

Detección gravimétrica de anomalías del subsuelo en una zona urbana afectada por hundimientos

A. G. CAMACHO, F. G. MONTESINOS y R. VIEIRA
Instituto de Astronomía y Geodesia (CSIC-UCM)
Facultad de Ciencias Matemáticas. Ciudad Universitaria
28040 Madrid

RESUMEN

En este trabajo se describe un estudio microgravimétrico realizado en Alcalá de Ebro (Zaragoza) destinado a localizar las anomalías del subsuelo que pudieran justificar los hundimientos del terreno acaecidos en la zona. A partir de los datos gravimétricos reducidos se procede a un análisis de la covarianza y a una predicción mínimos cuadrados para filtrar el ruido observacional y obtener un modelo de anomalías gravimétricas. Mediante un ajuste polinomial robusto se determina una componente regional y su correspondiente residuo, que es identificado como campo de anomalías locales. Para la inversión de estas anomalías locales se recurre a un ajuste de cuerpos esféricos de densidad anómala.

ABSTRACT

This paper describes a microgravimetric study carried out in Alcalá de Ebro (Zaragoza) to locate the subsoil anomalies that could justify terrain sinkings which take place in this zone. From reduced gravimetric data, we apply a covariance analysis and a least squares prediction to filter observational noise and to obtain a model of gravimetric anomalies. By means a robust polynomial adjustment, a regional component is determined and its corresponding residue which is identified as local anomalies field. For inversion of those local anomalies an adjustment of spherical bodies with anomalous density was done.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años se han producido una serie de hundimientos del terreno dentro del casco urbano de Alcalá de Ebro (Zaragoza). Algunas edificaciones se han derrumbado y otras muestran signos alarmantes de deterioro. La cercanía del río Ebro, que fuerza el vértice de un meandro sobre la zona de hundimiento, y los datos geológicos sobre el entorno hacen suponer la existencia de cavidades rellenas de agua o de sedimentos a poca profundidad (entre 12 y 20 m). Por otra parte, el régimen de fuertes y frecuentes crecidas del Ebro en la zona, modificadas por los diversos espigones y diques de contención, previene sobre un proceso de socavación bastante activo.

Tal vez sea la gravimetría uno de los métodos prospectivos que con más ventaja pueden aplicarse en un área urbana para la detección de este tipo de anomalías. Por ello, el Instituto de Astronomía y Geodesia (CSIC-UCM), por encargo del Laboratorio de Geotecnia del CEDEX (MOPT), ha llevado a cabo un estudio de microgravimetría de precisión, con apoyo topográfico paralelo, en la zona de posibles anomalías.

Se han establecido sobre el terreno un total de 183 estaciones sobre las que se han llevado a cabo, simultáneamente, levantamientos topográficos (planimetría y altimetría) y gravimétricos, ambos de carácter relativo.

Para obtener una interpretación de las anomalías gravimétricas obtenidas hemos calculado un modelo de contraste de densidades mediante inversión gravimétrica.

La aproximación más antigua a la interpretación de los datos gravimétricos, y quizás todavía la más utilizada, es el uso de la modelización directa (mediante ensayo y error). Sin embargo, la aproximación inversa, aunque menos simple, tiene la ventaja de ser menos subjetiva que la directa y además proporciona información sobre la sensibilidad, incertidumbre, etc. En la resolución del problema gravimétrico inverso se busca un operador matemático que, actuando directamente sobre los datos de gravedad observados, proporcione una distribución de densidades del subsuelo que pueda generar ese campo observado. De esta forma, la solución del problema inverso no va a ser única por dos razones: Primero, hay una no-unicidad inherente en la inversión de campos potenciales, y segundo, los datos de gravedad se miden generalmente sólo sobre un número discreto de puntos y están sujetos a errores experimentales. En cuanto a la primera cuestión, debemos desarrollar criterios que seleccionen soluciones que sean geológicamente posibles y razonables. Esto se puede conseguir proporcionando suficiente información a priori como, por ejemplo, constreñimientos geológicos, y seleccionando un criterio de minimización apropiado. El segundo problema tiene un tratamiento adecuado dentro

de la teoría de la información (Tarantola, 1987), especialmente para el problema inverso lineal general.

Dentro de los métodos de inversión gravimétrica, podemos distinguir entre los métodos discretos (que adoptan un número finito de parámetros) y los métodos funcionales tales como por ejemplo la colocación (Barzaghi et al., 1992) o la aproximación espectral (Xia y Sprowl, 1992; Parker, 1973). Otro aspecto interesante de los métodos de inversión gravimétrica es el tipo de los parámetros incógnita que consideran. Por un lado, están aquellos métodos que adoptan valores de contraste de densidad prefijados y buscan determinaciones geométricas (Richardson y MacInnes, 1989; Zhelev, 1994). Por otro lado, se encuentran los métodos que fijan la geometría de los cuerpos anómalos y consideran como incógnitas sus valores de contraste de densidad. Mientras los primeros deben trabajar con funciones no lineales, los segundos pueden aplicar una inversión lineal inmediata (Bear et al., 1995; Burkhard y Jackson, 1976) lo que supone una ventaja frente a aquellos. En este trabajo, aplicamos un tratamiento correspondiente a un ajuste discreto de valores de contraste de densidad, utilizando como cuerpos anómalos esferas.

2. ESTUDIO TOPOGRÁFICO

El objetivo de este estudio fue el de determinar con la mayor precisión posible las coordenadas de las estaciones gravimétricas seleccionadas. Para estos trabajos se emplearon un teodolito Wild T-2, un distanciómetro electrónico (EDM) Sokkisha Red Mini y un equaltímetro Zeiss.

Eligiendo ciertos puntos de los señalizados, se configuró un itinerario poligoniométrico desde el que se podía hacer radiación polar del resto de los puntos. La observación de las distancias en los ejes de la poligonal se hizo mediante el EDM, y la radiación polar, estadimétricamente (al ser su precisión aceptable para los fines deseados y por razones de autonomía del EDM). La determinación altimétrica en el itinerario y la radiación se hizo mediante nivelación trigonométrica (o por pendientes). Tras establecer la dirección de la cuadrícula representada en el plano disponible, el itinerario se llevó orientado para permitir la comprobación de los cierres "in situ" y evitar posteriormente la corrida de acimutes.

Para obtener las coordenadas tridimensionales de cada punto, se escogieron unas coordenadas planimétricas arbitrarias de referencia y altiméricamente se enlazó con las altitudes que figuraban en el plano. Para aquellos puntos que no fueron radiados desde el itinerario, se establecieron sus coordenadas planimétricas de forma gráfica situándolos en el plano, mientras que la determinación

altimétrica se realizó mediante nivelación geométrica (por alturas) enlazando con el punto de altitud conocida más cercano mediante una doble línea.

3. OBSERVACIÓN GRAVIMÉTRICA. REDUCCIÓN

El trabajo de observación gravimétrica se realizó en dos campañas del 31 de enero al 3 de febrero y el 29 y 30 de marzo de 1995. El instrumento utilizado fue el gravímetro LaCoste&Romberg modelo G665 con método de cero incorporado y lectura electrónica mediante voltímetro.

Se realizaron 248 observaciones sobre un total de 183 estaciones, lo que significa una redundancia de observaciones del 27 por ciento. La figura 1 representa la distribución de estaciones respecto al trazado urbano. Los trabajos de observación estuvieron organizados en forma de itinerarios o bucles que comenzaban y finalizaban siempre en una misma estación, que se consideró como referencia de control. Asimismo, se procuró realizar el trabajo intercalando con frecuencia estaciones repetidas.

Cada observación consistió en cuatro o más lecturas de micrómetro y de voltímetro en posiciones de lectura exacta de micrómetro, separadas 100 μGal entre sí y centradas en torno a la posición de lectura de voltímetro nula. Este proceso permite mejorar la fiabilidad de la lectura y por otra parte nos permite conocer y controlar en cada estacionamiento la sensibilidad del instrumento. Como datos complementarios en cada observación se registraron: la fecha, la hora de cada lectura, la altura del borde superior del instrumento sobre el punto estación (clavo, estaca, señal de pintura), la presión atmosférica y la temperatura.

Para la reducción de estas medidas gravimétricas, en primer lugar, hemos procedido a obtener, para cada observación, la lectura de instrumento correspondiente a la posición centrada y a ajustar los valores de sensibilidad y posible deriva por desnivelación. Ello nos permite una primera detección de posibles datos erróneos. El valor medio de la sensibilidad ha sido de 1.401 mVol/ μGal .

Una de las correcciones a la que deben ser sometidos los valores de gravedad relativa obtenidos de las lecturas del gravímetro es la corrección por efecto de marea. Para ello, se ha considerado el desarrollo de Cartwright-Tayler (484 ondas) del potencial de marea, sobre el que se han aplicado unos factores adicionales de amplitud y desfases obtenidos mediante un modelo de respuesta de la Península Ibérica de carácter semiempírico (Camacho y Vieira, 1990). Así, la corrección de marea calculada oscila entre los valores extremos de -99 μGal y +63 μGal .

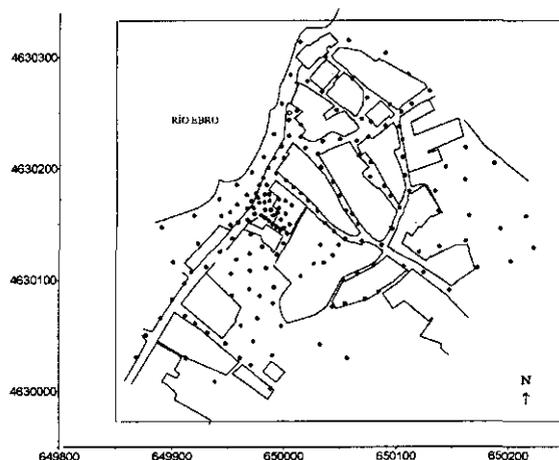


Figura 1. Distribución de las estaciones gravimétricas. En la figura aparecen también los contornos de las distintas casas y edificaciones de la zona. Las coordenadas corresponden al sistema UTM.

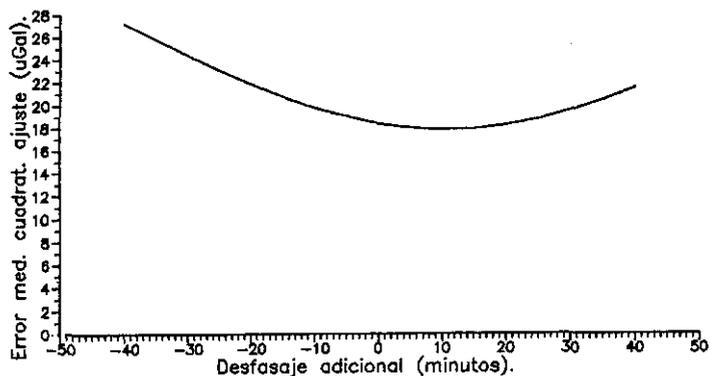


Figura 2. Variación del error medio cuadrático de la compensación gravimétrica en función del desfase adicional supuesto en la corrección de marea aplicada.

Dado el carácter anómalo del subsuelo local (presencia de aguas fluviales y freáticas) se ha planteado la determinación de un posible desfase adicional de carácter local. Para ello se han analizado los errores de la compensación posterior, llegándose a un valor óptimo (mínimo error medio cuadrático del posterior ajuste) de 10 minutos (figura 2).

Otras correcciones aplicadas a estos valores de gravedad fueron:

- a) Por gradiente vertical para altura del gravímetro sobre estaciones (se ha aplicado con un gradiente medio de $0.3 \mu\text{Gal}/\text{cm}$).
- b) Por fuerza gravitacional variable de la atmósfera respecto a la correspondiente a una atmósfera estándar (U.S. Standard Atmosphere 1976). Se ha obtenido mediante un factor $-0.3 \mu\text{Gal}/\text{mbar}$.
- c) Por efecto instrumental de presión del aire.
- d) Por efecto instrumental de temperatura ambiente.

4. COMPENSACIÓN DE LAS OBSERVACIONES GRAVIMÉTRICAS

Las observaciones redundantes o repetidas permiten establecer un ajuste destinado a determinar valores únicos de gravedad relativa para cada estación, a la vez que determinar parámetros de deriva instrumental, posibles saltos en el funcionamiento del instrumento, etc. Para ello, se han utilizado ecuaciones similares a las expuestas en (Camacho et al. 1994).

Se han considerado y ajustado dos tramos de deriva correspondientes a las dos campañas realizadas. Las derivas ajustadas (hasta grado 2) han sido similares. Por otra parte, se han localizado y ajustado tres "saltos": el principal entre las dos campañas, y los otros dos (de unos $300 \mu\text{Gal}$) en la segunda. En cuanto a los residuos finales del ajuste éstos presentan una media cuadrática de $9 \mu\text{Gal}$ para ambas campañas. En cuanto a los valores compensados de las gravedades relativas, los errores medios cuadráticos de ajuste oscilan en torno a 14 ó $15 \mu\text{Gal}$.

5. ANOMALÍAS GRAVIMÉTRICAS. MODELO DE ANOMALÍAS

Obtenidas las gravedades (relativas) compensadas, se procedió al cálculo de anomalías gravimétricas. Para ello, se utilizó la fórmula 1980 de la gravedad normal del elipsoide, GT, y su correspondiente gradiente para la reducción aire-libre, CF (Geodetic Reference System, 1980):

$$GT = 978032677.15 (1 + 0.0053024 \sin^2\phi - 0.0000058 \sin^2 2\phi) \mu\text{Gal}$$

$$CF = (308.549 + 0.2198 \cos 2\phi - 0.0000721 H) H \mu\text{Gal}$$

siendo ϕ la latitud geodésica y H la altitud (m) de la estación.

En cuanto a los efectos de las masas locales, se realizó una reducción Bouguer para una densidad local $2.3 \text{ gr}/\text{cm}^3$. Posteriormente, se planteó una

corrección topográfica de las masas locales utilizando un modelo topográfico (figura 3) definido por las altitudes de las estaciones, más otras altitudes complementarias y del entorno obtenidas por digitalización del plano urbano. Dado que el pueblo se encuentra en una zona bastante plana los efectos de masas topográficas situadas fuera del plano son muy reducidos y regulares.

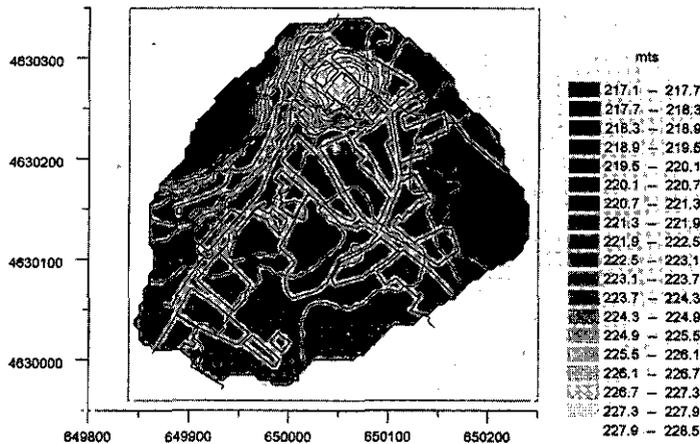


Figura 3. Modelo topográfico de la zona. Se observan de forma destacada el mínimo del cauce del río y el máximo del barrio alto.

Hemos utilizado para la corrección de masas topográficas un valor de densidad de 2.3 gr/cm^3 . Se ha tomado este valor, superior a la densidad del suelo natural, con objeto de asumir la presencia en el casco urbano de pavimentos y cimientos de mayor densidad. Los valores de corrección topográfica obtenidos oscilan entre los $0 \mu\text{Gal}$, en algunas zonas muy planas, y los $74 \mu\text{Gal}$ calculados para el punto situado en la zona de más pendiente de la subida al barrio alto del pueblo. Los valores finales de anomalías gravimétricas Bouguer refinadas oscilan con una diferencia máxima de $495 \mu\text{Gal}$ y una desviación típica de $96 \mu\text{Gal}$.

Se ha considerado oportuno introducir una pequeña corrección tendente a homogeneizar las observaciones realizadas sobre pavimento con las realizadas sobre tierra. Para ello, en estas últimas se ha añadido una corrección de 4 a $6 \mu\text{Gal}$ a la anomalía observada. La figura 4 representa la distribución de estas anomalías gravimétricas finales.

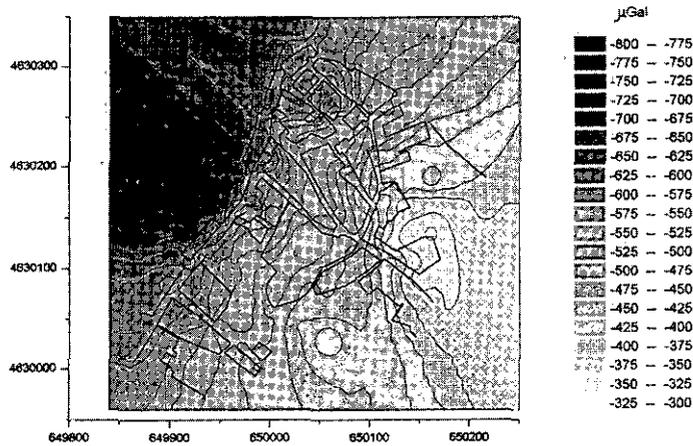


Figura 4. Anomalías gravimétricas observadas. Las anomalías fueron extrapoladas fuera del área de observación.

Con objeto de extraer la información gravimétrica correlable (señal), separando los ruidos observacionales, se ha procedido a un análisis de correlación y a una consiguiente predicción mínimos cuadrados de la señal detectada (Camacho et al. 1994).

Los valores de anomalías observadas Δg_i , $i=1, \dots, l$, donde l es el número de estaciones, pueden ser escritos matricialmente como:

$$\Delta g = p + s + n = p + v$$

donde p es una componente “sistemática” (en el sentido de un valor medio, una pendiente general o una componente de longitud de onda muy larga), s es la señal correlada y n el ruido observacional.

Una vez que se calcula la componente p , por ejemplo por un ajuste polinomial, s y n pueden ser separadas por un análisis de covarianza de los datos v (Barzaghi y Sanso, 1983). Para ello, suponiendo que la covarianza de la señal entre dos puntos, P_i, P_j depende sólo de la distancia horizontal $d = \text{dist}(P_i, P_j)$, es decir, $\text{cov}(s(P_i), s(P_j)) = C(d)$, el análisis de correlación de los datos v nos da una distribución de covarianzas empíricas. Estos valores empíricos son entonces ajustados mediante una función analítica adecuada, $C(d)$.

En el caso que nos ocupa, hemos utilizado un valor constante como componente sistemática y varias funciones covarianza dadas por (Mussio 1984, 1987):

$$C(x) = aJ_0(cx)e^{-bx}$$

$$C(x) = a \exp(-bx^2) (1-cx^2)$$

donde J_0 es una función de Bessel de orden cero y a , b y c son parámetros calculables empíricamente.

Utilizando la fórmula usual para predicción mínimos cuadrados (Moritz 1980), la señal predicha, \hat{s} , en el punto P , se obtiene de la función covarianza ajustada, $C(d)$, y de los valores de los datos en los puntos de observación P_j :

$$\hat{s} = C_{Ps} (C_{ss} - C_{nn})^{-1} v$$

donde, los elementos del vector C_{Ps} son

$$\text{cov}(s(P), s(P_j))_i = C(\text{dist}(P, P_j))_i,$$

los de la matriz C_{ss}

$$\text{cov}(s(P_i), s(P_j))_{ij} = C(\text{dist}(P_i, P_j))_{ij},$$

y

$$C_{nn} = I_{ll} (\sigma^2 - C(0))$$

con I_{ll} la matriz identidad y σ es la varianza de los v_i , $i=1, \dots, l$.

La matriz del error de predicción para la señal ajustada viene dada por (Moritz 1980):

$$E_{ss} = C_{Ps}^{-1} C_{Ps} (C_{ss} + C_{nn}) C_{sP}$$

Una vez que la señal \hat{S} es ajustada, consideramos el ruido resultante:

$$n = \Delta g - \hat{S}$$

para realizar un nuevo análisis de covarianza, y detectar, si es posible, una señal secundaria correlada:

$$\Delta g = \hat{S}' + (\hat{S}' + n')$$

Este proceso se ha aplicado sucesivamente detectando varios niveles de señal (correspondientes a diferentes longitudes de onda) hasta agotar el contenido correlable de las anomalías observadas. Hemos establecido hasta tres

niveles de señal cada una de ellas decreciendo en amplitud y longitud de onda,

$$\Delta g = \hat{S}_1 + \hat{S}_2 + \hat{S}_3 + n$$

La Tabla 1 muestra comparativamente algunos parámetros característicos del análisis de covarianza (anomalías *vs.* distancia horizontal) para los tres niveles de señal detectados.

Tabla 1. Algunos parámetros del análisis de covarianza.

Número de puntos considerados	85	183	183
Desviación típica s_D de los datos (mGal)	110	30	21
Paso de correlación adoptado (m)	32.8	18.2	113
Desviación típica s_S de la señal (mGal)	104	18	9
Desviación típica s_R del ruido (mGal)	34	24	19
Cociente de varianzas s_S^2/s_D^2	0.90	0.37	0.17
Distancia de covarianza nula (m)	153	51	20
Tipo de función covarianza ajustada	NoPa	B0Ex	B0Ex

NoPa: $y(x) = a \exp(-bx^2) (1-cx^2)$ B0Ex: $y(x) = a \exp(-bx) J_0(cx)$

J_0 : función de Bessel de orden cero

La elección del paso de correlación (como aquel que produce mínima varianza del ruido resultante) y el análisis de correlación y ajuste de función covarianza empírica se ilustran para los tres niveles de señal detectados en las figuras 5 y 6. Al igual que en la tabla 1, puede observarse cómo disminuye la longitud de onda y la calidad de la relación señal/ruido de una componente a otra.

Aplicando las fórmulas habituales (Camacho et al., 1994) de la técnica de predicción mínimos cuadrados y a partir de las funciones de covarianza antes ajustadas, calculamos las señales o componentes ajustadas, así como los valores de precisión correspondientes. Las Figuras 7, 8, 9 representan dichas señales predichas para las anomalías gravimétricas y sus respectivos mapas de error medio cuadrático de predicción. Se comprueba fácilmente que el error aumenta en aquellas zonas donde la densidad de estaciones observadas es

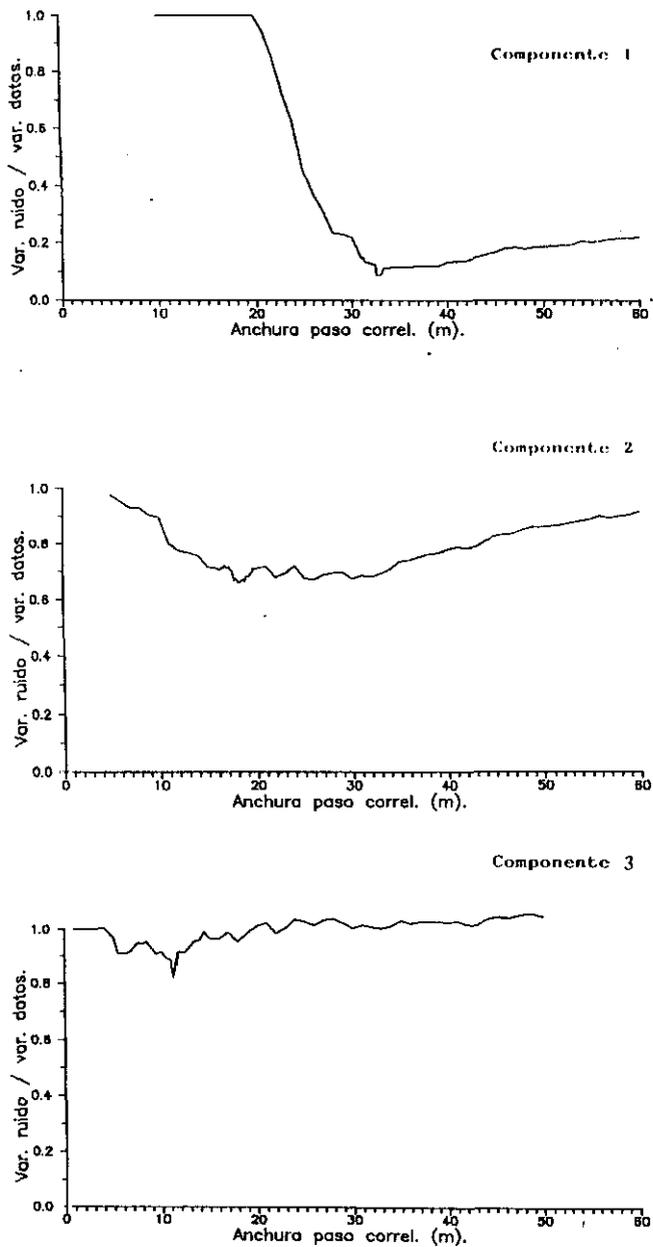


Figura 5. Detección del paso óptimo de correlación para las anomalías observadas, en tres fases o componentes sucesivas.

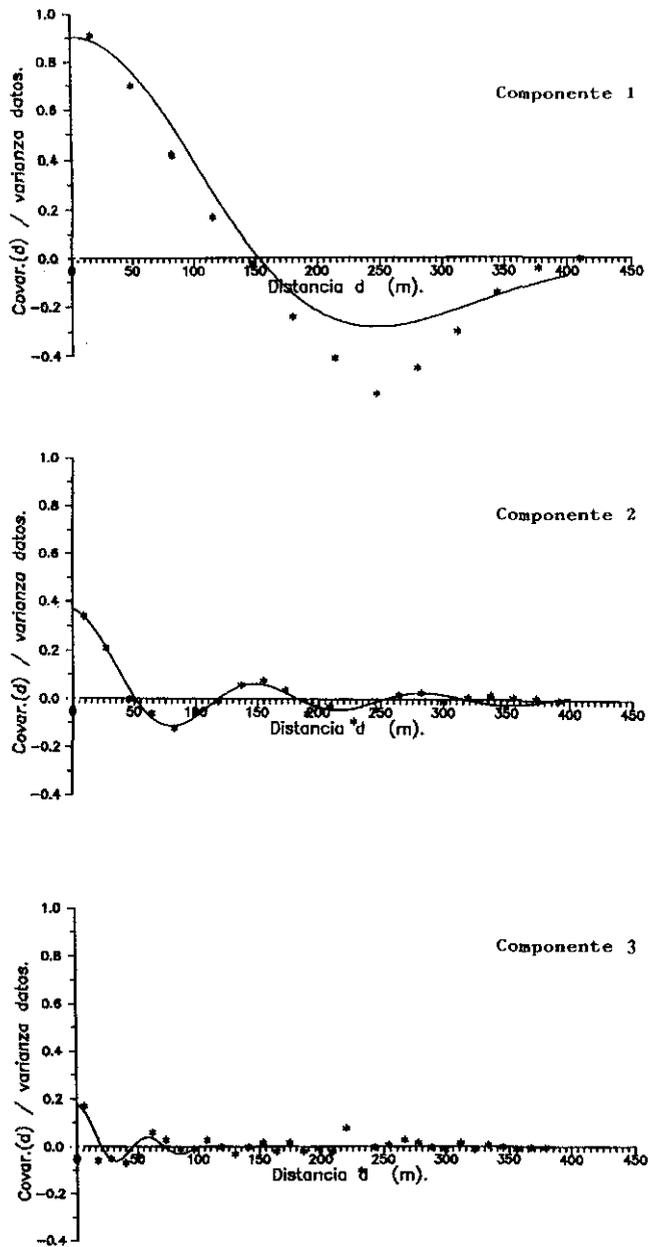


Figura 6. Distribuciones de las covarianzas empíricas y funciones covarianza ajustada para las tres componentes o fases detectadas en el análisis de covarianza.

inferior, así como fuera de la zona de estudio, donde no hemos considerado ninguna observación.

Esta descomposición del campo de anomalías proporciona una primera información sobre la posición planimétrica de los cuerpos de densidad anóma-

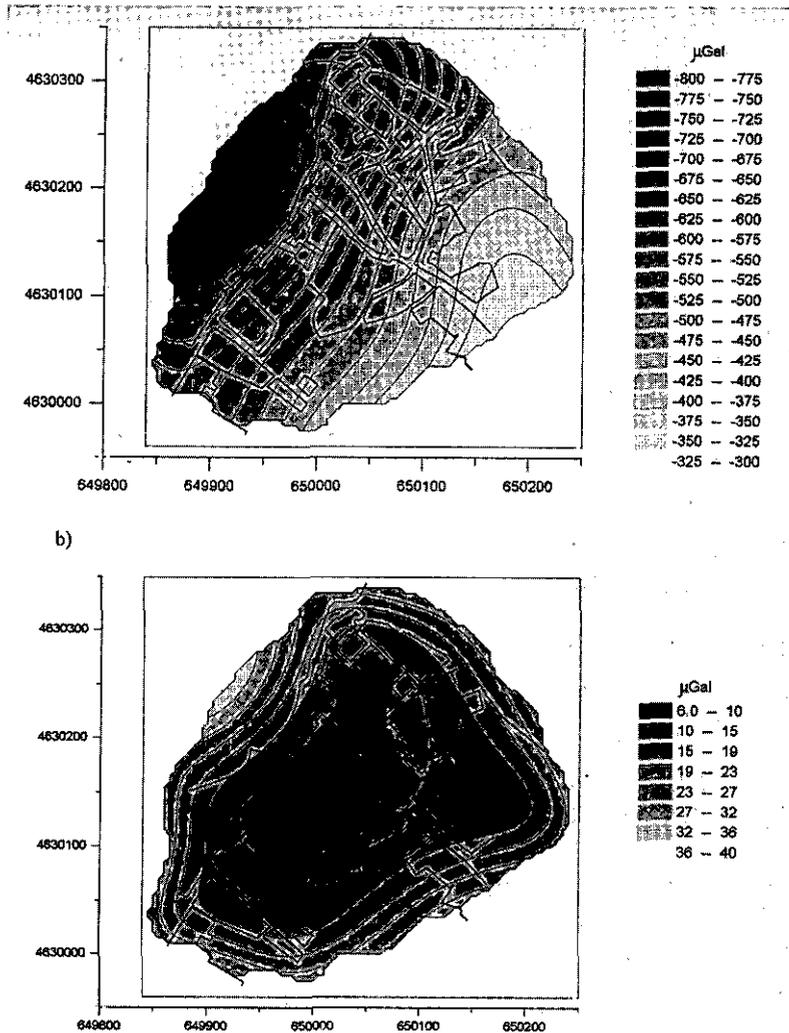


Figura 7. Primera componente del campo de anomalías: a) señal predicha; b) error medio cuadrático de predicción. La distribución de errores viene determinada por la densidad de estaciones de observación.

la más o menos profundos: Las anomalías de onda corta reflejan estructuras superficiales del subsuelo (aunque también pueden incluir efectos topográficos) y las anomalías de onda larga suelen reflejar estructuras más profundas del subsuelo (aunque también pueden reflejar, en parte, estructuras más super-

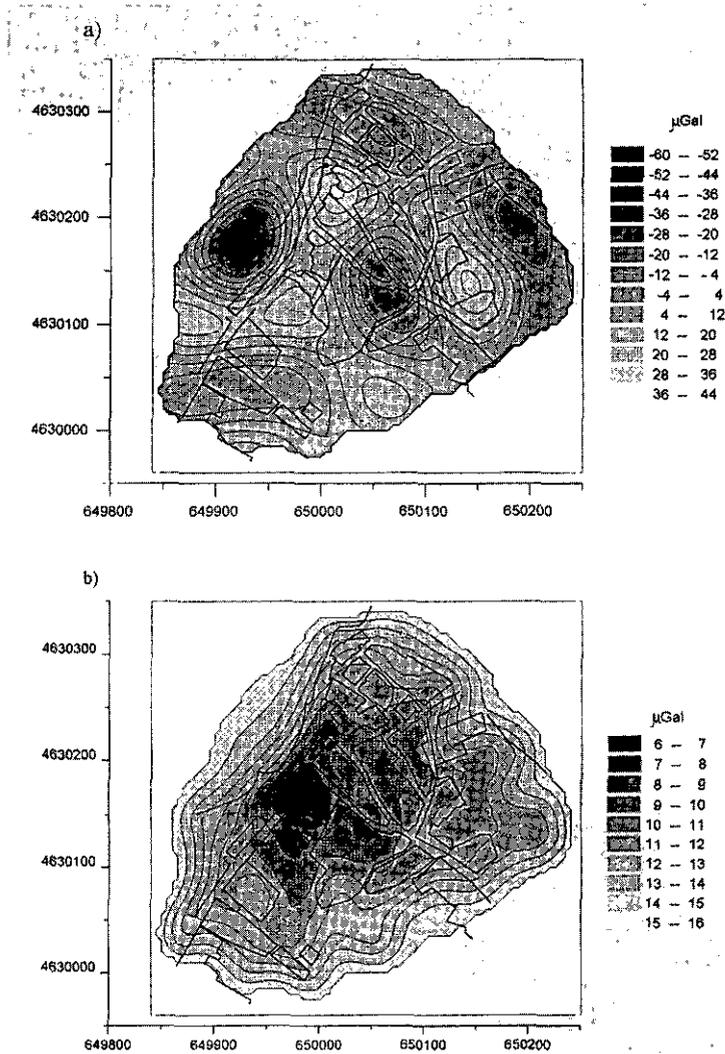


Figura 8. Segunda componente del campo de anomalías: a) señal predicha; b) error medio cuadrático de predicción.

ficiales pero de cierta extensión horizontal). En nuestro caso, y de forma general, podríamos decir que la componente 3 correspondería a estructuras situadas en torno a los 10-15 m de profundidad mientras que la componente 2 podría reflejar estructuras situadas alrededor de los 20-30 m de profundidad.

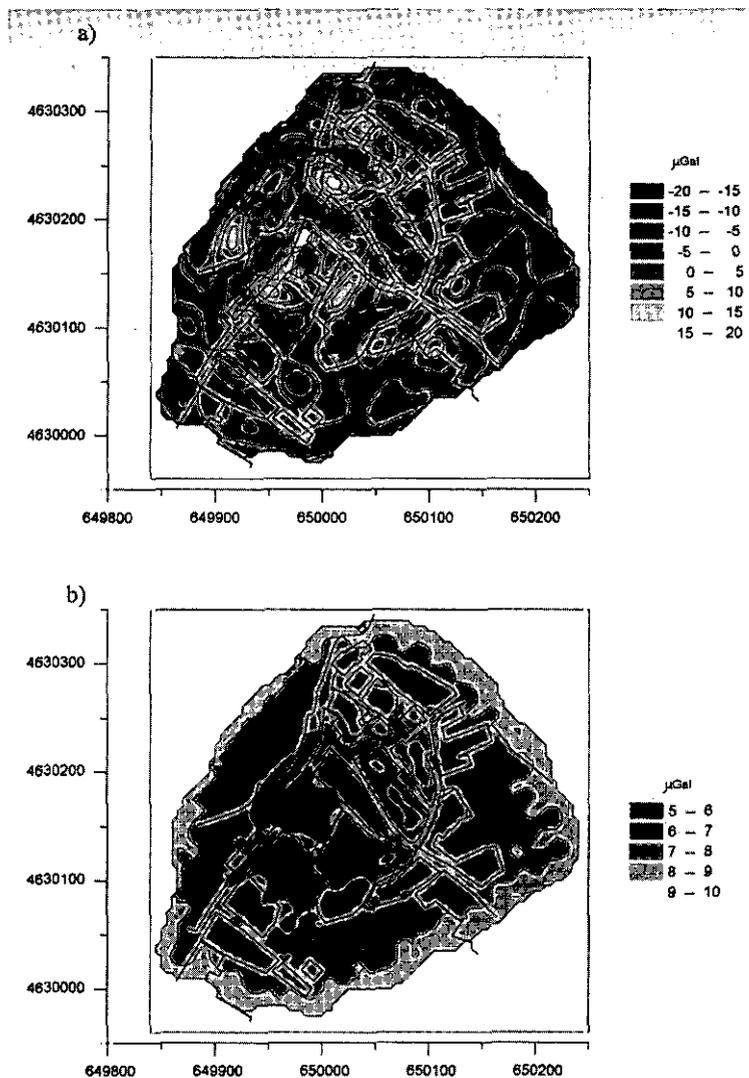


Figura 9. Tercera componente del campo de anomalías: a) señal predicha; b) error medio cuadrático de predicción.

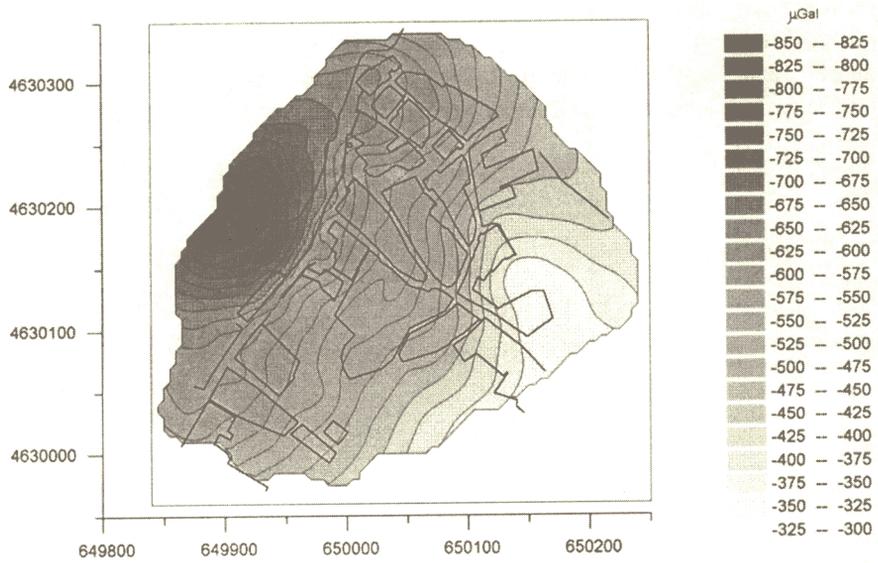


Figura 10. Modelo completo de anomalías gravimétricas obtenido sumando las tres componentes de predicción.

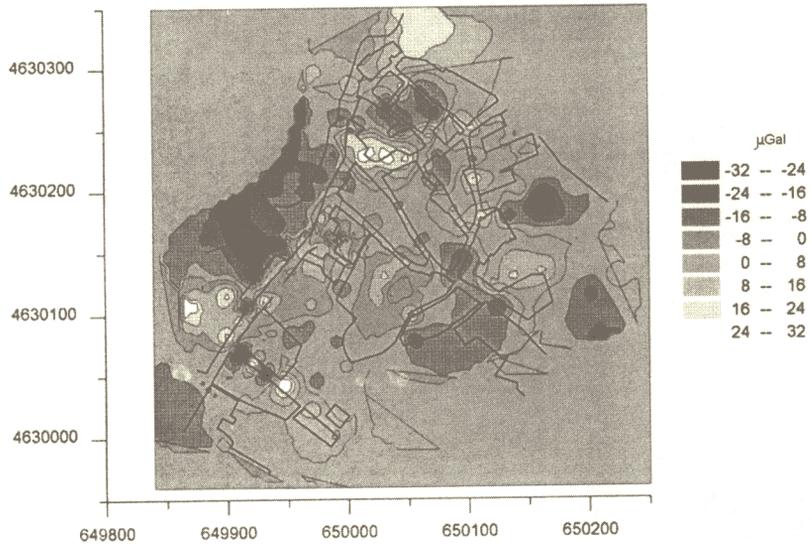


Figura 11. Ruidos observacionales obtenidos como residuos no correlados en el proceso de predicción.

La figura 10 representa el modelo completo de anomalías gravimétricas, obtenido sumando las tres componentes de predicción s_1 , s_2 y s_3 . Finalmente, la figura 11 representa los valores de anomalía no correlados o ruido final. Estos residuos corresponderán en gran parte a imperfecciones observacionales, pero también incluirán anomalías reales que, por su muy corta longitud de onda, exigirían para su detección (en forma de señal correlada) un trabajo observacional bastante más exhaustivo. Evidentemente, la suma de los valores representados en las figuras 10 y 11 es igual a las anomalías observadas (figura 4).

6. ESTIMACIÓN DE UN CAMPO REGIONAL. IDENTIFICACIÓN DE LAS ANOMALÍAS LOCALES

Las anomalías gravimétricas representadas en la figura 10 muestran una tendencia regional dominante. Esta componente de onda larga o campo regional puede ser debida en general a masas profundas, a masas lejanas o a variación lenta de las masas próximas. La interpretación correcta es incierta sin información geológica previa. En nuestro caso dicha componente podría achacarse a una inclinación de la superficie de separación (situada por término medio a unos 20 m de profundidad) entre el suelo ligero y la roca mas profunda. En cualquier caso es deseable eliminar esta componente regional para aislar los efectos anómalos locales.

En general, la separación entre las componentes local y regional no está bien definida. A menudo se trata más bien de una caracterización subjetiva: las anomalías locales se definen como aquellas que se amoldan al objetivo particular de la prospección.

Una de las técnicas más habituales de separación regional-local es el ajuste polinómico. Los ajustes polinómicos de complejidad controlada por el orden del polinomio son los procedimientos más usados para estimar el campo regional, quedando las anomalías locales como residuos del ajuste.

Si deseamos ajustar las anomalías gravimétricas Δg_j , $j=1, \dots, m$, mediante un polinomio de orden n , $P_n(x, y, c)$, donde c es el vector de $1+(n(n+3))/2$ coeficientes, el sistema de m ecuaciones será de la forma

$$A c - \Delta g = v,$$

donde la matriz A tiene como elementos

$$a_{ij} = \left(\frac{d}{dc_j} P_n(x, y, c) \right)_{x_j, y_j}$$

y cuya solución mínimos cuadrados es de la forma

$$\mathbf{c} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{g}$$

Sin embargo, polinomios de orden bajo (son habituales los órdenes 1, 2 y 3) producen ajustes insuficientemente complejos para las irregularidades habituales presentes en las anomalías gravimétricas. Y por otro lado, polinomios de orden alto (con ajuste mínimos cuadrados) introducen pseudoanomalías, incluso con signo opuesto a las verdaderas anomalías. Una interesante alternativa es efectuar la separación regional-local mediante ajuste polinómico cuyos coeficientes se determinen por un procedimiento robusto consistente en un ajuste ponderado iterativo en el que los pesos son función de los residuos resultantes en la iteración anterior. Llamando \mathbf{W} a la $m \times m$ matriz diagonal de pesos w_i la solución ponderada mínimos cuadrados es de la forma:

$$\mathbf{c}^{(k+1)} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{(k)} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}^{(k)} \Delta \mathbf{g}$$

que corresponde a la determinación $(k+1)$ -ésima de la solución \mathbf{c} en función de los pesos determinados con la iteración k -ésima. Los coeficientes de peso w_i se estiman de forma que minimicen el efecto de las anomalías en aquellos puntos en que el valor absoluto del residuo en la iteración anterior es alto. Beltrao et al., (1991) proponen las siguientes fórmulas de cálculo de pesos:

$$w_i^{(k)} = e^{-t^2}, \quad t < 5.48$$

$$w_i^{(k)} = -a \left(\frac{t - 5.48}{v_{\max}} \right)^2, \quad t \geq 5.48$$

donde

$$t = \frac{0.6745 v_i^{(k)}}{s^{(k)}}$$

es el residuo normalizado i en la iteración k -ésima, v_{\max} es el valor absoluto máximo de los residuos v_i en la iteración k -ésima, y a es un factor de amplitud igual a 0.1.

El proceso iterativo se inicia con pesos identidad, $\mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{I}$, y finaliza cuando se estabiliza la media de los valores absolutos de los residuos. Estos pesos pueden considerarse adecuados para uso general. Como resultado es posible utilizar polinomios de orden alto, sin que sea crítica la elección del orden, y se minimiza el efecto distorsionador de las pseudoanomalías.



Figura 12. Campo regional de las anomalías gravimétricas obtenido mediante un ajuste polinomial robusto de sexto orden.

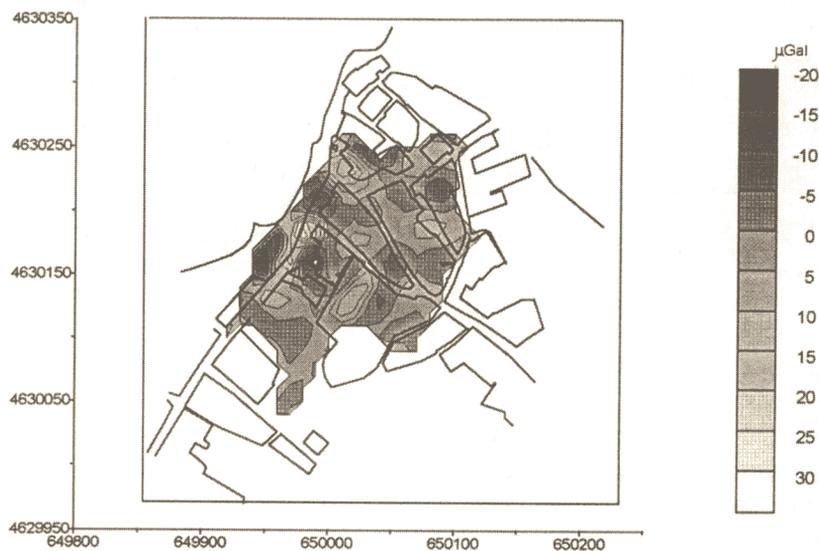


Figura 13. Componente local de las anomalías gravimétricas obtenido como residuo del ajuste polinomial robusto. Estas anomalías se consideran para una inversión gravimétrica posterior.

Para la gravimetría aquí considerada, tras varias pruebas, hemos seleccionado un polinomio de grado seis cuyos coeficientes se han ajustado mediante la técnica antes expuesta. La figura 12 muestra el campo regional polinómico y la figura 13 corresponde a las anomalías residuales. Estas últimas tienen carácter local y corresponderán más adecuadamente a los objetivos del estudio.

7. INVERSIÓN DE LAS ANOMALÍAS LOCALES. CONCLUSIONES

Las anomalías locales, obtenidas según se ha indicado en el apartado anterior (figura 13), corresponderán a una distribución de estructuras de densidad anómala en el subsuelo. Dada la complejidad de las anomalías (varios mínimos y máximos independientes) es de suponer que los posibles modelos estructurales que se ajusten serán asimismo complejos. En estas circunstancias, las técnicas de inversión gravimétrica lineal (densidades incógnita sobre geometría fija) requerirían un elevado número de incógnitas para un ajuste aceptable. Otras técnicas basadas en incógnitas geométricas de tipo poliédrico o similares son también engorrosas de aplicación en este contexto. Tal vez una de las técnicas más inmediatas en este tipo de campos anómalos ("rosarios" de mínimos o máximos aislados) sea la de ajuste de cuerpos esféricos (o equivalentemente, de masa puntuales) que aquí aplicaremos.

Partimos de una distribución regularizada (por ejemplo en cuadrícula) de puntos $P_i(x_i, y_i, z_i)$ con anomalías locales Δg_i conocidas. Pretendemos reconstruir dichas anomalías como el efecto de la atracción de una serie de esferas de densidad anómala. Para una esfera con centro en (u_j, v_j, w_j) , radio r_j y densidad anómala ρ_j , la atracción vertical sobre el punto P_i viene dada por:

$$G_{ij} = G \frac{4}{3} \pi r_j^3 \rho_j (z_i - w_j) [(x_i - u_j)^2 + (y_i - v_j)^2 + (z_i - w_j)^2]^{-3/2}$$

El proceso consiste en partir de una distribución inicial de esferas, con densidades arbitrarias fijadas, la cual se va reajustando hasta obtener una adecuación suficiente con las anomalías observadas. Las incógnitas del ajuste son las posiciones (u_j, v_j) , profundidades w_j y radios r_j de todas las esferas. Este ajuste es claramente no lineal.

Un posible tratamiento de este problema no lineal consiste en la resolución iterativa (con parámetros amortiguadores) del sistema linealizado. Para cada punto P_i del conjunto de datos regularizados podemos considerar la ecuación lineal:

$$\Delta g_i - (\Delta g_i)_c = \sum_j \left[\left(\frac{\partial G_{ij}}{\partial u_j} \right)_c du_j + \left(\frac{\partial G_{ij}}{\partial v_j} \right)_c dv_j + \left(\frac{\partial G_{ij}}{\partial w_j} \right)_c dw_j + \left(\frac{\partial G_{ij}}{\partial r_j} \right)_c dr_j \right] + dg_0 + (x_i - \bar{x}) dg_x + (y_i - \bar{y}) dg_y$$

donde G es la constante de gravitación y dg_0 , dg_x , dg_y son incógnitas opcionales que corresponden a un término constante y a unas pendientes globales que permitan una mejor adecuación de las esferas al campo anómalo. La designación $()_c$ indica valores calculados correspondientes a la configuración previa. \bar{x} , \bar{y} representan valores medios de las coordenadas de los puntos dato. En forma matricial las anteriores ecuaciones se escriben:

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{p} - \mathbf{t} = \mathbf{v}$$

donde $\Delta \mathbf{p}$ representa el vector variación de los parámetros incógnita (parámetros de las esferas más parámetros globales), \mathbf{A} es la matriz de diseño, \mathbf{t} representa el vector de anomalías observadas menos calculadas provisionales y \mathbf{v} son los residuos del ajuste. Supondremos que el sistema es sobredeterminado. Si llamamos \mathbf{Q}_g a la matriz covarianzas de los datos (deducida a través del proceso de predicción de anomalías) la condición de ajuste mínimo se puede expresar:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{Q}_g^{-1} \mathbf{v} = \text{mínimo}$$

Así, partiendo de la solución definida en la iteración k -ésima por los parámetros $\mathbf{p}^{(k)}$ obtendríamos la solución $(k+1)$ -ésima añadiendo las variaciones $\Delta \mathbf{p}$ dadas por:

$$\Delta \mathbf{p} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_g^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_g^{-1} \mathbf{t}$$

cuya matriz covarianzas a posteriori sería:

$$\mathbf{Q}_p = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_g^{-1} \mathbf{A})^{-1}$$

Sin embargo, este proceso adolece usualmente de falta de convergencia. No todos los parámetros son igualmente determinables, existiendo frecuentemente incógnitas muy poco sensibles para las que las soluciones se disparan a valores incontrolados. Una posible solución de este problema consiste en (Richardson y MacInnes, 1989) introducir una condición adicional que contro-

le las posible evolución de los parámetros con respecto a los valores previos (o de la fase anterior):

$$\Delta \mathbf{p} \mathbf{Q}_g^{-1} \Delta \mathbf{p}^T = \text{mínimo}$$

donde \mathbf{Q}_p es una matriz de covarianza a priori asociada a los parámetros incógnita. En conjunto, la condición de ajuste se expresa en la forma:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{Q}_g^{-1} \mathbf{v} + \lambda \Delta \mathbf{p}^T \mathbf{Q}_p^{-1} \Delta \mathbf{p} = \text{mínimo}$$

donde λ es un parámetro que nos permite variar el compromiso entre calidad del ajuste y magnitud de la evolución de los parámetros. Este parámetro de amortiguamiento, introducido por (Marquardt, 1970) permite controlar la convergencia a cambio de ralentizarla. El valor ajustado de la corrección a los parámetros entre iteraciones vendrá dado ahora por:

$$\Delta \mathbf{p} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_g^{-1} \mathbf{A} + \lambda \mathbf{Q}_p^{-1})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_g^{-1} \mathbf{t}$$

con matriz covarianzas a posteriori:

$$\mathbf{Q}_p = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_g^{-1} \mathbf{A} + \lambda \mathbf{Q}_p^{-1})^{-1}$$

El proceso comienza situando esferas arbitrarias bajo los mínimos y/o máximos principales de anomalía. Reajustadas iterativamente las posiciones de estas esferas en una configuración estable, se analizan los residuos resultantes. Localizados los máximos y/o mínimos principales en estas anomalías residuales se introducen nuevas esferas aproximadas que se reajustarán en conjunto con las anteriores. El proceso finaliza cuando las anomalías residuales son irrelevantes y la configuración de esferas obtenida resulta estable. Es interesante señalar que los ajustes de contrastes de masa sólo positivas o sólo negativas dan lugar a complejas estructuras estables, mientras que los modelos obtenidos ajustando esferas de densidades positivas y negativas resultan muy inestables ya en las primeras y principales esferas.

Los valores de densidad arbitrarios supuestos pueden estar basados en hipótesis geológicas, o bien pueden reajustarse al final del proceso mediante una condición de solapamiento máximo entre las esferas.

El método expuesto ha sido aplicado a las anomalías locales representadas en la figura 13. Se ha supuesto un contraste de densidad negativo con carácter

dominante. La configuración de esferas resultante es la representada en la figura 14. La localización de estas esferas se ajusta bastante a las expectativas en cuanto a anomalías del subsuelo previsible en la zona. Las esferas mejor definidas y que suponen una mayor acumulación de masa anómala se sitúan cerca de las áreas de hundimiento del terreno, lo que sugiere que la causa de éstos sea la existencia de cavidades o zonas de baja densidad en el subsuelo. Por otra parte, el modelo ajustado indica la presencia de otras zonas de densidad anómala que no muestran evidencias superficiales en forma de hundimientos aunque sí se han detectado grietas en las edificaciones próximas a alguna de ellas.

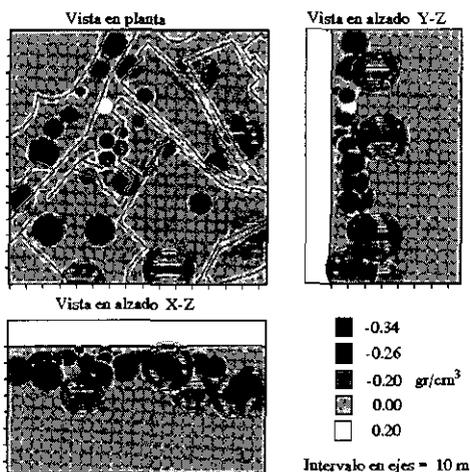


Figura 14. Modelo estructural de esferas de densidad anómala obtenido como resultado de la inversión gravimétrica. La situación de esferas alineadas o de mayor contraste indican la localización de las principales anomalías (defecto de masa) del subsuelo.

Señalaremos por último cómo la gravimetría de precisión permite obtener conclusiones relevantes para la ingeniería civil dentro de un trazado urbano en el que otras técnicas tienen una aplicación más limitada.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado mediante contrato-convenio por el Laboratorio de Geotecnia (C.E.D.E.X.). El estudio topográfico fue realizado

por J. L. Valbuena y A. Alcázar (Instituto de Astronomía y Geodesia, CSIC-UCM).

Agradecemos a las autoridades y vecinos de Alcalá de Ebro su amabilidad y el habernos facilitado el acceso a fincas privadas con objeto de realizar mediciones.

REFERENCIAS

- BARZAGHI, A., GANDINO, A., SANZO, F. Y ZENUCCHINI, C. (1994). The collocation approach to the inversion of gravity data, *Geophysical Prospecting*, 40, 429-451.
- BEAR, G. W., AL-SHUKRI H. J. Y RUDMAN A. J. (1995). Linear inversion of gravity data for 3-D density distributions, *Geophysics* 60, n. 5, 1354-1364.
- BELTRAO, J. F., SILVA, J. B. C, Y COSTA, J. C. (1991). Robust polynomial fitting method for regional gravity estimator. *Geophysics* 56 n. 1, 80-89.
- BURKHARD, N. Y JACKSON, D. D. (1976). Application of Stabilized Linear Inverse Theory to Gravity Data, *J. Geophys. Res.*, 81, 1513-1518.
- CAMACHO A. G. Y VIEIRA R. (1990). Predicción de la corrección de marea en la Península Ibérica. *Física de la Tierra* 2, 11-48. Universidad Complutense de Madrid.
- CAMACHO A. G., MONTESINOS F. G. Y CUÉLLAR V. (1994). A gravimetric 3D inversion for cavity detection. *Geophysical Prospecting* 42, 113-130.
- MARQUARDT, D. W. (1970). Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation, and nonlinear estimation, *Technometrics*, 12, 591-612.
- MORITZ, H. (1980). *Advanced Physical Geodesy*. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 500 páginas.
- MUSSIO, L. (1984). Il metodo della collocazione minime quadrati e le sue applicazioni per l'analisi statistica dei risultati delle compensazioni. *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria CLUP Milano*, 305-338.
- MUSSIO, L. (1987). Estrategias del método de colocación. *IV Curso de Geodesia Superior*. Instituto de Astronomía y geodesia (CSIC-UCM), Madrid, 145-209.
- PARKER R. L. (1973). The rapid calculation of potential anomalies, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 31, 447-455.

- RICHARDSON, R. M. Y MACINNES, S.C. (1989). The Inversion of Gravity Data Into Three-Dimensional Polyhedral Models, *J. Geophys. Res.*, 94, 7555-7562.
- TARANTOLA, A. (1987). *Inverse Problem Theory. Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation*, Elsevier, Amsterdam, 613 páginas.
- XIA, J. Y SPROWL, D. R. (1992). Inversion of potential-field by iterative forward modeling in the wavenumber domain, *Geophysics* 57, 126-130.
- ZHELEV, ZH. (1994). On the Representation of the World Gravity Anomalies Sources with a Final Number of Points Masses, *Bulgarian Geophysical Journal*, XX, n. 2, 57-67.