

# *Análisis de resultados de la rectificación secuencial mínimos cuadrados de órbitas para el satélite geoestacionario HISPASAT*

P. ROMERO <sup>1</sup>, J. M. GAMBÍ <sup>2</sup> y J. A. BALADO <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Sección Departamental de Astronomía y Geodesia. Facultad de Ciencias  
Matemáticas. Universidad Complutense. Madrid

<sup>2</sup> Departamento de Matemáticas. Escuela Politécnica Superior. Universidad  
Carlos III. Madrid

## **RESUMEN**

En este trabajo se presenta un método de determinación de órbitas a partir de un conjunto de medidas de localización para satélites geoestacionarios. Los parámetros a determinar, utilizando un modelo Gauss-Markov, son un conjunto de seis elementos orbitales no singulares y las observaciones son azimut, elevación y ranging (distancia del satélite a la estación de control). La matriz de diseño se determina numéricamente. El método se aplica utilizando datos reales del satélite de telecomunicaciones HISPASAT.

## **1. INTRODUCCIÓN**

Las principales perturbaciones en la órbita geoestacionaria son debidas al campo gravitatorio terrestre, a la atracción lunisolar y a la presión de radiación solar: la componente tangencial de la fuerza perturbadora terrestre produce la deriva que hace que el satélite abandone su longitud nominal; la atracción lunisolar, por otra parte, origina variaciones en la inclinación y, por último, la radiación del sol sobre la superficie del satélite produce variaciones de la excentricidad.

En este trabajo se considera un modelo, que incluye todas estas perturbaciones, para propagar la órbita numéricamente y se utilizan los

siguientes elementos orbitales no singulares, para evitar indeterminaciones numéricas:

$$\{\sigma_j\}_{j=1, \dots, 6} = \{a, l, e_x, e_y, i_x, i_y\},$$

donde  $a$  es el semieje mayor de la órbita,  $l$  es la longitud media,  $e_x = e \cos(\Omega + \omega)$ ,  $e_y = e \sin(\Omega + \omega)$ ,  $i_x = i \cos \Omega$ ,  $i_y = i \sin \Omega$ , siendo  $i$  y  $e$  la inclinación y la excentricidad de la órbita respectivamente,  $\Omega$  la ascensión recta del nodo ascendente y  $\omega$  el argumento del perigeo.

En lo que sigue se describen los métodos utilizados para propagar y determinar la órbita, así como el análisis de los resultados obtenidos con el satélite HISPASAT.

## 2. RECTIFICACIÓN DE ÓRBITAS MÍNIMOS CUADRADOS

Si se calculan, para los tiempos correspondientes a un conjunto de observaciones de un satélite, las posiciones a partir de unos elementos orbitales provisionales, se comprueba que éstas no coinciden con las posiciones observadas.

Nuestro objetivo es determinar correcciones a estos elementos orbitales provisionales de forma que los elementos rectificados se ajusten de la mejor forma posible a todas las observaciones. Para ello aplicamos el método de mínimos cuadrados. Las ecuaciones de observación son del tipo:

$$l = f(\sigma_j, t),$$

donde  $l$  es una cierta cantidad determinada por observación (distancia, azimut o altura),  $\sigma_j$ ,  $j = 1, \dots, 6$  son los elementos orbitales y  $t$  representa al tiempo.

Si para  $n$  tiempos:  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , se calculan los correspondientes  $l_i$ :

$$l_i = f(\sigma_j, t_i),$$

y en estos mismos tiempos se observan las cantidades  $l_i^o$ , se tiene:

$$l_i^o \neq f(\sigma_j, t_i)$$

El problema es determinar los incrementos  $\delta\sigma_j$ ,  $j = 1, \dots, 6$  a aplicar a los elementos  $\sigma_j$  para obtener unos nuevos elementos  $\bar{\sigma}_j = \sigma_j + \delta\sigma_j$  tales que verifiquen:

$$l_i^o = f(\bar{\sigma}_j, t_i) = f(\sigma_j + \delta\sigma_j, t_i)$$

Para aplicar el método es preciso linealizar estas ecuaciones; para ello, teniendo en cuenta que

$$l_i^o = f(\sigma_j + \delta\sigma_j, t_i) = f(\sigma_j, t_i) + \sum_{j=1}^6 \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} \right) \delta\sigma_j, \quad (2.1)$$

y como  $f(\sigma_j, t_i) = l_i$  son las cantidades ya calculadas, se obtienen como ecuaciones de observación:

$$\sum_{j=1}^6 \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} \right) \delta\sigma_j - l_i^o + l_i = v_i, \quad (2.2)$$

para  $i=1, \dots, n$ , donde  $v_i$  es el error residual de la observación  $i$ -ésima.

En notación matricial, estas ecuaciones se escriben en la forma:

$$A\underline{x} - \underline{t} = \underline{v}, \quad (2.3)$$

donde:

$\underline{x} = (\delta\sigma_1, \dots, \delta\sigma_6)^T$  es el vector de los parámetros incógnita de dimensión  $(6 \times 1)$ ,

$\underline{t} = (t_1, \dots, t_n)^T$  es el vector de constantes de observación de dimensión  $(n \times 1)$ , dado por las diferencias entre el valor observado y el valor calculado:

$$t_i = l_i^o - l_i, \text{ con } i = 1, \dots, n,$$

$\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$  es el vector de errores residuales de dimensión  $(n \times 1)$

$A = (a_{ij})$  es la matriz de coeficientes de las ecuaciones de observación o matriz de diseño de dimensión  $(n \times 6)$ , siendo:

$$a_{ij} = \left( \frac{\partial f(\sigma_j, t_i)}{\partial \sigma_j} \right). \quad (2.4)$$

Nos queda por determinar la matriz de diseño de (2.4). Para ello aplicaremos un método numérico, tal y como se verá en el apartado 3.

## 2.1. Estimación de los parámetros

Para efectuar la rectificación de órbitas planteamos el siguiente modelo lineal estocástico tipo Gauss-Markov:

$$\begin{aligned} A\underline{x} - \underline{t} &= \underline{v}, \\ E(\underline{v}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\text{cov}(\underline{v}) = E(\underline{v}^T \underline{v}) = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1} = \Sigma_{vv},$$

siendo  $E(\cdot)$  el operador esperanza matemática,  $\text{cov}(\cdot)$  el operador covarianza y  $\Sigma_{vv}$  la matriz de varianzas-covarianzas de las observaciones, con  $\sigma_0^2$  factor de varianza a priori de la unidad de peso y  $P$  matriz de pesos de las observaciones que tomaremos diagonal.

En este modelo se han supuesto algunas hipótesis que habrá que contrastar posteriormente, tales como:

—El vector de residuos sigue una distribución normal  $N(0, \sigma_0^2 Q)$ .

— $E(\underline{v}) = 0$ , lo que equivale a decir que no existen errores groseros ni sistemáticos.

—Las precisiones a priori dadas en la matriz  $\sigma_0^2 Q$  han de ser consistentes con los resultados a posteriori.

Los parámetros  $\underline{x}$  se determinan imponiendo la condición de mínimos cuadrados:

$$\hat{\underline{v}}^T P \hat{\underline{v}} = \text{minimo}, \quad (2.6)$$

designando con el símbolo " $\hat{\cdot}$ " a las cantidades estimadas y siendo  $P$  la matriz de pesos de las observaciones.

En estas condiciones, la solución mínimos cuadrados  $\hat{\underline{x}}$  viene dada por la expresión:

$$\hat{\underline{x}} = (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{t} = N^{-1} \underline{d}, \quad (2.7)$$

siendo  $N$  la matriz de ecuaciones normales:

$$N = A^T P A \quad (2.8)$$

y

$$\underline{d} = A^T P \underline{t} \quad (2.9)$$

El vector de errores residuales estimados es

$$\hat{\underline{v}} = A\hat{\underline{x}} - \underline{t} = [AN^{-1}A^T P - I]\underline{t}, \quad (2.10)$$

y la varianza de peso unidad del ajuste:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\underline{v}}^T P \hat{\underline{v}}}{r}, \quad (2.11)$$

donde

$$r = n - 6$$

es el número de grados de libertad del ajuste.

Las medidas de precisión vienen dadas por las matrices varianza-covarianza a posteriori que, para los parámetros, los errores residuales estimados y las observaciones estimadas  $\hat{\underline{t}}$ , son, respectivamente:

$$\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}, \quad (2.12)$$

$$\Sigma_{\hat{v}\hat{v}} = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} - AN^{-1}A^T), \quad (2.13)$$

$$\Sigma_{\hat{t}\hat{t}} = A\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}A^T = \hat{\sigma}_0^2 AN^{-1}A^T \quad (2.14)$$

## 2.2. Análisis estadístico

Una vez que se ha realizado el ajuste, se aplican los siguientes test estadísticos para garantizar la calidad de los resultados:

### 2.2.1. Test $\chi^2$ de normalidad de los residuales:

El test  $\chi^2$  se usa para comprobar si el grupo de los residuales sigue una distribución normal. Usamos los residuales tipificados:

$$\hat{\omega}_i = \frac{\hat{v}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{v}_i}}, \quad (2.15)$$

donde  $\hat{v}_i$  son los residuales dados por (2.10) y  $\hat{\sigma}_{\hat{v}_i}$  la varianza de  $\hat{v}_i$  obtenida de  $\Sigma_{\hat{v}\hat{v}}$  de (2.13), y construimos 4 intervalos, con un nivel de significación de  $\alpha = 0.05$ .

### 2.2.2. Test $F$ de la varianza de peso unidad:

Definimos:

$$y = \max \left[ \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}, \frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_0^2} \right];$$

la hipótesis nula

$$H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2,$$

es rechazada si

$$y > F_{r,\infty,\alpha},$$

donde  $F$  es el valor de la distribución  $F$  con  $r$  e infinitos grados de libertad y un nivel de significación  $\alpha$ .

### 2.2.3. Test de Pope para detectar errores groseros:

Aplicamos este test a los residuales estandarizados de (2.15).  
Si

$$|\hat{v}_i| \geq \tau_{n-6,\alpha/2},$$

siendo  $\tau$  la distribución Tau, la observación es rechazada y deben ser analizados los posibles errores.

### 3. MATRIZ DE DISEÑO. PROPAGACIÓN DE LA ÓRBITA

La matriz de diseño,  $A$  de (2.4), es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_a^1}{\partial a} & \frac{\partial f_a^1}{\partial l} & \frac{\partial f_a^1}{\partial e_x} & \frac{\partial f_a^1}{\partial e_y} & \frac{\partial f_a^1}{\partial i_x} & \frac{\partial f_a^1}{\partial i_y} \\ \frac{\partial f_a^2}{\partial a} & \frac{\partial f_a^2}{\partial l} & \frac{\partial f_a^2}{\partial e_x} & \frac{\partial f_a^2}{\partial e_y} & \frac{\partial f_a^2}{\partial i_x} & \frac{\partial f_a^2}{\partial i_y} \\ \frac{\partial f_h^3}{\partial a} & \frac{\partial f_h^3}{\partial l} & \frac{\partial f_h^3}{\partial e_x} & \frac{\partial f_h^3}{\partial e_y} & \frac{\partial f_h^3}{\partial i_x} & \frac{\partial f_h^3}{\partial i_y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k^i}{\partial a} & \frac{\partial f_k^i}{\partial l} & \frac{\partial f_k^i}{\partial e_x} & \frac{\partial f_k^i}{\partial e_y} & \frac{\partial f_k^i}{\partial i_x} & \frac{\partial f_k^i}{\partial i_y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_h^n}{\partial a} & \frac{\partial f_h^n}{\partial l} & \frac{\partial f_h^n}{\partial e_x} & \frac{\partial f_h^n}{\partial e_y} & \frac{\partial f_h^n}{\partial i_x} & \frac{\partial f_h^n}{\partial i_y} \end{pmatrix}$$

donde  $\{a, l, e_x, e_y, i_x, i_y\}$  son los elementos orbitales en la época de referencia  $t_0$ , en la que queremos obtener los elementos orbitales rectificados, y

$$f_a^i(\sigma_j^i, t_i) = d_i,$$

$$f_a^i(\sigma_j^i, t_i) = a_i,$$

$$f_h^i(\sigma_j^i, t_i) = h_i,$$

siendo  $d_i, a_i, h_i$  observaciones de distancia, azimut y elevación, respectivamente, en los instantes  $t_i$ . Estas observaciones, además del instante de observación, son función de los correspondientes elementos orbitales perturbados,  $\sigma_j^i$ , soluciones de las ecuaciones del movimiento, que incluyen las fuerzas perturbadoras para unas condiciones iniciales  $\{a, l, e_x, e_y, i_x, i_y\}$ .

En este caso, hemos obtenido la matriz  $A$  diferenciando numéricamente la solución obtenida por integración numérica, utilizando el método

predictor-corrector  $\Sigma^2$  (Herrick, 1972), de las ecuaciones del movimiento que incluyen: el modelo geopotencial GEMT1 con  $n = 4$ , la atracción lunisolar y la presión de radiación solar. Esto es:

$$\frac{\partial f_k^i}{\partial \sigma_j} = \frac{f_k^i(\sigma_1^i, \dots, (\sigma_j + \Delta\sigma_j)^i, \dots, \sigma_6^i, t_i) - f_k^i(\sigma_1^i, \dots, \sigma_j^i, \dots, \sigma_6^i, t_i)}{\Delta\sigma_j}, \quad (3.1)$$

con:

$$j = 1, \dots, 6;$$

$$t_i, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$k = d, a, h,$$

donde  $f_k^i$  son los valores de los observables calculados a partir de las posiciones y velocidades obtenidas por integración numérica.

El intervalo de integración se ha seleccionado utilizando como ecuación de referencia la del movimiento armónico simple expresada en radianes. La integración de esta ecuación con el método utilizado mantiene una precisión en 10 vueltas de  $10^{-7}$  para un intervalo de paso,  $h$ , de 0.1, lo que equivale, para la correspondiente órbita de radio geoestacionario, a un intervalo de paso de  $\Delta t = 22^m 51^s.3$  (Gambí et al., 1992).

A partir de las posiciones y velocidades obtenidas por integración numérica en intervalos  $t_0 + \Delta t$ , se obtienen interpolando las posiciones y velocidades correspondientes a los tiempos de observación  $t_i$ .

Éstas se transforman a coordenadas medidas (ranging, azimut y altura) utilizando el Sistema de Constantes IAU 1976.

#### 4. IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO

Siguiendo la metodología expuesta en los apartados 2 y 3, hemos desarrollado un programa escrito en FORTRAN para la rectificación mínimos cuadrados de órbitas geoestacionarias. El diagrama de flujo puede verse en la Figura 1.



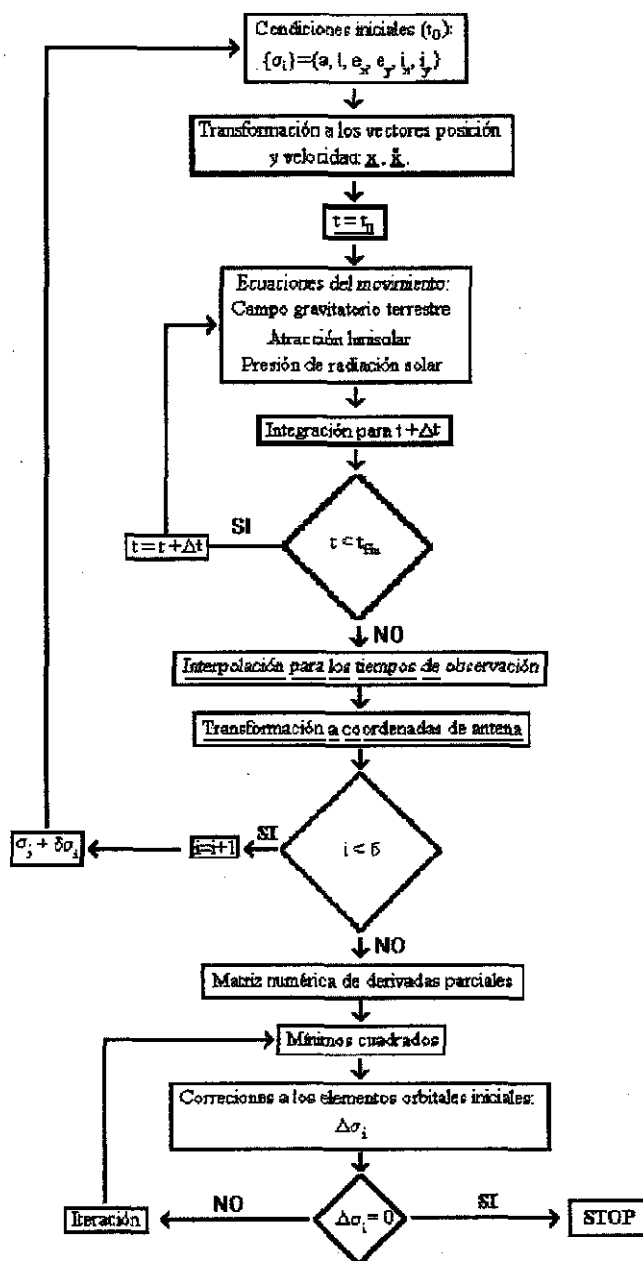


Figura 1. Diagrama de flujo.

El Man Machine Interface de la Tabla 1 muestra los cinco ficheros de datos que el programa necesita para ser ejecutado: datos orbitales iniciales, medidas, coordenadas de las antenas utilizadas en las medidas, modelo estocástico y parámetros utilizados en la diferenciación numérica. El rango de variación de los parámetros se ha elegido para evitar ecuaciones normales mal condicionadas (Gendt et al., 1986) y que surjan, por tanto, problemas al resolver el sistema por el método de Cholesky.

Tabla 1. *Man Machine Interface.*

HISPASAT V 1.0		
A B S O L U T E	O R B I T	E T E R M I N A T I O N
1 - Initial Orbit Data		
2 - Measurements Data		
3 - Choose Measuring Antennae		
4 - Statistical Data		
5 - Regularisation Parameters		
6 - RUN		
7 - Output		
<Return> - Exit to MAIN MENU		

## 5. EJEMPLO NUMÉRICO

En la Tabla 2 puede verse un ejemplo numérico de los diferentes ficheros de datos para el satélite HISPASAT PFM. La Tabla 3 muestra los correspondientes ficheros de resultados.

Tabla 2. Datos.

I N I T I A L   O R B I T   D A T A						HISPASAT V 1.0
SEMIEJE	LONGITUD	EX	EY	IX	IY	
42165.3633	-29.981890	-0.00016762	-0.00006475	0.00172225	0.00250333	
DDMM AÑO	HHMMSS INICIAL					
31101994	045751.0					
DDMM AÑO	HHMMSS FINAL					
02111994	094824.0					
COEFICIENTE DE REFLECTIVIDAD DEL SATELITE						
0.26000						
RELACION AREA MASA (METROS**2/KG)						
0.04130						
PRESION						
760.0						
TEMPERATURA						
0.0						

M E A S U R E M E N T S   D A T A				HISPASAT V 1.0
FECHA	HORA	MEDIDA	TIPO	
31101994	064228.0	217.8281	2	
31101994	064228.0	36.0302	3	
31101994	064349.0	38092.6380	1	
31101994	084227.0	36.0282	3	
31101994	084246.0	217.8111	2	
31101994	084345.0	38087.8652	1	
31101994	104216.0	217.8111	2	
31101994	104216.0	36.0302	3	
31101994	104337.0	38083.9493	1	
31101994	124210.0	217.8001	2	
31101994	124210.0	36.0362	3	
31101994	124329.0	38082.5648	1	
31101994	144202.0	217.7891	2	
31101994	144202.0	36.0382	3	
31101994	144322.0	38084.0466	1	
31101994	164159.0	217.7791	2	
.....				

Tabla 2. *Cont.*

CHOOSING MEASURING ANTENNAE					HISPASAT V 1.0
ANTENA	ESTACION	LAT(DEG)	LON(DEG)	ALTITUD(KM)	
A1	ARGANDA	40.27192	-3.37845	0.81134	
A2	ARGANDA	40.27220	-3.37890	0.81130	
A3	ARGANDA	40.27206	-3.37867	0.81390	
A4	ARGANDA	40.27192	-3.37845	0.81134	
A5	XXXXXXX	00.00000	00.00000	0.00000	
ANTENA UTILIZADA PARA RANGING 1					ANTENA DE MEDIDAS ANGULARES 3

STATISTICAL DATA		HISPASAT V 1.0
DESVIACIONES TIPICAS A PRIORI PARA OBSERVACIONES DE:		
ANGULOS (Deg) :	EMA=	0.030
DISTANCIA (Km):	EMD=	0.010
CLAVE PARA ASIGNACION DE PESOS (IPP=0:IGUAL PESO, IPP=1:DISTINTO):	IPP=	1
NIVEL DE SIGNIFICACION DE LOS TESTS ESTADISTICOS:	ALFA =	0.05

REGULARITATION PARAMETERS						HISPASAT V 1.0
SEMIEJE	LONGITUD	EX	EY	IX	IY	
0.00200000	0.00000100	0.00000010	0.00000010	0.00000100	0.00000100	

Tabla 3. Resultados.

O U T P U T

HISPASAT V 1.0

Número de la iteración: 1

Correcciones diferenciales:  
Da = -1.1886 Km.  
Dl = -.004482 grados  
Dex = .00001033  
Dey = -.00002685  
Dix = .00072759 grados  
Diy = .00079931 grados

Número de observaciones: 75

Elementos orbitales corregidos:  
a = 42164.1747 km.  
l = -29.986372 grados  
ex = -.00015729  
ey = -.00009160  
ix = .00244984 grados  
iy = .00330264 grados

Número de la iteración: 2

Correcciones diferenciales:  
Da = 0.0285 Km.  
Dl = .000683 grados  
Dex = .00000041  
Dey = .00000201  
Dix = -.00090563 grados  
Diy = .00015012 grados

Número de observaciones: 75

Elementos orbitales corregidos:  
a = 42164.2032 km.  
l = -29.985689 grados  
ex = -.00015688  
ey = -.00008959  
ix = .00154421 grados  
iy = .00345276 grados

TEST DE NORMALIDAD DE LOS RESIDUALES

-----

ACEPTADO

TEST DE COMPARACION DE VARIANZAS PARA ANGULOS

-----

NIVEL DE SIGNIFICACION = 95%

VARIANZA DEL MODELO = .00090000  
VARIANZA DEL AJUSTE = .00082148  
VARIANZA DEL MODELO VALIDA

VALOR ESTADISTICO = .91275  
VALOR F = 1.29552

TEST DE COMPARACION DE VARIANZAS PARA DISTANCIAS

-----

NIVEL DE SIGNIFICACION = 95%

VARIANZA DEL MODELO = .00010000  
VARIANZA DEL AJUSTE = .00009127  
VARIANZA DEL MODELO VALIDA

VALOR ESTADISTICO = .91275  
VALOR F = 1.29552

FECHA JULIANA	FECHA	HORA	VALOR MEDIDO	VALOR TEORICO	RESIDUAL
2449656.77949074	31101994	64228.	217.8281	217.8234	-.0047
2449656.77949074	31101994	64228.	36.0302	36.0250	-.0052
2449656.78042824	31101994	64349.	38092.6380	38092.6421	.0041
2449656.86281250	31101994	84227.	36.0282	36.0261	-.0021
2449656.86303241	31101994	84246.	217.8111	217.8218	.0107
2449656.86371528	31101994	84345.	38087.8652	38087.8704	.0052
2449656.94601852	31101994	104216.	217.8111	217.8115	.0004

## 6. CONCLUSIONES

La precisión obtenida para los elementos orbitales rectificadas depende de la precisión de las medidas de antena utilizadas y del método empleado (en este caso, de una rectificación mínimos cuadrados en la que la matriz de diseño se obtiene por diferenciación numérica). Esta precisión es suficiente para el diseño de una estrategia de colocación técnicamente viable (con maniobras periódicas semanales) para el mantenimiento en estación de dos satélites geoestacionarios en una misma ventana espacial.

Ahora bien, si se planteara el problema de incluir un tercer satélite en la misma ventana, para conseguir una planificación de maniobras operativa sería necesario reducir el tamaño de la banda reservada a los errores en la determinación de órbitas. Esto se podría conseguir aumentando la precisión en las medidas y/o utilizando una metodología de filtros de Kalman.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo corresponde a una fase del Proyecto de Investigación I+D 0118/94, subvencionado por la O.M.F.I. de la Comunidad de Madrid. Queremos expresar nuestro agradecimiento a la ESTACIÓN DE CONTROL DE HISPASAT que nos ha proporcionado los datos.

## REFERENCIAS

- GAMBÍ, J. M.; ROMERO, P. Y ZAMORANO P. (1992). Predicción numérica para el mantenimiento en estación de un sistema acoplado de satélites geoestacionarios. *Espacio* 21, 536-540. INTA.
- GENDT, G. Y MONTAG. (1986). Orbital computations by means of the POTSDAM-5 program system and applications. *Advances in Space Research*. Vol. 6, No. 9, 143-150.
- HERRICK, S. (1972). *Astrodynamics*. Van Nostrand Reinhold Company. London.