Cuadernos de Estudios Empresariales ISSN: 1131-6985
1997, número 7, 11-25

Modelo de simulación para gestión de caja en banca

JOSÉ MARÍA CALZADA ARROYO
Y JOAQUÍN ANTONIO PACHECO BONROSTRO
EUE Empresariales de Burgos

Resumen. La nueva normativa sobre, lo que en Banca se llama coeficientes de caja, plantea un nuevo problema a las entidades de ahorro: la optimización del dinero legal disponible en cada una de sus sucursales. Nosotros hemos tratado este problema, en un principio considerando a cada sucursal por separado, interviniendo coste de oportunidad y de ruptura (dinero no satisfecho a clientes); y finalmente tratando a toda la red de sucursales en su conjunto, con lo que incorporamos a los anteriores, el coste de transporte de dinero entre las diversas sucursales. Para la resolución de este problema se ha utilizado las técnicas de Simulación, con implementaciones en Pascal y Fortran, combinándolas con resultados obtenidos utilizando Programación Estocástica.

1. INTRODUCCIÓN

La optimización de los recursos en dinero legal (billetes del Banco de España y moneda emitida por el Estado Español), disponible para atender las necesidades de los clientes tanto en las sucursales como cajeros automáticos, es un problema que se ha planteado a las entidades financieras (Bancos y Cajas de Ahorro), desde el cambio de regulación legal sobre el coeficiente de caja establecido el banco emisor, en normativa refundida en la circular 2/90 (modificada por las circulares 5/92, 10/92, 8/93 y 10/93)

Dicho coeficiente de caja se define como aquella parte del activo de las entidades bancarias y de ahorro (y en general los intermediarios financieros) que deben tener inmovilizado y disponible según establece la ley.

La regulación sobre el coeficiente de caja de los intermediarios financieros se basa en la ley 26/1983, del 26 de diciembre. En ella se establece en el artículo 4.º: «Los coeficientes de caja se materializarán en los activos que determine el Ministerio de Economía y Hacienda entre los siguientes: billetes del Banco de España, moneda metálica emitida por el Estado Español y depósitos, remunerados o no, en el Banco de España, o cualquier otro instrumento que utilice, esté remunerado o no, para detraer liquidez del sistema Financiero.» El desarrollo de esta normativa, a través de la orden del 26 de diciembre de 1983, autoriza al Banco de España para la regulación del coeficiente de caja.

El Banco de España, en las circulares posteriores a la normativa anterior, consideró dos tramos en el coeficiente de caja, uno remunerado y otro no. Por otra parte consideró como activos computables para su cobertura los billetes y monedas del Banco emisor (dinero de curso legal) que tenían las entidades financieras en su poder y que utilizaban para atender las necesidades de ventanilla (demanda de dinero legal por parte de los clientes en sucursales y cajeros automáticos). El tramo sin remunerar, en el cual estaba incluido el dinero legal, ha variado, pero en ningún caso ha sido inferior al 2% de los recursos pasivos (circular 10/1993, del 17 de septiembre).

Como las necesidades de dinero legal de una entidad para atender las necesidades de ventanilla eran inferiores al 2%, teniendo materializado este porcentaje de sus recursos pasivos en dinero legal, cumplían con una doble finalidad: cumplir la *normativa del coeficiente de caja y atender las necesidades de ventanilla*. Por tanto, el problema que se plantea en este trabajo no tenía sentido, pues no existía coste de oportunidad del dinero legal inmovilizado en distintas sucursales o cajeros automáticos.

La nueva normativa que se encuentra refundida en la circular 2/1990, del 27 de febrero, no considera como activo computable a efectos del coeficiente de caja el dinero legal, por tanto, este dinero, que las entidades tienen inmovilizado para atender a sus clientes, tiene un coste de oportunidad. En este contexto adquiere plena justificación el estudio del siguiente problema: optimizar la cantidad de dinero legal que las entidades financieras necesitan para atender a su clientela.

Para tratar este problema vamos a hacer uso de las técnicas de Simulación, que constituyen una herramienta eficaz dentro de las técnicas de la Investigación Operativa para el tratamiento de determinados problemas. La razón que nos han hecho optar por estas técnicas a la hora de abordar este problema es la siguiente: muchos de los parámetros y datos que intervienen en el problema (tiempos entre llegadas, cantidades demandadas o entregadas) no son conocidos de antemano, ni siquiera fijos, a lo sumo se pueden hacer conjeturas más o menos razonables acerca de la distribución de probabilidad de los valores que pueden tomar. Por consiguiente, una vez que se formula o modeliza el problema en términos matemáticos, como se verá mas adelante, es muy difícil tratar de resolverlo de forma analítica utilizando técnicas clásicas de Programación Matemática (en este caso Programación Estocástica).

En este contexto las técnicas de Simulación resultan ser más flexibles, ya que no requieren que el problema se ajuste a unos determinados modelos previamente estudiados para su posible resolución. Los requerimientos fundamentales, es que se conozcan o al menos se puedan deducir las distribuciones de probabilidad de los diferentes datos que intervienen, y fundamentalmente, que se diseñe adecuadamente los algoritmos o programas para que simulen la secuencia de acontecimientos (llegadas, salidas, etc.) que intervienen en el problema. De esta forma se pueden incorporar al modelo los aspectos de la realidad que consideremos importantes.

En el texto de *Naylor* y otros (1984), se pueden encontrar algunas aplicaciones de las técnicas de simulación a problemas económicos. En el trabajo de GARCÍA y ARAGÓN (1993), se utilizan estás técnicas en problemas de bolsa.

En nuestro caso, además, combinaremos la Simulación con la Programación Estocástica: se va simplificar la formulación del problema completo con objeto de que pueda ser fácilmente resolvible de forma analítica. La solución del problema simplificado, no tiene porque ser la solución del problema inicial; sin embargo puede suponer una *buena* aproximación, que se usará como punto de partida para, en una segunda fase, resolver el problema utilizando la Simulación. De esta forma evitamos realizar simulaciones innecesarias con diferentes valores de dinero legal inicial, como se explicará mas adelante.

El trabajo se estructura de la siguiente manera: en el apartado 2, se hace un planteamiento y formulación exhaustiva del problema; en el apartado 3, se aclaran algunos puntos de esta formulación; en el apartado 4 se diseña un algoritmo que simula el comportamiento del sistema; en el apartado 5 se hace un análisis del la formulación del problema para obtener una solución inicial; en el apartado 6 se propone un ejemplo numérico en el que se plantea un problema concreto, para el que se obtienen una aproximación inicial de la solución que se va mejorando o afinando con el algoritmo de simulación.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema va a consistir en la minimización de una función de costes cuyas componentes son:

- Coste de Oportunidad originado porque el dinero legal en ventanilla es improductivo, al no estar invertido en activos con rendimiento positivo
- Coste de Transporte originado por los movimientos de dinero entre oficinas y cajeros automáticos en caso de escasez o exceso en alguno de ellos.
- Coste de carencia de dinero o Ruptura de Stocks como consecuencia del coste que supone a la entidad una eventual carencia de dinero legal cuando un cliente se lo solicita (pérdida de imagen, clientela...).

Para la resolución del problema se irán analizando distintos modelos que de forma progresiva se aproximen al modelo real.

En primer lugar se plantea un modelo simplificado en el cual se considera cada oficina o cajero de forma individual. La función a minimizar está formada exclusivamente por el coste de oportunidad de la cantidad de dinero legal disponible, de forma que la oficina o cajero nunca se quede sin dinero (no haya ruptura) o que esto ocurra con una probabilidad mínima. Se supone que la oficina o cajero se abastece de dinero al comienzo de cada día, por tanto no interviene el coste de transporte. El coste de oportunidad es función lineal de la cantidad de dinero. Bajo estos supuestos una primera aproximación al problema consiste en minimizar la cantidad de dinero que la oficina debe disponer a principio del día para que pueda atender las necesidades de ventanilla.

El problema por tanto se puede empezar a plantear de la forma siguiente; sean:

n	=	nº de 'cajeros' u oficinas;
pi	=	nº máximo de clientes que piden dinero del cajero i;
mi	=	nº de clientes que ingresan dinero al cajero i;
QDij	=	Cantidad demandada por el cliente j al cajero i;
QEij.	=	Cantidad entregada por el cliente j' al cajero i;
QDi	=	Cantidad demandada por el cajero i al cabo del día (o del horizonte de tiempo que se defina)
QEi	=	Cantidad entregada en el cajero i al cabo del día;
Q0i	=	Cantidad inicial de dinero en el cajero i al comienzo del día;

en todos estos conceptos los índices varían i=1..n, j=1..pi, j'=1..mi. Se tiene que:

$$QD_i = \sum_{j=1}^{pi} QD_{ij} \quad \text{y} \quad QE_i = \sum_{j'=1}^{mj} QE_{ij'}, \forall i = 1..n;$$

En principio se trataría de minimizar el dinero que debe haber en la caja al principio del día, esto es

$$\min Q0i \quad (1)$$

con la condición de que en cada momento la cantidad que haya en el cajero sirva para atender a los clientes que vengan a solicitar dinero, es decir, que en cada momento se verifique que

$$Q0i - QDi(t + QEi(t > 0 \quad i=1..n \quad (2)$$

siendo $QDi(t$ y $QEi(t$ el total de dinero sacado y entregado en el cajero i hasta el instante t respectivamente (t tomará valores en el horizonte temporal).

Este primer planteamiento pone de manifiesto la necesidad de incorporar el concepto de *tiempo* al problema. Para ello, se introducirán ahora las siguientes variables:

$td_1(i, td_2(i, ..., tdpi(i$: los tiempos de llegadas, de las demandas 1,2,..,pi;

y de la misma forma

$te_1(i, te_2(i, ..., temi(i$: los tiempos de llegadas, de las entregas 1,2,..,*mi*.

La restricción de que en cada instante haya 'liquidez', se puede expresar de la siguiente forma:

$$Q_{Oi} - \sum_{tdj<t} QD_{ij} + \sum_{tej<t} QE_{if} \geq 0, \forall t \in (0, HT) \quad (3)$$

siendo HT el Horizonte de Tiempo a considerar.

En principio, tal como está planteado el problema, habría infinitas restricciones, $t \in$ (0,HT), pero una simple revisión del problema permite despreciar aquellos intervalos de tiempo 'entresucesos' en los que no varían las cantidades de dinero. Por tanto, sólo intervendrán las restricciones correspondientes a los tiempos de entrada o salida de dinero, es decir, $td_1(i, ..., tdpi(i;\ te_1(i, ..., temi(i$. En total hay $pi+mi$ restricciones:

$$Q_{oi} - \sum_{td_k^{(i} \leq td_j^{(i}} QD_{ik} + \sum_{te_k^{(i} \leq td_j^{(i}} QE_{ik} \geq \forall j = 1..p_i; \quad (4)$$

$$Q_{oi} - \sum_{td_k^{(i} \leq te_j^{(i}} QD_{ik} + \sum_{te_k^{(i} \leq te_j^{(i}} QE_{ik} \geq 0, \forall j' = 1..m_i; \quad (5)$$

Como *QDij, QEij* > 0, si se cumplen las restricciones correspondientes a los tiempos de salida de dinero, también se cumplirán para los de entrada. Por tanto, únicamente se consideran aquellas restricciones que correspondan a los tiempos de salida.

El problema queda de la siguiente forma:

$$min\ Q0i\ /$$

$$Q_{oi} - \sum_{td_k^{(i} \leq td_j^{(i}} QD_{ik} + \sum_{te_k^{(i} \leq td_j^{(i}} QE_{ik'} \geq 0, \forall j = 1..p_i; \quad (6)$$

donde la variable *Q0i*, y los valores de *QDik, QEik'* son positivos $k = 1..pi\ k' = 1..mi;\ \forall\ i = 1..n$.

Si el problema fuera determinístico, es decir, si los valores de *QDik, QEik'*, *tdk(i,tek'(i,* fueran fijos, entonces la solución del problema sería obvia:

$$Q^*_{Oi} = \max_{j=1..p_i} \left\{ \sum_{td_k^{(i} \leq td_j^{(i}} QD_{ik} - \sum_{te_k^{(i} \leq td_j^{(i}} QE_{ik'} \right\} \quad (7)$$

Sin embargo en la realidad *QDik*, *QEik'*, *tk(i,tk'(i'* no son valores fijos sino variables con valores aleatorios. Por consiguiente, en el problema hay que resolver dos cuestiones:

A) Intentar determinar las distribuciones de estas variables aleatorias,

B) Resolver el problema de programación estocástica asociado.

Para la cuestión B) se pueden hacer los siguientes planteamientos:

1) min *Q0i* / (8)

$$\Pr\left\{ Q_{Oi} - \sum_{td_k^{(i} \le td_j^{(i}} QD_{ik} - \sum_{te_{k'}^{(i} \le td_j^{(i}} QE_{ik'} \ge 0, j = 1..p_i \right\} \ge 1 - \alpha$$

$$2)\min Q_{Oi} + \mu \cdot \Pr\left\{ \exists j = 1..p_i / Q_{oi} - \sum_{td_k^{(i} \le td_j^{(i}} QD_{ik} + \sum_{te_{k'}^{(i} \le td_j^{(i}} QE_{ik'} \ge 0 \right\}. \quad (9)$$

3) min $Q0i + \beta \cdot E(\mathrm{l})$ [1] (10)

siendo:

μ	=	Factor de corrección que se produce cuando ha habido ruptura,
l	=	Variable aleatoria que indica la cantidad de dinero demandada no satisfecha en el horizonte de tiempo considerado,
E(l)	=	Esperanza de l,
ß	=	Coste por Unidad de Ruptura.

En el planteamiento 1) al considerar las demandas (entregas) como variables aleatorias, se fijan unos niveles de confianza de forma que la solución del problema garantice la no ruptura con dicha probabilidad. En 2) y 3) se incorpora a la función de costes el posible incumplimiento de las restricciones.

En cuanto a la cuestión A) se trata de hallar las distribuciones de *QDik, QEik', tdk(i,tek'(i, k*=1..*pi, k'*=1..m_i. En una primera aproximación a este problema se consideran las siguientes hipótesis:

— Como el comportamiento de los diversos clientes es independiente, se puede suponer independencia entre todos los *QDik* y *QEik'* entre sí.

— Por otra parte se puede suponer también que el comportamiento en cuanto a la cantidad demandada no dependerá del momento del día, (otra cosa es que las demandas sean más o menos frecuentes). Por tanto se considerará que las *QDik* son variables aleatorias igualmente distribuidas independientes entre sí y con las *tk(i*. Lo mismo se puede decir en cuanto a las *QEik'* y las *tek'(i*.

— En cuanto a los tiempos *tdk(i* (y las *tek'(i*) es evidente la independencia una vez supuesta la de los individuos. Se definen *dj(i* de la siguiente manera:

d1(i=td1(i, dj(i=tdj(i- tdj-1(i, para *j*>1; estas nuevas variables, que indican el tiempo entre llegadas, son variables aleatorias independientes con distribución exponencial, sistema de llegadas Markoviano.

— Lo que no se puede suponer es que sean igualmente distribuidas, ya que es obvio que las frecuencias de las llegadas varían según el momento del día. Se supondrá que el parámetro de cada distribución será función del momento del día. Más concretamente: sea *ßj(ⁱ = E(dj(i),* entonces *ßj(i* será función de *tdj-1(i,* esto es, el tiempo esperado para la próxima llegada dependerá del período del día en cuestión.

— Se puede decir lo mismo para las entregas definiendo *e1(i = te1(i, ej'(i = tej'(i - tej'-1(i.* Sea *qj(i = E(ej(i),* entonces *qj(i* será función de *tej-1(i* .

Como consecuencia de la independencia de las cantidades demandadas se tiene que cualesquiera que sean las distribuciones de las *QDik,* (respectivamente *QEik'),* si el nº de llegadas j es suficientemente grande (*j* > 30) entonces, basándonos en el *Teorema Central del Límite de Laplace* [una versión muy generalizada este teorema se puede encontrar en el texto de Feller (1988)]

$$\sum_{k=1}^{j} QD_{ik}$$

siguen aproximadamente una distribución *N(j˙md(i,j1/2˙sd(i)* (11)
siendo:

md(i = Media de *QDij,*
sd(i = Desviación Típica de *QDij.*

De la misma forma :

$$\sum_{k=1}^{j'} QE_{ik}$$

siguen aproximadamente una distribución *N(j'˙me(i,j'1/2˙se(i)* (12)
siendo:
me(i = Media de *QEij,*
se(i = Desviación Típica de *QEij.*

3. BREVES COMENTARIOS AL APARTADO ANTERIOR

Nota 1

A continuación se determina como calcular el valor de la variable l, que se definió como la cantidad de dinero no satisfecha al cabo del día:

Sean $r_1, r_2, .., rti$, subconjunto de índices del conjunto $\{1,2,..pi\}$, que verifican que:

$$Q_{Oi} - \sum_{td_k^{(i} \leq td_{rs}^{(i}} QD_{ik} - \sum_{te_{k'}^{(i} \leq td_{rs}^{(i}} QE_{ik'} < 0, \quad \text{para } s = 1..t_i;$$

(es decir las demandas no satisfechas); entonces:

$$1 = -\sum_{s=1}^{t_i} \left(Q_{oi} - \sum_{td_k^{(i} \leq td_{rs}^{(i}} QD_{ik} - \sum_{te_k^{(i} \leq td_{rs}^{(i}} QE_{ik'} \right).$$

Nota 2

Aparentemente, puede parecer económicamente incongruente comparar cantidades con coste de ruptura. Pero si se considera que el coste de oportunidad es función lineal de la cantidad de dinero, el planteamiento correcto sería:

$$\min A \cdot Q_{Oi} + B + \mu \cdot \Pr\left\{ \exists j = 1..p_i / Q_{Oi} - \sum_{td_k^{(i} \leq td_j^{(i}} QD_{ik} + \sum_{te_k^{(i} \leq td_j^{(i}} QE_{ik'} \geq 0 \right\}$$

optimizar esta función es equivalente a optimizar

$$\min Q_{Oi} + (\mu / A) \cdot \Pr\left\{ \exists j = 1..p_i / Q_{Oi} - \sum_{td_k^{(i} \leq td_j^{(i}} QD_{ik} + \sum_{te_k^{(i} \leq td_j^{(i}} QE_{ik'} \geq 0 \right\}$$

por lo que el planteamiento anterior es correcto, siempre que se interprete adecuadamente el parámetro μ.

4. ALGORITMO UTILIZADO EN LA SIMULACIÓN

Una vez modelizado el problema, se expone a continuación un algoritmo (en seudocódigo), para la resolución de este problema.

4.1. Algoritmo

Se considerarán las siguientes variables:

t : tiempo en el que ha ocurrido el último suceso,
tet : tiempo en que ocurre la siguiente entrada de dinero,
tst : tiempo en que ocurre la siguiente salida de dinero,
et : tiempo entre 2 entradas consecutivas de dinero,
qe : cantidad que entra en el momento en el que se ingresa,
st : tiempo entre 2 salidas consecutivas de dinero,
qs : cantidad que se demanda,
cr : clientes que no obtienen el dinero solicitado (ruptura),
cs : clientes que sacan dinero,
ce : clientes que ingresan dinero,
ct : total de clientes que pasan al cabo del día.

Por lo expuesto anteriormente, se supondrá que las variables qe y qs se distribuyen según una normal, y las variables et y st según una exponencial.

Sean las datos de entrada:

me(t) : tiempo esperado entre dos entradas consecutivas de dinero, (media de la variable et en el instante t);
ms(t) : tiempo esperado entre dos demandas consecutivas de dinero, (media de la variable st en el instante t);
mqe : cantidad media de dinero que se ingresa (media de la variable qe);
dqe : desviación típica de la variable qe;
mqs : cantidad media de dinero que se demanda (media de la variable qs);
dqs : desviación típica de la variable qs;
HT : Horizonte de tiempo.

En realidad me y ms son parámetros que varían según el valor de t, (las demandas o entradas pueden ser más o menos frecuentes según el momento del día).

Entonces el algoritmo queda como sigue:

paso 0: *Leer los valores de me, ms, mqe, dqe, mqs, dqs, y q;*
paso 1: *Inicializar tet=0, tst=0, cs=0, cr=0, ce=0,ct=0;*
paso 2: *Generar et y st;*
paso 3: *tet=tet+et, tst=tst+st;*
paso 4: *Poner t=min{tst,tet},*
modificar me y ms según el valor de t,
si t > HT ir a 9;
paso 5: *si tet < tst entonces ir al paso 6:*
en caso contrario ir al paso 7;
paso 6: *t=tet, (llegada de cliente que ingresa)*
generar qe,
q=q+qe,

ce=ce+1,
generar et, (generar la siguiente llegada de ingreso)
tet=tet+et,
ir al paso 4;
paso 7: *t=tst (llegada de cliente que demanda),*
generar st, (generar la siguiente llegada de demanda)
tst=tst+st,
generar qs,
si qs > q entonces: cr=cr+1, (ha habido ruptura)
q = 0,
ir al paso 4,
en caso contrario ir al paso 8;
paso 8: *q=q-qs,*
cs=cs+1;
paso 9: *Escribir resultados finales cr, cs, ce, ct;*
Fin.

Existe una versión de este algoritmo programada en TURBOSPACAL a disposición de las personas interesadas.

5. APROXIMACIÓN ANALÍTICA Y DETERMINACIÓN DE UNA SOLUCIÓN INICIAL

Considérese el problema (8)

$$\min QOi/$$

$$\Pr\left\{ Q_{Oi} - \sum_{td_k^{ij} < td_j^{ij}} QD_{ik} + \sum_{te_{k'}^{ij} \le td_j^{ij}} QE_{ik'} \geq 0, j = 1..p_i \right\} \geq 1 - \alpha$$

Se define $H_j = \sum_{td_k^{ij} \le td_j^{ij}} QD_{ik} - \sum_{te_{k'}^{ij} \le td_j^{ij}} QE_{ik'}, \quad j = 1..p_1;$

es claro que:

$$\Pr\left\{H_j < Q_{Oi}, j = 1..p_i\right\} =$$
$$\Pr\left\{H_1 < Q_{Oi}\right\} \cdot \Pr\left\{H_2 < Q_{Oi} / H_1 < Q_{Oi}\right\} \cdots$$
$$\Pr\left\{H_{mi} < Q_{oi} / H_1 < Q_{Oi} \cdots H_{ni-1} < Q_{Oi}\right\} > 1 - \alpha; \quad (13)$$

por otra parte:

$$\Pr\left\{H_j < Q_{Oi} / H_1 < Q_{Oi} \cdots H_{j-1} < Q_{Oi}\right\} > \Pr\left\{H_j < Q_{Oi}\right\}, j+1..p_i; \quad (14)$$

luego

$$\Pr\left\{H_j < Q_{Oi}, j = 1..p_i\right\} > \Pr\left\{H_1 < Q_{Oi}\right\} \cdot \Pr\left\{H_2 < Q_{Oi}\right\} \cdots \Pr\left\{H_p < Q_{Oi}\right\}$$

$$\Pr\left\{H_j < Q_{Oi}, j = 1..p_i\right\} > \prod_{j=1}^{p_i} \Pr\left\{H_j < Q_{Oi}\right\} \cdot \quad (15)$$

Si las restricciones del problema exigen que:

$$\Pr\left\{H_j < Q_{Oi}, j = 1..p_i\right\} > 1 - \alpha;$$

entonces, es claro que estas se cumplirán siempre que:

$$\prod_{j=1}^{p_i} \Pr\left\{H_j < Q_{Oi}\right\} > 1 - \alpha; \quad (16)$$

y esto a su vez se cumplirá si:

$$\Pr\left\{H_j < Q_{Oi}\right\} > (1-\alpha)^{1/ni}, j = 1..n_i \quad (17)$$

Como se comenta en el trabajo, si los tiempos *tdj* y te_j de demandas o entregas fueran conocidos, y por consiguiente se pudiera conocer el número de elementos que intervienen en el sumatorio de *Hj* entonces estas variables seguirían una distribución normal; concretamente

$$H_j \to N(j \cdot mqd^{(i} - j' \cdot mqe^{(i}, (j \cdot sd^{(i} + j \cdot se^{(i})^{1/2}), j = 1..p_i \quad (18)$$

siendo:

mqd(i	=	Cantidad Media demandada,
sd(^{i}	=	Desviación Típica de esta media,
mqe(i	=	Cantidad Media entregada,
se(i	=	Desviación Típica de esta media,
j'	=	núm. de entregas antes de la demanda j;

para abreviar se define *Mj= j˙mqd(i-j'˙mqe(i* y *Sj= (j˙sd(i+j'˙se(i)1/2).*

En este caso sea a el valor que cumple que $(1-\alpha)^{1/ni} = 1-\alpha$, se tratará de buscar el menor *Q0i* que cumpla que

$$\Pr\{Hj < Q0i\} > 1 - \alpha,\ j = 1..p_i \quad (19)$$

o bien

$$\Pr\{Z < (Q0i - Mj)/Sj\} > 1 - \alpha;\ j = 1..pi\text{ ; siendo Z una normal N(0,1)}$$

Sea za, tal que P$\{N(0,1) > za\}$ = a, entonces se debe cumplir que:

$$za < (Q0i - Mj)/Sj;\ j = 1..ni \quad (20)$$

luego

$$Q0i > Mj + Sj \cdot za,\ j = 1..ni. \quad (21)$$

En principio el resultado al que se llega en (21) solo establecería una condición suficiente y en el caso de que sean conocidas los tiempos de llegada de los clientes y por consiguientes los valores de *j'* correspondientes a cada *j.* En cualquier caso, según se ha comentado en la introducción, de lo que se trata en este apartado es de establecer un valor inicial de *Q0i* a partir del cual trabajar en la fase simulación. Por tanto una primera aproximación a la solución de este problema es tomar:

$$Q0i^* = \text{máximo } \{Mj + Sj \cdot za\ ;\ j = 1..ni\}. \quad (22)$$

donde los valores de *Mj* y *Sj* se pueden calcular tomando diferentes valores estimados de los j' a partir de los valores esperados de los tiempos de entre llegadas de clientes que demandan y que entregan.

6. EJEMPLO PRÁCTICO

6.1. Datos del problema

Damos valores a los siguientes parámetros:

HT = 480 minutos,
Demanda media *mqd*= 30 unidades monetarias,
Desviación *sd* = 5
Entrega media = 50 u.m.,
Desviación se = 10,
Tiempo medio entre demandas = 1 minuto,
Tiempo medio entre entregas = 10 minutos.

Para simplificar se supondrá que el tiempo medio entre demandas o entradas no varía, es decir, que aproximadamente, se van a ir produciendo demandas cada minuto y una entrega cada diez demandas.

6.2. **Solución inicial**

Aplicando los resultados obtenidos anteriormente a estos datos, se tiene que *n i*= 480, y por tanto para determinar un valor inicial del *Q0i* mínimo que garantice que en el 90% de los casos (α = 0'10) no haya ruptura en ningún caso, tomamos:

$$Mj = j\cdot 30 - [j/10]\cdot 50,\ \text{y}\ Sj = (j\cdot 25 + 100\cdot[j/10])1/2,\ j = 1..480$$

siendo [x] la parte entera de x.

Entonces

$$a = 1 - (0.9)^{1/480} = 0.0002194 \quad \text{y} \quad 1 - a = 0.9997805,\ za = 3'351545$$

y por tanto

$$Q0i^* = \text{máximo}\ \{Mj + Sj\cdot za,\ j=1..480\} = 12.474.$$

6.3. **Resultados de la simulación**

Con estos resultados se realizan unas pruebas con el algoritmo de Simulación probando con distintas cantidades iniciales tomando como referencia inicial 12.474.

A continuación se muestran los resultados de Simulación para diversas cantidades iniciales entre 12474 y 13000: se expone una tabla con los resultados finales de la simulación (para cada cantidad se realizan 1.000 iteraciones), exponiéndose la cantidad inicial, el número de iteraciones con alguna ruptura, el total de rupturas en el conjunto de las iteraciones, y el total de las cantidades no satisfechas:

Cantidad	*Iter. ruptura*	*Total rupturas*	*Tot. Din. ruptu.*
12474	274	4515	137159.95
12500	250	4362	121558.11
12600	232	3110	94505.01
12700	192	2260	67459.34
12800	183	2095	57109.31
12900	162	1875	51129.97
13000	99	1403	42672.13

Según estos resultados, con 13000 u.m. como cantidad inicial todos los clientes quedarían satisfechos (no habría ninguna ruptura) en mas del 90% de los días. Por consiguiente esta es el valor que estábamos buscando.

Se hace, a continuación, un ajuste por mínimos cuadrados, para estimar la relación lineal entre la cantidad inicial y las otras variables:

Total Dinero Ruptura = 2306679.4871 - 175.05297·Cant.Ini.
(*r2 = 0.90979*)
Total Rupturas = 77164.10095 - 5.80535·Cantid.Ini.
(*r2 = 0.90468*)
Iterac.con Ruptura = 3871.92375 - 0.28898·Cantid.Ini.
(*r2 = 0.95605*)

7. CONCLUSIONES

La complejidad de muchos problemas financieros, como el que se ha planteado en este trabajo, hace que muchos de los modelos de Programación Matemática sean insuficientes para tratar estos problemas. Sólo a costa de una excesiva simplificación de la realidad, dejando de lado aspectos que pueden ser importantes, podemos tratarlos de forma analítica. Sin embargo este alejamiento de la realidad hace poner en duda muchas veces la *calidad* de la solución obtenida o incluso su posible puesta en práctica o aplicación.

En estos casos la Simulación supone una técnica alternativa *eficaz* en el sentido de que permite incorporar los aspectos de la realidad que sean significativos en el problema sin que este deje de ser tratable. De esta forma que la solución óptima del modelo simulado es también una aproximación muy buena del óptimo real, cuando no coinciden.

Además en este trabajo, se propone una estrategia para calcular un valor inicial (12474), con el que empezar a realizar las simulaciones, muy aproximado (4,04% de error) al óptimo final obtenido (13000), evitando *dar palos de ciego* con el consiguiente ahorro en tiempo de computación.

En trabajos posteriores se tratará una ampliación de este problema en el que se considerarán los cajeros de forma conjunta y no individual contemplando el posible transporte de dinero entre cajeros.

BIBLIOGRAFÍA

BANCO DE ESPAÑA. Circulares del Banco de España: 18/1987, del 26 de mayo; 2/1988, del 13 de enero; 10/1988, del 22 de julio; 2/1989, del 31 de enero; 12/1989, del 7 de julio; 21/1989, del 21 diciembre; 2/1990, del 27 de febrero; 5/1992, del 30 de enero; 10/1992, del 26 de mayo; 8/1993, del 28 de junio, y 10/1993, del 17 de septiembre.

B.O.E. Ley 26/1983, del 26 de Diciembre (BOE del 27).

CALDERBANK, V. J. (1987): «Programación en FORTRAN (y Fortran 77)». Gustavo Gili. S. A.

CARROLL, W. (1985): «Técnicas de Simulación en Turbo-PASCAL». McGraw-Hill.

DINIC, E. A. (1970): *Algorithm for Solution of a Problem of Maximal Flow in a Network with Power Estimation*. Soviet Math. Dokl. 11, 1.277-1.280.

FELLER, W. (1988): *Introducción a la teoría de Probabilidades y sus aplicaciones»* (vols. I y II). *Limusa.*

GARCÍA-GÜEMES, A., y ARAGÓN, A. «Simulación de una cartera especulativa de renta fija». *Actualidad Financiera.* Año 1993, núm. 33. Semana del 13 al 19 de septiembre.

HU, T. C. (1982) «Combinatorial Algorithms» Addison-Wesley.

INFANTE, R. (1977) «Métodos de Programación Matemática». UNED.

LASALA, M. P. y MILLÁN, J. M. «Lenguaje Fortran para IBM/PC y compatibles». Librería Central.

NAYLOR, T. H., BALINTFY, J. L., BYRDUCK, D. S., y CHU, K. (1984): «Técnicas de Simulación en Computadoras». Limusa.

PARDO, L., FELIPE, A., y PARDO, J. A. (1990): «Programación Lineal Entera». Díaz de Santos.

SANCHÍS, F. J., y MORALES, A. (1984): «Programación en lenguaje PASCAL». Paraninfo.

SCHMIDT, J. W., TAYLOR, R. E. (1979). «Análisis y Simulación de sistemas Industriales». Trillas.