por diferencias, productos por potencias y raíces por cocientes. El problema es que sólo lo podemos realizar con los números que intervienen en la secuencia de potencias de 2, pero ¿cómo multiplicar cómodamente 2145 por 47, que no aparecen en dicha tabla? Nos interesaría, por lo menos, encontrar una progresión que contuviese a todos los números naturales; en realidad nos bastaría con calcular los logaritmos de los números primos, pues el logaritmo de un número natural se puede expresar mediante los logaritmos de sus factores primos.

Una idea válida puede ser la de considerar, en lugar de las potencias de 2, potencias de un número cercano a 1, que dejan menos huecos. Esta es la idea que tuvieron Neper y Bürgi (aunque siguiendo métodos diferentes).

4.- CONSTRUCCIÓN DE LA TABLA DE LOGARITMOS DE BÜRGI. APROXIMACIÓN AL NÚMERO *e*

Bürgi consideró la base 1'0001. Realicemos una tabla de valores de 1'0001ⁿ. Vemos que se avanza muy poco (nos interesa que vayan apareciendo *todos* los números

naturales y con 6 pasos aún estamos lejísimos de 2). Además los cálculos son tan complicados que parece imposible obtener una potencia elevada de 1'0001. Se observa (puede haber alguna esperanza) que los números en **negrita** son los del triángulo de Tartaglia (o del Binomio de Newton).

$$(1+0'0001)^n = \binom{n}{0}1 + \binom{n}{1}0'0001 + \dots + \binom{n}{k}0'0001^k + \dots + \binom{n}{n}0'0001^n$$

Así, no resulta complicado establecer las primeras cifras de 1'0001⁵⁰.

Ahora bien, se habrá de tener cuidado con la superposición de cifras.

n	1'0001 ⁿ	Cómo calcular las decimales exactos de la potencia 1'0001 ⁵⁰ 1'0050 1225 19600 230300..... 1'0050122696230300..... = 1'0001 ⁵⁰
0	1	
1	1'0001	
2	1'00020001	
3	1'000300030001	
4	1'0004000600040001	
5	1'00050010001000050001	

En definitiva, aunque muy pesado, hemos comprobado que es factible construir la tabla de logaritmos de base 1'0001. El inconveniente que sigue presentando es que el avance es muy lento: elevando esta base a 50 sólo vamos por 1'005...; para obtener 2 hemos de elevar la base a 6931; 1'0001⁶⁹³¹ = 1'99983634..., y a 6932; 1'0001⁶⁹³² = 2'000036324 y, calculando la media geométrica, estimamos que el logaritmo de 2 es 6931'4...

NOTA: Sabemos que si tenemos tres términos consecutivos A, B y C de una progresión aritmética, el término intermedio B es la media aritmética de los otros dos; B=1/2·(A+C). Si fuesen términos consecutivos de una progresión geométrica, B será la media geométrica de ambos; B = √A.C .

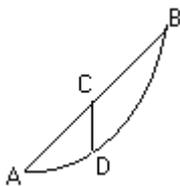
También se nos presenta el problema de que los logaritmos en esta base resultan muy grandes. Hay que elevar 1'0001 a 16095 para acercarnos a 5, peor será con 41 o con 73.

La solución que encontró Bürgi fue considerar la base 1'0001¹⁰⁰⁰⁰, cuya tabla es *muy fácil* de construir a partir de la anterior. Se comprueba sin dificultad que si en la antigua base, el logaritmo de 2 era 6931'81183, en la nueva base será 0'69314... . Sólo hay que dividir por 10000, con lo que el tamaño de los nuevos logaritmos resulta más razonable.

Siendo exagerados, podríamos pensar que sería mejor base todavía 1'0000001¹⁰⁰⁰⁰⁰⁰⁰, puesto que 1'0000001 aún está más cerca de la unidad, y podemos seguir.... Si así lo

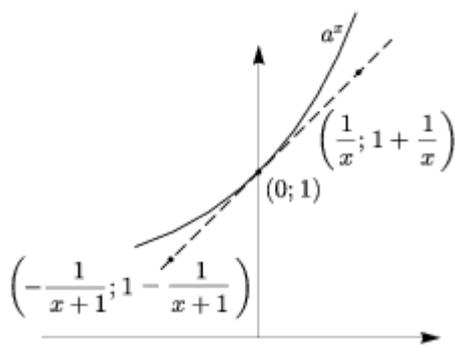
hacemos, nos estaremos acercando al número $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. La base natural para construir una tabla de logaritmos es la base *e*.

5.- LA PENDIENTE DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL $f(x) = e^x$



De entre las propiedades más importantes e interesantes del número e subrayaremos la relativa a la de la pendiente de la recta tangente a la función exponencial. Las gráficas de las funciones exponenciales son conocidas desde la escuela. Sea $x \mapsto a^x$, entonces si $a > 1$ la función es estrictamente creciente y si $0 < a < 1$, la función decrece, quedando el caso de que la función será constante si y solo si $a = 1$.

En cada caso, la gráfica es una curva continua que siempre pasa por el punto $(0,1)$. La función es convexa sea cual sea la base, es decir, el segmento que determinan dos puntos de la gráfica está siempre por encima de la curva. La convexidad puede ser explicada formalmente. Sean los puntos extremos del segmento AB , $A=(x, a^x)$ y $B=(y, a^y)$. Cualquier punto interior C del segmento AB lo divide en una cierta razón. Si la razón es $q:p$ donde p y q son números positivos que verifican que $p+q=1$, entonces las coordenadas del punto C serán $(px+qy, pa^x+qa^y)$, y así el punto D correspondiente a la gráfica de la función exponencial será $D = (px+qy, a^{px+qy})$.



Probaremos que:

$$a^{px+qy} \leq pa^x + qa^y \quad \text{para todo valor } x, y, p, q \quad (p + q = 1, p, q \geq 0).$$

La convexidad de la función exponencial puede ser probada a partir de la desigualdad entre las medias geométrica y aritmética. Dadas dos cantidades positivas, X e Y , se verifica que:

$$\sqrt{X \cdot Y} \leq \frac{1}{2}(X + Y); \quad X^{\frac{1}{2}} \cdot Y^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \cdot X + \frac{1}{2} \cdot Y$$

Por tanto, si ahora consideramos las cantidades positivas a^x y a^y , la anterior desigualdad para las medias geométrica y aritmética ponderadas con los pesos p y q , resultaría la desigualdad: $a^{px+qy} \leq pa^x + qa^y$.

Probaremos a continuación que la gráfica de la función exponencial presenta una recta tangente para cada punto de la misma. La pendiente de la recta dependerá de la base de la función exponencial. Precisamente la base que nos permite construir la tangente en el punto $(0,1)$ con pendiente igual a 1 es el número e , como ahora veremos. Para ello sea la recta $y = x + 1$, recta que pasa por el punto $(0,1)$ y tiene de pendiente 1. Sean pues la función exponencial $y = a^x$ y la recta $y = x + 1$ que serán tangentes en el punto $(0,1)$. Para obtener dicha base que verifique aquel contacto, para un valor x positivo suficientemente grande consideramos el punto $\left(\frac{1}{x}, 1 + \frac{1}{x}\right)$. Como la curva es convexa, según hemos visto, entonces la recta tangente se situará por debajo de la gráfica de la

curva excepto en el punto de tangencia $(0,1)$. Por tanto, $a^{\frac{1}{x}} > 1 + \frac{1}{x}$, y así: $a > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

. Sea ahora el punto $\left(-\frac{1}{x+1}, 1 - \frac{1}{x+1}\right)$ que también está por debajo de la curva.

$$\text{Como } a^{-\frac{1}{x+1}} > 1 - \frac{1}{x+1} \Rightarrow a < \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{-\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x+1}}} = \frac{1}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{x+1}}} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

En definitiva, se verifica la desigualdad: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < a < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ para todo $x > 0$.

Esta desigualdad responde así a la cuestión antes planteada, pues para un valor de x suficientemente grande, podremos estimar el valor de la base a . En efecto, este valor existirá sin más que probar que las funciones siguientes

$$x \rightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad x \rightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

son estrictamente creciente y decreciente, respectivamente.

La monotonía de ambas funciones será probada haciendo uso de las desigualdades entre las distintas medias. Sean para ello, $0 < u < v$ cualesquiera números reales positivos.

Probaremos en primer lugar que: $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u < \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$. Así para los números $1 + \frac{1}{u}$ y 1 ,

consideramos la desigualdad entre las medias geométrica y aritmética ponderadas de

pesos u y $v-u$, ($u < v$), respectivamente: $\left(\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \cdot 1^{v-u}\right)^{\frac{1}{v}} < \frac{u \cdot \left(1 + \frac{1}{u}\right) + (v-u) \cdot 1}{v}$.

Simplificando obtenemos que: $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u < \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$. Procediendo de forma similar con la

desigualdad existente entre la media armónica (inversa de la media aritmética de los inversos de dichos números) y geométrica de los mismos números y con los pesos $u+1$ y $v-u$ se establecerá que:

$$\frac{v+1}{\frac{u+1}{1 + \frac{1}{u}} + \frac{v-u}{1}} < \left(\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1} \cdot 1^{v-u}\right)^{\frac{1}{v+1}}, \quad \left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v+1} < \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}.$$

Cuando aumenta el valor de x , la razón entre las expresiones que acotan inferior y superiormente a la base a se aproxima a 1. Esto quiere decir que ambas funciones tienen un mismo límite en el infinito. Si ambas funciones tienen un común, este límite coincidirá con el propio valor de la base a . Y, según hemos visto, este límite no es otro

que $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Esta base de la función exponencial no solo posee la propiedad

de que la pendiente de su tangente en el punto $(0,1)$ es igual a 1, sino que además la pendiente de la recta tangente en cualquiera de sus demás puntos (x, e^x) es también igual a su ordenada e^x . En otras términos, la derivada de la función exponencial $y = e^x$ es igual a $y = e^x$.

Esta propiedad se deriva de aquella otra primera del siguiente modo. Al ser la curva convexa en el punto (t, e^t) , la recta tangente r se situará por debajo de la gráfica de la curva. Veamos que la recta r es la de ecuación $y = e^t + e^t(x-t)$. Para un valor $k > 0$, sean los puntos $(t+1/k, e^t \cdot (1+1/k))$ y $(t-1/(k+1), e^t \cdot k/(k+1))$, ambos situados sobre dicha recta a un lado y otro del punto (t, e^t) dado. Como quiera que $e > (1+1/k)^k$ entonces $e^{1/k} > (1+1/k)$ y así, $e^{t+1/k} > e^t \cdot (1+1/k)$. Como también es $e < (1+1/k)^{k+1}$, será $e^{1/(k+1)} < (1+1/k)$ y así $e^{-1/(k+1)} > k/(k+1)$. Por fin, $e^{t-1/(k+1)} > e^t \cdot k/(k+1)$.