



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA

**Análisis y diseño de controladores lineales para
el convertidor elevador ("boost") bidireccional
en corriente**

Shane Malo, Robert Griñó

IOC-DT-P-2005-15

Juliol 2005



**Análisis y diseño de controladores lineales
para el convertidor elevador (“boost”)
bidireccional en corriente.**

Shane Malo, Roberto Griñó

22 de julio de 2005

Índice

1. Introducción	4
2. Determinación de las ecuaciones de dinámica del sistema	5
2.1. En cada posición del interruptor	5
2.2. Parametrizado mediante $w(t)$	7
3. Promediado del sistema de ecuaciones	7
4. Linealización del sistema de ecuaciones	9
5. Funciones de transferencia del sistema linealizado	12
5.1. Utilizando transformadas de Laplace	12
5.1.1. Variación en el voltaje de salida $V_o(s)$ de la forma: $V_o(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)I_o(s)$	12
5.1.2. Variación en la corriente de la inductancia $I(s)$ de la forma: $I(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)I_o(s)$	13
5.1.3. Variación en el voltaje de salida $V_o(s)$ de la forma: $V_o(s) = G_1(s)I(s) + G_2(s)I_o(s)$	13
5.2. Comentarios sobre las características de las funciones de transferencia	14
5.2.1. Condiciones generales	14
5.2.2. Condiciones sobre las funciones de transferencia	15
5.2.3. Análisis de $G_1(s)$ en el caso $V_o(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)I_o(s)$	15
5.2.4. Análisis de $G_1(s)$ en el caso $I(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)I_o(s)$	18
5.2.5. Análisis de $G_1(s)$ en el caso $V_o(s) = G_1(s)I(s) + G_2(s)I_o(s)$	18
6. Cálculo de la dinámica cero del sistema	19
6.1. Voltaje de salida constante $v_o(t) = V$	19
6.1.1. Cálculo de la corriente de entrada $i(t)$	20
6.1.2. Cálculo de la ley de control $u(t)$	22
6.2. Corriente en la inductancia constante $i(t) = I$	23
6.2.1. Cálculo de la ley de control $u(t)$	23
6.2.2. Cálculo del voltaje de salida $v_o(t)$	24
6.3. Voltaje de salida como una onda sinusoidal $v_o(t) = A + B\cos(\omega t)$	24
6.3.1. Cálculo de la ley de control $u(t)$	25
6.3.2. Cálculo de la corriente de entrada $i(t)$	26
7. Modelos de Simulink:	
Modelo para el sistema de ecuaciones promediado.	27
7.1. Simulaciones del convertidor “Boost” en lazo abierto:	29
8. Diseño del controlador	31
8.1. Diseño de un controlador de variaciones en el voltaje de salida $V_o(s)$ mediante el control directo de los cambios en el ciclo de trabajo $U(t)$	32
8.1.1. Simulaciones en Matlab: 1 Controlador	37
8.1.2. Cambios en el voltaje de referencia	39
8.1.3. Perturbaciones en la carga	40

8.1.4.	Perturbaciones simulando cargas no resistivas	41
8.2.	Diseño de un control de variaciones en el voltaje de salida $V_o(s)$ mediante el control de la corriente en la entrada $I(s)$	43
8.2.1.	Simulaciones en Simulink: 2 Controladores	55
8.2.2.	Cambios en el voltaje de referencia	55
8.2.3.	Perturbaciones en la carga	57
8.2.4.	Perturbaciones simulando cargas no resistivas	57

9. Conclusiones **59**

1. Introducción

Los convertidores de voltaje DC-DC juegan dentro de la tecnología actual un papel fundamental, actúan como puentes de transferencia de energía entre fuentes y cargas, ambas de corriente continua, que no son compatibles por naturaleza, por ejemplo, una carga puede necesitar ser alimentada con un potencial “ v ” mientras que la fuente disponible provee un voltaje “ v_1 ” que puede ser mayor o menor a “ v ”. Esto plantea el problema de como transferir la energía desde la fuente con amplitud “ v_1 ” a la carga que necesita un voltaje “ v ”, perdiendo la mínima potencia durante la transferencia. Es en este punto donde entran en juego los convertidores de voltaje DC-DC.

Los convertidores de voltaje DC-DC pueden visualizarse, de una manera muy burda, como el equivalente en corriente continua a los transformadores AC. Existen varias topologías que han sido desarrolladas a través de los años que cumplen con diferentes propósitos, algunas proveen una tensión en la salida mayor a la que se tiene en la entrada, algunas otras proveen de tensiones menores, etc., algunas ofrecen mayor complejidad en su manejo mientras que otras ofrecen mayor fiabilidad. Dentro de los tipos de convertidores presentes en la actualidad se pueden mencionar al “Boost”, “Buck”, “Buck-Boost”, “CUK”, etc., un estudio comparativo entre algunos de estos convertidores puede encontrarse en [8] y [9].

Dentro de los tipos mencionados anteriormente ofrece especial interés el convertidor “Boost” o “Elevador”, que como su nombre lo indica puede proveer en su salida un voltaje mayor al que posea en la entrada y que además es de implementación relativamente simple. Es de vital interés el conocer las limitaciones que se tienen para controlar el comportamiento de este tipo de dispositivos, para esto deberá crearse un modelo del sistema que permita conocer las restricciones con las que se cuenta al trabajar con estas estructuras.

Para solventar este propósito inicialmente se encuentra el sistema de ecuaciones que define la dinámica del sistema, para luego linealizar las ecuaciones obtenidas y lograr obtener un modelo del comportamiento del sistema al rededor de un punto de operación utilizando funciones de transferencia.

Con las funciones de transferencia encontradas se procede a generar controladores lineales, utilizando las técnicas tradicionales de control, para cumplir con varios objetivos, luego se procede a realizar pruebas sobre la robustez que ofrecen estos controladores frente a diferentes tipos de perturbaciones así como también cambios en el comportamiento de referencia. Estas pruebas comparan la respuesta del sistema controlado al utilizar diferentes esquemas de control.

2. Determinación de las ecuaciones de dinámica del sistema

2.1. En cada posición del interruptor

En el diagrama presentado en la figura (1) se presenta el esquema general de un convertidor “Boost” o “Elevador” bidireccional en corriente.

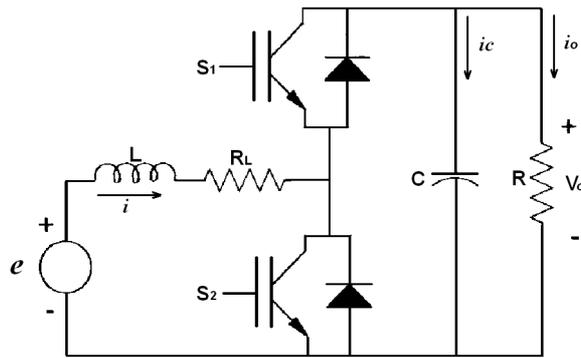


Figura 1: Convertidor “Boost” bidireccional en corriente

Los interruptores “S1” y “S2” por lo general trabajan complementados, es decir, cuando “S1” se encuentra conduciendo, “S2” no conduce y viceversa, tomando esto en cuenta el sistema puede encontrarse en uno de los siguientes estados:

“S1” No Conduce, “S2” Conduce:

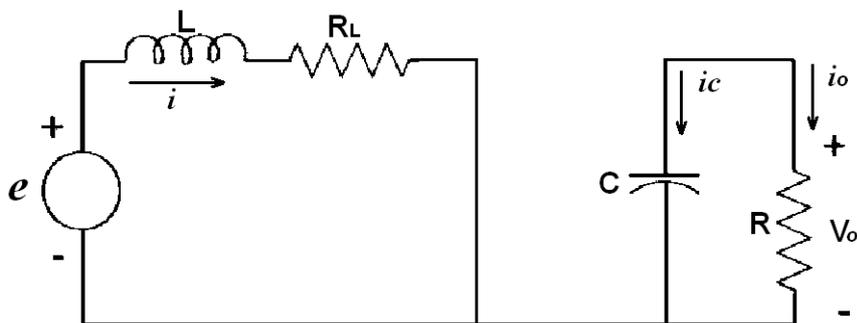


Figura 2: Convertidor “Boost” “S1” no conduce, “S2” conduciendo

En este estado se encuentran las ecuaciones de Kirchoff para los voltajes del primer circuito cerrado y para las corrientes involucradas en el segundo circuito cerrado, obteniéndose:

$$e(t) = L \frac{d}{dt} i(t) + r_L i(t) \quad (1)$$

$$C \frac{d}{dt} v_o(t) + i_o(t) = 0 \quad (2)$$

Expresando las ecuaciones anteriores en función del voltaje en el inductor y la corriente en el condensador se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$L \frac{d}{dt} i(t) = e(t) - r_L i(t) \quad (3)$$

$$C \frac{d}{dt} v_o(t) = -i_o(t) \quad (4)$$

En el caso cuando “S1” conduce y “S2” no conduce se obtiene el circuito equivalente mostrado en la figura (3).

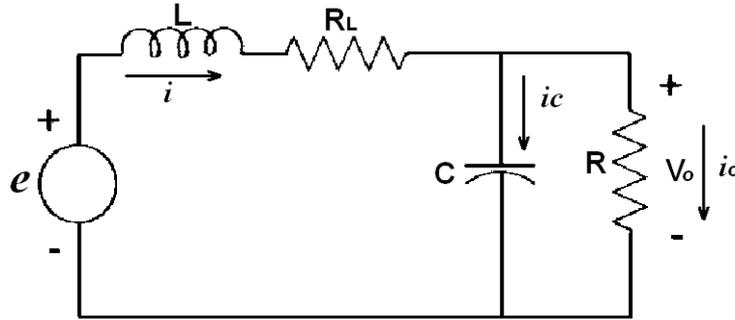


Figura 3: Convertidor “Boost” “S1” conduciendo, “S2” no conduce

Al encontrar las ecuaciones de Kirchoff para este segundo circuito se obtiene:

$$e(t) = L \frac{d}{dt} i(t) + r_L i(t) + v_o(t) \quad (5)$$

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v_o(t) + i_o(t) \quad (6)$$

Expresando nuevamente las ecuaciones anteriores en función del voltaje en el inductor y la corriente en el condensador se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$L \frac{d}{dt} i(t) = e(t) - r_L i(t) - v_o(t) \quad (7)$$

$$C \frac{d}{dt} v_o(t) = i(t) - i_o(t) \quad (8)$$

2.2. Parametrizado mediante $w(t)$

Es necesario ahora expresar los sistemas de ecuaciones del convertidor “Boost” como un solo sistema, en lugar de dos separados como se presentan en la deducción de la dinámica.

Para lograr esto se define el parámetro $w(t)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} w(t) &= 0 \text{ Si "S1" No conduce y "S2" Conduce} \\ w(t) &= 1 \text{ Si "S1" Conduce y "S2" No Conduce} \end{aligned}$$

Integrando este parámetro a los sistemas de ecuaciones anteriormente encontrados se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones parametrizadas:

$$L \frac{d}{dt} i(t) = e(t) - r_L i(t) - w(t) v_o(t) \quad (9)$$

$$C \frac{d}{dt} v_o(t) = w(t) i(t) - i_o(t) \quad (10)$$

Es importante notar que la parametrización empleada en las ecuaciones (9) y (10) no es la misma que la utilizada de manera generalizada en la literatura. La equivalencia entre ambas parametrizaciones se puede expresar de la siguiente manera: $u_{gen}(t) = 1 - w(t)$, donde $u_{gen}(t)$ es la forma usada en la mayoría de documentos publicados, ejemplos de este tratamiento pueden encontrarse en [2] y [5].

3. Promediado del sistema de ecuaciones

En las señales presentes en los convertidores de voltaje conmutados, como en el caso del convertidor “Boost”, se observa el llamado “rizado de conmutación”, este rizado en sistemas bien diseñados es bastante pequeño, haciendo que sea posible aproximar con bastante precisión las señales resultantes mediante curvas suaves.

Los sistemas reales son, en general, bastante complejos de describir, es necesario en muchas ocasiones hacer aproximaciones para poder reducir las ecuaciones que definen el comportamiento de los sistemas, y así facilitar el tratamiento de los modelos resultantes, evitando de esa manera trabajar con los sistemas originales de ecuaciones.

El aporte de perturbaciones pequeñas, y difíciles de describir como en el caso del “rizado de conmutación”, por lo general es lo suficientemente bajo como para no considerarlo. Un método muy utilizado para eliminar las pequeñas perturbaciones y obtener la parte “dominante” de la señal es el uso de medias móviles en las que cada señal se sustituye por su promedio durante un periodo de conmutación.

Utilizando el método de promediado presentado en [2] y [5] para simplificar las ecuaciones que rigen la dinámica de los sistemas lo que se hace es:

$$\langle x(t) \rangle_{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} x(\tau) d\tau \quad (11)$$

Ahora es necesario aplicar la ecuación (11) a las ecuaciones (9) y (10) que describen en general la dinámica del convertidor “Boost”. Primero se define el periodo del ciclo de trabajo T_s .

T_s no es más que el tiempo total que se forma al sumar la porción de tiempo que el parámetro del sistema $w(t) = 0$ y por lo tanto la ecuaciones que definen la dinámica del sistema se reducen a las ecuaciones (3) y (4), más el tiempo que el sistema se encuentra en la posición $w(t) = 1$, y por lo tanto las ecuaciones que describen el sistema se reducen a las ecuaciones (7) y (8).

Teniendo ahora definido el valor del período de conmutación T_s entonces se puede aplicar la integral de la ecuación (11) a cada una de las cantidades.

Se comienza por encontrar dos cantidades que son el voltaje promedio en la inductancia y la corriente promedio en el condensador en cada una de las posiciones del interruptor parametrizado por $w(t)$, recordando que ambas cantidades se encuentran definidas por las siguientes ecuaciones:

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \quad (12)$$

$$i_c(t) = C \frac{d}{dt} v_o(t) \quad (13)$$

Cuando el parámetro $w(t) = 0$ se tiene:

$$v_L(t) = e(t) - r_L i(t) \quad (14)$$

$$i_c(t) = -i_o(t) \quad (15)$$

Reemplazando los valores de $i(t)$, $i_o(t)$ y $e(t)$ por sus promedios durante un período de trabajo se obtiene:

$$v_L(t) = E - r_L \langle i(t) \rangle_{T_s} \quad (16)$$

$$i_c(t) = -\langle i_o(t) \rangle_{T_s} \quad (17)$$

Cuando el parámetro $w(t) = 1$ se tiene:

$$v_L(t) = e(t) - r_L i(t) - v_o(t) \quad (18)$$

$$i_c(t) = i(t) - i_o(t) \quad (19)$$

Reemplazando nuevamente los valores de $i(t)$, $i_o(t)$, $e(t)$ y $v_o(t)$ por sus promedios durante un período de trabajo se obtiene:

$$v_L(t) = E - r_L \langle i(t) \rangle_{T_s} - \langle v_o(t) \rangle_{T_s} \quad (20)$$

$$i_c(t) = \langle i(t) \rangle_{T_s} - \langle i_o(t) \rangle_{T_s} \quad (21)$$

Ahora es necesario encontrar los valores promedio $\langle v_L(t) \rangle_{T_s}$ y de $\langle i_c(t) \rangle_{T_s}$, para esto al aplicar la ecuación (11) para cada uno de los casos y reemplazando $u(t) = \langle w(t) \rangle_{T_s}$ se obtiene:

$$\langle v_L(t) \rangle_{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} v_L(\tau) d\tau \quad (22)$$

$$\langle i_c(t) \rangle_{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} i_c(\tau) d\tau \quad (23)$$

Lo que quiere decir que:

$$\langle v_L(t) \rangle_{T_s} = u(t)(E - r_L \langle i(t) \rangle_{T_s} - \langle v_o(t) \rangle_{T_s}) + (1 - u(t))(E - r_L \langle i(t) \rangle_{T_s}) \quad (24)$$

$$\langle i_c(t) \rangle_{T_s} = u(t)(\langle i(t) \rangle_{T_s} - \langle i_o(t) \rangle_{T_s}) + (1 - u(t))(-\langle i_o(t) \rangle_{T_s}) \quad (25)$$

Simplificando las ecuaciones (24) y (25) se obtiene:

$$\langle v_L(t) \rangle_{T_s} = E - r_L \langle i(t) \rangle_{T_s} - u(t) \langle v_o(t) \rangle_{T_s} \quad (26)$$

$$\langle i_c(t) \rangle_{T_s} = u(t) \langle i(t) \rangle_{T_s} - \langle i_o(t) \rangle_{T_s} \quad (27)$$

Esto se traduce finalmente al utilizar las equivalencias de las ecuaciones (12) y (13) en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$L \frac{d}{dt} \langle i(t) \rangle_{T_s} = E - r_L \langle i(t) \rangle_{T_s} - u(t) \langle v_o(t) \rangle_{T_s} \quad (28)$$

$$C \frac{d}{dt} \langle v_o(t) \rangle_{T_s} = u(t) \langle i(t) \rangle_{T_s} - \langle i_o(t) \rangle_{T_s} \quad (29)$$

Para simplificar la notación se sustituye en las ecuaciones $x(t) = \langle x(t) \rangle_{T_s}$ en cada una de las cantidades, obteniéndose las ecuaciones:

$$L \frac{d}{dt} i(t) = E - r_L i(t) - u(t) v_o(t) \quad (30)$$

$$C \frac{d}{dt} v_o(t) = u(t) i(t) - i_o(t) \quad (31)$$

4. Linealización del sistema de ecuaciones

Las ecuaciones (30) y (31) no son lineales, debido a que envuelven productos de cantidades dependientes del tiempo. Las técnicas tradicionales de análisis de sistemas como lo son las transformadas de Laplace y los métodos de análisis de sistemas en frecuencia no

son útiles para el tratamiento de sistemas no lineales, es por eso que es necesario linealizar el sistema si se desean utilizar estas técnicas.

Primero, ha de suponerse que el sistema ha sido llevado a un punto de trabajo fijo, en el que se encuentra con valores estacionarios en sus variables, estos quedan definidos de la siguiente forma:

- i^{ss} Corriente en la inductancia en estado estacionario
- i_o^{ss} Corriente en la salida en estado estacionario
- v_o^{ss} Voltaje en la salida en estado estacionario
- u^{ss} Ciclo de trabajo en estado estacionario

Al hacer la suposición de que el sistema se encuentra en este punto de trabajo las ecuaciones (30) y (31) que definen la dinámica promedio del sistema se transforman en:

$$0 = E - r_L i^{ss} - u^{ss} v_o^{ss} \quad (32)$$

$$0 = u^{ss} i^{ss} - i_o^{ss} \quad (33)$$

Se despeja el valor del ciclo de trabajo u^{ss} de la ecuación (33) y reemplazándolo en (32) se obtiene:

$$u^{ss} = i_o^{ss} / i^{ss} \quad (34)$$

$$0 = E - r_L i^{ss} - i_o^{ss} v_o^{ss} / i^{ss} \quad (35)$$

La ecuación (35) define un sistema cuadrático respecto del parámetro i^{ss} , al resolver esta ecuación, puede encontrarse en valor de la corriente en la inductancia y por lo tanto saber que clase de comportamiento tendrá el sistema, al resolver esta ecuación se obtienen las siguientes expresiones que definen el valor de la corriente en la inductancia cuando el sistema se encuentra trabajando en estado estable.

$$i^{ss} = \frac{E + \sqrt{E^2 - 4 r_L i_o^{ss} v_o^{ss}}}{2r_L} \quad (36)$$

$$i^{ss} = \frac{E - \sqrt{E^2 - 4 r_L i_o^{ss} v_o^{ss}}}{2r_L} \quad (37)$$

De estas dos ecuaciones, se toma la segunda, ya que dice que para un punto de trabajo determinado en estado estable i_o^{ss} y v_o^{ss} se tendrá la mínima corriente posible en la inductancia, lo cual tiene sentido pues el sistema de esa manera consumirá menos energía de su fuente.

Tomando esta ecuación, entonces queda definido el ciclo de trabajo en estado estable definido por la ecuación (34) de la siguiente manera:

$$u^{ss} = \frac{2r_L i_o^{ss}}{E - \sqrt{E^2 - 4 r_L i_o^{ss} v_o^{ss}}} \quad (38)$$

Ahora que se conoce como se comportará el sistema en régimen de estado estable, ha de procederse a la linealización del sistema, para esto debe primero construirse un modelo de pequeña señal AC, trabajando al rededor de un punto de trabajo fijo i_o^{ss}, i^{ss} y v_o^{ss} .

Para construir el modelo de pequeña señal al rededor del punto de operación en este caso se asume que el ciclo de trabajo promedio $\langle u(t) \rangle_{T_s}$ es igual a un valor de estado estable u^{ss} más una perturbación al rededor de este punto denotada por $\hat{u}(t)$, quedando esta relación definida por la ecuación:

$$\langle u(t) \rangle_{T_s} = u^{ss} + \hat{u}(t) \quad (39)$$

Se asume que el valor de la perturbación $\hat{u}(t)$ es mucho menor que el valor de estado estable u^{ss} de modo que el valor promedio del ciclo de trabajo se mantendrá siempre bastante cerca de este.

El sistema responderá a esta perturbación de entrada con los valores promedio de las variables de salida de la siguiente forma:

$$\langle v_o(t) \rangle_{T_s} = v_o^{ss} + \hat{v}_o(t) \quad (40)$$

$$\langle i_o(t) \rangle_{T_s} = i_o^{ss} + \hat{i}_o(t) \quad (41)$$

$$\langle i(t) \rangle_{T_s} = i^{ss} + \hat{i}(t) \quad (42)$$

Nuevamente, las perturbaciones presentes en (40), (41) y (42) se consideran muy pequeñas con respecto a los valores de estado estable, y por lo tanto, los valores promedio siempre se encontrarán muy cerca de estos.

Sustituyendo los valores promedio definidos por las ecuaciones (39), (40), (41) y (42) en las ecuaciones promediadas del sistema definidas por (30) y (31) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$L \frac{d}{dt} (i^{ss} + \hat{i}(t)) = E - r_L (i^{ss} + \hat{i}(t)) - (u^{ss} + \hat{u}(t)) (v_o^{ss} + \hat{v}_o(t)) \quad (43)$$

$$C \frac{d}{dt} (v_o^{ss} + \hat{v}_o(t)) = (u^{ss} + \hat{u}(t)) (i^{ss} + \hat{i}(t)) - (i_o^{ss} + \hat{i}_o(t)) \quad (44)$$

Expandiendo los productos de los paréntesis se obtiene:

$$L \frac{d}{dt} \hat{i}(t) = E - r_L i^{ss} - r_L \hat{i}(t) - u^{ss} v_o^{ss} - u^{ss} \hat{v}_o(t) - \hat{u}(t) v_o^{ss} - \hat{u}(t) \hat{v}_o(t) \quad (45)$$

$$C \frac{d}{dt} \hat{v}_o(t) = u^{ss} i^{ss} + u^{ss} \hat{i}(t) + \hat{u}(t) i^{ss} + \hat{u}(t) \hat{i}(t) - i_o^{ss} - \hat{i}_o(t) \quad (46)$$

Estas ecuaciones se simplificarán para obtener el modelo linealizado de la siguiente manera: En ambas ecuaciones, el lado izquierdo debe ser igual al lado derecho de la igualdad, por lo tanto, como en el lado izquierdo las dos no se tienen valores DC, todos aquellos valores constantes al lado derecho pueden eliminarse. La segunda simplificación

se efectúa para eliminar los términos no lineales, en este caso de segundo orden que se presentan. Como se dijo anteriormente, las perturbaciones $\hat{u}(t)$, $\hat{v}_o(t)$, $\hat{i}_o(t)$ e $\hat{i}(t)$ se considera que son muy pequeñas, por lo tanto, cualquier producto entre cualesquiera de estos términos será más pequeña aún. Haciendo esta consideración, entonces se sacan de las ecuaciones todos aquellos términos que involucren productos entre perturbaciones, teniendo como resultado final el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$L \frac{d}{dt} \hat{i}(t) = -r_L \hat{i}(t) - u^{ss} \hat{v}_o(t) - \hat{u}(t) v_o^{ss} \quad (47)$$

$$C \frac{d}{dt} \hat{v}_o(t) = u^{ss} \hat{i}(t) + \hat{u}(t) i^{ss} - \hat{i}_o(t) \quad (48)$$

5. Funciones de transferencia del sistema linealizado

5.1. Utilizando transformadas de Laplace

El modelo linealizado del convertidor “Boost” obtenido en las ecuaciones (47) y (48) puede ahora ser tratado con los métodos convencionales de análisis, como lo es la transformada de Laplace para obtener las funciones de transferencia del sistema y de esa manera poder aplicar las técnicas convencionales de control.

Aplicando transformada de Laplace a las ecuaciones (47) y (48) asumiendo que se tienen condiciones iniciales “0” se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$s L I(s) = -r_L I(s) - u^{ss} V_o(s) - U(s) v_o^{ss} \quad (49)$$

$$s C V_o(s) = u^{ss} I(s) + U(s) i^{ss} - I_o(s) \quad (50)$$

5.1.1. Variación en el voltaje de salida $V_o(s)$ de la forma:

$$V_o(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)I_o(s)$$

Para encontrar esta representación del comportamiento del sistema linealizado se partirá de las ecuaciones (49) y (50) encontradas anteriormente.

Se despeja la transformada de la variación en la corriente de la inductancia $I(s)$ de la ecuación (50), se sustituye esta igualdad en la ecuación (49) y despejando las variaciones en el voltaje de salida $V_o(s)$ se obtiene la función de transferencia del sistema.

Agrupando las expresiones en el lado derecho de la igualdad por los términos cuyos factores comunes sean $I_o(s)$ y $U(s)$ se obtiene:

$$V_o(s) = \frac{(-u^{ss} v_o^{ss} + sL i^{ss} + r_L i^{ss}) U(s)}{s^2 LC + r_L sC + u^{ss} 2} + \frac{(-sL - r_L) I_o(s)}{s^2 LC + r_L sC + u^{ss} 2} \quad (51)$$

En la ecuación (51) se hace evidente que la dinámica del sistema linealizado queda completamente definida por dos funciones de transferencia, una cuya entrada es el cambio

en el ciclo de trabajo y la otra cuya entrada es el cambio en la corriente de salida. La parte que depende de la corriente de salida se tomará como una perturbación y la parte que depende del cambio en el ciclo de trabajo se tomará como la función de transferencia de trabajo del sistema. Formas alternativas de encontrar estas funciones de transferencia, incluyendo mayor cantidad de datos han sido tratadas en [3] y [4].

5.1.2. Variación en la corriente de la inductancia $I(s)$ de la forma:

$$I(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)I_o(s)$$

Para encontrar esta representación, nuevamente será necesario partir de las ecuaciones (49) y (50).

El procedimiento a seguir es el siguiente: Se despeja la transformada de la variación en el voltaje de salida $V_o(s)$ de la ecuación (50) y se sustituye esta igualdad en la ecuación (49), de la ecuación encontrada se despeja la variación en la corriente de la inductancia $I(s)$ y se obtiene la función de transferencia del sistema.

Agrupando las expresiones en el lado derecho de la igualdad por los términos cuyos factores comunes sean $I_o(s)$ y $U(s)$ se obtiene:

$$I(s) = -\frac{(v_o^{ss} sC + u^{ss} i^{ss}) U(s)}{s^2 LC + r_L sC + u^{ss2}} + \frac{u^{ss} I_o(s)}{s^2 LC + r_L sC + u^{ss2}} \quad (52)$$

Aquí nuevamente se considera que la función de transferencia cuya entrada es el cambio en la corriente de salida $I_o(s)$ es una perturbación y la parte dependiente del cambio en el ciclo de trabajo $U(s)$ es la parte dominante en la función de transferencia.

5.1.3. Variación en el voltaje de salida $V_o(s)$ de la forma:

$$V_o(s) = G_1(s)I(s) + G_2(s)I_o(s)$$

Tomando como base las transformadas de Laplace de las ecuaciones del sistema linealizado expresadas en las ecuaciones (49) y (50), también puede encontrarse esta nueva representación de la dinámica en estado estable del sistema.

Para esto será necesario despejar la transformada de la variación en el ciclo de trabajo $U(s)$ de la ecuación (50) y sustituir esta igualdad en la ecuación (49) para luego despejar la variación en el voltaje de salida $V_o(s)$. Habiendo realizado esto se ha encontrado la función de transferencia del sistema.

Agrupando las expresiones en el lado derecho de la igualdad por los términos cuyos factores comunes sean $I(s)$ e $I_o(s)$ se obtiene:

$$V_o(s) = \frac{(-sLi^{ss} - r_L i^{ss} + u^{ss} v_o^{ss}) I(s)}{v_o^{ss} sC + u^{ss} i^{ss}} - \frac{v_o^{ss} I_o(s)}{v_o^{ss} sC + u^{ss} i^{ss}} \quad (53)$$

La función de transferencia anterior se encuentra formada por dos funciones de transferencia menores, una de las cuales tiene como entrada la variación en la corriente de salida $I_o(s)$, esta parte se tomará como una perturbación sobre la parte dominante de la función, que es la función de transferencia cuya entrada es la variación en la corriente de la inductancia $I(s)$.

5.2. Comentarios sobre las características de las funciones de transferencia

En esta sección se analizarán las restricciones o consideraciones que se generan en el sistema al cambiar los parámetros de las funciones de transferencia, en cada uno de los casos presentados anteriormente se presentan restricciones algebraicas que se traducen en restricciones del sistema físico, las cuales es importante conocer para poder estimar el comportamiento del convertidor bajo las condiciones de operación, y como los cambios en estas cantidades pueden afectar la dinámica del sistema.

5.2.1. Condiciones generales

Algunas restricciones se encuentran presentes sin importar que entradas y que salidas se han seleccionado para encontrar la función de transferencia.

Una de estas condiciones se presenta en la ecuación (37), y por lo tanto esta restricción se traslada a la ecuación (38). La porción de estas ecuaciones que establece la restricción es la siguiente: $\sqrt{E^2 - 4 r_L i_o^{ss} v_o^{ss}}$.

La parte que se encuentra dentro de la raíz debe ser cero o positiva para que el valor del resultado sea válido, por lo tanto esta restricción puede reescribirse de la siguiente manera: $E^2 - 4 r_L i_o^{ss} v_o^{ss} \geq 0$.

En sistemas con una carga puramente resistiva, el voltaje de salida $v_o(t)$ se encuentra directamente relacionado con la corriente de salida $i_o(t)$. Sin embargo, en convertidores donde la impedancia acoplada en paralelo al condensador en la salida puede ser cualquiera, la relación entre estas dos variables no es directa.

Es de particular interés saber cuánta corriente puede exigirse al convertidor en un punto donde el voltaje se desea que sea constante o “regulado”, para conocer esto se despeja el valor de la corriente del sistema de la condición que establece la raíz de la ecuación (37), llegando a la siguiente expresión:

$$i_o^{ss} \leq \frac{E^2}{4 r_L v_o^{ss}} \quad (54)$$

Como se observa la corriente que se le puede exigir a un convertidor “Boost” se encuentra acotada por un valor máximo, esta condición es de suma importancia pues establece las relaciones entre el voltaje de salida deseado v_o^{ss} , el voltaje de entrada E y la resistencia en la inductancia r_L .

Bajo condiciones ideales en las que la resistencia en la inductancia r_L es mínima o lo más cercana a cero, esta cota crece, y por lo tanto puede demandarse una mayor corriente en la salida del circuito sin importar la relación v_o^{ss}/E .

5.2.2. Condiciones sobre las funciones de transferencia

En secciones anteriores se encontraron tres diferentes formas de expresar el comportamiento del sistema, cada una de ellas con una variable en particular de salida y variables de entrada. Dada la naturaleza del convertidor las tres formas que se encontraron para expresar el sistema mediante funciones de transferencia tiene dos entradas y una salida.

En todos los casos una de las entradas es la corriente de salida $I_o(s)$, que es transferida al sistema mediante una función que se denomina $G_2(s)$. Esta parte se considerará como la perturbación que induce en el sistema cualquier cambio en la corriente de salida.

Siendo una perturbación se tendrá que hacer todo lo posible para que el sistema rechace cualquier contribución que esta provea.

La parte restante es la parte de interés en cualquiera de las distintas formas de expresar la dinámica del sistema, esta será la parte dominante y la que en algún momento habrá que controlar.

En cada una de las distintas formas de expresar la dinámica del sistema mediante funciones de transferencia que han sido encontradas anteriormente, se analizará la parte que se ha denominado como $G_1(s)$, con el objetivo de ver sus cualidades y el efecto que puede tener sobre el comportamiento total del sistema.

5.2.3. Análisis de $G_1(s)$ en el caso $V_o(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)I_o(s)$

En este caso la función de transferencia $G_1(s)$ toma la siguiente forma:

$$G_1(s) = \frac{(-u^{ss} v_o^{ss} + sL i^{ss} + r_L i^{ss})}{s^2 LC + r_L sC + u^{ss2}} \quad (55)$$

Primero se analizará el denominador de la ecuación anterior. Se observa que ésta es una ecuación cuadrática en “ s ”, donde todos los coeficientes son cantidades positivas, de esto se puede concluir que las partes reales de los polos siempre se encontrarán en el semiplano izquierdo complejo, y por lo tanto el sistema será estable.

En el numerador se tiene solamente un cero, éste se encuentra expresado en función de la corriente en la inductancia i^{ss} , y del ciclo de trabajo en estado estable u^{ss} , ambas cantidades se encuentran determinadas por las ecuaciones (37) y (38) respectivamente.

Resulta interesante analizar el comportamiento de este “cero” global del sistema ante los valores presentes en la corriente de salida i_o^{ss} . De la ecuación (54), se sabe la cota hasta la que se puede llevar la corriente de salida i_o^{ss} , sin embargo ahora lo que se quiere es analizar como se comporta el cero de $G_1(s)$ cuando i_o^{ss} se encuentra dentro del rango válido.

Para observar el comportamiento del cero de esta función de transferencia, éste se grafica en función de la corriente en la salida deseada i_o^{ss} para diferentes valores de r_L , obteniéndose la respuesta presentada en la figura (4), para la realización de este gráfico se han seleccionado los siguientes valores de estado estable para los voltajes de salida y de entrada del sistema, $E = 10$ V y $v_o^{ss} = 20$ V, así como los valores de los componentes $C = 100e^{-6}$ F y $L = 1e^{-3}$ H.

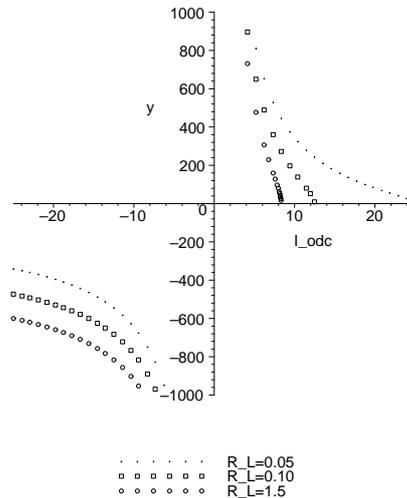


Figura 4: Cero de $G_1(s)$ en función de i_o^{ss} , bajo distintos valores de r_L

En la figura (4) se presentan las curvas que dictan la posición del cero en función de la corriente de salida en estado estable i_o^{ss} al utilizar diferentes valores de resistencia en la inductancia r_L .

Puede observarse que cuando la corriente i_o^{ss} es positiva, el cero se mantiene de igual manera con un valor positivo, provocando que el sistema sea de fase no mínima. Así también, se aprecia que los valores del cero intersectan el eje real en determinados valores, después de los cuales ya no continúan las curvas. Estos valores son los determinados por la ecuación (54).

Hay que notar que mientras más cercano sea el valor del “cero” del sistema al origen, la dinámica presente será más difícil de controlar, por lo tanto se desea que el cero se encuentre posicionado lo más lejos posible del origen y consecuentemente esto implica

que la corriente i_o^{ss} demandada al sistema sea lo más pequeña posible.

Esto plantea un inconveniente que se traduce de la siguiente manera: El objetivo de un ingeniero que diseña un convertidor “Boost” es el de obtener las máximas prestaciones del sistema, ya sea la corriente de salida i_o^{ss} , de voltaje de salida v_o^{ss} o una combinación de ambas, pero al exigir al sistema que provea de la máxima corriente posible, entonces éste se volverá más difícil de controlar, esto exige que se encuentre un punto intermedio que garantice un buen rango de movimiento del cero bajo las condiciones dinámicas del sistema, pero que a su vez mantenga el cero lo suficientemente lejos del origen como para no incrementar demasiado la dificultad de control.

Todo esto ocurre cuando $i_o^{ss} > 0$, pero cuando la carga no es puramente resistiva, sino una impedancia cualquiera, esta puede devolver corriente al sistema de modo que la suma total de corrientes puede llegar a ofrecer un valor que sea menor que cero.

Cuando se presenta el caso en que $i_o^{ss} < 0$, el cero se convierte en un cero de fase mínima, y por lo tanto el sistema es más fácil de controlar.

El problema final cuando $i_o^{ss} > 0$ consistirá en decidir que valores de corriente máxima se desea tener (definido por los valores deseados E , v_o^{ss} y r_L), el valor de la corriente de salida en el punto de operación i_o^{ss} de modo que el sistema pueda controlarse adecuadamente, lo cual se puede conseguir alejando el “cero” lo más que se pueda del origen, teniendo en cuenta que en dicho punto se le pueda exigir al sistema una corriente de operación lo suficiente mente grande para la aplicación deseada.

La figura (5) presenta de manera más general que la figura (4) el desplazamiento del cero del sistema en función de los valores de la corriente en la salida i_o^{ss} y el valor de la resistencia en la inductancia r_L , en este caso se utilizan los mismos valores de E , v_o^{ss} , C y L .

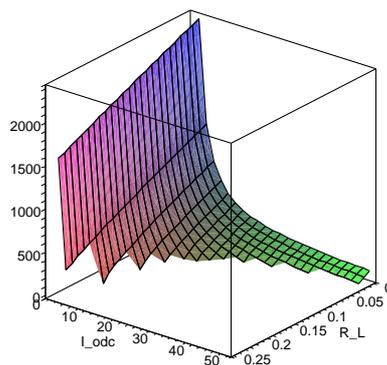


Figura 5: Cero de $G_1(s)$ en función de i_o^{ss} y r_L

5.2.4. Análisis de $G_1(s)$ en el caso $I(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)I_o(s)$

En esta sección nuevamente se analizará el comportamiento y la localización de los ceros y los polos del sistema en la función de transferencia $G_1(s)$ bajo esta otra representación de la dinámica del sistema. En este caso la función de transferencia $G_1(s)$ toma la siguiente forma:

$$G_1(s) = -\frac{(v_o^{ss} sC + u^{ss} i^{ss})}{s^2LC + r_L sC + u^{ss2}} \quad (56)$$

Como se aprecia el caso del denominador es exactamente el mismo que en la sección anterior, por lo que se sabe que los polos del sistema serán estables para cualquiera de los casos válidos.

En el caso del numerador se observa que el “cero” del sistema se encuentra expresado en función del voltaje de salida v_o^{ss} , el ciclo de trabajo u^{ss} y la corriente en la inductancia i^{ss} , como las dos últimas cantidades se encuentran definidas mediante las ecuaciones (38) y (37) respectivamente, de nuevo puede expresarse la posición del cero del sistema en función de la corriente en la salida i_o^{ss} .

Graficando el cero del sistema en función de la corriente de salida, utilizando los valores de E , v_o^{ss} , C y L utilizados en la sección anterior se obtiene el trazo presentado en la figura (6).

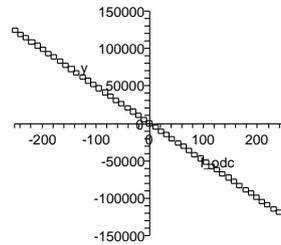


Figura 6: Cero de $G_1(s)$ en función de i_o^{ss} .

En el caso de la figura (6), el trazo no depende de la resistencia en la inductancia r_L , solamente depende del valor de v_o^{ss} y C . Como se observa en este nuevo caso cuando la corriente en la salida i_o^{ss} es positiva el cero es de fase mínima, y por lo tanto, utilizando esta descripción del sistema será más fácil controlarlo que con la función de transferencia descrita en la sección anterior.

5.2.5. Análisis de $G_1(s)$ en el caso $V_o(s) = G_1(s)I(s) + G_2(s)I_o(s)$

Al expresar la dinámica del sistema mediante esta función de transferencia se obtiene que $G_1(s)$ toma la siguiente forma:

$$G_1(s) = \frac{(-sLi^{ss} - r_Li^{ss} + u^{ss}v_o^{ss})}{v_o^{ss}sC + u^{ss}i^{ss}} \quad (57)$$

En el caso del denominador se observa que es exactamente el mismo caso que el del cero de $G_1(s)$ cuando la dinámica del sistema se expresa de la forma: $I(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)I_o(s)$. En este caso es un polo estable debido a que utilizando los valores dentro del rango permitido siempre se ubicará en el semiplano izquierdo del plano complejo.

El caso del numerador, en cambio, corresponde al mismo caso del numerador de $G_1(s)$ cuando el sistema se describe mediante la función: $V_o(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)I_o(s)$, por lo que la posición del cero se mueve exactamente de la misma manera que la presentada en las figuras (4) y (5), y afectará al sistema de igual forma.

6. Cálculo de la dinámica cero del sistema

En el análisis de sistemas resulta ser de suma utilidad el saber como se comportaría el sistema de manera ideal si la respuesta que deseamos es forzada a ocurrir. En esto consiste el cálculo de la dinámica cero del sistema, se toman las ecuaciones promediadas que definen la dinámica del sistema, que en este caso son las ecuaciones (30) y (31), con estas se forzará una respuesta promedio deseada y se observarán las respuestas promedio en las variables internas del sistema, de modo que se pueda saber si dicho comportamiento es factible de manera ideal o no.

Con esto podrá tenerse un estimado de la dificultad que se encontrará al tratar de llevar el sistema a determinados puntos de trabajo deseados, es decir se podrá estimar la dificultad de control del sistema para las salidas deseadas de manera cualitativa.

6.1. Voltaje de salida constante $v_o(t) = V$

En este análisis el sistema es forzado a presentar una respuesta en el voltaje promedio de salida constante de valor V , al sustituir esta suposición en el funcionamiento del convertidor en las ecuaciones (30) y (31) se obtiene el siguiente sistema:

$$L \frac{d}{dt} i(t) = E - r_L i(t) - u(t) V \quad (58)$$

$$0 = u(t) i(t) - i_o(t) \quad (59)$$

De la ecuación (59) se despeja el valor del ciclo de trabajo promedio obteniéndose:

$$u(t) = \frac{i_o(t)}{i(t)} \quad (60)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (58) se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$L \frac{d}{dt} i(t) = E - r_L i(t) - \frac{i_o(t)}{i(t)} V \quad (61)$$

Asumiendo que la carga es una carga resistiva estándar “R”, entonces la corriente en la salida $i_o(t)$ queda definida de la siguiente manera, y por lo tanto la ecuación diferencial se transforma en:

$$i_o(t) = \frac{V}{R} \quad (62)$$

$$L \frac{d}{dt} i(t) = E - r_L i(t) - \frac{V^2}{R i(t)} \quad (63)$$

Ahora se considerará que el sistema trabaja de manera ideal, por lo tanto la resistencia inducida en la inductancia r_L será cero y entonces se obtiene la siguiente ecuación diferencial a resolver:

$$L \frac{d}{dt} i(t) = E - \frac{V^2}{R i(t)} \quad (64)$$

6.1.1. Cálculo de la corriente de entrada $i(t)$

Habiendo sido encontrada la ecuación que define la dinámica del sistema bajo las condiciones forzadas, ecuación (64), en este caso un voltaje de salida $v_o(t) = V$ se tiene que calcular el valor de las variables internas del sistema como lo es la corriente en la inductancia. Al resolver esta ecuación de manera simbólica se obtiene:

$$i(t) = \frac{e^{\left(-LambertW \left(\frac{e^{\left(-1 + \frac{tRE^2}{LV^2} + \frac{\ln(-V^2 + i_{ic} ER)V^2 + i_{ic} ER}{V^2} \right)}}{V^2} \right)_{LV^2} \right)_{LV^2 - LV^2 + tRE^2 + (\ln(-V^2 + i_{ic} ER)V^2 + i_{ic} ER)L}}}{ER} + V^2 \quad (65)$$

En la ecuación anterior el único término desconocido que aparece es i_{ic} , que es la condición inicial de la corriente en la inductancia.

Al observar la solución simbólica de la ecuación diferencial (64), presentada en la ecuación (65), se aprecian ciertos datos interesantes como la presencia de la función $LambertW$, la función de lambert es una función que satisface la siguiente condición:

$$x = LambertW(x) e^{(LambertW(x))} \quad (66)$$

La función $LambertW$ también es llamada función *omega* y no es más que la inversa de la función:

$$f(W) = W e^{(W)} \quad (67)$$

Además se observa en la solución simbólica de la ecuación (64) que se da en la ecuación (65) tiene dentro de las exponenciales las siguientes componentes:

$$\ln(-V^2 + i_{ic} ER) \quad (68)$$

De la ecuación anterior puede extraerse una restricción sobre la condición inicial de la corriente en la inductancia, es bien sabido que para que la función logaritmo provea un resultado real es necesario que el parámetro de entrada de la función sea real positivo, entonces:

$$i_{ic} ER - V^2 \geq 0 \quad (69)$$

La ecuación anterior restringe entonces la condición inicial del sistema a ser de la siguiente forma:

$$i_{ic} \geq \frac{V^2}{ER} \quad (70)$$

Ahora que se tiene la restricción sobre condición inicial de la corriente en la inductancia, se aplican entonces los siguientes valores para hallar una solución numérica de la ecuación:

$$\begin{aligned} L &= 1e^{-3} \text{ H} \\ C &= 100e^{-6} \text{ F} \\ E &= 10 \text{ V} \\ V &= 20 \text{ V} \\ R &= 4 \Omega \end{aligned}$$

Con estos valores se obtiene que la condición inicial de la corriente en la inductancia debe ser $i_{ic} \geq 10 \text{ A}$, entonces se toma el valor $i_{ic} = 11 \text{ A}$.

Utilizando los valores anteriormente mencionados la ecuación diferencial a resolver es:

$$0,001 \frac{d}{dt} i(t) = 10 - \frac{100}{i(t)} \quad (71)$$

Al encontrar la solución cerrada para este caso en particular se obtiene:

$$i(t) = 10 \text{ LambertW}(1/10 e^{1000t+1/10}) + 10 \quad (72)$$

Al graficar la ecuación anterior respecto del tiempo se obtiene que la corriente del inductor tiene la forma presentada en la figura (7), como se observa en la gráfica, la corriente en la inductancia bajo estas condiciones diverge claramente.

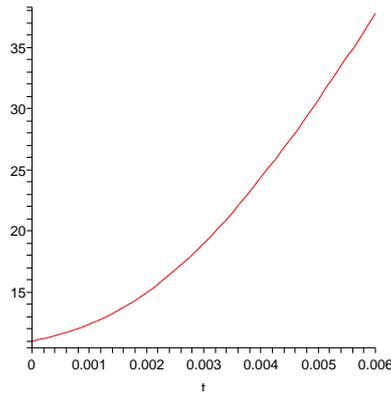


Figura 7: Corriente en la inductancia forzando un voltaje de salida constante V

6.1.2. Cálculo de la ley de control $u(t)$

Dado que ya ha sido encontrada la corriente en la inductancia $i(t)$, que se tiene si se fuerza un voltaje constante en la salida $v_o(t) = V$, sin ninguna clase de control, entonces ahora puede calcularse el valor teórico que tendría el ciclo de trabajo $u(t)$, bajo estas mismas condiciones.

Para obtener la solución al ciclo de trabajo se aplica la ecuación (60) con los valores presentes obteniéndose:

$$u(t) = \frac{5}{10 \text{LambertW} (1/10 e^{1000t+1/10}) + 10} \tag{73}$$

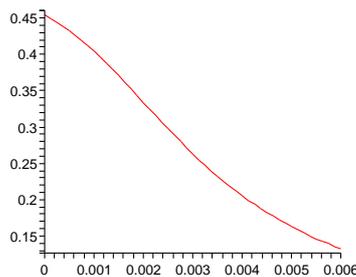


Figura 8: ciclo de trabajo $u(t)$ forzando un voltaje de salida constante V

Como se observa en la figura (8) el valor del ciclo de trabajo se encuentra enmarcado dentro del rango $[0, 1]$ que cumple con las condiciones impuestas al sistema durante el proceso de promediado.

De esto puede concluirse que se podrá encontrar una ley de control que haga que el sistema siga adecuadamente un voltaje de salida fijo.

6.2. Corriente en la inductancia constante $i(t) = I$

El objetivo de esta sección será el de establecer el comportamiento del sistema al forzar una corriente en la inductancia $i(t) = I$, como respuesta se analizará el voltaje resultante en la salida y además se encontrará también el ciclo de trabajo necesario para cumplir con estas nuevas indicaciones.

Nuevamente se parte del sistema de ecuaciones promediadas del convertidor, ecuaciones (30) y (31), asumiendo que la carga será una carga resistiva estándar R , además se asume que el sistema tendrá un comportamiento ideal por lo que no tendrá resistencia en la inductancia, $r_L = 0$, se llega al siguiente sistema ecuaciones:

$$0 = E - u(t) v_o(t) \quad (74)$$

$$C \frac{d}{dt} v_o(t) = u(t) i(t) - \frac{v_o(t)}{R} \quad (75)$$

Despejando el voltaje de salida $v_o(t)$ de la ecuación (74) y sustituyéndola en la ecuación (75), forzando el sistema a tener una corriente constante I en la inductancia y operando las derivadas correspondientes se obtiene el siguiente sistema:

$$v_o(t) = \frac{E}{u(t)} \quad (76)$$

$$-CE \frac{d}{dt} u(t) = (u(t))^3 I - \frac{Eu(t)}{R} \quad (77)$$

6.2.1. Cálculo de la ley de control $u(t)$

Al sustituir en la ecuación (77) los valores utilizados en la sección anterior se obtiene la siguiente ecuación a resolver:

$$-0,001000 \frac{d}{dt} u(t) = 11 (u(t))^3 - 2,5 u(t) \quad (78)$$

Ahora tiene que encontrarse una respuesta cerrada de la ecuación (78), para esto se utilizará como condición inicial $u(0) = 1$. Resolviendo (78) utilizando la condición inicial indicada se obtiene la ecuación:

$$u(t) = \frac{5}{\sqrt{110 - 85 e^{-5000t}}} \quad (79)$$

Al graficar la ecuación (79) se obtiene el comportamiento respecto del tiempo. Se puede observar claramente en la figura (9) que el valor promedio del ciclo de trabajo $u(t)$ se encuentra siempre contenido dentro de los límites $[0, 1]$, por lo que bajo esta restricción la dinámica del sistema cumple con las condiciones impuestas por el proceso de promediado.

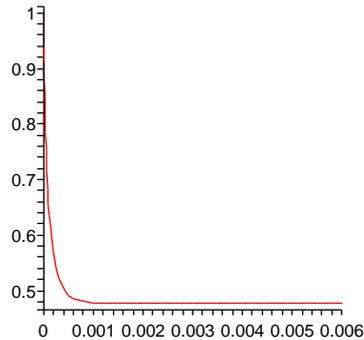


Figura 9: ciclo de trabajo $u(t)$ forzando una corriente en la inductancia constante I

6.2.2. Cálculo del voltaje de salida $v_o(t)$

Ahora que se conoce la respuesta del ciclo de trabajo del sistema forzado, utilizo la ecuación (76) para encontrar la respuesta del voltaje en el condensador, o voltaje de salida $v_o(t)$, se obtiene la siguiente expresión para la tensión de salida:

$$v_o(t) = 2\sqrt{110 - 85} e^{-5000t} \quad (80)$$

Graficando la expresión anterior en la figura (10) se obtiene como evoluciona la tensión en el condensador del convertidor respecto del tiempo.

Se observa que el valor de la función (80) converge hacia un valor determinado, por lo cual se puede concluir al observar las respuestas promedio $u(t)$ y $v_o(t)$ que la dinámica del sistema es estable cuando se fuerza una corriente I constante en el inductor.

6.3. Voltaje de salida como una onda sinusoidal $v_o(t) = A + B\cos(\omega t)$

En esta sección se forzará el sistema a tener como salida una señal sinusoidal de frecuencia ω , con amplitud B y con un desplazamiento sobre el eje vertical de amplitud A ,

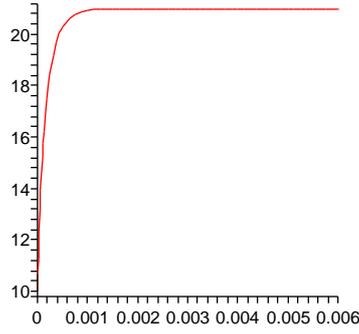


Figura 10: Tensión de salida $v_o(t)$ en el convertidor “Boost” forzando una corriente en la inductancia I constante

la tensión de salida deberá por lo tanto ser una función de la forma: $v_o(t) = A + B \cos(\omega t)$.

Nuevamente es necesario hacer la sustitución del valor deseado en el voltaje de salida $v_o(t)$ en las ecuaciones promediadas del sistema. Se asume nuevamente que se tendrá una carga resistiva estándar R , al sustituir $v_o(t) = A + B \cos(\omega t)$ en las ecuaciones (30) y (31), se obtiene el siguiente sistema para el convertidor forzado:

$$L \frac{d}{dt} i(t) = E - u(t) (A + B \cos(\omega t)) \quad (81)$$

$$-CB \sin(\omega t) \omega = u(t) i(t) - \frac{A + B \cos(\omega t)}{R} \quad (82)$$

6.3.1. Cálculo de la ley de control $u(t)$

Para calcular la ley de control $u(t)$ en este caso se despeja la corriente de entrada de la ecuación (82) y sustituyéndola en la ecuación (81) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$i(t) = - \frac{\left(CB \sin(\omega t) \omega - \frac{A + B \cos(\omega t)}{R} \right)}{u(t)} \quad (83)$$

$$L \left(- \frac{\left(CB \cos(\omega t) \omega^2 + \frac{B \sin(\omega t) \omega}{R} \right)}{u(t)} + \frac{\left(CB \sin(\omega t) \omega - \frac{A + B \cos(\omega t)}{R} \right) \frac{d}{dt} u(t)}{(u(t))^2} \right) = E - u(t) (A + B \cos(\omega t)) \quad (84)$$

La ecuación (84) es la ecuación diferencial que hay que resolver, en general no tiene respuesta cerrada, por lo que lo que se encontrará será un gráfico de las trayectorias para todas las posibles respuestas.

Para poder hallar las trayectorias de las soluciones se hace uso nuevamente el conjunto de datos utilizados en la sección anterior para resolver las ecuaciones, estos datos se sustituyen en la ecuación (84). Además, se escogen los siguientes valores para la restricción, $f = 1,000$ Hz, $A = 15$ y $B = 4$.

Al encontrar el diagrama de las trayectorias, resaltando la trayectoria con condiciones iniciales $u_{ic} = 0,5$ se obtiene el resultado reflejado en la figura (11).

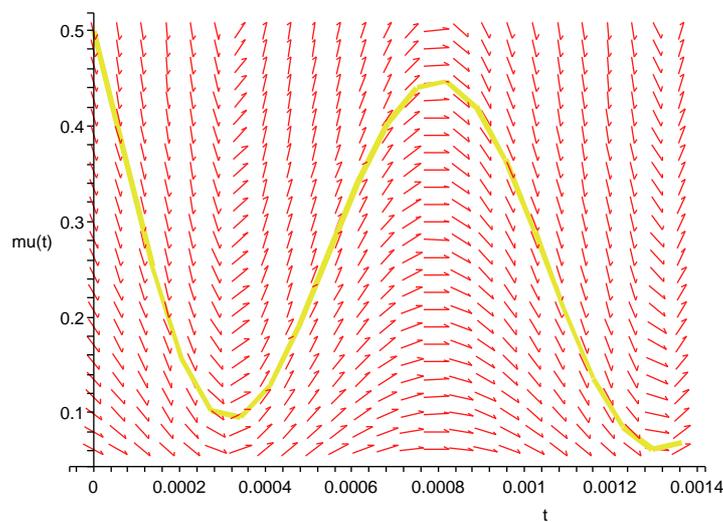


Figura 11: Diagrama de trayectorias de $u(t)$ cuando se fuerza el sistema a seguir un voltaje sinusoidal $v_o(t) = A + B\cos(\omega t)$, resaltada solución con condiciones iniciales $u_{ic} = 0,5$

En la figura (11) se observa que el valor del ciclo de trabajo promedio $u(t)$ toma valores positivos, nunca mayores que 1, es decir cumple con las restricciones establecidas durante el proceso de promediado del sistema en donde $u(t) \in [0, 1]$. Por lo que se puede asumir que para este caso se puede generar una ley de control $u(t)$ que cumpla con los requerimientos del sistema.

6.3.2. Cálculo de la corriente de entrada $i(t)$

Dado que no ha sido encontrada una solución cerrada para el caso de $u(t)$, entonces se efectuará un procedimiento similar al del caso anterior pero ahora se tendrá que resolver una ecuación diferencial en $i(t)$.

Para lograr esto primero se despeja $u(t)$ de la ecuación (81), y se sustituye en la ecuación (82), haciendo esto se obtiene:

$$u(t) = - \frac{\left(CB \sin(\omega t) \omega - \frac{A+B \cos(\omega t)}{R} \right)}{i(t)} \quad (85)$$

$$L \frac{d}{dt} i(t) = \frac{E + \left(CB \sin(\omega t) \omega - \frac{A+B \cos(\omega t)}{R} \right) (A + B \cos(\omega t))}{i(t)} \quad (86)$$

Nuevamente, esta ecuación no tiene una solución cerrada, por lo que es necesario encontrar el diagrama de las trayectorias. Para esto se asumen una vez más los valores utilizados en la sección anterior, y ahora se utiliza como condición inicial una corriente $i_{ic} = 11A$.

Utilizando los valores numéricos indicados en el párrafo anterior para resolver la ecuación (86) se obtiene el gráfico de las trayectorias presentado en la figura (12).

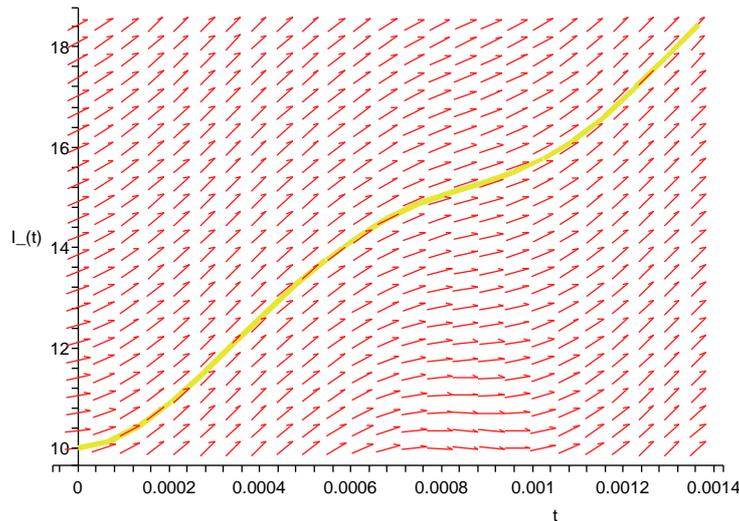


Figura 12: Diagrama de trayectorias de $i(t)$ cuando se fuerza el sistema a seguir un voltaje sinusoidal $v_o(t) = A + B \cos(\omega t)$, resaltada solución con condiciones iniciales $i_{ic} = 11Amps$

En la figura (12) puede observarse que la corriente en la inductancia $i(t)$ diverge, bajo las condiciones impuestas, desde el primer instante.

7. Modelos de Simulink: Modelo para el sistema de ecuaciones promediado.

Para comprobar el comportamiento del convertidor “Boost” es necesario construir un modelo en algún programa informático de simulación, en este caso se ha utilizado *SIMULINK*® [1], para construir dicho modelo.

El modelo elaborado corresponde al convertidor “Boost” descrito por el sistema formado por las ecuaciones promediadas (30) y (31).

En la figura (13) se presenta el diagrama del modelo de simulink. Del lado izquierdo se presentan las conexiones de entrada al sistema y del lado derecho se presentan las salidas del sistema.

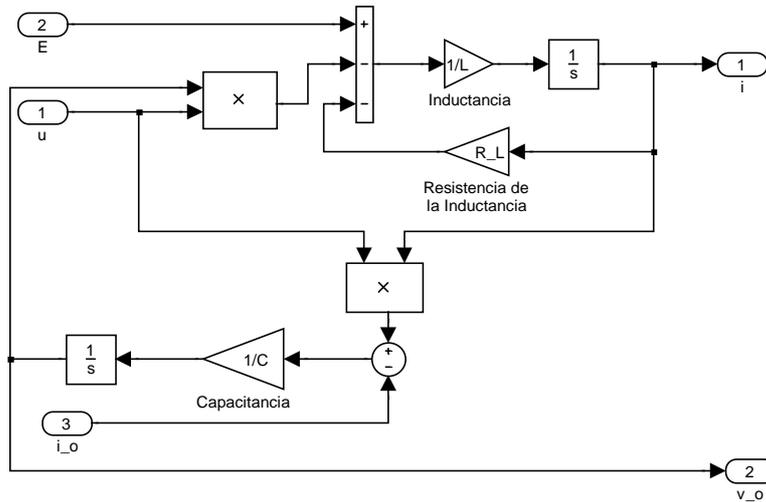


Figura 13: Modelo de *SIMULINK*[©] para el sistema de ecuaciones promediadas del convertidor “Boost”.

Las entradas son las siguientes:

- E : Voltaje de entrada del sistema
- u : Ciclo de trabajo
- i_o : Lectura de la corriente de salida

Donde, E es el voltaje de entrada que en las ecuaciones (30) y (31) corresponde a la magnitud E constante, el ciclo de trabajo u del modelo de simulink corresponde a $u(t)$ e i_o a la lectura de la corriente de salida del sistema, en las ecuaciones $i_o(t)$.

Las salidas que provee el modelo son las siguientes:

- i : Lectura de la corriente en la inductancia
- v_o : Voltaje de salida del convertidor

El valor i del modelo para simulación corresponde a $i(t)$ de las ecuaciones (30) y (31) y v_o corresponde a la función $v_o(t)$ en el sistema de ecuaciones.

7.1. Simulaciones del convertidor “Boost” en lazo abierto:

De la sección anterior se obtuvo la conclusión de que la dinámica del convertidor solamente es estable cuando se fuerza una corriente constante en la inductancia $i(t) = I$.

En los casos en que es forzado un voltaje en el condensador $v_o(t) = V$ o bien $v_o(t) = A + B\cos(\omega t)$ alguna variable del sistema diverge, en ambos planteamientos la corriente en la inductancia aumenta su valor en el tiempo de manera no acotada, siendo ésta la variable divergente, y en lo que respecta al ciclo de trabajo $u(t)$, se mantiene dentro del rango válido de trabajo, es decir $u(t) \in [0, 1]$ en ambos casos.

El modelo presentado en la figura (13) se usará para examinar el comportamiento del sistema, para esto se simularán distintas situaciones en las que los valores se encuentran dentro o fuera de las cantidades admitidas.

En general lo que se hará es examinar el comportamiento del sistema forzándolo a ubicarse en un determinado punto de operación en estado estable, el sistema deberá seguir un voltaje en la salida $v_o(t) = 20$, utilizando distintos valores de corriente en la salida $i_o(t) = I_o$, lo que simulará el comportamiento del convertidor bajo distintas condiciones de carga.

Dado que existe una relación directa entre la corriente en la salida $i_o(t)$ y la corriente en la inductancia $i(t)$ cuando el sistema se encuentra trabajando en estado estable, expresada en la ecuación (37), al forzar el sistema a que se posicione en un punto de trabajo donde la corriente en la salida es constante $i_o(t) = I_o$ y el voltaje en la salida también es constante, se fuerza indirectamente una corriente en la inductancia constante $i(t) = I$, por lo que puede esperarse que el sistema sea estable y por lo tanto logre llegar al punto de operación.

El análisis consistirá en observar hasta que punto puede aumentarse la corriente forzada en la salida $i_o(t) = I_o$ de modo que el sistema logre posicionarse en el punto de trabajo deseado.

Para realizar las simulaciones se utilizan los siguientes datos en el convertidor “Boost”:

$$\begin{aligned}L &= 1e^{-3} \text{ H} \\C &= 100e^{-6} \text{ F} \\E &= 10 \text{ V} \\V &= 20 \text{ V} \\R &= 4 \Omega \\r_L &= 0,1 \Omega\end{aligned}$$

La primera simulación se hace suponiendo una corriente deseada en la salida, fija de $I_o = 0$ A, como se ha supuesto que el sistema deberá llegar al estado estable en que tenga voltaje en la salida $v_o^{ss} = V = 20$ V y corriente en la salida $i_o^{ss} = I_o = 0$ A, entonces debe encontrarse un valor de u^{ss} de entrada al modelo.

En este caso no puede hacerse uso de la ecuación (38) pues esta ecuación no se encuentra definida para el valor de $i_o^{ss} = 0$, entonces se aplica la relación básica de voltajes

en estado estable, en los que $u^{ss} = E/V$, obteniéndose en este caso que $u^{ss} = 0,5$.

Ejecutando el modelo presentado en la figura (13) con los datos anteriormente descritos se obtiene la respuesta presentada en la figura (14), se observa que el sistema efectivamente se estabiliza y tiende al punto de trabajo deseado, como fue previsto mediante el análisis de la dinámica del sistema. Este caso en particular es importante, pues las condiciones dadas equivalen a cuando el convertidor se encuentra sin carga, es decir, no tiene conectada ninguna impedancia en paralelo con el condensador C, o bien se puede considerar como si se tiene una resistencia con un valor altísimo, equivalente a ∞ .

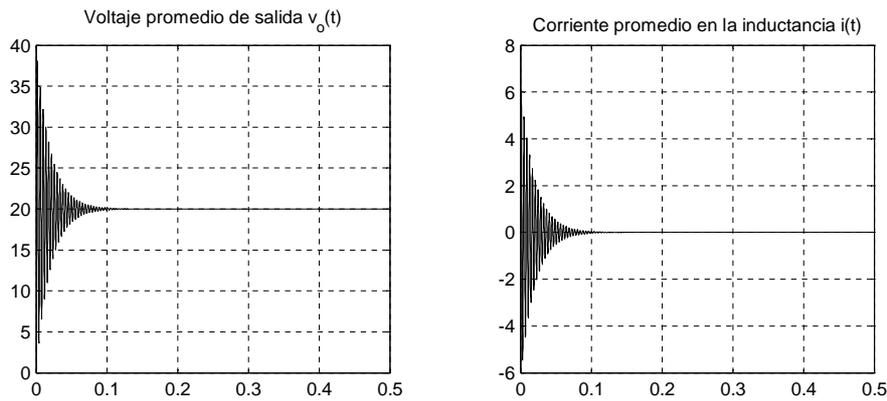


Figura 14: Ejecución del modelo de *SIMULINK*[©] para el caso corriente de salida $i_o(t) = I_o = 0$ A.

La siguiente prueba se efectúa pidiéndole al sistema una corriente en la salida $i_o(t) = I_o = 5$ A, el ciclo de trabajo promedio en estado estable se calcula mediante la ecuación (38), obteniéndose como resultado que $u^{ss} = 0,4436$.

Al hacer la simulación con este nuevo conjunto de datos se obtienen las respuestas presentadas en la figura (15), aquí se observa que el sistema igualmente se estabiliza, sin embargo hay que notar que el transitorio en este caso tiene un sobresalto mayor al caso presentado en la figura (14), el incremento en el sobresalto en el voltaje de salida es de aproximadamente 15 V respecto de la simulación previa, sin embargo se observa que el sistema se estabiliza y tiende a los valores de estado estable casi al mismo tiempo que en la primera simulación realizada.

Por último se verá la respuesta del sistema cuando se fuerza una corriente en la salida $i_o(t) = I_o = 10$ A, los resultados de la simulación se presentan en la figura (16).

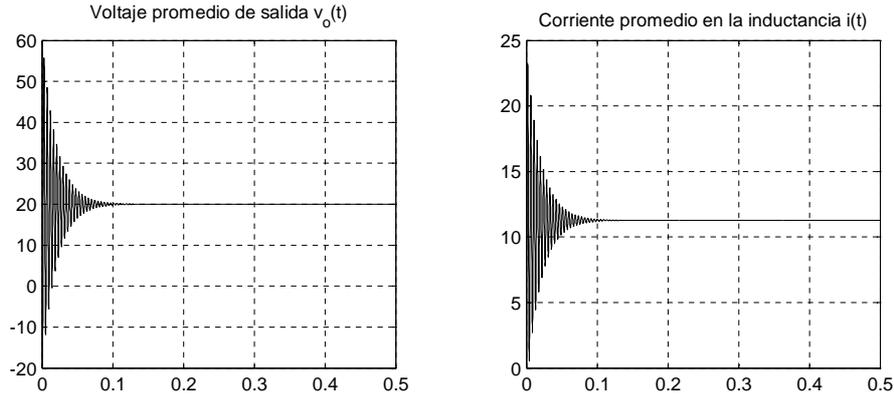


Figura 15: Ejecución del modelo de *SIMULINK*[©] para el caso corriente de salida $i_o(t) = I_o = 5$ A.

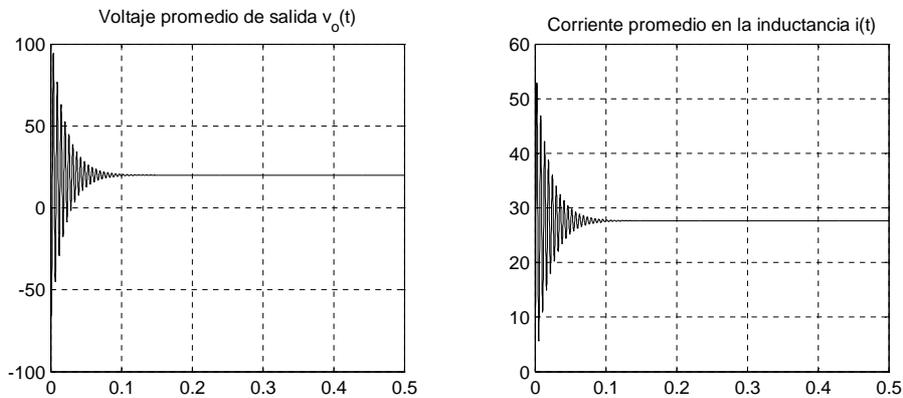


Figura 16: Ejecución del modelo de *SIMULINK*[©] para el caso corriente de salida $i_o(t) = I_o = 10$ A.

Nuevamente se ve que el sistema se estabiliza rápidamente, ahora con un transitorio aún mayor que en el caso de el voltaje en la salida $v_o(t)$ llega casi a los 100 V, el tiempo de llegada al punto de estado estable es casi el mismo en los tres casos.

Hay que notar que en el modelo de *SIMULINK*[©] al utilizar integradores es necesario establecer las condiciones iniciales tanto para la corriente en la inductancia i_{ic} como para el voltaje en el condensador $v_{o_{ic}}$, que en las simulaciones realizadas anteriormente se asumen como $i_{ic} = v_{o_{ic}} = 0$.

8. Diseño del controlador

El objetivo del diseño del controlador o controladores en esta sección será el de regulación del voltaje de salida, esto quiere decir que el convertidor “Boost” deberá seguir una consigna del voltaje de salida, y rechazar de la mejor manera posible las perturbaciones provocadas al sistema.

Se utilizarán las técnicas tradicionales de control lineal, por lo que el modelo a utilizar será el modelo linealizado del sistema alrededor de un punto de operación. Ejemplos de controladores lineales utilizando métodos reglados pueden encontrarse en [6] y [7], en este caso el diseño se hará solamente mediante los métodos clásicos o gráficos de la teoría de control lineal.

Habiendo encontrado el modelo linealizado del sistema es necesario encontrar las funciones de transferencia, esto fue hecho en una sección anterior y se indicará que función ha de usarse en cada etapa del diseño.

8.1. Diseño de un controlador de variaciones en el voltaje de salida $V_o(s)$ mediante el control directo de los cambios en el ciclo de trabajo $U(t)$

Este esquema de diseño hará uso de la función de transferencia descrita en la ecuación (55), la cual se desprende de la función de transferencia (51). Esta se encuentra formada por dos partes, una en la que se obtienen los cambios en el voltaje de salida del sistema $V_o(s)$ cuando se aplican cambios en el ciclo de trabajo $U(s)$, y una segunda parte que define como contribuyen los cambios en la corriente de salida $I_o(s)$ a los cambios en el voltaje de salida $V_o(s)$.

La segunda parte se toma como una perturbación al sistema, mientras que la primera será la porción que se desea controlar, por lo que se toma a $G_1(s)$ de la ecuación (55) como la función de transferencia de trabajo.

El punto de operación a escoger en este caso es el siguiente:

$$\begin{aligned} E &= 10 \text{ V} \\ v_o^{ss} &= 20 \text{ V} \\ C &= 100e^{-6} \text{ F} \\ L &= 1e^{-3} \text{ H} \\ r_L &= 0,1 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

La selección del valor de la corriente de salida i_o^{ss} no puede hacerse de manera arbitraria, para este caso se hará uso de la ecuación para determinar el valor máximo de corriente que el sistema puede proveer.

En este caso, aplicando la ecuación (54) se obtiene:

$$i_o^{ss} \leq \frac{10^2}{4 * 0,1 * 20} = 12,5 \text{ A} \quad (87)$$

Este valor ya era conocido pues la gráfica presentada en la figura (4), utiliza los mismos valores para representar como se mueve el cero de $G_1(s)$ en función de la corriente

de salida en estado estable i_o^{ss} .

Con el valor de $i_o^{ss\ max}$ determinado, resulta interesante ver como responde $G_1(s)$ a diferentes frecuencias bajo distintos valores de i_o^{ss} , ésto se aprecia en el gráfico de bode presentado en la figura (17).

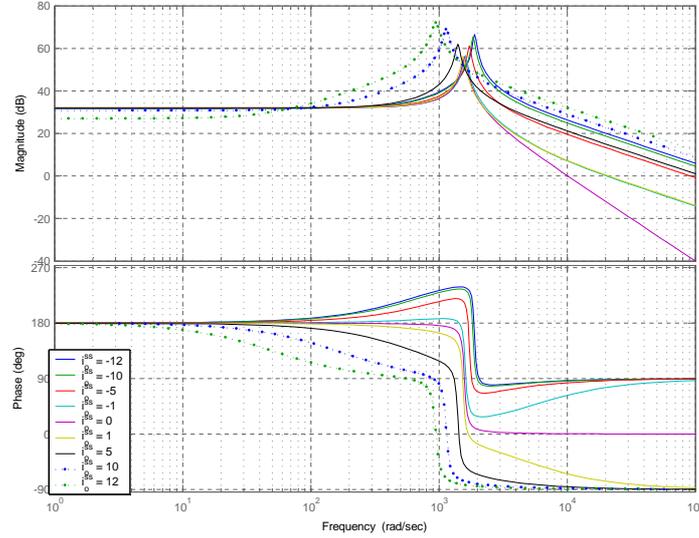


Figura 17: Diagramas de bode para $G_1(s) = V_o(s)/U(s)$ [$r_L = 0,1 \Omega, E = 10 \text{ V}, v_o^{ss} = 20 \text{ V}$] utilizando diferentes valores de i_o^{ss}

Ahora que se sabe la corriente máxima que puede proporcionar el convertidor hay que escoger la corriente de trabajo de modo que se encuentre lo suficientemente lejos del origen como para poder controlar el sistema, pero que sea lo suficientemente grande como para poder aprovechar el funcionamiento del convertidor al máximo.

Se selecciona como valor intermedio $i_o^{ss} = 5 \text{ A}$, y sustituyendo los valores del punto de trabajo anteriormente definidos, los valores de los componentes del sistema y la corriente i_o^{ss} se tiene que $G_1(s)$, expresada mediante la ecuación (55), toma la siguiente forma:

$$G_1(s) = \frac{112701,6654 (s - 687,3)}{(s^2 + 100s + 1,968e^6)} \quad (88)$$

Esta ecuación se utilizará solamente como base para el diseño del controlador, aunque éste deberá ser lo suficientemente robusto como para soportar cambios en la corriente de salida i_o^{ss} y por lo tanto el controlador diseñado deberá funcionar de una forma satisfactoria con la función de transferencia $G_1(s)$ al utilizar otros valores de corriente.

El diseño del controlador se hará utilizando técnicas clásicas, no se utilizará ninguna técnica reglada para lograr este objetivo, En la figura (17) se observa el gráfico de bode para la función de transferencia $G_1(s)$, el trazo de color negro es el que pertenece a la función que se ha seleccionado para realizar el diseño, éste se encuentra en un punto

intermedio entre todos los trazos realizados, que se presentan para un conjunto bastante representativo de valores de i_o^{ss} .

En el trazo de la ecuación (88) en la figura (17) (trazo *negro*), se observa que el sistema tiene un pico resonante al rededor de los 1300 Rad/seg, este pico es producto de la respuesta de los polos complejos conjugados de la planta, estos se encuentran ubicados en $-50 \pm 1402,05i$, dado que están en el semiplano izquierdo del plano complejo, estos pueden ser eliminados por la dinámica del compensador.

Como primer paso se eliminan estos polos, por lo que se convierten en ceros del compensador, ahora la tarea corresponde a buscar los polos del compensador y la ganancia a utilizar.

El objetivo de este primer compensador será el que siga un escalón, por lo que, de manera ideal el compensador debe tener un polo a 0 Rad/seg, por lo que se agrega este polo.

Ahora debe agregarse algún otro polo que no provoque ninguna cancelación no permitida, además se debe tomar en cuenta que el compensador debe ser al menos de grado relativo 0 y que la respuesta al escalón sea satisfactoria.

Hasta el momento el compensador tiene un cero complejo conjugado y un polo en $s = 0$, ajustando adecuadamente la ganancia del compensador puede obtenerse una respuesta del sistema en lazo abierto sumamente satisfactoria, con el inconveniente de que el compensador es impropio, y por lo tanto no realizable físicamente. Para solventar esta situación pueden agregarse un par de polos en alguna frecuencia lejana al punto de operación (En este caso 0 Rad/seg), por lo que se agregan los polos en la frecuencia de 10,000 Rad/seg.

Ajustando la ganancia del sistema hasta obtener parámetros de diseño dentro de un rango aceptable se obtiene el siguiente controlador:

$$C(s) = \frac{-429,8553 (s^2 + 100s + 1,968e^6)}{s (s + 1e^4)^2} \quad (89)$$

Con este controlador el sistema en lazo abierto tiene un margen de fase $MF = 6$ dB y un margen de ganancia $MG = 56,7^\circ$. la respuesta en lazo cerrado se presenta en la figura (18), en donde se aprecia el trazo de color azul el gráfico de bode para la función de lazo cerrado $T(j\omega)$ del sistema, en celeste se presenta el gráfico de bode de la función de sensibilidad del sistema $S(j\omega)$, la cual tiene una cota superior sobre el espectro de frecuencia de $\|S(j\omega)\|_\infty = 6,24$ dB, que es demasiado grande, pues en general se quiere que $\|S(j\omega)\|_\infty \leq 6$ dB.

Al graficar la respuesta del sistema en lazo cerrado a un escalón, se observa que bajo este modelo, como es de esperar, el seguimiento es asintótico. Al ser un sistema de fase no mínima exhibe un sobresalto en sentido negativo, este sobresalto es bastante grande,

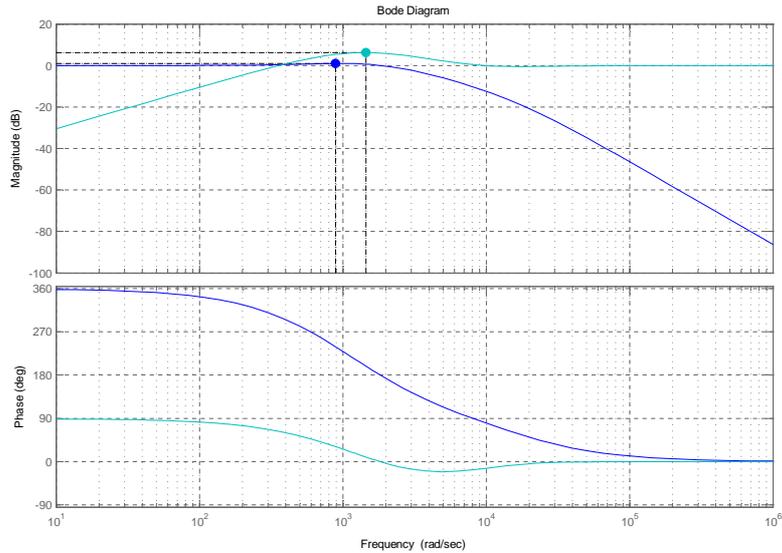


Figura 18: Diagrama de bode para el sistema en lazo cerrado $T(j\omega)$ utilizando el controlador de la ecuación 89

llegando a ser de -50% , es necesario entonces realizar modificaciones al diseño para satisfacer los requerimientos, la respuesta al escalón en este caso se presenta en la figura (19).

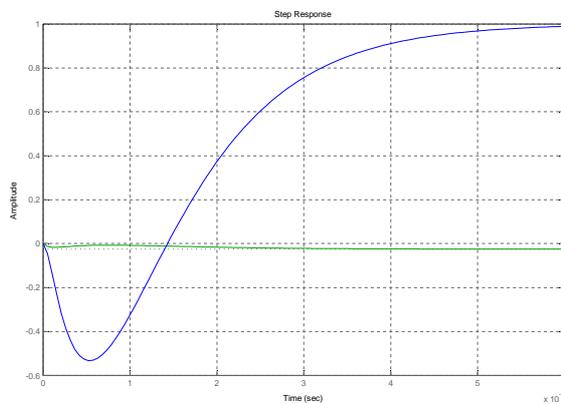


Figura 19: Respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado $T(j\omega)$ utilizando el controlador de la ecuación (89)

En la figura (19) se observan dos trazos, en azul se observa el trazo de la salida del sistema que después de un cierto tiempo tiende al valor “1”, mientras que en verde se presenta el esfuerzo de control que hace el sistema, el último se encuentra dentro de un rango de operación bastante bueno, pues los cambios en él son pequeños y no bruscos, mientras que el primero tiene un sobresalto de -50% que había sido mencionado anteriormente, este sobresalto es demasiado grande y por eso se tratará de buscar una mejor respuesta del sistema mediante modificaciones al controlador.

La modificación del controlador consistirá en lo siguiente: Los ceros del controlador

permanecen invariantes, pues lo que se intenta es eliminar el pico resonante en la función de transferencia $G_1(s)$, el polo en $s = 0$ se deja intacto pues tiene que estar si se desea que el sistema siga asintóticamente el escalón, entonces solamente puede modificarse la ganancia del controlador y los polos restantes.

Los polos restantes se cambian de lugar a $s = -2000$ y la ganancia se modifica hasta obtener un valor con el cual los márgenes de estabilidad se encuentren dentro de los rangos deseados, realizando estas modificaciones se obtiene el siguiente controlador:

$$C_2(s) = \frac{-13,7188(s^2 + 100s + 1,968e^6)}{s(s + 2000)^2} \quad (90)$$

Con este controlador se tiene un margen de fase $MF = 51,7^\circ$, un margen de ganancia $MG = 6,88$ dB, es necesario obtener el gráfico de bode del sistema en lazo cerrado $T(j\omega)$ y de la función de sensibilidad $S(j\omega)$ para ver si la norma $\|S(j\omega)\|_\infty$ se encuentra dentro del rango deseado.

La figura (20) presenta los trazos de bode del sistema utilizando el controlador modificado, el trazo azul pertenece a la función de lazo cerrado del sistema $T(j\omega)$, el trazo celeste corresponde a la función de sensibilidad $S(j\omega)$. En este caso la norma sub infinito de $S(j\omega)$ tiene un valor de $\|S(j\omega)\|_\infty = 5,99$ dB, valor que puede considerarse como “bueno”.

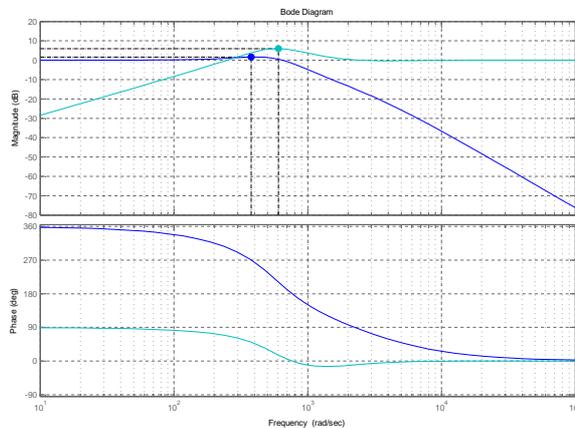


Figura 20: Diagrama de bode para el sistema en lazo cerrado $T(j\omega)$ utilizando el controlador de la ecuación (90).

Ahora solo resta saber como se comportará el controlador modificado ante un escalón. La figura (21) presenta la respuesta de la función de transferencia del sistema en lazo cerrado $T(s)$ a un escalón de amplitud “1” que se coloca como referencia. En azul se encuentra dibujado el trazo de la salida del sistema, que como puede apreciarse, sigue asintóticamente el escalón después de un cierto tiempo, además, también tiene un sobresalto hacia los valores negativos, pero en este caso es de al rededor de -18 %, lo que es

mucho mejor que el caso anterior donde se alcanzaba un -50%. En verde se aprecia el trazo dejado por el esfuerzo de control para lograr que el sistema siga asintóticamente el escalón, en este caso el comportamiento es bastante bueno pues no tiene movimientos bruscos, así como el valor del esfuerzo es bastante pequeño, lo que garantiza que el sistema podrá controlar la salida deseada sin esforzarse mucho.

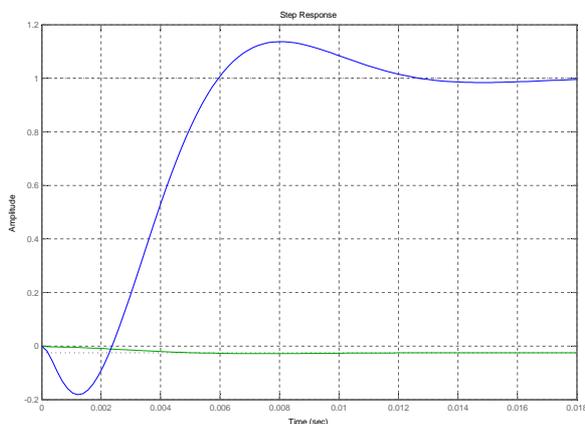


Figura 21: Respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado $T(j\omega)$ utilizando el controlador de la ecuación (90).

Bajo los criterios generales de diseño ($\|S(j\omega)\|_{\infty} \leq 6$ dB, $MF > 45^\circ$, $MG > 6$ dB y los criterios de rapidez, sobresalto, etc., en la respuesta al escalón) puede considerarse que el controlador expresado en la ecuación (90) satisface de una manera bastante buena las expectativas.

Ahora hay que comprobar el comportamiento de este controlador con el modelo promediado del sistema para ver si la respuesta con el sistema no lineal es igualmente satisfactoria.

8.1.1. Simulaciones en Matlab: 1 Controlador

En la figura (22) se presenta el modelo a utilizar para probar el controlador lineal encontrado utilizando el modelo no lineal promediado del sistema. En la figura el bloque identificado como “Convertidor Boost DC-DC ” es el mismo modelo descrito anteriormente y presentado en la figura (13).

Hay que notar que el compensador ha sido diseñado para controlar los cambios en las cantidades al rededor de un punto de operación, mientras que el resto del sistema trabaja con las cantidades absolutas, es por eso que a la salida del controlador se suma la cantidad “ $\mu_{dc} = u^{ss}$ ” que es el valor del ciclo de trabajo en el punto de operación, de modo que al modelo del convertidor llegue el valor de $u(t)$ como la suma del valor en estado estable más la contribución que provee el controlador como el cambio necesario en el ciclo de trabajo.

operación.

Con este circuito se han realizado las siguientes pruebas, las cuales se dividen en categorías:

- Cambios en el voltaje de referencia.
- Perturbaciones en la carga.
- Perturbaciones en la corriente de salida $i_o(t)$ simulando condiciones de carga no resistivas.

Algo que es importante hacer notar son las condiciones iniciales de la simulación, estas indican el punto del que parte el sistema, es decir que valores tienen las variables antes de que comience la simulación, en este caso se asume que el sistema de la figura (1) se encuentra con los interruptores en la posición que se presenta en la figura (2). Esta es una configuración de partida muy utilizada en convertidores “Boost”, por lo que puede considerarse como una situación bastante normal.

Al encontrarse el sistema en esta configuración, llegará un momento en que no exista corriente en la inductancia $i_{ic} = 0$ y además, el voltaje en el condensador, que es la misma tensión de salida tenderá a igualarse a la tensión de entrada y por lo tanto se tendrá $v_{o_{ic}} = E$.

8.1.2. Cambios en el voltaje de referencia

Para el caso de los cambios en el voltaje de referencia lo que se hace es que durante el funcionamiento del convertidor se introduce un cambio en la consigna de voltaje, mediante un escalón de amplitud “A” en un tiempo t_1 , y en un tiempo t_2 se regresa el sistema a la referencia que tenía antes de t_1 , con esto el sistema debe regresar al punto donde se encontraba operando antes del cambio.

La tensión de salida esperada tiene la siguiente forma: Desde el tiempo $t = 0$ hasta el tiempo $t = t_1$ el voltaje de salida es $v_o^{ss} = 20$ V, desde $t = t_1$ hasta $t = t_2$ la salida debe seguir la nueva referencia, por lo que el voltaje en la salida debe ser de $v_o^{ss} = (20 + A)$ V, y a partir de $t = t_2$ la salida debe volver a seguir el voltaje original de referencia, es decir $v_o^{ss} = 20$ V, en las simulaciones realizadas $t_1 = 0,6$ s y $t_2 = 1,2$ s.

Utilizando los valores iniciales, el punto de trabajo y los valores de componentes del sistema, se obtiene en la figura (23) la respuesta del sistema a un cambio en el voltaje de referencia, en este caso el escalón tiene una amplitud “ $A = 1$.”

El resultado de la figura (23) es bastante satisfactorio para un cambio abrupto en la referencia de voltaje a seguir. En la figura (24) se presenta la respuesta del sistema a un cambio de la misma naturaleza, pero en este caso el escalón es de amplitud “ $A=10$ ”.

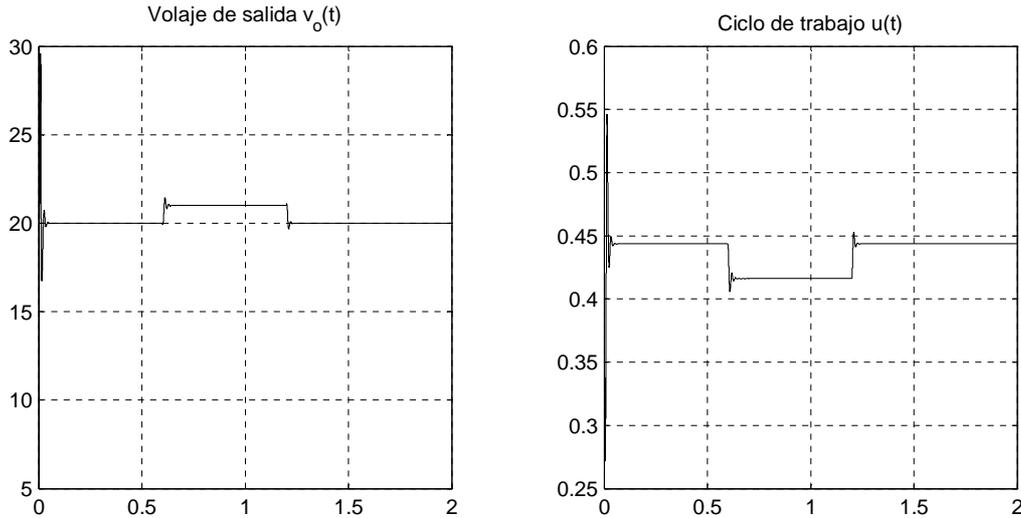


Figura 23: Respuesta del sistema en lazo cerrado utilizando el controlador de la ecuación (90), con un cambio de amplitud “ $A = 1$ ” en el voltaje de referencia.

En este nuevo caso se observa que el sistema, al producirse el cambio en t_1 , pierde la tensión de salida, y no es capaz de recuperarla a partir de t_2 cuando se retira la perturbación, de esto se puede sacar la conclusión de que el sistema no será capaz de soportar cambios grandes.

8.1.3. Perturbaciones en la carga

La ecuación (88), en base a la cual fue diseñado el controlador, se encuentra definida en el punto de operación donde se exige que $i_o^{ss} = 5$ A. El controlador por lo tanto también se encuentra sujeto a esta condición, lo que se pretende probar ahora es la robustez del controlador frente a estos cambios, de modo que el sistema en lazo cerrado pueda proveer de una respuesta regulada en la tensión de salida $v_o(t) = 20$ V.

Las perturbaciones realizadas al sistema en esta sección consisten en el cambio de la carga para provocar, por lo tanto, un cambio en la corriente de salida $i_o(t)$, con el objetivo de ver que tan robusto es el controlador y que tan capaz de mantener el voltaje de salida $v_o(t)$ siguiendo la referencia.

Se utilizarán los mismos valores para C , L , r_L , v_o^{ss} , E , los valores iniciales i_{ic} y v_{oic} así como los tiempos t_1 y t_2 utilizados en la sección anterior.

En la figura (25) muestra el comportamiento del sistema para el caso cuando la resistencia de carga inicial tiene un valor $R = 4 \Omega$, al tiempo t_1 la resistencia en la carga cambia, y ahora es de $R = 10 \Omega$, para luego regresar a el valor de $R = 4 \Omega$ al tiempo t_2 .

Se observa en la figura (25), que el voltaje de salida del sistema $v_o(t)$ experimenta transitorios en los momentos en que la carga es cambiada, pero después de estos transitorios el sistema se estabiliza bastante rápido y tiende al valor de $v_o^{ss} = 20$ V. Con respecto al ciclo

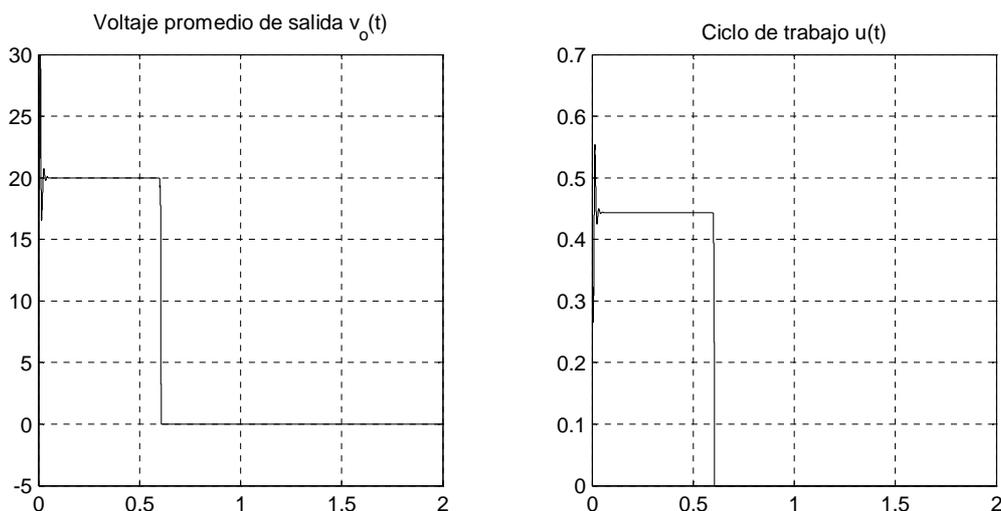


Figura 24: Respuesta del sistema en lazo cerrado utilizando el controlador de la ecuación (90), con un cambio de amplitud “ $A = 10$ ” en el voltaje de referencia.

de trabajo se observa que el cambio en el ciclo de trabajo al introducir la perturbación es relativamente pequeño, no se satura y se estabiliza rápidamente, por lo que se puede considerar que para esta perturbación el desempeño del compensador es satisfactorio.

En la figura (26) presenta otro caso para el cual la perturbación se presenta utilizando una resistencia de mayor valor, en este caso se pasa de $R = 4 \Omega$ a $R = 500 \Omega$ en t_1 y de $R = 500 \Omega$ a $R = 4 \Omega$ en t_2 .

En la figura (26) se aprecia que el sistema igualmente sigue bastante bien el voltaje de referencia, pues aunque hay transitorios bastante grandes en los momentos en que se realiza el cambio de la resistencia de carga, los valores se estabilizan bastante rápido y el valor de la tensión de salida $v_o(t)$ tiende al valor $v_o^{ss} = 20 \text{ V}$.

También se aprecia en la figura (26) que el cambio neto en el ciclo de trabajo es relativamente pequeño para el cambio en los valores de la resistencia que se presentan, teniéndose también un cambio importante en la corriente de salida $i_o(t)$.

8.1.4. Perturbaciones simulando cargas no resistivas

Si la carga no es puramente resistiva, es decir, contiene elementos inductivos y/o capacitivos, en algún momento de la operación del sistema pueden llegar a devolver corriente a este. Es importante analizar la respuesta de los sistemas convertidores bajo esta situación, pues en general las cargas tendrán una impedancia cualquiera y raramente serán completamente resistivas.

En esta parte de las simulaciones lo que se hace es: Utilizando los mismos valores C , L , r_L , E , v_o^{ss} , i_o^{ss} los valores iniciales i_{ic} y $v_{o_{ic}}$ así como los tiempos t_1 y t_2 definidos anteriormente, se pone en funcionamiento el sistema, al tiempo t_1 se coloca en paralelo

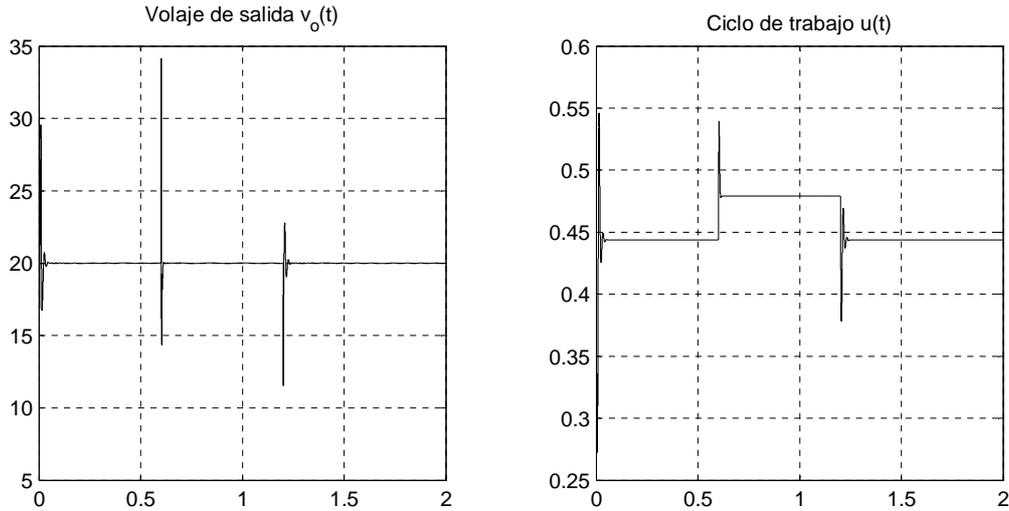


Figura 25: Respuesta del sistema en lazo cerrado utilizando el controlador de la ecuación (90), con una perturbación en la carga de $R = 4 \Omega$ a $R = 10 \Omega$ en t_1 y de $R = 10 \Omega$ a $R = 4 \Omega$ en t_2 .

con la carga una fuente que devuelve corriente al sistema.

Al tiempo t_2 se remueve esta fuente de corriente, entonces el sistema deberá volver al punto de operación donde se encontraba antes de t_1 .

La figura (27) presenta la respuesta del sistema a una corriente de -10 A que regresa la carga al convertidor. Se puede apreciar que el sistema es capaz de soportar una carga de retorno bastante grande, pues la corriente nominal de operación es de 5 A y al tener una carga que regresa -10 A al sistema la corriente total en la salida será de $i_o = -5$. Se observa que la tensión de salida tiene transitorios importantes en el momento de inicio y final de la perturbación, pero el sistema se mantiene bastante bien en el valor de voltaje deseado de $v_o^{ss} = 20 \text{ V}$.

Se ve también que el incremento en el ciclo de trabajo $u(t)$ es relativamente bajo, lo que quiere decir que el esfuerzo de control necesario para rechazar esta perturbación es pequeño, además se observa que el valor de la corriente de salida medida $i_o(t)$ cae de 5 A a -5 A como es de esperar.

Hay que notar también que la corriente en la inductancia experimenta un cambio importante, pero al remover la perturbación regresa al punto de trabajo establecido.

De todo lo anterior se saca la conclusión de que el sistema trabajando con el controlador encontrado, que se encuentra expresado por la ecuación (90) tiene un comportamiento bastante satisfactorio ante perturbaciones de distinta naturaleza, sin embargo en la práctica se evita el uso de este tipo de configuración pues al trabajar con una planta de fase no mínima, ésta presenta ciertas particularidades que se desean evadir. Para tratar de evitar esto se utiliza el esquema que se presenta en la siguiente sección, donde se utilizarán dos controladores, uno que controlará la corriente en la inductancia a través del ciclo de tra-

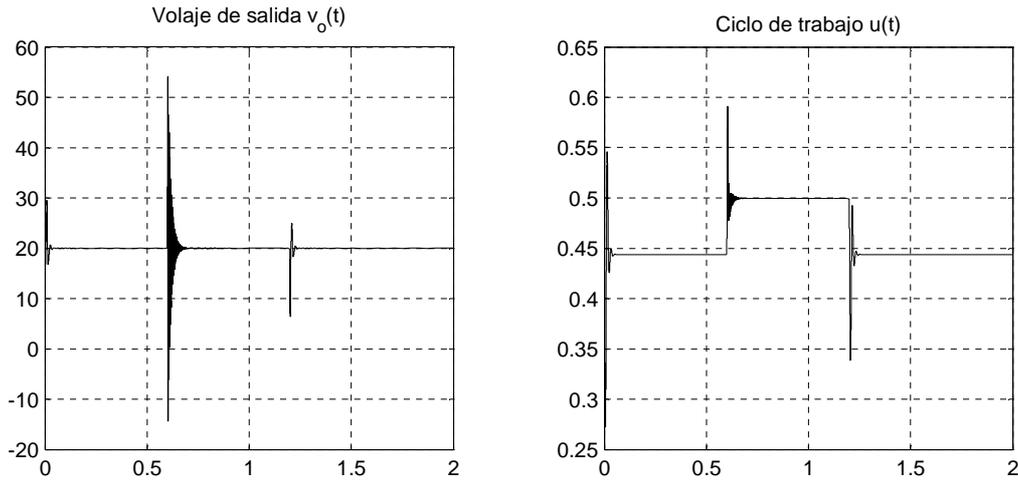


Figura 26: Respuesta del sistema en lazo cerrado utilizando el controlador de la ecuación (90), con una perturbación en la carga de $R = 4 \Omega$ a $R = 500 \Omega$ en t_1 y de $R = 500 \Omega$ a $R = 4 \Omega$ en t_2 .

bajo y el segundo controlador que controlará el voltaje en la salida mediante consignas de la corriente en la inductancia.

El esquema utilizado en la siguiente sección trata de evitar el uso de funciones de fase no mínima para el control/regulación del voltaje de salida.

8.2. Diseño de un control de variaciones en el voltaje de salida $V_o(s)$ mediante el control de la corriente en la entrada $I(s)$

Al utilizar los métodos tradicionales de la teoría de control lineal, en general se tratará o al menos se preferirá trabajar con funciones de transferencia de fase mínima. En el caso de la función de transferencia expresada en la ecuación (88), el numerador tiene un cero con parte real positiva, por lo que esta función de transferencia es de fase no mínima.

Para tratar de evitar trabajar con este tipo de funciones de transferencia, lo que se hace en esta sección es subdividir el problema en dos problemas de control más pequeños, con la esperanza de que cada una de estas divisiones sea de fase mínima y así el sistema pueda controlarse más fácilmente.

La figura (28) presenta el esquema general de control a utilizar en esta sección. Nuevamente el bloque etiquetado como Convertidor “Boost DC-DC (No Lineal)” corresponde al modelo promediado no lineal del convertidor presentado y explicado en la figura (13), el elemento “Cntrl_1” será el controlador que regule la corriente en la inductancia $i(t)$ a través de la manipulación del ciclo de trabajo $u(t)$, para lograr esto deberá utilizarse una función de transferencia que tenga como entrada el ciclo de trabajo y proporcione como salida la corriente en la inductancia.

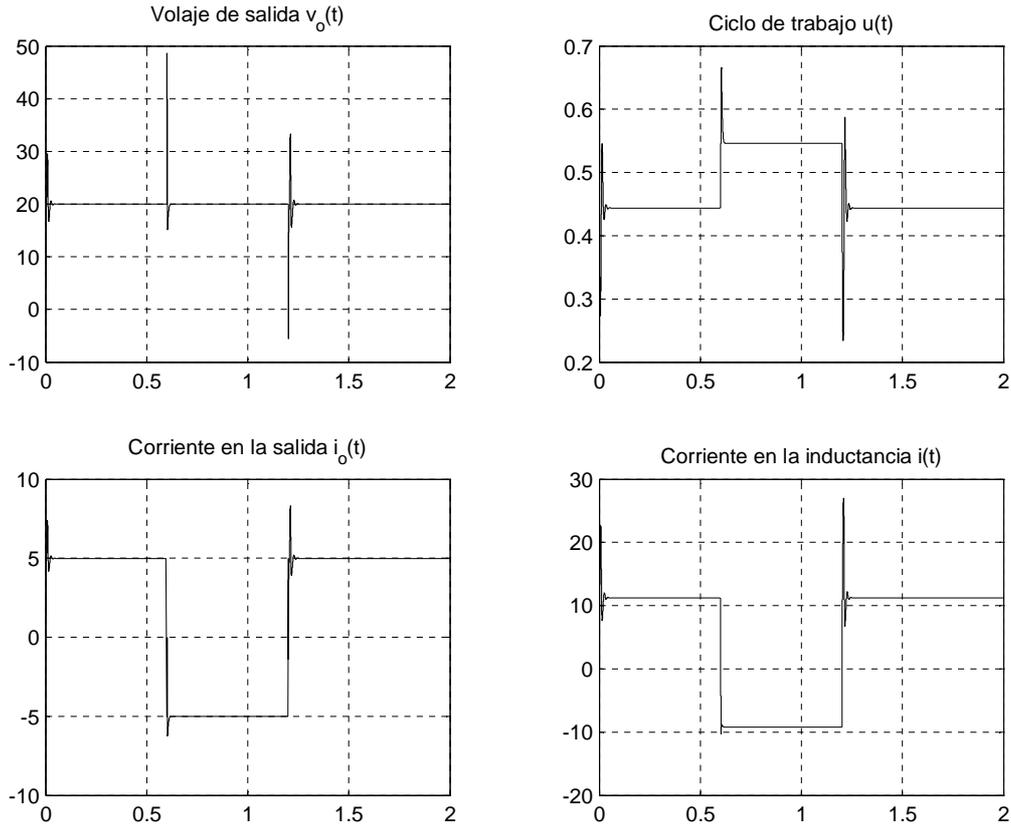


Figura 27: Respuesta del sistema en lazo cerrado utilizando el controlador de la ecuación (90), con una perturbación en corriente de salida i_o de -10 A desde t_1 hasta t_2 .

Como se explicó en secciones anteriores el modelo promediado de un convertidor “Boost” no es lineal, entonces habrá que linealizarlo para poder obtener las funciones de transferencia y así poder trabajar con las herramientas de control tradicional. Se trabaja entonces con un modelo linealizado al rededor de un punto de operación.

Las funciones de transferencia genéricas linealizadas al rededor de un punto de operación fueron encontradas anteriormente, ahora es necesaria una que reciba como entrada cambios en el ciclo de trabajo $U(s)$ y proporcione como salida los cambios en la corriente en la inductancia $I(s)$, al examinar las ecuaciones encontradas anteriormente se tiene que la parte que es necesaria corresponde a la función de la ecuación (56) que se presenta a continuación:

$$G_1(s) = -\frac{(v_o^{ss} sC + u^{ss} i^{ss})}{s^2 LC + r_L sC + u^{ss} 2}$$

El punto de operación y los valores de los componentes del sistema serán nuevamente los mismos que los utilizados en las secciones anteriores. Las condiciones para la selección de la corriente de salida obtenidas en la ecuación (87) son igualmente válidas para este caso, por lo que el valor que se escoja para la corriente de operación ha de ser menor a los 12,5 A.

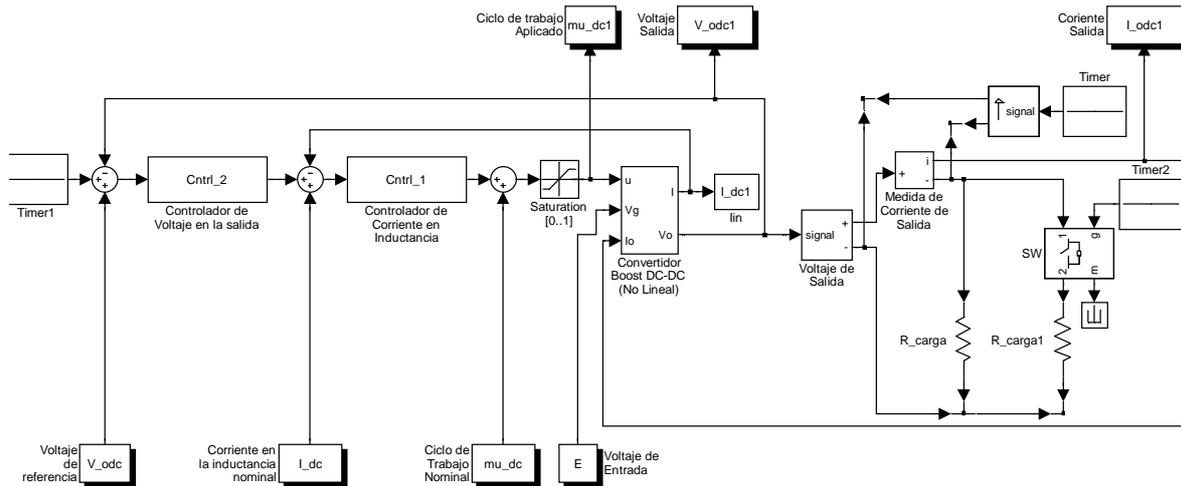


Figura 28: Modelo de *Simulink*® para el control de el modelo no lineal de la planta utilizando dos controladores

Como criterio para seleccionar la corriente lo que se hace es graficar los trazos de bode de la ecuación (56) bajo distintos valores de i_o^{ss} , el resultado de esta gráfica se presenta en la figura (29).

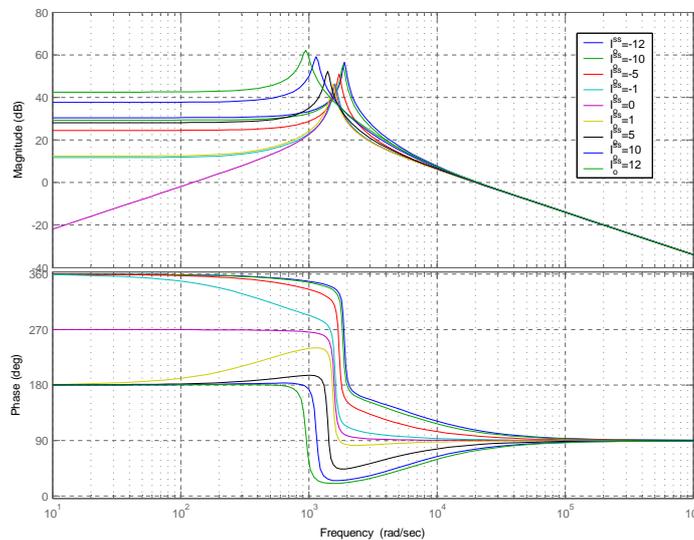


Figura 29: Diagramas de bode para $G_1(s) = I(s)/U(s)$ [$r_L = 0,1 \Omega$, $E = 10 \text{ V}$, $v_o^{ss} = 20 \text{ V}$] utilizando diferentes valores de i_o^{ss} .

Como corriente de operación se selecciona una que provoque que el trazo de bode de la función $G_1(s)$ utilizada en esta ocasión se encuentre más o menos en el centro de todos los trazos hechos, esto se hace para que la función de transferencia y por lo tanto la corriente de salida i_o^{ss} escogidas sean representativas.

En la figura (29) se observa que una función de transferencia que cumple con la condición expuesta anteriormente es la que se presenta cuando se utiliza una corriente de salida $i_o^{ss} = 5$ A. El diagrama de bode para este caso corresponde al trazo *negro*, en el cual se encuentra en una ubicación que puede considerarse como “centrada” respecto de los demás trazos.

Reemplazando el valor de la corriente de salida en estado estable seleccionado, $i_o^{ss} = 5$ A, los valores de los componentes del circuito, los valores de voltajes deseados en el punto de operación, se obtiene la siguiente función de transferencia $G_1(s) = I(s)/U(s)$ en el punto de operación en estado estable:

$$G_1(s) = \frac{-20000 (s + 2500)}{s^2 + 100s + 1,968e^6} \quad (91)$$

Ahora deberá diseñarse un controlador lineal utilizando la función de transferencia (91) como planta a controlar. Como este controlador será utilizado para regir el comportamiento del lazo interno del sistema, se deberá procurar que este lazo sea tan rápido como sea posible, es decir, que tenga el mayor ancho de banda del que se pueda disponer. Además de esto se utilizará el criterio de que el sistema compensador/planta en lazo abierto tenga una ganancia bastante alta en la región de interés y así también el sistema en lazo cerrado no presente regiones con picos resonantes, o bien que estos sean tan bajos como sea posible.

Inicialmente se intentará con un controlador proporcional, el valor se determinará elevando la ganancia del lazo abierto compensador/planta hasta un nivel en que se cumpla con el criterio de diseño. Elevando la ganancia en la parte de interés del lazo abierto sobre los 60 dB se obtiene un controlador proporcional:

$$C(s) = -38 \quad (92)$$

La figura (30) muestra el trazo de bode de la combinación en lazo abierto de la planta definida por la ecuación (91) y el controlador antes mencionado.

La figura (30) presenta un pico resonante en lazo abierto al rededor de los 1300 Rad/seg, este pico solamente representará problema si provoca un pico resonante en el lazo cerrado del sistema. A continuación se presenta el diagrama de bode del sistema en lazo cerrado en la figura (31).

Como se observa en la figura (31) el lazo cerrado del sistema no tiene ningún pico resonante, en azul se presenta el trazo de la función $T(j\omega)$, que tiene un ancho de banda bastante amplio, de aproximadamente 7×10^5 Rads/seg. En celeste se presenta el trazo de la función de sensibilidad del sistema $S(j\omega)$, en la cual se aprecia que rechaza muy bien las perturbaciones hasta frecuencias de al rededor de 1×10^4 Rads/seg, así como que el valor de la norma $\|S(j\omega)\|_\infty$ es de 0 dB, lo cual implica un margen de estabilidad muy bueno.

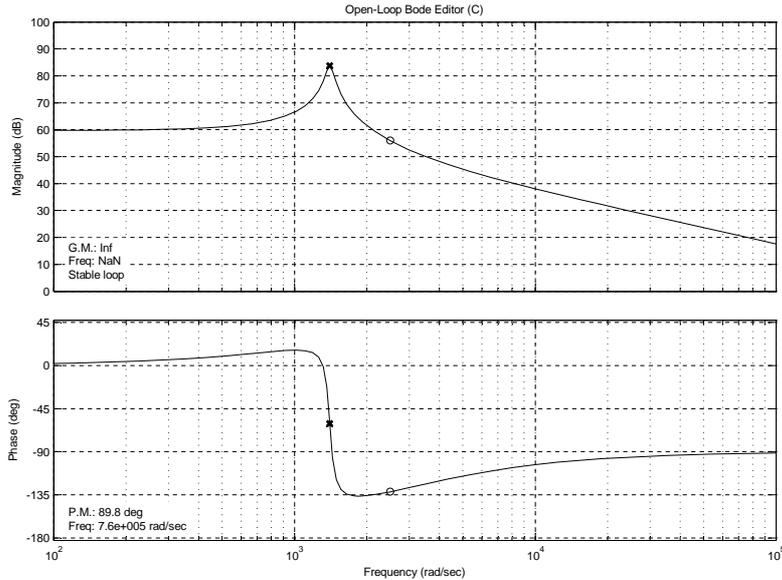


Figura 30: Diagramas de bode para el sistema en lazo abierto $C(s)G_1(s)$ con $C(s) = -38$.

El diseño realizado utilizando solamente el controlador proporcional (92) cumple de manera satisfactoria con todas las restricciones de diseño impuestas, ahora solamente hace falta observar el comportamiento del convertidor al introducir este compensador utilizando el modelo no lineal promediado del sistema.

El esquema para la simulación del comportamiento del convertidor presentado en la figura (28) debe reducirse al diagrama que se presenta en la figura (32), en este último se ha suprimido el compensador “Cntrl_2” pues este ha de ser diseñado en base a los resultados obtenidos al encontrar un controlador “Cntrl_1” que haga que el sistema siga adecuadamente una referencia en la corriente en la inductancia $i(t)$. Ese es el objetivo de las simulaciones que se realizan a continuación.

El sistema de control diseñado deberá seguir una referencia en la corriente de la inductancia $i(t)$. Para probar la robustez de “Cntrl_1” se introducirá un cambio en la referencia de corriente en la forma de un escalón de amplitud “A”.

Una vez más los valores a utilizar en el punto de trabajo serán los mismos que los utilizados anteriormente, es decir: $C = 100e^{-6}$ F, $L = 1e^{-3}$ H, $r_L = 0,1 \Omega$, $E = 10$ V, $v_o^{ss} = 20$ V, $i_o^{ss} = 5$ A, por lo tanto se tiene que $i^{ss} = 11,2702$ A y $u^{ss} = 0,4436$. Los tiempos de los cambios serán también $t_1 = 0,6$ s y $t_2 = 1,2$ s.

La primera simulación a realizar consistirá en introducir un escalón en la referencia de la corriente de inductancia de amplitud “A = 1”, y ver como se comporta el sistema, los resultados de esta simulación se presentan en la figura (33).

La figura (33) presenta la respuesta de la corriente en la inductancia $i(t)$ del sistema. Al analizar los resultados obtenidos resulta que el sistema no sigue exactamente el escalón de amplitud “A = 1”. Al tener una corriente nominal $i^{ss} = 11,2702$ A e incluir una

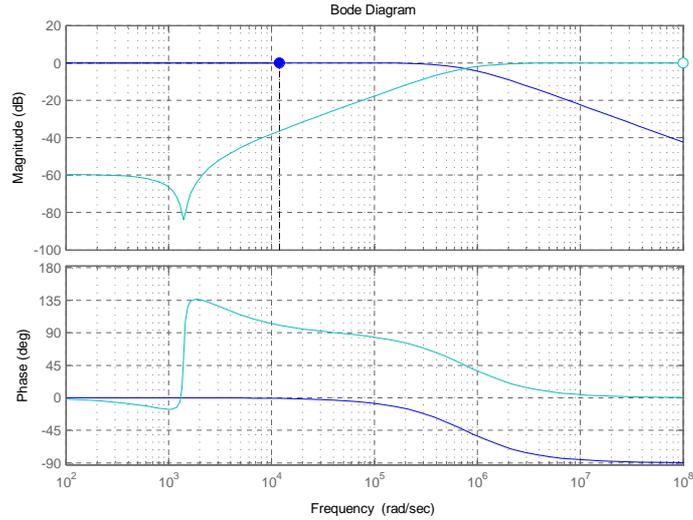


Figura 31: Diagramas de bode para el sistema en lazo cerrado $T(j\omega)$ y $S(j\omega)$ con $C(s) = -38$.

cambio en la referencia de amplitud “1”, la corriente en la inductancia debe llegar a un valor de 12,2702 A mientras el cambio se encuentra presente, sin embargo, la respuesta del sistema se estabiliza en un valor de 11,2696 A, lo que quiere decir que solamente alcanza un 99,94 % del valor real deseado, no obstante el resultado se aproxima lo suficiente como para considerarlo satisfactorio. De igual manera, el cambio en el ciclo de trabajo para soportar la perturbación es bastante bajo, por lo que el sistema no deberá ejercer un gran esfuerzo para seguir este tipo de modificaciones en la referencia.

A continuación, en la figura (34) se presenta otra perturbación de la misma naturaleza que la anterior pero en este caso con una amplitud “ $A = 10$ ”.

En la gráfica (34) se observa que el sistema sigue, de manera similar al caso anterior, solamente un 99,96 % de la perturbación incluida, pero se estabiliza bastante rápido con un ciclo de trabajo que presenta una variación relativamente pequeña, por lo que se garantiza que el sistema podrá seguir perturbaciones de este tipo.

El compensador presentado en la ecuación (92) controla adecuadamente la corriente en la inductancia del convertidor “Boost”, ahora es necesario diseñar el controlador “Cntrl_2”.

“Cntrl_2” deberá regular el voltaje en la salida del sistema $v_o(t)$. Dado que se debe trabajar con las técnicas de control lineal es necesario nuevamente hacer uso de las funciones de transferencia encontradas anteriormente. Primero habrá que cerrar el lazo interno del sistema, es decir, encontrar la función de transferencia del lazo cerrado del sistema utilizando la planta de la ecuación (91) y el controlador (92). La función de transferencia de lazo cerrado queda expresada de la siguiente manera:

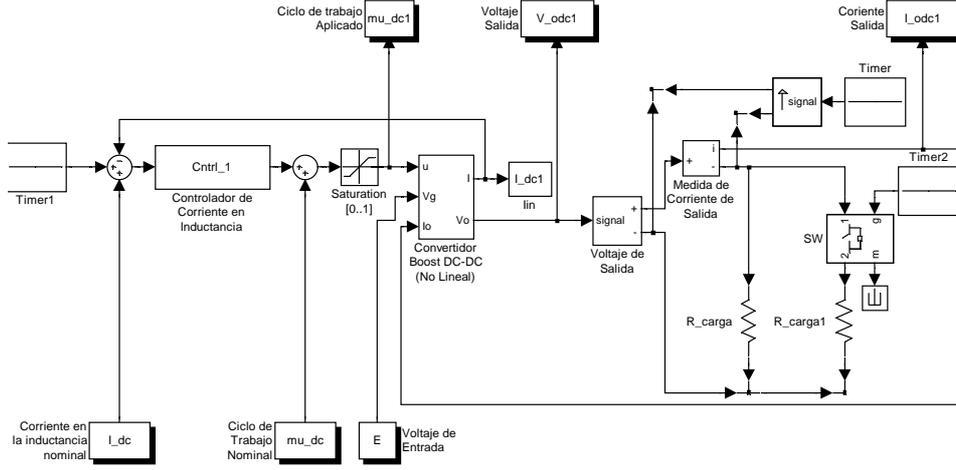


Figura 32: Modelo de simulink reducido, sistema de control de corriente en la inductancia $i(t)$.

$$T_1(s) = \frac{760000(s + 2500)}{(s + 7,576e005)(s + 2511)} \quad (93)$$

La ecuación (93) da como resultado un cambio “controlado” en la corriente de la inductancia $I(s)$, teniendo como entrada una consigna de corriente a seguir en el punto de operación. Ahora deberá diseñarse el lazo exterior que servirá para controlar las variaciones en el voltaje de salida $V_o(s)$.

Para controlar la tensión en la salida debe conocerse como se ven afectados los cambios en el voltaje $V_o(s)$, (es decir, debe tener una lectura de $V_o(t)$) ante los cambios en la corriente en la bobina $I(t)$, en el modelo de convertidor “Boost”.

Se hace necesario encontrar una función de transferencia, definida por la dinámica del convertidor, tal que $F_1(s) = V_o(s)/I(s)$, de modo que puedan conocerse los cambios en el voltaje de salida $V_o(s)$ teniendo como entrada los cambios en la corriente de la inductancia $I(s)$ obtenidos al utilizar la ecuación (93), la respuesta se encuentra en la función (57) encontrada anteriormente que se recuerda a continuación:

$$F_1(s) = \frac{V_o(s)}{I(s)} = \frac{(-sLi^{ss} - r_Li^{ss} + u^{ss}v_o^{ss})}{v_o^{ss}sC + u^{ss}i^{ss}}$$

Al sustituir los valores del punto de operación en la ecuación (57) se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$F_1(s) = \frac{-5,6351(s - 687,3)}{(s + 2500)} \quad (94)$$

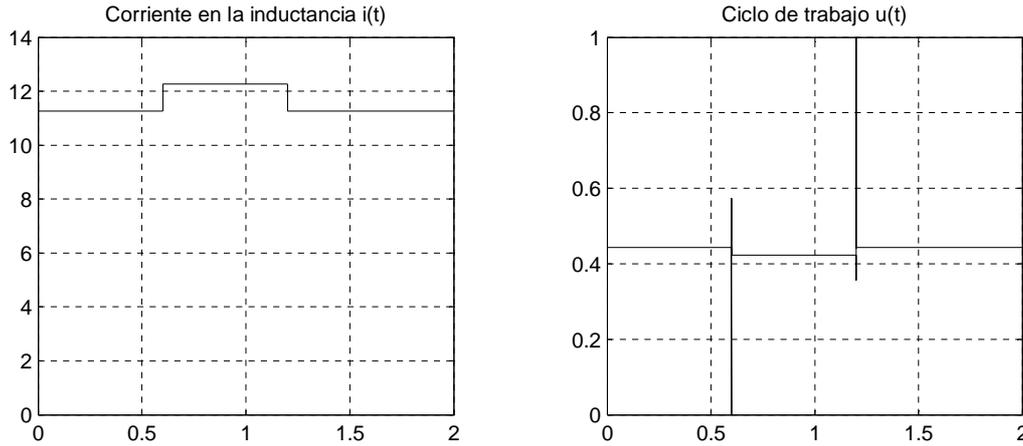


Figura 33: Respuesta del sistema en lazo cerrado utilizando el controlador de la ecuación (92), con una perturbación de amplitud “ $A = 1$ ” en la corriente en la inductancia de referencia.

La función de transferencia a controlar será ahora la función formada por el lazo cerrado del circuito utilizando el controlador “Cntrl.1”, es decir la función $T_1(s)$ presentada en la ecuación (93) multiplicada por la función $F_1(s)$ de la ecuación (94), de este modo se verá cómo se ven afectados los cambios en el voltaje de salida $V_o(s)$ ante los cambios en la consigna de corriente del inductor $I(s)$ que desea seguirse. Efectuando el producto explicado anteriormente se obtiene la siguiente función de transferencia en el punto de operación a controlar:

$$G(s) = \frac{-4282663,2844 (s - 687,3)}{(s + 7,576e005) (s + 2511)} \quad (95)$$

La ecuación (95) presenta la función de transferencia a controlar, se desea que ésta siga una referencia en el voltaje de salida. Sin embargo, esta presenta un inconveniente que es precisamente el que se está tratando de evitar, esta es una función de fase no mínima.

El esquema de diseño presentado en la figura (28) tiene como fin el incluir en el sistema la complicación que supone el diseñar dos compensadores, con el único objetivo de evitar la fase no mínima del sistema original y de esa manera tratar de facilitar la tarea de control de cada uno de los compensadores.

Se tratará de evitar el uso de la ecuación (95) por los inconvenientes que supone el trabajar con un cero ubicado en el semiplano derecho del plano complejo.

Para evadir esta complicación se intentará con un método alternativo, que es el aproximar la función de transferencia de trabajo mediante las respuestas que presenta a escalones de distintas magnitudes, para esto se utilizará nuevamente el modelo de la figura (32), en

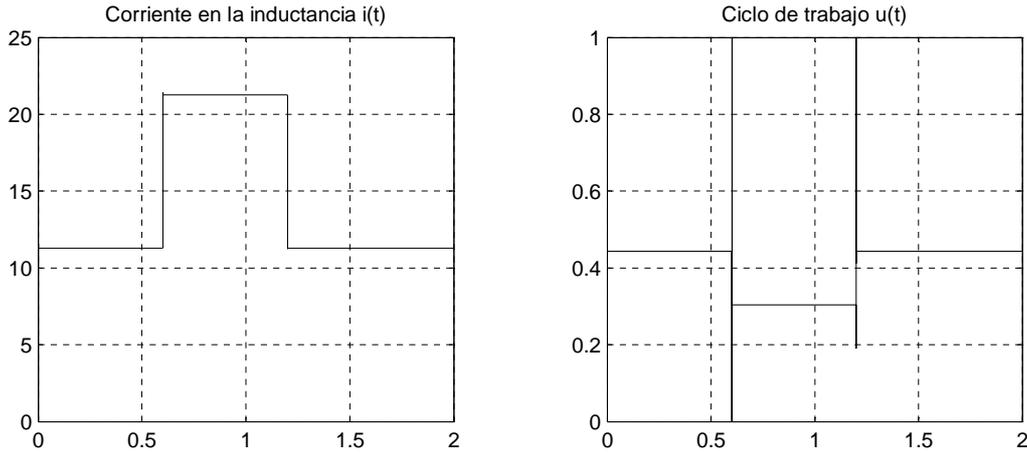


Figura 34: Respuesta del sistema en lazo cerrado utilizando el controlador de la ecuación (92), con una perturbación de amplitud “ $A = 10$ ” en la corriente en la inductancia de referencia.

el cual se introducirán perturbaciones en la referencia de la corriente de entrada $i(t)$, pero ahora se observa la respuesta en el voltaje de salida $v_o(t)$.

La función de transferencia que se pretende encontrar mediante esta aproximación deberá tener como entrada las variaciones en la corriente de la inductancia $I(s)$ y deberá proporcionar como resultado las variaciones en el voltaje de salida $V_o(s)$, no debe confundirse esta ecuación con la función de transferencia (94) anteriormente explicada, pues ahora se tiene el sistema con un compensador que regula la corriente en la inductancia y la dinámica de la función aproximada debe incluir este comportamiento. El sistema se intentará aproximar mediante un sistema de primer orden más una constante que proporcionará un desplazamiento respecto de la referencia en el tiempo en el que ocurre la perturbación, el sistema a aproximar tendrá la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{A}{\tau s + 1} + C \quad (96)$$

Donde ante la respuesta al escalón de un sistema, las cantidades se toman de la siguiente manera: “ C ” es el valor del desplazamiento que sufre inicialmente el sistema respecto del valor de v_o^{ss} , “ A ” es la distancia que existe desde el punto más bajo hasta el más alto dentro de la respuesta a la perturbación, “ τ ” es el tiempo que tarda en llegar desde el valor que toma la función inmediatamente después de que se introduce la perturbación (en este caso serán picos que se desplazan del valor v_o^{ss}) hasta el 65 % del valor en el que se estabiliza.

En este caso se examinan respuestas del voltaje de salida $v_o(t)$ ante perturbaciones en la corriente de la bobina $i(t)$ en forma de escalones de distintas magnitudes.

En la figura (35) se presentan las respuestas en el voltaje de salida $v_o(t)$ del sistema

presentado en la figura (32) al introducir perturbaciones de distintas magnitudes en la consigna de la corriente de la inductancia $i(t)$.

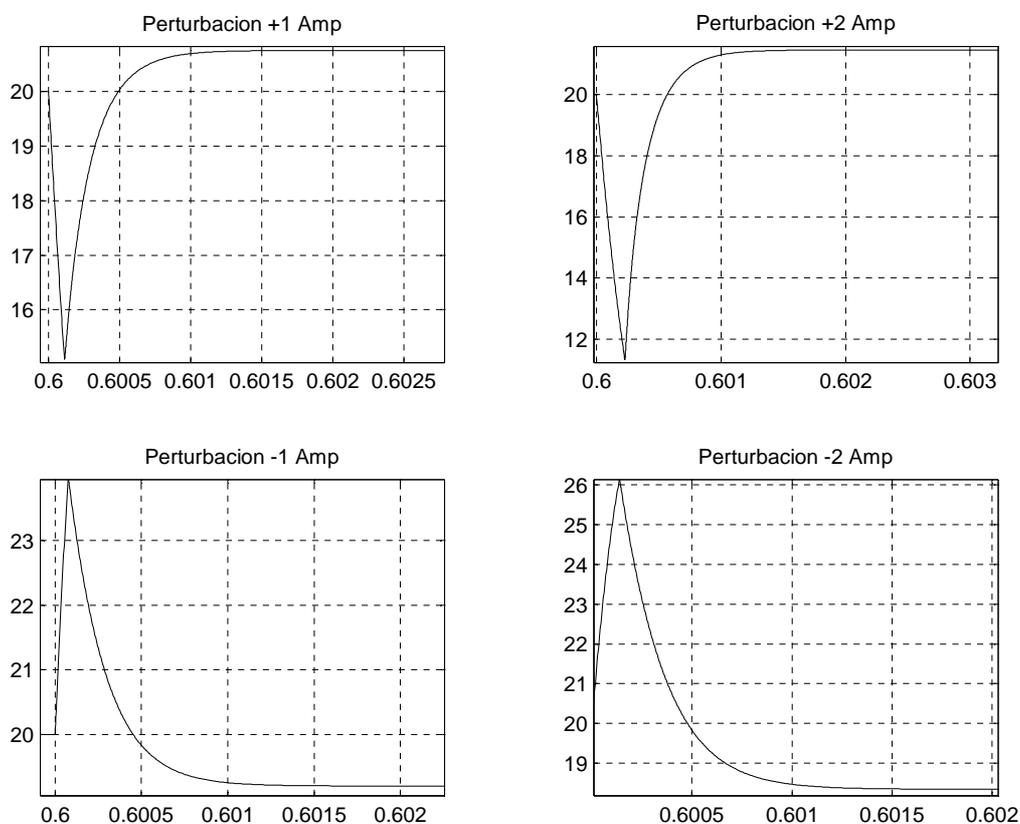


Figura 35: Respuestas del voltaje de salida $v_o(t)$ del sistema de la figura (32), ante perturbaciones de distintas magnitudes en la corriente de la bobina.

Ahora hay que encontrar los valores “A”, “ τ ” y “C” de la ecuación (96) para cada uno de los casos presentados en la figura (35). La tabla (1) resume los valores correspondientes para cada uno de los casos.

Valor	Pert. +1 A	Pert. -1 A	Pert. +2 A	Pert. -2 A
A	5.6565	4.7676	10.1159	7.7944
C	-4.906	-3.9675	-8.6604	-6.1377
τ	1.9019e-4	2.2420e-4	1.750e-4	2.3436e-4

Cuadro 1: Valores obtenidos para la aproximación de la función de transferencia del sistema

Con los valores de la tabla (1) se obtienen las funciones de transferencia aproximadas para cada una de las respuestas obtenidas del sistema ante las perturbaciones indicadas, los resultados se resumen en la tabla (2).

Magnitud de la perturbación	Función de transferencia
+1 A	$\frac{-4,9060 (s-804,3)}{(s+5228)}$
-1 A	$\frac{-3,9675 (s-899,5)}{(s+4460)}$
+2 A	$\frac{-8,6604 (s-972,4)}{(s+5786)}$
-2 A	$\frac{-6,1377 (s-1152)}{(s+4257)}$

Cuadro 2: Funciones de transferencia de aproximación del sistema dependiendo de la magnitud de la perturbación.

Utilizando las funciones de transferencia que se presentan en la tabla (2) hay que encontrar una que sea representativa para todos los casos, para lograr tener una sola función de transferencia representativa del sistema ante distintas amplitudes de la perturbación lo que se hará es lo siguiente: El polo de la función de transferencia aproximada será el promedio de los polos de las funciones de transferencia presentadas en la tabla. El cero será el promedio de los ceros de las ecuaciones presentadas anteriormente, y la ganancia del sistema se obtendrá al promediar las ganancias estáticas, es decir, cuando $s = 0$.

Realizando las operaciones anteriormente mencionadas se obtiene la siguiente función de transferencia que es representativa del sistema ante todas las perturbaciones efectuadas.

$$G_{aprox}(s) = \frac{6,0209 (s - 956,9)}{(s + 4943)} \quad (97)$$

Algo que es muy importante hacer notar es que nuevamente al realizar la aproximación se ha obtenido un sistema de fase no mínima, la ecuación (97) tiene como ventajas sobre la ecuación (95) que el cero de fase no mínima se encuentra un poco más alejado del origen, y que el grado relativo es menor, con lo que se deduce una menor complicación a la hora de tratar de controlar el sistema. Dado que no se ha podido escapar de la fase no mínima del sistema, se usará esta última ecuación encontrada para tratar de hallar un controlador que satisfaga las condiciones de diseño.

Utilizando las técnicas clásicas de diseño, se tratará de hacer que el sistema compensador/planta en lazo abierto tenga el máximo ancho de banda posible en la frecuencias de interés por encima de los 40 dB, además el trazo de bode no debe recubrir el cero de fase no mínima del sistema, tratando que el margen de fase y de ganancia cumplan con las magnitudes mínimas necesarias, en este caso se ha conseguido esto con el siguiente controlador:

$$C_2(s) = \frac{286,535}{s + 2,504} \quad (98)$$

Al producir el trazo de bode para la combinación $G_{aprox}(s) C_2(s)$ se obtiene el diagrama presentado en la figura (36), en donde se aprecia que el sistema no envuelve el cero de

fase no mínima, cortando el eje horizontal en una frecuencia inferior a este, con una pendiente de aproximadamente 20 dB/Década, además se aprecia que el sistema en este caso tiene buenos márgenes de estabilidad como lo son un margen de ganancia $MG = 9,15$ dB y un margen de fase $MF = 65,9^\circ$.

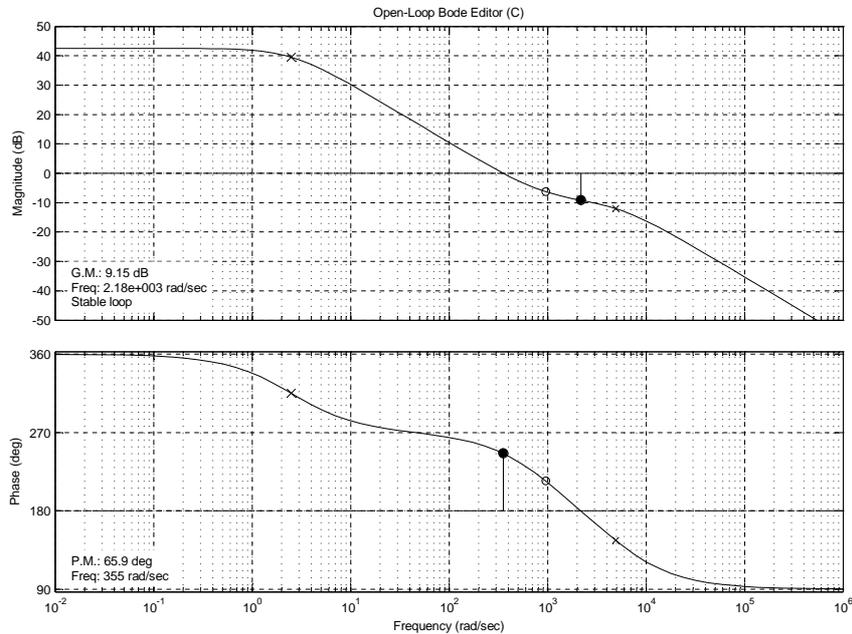


Figura 36: Diagrama de bode en lazo abierto para el sistema de la ecuación (97).

Ahora hay que examinar las características del sistema en lazo cerrado para asegurarse de que cumpla con todos los requerimientos establecidos por los márgenes de estabilidad así como que no tenga picos resonantes muy pronunciados. La figura (37) presenta el trazo de bode para la función de lazo cerrado del sistema $T(s)$ y para la función de sensibilidad $S(s)$.

Como se observa en la figura (37) el sistema tiene una norma $\|S(j\omega)\|_\infty = 4,02$ dB que es un muy buen margen de estabilidad bajo esta medida. En la figura (38) se presenta la respuesta del sistema a un escalón de amplitud 1.

En la figura (38) se observa en azul el trazo de la respuesta del sistema a un escalón de amplitud 1, como se aprecia el sistema tiene un sobresalto hacia la parte negativa, lo que hace aún más evidente el comportamiento de fase no mínima del sistema, además este sobresalto es de alrededor de -30% , y tiende asintóticamente hacia el valor de “1” en un tiempo bastante corto.

En la figura (38) se observa el trazo verde, el cual corresponde al esfuerzo de control, que en este caso será la consigna del cambio en la corriente en la inductancia, se ve también que el movimiento es suave y de amplitud relativamente reducida, lo que dice que el sistema podrá seguir esta clase de perturbaciones sin problema.

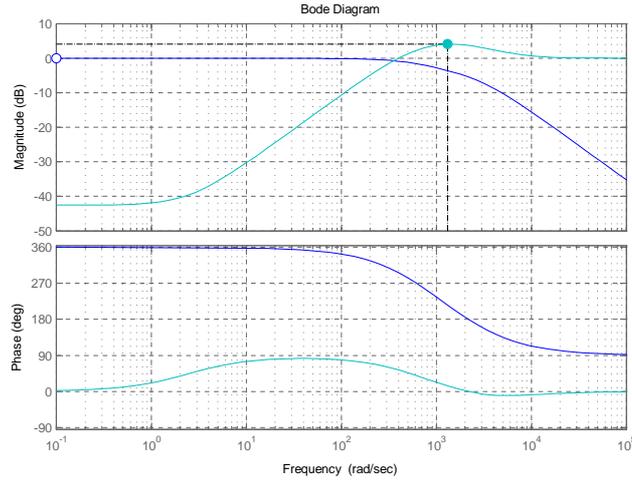


Figura 37: Diagrama de bode del circuito en lazo cerrado $T(j\omega)$ y función de sensibilidad $S(j\omega)$ para la función de transferencia del problema aproximada (97) y el controlador encontrado 98.

Al hacer un resumen de las características reflejadas en las simulaciones del sistema utilizando la aproximación lineal al rededor de un punto de trabajo se obtienen las siguientes características: $MF = 65,9^\circ$, $MG = 9,15$ dB, $\|S(j\omega)\|_\infty = 4,02$ dB, ganancia en las frecuencias de interés de 42,5 dB. Con estas características de las cuales todas se encuentran bien en relación con los niveles deseados. Ahora solamente hace falta probar los controladores encontrados (92) y (98) simultáneamente utilizando el modelo promediado del sistema, es decir probarlos en el modelo de simulink presentado en la figura (28).

8.2.1. Simulaciones en Simulink: 2 Controladores

En esta sección se presentan los resultados de las pruebas realizadas utilizando los controladores “Cntrl_1” de la ecuación (92), y “Cntrl_2” expresado en la ecuación (98) con la dinámica no lineal del sistema utilizando el modelo de Simulink de la figura (28).

Las pruebas se realizan utilizando el mismo orden que en el caso cuando se utilizaba un solo controlador. Las simulaciones a realizar se efectuarán bajo las siguientes perturbaciones:

- Cambios en el voltaje de referencia.
- Perturbaciones en la carga.
- Perturbaciones simulando cargas no resistivas

8.2.2. Cambios en el voltaje de referencia

Este cambio consiste en la introducción de una alteración en el voltaje de referencia que debe seguir el sistema en forma de un escalón de amplitud “A”. El sistema se encuentra trabajando en el punto de operación en estado estable cuando al tiempo t_1 la

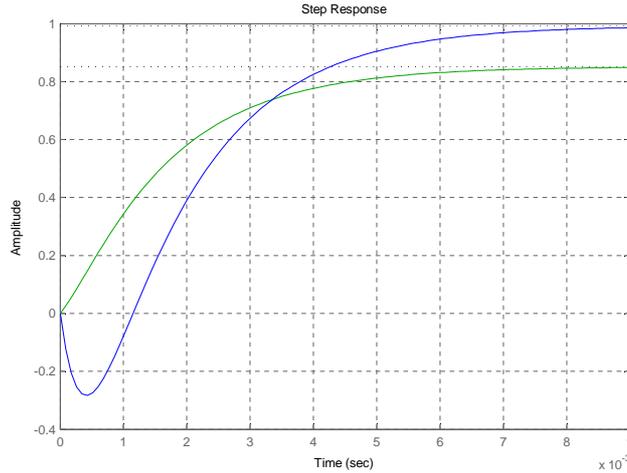


Figura 38: Respuesta del sistema en lazo cerrado $T(j\omega)$ a un escalón para la función de transferencia del problema aproximada (97) y el controlador encontrado (98).

referencia “ v_o^{ss} ” se incrementa en un valor “ A ”, manteniéndose éste hasta el tiempo t_2 en que se regresa la referencia al valor que tenía inicialmente.

En la figura (39) se presenta la respuesta del sistema a una perturbación de amplitud “ $A = 10$ ”.

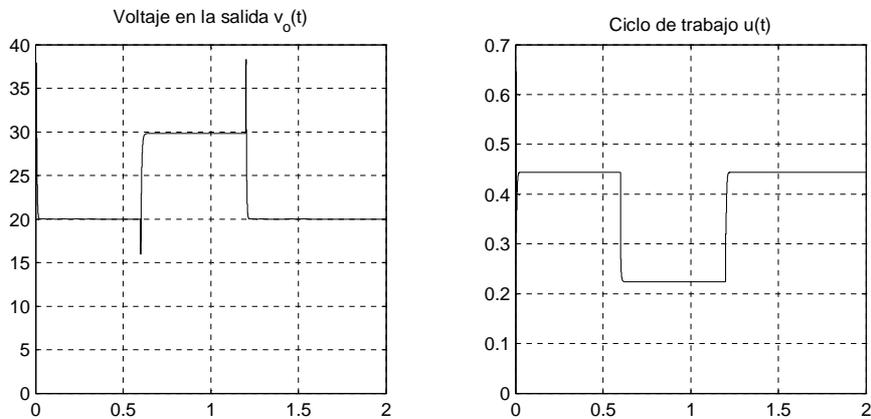


Figura 39: Respuesta del sistema en lazo cerrado utilizando los controladores “Cntrl_1” de la ecuación (92) y “Cntrl_2” de la ecuación (98), con una perturbación de amplitud “ $A = 10$ ” en el voltaje de referencia, con el modelo de la figura (28).

En la figura (39) se aprecia que el sistema soporta bastante bien una alteración en la referencia de amplitud “ $A=10$ ”, éste caso en particular no era admitido al utilizar el compensador de la ecuación (90) analizado en secciones anteriores, por lo que se puede considerar que este modo de control se comporta de mejor manera para este tipo de perturbaciones.

Hay que notar que el voltaje en la salida no alcanza exáctamente el valor $v_o^{ss} + A$ mientras el cambio en la referencia se encuentra presente, sin embargo, es lo suficientemente cercano como para considerar aceptable la respuesta, así también se aprecia que el cambio en el ciclo de trabajo es relativamente pequeño, lo que indica que el controlador no realiza grandes esfuerzos para llevar el sistema a este punto de trabajo.

8.2.3. Perturbaciones en la carga

En este caso se aplican perturbaciones en la carga de igual manera a las realizadas al sistema cuando se utiliza el controlador (90), es decir, el sistema comienza a trabajar con una carga que provoca que la corriente en la salida concuerde con la definida por el punto de trabajo en estado estable i_o^{ss} , en este caso $R = 4 \Omega$, en el tiempo t_1 se cambia la carga por otra, que dura en funcionamiento hasta el tiempo t_2 , cuando se regresa a la que el sistema tenía en uso inicialmente.

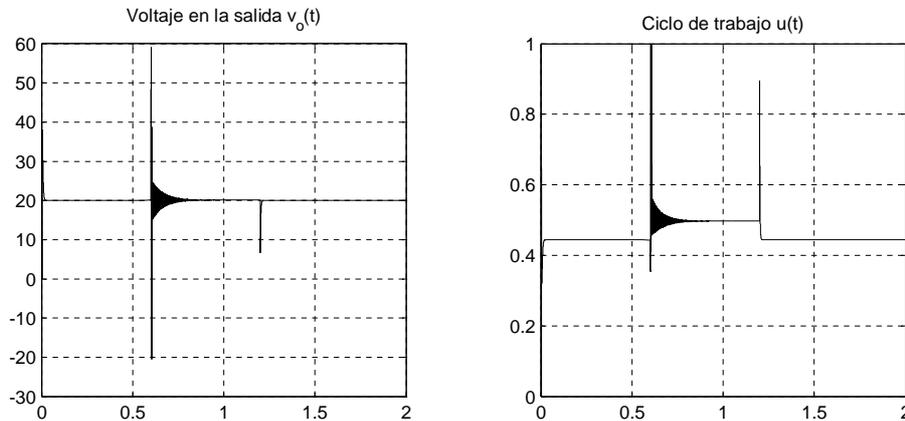


Figura 40: Respuesta del sistema en lazo cerrado utilizando los controladores “Cntrl_1” de la ecuación (92) y “Cntrl_2” de la ecuación (98), con una perturbación en la carga de $R = 4 \Omega$ a $R = 500 \Omega$ en t_1 y de $R = 500 \Omega$ a $R = 4 \Omega$ en t_2 , usando el modelo de la figura 28.

En la figura (40) se aprecia el trazo dejado por la salida del sistema $v_o(t)$ al incluir una perturbación en la carga de $R = 4 \Omega$ a $R = 500 \Omega$ en t_1 y regresando al valor inicial en t_2 . La respuesta resulta bastante satisfactoria al tomar en cuenta que el sistema se estabiliza bastante rápido al rededor de v_o^{ss} después de los cambios, teniéndose también una variación en el ciclo de trabajo relativamente pequeña para una perturbación importante.

8.2.4. Perturbaciones simulando cargas no resistivas

Para simular una carga no resistiva se utiliza el mismo procedimiento que cuando se ha probado la respuesta del compensador (90) bajo este tipo de perturbaciones. Al tiempo t_1 se introduce una corriente de retorno en el punto de la carga, para observar como se comporta el convertidor ante corrientes que son entregadas al sistema, ésta corriente se

remueve al tiempo t_2 devolviendo el sistema a su estado inicial, en donde debe estabilizarse y volver al punto de operación en estado estable.

En la figura (41) se tienen los trazos que producen las señales del sistema al perturbar la corriente de salida, ésta se encuentra en el punto de operación en estado estable $i_o^{ss} = 5$ A desde el tiempo $t = 0$ hasta $t = t_1$, cuando se introduce una corriente de retorno desde la carga hacia el convertidor, de magnitud -10A, estado que permanece en el sistema hasta $t = t_2$, donde regresa a la condición inicial.

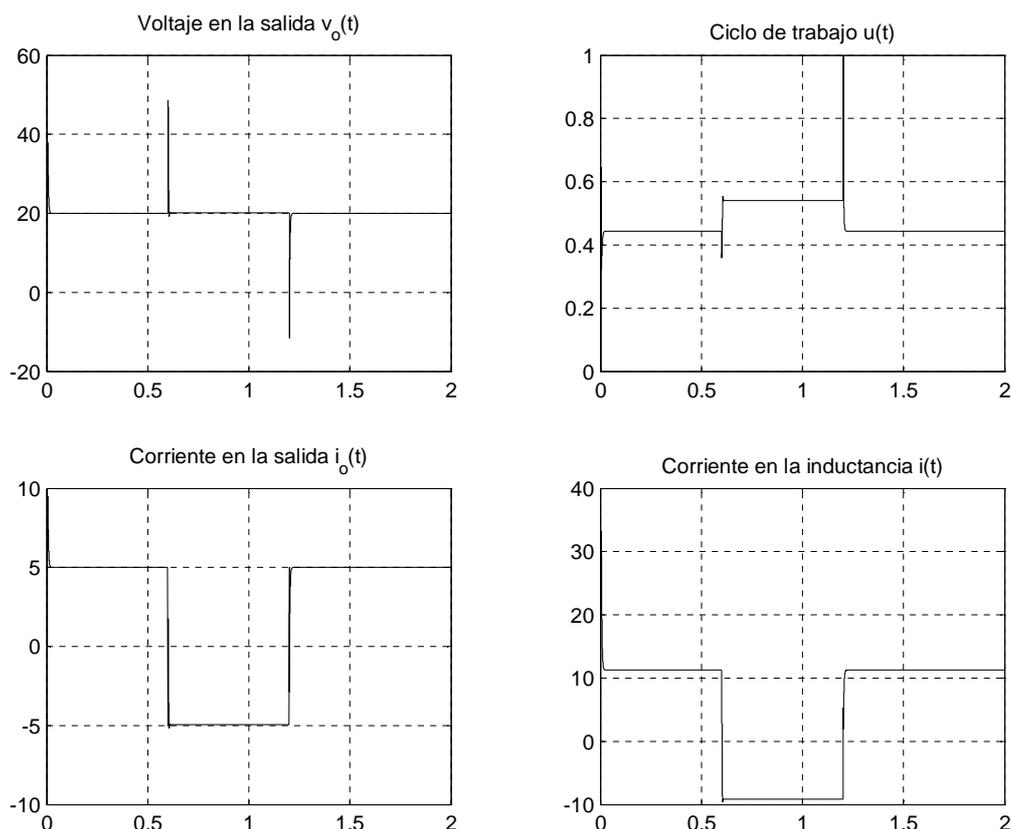


Figura 41: Respuesta del sistema en lazo cerrado utilizando los controladores “Cntrl_1” de la ecuación (92) y “Cntrl_2” de la ecuación (98), con una perturbación en la corriente de salida de -10 A, usando el modelo de la figura (28).

Como puede apreciarse en la figura (41), el sistema soporta bastante bien una perturbación importante en la corriente de salida $i_o(t)$. El comportamiento del voltaje en la salida $v_o(t)$ mientras se encuentra presente la perturbación es bastante bueno, es importante notar que no se mantiene exactamente en el punto $v_o^{ss} = 20$ V, la tensión en la salida sube ligeramente, pero considerando la magnitud de la perturbación resulta una respuesta bastante aceptable.

Así mismo el cambio en el ciclo de trabajo no es grande, lo que dice que se pueden introducir perturbaciones aún mayores al sistema.

De las pruebas realizadas anteriormente se puede concluir que el sistema exhibe un comportamiento bastante bueno bajo las perturbaciones analizadas, en general puede considerarse que este esquema de control es más robusto que cuando solamente se utiliza el control (90), pues en este caso el sistema soporta ciertas perturbaciones que no eran admitidas al hacer uso del modo de control utilizando un solo compensador.

9. Conclusiones

El convertidor “Boost” o “Elevador” ofrece la ventaja de ofrecer un voltaje mayor al que tiene en la entrada, esto hace que sea bastante útil en aplicaciones práctica pues utilizando fuentes de voltaje más pequeñas se podrán alimentar cargas que necesitan mayor potencial.

Sin embargo este tipo de convertidores se encuentra limitado intrínsecamente respecto de los valores máximos y mínimos, tanto de voltaje como corriente en la salida. Parte de estas restricciones han sido encontradas al linealizar el modelo del convertidor, la principal de estas restricciones relativa al efecto que tiene la magnitud de la resistencia de la inductancia “ r_L ” se encuentra expresada en la ecuación (54), mediante esta ecuación se puede saber, conociendo los valores de tensión que se desean en la salida, así como el valor que se tendrá en la entrada y la resistencia “ r_L ”, el valor máximo de la corriente en la salida en estado estable “ i_o^{ss} ” que puede ofrecer el convertidor.

Otro de los resultados obtenidos que resulta sumamente interesante es el hecho de que el cero de fase no mínima, que aparece en el sistema al expresar la función de transferencia de la forma (51), se convierte en un cero de fase mínima al tener una corriente en la salida i_o^{ss} negativa, es decir, que cuando el sistema recibe corriente en lugar de proporcionarla a la carga éste se vuelve más fácil de controlar, lamentablemente esta no es una condición de operación normal pues en general se desea que el convertidor otorgue corriente a las cargas.

Otro de los resultados obtenidos respecto de los distintos esquemas de control que se utilizan de forma generalizada en la literatura. El primero de ellos consiste en encontrar un controlador lineal partiendo de $G_1(s)$ de la ecuación (51) como planta, en donde el controlador diseñado recibe como entrada el error en el voltaje de salida y proporciona como salida el cambio en el ciclo de trabajo necesario para corregir el error. Este esquema tiene la inconveniencia de que la planta presenta un cero de fase no mínima, para tratar de evadir éste cero, se utiliza el esquema de control presentado en la figura (28), pero resulta que al encontrar las funciones de transferencia equivalentes para controlar el voltaje, el cero de fase no mínima surge de nuevo, haciendo el sistema nuevamente difícil de controlar.

No obstante la presencia del cero de fase no mínima en el último esquema de control presentado, mediante éste se obtiene un sistema en lazo cerrado que es más robusto a las perturbaciones. Es importante notar que la solución de las ecuaciones diferenciales del sistema promediado al averiguar la dinámica cero, en general no se puede hacer de manera cerrada, por lo que el conocimiento de las respuestas del sistema se encuentra limitado a las soluciones numéricas que puedan encontrarse.

Referencias

- [1] *SIMULINK* modeling and simulation software: <http://www.mathworks.com/>.
- [2] Erickson, Robert W.; Fundamentals of power electronics , *Kluwer Academic Publishers*, 1999.
- [3] Bryant, B.; Kazimierczuk, M.K.; Small-signal duty cycle to inductor current transfer function for boost PWM DC-DC converter in continuous conduction mode, *Proc. of the International Symposium on Circuits and Systems*, Page(s):V-856 - V-859 Vol.5, 2004.
- [4] Bryant Brad ; Kazimierczuk Marian K. ; Open-Loop Power-Stage Transfer Functions Relevant to Current-Mode Control of Boost PWM Converter Operating in CCM, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, Accepted for future publication.
- [5] Erickson, Robert W. , Maksimovic, Dragan ; Fundamentals of power electronics , *Dordrecht Kluwer Academic Publishers*, 2001.
- [6] Naim, R., Weiss, G., Ben-Yaakov, S.; *H[∞] Control of Boost Converters : Comparison to Voltage Mode, Feedforward and Current Mode Controls*, *26th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference, Record.*, 1995. PESC '95, 18-22 June 1995 Page(s):1327 - 1332 vol.2
- [7] Naim, R., Weiss, G., Ben-Yaakov, S.; *H[∞] control applied to boost power converters*, *IEEE Transactions on Power Electronics*, July 1997, Volume 12, Issue 4, Page(s):677 - 683.
- [8] Almazan, J., Vázquez, N., Hernandez, C., Alvarez, J., Arau, J.; A Comparison between Buck, Boost and Buck-Boost inverters, *VII IEEE International Power Electronics Congress*, 15-19 Oct. 2000 , Page(s):341 - 346.
- [9] Almazan, J., Vázquez, N., Hernandez, C., Alvarez, J., Arau, J.; Analysis and Experimental Study of the Buck, Boost and Buck-Boost inverters, *30th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference*, 27 June-1 July 1999 , Page(s):801 - 806 vol.2 .