

## **Optimización multietápica mediante escenarios para el tratamiento de la incertidumbre de la demanda en la planificación del tiempo de trabajo con jornada anualizada \***

**Albert Corominas Subias<sup>1</sup>, Amaia Lusa García<sup>1</sup>, Norberto Muñoz Gómez<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Instituto de Organización y Control. Dpto. de Admón. de Empresas. ETSEIB. Universitat Politècnica de Catalunya. Avda. Diagonal 647, p11, 08028 Barcelona. albert.corominas@upc.edu, amaia.lusa@upc.edu

<sup>2</sup> Instituto de Organización y Control. Universitat Politècnica de Catalunya. Avda. Diagonal 647, p11, 08028 Barcelona. norberto.munoz@upc.edu

### **Resumen**

*La anualización de la jornada laboral (i.e., los trabajadores realizan un cierto número anual de horas que pueden distribuirse de forma irregular a lo largo del tiempo) permite a las empresas adaptar la capacidad productiva a la demanda. La demanda, dato indispensable para llevar a cabo una planificación óptima del tiempo de trabajo, suele depender de múltiples y complejos factores y, a menudo, no es posible obtener una previsión fiable o bien no es realista considerar una función de probabilidad asociada a ella. En algunos casos podrá determinarse para la demanda un conjunto de escenarios posibles, cada uno de ellos con una cierta probabilidad asociada. En este trabajo se presenta un modelo de optimización mediante escenarios que proporciona una solución robusta (i.e., factible para cualquiera de los escenarios que se pueden presentar) y que minimiza la esperanza matemática del déficit total de capacidad.*

**Palabras clave:** planificación, incertidumbre, optimización mediante escenarios

### **1. Introducción**

La planificación del tiempo de trabajo con jornada anualizada (i.e., los trabajadores realizan un cierto número anual de horas que pueden distribuirse de forma irregular a lo largo del tiempo) se realiza a partir de la demanda de los productos o servicios que ofrece la empresa (Corominas et al., 2004). Sin embargo, dicha demanda suele depender de múltiples y complejos factores y, a menudo, no es posible obtener una previsión fiable o bien no es realista considerar una función de probabilidad asociada a ella. En algunos casos podrá determinarse para la demanda un conjunto de escenarios posibles, cada uno de ellos con una probabilidad asociada.

La mayoría de procedimientos de planificación y programación asumen datos deterministas o trabajan con valores promedio. Es evidente que el error en el que se incurre al no considerar la demanda como una variable aleatoria puede comportar unos costes importantes debidos a la falta o al exceso de capacidad que se presenta al no coincidir la realidad con la previsión o incluso que la solución obtenida resulte finalmente ser no factible. La optimización estocástica y, en particular, la optimización mediante escenarios, es un instrumento adecuado para tratar la incertidumbre. El objetivo puede consistir en optimizar la esperanza matemática

---

\* Trabajo financiado por el proyecto DPI2004-05797

de una cierta función de utilidad (por ejemplo, el coste) y es posible incluir restricciones que garanticen que la solución será factible para cualquiera de los escenarios posibles.

En este trabajo se presenta un modelo de optimización multietápica mediante escenarios para el tratamiento de la incertidumbre de la demanda en la planificación del tiempo de trabajo con jornada anualizada.

## 2. Optimización multietápica mediante escenarios

La optimización mediante escenarios ha sido utilizada con éxito en numerosos problemas para la toma de decisiones frente a futuros escenarios posibles (Ramos, 1992; Morton, 1996; Pallotino et al., 2002; Li et al., 2003; Mulvey et al., 2004).

Los modelos de programación estocástica mediante escenarios más estudiados y aplicados son los programas lineales de varias etapas (multietápicas). En un problema multietápico, al principio de cada etapa se toma una decisión bajo un futuro incierto; cuando se llega al final de dicha etapa, algunos aspectos inciertos del futuro se revelan reduciendo el conjunto de escenarios posibles. La Figura 1 es una representación de dicho proceso. Para el caso de planificación del tiempo de trabajo con jornada anualizada, los escenarios representan las diferentes demandas que se pueden presentar. Se tienen tres etapas y, al inicio de la primera (estado  $E_0$ ), se desconoce por completo cuál de los 12 escenarios posibles se va a presentar. Al final de dicha etapa e inicio de la segunda (estado  $E_1$ ,  $E_2$  o  $E_3$ ) se dispone de información adicional (la demanda que se ha presentado en los períodos correspondientes a la primera etapa) que permite reducir el abanico de escenarios posibles. Por ejemplo, si en los escenarios 6 a 12 la demanda es alta en todos los períodos de la primera etapa y ésta ha sido baja, entonces nos encontraremos en el estado  $E_1$  y dichos escenarios quedarán descartados.

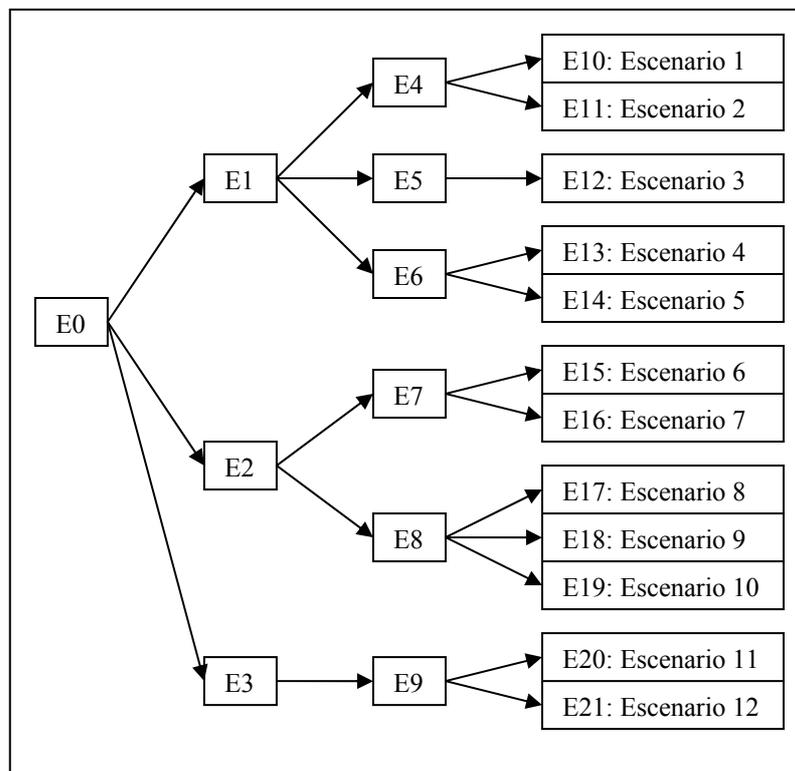


Figura 1. Árbol de escenarios

El modelo de planificación debe proporcionar las decisiones a tomar en cada uno de los estados posibles. Así, al inicio, en el estado  $E0$ , la planificación deberá determinar las decisiones a tomar en todos y cada uno de los estados. Transcurrida una etapa se actualizará la planificación teniendo en cuenta la información adicional disponible y la realidad ocurrida en períodos anteriores, siempre que ello sea posible ya que en algunos casos todas o parte de las decisiones tomadas no pueden modificarse.

El número de etapas a considerar (o su duración) puede depender de diversos factores. En el caso de la planificación del tiempo de trabajo se debe tener en cuenta lo que se establezca en el convenio colectivo o acuerdo entre empresa y trabajadores. Éste puede especificar un plazo de rigidez para las jornadas de trabajo de modo que los trabajadores puedan planificar su tiempo libre sin estar sometidos a continuos cambios de calendario. Así, si el plazo de rigidez es de un mes no se pueden establecer etapas de duración inferior, ya que en dicho caso no sería posible mantener las jornadas de un mes entero sin cambios (no se puede saber qué jornadas van a realizar los trabajadores hasta que no se sabe en qué estado nos encontramos). Puede existir, además, un plazo de comunicación mínimo, que lógicamente será inferior al plazo de rigidez. Ello significa que, en realidad, las jornadas que se realicen a partir de una etapa (por ejemplo, a partir del estado  $E2$ ,  $E3$  o  $E4$ ) deberán comunicarse a los trabajadores con antelación. Esta consideración sobre el plazo de comunicación no afecta ni al árbol de escenarios (Figura 1) ni al modelo que se presenta en la siguiente sección. Sin embargo, sí debe tenerse en cuenta que la información a considerar al inicio de una etapa (por ejemplo, estados  $E2$ ,  $E3$  o  $E4$ ) es en realidad la información de que se disponga al inicio de dicha etapa menos el plazo de comunicación.

Además de lo anterior, no tiene sentido considerar estados en los que no existe información adicional. Éste es el caso del estado  $E9$ : en el estado  $E3$  la información disponible permite conocer con certeza que el escenario real es el 11 o el 12; en el estado  $E9$  aún no es posible discernir entre el escenario 11 y el 12. Por tanto, la planificación elaborada a partir del estado  $E9$  para los períodos de la última etapa va a ser idéntica a la que podría determinarse al inicio de la segunda etapa (en el estado  $E3$ ). Esto significa que el número de etapas no tiene que ser fijo. De hecho, el árbol de la figura anterior podría plantearse como un grafo general en el que los arcos no representan períodos de tiempo sino únicamente conexiones entre estados. En este caso, debe conocerse a qué período corresponde cada estado.

### 3. Modelo de optimización mediante escenarios

Siguiendo el esquema de optimización mediante escenarios se ha diseñado un modelo de programación lineal mixta. La solución, que será factible para todos los escenarios, proporciona las decisiones que se deben tomar en cada uno de los posibles estados y minimiza la esperanza matemática del déficit total de capacidad.

A continuación se define la notación empleada:

#### Datos:

$E$  conjunto de estados

$\Gamma_e^+$  conjunto de estados a los que se puede ir a partir del estado  $e$  ( $\forall e \in E$ )

- $\tau_e$  período de tiempo (inicio de semana) correspondiente al estado  $e$  ( $\forall e \in E$ ).  
Lógicamente,  $\tau_i = \tau_j \quad \forall i, j \in \Gamma_e^+$ , puesto que las condiciones acerca del plazo de rigidez deben ser siempre las mismas.
- $a_e$  estado inmediatamente anterior al estado  $e$  ( $\forall e \in E \setminus E0$ ).
- $p_e$  probabilidad de ir al estado  $e$  estando en el estado anterior ( $a_e$ ). Es decir, es la probabilidad de que se presente alguno de los escenarios que son posibles a partir del estado  $e$ , estando en el estado  $a_e$  ( $\forall e \in E \setminus E0$ ).
- $TF_e$  conjunto de semanas de la etapa que finaliza en el estado  $e$ . Es decir, es el conjunto de semanas entre el estado anterior a  $e$  ( $a_e$ ) y el estado  $e$ :  
 $TF_e = \{\tau_{a_e}, \dots, \tau_e - 1\}, \forall e \in E \setminus E0$
- $TI_e$  conjunto de semanas de la etapa que comienza en el estado  $e$ . Es decir, es el conjunto de semanas entre el estado  $e$  y los estados siguientes a  $e$  ( $\Gamma_e^+$ ):  
 $TI_e = \{\tau_e, \dots, \tau_c - 1\}$  con  $a_c = e, \forall e \in E \mid \Gamma_e^+ \neq \emptyset$ .
- $CAM$  conjunto de caminos del árbol de escenarios, donde cada camino comienza en el estado inicial  $E0$  y finaliza en un estado correspondiente al inicio de la última etapa (es decir, los estados finales no forman parte de ningún camino). Para el ejemplo de la Figura 1 habría seis caminos posibles:  $CAM = \{E0-E1-E4, E0-E1-E5, E0-E1-E6, E0-E2-E7, E0-E2-E8, E0-E3\}$ ; nótese que el estado  $E9$  se ha eliminado del grafo.
- $CAM2$  conjunto de caminos del árbol de escenarios, donde cada camino termina en un estado final (escenario) y no incluye el estado inicial  $E0$ . Para el ejemplo de la Figura 1 habría doce caminos posibles:  $CAM2 = \{E1-E4-E10, E1-E4-E11, E1-E5-E12, E1-E6-E13, E1-E6-E14, E2-E7-E15, E2-E7-E16, E2-E8-E17, E2-E8-E18, E2-E8-E19, E3-E20, E3-E21\}$ .
- $q_{cam}$  probabilidad de que se presente el escenario correspondiente al último estado perteneciente a  $cam$  ( $\forall cam \in CAM2$ ). Esta probabilidad se calcula como sigue:  
 $q_{cam} = \prod_{\forall e \in cam} p_e$
- $C_{te}$  capacidad requerida (en horas de trabajo) de los escenarios que son posibles a partir del estado  $e$ , y para la semana  $t$  correspondiente a la etapa que finaliza en dicho estado ( $\forall e \in E \setminus E0; \forall t \in TF_e$ ). Nótese que durante las semanas anteriores al estado  $e$ , la demanda de los escenarios que son posibles a partir de dicho estado coincide.
- $W$  conjunto de trabajadores de la plantilla
- $S_i$  conjunto de semanas laborables disponibles del trabajador  $i, \forall i \in W$ .
- $H_i$  número de horas ordinarias del trabajador  $i$  para el conjunto del año  $\forall i \in W$ .
- $hm_{it}$  cota inferior del número de horas de trabajo productivo del operario  $i$  en la semana  $t$  ( $\forall i \in W; \forall t \in S_i$ )
- $hM_{it}$  cota superior ( $>hm_{it}$ ) del número de horas de trabajo productivo del operario  $i$  en la semana  $t$  ( $\forall i \in W; \forall t \in S_i$ ).

$L, h_L$  para todo trabajador, el promedio de horas de trabajo en cualquier grupo de  $L$  semanas de trabajo consecutivas, no puede ser superior a  $h_L$ .

### Variables:

$d_{te}$  déficit de capacidad, en horas de trabajo, al presentarse cualquiera de los escenarios que son posibles a partir del estado  $e$ , y para la semana  $t$  correspondiente a la etapa que finaliza en el estado  $e$  ( $\forall e \in E \setminus E0; \forall t \in TF_e$ ). Durante las semanas anteriores al estado  $e$ , la demanda de los escenarios que son posibles a partir de dicho estado coincide.

$x_{ite}$  número de horas de trabajo del miembro del personal  $i$  en la semana  $t$ , que pertenece a la etapa que se inicia en el estado  $e$  ( $\forall i \in W; \forall e \in E \mid \Gamma_e^+ \neq \emptyset; \forall t \in \{TI_e \cap S_i\}$ )

El modelo se incluye y describe a continuación:

$$[MIN] z = \sum_{\forall cam \in CAM2} q_{cam} \cdot \left( \sum_{\forall e \in cam} \sum_{\forall t \in TF_e} d_{te} \right) \quad (1)$$

$$\sum_{\forall e \in cam} \sum_{\forall t \in (TI_e \cap S_i)} x_{ite} = H_i \quad \forall i \in W; \forall cam \in CAM \quad (2)$$

$$\left( \sum_{\forall i \in W \mid t \in S_i} x_{ita_e} \right) + d_{te} \geq C_{te} \quad \forall e \in E \setminus E0; \forall t \in TF_e \quad (3)$$

$$\left( \sum_{t \in [j-L+1..j]} x_{itE0} \right) \leq h_L \cdot L \quad \forall i \in W; j = L, \dots, T \mid [j-L+1, \dots, j] \in (S_i \cap TI_{E0}) \quad (4)$$

$$\left( \sum_{t \in [j-L+1..j] \mid t \in TI_{a_e}} x_{ita_e} \right) + \left( \sum_{t \in [j-L+1..j] \mid t \in TI_e} x_{ite} \right) \leq h_L \cdot L \quad (5)$$

$$\forall i \in W; (j = L, \dots, T \mid [j-L+1, \dots, j] \in S_i); (\forall e \in E \setminus E0 \mid \Gamma_e^+ \neq \emptyset \wedge j \in TI_e)$$

$$hm_{it} \leq x_{ite} \leq hM_{it} \quad \forall i \in W; \forall e \in E \mid \Gamma_e^+ \neq \emptyset; \forall t \in (TI_e \cap S_i) \quad (6)$$

La función objetivo a minimizar (1) se corresponde con la esperanza matemática del déficit total de capacidad; (2) expresa, para cada trabajador, el balance anual de horas de trabajo. El balance se impone para cada posible camino del grafo garantizando de este modo que la solución será factible para todos los posibles escenarios que se pueden presentar; (3) impone, para cada estado (excepto el primero,  $E0$ ) y semana perteneciente a la etapa que finaliza en dicho estado, que la suma de las horas planificadas y el déficit de capacidad debe ser mayor o igual a la capacidad requerida; (4) y (5) imponen, para cada trabajador, la cota superior al

promedio de horas de trabajo para cualquier grupo de  $L$  semanas de trabajo consecutivas. La ecuación (4) hace referencia a las semanas correspondientes a la primera etapa y la ecuación (5), que corresponde al resto de semanas, incluye la posibilidad de que un bloque de  $L$  semanas incluya dos etapas consecutivas. En el caso de que las etapas sean cortas, puede fácilmente modificarse esta ecuación para incorporar la posibilidad de que el grupo de  $L$  semanas abarque el número de etapas necesario; finalmente, (6) impone, para cada trabajador, estado (excepto los finales) y semana correspondiente a la etapa que comienza en dicho estado, las cotas inferior y superior para la jornada semanal.

La experiencia computacional llevada a cabo hasta el momento con el modelo ha proporcionado resultados muy satisfactorios.

#### **4. Conclusiones**

La anualización de la jornada laboral permite a las empresas adaptar la capacidad productiva a la demanda. La programación lineal entera y mixta, que ha sido probada en diversos trabajos anteriores, es una herramienta adecuada y eficiente para obtener una planificación del tiempo de trabajo que cumpla con las condiciones establecidas en el convenio colectivo y que optimice el uso de los recursos (minimizando el coste, por ejemplo).

La demanda o capacidad requerida, dato indispensable para llevar a cabo la planificación, suele depender de múltiples y complejos factores y, a menudo, no es posible obtener una previsión fiable o bien no es realista considerar una función de probabilidad asociada a ella. En algunos casos podrá determinarse para la demanda un conjunto de escenarios posibles, cada uno de ellos con una cierta probabilidad asociada.

En este trabajo se presenta un modelo de optimización mediante escenarios que proporciona una solución robusta (i.e., factible para cualquiera de los escenarios que se pueden presentar) y que minimiza la esperanza matemática del déficit total de capacidad. El modelo ha sido probado en una amplia experiencia computacional y los resultados obtenidos hasta el momento son muy satisfactorios.

#### **Referencias**

- Corominas, A.; Lusa, A.; Pastor, R. (2004). Planning Annualised Hours with a Finite Set of Weekly Working Hours and Joint Holidays. *Annals of Operations Research*, Vol. 128, No. 1-4, pp. 217-233.
- Li, S.; Lolou, R.; Rahman, A. (2003). Technological progress and technology acquisition: Strategic decision under uncertainty. *Production and Operations Management*, Vol. 12, No. 1, pp. 102-119.
- Morton, D. P. (1996). An enhanced decomposition algorithm for multistage stochastic hydroelectric scheduling. *Annals of Operations Research*, Vol. 64, No. 0, pp. 211-235.
- Mulvey, J.; Shetty, B. (2004). Financial planning via multi-stage stochastic optimization. *Computers and Operations Research*, Vol. 31, No. 1, pp. 1-20.
- Pallotino, P.; Sechi, G.M.; Zuddas, P. (2002). A DSS for water resources management under uncertainty. *Proceedings of the International Environmental Modelling and Software Society*, Vol. 2.
- Ramos, A. (1992). Integrated model for capacity planning for manufacturing systems. *Technical Report IIT-92-022*, Universidad Pontificia de Comillas, Madrid.