

La “descarga artillera” en coordenadas intrínsecas

Multiple shooting in intrinsic coordinates

Martín Lara

Real Observatorio de la Armada, 11110 San Fernando

Abstract

The numerical solution of two-point boundary value problems is usually achieved either by methods where the unknowns are the values of the true solution at a grid of points (collocation and finite difference methods), or by shooting methods, that confront the problem as an initial value problem. The usefulness of the first class of methods is evident from the popular package AUTO. With respect to the second class, there is a wealth of methods based on differential corrections. However, when dealing with highly unstable motions, the numerical solution of the differential equations quickly degenerates, preventing the required precision in the shooting solution of the initial value problem. This does not happen to collocation or finite difference methods, for they treat the solution as a whole. The objection to shooting is easily overcome by introducing slight modifications in the algorithms, resulting in “multiple shooting” methods. In the present work we formulate a multiple shooting algorithm in intrinsic coordinates —a kind of shooting that exhibits some advantages for the analytical continuation of periodic orbits in conservative dynamical systems of three degrees of freedom.

1 Introducción

En general, la resolución numérica de problemas de contorno se efectúa o bien por métodos que consideran incógnitas los valores de la solución deseada en un cierto número de puntos (métodos de colocación y de diferencias finitas), o bien por métodos “artilleros”, que resuelven un problema de valor inicial en el que se necesita estimar dicho valor inicial. La utilidad de los primeros resulta evidente del popular paquete AUTO¹. Con respecto a los segundos, abundan los métodos basados en correcciones diferenciales. Cuando se integran soluciones muy inestables de las ecuaciones diferenciales la solución numérica del problema de valor inicial puede degenerar notablemente, dificultando la resolución del problema de contorno por métodos artilleros. Esto no ocurre con los métodos de

¹Disponible en <http://indy.cs.concordia.ca/auto/>

colocación ni con los de diferencias finitas, puesto que tratan la solución en su conjunto. El inconveniente de los métodos artilleros se puede solventar introduciendo ligeras modificaciones que resultan en los llamados métodos de “descarga artillera”. La primera referencia explícita que conozco de estos métodos es [1], aunque el método utilizado en [2] presenta las características de la descarga artillera. Descripciones más modernas del método pueden encontrarse en libros de Análisis Numérico como, por ejemplo, [3].

En este trabajo presento un algoritmo de descarga artillera en coordenadas intrínsecas, variedad de los métodos artilleros que ofrece ciertas ventajas en la continuación analítica de órbitas periódicas de sistemas dinámicos conservativos [4, 5].

2 Descarga artillera

Dado un sistema diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}; \sigma), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \quad \sigma \in \mathbf{R} \quad (1)$$

dependiente de un parámetro σ , cuya solución $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; \boldsymbol{\xi}; \sigma)$ depende de σ y de las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0; \boldsymbol{\xi}; \sigma) = \boldsymbol{\xi}$. Supongamos que para un cierto valor del parámetro $\sigma = \sigma^*$, y para las condiciones iniciales $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0$, se conoce una solución periódica

$$\mathbf{x}(t; \boldsymbol{\xi}_0; \sigma^*) = \mathbf{x}(t + T_0; \boldsymbol{\xi}_0; \sigma^*), \quad T_0 > 0$$

El teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales garantiza que la condición de periodicidad anterior se puede formular como $\mathbf{x}(T_0; \boldsymbol{\xi}_0; \sigma^*) = \boldsymbol{\xi}_0$.

El cálculo de nuevas soluciones periódicas de (1) para un valor $\sigma = \sigma^* + \Delta\sigma$ próximo al dado, se formula como el problema de contorno

$$\mathbf{x}(T; \boldsymbol{\xi}; \sigma) - \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \quad (2)$$

y consiste en calcular correcciones $\Delta\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0$ a las condiciones iniciales y $\Delta T = T - T_0$ al período tales que $\mathbf{x}(T_0 + \Delta T; \boldsymbol{\xi}_0 + \Delta\boldsymbol{\xi}; \sigma) = \boldsymbol{\xi}_0 + \Delta\boldsymbol{\xi}$. Este problema de contorno se puede resolver por los métodos llamados “artilleros” (*shooting*), que tras una primera estimación de las correcciones $\Delta\boldsymbol{\xi}$, ΔT , resuelven el correspondiente problema de valor inicial y basándose en los errores obtenidos $\mathbf{x}(T; \boldsymbol{\xi}; \sigma) - \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$ estiman nuevas correcciones.

El cálculo de las sucesivas correcciones se basa en la integración de las ecuaciones diferenciales y en el uso de algoritmos Newton-Raphson que garantizan una rápida convergencia de las iteraciones. Sin embargo en el caso de órbitas inestables cualquier error en la integración de las ecuaciones diferenciales se multiplica por una cantidad que depende del valor de los exponentes característicos, y que será mucho mayor que la unidad en el caso de órbitas muy inestables. Con objeto de no aumentar dichos errores se utiliza el método de “descarga artillera” (*multiple shooting*). Con la descarga artillera se pretende

escoger distintas condiciones iniciales a lo largo de la órbita periódica de partida y efectuar las integraciones parciales. Así, si dividimos la órbita de partida en m partes iguales de un m -simo del período $h = T_0/m$, tendremos m conjuntos de condiciones iniciales

$$\mathbf{x}(h; \boldsymbol{\xi}_i; \sigma_0) = \boldsymbol{\xi}_{i+1}$$

donde $i = 1, \dots, m$, y $\boldsymbol{\xi}_{m+1} \equiv \boldsymbol{\xi}_1$. Para un incremento dado $\Delta\sigma$ del parámetro, buscamos correcciones a dichas condiciones iniciales $\boldsymbol{\xi}_i$ y al período T_0 tales que produzcan una nueva solución periódica; esto es

$$\mathbf{x}(h + \Delta T_i; \boldsymbol{\xi}_i + \Delta\boldsymbol{\xi}_i; \sigma_0 + \Delta\sigma) = \boldsymbol{\xi}_{i+1} + \Delta\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \quad (3)$$

cuyos desarrollos en serie de Taylor producen el sistema

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(h; \boldsymbol{\xi}_i; \sigma_0); \sigma_0) \Delta T_i + \left(\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{x} \Delta\boldsymbol{\xi}_i + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \sigma} \Delta\sigma \right) - \Delta\boldsymbol{\xi}_{i+1} = \boldsymbol{\xi}_{i+1} - \mathbf{x}(h; \boldsymbol{\xi}_i; \sigma_0) \quad (4)$$

donde $\Delta\boldsymbol{\xi}_{m+1} \equiv \Delta\boldsymbol{\xi}_1$, y tando el gradiente $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{x}$ como la derivada parcial $\partial \mathbf{x} / \partial \sigma$, deben evaluarse en $\mathbf{x}(h; \boldsymbol{\xi}_i; \sigma_0)$.

2.1 Sistemas con integrales

Si el sistema (1) admite una integral $\psi(\mathbf{x}; \sigma) = E$, debemos añadir la restricción $\psi(\boldsymbol{\xi}; \sigma) = E$ a la condición de periodicidad dada por la ecuación (2). Por lo tanto, el sistema fundamental (4) debe completarse con las m ecuaciones $\psi(\boldsymbol{\xi}_i + \Delta\boldsymbol{\xi}_i; \sigma_0 + \Delta\sigma) = E_0 + \Delta E$ que en primer orden se escriben como

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}_i} \psi \cdot \Delta\boldsymbol{\xi}_i + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \Delta\sigma = \Delta E. \quad (5)$$

El sistema formado por las ecuaciones (4) y (5) se puede resolver en función de $\Delta\sigma$ (o ΔE) como un sistema de $m \times (n+1)$ ecuaciones con $m \times n + m$ incógnitas $\Delta\boldsymbol{\xi}_i, \Delta T_i$; pero, en general, dicho sistema estará indeterminado. El procedimiento habitual resuelve dicho sistema en superficies de sección normales al flujo, evitando así desplazamientos tangentes que resultan en la misma solución de partida.

3 Coordenadas intrínsecas

En lo que sigue resulta conveniente utilizar vectores tridimensionales, por lo que reemplazaré \mathbf{x} por $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ sin lugar a confusión; además, los vectores se utilizarán como matrices columna cuando convenga.

Así, el sistema fundamental (4) se formula ahora como

$$\Delta T_i \dot{\mathbf{x}}_i(h) + \Delta \mathbf{x}_i(h) - \Delta \boldsymbol{\xi}_{i+1} = \boldsymbol{\xi}_{i+1} - \mathbf{x}_i(h) \quad (6)$$

$$\Delta T_i \mathbf{F}(\mathbf{x}_i(h), \dot{\mathbf{x}}_i(h); \sigma_0) + \Delta \dot{\mathbf{x}}_i(h) - \Delta \dot{\boldsymbol{\xi}}_{i+1} = \dot{\boldsymbol{\xi}}_{i+1} - \dot{\mathbf{x}}_i(h) \quad (7)$$

donde, para abreviar, se emplea la notación $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}(t; \boldsymbol{\xi}_i, \dot{\boldsymbol{\xi}}_i; \sigma_0)$, $\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \dot{\mathbf{x}}(t; \boldsymbol{\xi}_i, \dot{\boldsymbol{\xi}}_i; \sigma_0)$, y se han introducido los desplazamientos variacionales

$$\Delta \mathbf{x}_i(t) = \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{x} \Delta \boldsymbol{\xi}_i + \nabla_{\dot{\boldsymbol{\xi}}} \mathbf{x} \Delta \dot{\boldsymbol{\xi}}_i + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \sigma} \Delta \sigma \quad (8)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \dot{\mathbf{x}} \Delta \boldsymbol{\xi}_i + \nabla_{\dot{\boldsymbol{\xi}}} \dot{\mathbf{x}} \Delta \dot{\boldsymbol{\xi}}_i + \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \sigma} \Delta \sigma \quad (9)$$

que estarán evaluados en la solución $\mathbf{x}_i(t)$, $\dot{\mathbf{x}}_i(t)$.

El paso de coordenadas cartesianas a intrínsecas se hace mediante las matrices de rotación

$$\mathbf{R} = (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})^T, \quad (10)$$

donde el superíndice T significa trasposición, y sus elementos son las proyecciones en el sistema cartesiano del triedro de Frenet

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{x}}/V, \quad \mathbf{n} = \dot{\mathbf{t}}/N, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}; \quad V = \sqrt{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}, \quad N = \sqrt{\dot{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{t}}}. \quad (11)$$

Si multiplicamos cada una de las ecuaciones (6) por las correspondientes matrices de rotación (10) obtenemos

$$\Delta T_i \mathbf{R}_i(h) \dot{\mathbf{x}}_i(h) + \mathbf{R}_i(h) \Delta \mathbf{x}_i(h) - \mathbf{R}_i(h) \Delta \boldsymbol{\xi}_{i+1} = \mathbf{R}_i(h) (\boldsymbol{\xi}_{i+1} - \mathbf{x}_i(h)) \quad (12)$$

donde $\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{R}(\mathbf{x}_i(t), \dot{\mathbf{x}}_i(t))$. Esto es,

$$\Delta T_i V_i(h) \mathbf{t}_i(h) + \mathbf{s}_i(h) - \mathbf{R}_i(h) \Delta \boldsymbol{\xi}_{i+1} = \mathbf{R}_i(h) (\boldsymbol{\xi}_{i+1} - \mathbf{x}_i(h)), \quad (13)$$

donde cada uno de los $\mathbf{s}_i = \mathbf{R}_i \Delta \mathbf{x}_i$, es un desplazamiento variacional en coordenadas intrínsecas

$$\mathbf{s}_i(t) = p_i(t) \mathbf{t} + q_i(t) \mathbf{n} + r_i(t) \mathbf{b} \quad (14)$$

3.1 Predicción tangente

En el caso de una órbita exactamente periódica, el miembro de la derecha de las ecuaciones (13) se anula idénticamente y, además, $\mathbf{R}_i(h) \equiv \mathbf{R}_{i+1}(0)$. Por tanto, las condiciones de contorno dadas por las ecuaciones (13) se formulan como

$$\Delta T_i V_i(h) \mathbf{t}_i(h) + \mathbf{s}_i(h) - \mathbf{s}_{i+1}(0) = \mathbf{0}. \quad (15)$$

El problema consiste, por tanto, en determinar las i soluciones particulares de las ecuaciones variacionales que satisfacen las condiciones de contorno (15). En forma escalar, las ecuaciones (15) se formulan como ($i = 1, \dots, m$)

$$\Delta T_i V_i(h) + p_i(h) - p_{i+1}(0) = 0, \quad (16)$$

$$q_i(h) - q_{i+1}(0) = 0, \quad (17)$$

$$r_i(h) - r_{i+1}(0) = 0, \quad (18)$$

Limitaré mi análisis a aquellos sistemas dinámicos que se determinan a partir de una función lagrangiana del tipo $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) + W(\mathbf{x})$, donde la función escalar W y la vectorial \mathbf{A} pueden depender de uno o más parámetros. Dichos sistemas son conservativos y tienen la propiedad de que las variaciones tangentes p se desacoplan de las normales q y binormales r [4]. La solución general del sistema lineal que acopla los desplazamientos normales y binormales se obtiene como

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{M}_i(t) \boldsymbol{\alpha}_i + \Delta\sigma \boldsymbol{\eta}_i(t) \quad (19)$$

donde $\mathbf{y}_i(t) = (q_i(t), r_i(t), \dot{q}_i(t), \dot{r}_i(t))^T$,

$$\mathbf{M}_i(t) = \begin{pmatrix} q_i^{\text{I}}(t) & q_i^{\text{II}}(t) & q_i^{\text{III}}(t) & q_i^{\text{IV}}(t) \\ r_i^{\text{I}}(t) & r_i^{\text{II}}(t) & r_i^{\text{III}}(t) & r_i^{\text{IV}}(t) \\ \dot{q}_i^{\text{I}}(t) & \dot{q}_i^{\text{II}}(t) & \dot{q}_i^{\text{III}}(t) & \dot{q}_i^{\text{IV}}(t) \\ \dot{r}_i^{\text{I}}(t) & \dot{r}_i^{\text{II}}(t) & \dot{r}_i^{\text{III}}(t) & \dot{r}_i^{\text{IV}}(t) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

es un conjunto completo de soluciones particulares del sistema variacional homogéneo, que se integran a partir de las condiciones iniciales $\mathbf{M}_i(0) = \mathbf{I}_4$; $\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_i^{\text{I}}, \alpha_i^{\text{II}}, \alpha_i^{\text{III}}, \alpha_i^{\text{IV}})^T$ son constantes arbitrarias de integración, y $\boldsymbol{\eta}_i(t) = (q_i^{\text{V}}(t), r_i^{\text{V}}(t), \dot{q}_i^{\text{V}}(t), \dot{r}_i^{\text{V}}(t))^T$ es una solución particular del sistema variacional no homogéneo, que se integrará para las condiciones iniciales $\boldsymbol{\eta}_i(0) = \mathbf{0}$.

En cada caso i la ecuación (19) verificará las condiciones de contorno

$$\mathbf{y}_i(h) - \mathbf{y}_{i+1}(0) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (21)$$

para ciertos valores $\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}_i^*$ de las constantes de integración. Dichos valores $\boldsymbol{\alpha}_i^*$ se resolverán en función de $\Delta\sigma$ del sistema lineal de $4 \times m$ ecuaciones con $4 \times m$ incógnitas

$$\mathbf{M}_i(h) \boldsymbol{\alpha}_i - \mathbf{I}_4 \boldsymbol{\alpha}_{i+1} = -\Delta\sigma \boldsymbol{\eta}_i(h), \quad i = 1, \dots, m \quad (22)$$

donde $\boldsymbol{\alpha}_{m+1} \equiv \boldsymbol{\alpha}_1$.

Con los valores $\boldsymbol{\alpha}_i^*$ se calculan los desplazamientos \mathbf{s}_i que satisfacen las condiciones de contorno (15) y las correcciones requeridas de las condiciones iniciales se obtienen de

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\xi}_i &= \mathbf{R}_i^{\text{T}}(0) \mathbf{s}_i(0) \\ \Delta\dot{\boldsymbol{\xi}}_i &= \dot{\mathbf{R}}_i^{\text{T}}(0) \mathbf{s}_i(0) + \mathbf{R}_i^{\text{T}}(0) \dot{\mathbf{s}}_i(0) \end{aligned} \quad (23)$$

Las correcciones ΔT_i al período se calculan de las ecuaciones (16) mediante

$$\Delta T_i = \frac{p_{i+1}(0) - p_i(h)}{V_i(h)} \Rightarrow h_i = h + \Delta T_i \quad (24)$$

3.2 Correcciones isoparamétricas

Como la predicción es sólo tangente, aún para valores $\Delta\sigma$ pequeños suele ocurrir que la solución calculada no sea exactamente periódica, resultando necesario efectuar correcciones. En este caso el miembro de la derecha de las ecuaciones (13) ya no se anula. Además, $\mathbf{R}_i(h_i) \neq \mathbf{R}_{i+1}(0)$. Sin embargo, para soluciones próximas a una periódica podemos suponer que la diferencia $\Delta\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i(h_i) - \mathbf{R}_{i+1}(0)$ es del mismo orden que las correcciones buscadas y, por tanto, en primer orden despreciaremos $\Delta\mathbf{R}_i \cdot \Delta\xi_{i+1}$, haciendo $\mathbf{R}_i(h_i) \Delta\xi_{i+1} \approx \mathbf{R}_{i+1}(0) \Delta\xi_{i+1} = \mathbf{s}_{i+1}(0)$. Entonces, las ecuaciones (13) se escriben ahora

$$\Delta T_i V_i(h_i) \mathbf{t}_i(h_i) + \mathbf{s}_i(h_i) - \mathbf{s}_{i+1}(0) = \mathbf{R}_i(h_i) (\xi_{i+1} - \mathbf{x}_i(h_i)), \quad (25)$$

y el procedimiento para calcular los desplazamientos \mathbf{s}_i , $\dot{\mathbf{s}}_i$, es completamente análogo al empleado en la predicción tangente. Las ecuaciones (22) se mantienen, pero ahora

$$\boldsymbol{\eta}_i = (\mathbf{n}_i, \mathbf{b}_i, \dot{\mathbf{n}}_i, \dot{\mathbf{b}}_i)^\top (\mathbf{x}_i - \xi_{i+1}) + (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{n}_i, \mathbf{b}_i)^\top (\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\xi}_{i+1}). \quad (26)$$

Nótese que, ahora, las correcciones no están motivadas por una variación $\Delta\sigma$ del parámetro (o ΔE), por lo que sólo se tratará con la parte homogénea de las ecuaciones variacionales.

Las correcciones a las condiciones iniciales se obtienen de las ecuaciones (23), mientras que la corrección al período será igualmente $\Delta T = \sum_{i=1}^m \Delta T_i$ donde, ahora,

$$\Delta T_i = \frac{(\xi_{i+1} - \mathbf{x}_i(h_i))^\top \mathbf{t}_i(h_i) + p_{i+1}(0) - p_i(h_i)}{V_i(h_i)} \quad (27)$$

4 Aplicación

Como ilustración, utilizo el algoritmo descrito anteriormente para la continuación de una familia de órbitas periódicas del problema restringido circular de tres cuerpos. He escogido el valor $\mu = 2.528 \times 10^{-5}$, correspondiente al sistema Júpiter-Europa.

La familia en cuestión se bifurca verticalmente de la familia de órbitas ecuatoriales retrógradas (familia f en la notación de Strömgren) en la resonancia 3:13; esto es, la órbita retrógrada plana ha completado 13 revoluciones alrededor de Europa en el mismo tiempo que Europa ha completado 3 revoluciones alrededor de Júpiter. Las órbitas tridimensionales de la familia bifurcada repiten su trayectoria después de $13 - 3 = 10$ ciclos o períodos nodales o estroboscópicos. La figura 1 muestra el diagrama de estabilidad de la familia, donde se utilizan dos índices de estabilidad b_1 , b_2 tales que una órbita periódica es estable (en la aproximación lineal) cuando ambos índices son reales y de valor absoluto menor que 2.

Como se aprecia en la figura 1, la familia nace en $C = 3.00003$ con órbitas estables y existe para valores crecientes de la constante de Jacobi. En $C = 3.00029$ las órbitas

pasan a ser inestables, aumentando rápidamente la inestabilidad hasta alcanzar un valor máximo $b_1 \approx 300\,500$ en $C = 3.00140$. Tras un breve intervalo $3.00191 < C < 3.00194$ donde los índices de estabilidad toman valores complejos, la familia alcanza un punto de reflexión en $C = 3.00238$. A partir de ahí, la familia continúa para valores decrecientes de la constante de Jacobi, y termina en $C = 3.00112$ en una órbita elíptica con período mitad.

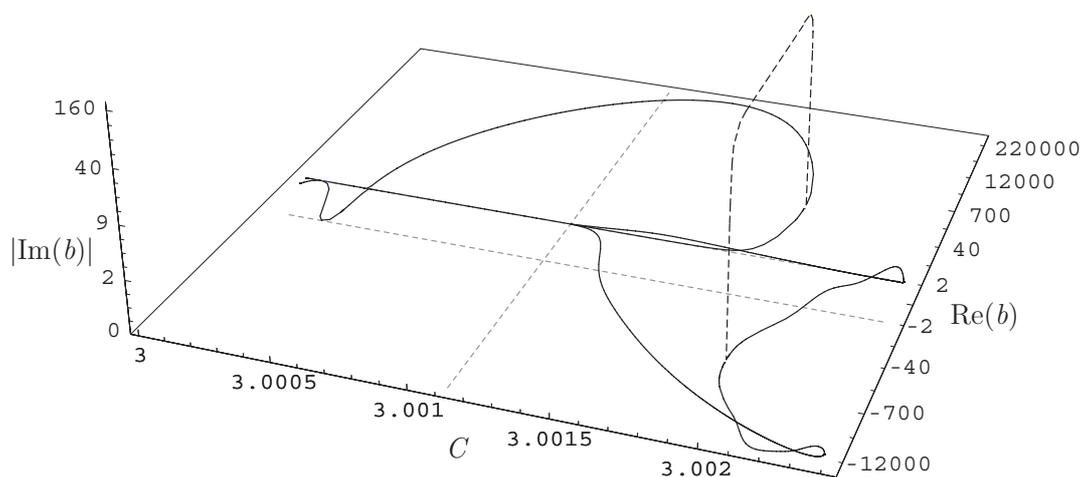


Figura 1.— Diagrama de estabilidad. La recta de trazos en $C = 3.0011$ marca la terminación de la familia.

La figura 2 muestra varias órbitas en puntos notables de la familia; de izquierda a derecha y de arriba a abajo: paso a inestabilidad, máxima inestabilidad, punto de reflejo, órbita próxima a la terminación de la familia.

La continuación de la familia utilizando la descarga artillera con $n = 5$ se realiza con suma facilidad y mantiene una periodicidad en el orden de 10^{-12} . Sin embargo, la continuación resulta impracticable para un método artillero de tiro simple: incluso rebajando la la condición de periodicidad a 10^{-9} , se requieren $\Delta C < 10^{-7}$ cuando los valores del índice de estabilidad se aproximan a 10^5 .

Agradecimientos

El Ministerio de Educación me ha financiado parcialmente el desarrollo de este trabajo a través de sus proyectos ESP2004-04376 y ESP2005-07107.

Referencias

- [1] Morrison, D.D., Riley, J.D., Zancanaro, J.F., “Multiple Shooting Method for Two-Point Boundary Value Problems,” *Communications of the ACM*, Vol. 5, 1962, pp. 613–614.

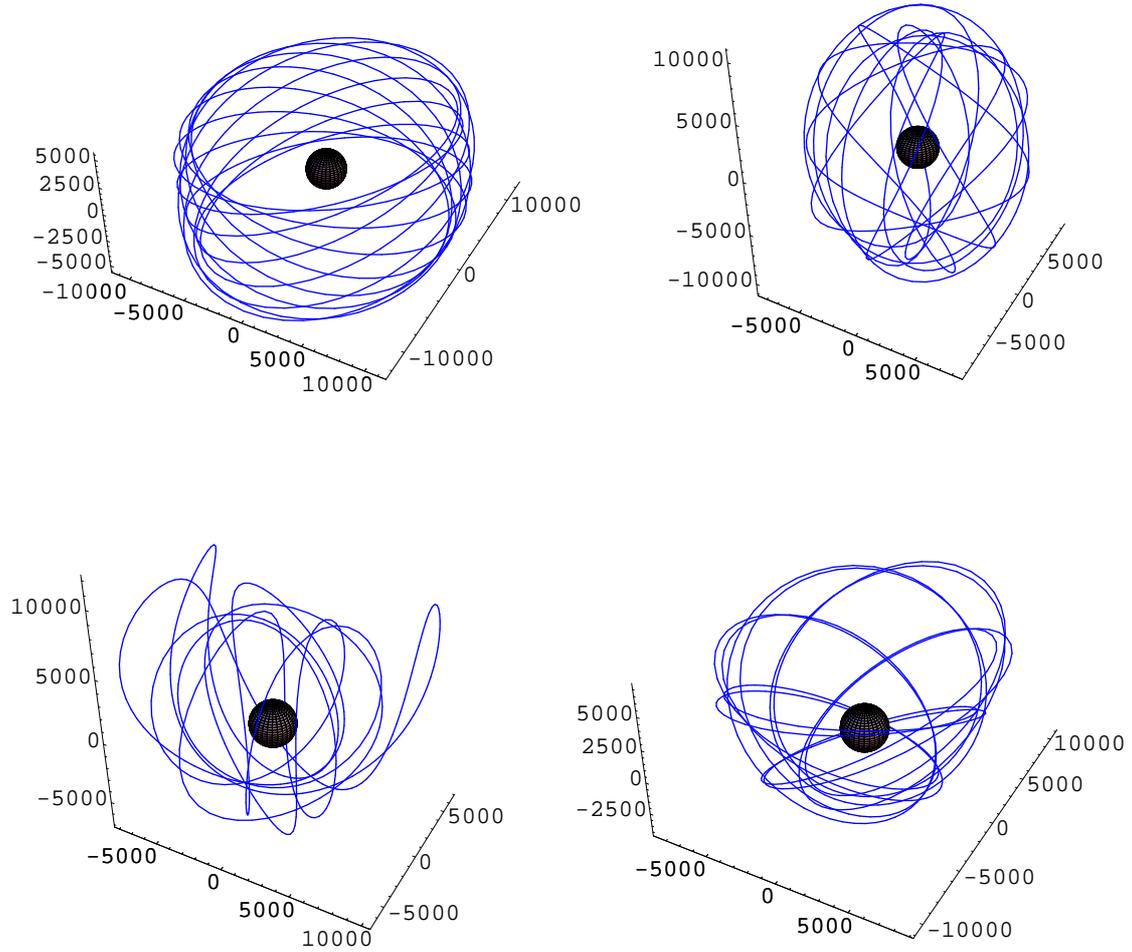


Figura 2.— Órbitas periódicas para, de izquierda a derecha y de arriba a abajo, $C = 3.00029$, $C = 3.00140$, $C = 3.00238$, y $C = 3.00113$.

- [2] Haselgrove, C.B., Hoyle, F., “A Mathematical Discussion of the Problem of Stellar Evolution, with Reference to the Use of an Automatic Digital Computer,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 116, 1956, pp. 515–526.
- [3] Stoer, J., Bulirsch, R., *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [4] Deprit, A., “Intrinsic Variational Equations in Three Dimensions,” *Celestial Mechanics*, Vol. 24, 1981, pp. 185–193.
- [5] Lara, M., Peláez, J., “On the Numerical Continuation of Periodic Orbits: An Intrinsic, 3-Dimensional, Differential, Predictor-Corrector Algorithm,” *Astronomy and Astrophysics*, Vol. 389, pp. 692–701.