

4. *Predicción de la corrección de marea en la Península Ibérica*

A. G. CAMACHO Y R. VIEIRA

Instituto de Astronomía y Geodesia (U.C.M.-C.S.I.C.)
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense
28040 MADRID

1. INTRODUCCION

En 1974 iniciamos en España un proyecto de investigación, basado en la observación de variaciones periódicas de la gravedad, con objetivos que abarcan varios campos de las Ciencias de la Tierra (R. Vieira, 1978). Uno de dichos objetivos era el llegar a realizar un suficiente número de observaciones, adecuadamente distribuidas, de forma que a partir de ellas pudieramos obtener la corrección de marea a aplicar a las medidas gravimétricas hechas en cualquier tiempo y lugar de la Península Ibérica. En la actualidad la red de estaciones de marea gravimétrica cubre una gran parte de la superficie peninsular (Figura 1), lo que permite, con una adecuada metodología, aplicar sus resultados con suficiente fiabilidad a aproximadamente el 75 por 100 de dicha unidad geográfica; si bien, conforme se vayan completando todas las observaciones previstas, el modelo se irá mejorando, sobre todo en aquellas zonas en las que el déficit de observaciones es aún notable. En (Ducarme *et al.*, 1978) se presenta un estudio para el cálculo de la corrección gravimétrica en Europa Occidental a partir de las observaciones realizadas desde 1957 en varios países. En dicho trabajo se pone de manifiesto la imposibilidad de extender las conclusiones a la Península Ibérica, pues, si bien existían algunos resultados de estaciones españolas, estos eran insuficientes. El método empleado por estos autores esta basado en la determinación de la corrección gravimétrica a partir de considerar únicamente las componentes $O1$ y $M2$ del potencial lunisolar, que son las más representativas y las que pueden obtenerse con más precisión en períodos de observación inferiores a seis meses. En el presente trabajo hemos considerado para todo el conjunto de las 19 estaciones hoy disponibles de la red Ibérica (tabla 1) la separación del potencial en 13 grupos de ondas (tabla 2), cada uno de los cuales se ha considerado independientemente. La utilización de un modelo semiempírico como el que aquí consideramos frente a un modelo teórico clásico (Sevilla M.

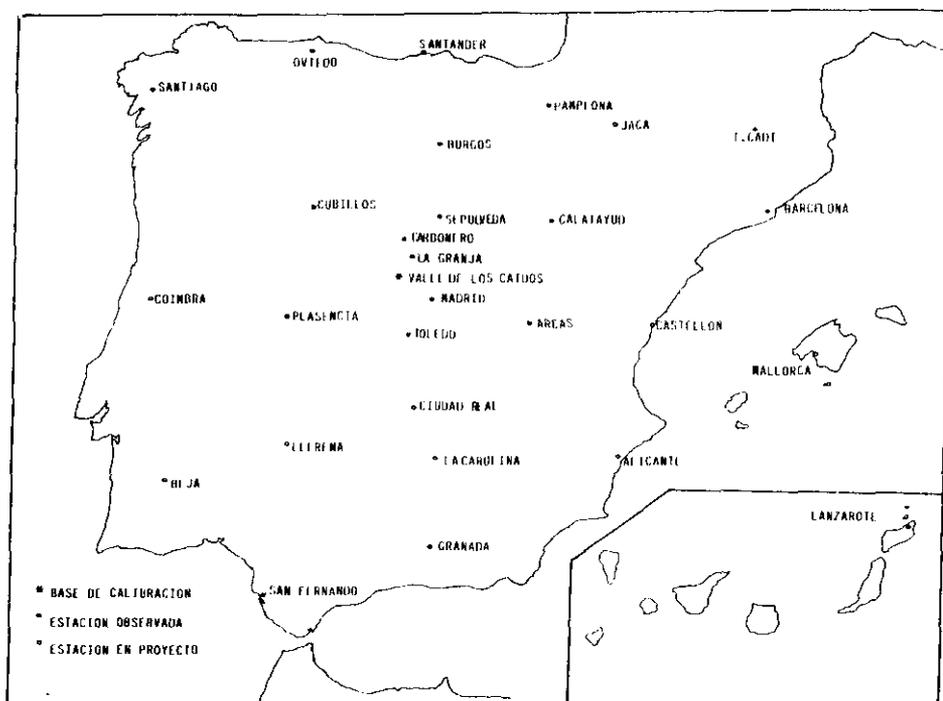


Figura 1.—Red de estaciones de mareas.

J., 1976) puede originar correcciones gravimétricas sensiblemente diferentes, especialmente en un país como España con un elevado efecto oceánico (Vieira *et al.*, 1982), estas diferencias, que dependerán lógicamente del punto de observación y del instante, llegan a ser del orden de $2 \times 10^{-7} \text{ m/seg}^2$, lo que es igual, de $20 \mu\text{gals}$.

2. POTENCIAL DE MAREA

El potencial de marea para un punto P de coordenadas geográficas (φ, λ, h) viene dado por :

$$W(P) = \frac{GM}{d} \sum_{n=2} \left(\frac{r}{d} \right)^n P_n(\cos z)$$

donde G es la constante de gravitación, z , M , d , son respectivamente la distancia cenital local, la masa y la distancia geocéntrica del astro perturbador (Sol, Luna), r la distancia geocéntrica del punto $P(\varphi, \lambda, h)$ y P_n los polinomios de Legendre de grado n .

TABLA 1
Red Ibérica. Estaciones de mareas.

| <i>Estación</i> | <i>Latitud</i> | <i>Longitud</i> | <i>Altitud</i> | |
|-----------------|------------------------|-----------------|----------------|------|
| 1 | Valle de los Caidos | 40.642 | 4.155 | 1200 |
| 2 | San Fernando | 36.462 | 6.205 | 25 |
| 3 | Madrid Facultad | 40.452 | 3.724 | 630 |
| 4 | La Granja | 40.899 | 4.004 | 1191 |
| 5 | Barcelona | 41.503 | -2.089 | 200 |
| 6 | Carbonero | 41.122 | 4.267 | 920 |
| 7 | Burgos | 42.341 | 3.705 | 855 |
| 8 | Santander | 43.466 | 3.807 | 25 |
| 9 | Cubillos | 41.574 | 5.740 | 667 |
| 10 | Santiago de Compostela | 42.881 | 8.545 | 250 |
| 11 | Arcas | 39.988 | 2.115 | 1000 |
| 12 | Ciudad Real | 38.986 | 3.931 | 635 |
| 13 | Calatayud | 41.350 | 1.644 | 531 |
| 14 | Sepúlveda | 41.299 | 3.759 | 1040 |
| 15 | Oviedo | 43.350 | 5.850 | 246 |
| 16 | Granada | 37.187 | 3.592 | 630 |
| 17 | Pamplona | 42.806 | 1.669 | 450 |
| 18 | Plasencia | 40.029 | 6.092 | 657 |
| 19 | Túnel del Cadi | 42.283 | -1.850 | 1170 |

TABLA 2
Constitución de grupos de ondas separables.

| <i>Grupo</i> | <i>Ondas</i> | | <i>Designación</i> | <i>Período</i> | <i>Amplitud</i> |
|--------------|-----------------|-----------------|--------------------|----------------|--------------------|
| <i>Núm.</i> | <i>Reducido</i> | <i>Completo</i> | <i>Grupo</i> | <i>Horas</i> | <i>comparativa</i> |
| 1 | 01- 11 | 01- 62 | Q1 | 26.88 | 7.2 |
| 2 | 12- 21 | 63- 88 | O1 | 25.82 | 37.7 |
| 3 | 22- 29 | 89-100 | M1 | 24.84 | 3.0 |
| 4 | 30- 40 | 111-143 | P1S1K1 | 23.94 | 53.0 |
| 5 | 41- 45 | 144-165 | J1 | 23.11 | 3.0 |
| 6 | 46- 52 | 166-197 | 001 | 22.32 | 1.6 |
| 7 | 53- 58 | 198-236 | 2N2 | 12.88 | 2.8 |
| 8 | 59- 64 | 237-260 | N2 | 12.66 | 17.4 |
| 9 | 65- 69 | 261-286 | M2 | 12.42 | 90.8 |
| 10 | 70- 74 | 287-300 | L2 | 12.20 | 2.6 |
| 11 | 75- 83 | 301-347 | S2K2 | 12.00 | 42.2 |
| 12 | 84- 86 | 348-363 | M3 | 8.28 | 1.2 |
| 13 | 87-116 | 365-484 | MF | 330.27 | 15.6 |

Es suficiente considerar sólo los términos de segundo y tercer grado, $n = 2, 3$.

$$W = GM \left[\frac{r^2}{d^3} P_2(\cos z) + \frac{r^3}{d^4} P_3(\cos z) \right]$$

En esta expresión figuran argumentos, z , d , variables con el tiempo dependiendo de las posiciones del astro y del observador. Será interesante descomponer la anterior expresión en series de funciones del tiempo puramente armónicas separando los factores geodésicos G que dependen de la posición del observador y los astronómicos M que dependen de la posición del astro perturbador (en general de la configuración Sol-Luna-Tierra) y expresar los primeros en función de las coordenadas φ , λ , h del punto y los segundos en función de los elementos astronómicos habituales. Tal desarrollo fue establecido por Doodson en serie de términos armónicos de grado n y orden m . En este desarrollo los coeficientes geodésicos G son comunes para los términos correspondientes al mismo grado ($n = 2, 3$) y para la misma familia de Laplace de marea: largo período ($m = 0$), diurnas ($m = 1$), semidiurnas ($m = 2$) y tercidiurnas ($m = 3$). De este modo expresamos:

$$W = \sum_{n=2}^3 \sum_{m=0}^3 G_{nm} M_{nm} \quad [1]$$

Para evitar complicar los cálculos con términos reales/complejos trasladaremos la longitud de estación λ de modo que no aparezca en los términos geodésicos sino en los astronómicos.

Los coeficientes geodésicos G_{nm} vienen dados por (Melchior, 1983):

$$\begin{aligned} G_{20} &= \frac{1}{2} D(r) (1 - 3 \operatorname{sen}^2 \psi) \\ G_{21} &= D(r) \operatorname{sen} 2 \psi \\ G_{22} &= D(r) \cos^2 \psi \\ G_{30} &= 1.11803 D(r) \frac{r}{a} \operatorname{sen} \psi (3 - 5 \operatorname{sen}^2 \psi) \\ G_{31} &= 0.72618 D(r) \frac{r}{a} \operatorname{sen} \psi (1 - 5 \operatorname{sen}^2 \psi) \\ G_{32} &= 2.59808 D(r) \frac{r}{a} \operatorname{sen} \psi \cos^2 \psi \\ G_{33} &= D(r) \frac{r}{a} \cos^3 \psi \end{aligned} \quad [2]$$

siendo:

$$D(r) = G M \frac{3}{4} \frac{r^2}{c^3} \quad [3]$$

a = semieje ecuatorial del elipsoide terrestre

ψ = latitud geocéntrica, dada por: $\operatorname{tg} \psi = (1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi$

e = excentricidad del elipsoide terrestre

$$\frac{r}{a} = 1 - e \operatorname{sen}^2 \varphi + \frac{h}{a}$$

c = distancia media de la Luna

Los factores M_{nm} corresponden a las diversas combinaciones de argumentos astronómicos en que se descompone el efecto perturbador. Habiendo separado la longitud λ para incluirla en estos términos M podemos expresar:

$$\begin{aligned} M_{20} &= \sum_j A_{20j} \cos \alpha_j \\ M_{21} &= \sum_j A_{21j} \operatorname{sen} (\alpha_j + \lambda) = - \sum_j A_{21j} \cos (\alpha_j + \lambda + \frac{\pi}{2}) \\ M_{22} &= \sum_j A_{22j} \cos (\alpha_j + 2\lambda) \\ M_{30} &= \sum_j A_{30j} \operatorname{sen} \alpha_j = - \sum_j A_{30j} \cos (\alpha_j + \frac{\pi}{2}) \\ M_{31} &= \sum_j A_{31j} \cos (\alpha_j + \lambda) \\ M_{32} &= \sum_j A_{32j} \operatorname{sen} (\alpha_j + 2\lambda) = - \sum_j A_{32j} \cos (\alpha_j + 2\lambda + \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad [4]$$

donde: $\alpha_j = GMST + \pi + \Delta\alpha_j$

con: $GMST$ = tiempo sidereo medio en Greenwich y

$\Delta\alpha_j$ = combinación del tipo $j_1 \tau + j_2 s + j_3 h + j_4 p + J_5 N + j_6 p_1$

de los argumentos astronómicos correspondientes al instante considerado.

Los valores A_{nmj} no nulos correspondientes a las diversas combinaciones j : ($j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6$) de argumentos astronómicos pueden consultarse (hasta 484 ondas) en el desarrollo de Cartwright (Cartwright and Tayler, 1971 y Cartwright and Edden, 1973). A efectos de cálculo, las ondas componentes de marea se agrupan por su proximidad en frecuencia formando grupos en los que prevalece una componente de más relieve, pudiendo aparecer las otras absorbidas en ésta.

3. CORRECCIONES GRAVIMÉTRICAS POR EFECTO DE MAREA

A partir del potencial de marea pueden establecerse las correcciones que por efecto de marea deben aplicarse a las medidas de gravimetría, clinometría, extensometría, nivelación, etc.

Dado el potencial de marea W , la intensidad de la fuerza de marea en la dirección radial es:

$$F_r = - \frac{\partial W}{\partial r} \quad [5]$$

Y en las direcciones perpendiculares a la radial, según el meridiano y el paralelo:

$$F_\varphi = - \frac{\partial W}{r \partial \varphi}$$

$$F_\lambda = - \frac{\partial W}{r \cos \varphi \partial \lambda} \quad [6]$$

Como mejor aproximación a la situación real podemos considerar en vez de la dirección radial y las perpendiculares a ésta, la dirección normal al elipsoide y las perpendiculares a ésta. Si llamamos ϵ a la diferencia entre la latitud geodésica y la geocéntrica:

$$\epsilon = \varphi - \psi = e \operatorname{sen} 2 \varphi$$

y ya que la diferencia entre las normales se produce en un plano meridiano, la componente Z de la intensidad de la fuerza de marea en la dirección normal será:

$$Z = - \frac{\partial W}{\partial n} = F_r \cos \epsilon + (-F_\varphi) \operatorname{sen} \epsilon = - \left(\frac{\partial W}{\partial r} \cos \epsilon + \frac{\partial W}{r \partial \varphi} \operatorname{sen} \epsilon \right) \quad [7]$$

Si aquí sustituimos W por (1) resulta:

$$Z = \sum_{n, m} Z_{nm} M_{nm} = \sum_{n, m} Z_{nm} \sum_j A_{nmj} \cos \operatorname{sen} (\alpha_j + m\lambda) \quad [8]$$

donde los coeficientes geodésicos para la componente vertical de la intensidad de la fuerza de marea se deducen inmediatamente de los G derivando y sumando (Melchior, 1983):

$$Z_{20} = -C_v(r) \left[(1 - 3 \operatorname{sen}^2 \psi) \cos \epsilon - \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2 \psi \operatorname{sen} \epsilon \right]$$

$$Z_{21} = -2 C_v(r) (\operatorname{sen} 2 \psi \cos \epsilon + \cos 2 \psi \operatorname{sen} \epsilon)$$

$$Z_{22} = -C_v(r) (2 \cos^2 \psi \cos \epsilon - \operatorname{sen} 2 \psi \operatorname{sen} \epsilon)$$

[9]

$$Z_{30} = -3.35409 C_v(r) \frac{r}{a} \left[\begin{array}{l} \text{sen } \psi (3 - 5 \text{ sen}^2 \psi) \cos \epsilon - \\ - \cos \psi (5 \text{ sen}^2 \psi - 1) \text{ sen } \epsilon \end{array} \right]$$

$$Z_{31} = -0.72618 C_v(r) \frac{r}{a} \left[\begin{array}{l} 3 \cos \psi (1 - 5 \text{ sen}^2 \psi) \cos \epsilon - \\ - \text{sen } \psi (15 \cos^2 \psi - 4) \text{ sen } \epsilon \end{array} \right]$$

$$Z_{32} = -2.59808 C_v(r) \frac{r}{a} \left[\begin{array}{l} 3 \text{ sen } \psi \cos^2 \psi \cos \epsilon + \\ + (1 - 3 \text{ sen}^2 \psi) \cos \psi \text{ sen } \epsilon \end{array} \right]$$

$$Z_{33} = -3 C_v(r) \frac{r}{a} (\cos^3 \psi \cos \epsilon - \cos^2 \psi \text{ sen } \psi \text{ sen } \epsilon)$$

con:

$$C_v(r) = \frac{D(r)}{r} = G M \frac{3}{4} \frac{r}{a^3} \left(\frac{a}{c} \right)^3 \quad [10]$$

Los anteriores cálculos y expresiones están programadas y puede obtenerse de forma automática el valor de la componente vertical de marea en un punto y para un instante dado.

Tal como estamos actuando, esta componente vertical de la intensidad de la fuerza de marea sería debida exclusivamente al gradiente vertical del potencial de marea. Esto reflejaría el efecto que correspondería a una Tierra rígida. Sin embargo, en una Tierra deformable el fenómeno de marea produce variaciones de la posición de los puntos y genera potenciales gravitatorios adicionales debidos al desplazamiento de masas y todo ello según la reología propia de la Tierra (elasticidad, núcleo líquido, discontinuidades de la corteza, etc.). Por otra parte y especialmente en la Península Ibérica, los mares circundantes y sus movimientos de marea producen efectos muy sensibles en los registros de marea gravimétrica a través del potencial gravitatorio adicional de esas masas y los efectos de carga sobre las plataformas litorales.

De todo ello, resulta que los fenómenos observables debidos a las mareas no corresponden exactamente con los que se deducen derivando exclusivamente el potencial de marea. Si consideramos los efectos de marea como superposición de ondas de diversa amplitud y argumento, la perturbación respecto a la rigidez terrestre se traduce en modificaciones de las amplitudes y argumentos teóricos de dicho desarrollo. De este modo, para una Tierra realista podemos expresar:

$$Z = \sum_{n, m} Z_{nm} \sum_j \delta_{nmj} A_{nm} \cos(\alpha_j + m\lambda + \phi_{nmj}) \quad [11]$$

δ_{nmj} = factor de modificación de la amplitud para la onda nmj
 ϕ_{nmj} = desfase correspondiente a la onda nmj

Abreviadamente escribiremos:

$$Z = \sum \delta A \cos (\alpha + m \lambda + \phi)$$

4. DETERMINACION DE FACTORES DE MAREA EN LA PENINSULA IBERICA

Se pueden deducir valores de δ , ϕ considerando un modelo de Tierra deformable (por ejemplo el modelo de Molodensky), o bien comparando registros de marea gravimétrica con las previsiones teóricas y aplicando los parámetros δ , ϕ así determinados al entorno de la estación de registro. El trabajar con valores δ , ϕ determinados en algunas estaciones situadas en el territorio de aplicación tiene la ventaja de su mayor adecuación a las características reológicas y geológicas del territorio considerado frente a los valores meramente orientativos de un modelo general. Consideraremos aquí la formación de un modelo de respuesta de marea para la Península Ibérica en función de los valores obtenidos en la red de estaciones.

En primer lugar, la observación práctica, limitada en el tiempo, permite deducir valores δ , ϕ para grupos de ondas de frecuencias próximas a lo largo del espectro de frecuencias. La tabla 2 presenta la distribución adoptada de ondas (según numeración del desarrollo de Cartwright) en grupos, indicándose el período en horas y la amplitud en μgal de forma comparativa.

Estudiaremos el modelo para cada grupo y supondremos que cada onda de un mismo grupo verifica dicho modelo.

Debemos señalar que en los valores observados para cada estación hay fenómenos de diferente ámbito geográfico:

1) Los errores de observación son estrictamente puntuales y supuestamente aleatorios, y han de filtrarse en cualquier caso.

2) Los efectos de la geología muy local (por ejemplo en un área de una decena de km). Estos pueden asimilarse a errores de observación que conviene filtrar, al menos a efectos de formar un modelo conjunto de la Península.

3) Los efectos de la geología próxima en una zona bastante extensa (por ejemplo un centenar de km), pero que no llega a contener otras estaciones de la Red. Estos fenómenos tal vez deberían reflejarse en el modelo global, pero por haber poca densidad de puntos en esa zona no tenemos en principio datos suficientes para fijar la fisonomía del fenómeno.

4) Los efectos en áreas extensas que contienen varias estaciones (por ejemplo cerca de un litoral). Estos se detectarán bien mediante el cálculo.

Para la aplicación del modelo a la determinación de factores para el cálculo de la corrección de marea en la Península es claro que dicho modelo habrá de reflejar los fenómenos generalizables observados en cada estación (señal s) desechando los efectos puramente locales (ruido r) no generalizables.

Por otra parte el ruido detectable en cada estación puede utilizarse para investigar la naturaleza de las perturbaciones locales sobre las medidas de marea.

Planteamos para la formación del modelo de las diversas componentes el método de predicción mínimos cuadrados, admitiendo previamente la verificación de las condiciones teóricas de aplicabilidad. Dicho método se aplica repetidamente para el factor de amplitud y el desfase de cada componente.

La primera conclusión es que, aún siendo España un país bien dotado de estaciones de marea, el número de estaciones, diecinueve, resulta escaso para poder aplicar de forma cómoda y decisiva el método de predicción, sobre todo en lo referente a la determinación de la función covarianza y la separación señal (s)-ruido (r). En este sentido, los resultados que aquí se obtienen no tienen carácter definitivo. En (Camacho, Vieira, Toro, 1989) se considera toda la red de estaciones de Europa Occidental. En dicho trabajo las condiciones son más favorables y pueden obtenerse valores para España como particularización del modelo europeo.

Para una adecuada aplicación del método de predicción mínimos cuadrados es necesario que los datos estén libres de efectos sistemáticos generales. Mussio (1984) sugiere la aproximación polinómica previa como procedimiento adecuado para eliminar sistematismos p . Si llamamos d a los datos originales (factores de amplitud y desfase) expresamos:

$$d = p + v$$

donde p son los sistematismos generales y v los residuos de carácter aleatorio a los que se aplicará el posterior proceso de predicción.

En nuestro caso parece clara la presencia de efectos muy globales que han de tratarse como sistematismos. Dado el reducido número de estaciones y tras algún tanteo hemos considerado como aproximación inicial la dada por un polinomio de grado 1 (plano inclinado), cuyos coeficientes se han ajustado por el método de mínimos cuadrados. En las tablas 3a y 3b se presentan los errores medios cuadráticos del ajuste de cada polinomio así como los valores medios y de desviación típica σ de los datos d (factores y desfases) y de los residuos v .

En la figura 4 se representa mediante isolíneas la superficie polinómica de aproximación inicial en el caso de los factores de amplitud para M_2 .

El proceso de predicción/filtrado para los residuos v comienza con la determinación de la función covarianza, en este caso como estimación empírica a partir de la covarianza de los propios datos (Barzagui y Sanso, 1983). Suponemos la covarianza dependiente de la distancia ángulo esférico. Para dicha estimación empírica es necesario determinar previamente el intervalo de distancia óptimo de agrupamiento de pares de puntos para la formación de los datos discretos de correlación. El criterio habitual (Mussio 1984, 1987) es la minimización de la diferencia entre la varianza σ_v^2 de los

TABLA 3a
Ajuste polinómico de grado I para los factores de amplitud.

| <i>Grupo</i> | <i>Media</i> | σ_d | <i>e.m.c.</i> | σ_v |
|--------------|--------------|------------|---------------|------------|
| Q1 | 1.161 | 0.020 | 1.002 | 0.019 |
| O1 | 1.150 | 0.010 | 1.052 | 0.098 |
| M1 | 1.174 | 0.065 | 0.921 | 0.057 |
| K1 | 1.139 | 0.012 | 0.934 | 0.011 |
| J1 | 1.187 | 0.062 | 0.954 | 0.055 |
| OO1 | 1.161 | 0.117 | 1.029 | 0.114 |
| 2N2 | 1.041 | 0.047 | 0.816 | 0.036 |
| N2 | 1.110 | 0.030 | 0.633 | 0.017 |
| M2 | 1.152 | 0.022 | 0.443 | 0.009 |
| L2 | 1.199 | 0.116 | 1.032 | 0.113 |
| S2K2 | 1.199 | 0.026 | 0.594 | 0.014 |
| M3 | 1.056 | 0.064 | 0.849 | 0.051 |
| MF | 1.16 | | | |

TABLA 3b
Ajuste polinómico de grado I para los desfases.

| <i>Grupo</i> | <i>Media</i> | σ_d | <i>e.m.c.</i> | σ_v |
|--------------|--------------|------------|---------------|------------|
| Q1 | -0.74 | 1.26 | 1.021 | 1.21 |
| O1 | -0.23 | 0.28 | 0.801 | 0.21 |
| M1 | 1.37 | 2.98 | 1.037 | 2.91 |
| K1 | 0.57 | 0.40 | 1.013 | 0.38 |
| J1 | 0.76 | 3.45 | 0.925 | 3.00 |
| OO1 | -0.62 | 6.52 | 1.012 | 6.22 |
| 2N2 | 4.42 | 5.10 | 0.702 | 3.37 |
| N2 | 6.08 | 3.39 | 0.516 | 1.65 |
| M2 | 5.95 | 2.80 | 0.588 | 1.55 |
| L2 | 3.14 | 5.31 | 0.769 | 3.84 |
| S2K2 | 4.08 | 2.58 | 0.623 | 1.06 |
| M3 | -2.52 | 3.93 | 1.055 | 3.91 |
| MF | 1.16 | | | |

datos y la covarianza γ determinada para el primer intervalo de distancias. Ello es equivalente a minimizar la estima de la varianza σ_v^2 del ruido.

Por ejemplo, en el caso particular de los factores de amplitud para la componente M_2 la figura 2a representa la gráfica de los valores $\sigma_v^2 - \gamma$ para diversas amplitudes de intervalo de estimación de la covarianza. Observamos un mínimo en la amplitud de intervalo de 1.9° . En la figura 2b se ha repetido

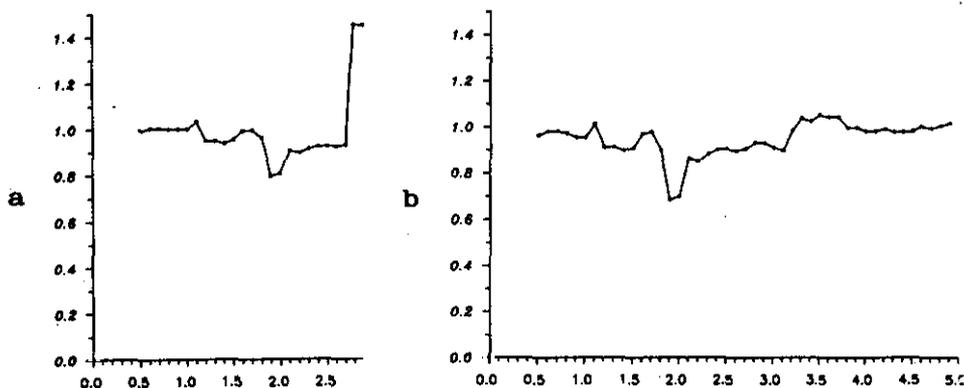


Figura 2.—Determinación de intervalo óptimo de correlación.

el mismo análisis pero no incluyendo ahora la estación de San Fernando, que tiene características muy singulares, acentuándose ligeramente el carácter de mínimo en 1.9° .

Análogo procedimiento se ha planteado para los desfases y para todas las componentes. Los intervalos óptimos determinados oscilan en torno a $2.^\circ$.

La distribución discreta de puntos de covarianza empírica se ajusta mediante una función adecuada (función covarianza, definida positiva). En (Mussio, 1987) se presentan tipos habituales de funciones covarianza teórica. En nuestro caso, dado el aspecto de las distribuciones puntuales, hemos adoptado la función exponencial-Bessel de orden cero

$$y = f(x) = a e^{-bx} J_0(cx) \quad [12]$$

para ajustar las covarianzas empíricas. Donde J_0 es la función de Bessel de orden cero.

La figura 3 representa las funciones covarianza ajustadas para los factores de amplitud y desfases para la componente M_2 . En ambas figuras en el eje Y se ha adoptado como unidad la varianza de los datos. La función covarianza obtenida representa la delimitación entre la señal s con covarianza determinada por dicha función $C(d)$ de la distancia esférica y el ruido incorrelado r .

$$v = s + r$$

La varianza de la señal viene dada por:

$$\sigma_s^2 = C(0) = a \quad [13]$$

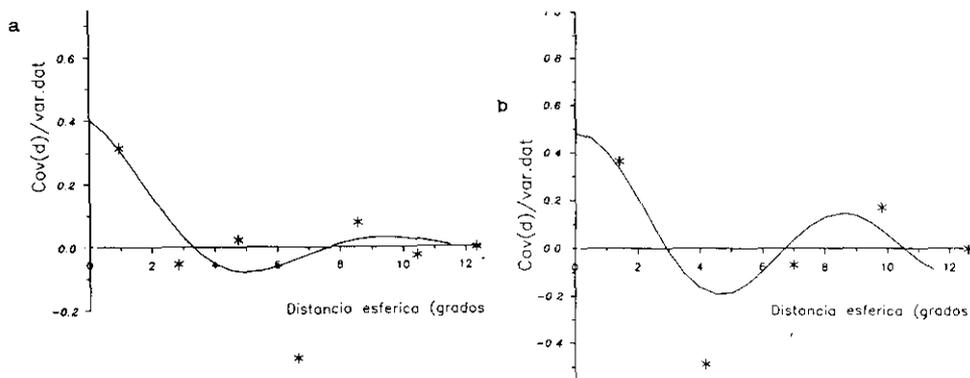


Figura 3.—Funciones de covarianza para M_2 : a) factores de amplitud; b) desfases.

mientras que:

$$\sigma_r^2 = \sigma_v^2 - \sigma_s^2 \quad [14]$$

es la varianza del ruido. La relación entre estos valores (tabla 4) nos determina la mayor o menor proporción de fenómeno correlado detectable respecto al nivel de ruido incorrelado.

Observamos respecto a estos parámetros y su determinación diferencias sensibles de unas componentes a otras. Las componentes de marea más importantes o de mayor magnitud se pueden estudiar mejor, dando aceptables proporciones de señal, mientras que las componentes débiles son en su mayor parte ruido alto respecto a la media (fenómenos locales u observacionales). Observamos también claramente que las componentes diurnas presentan mucho menor nivel de señal que las semidiurnas, aún siendo de magnitud similar a las semidiurnas, y teniendo incluso menor nivel de ruido. Estas componentes diurnas presentan una escasa señal para poder formar unos modelos de predicción significativos. Todo ello viene determinado por la escasa densidad de estaciones. En la tabla 4 se dan parámetros de covarianza para las tres componentes con señal apreciable (en este sentido no se han considerado las estaciones de S. Fernando y Santander en M_2 y N_2 respectivamente).

Siendo las componentes diurnas de marea de magnitudes similares a las semidiurnas y resultando en el análisis de los registros errores estimados en la determinación de factores y desfases también parecidos, debemos pensar en una menor longitud de onda de los fenómenos diurnos (de modo que muchos de los efectos presentes no alcanzan a manifestarse suficientemente en estaciones vecinas), o, más bien una escasez de fenómenos perturbadores globales fuertes de longitud de onda larga en frecuencias diurnas.

Dado el fuerte carácter semidiurno que en nuestras latitudes tienen las mareas oceánicas es lógico pensar que la mayor parte de las señales detectadas en dichas frecuencias son debidas al efecto oceánico.

En estas circunstancias sólo hemos llevado a término el estudio de funciones covarianza y modelos de predicción para los residuos de M_2 , N_2 , S_2 , K_2 (amplitudes y fases), para los cuales nos resultan valores de la varianza de la señal de un 30 o 40 por 100 de la varianza de los residuos totales. Para las restantes componentes (para las que resultan valores menores del 10 por 100) consideraremos la aproximación polinómica inicial como la única significativa, con residuos incorrelados.

TABLA 4a

Relación señal/ruido estimada para los factores de amplitud.

| Grupo | Media | σ_v | σ_s | σ_r | σ_s^2 / σ_v^2 | Inter. | Dist. | σ_0 |
|-------|--------|------------|------------|------------|---------------------------|--------|-------|------------|
| N2 | 1.1100 | 0.0152 | 0.0076 | 0.0131 | 25% | 2.3 | 2.35 | 0.0090 |
| M2 | 1.1521 | 0.0073 | 0.0046 | 0.0057 | 40% | 1.9 | 3.31 | 0.0017 |
| S2K2 | 1.1989 | 0.0144 | 0.0079 | 0.0120 | 30% | 1.7 | 1.82 | 0.0035 |

Inter.: intervalo de estimación de covarianza.

Dist.: distancia (grados) de covarianza nula.

TABLA 4b

Relación señal/ruido estimada para los desfases (grados).

| Grupo | Media | σ_v | σ_s | σ_r | σ_s^2 / σ_v^2 | Inter. | Dist. | σ_0 |
|-------|-------|------------|------------|------------|---------------------------|--------|-------|------------|
| N2 | 6.085 | 1.652 | 1.070 | 1.258 | 42% | 2.1 | 2.22 | 0.484 |
| M2 | 5.955 | 1.127 | 0.781 | 0.813 | 48% | 2.8 | 3.00 | 0.116 |
| S2K2 | 4.084 | 1.062 | 0.582 | 0.889 | 30% | 1.2 | 2.80 | 0.163 |

Obtenida la función covarianza $C = C(d)$ para cada componente, los elementos de la matriz de varianzas-covarianzas para la señal s vienen dados por:

$$C_{ij} = \text{Cov}(s(P_i), s(P_j)) = C(\text{dist.}(P_i, P_j)) \quad [15]$$

A partir de ésta, llamando \hat{s} a la señal filtrada en un punto dado, \hat{z} la señal predicha para un punto cualquiera, las fórmulas generales del método de

predicción mínimo cuadrados (Moritz, 1980; Sevilla, 1987) nos permiten calcular:

$$\begin{aligned}\hat{z} &= C_{zs} (C_{ss} + C_{rr})^{-1} v && \text{predicción} \\ \hat{s} &= C_{ss} (C_{ss} + C_{rr})^{-1} v && \text{filtrado}\end{aligned}\quad [16]$$

donde la matriz de covarianza del ruido es:

$$C_{rr} = \sigma_r^2 I = (\sigma_v^2 - C(0)) I \quad [17]$$

En el caso de los factores de amplitud y desfases para M_2 , la figura 5 representa mediante isolíneas el modelo de predicción para los residuales v .

Podemos calcular también la precisión, en forma de matriz de varianzas-covarianzas E de estos valores estimados s , z por predicción mínimos cuadrados (Sevilla, 1987):

$$\begin{aligned}E_{zz} &= C_{zz} - C_{zs} (C_{ss} + C_{rr})^{-1} C_{sz} \\ E_{ss} &= C_{ss} - C_{ss} (C_{ss} + C_{rr})^{-1} C_{ss}\end{aligned}\quad [18]$$

Los términos de la diagonal principal de E_{zz} y E_{ss} nos dan las varianzas de los valores calculados de la señal en cada punto.

En las tablas 5 y 6, figuran los valores filtrados de factores de amplitud y desfases para las componentes M_2 y $S_2 K_2$ menos ruidosas.

Observando las diferencias (residuos) entre los datos y los valores filtrados detectamos estaciones especialmente ruidosas o aberrantes (según el error medio cuadrático del valor estimado y el criterio de detección de valores aberrantes), especialmente las costeras (Santander, San Fernando,...). No obstante, las estaciones que resultan aberrantes para una componente no lo resultan para otras. Las perturbaciones locales actúan más fuertemente en unas frecuencias que en otras. (Veremos posteriormente que incluso la morfología de los mapas del modelo es diferente de unas componentes a otras, aunque siempre con una polaridad hacia los litorales). Considerando lo anterior y teniendo en cuenta el escaso número de estaciones y su ajustada distribución, no hemos eliminado ninguna para el cálculo de los modelos (lo cual redundaría en una mayor cobertura pero una peor calidad).

En las figuras 4, 5, 6 se han representado para M_2 , amplitudes y desfases, las superficies polinómicas parciales, las superficies de predicción de los residuos y, también mediante isolíneas, la distribución de los errores medios cuadráticos de predicción.

Las figuras de error de la predicción son muy similares; se observa una zona central de mayor calidad algo hacia el Norte y alargada según el meridiano central y posteriormente alargada también según el paralelo de Barcelona Cubillos. Dicha configuración refleja más o menos la mayor concentración de estaciones. Los cuadrantes *SE* y *SO* resultan más erróneos como corresponde a su menor número de estaciones.

TABLA 5
Filtrado de factores de amplitud y desfases. Componente M_2 .

| Estación | Factor de amplitud | | | | | Desfase | | | | |
|---------------------|--------------------|------|--------|------|--------|---------|------|--------|------|--------|
| | obser. | emc. | filtr. | emc. | difer. | obser. | emc. | filtr. | emc. | difer. |
| Valle de los Caídos | 1.143 | .001 | 1.146 | .002 | -.003 | 5.10 | 0.1 | 4.83 | 0.31 | 0.27 |
| San Fernando | 1.087 | .003 | 1.102 | .004 | -.014 | 6.64 | 0.2 | 5.61 | 0.52 | 1.03 |
| Madrid Facultad | 1.144 | .001 | 1.147 | .002 | -.003 | 4.75 | 0.1 | 4.38 | 0.31 | 0.36 |
| La Granja | 1.145 | .001 | 1.148 | .002 | -.003 | 5.06 | 0.1 | 5.08 | 0.30 | -0.02 |
| Barcelona | 1.174 | .002 | 1.178 | .003 | -.004 | 3.12 | 0.1 | 2.54 | 0.47 | 0.58 |
| Carbonero | 1.152 | .002 | 1.148 | .002 | .004 | 4.96 | 0.1 | 5.48 | 0.31 | -0.59 |
| Burgos | 1.168 | .003 | 1.159 | .003 | .009 | 6.26 | 0.2 | 7.46 | 0.36 | -1.21 |
| Santander | 1.172 | .003 | 1.166 | .003 | .005 | 12.74 | 0.1 | 9.68 | 0.43 | 3.07 |
| Cubillos | 1.140 | .001 | 1.143 | .003 | -.003 | 6.38 | 0.1 | 7.06 | 0.40 | -0.68 |
| Santiago | 1.141 | .001 | 1.139 | .004 | .003 | 11.27 | 0.1 | 10.98 | 0.51 | 0.30 |
| Arcas | 1.151 | .002 | 1.151 | .003 | .000 | 3.89 | 0.1 | 3.21 | 0.42 | 0.67 |
| Ciudad Real | 1.145 | .001 | 1.141 | .003 | .004 | 3.75 | 0.1 | 3.74 | 0.41 | 0.01 |
| Calatayud | 1.158 | .001 | 1.160 | .003 | -.002 | 4.47 | 0.1 | 4.35 | 0.42 | 0.12 |
| Sepúlveda | 1.147 | .002 | 1.151 | .002 | -.004 | 5.25 | 0.1 | 5.56 | 0.30 | -0.31 |
| Oviedo | 1.144 | .002 | 1.151 | .003 | -.007 | 11.12 | 0.1 | 10.49 | 0.47 | 0.63 |
| Granada | 1.146 | .001 | 1.134 | .003 | .012 | 3.62 | 0.1 | 3.38 | 0.48 | 0.23 |
| Pamplona | 1.168 | .002 | 1.170 | .003 | -.002 | 5.99 | 0.1 | 6.25 | 0.46 | -0.27 |
| Plasencia | 1.140 | .001 | 1.134 | .003 | .006 | 5.95 | 0.1 | 5.53 | 0.44 | 0.42 |
| Túnel de Cadi | 1.184 | .002 | 1.182 | .003 | .002 | 2.81 | 0.1 | 3.03 | 0.47 | -0.23 |

El modelo final de predicción para las componentes con señal detectable resulta de sumar la aproximación polinómica y la posterior predicción mínimos cuadrados de los residuos, obteniéndose los mapa de isolíneas de las figuras 7 y 8.

Para las componentes semidiurnas resulta un mayor nivel de señal y el modelo se adapta bien a los datos de observación y presenta altas oscilaciones con una morfología clara. Los mapas correspondientes a componentes diurnas son mucho más planos y menor definidos, limitándose a indicar una suave tendencia global.

Otro tipo de imagen de los modelos obtenidos y los residuales se presenta en las figuras 9a, b, c... En dichas figuras se ha representado un perfil meridiano (la franja comprendida entre los meridianos 4° y $5^\circ W$) de los modelos de factor de amplitud y desfases indicando la posición de los valores observados y el tamaño de los residuales de las estaciones incluidas en dicha franja:

| | | | |
|----|-----------|----|---------------------|
| 8 | Santander | 1 | Valle de los Caídos |
| 7 | Burgos | 3 | Madrid Facultad |
| 6 | Carbonero | 12 | Ciudad Real |
| 14 | Sepúlveda | 16 | Granada |
| 4 | La Granja | | |

TABLA 6

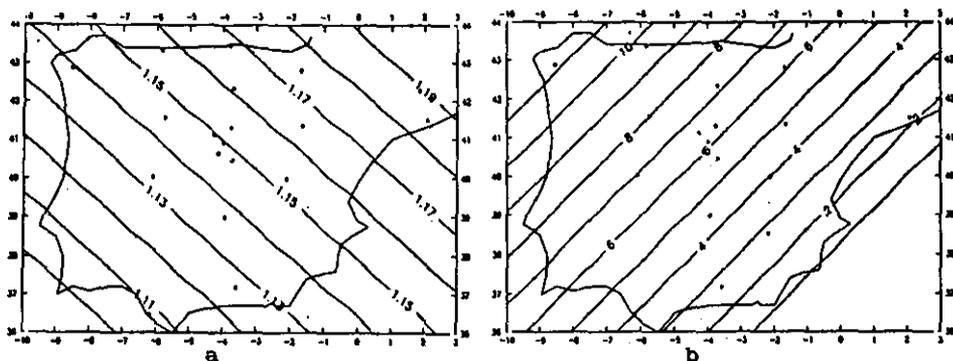
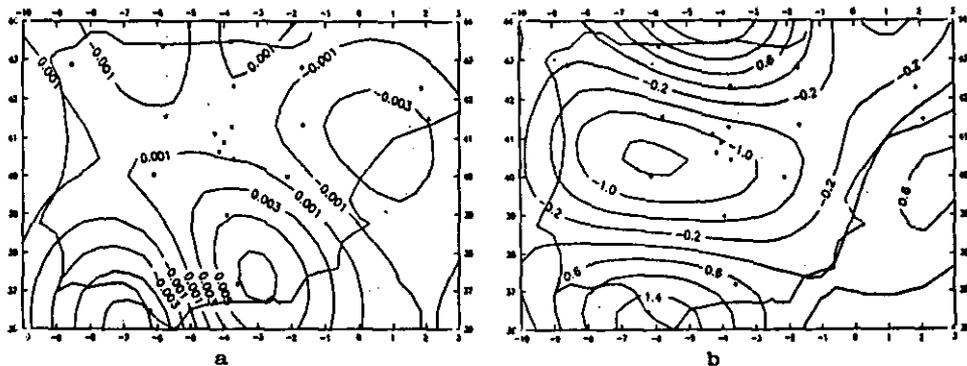
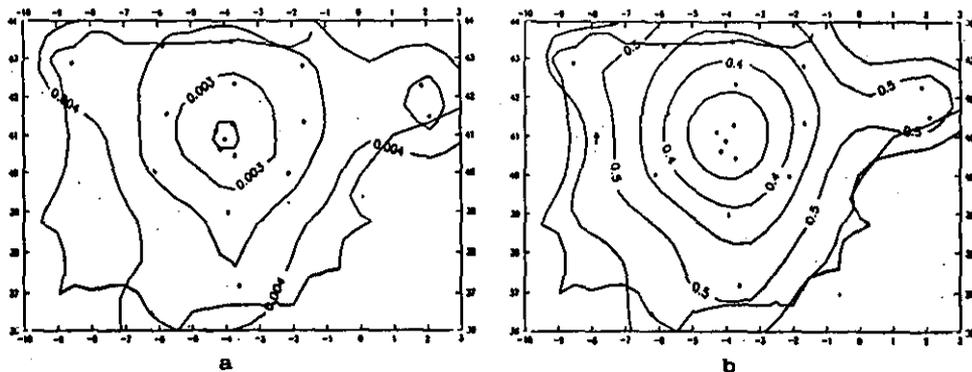
Filtrado de factores de amplitud y desfases. Componente $S_2 K_2$.

| Estación | Factor de amplitud | | | | | Desfase | | | | |
|---------------------|--------------------|------|--------|------|--------|---------|------|--------|------|--------|
| | obser. | emc. | filtr. | emc. | difer. | obser. | emc. | filtr. | emc. | difer. |
| Valle de los Caídos | 1.183 | .002 | 1.190 | .005 | -.007 | 3.76 | 0.1 | 3.36 | 0.31 | 0.39 |
| San Fernando | 1.147 | .007 | 1.144 | .006 | .003 | 5.92 | 0.3 | 4.69 | 0.45 | 1.23 |
| Madrid Facultad | 1.184 | .002 | 1.187 | .005 | -.003 | 2.43 | 0.1 | 3.06 | 0.32 | -0.63 |
| La Granja | 1.180 | .002 | 1.196 | .004 | -.015 | 4.10 | 0.1 | 3.42 | 0.31 | 0.67 |
| Barcelona | 1.195 | .004 | 1.189 | .006 | .006 | 2.30 | 0.2 | 1.49 | 0.42 | 0.80 |
| Carbonero | 1.194 | .005 | 1.200 | .005 | -.006 | 2.59 | 0.2 | 3.71 | 0.31 | -1.12 |
| Burgos | 1.234 | .006 | 1.231 | .006 | .003 | 3.48 | 0.3 | 4.40 | 0.36 | -0.92 |
| Santander | 1.260 | .005 | 1.247 | .006 | .013 | 6.20 | 0.2 | 5.38 | 0.41 | 0.82 |
| Cubillos | 1.199 | .002 | 1.208 | .006 | -.010 | 4.89 | 0.1 | 5.08 | 0.38 | -0.19 |
| Santiago | 1.251 | .003 | 1.245 | .006 | .006 | 7.84 | 0.1 | 7.70 | 0.45 | 0.14 |
| Arcas | 1.169 | .005 | 1.177 | .006 | -.008 | 3.00 | 0.2 | 2.45 | 0.40 | 0.55 |
| Ciudad Real | 1.178 | .002 | 1.176 | .006 | .002 | 2.95 | 0.1 | 2.94 | 0.40 | 0.01 |
| Calatayud | 1.193 | .002 | 1.196 | .006 | -.003 | 2.90 | 0.1 | 3.09 | 0.40 | -0.19 |
| Sepúlveda | 1.225 | .004 | 1.205 | .005 | .020 | 3.39 | 0.2 | 3.57 | 0.31 | -0.18 |
| Oviedo | 1.234 | .003 | 1.235 | .006 | -.001 | 7.86 | 0.1 | 6.61 | 0.42 | 1.25 |
| Granada | 1.178 | .003 | 1.160 | .006 | .018 | 2.76 | 0.2 | 2.89 | 0.43 | -0.13 |
| Pamplona | 1.204 | .003 | 1.214 | .006 | -.011 | 4.86 | 0.2 | 3.91 | 0.42 | 0.95 |
| Plasencia | 1.194 | .002 | 1.193 | .006 | .002 | 4.78 | 0.1 | 4.58 | 0.41 | 0.20 |
| Túnel de Cadi | 1.197 | .004 | 1.201 | .006 | -.004 | 1.58 | 0.2 | 1.85 | 0.42 | -0.28 |

En estos perfiles se observa claramente la casi nula presencia de señal en las componentes diurnas frente a unos modelos de morfología clara en las componentes semidiurnas. También se puede apreciar la distribución y proporción de residuos entre las diversas componentes y estaciones.

5. APLICACION NUMERICA

Para un punto arbitrario sobre la Península Ibérica los factores de amplitud y desfase de marea pueden apreciarse en las diferentes figuras, así como calcularse sus correspondientes valores de error medio cuadrático. No obstante como datos finales para el cálculo de la corrección de marea nos interesaría los valores estimados de los observables. Es decir, no sólo el más o menos suave valor global sino el posible efecto local o regional (no ruido observacional) adicional. El ruido adicional en los puntos datos es conocido. Sin embargo es difícil en principio separar el ruido estrictamente puntual (observacional) que debe ser eliminado, del ruido correspondiente a efectos regionales de corta longitud de onda. En los puntos no observados la «predicción» del ruido será cero y tomaremos como valor observable la señal más o menos suavizada. Sin embargo, el error de determinación de este

Figura 4.—Ajuste polinómico previo para M_2 : a) factores; b) desfases.Figura 5.—Predicción de residuos para M_2 : a) factores; b) desfases.Figura 6.—Errores m.c. de predicción para M_2 : a) factores; b) desfases.

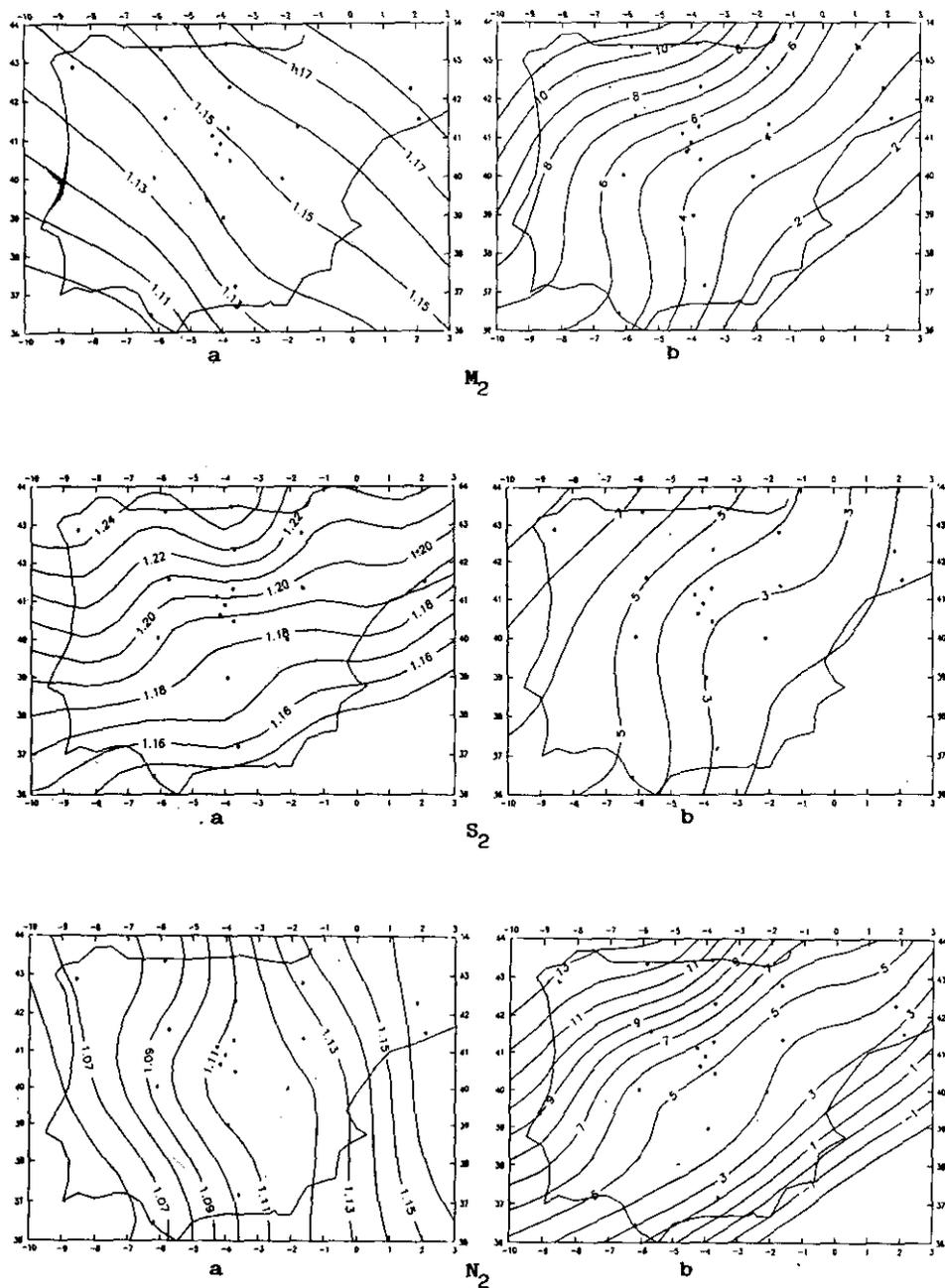


Figura 7.—Modelos finales para las principales componentes semidiurnas: a) factores de amplitud; b) desfases.

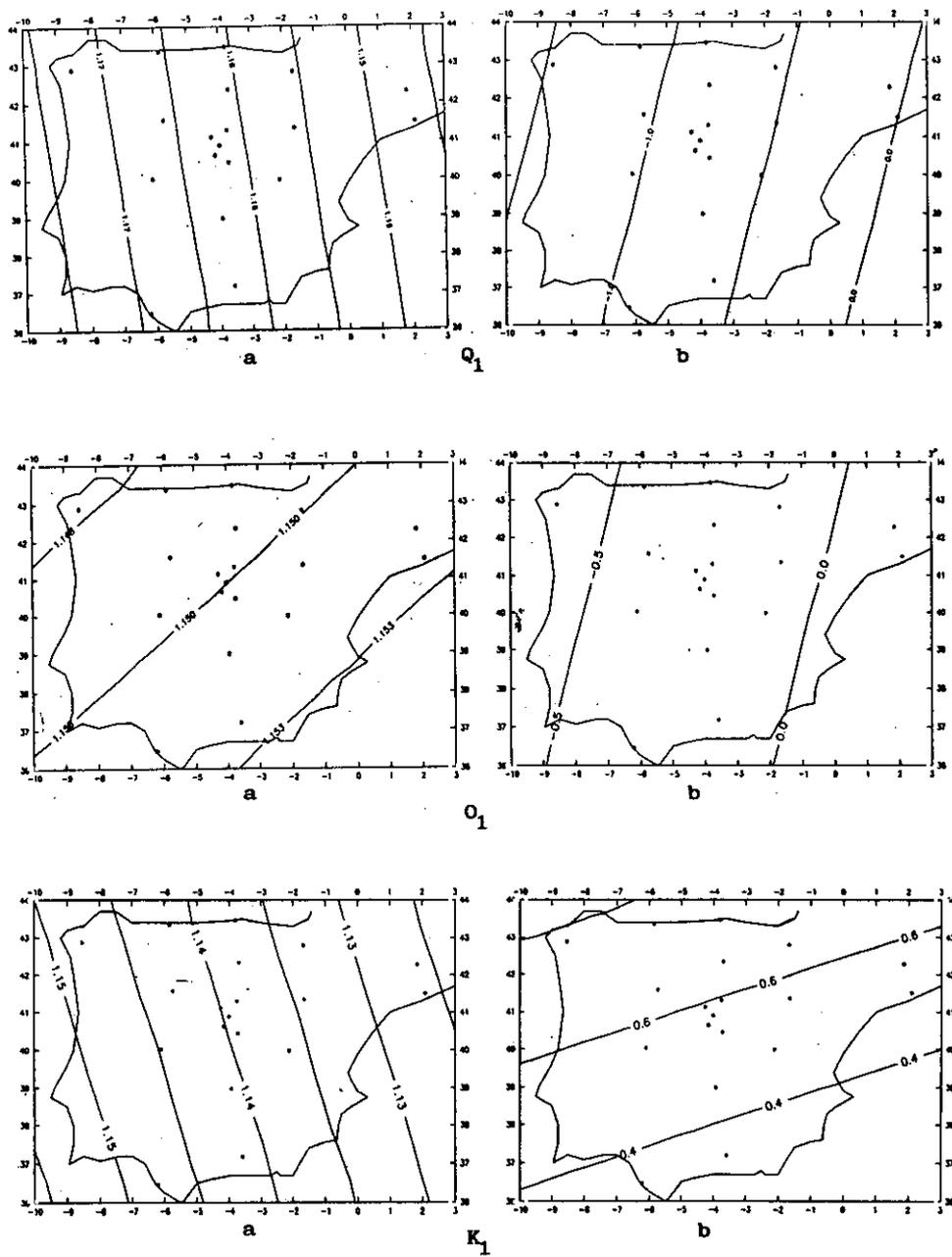


Figura 8.—Modelos finales para las principales componentes diurnas: a) factores de amplitud; b) desfases.

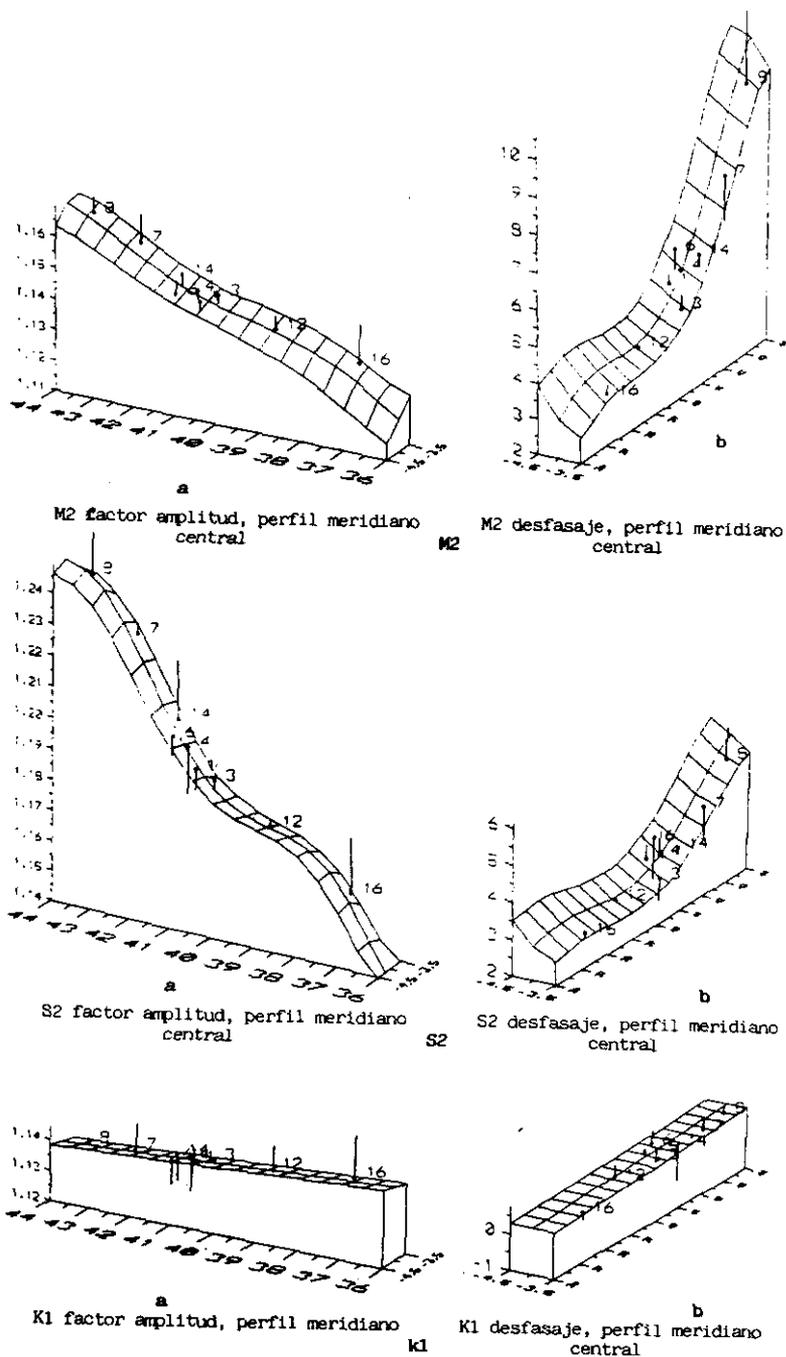


Figura 9.—Perfiles meridianos centrales de los modelos: a) factores de amplitud; b) desfases.

observable será el correspondiente a la señal de predicción detectada más el nivel de ruido global:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_r^2} \quad [19]$$

Para las componentes sin señal suficiente tomamos $\sigma_s = 0$ y $\sigma_r = \sigma_v$.

Para las componentes más significativas podemos, a efectos de no incluir el ruido estrictamente puntual u observacional, restar al nivel de ruido σ_r^2 general el σ_o^2 correspondiente al error medio cuadrático estimado en la determinación (análisis espectral) de los valores de estación.

Por ejemplo para $\varphi = 41^\circ$ $\lambda = 6^\circ W$ es:

TABLA 7

Factores de amplitud, desfases y errores obtenidos para $\varphi = 41^\circ$ $\lambda = 6^\circ W$.

| | δ | σ_s | σ_r | σ_o | σ_v | ϕ (gr.) | σ_s | σ_r | σ_o | σ_v |
|------|----------|------------|------------|------------|------------|--------------|------------|------------|------------|------------|
| Q1 | 1.162 | .0 | .019 | .023 | .019 | -1.01 | 0. | 1.21 | 1.15 | 1.21 |
| O1 | 1.149 | .0 | .010 | .005 | .008 | -0.40 | 0. | 0.21 | 0.23 | 0.21 |
| M1 | 1.148 | .0 | .057 | .059 | .057 | 1.76 | 0. | 2.92 | 2.93 | 2.92 |
| K1 | 1.143 | .0 | .010 | .003 | .009 | 0.61 | 0. | 0.38 | 0.16 | 0.35 |
| J1 | 1.205 | .0 | .056 | .053 | .056 | 0.20 | 0. | 3.00 | 2.58 | 3.00 |
| OO1 | 1.161 | .0 | .114 | .128 | .114 | 0.31 | 0. | 6.22 | 6.89 | 6.22 |
| 2N2 | 1.014 | .0 | .036 | .046 | .036 | 7.20 | 0. | 3.38 | 2.62 | 3.38 |
| N2 | 1.094 | .006 | .013 | .009 | .012 | 7.25 | 0.71 | 1.26 | 0.48 | 1.37 |
| M2 | 1.142 | .003 | .006 | .002 | .007 | 6.48 | 0.40 | 0.81 | 0.12 | 0.90 |
| L2 | 1.178 | .0 | .113 | .062 | .097 | 4.44 | 0. | 3.84 | 2.97 | 3.58 |
| S2K2 | 1.205 | .007 | .012 | .004 | .014 | 4.99 | 0.39 | 0.89 | 0.16 | 0.97 |
| M3 | 1.057 | .0 | .054 | .058 | .054 | -2.09 | 0. | 3.59 | 3.18 | 3.59 |
| Mf | 1.16 | | | | | 0. | | | | |

Para un instante dado, la corrección gravimétrica de marea se determina sustituyendo δ y ϕ , junto con los A_{nm} del desarrollo de Cartwright, los α_j del instante considerado y los Z_{nm} de la posición φ, h en las fórmulas (11). Según la ley de transmisión de errores se obtienen los errores estimados en la determinación de la corrección Z .

Tanto las fórmulas de predicción como las del cálculo de la corrección de marea final están programadas, de modo que dadas unas coordenadas φ, λ, h y un instante t , de forma automática obtenemos la corrección de marea final.

Así para

$$\varphi = 41^\circ \quad \lambda = 6^\circ W \quad h = 800 \text{ mts,}$$

(punto del interior, para el que podemos admitir un efecto oceánico mediano) y para

$$t = 18 \text{ Agosto } 1989$$

resultan los valores de la tabla 8.

TABLA 8
Correcciones de marea para el 18-8-1989.

| hora T.U. | (1) | (2) | (3) | (4) |
|-----------|-------|-----|-------|------|
| 13:00 | 104.7 | 0.7 | 104.9 | 0.2 |
| 14:00 | 94.0 | 0.7 | 98.7 | 4.8 |
| 15:00 | 62.7 | 0.9 | 71.1 | 8.4 |
| 16:00 | 18.0 | 1.2 | 28.1 | 10.1 |
| 17:00 | -29.8 | 1.2 | -20.3 | 9.5 |
| 18:00 | -70.0 | 1.0 | -63.5 | 6.5 |
| 19:00 | -93.8 | 0.8 | -91.8 | 2.0 |
| 20:00 | -96.6 | 0.8 | -99.6 | -3.0 |
| 21:00 | -78.9 | 1.0 | -86.2 | -7.0 |

donde:

- (1) = corrección gravimétrica en μ gales a partir del modelo
- (2) = error medio cuadrático estimado en μ gales para el valor (1)
- (3) = corrección gravimétrica en μ gales suponiendo $\delta = 1.16$ y $\phi = 0$ para todas las ondas (y utilizando el desarrollo y coeficientes de Cartwright)
- (4) = diferencia (3) - (1) entre las correcciones

6. CONCLUSIONES

El método de predicción adoptado nos permite determinar unos valores de los factores de amplitud y desfases en la Península Ibérica más ajustados a las observaciones realizadas y por tanto más realistas que los valores teóricos generales. Por otra parte el método usado nos permite un cierto análisis de la coherencia y contenido relativo de las observaciones, asignando asimismo estimaciones de error a los valores de la predicción. Puede ser también interesante estudiar los residuales del filtrado, especialmente en el área central en que hay mayor densidad de estaciones.

Las correcciones gravimétricas finales de marea pueden suponerse determinadas con un error medio cuadrático de unos dos μ gales (en lo referente a los factores de marea), obteniéndose valores que pueden diferir de los obtenidos para valores teóricos $\delta = 1.16$ $\phi = 0$ hasta en 10 o 20 μ gales.

Resulta evidente un nivel bastante más bajo de señal en las componentes diurnas. La señal, con varianza del orden de menos del 10 por 100 del total para factores de amplitud (frente a valores del 40 por 100 para componentes semidiurnas principales), apenas resulta perceptible. Dado que las componentes diurnas son del mismo orden de magnitud que las semidiurnas y dado que los valores de la precisión (error medio cuadrático) con que resultan obtenidas

del análisis espectral es similar para ambos tipos de componentes, hemos de concluir que los fenómenos que afectan a las observaciones gravimétricas en frecuencias diurnas apenas permiten distinguir un modelo regional (en su naturaleza o bien en su manifestación). Los efectos globalizables entre diversas estaciones apenas tienen representación. Al contrario las componentes semidiurnas corresponden en su mayor parte a efectos globales reconocibles en varias estaciones.

El nivel de perturbaciones debidas a efectos oceánicos es muy alto en la Península (Vieira *et. al.*, 1982). Dado que el régimen de marea oceánica en nuestro entorno es principalmente semidiurno, gran parte de la señal detectada es debida, como incluso la morfología de las isolíneas lo indica, a efectos oceánicos. Por ello puede ser interesante calcular dichos efectos oceánicos, tanto de carga como de atracción de masas, a partir de las cartas de mareas oceánicas de Schwiderski (Schwiderski, 1980) e Iberia (Vieira *et. al.*, 1986a, 1986b) como parte principal y luego analizar y modelar los residuos. En estos residuos se podrán hallar indicaciones geofísicas, si bien, dado que las señales residuales resultaran de menor longitud de onda, sólo serán detectables en regiones más densamente observadas (área central).

7. AGRADECIMIENTO

Estas investigaciones se han desarrollada en el Instituto de Astronomía y Geodesia y son consecuencias de los proyectos de investigación de mareas, que, financiados por la CAICYT, se han realizado en nuestro centro en los últimos años.

8. REFERENCIAS

- Barzaghi, R.; Sanso, F.: Sulla stima empirica della funzione di covarianza, *Bolletino de Geodesia e Sci. Affi.* n.º 4, pp. 389-415, 1983.
- Camacho, A. G.; Vieira, R.; Toro, C.: Least square prediction of tides in Europe, XI Symp. of Earth Tides, Helsinki, agosto 1989.
- Cartwright, D. E.; Tayler, R. J.: New Computations of the Tide generating Potencial, *Royal Astron. Soc. Geophys. Jour.* 23, 45-74, 1971.
- Cartwright, D. E.; Edden, A. C.: Corrected Tables of Tidal Harmonics, *Roy. Astr. Soc. Geophys. Jour.* 33, 253-264, 1973.
- Ducarme, B.; Poitevin, C.; Loodts, J.: Precise tidal corrections for high precision gravity measurements, 8th Meeting of the International Gravity Commision, París 12-16, sept. 1978.
- Melchior, P.: The Tides of the Planet Earth, Pergamon Press, Oxford, 1983.
- Moritz, H.: Advanced Physical Geodesy, Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe, 1980.
- Mussio, L.: Il metodo della collocazione minimi quadrati e le sue applicazioni per l'analisi statistica dei risultati delle compensazioni, *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, pp. 305-338, Clup. Milan, 1984.
- Mussio, L.: Estrategias del método de colocación, IV Curso de Geodesia Superior, Cursos y Semin. Inst. de Astronomía y Geodesia, pp. 145-209, Madrid, 1987.

- Sevilla, M. L.: Colocación mínimos cuadrados, IV Curso de Geodesia Superior, Cursos y Semin. Inst. de Astronomía y Geodesia, pp. 99-141, Madrid, 1987.
- Sevilla, M. L.: Corrección automática de medidas gravimétricas por efecto de marea, II Asamblea Nacional de Geodesia y Geofísica, Barcelona, 1976.
- Schwiderski, E. W.: On charting Global Ocean Tides, *Rev. Geophys. Space Phys*, vol. 18, núm. 1, pp. 243-268, 1980.
- Vieira, R.: Mareas Terrestres, *Urania*, núm. 289-290, pp. 93-117, 1978.
- Vieira, R.; Toro, C.; Sukhwani, P.: Ocean Effects on Gravity tides in the Iberian Peninsula, Proc. IX Internatinal Symposium on Earth Tides, E. Schweizerbart, Stuttgart, pp. 431-436, 1982.
- Vieira, R.; Toro, C.; Megías, E.: Ocean Tides in the nearby of the Iberian Peninsula. Part. I: M2 Iberia map, Proc. Xth International Symposium on Earth Tides, C.S.I.C., pp. 679-695, Madrid, 1986.
- Vieira, R.; Toro, C.; Fernández, J.: Ocean Tides in the nearby of the Iberian Peninsula. Part. II: S2 Iberia map, Proc. Xth International Symposium on Earth Tides, C.S.I.C., pp. 697-706, Madrid, 1986.