TESIS DOCTORAL

Aproximación de funciones cuya transformada de Hankel está soportada en el intervalo[0,1]

Oscar Ciaurri Ramírez

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA
1992-2002 / DÉCIMO ANIVERSARIO

TESIS DOCTORAL

Aproximación de funciones cuya transformada de Hankel está soportada en el intervalo[0,1]

Oscar Ciaurri Ramírez

Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones
2002

Esta tesis doctoral, dirigida por el Dr. D. Juan Luis Varona Malumbres fue leida el 5 de junio del 2000, y obtuvo la calificación de Sobresaliente cum Laude por unanimidad

Edita: Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones

ISBN 84-688-0661-7

Aproximación de funciones cuya transformada de Hankel está soportada en el intervalo $[0, 1]$

por

Óscar Ciaurri Ramírez

Memoria presentada para optar al grado de Doctor

Realizada bajo la dirección del
Dr. D. Juan Luis Varona Malumbres

Departamento de Matemáticas y Computación
Universidad de La Rioja

Febrero de 2000

A Lola, mi compañera,
y a Maribel, mi madre.

El presente trabajo ha sido realizado en el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja bajo la dirección del Dr. D. Juan Luis Varona Malumbres, a quien quiero manifestar mi más sincero y profundo agradecimiento por la ayuda que me ha prestado y por la paciencia que ha derrochado conmigo a lo largo de estos años; sin ellos, esta memoria no hubiese sido posible. Asimismo, deseo expresar mi gratitud hacia los profesores D. José Javier Guadalupe Hernández y D. Mario Pérez Riera por su ayuda y colaboración.

No quisiera finalizar sin dejar constancia de mi agradecimiento hacia los miembros del Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja, en especial a Blanca Bujanda y Emilio Fernández, que siempre estuvieron cerca para animarme en los malos momentos.

Por último, quisiera dar las gracias a mi familia y a mis amigos por lo mucho que han confiado en mí; especialmente a Lola, mi compañera, y a Maribel, mi madre.

ÍNDICE

Introducción

El trabajo desarrollado en esta memoria se centra en el estudio de la convergencia de la serie de Fourier asociada a un determinado sistema ortonormal. Para comprender el interés de este tipo de cuestiones comenzaremos mencionando un ejemplo, la denominada serie de Fourier clásica. El sistema $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal en $\mathbb{T}$ con respecto a la medida de Lebesgue normalizada:

$$\int_0^{2\pi} e^{int}e^{-imt}\,\frac{dt}{2\pi} = \delta_{n,m},$$

donde $\delta_{n,m}$ denota la delta de Kronecker. A cada función $f \in L^2(\mathbb{T})$ le asociamos, en un principio de una manera puramente formal, su serie de Fourier definida como

$$f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(f)e^{ikx},$$

donde

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt.$$

Es bien conocido que la clausura en $L^p(\mathbb{T})$ de las combinaciones lineales finitas del sistema ortonormal $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es $L^p(\mathbb{T})$ para $1 \le p < \infty$. A partir de este hecho, y por ser $L^2(\mathbb{T})$ un espacio de Hilbert, tendremos convergencia hacia f de la serie de Fourier para cada función $f \in L^2(\mathbb{T})$. La situación en $L^p(\mathbb{T})$ con $p \neq 2$ es bien distinta. El trabajo de Marcel Riesz sobre la función conjugada, definida como

$$\tilde{f} \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\operatorname{sgn} k)a_k(f)e^{ikx},$$

establece

$$\|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{T})} \le C\|f\|_{L^p(\mathbb{T})},$$

para $1 < p < \infty$. De este hecho se deduce de manera inmediata la acotación uniforme del operador suma parcial n-ésima, S_n, asociado a la serie de Fourier. En particular tendremos

$$\|S_nf\|_{L^p(\mathbb{T})} \le C\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}, \quad \forall n \ge 0,$$

para $1 < p < \infty$, C independiente de n y donde

$$S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k(f)e^{ikx}.$$

A partir de la acotación uniforme del operador S_n se obtiene, usando el teorema de Banach-Steinhaus, la convergencia hacia f en $L^p(\mathbb{T})$ de la serie de Fourier para $1 < p < \infty$. Obtenemos, así, que las funciones $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forman una base de los espacios $L^p(\mathbb{T})$ para $1 < p < \infty$.

El ejemplo de la serie de Fourier clásica motivó la búsqueda de otras familias ortonormales que fuesen base de un determinado espacio L^p o de un subespacio de éste. Más en concreto, dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ y una familia numerable de funciones $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ ortonormales en $L^2(\Omega,\mu)$, nos interesará saber para qué funciones f se tendrá la convergencia en $L^p(\Omega,\mu)$ de la serie de Fourier. Esta serie se definirá para cada f como

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k(f)\phi_k,$$

donde

$$b_k(f) = \int_\Omega f\phi_k\, d\mu.$$

La resolución del problema así planteado pasa por dos cuestiones:

- El estudio de la acotación uniforme del operador suma parcial n-ésima; es decir, la obtención de la estimación
$$\|S_n f\|_{L^p(\Omega,\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)}, \quad \forall n \geq 0,$$
con C independiente de n y donde
$$S_n f = \sum_{k=0}^{n} b_k(f)\phi_k.$$
- La identificación del espacio dado por la clausura en $L^p(\Omega,\mu)$ de las combinaciones lineales de las funciones del sistema ortonormal en consideración, $\overline{\operatorname{span}\{\phi_n\}}$. En este conjunto tendremos, por definición, densidad del sistema ortonormal.

Numerosos sistemas ortonormales han sido estudiados en la literátura matemática a lo largo de los años. Citemos algunos ejemplos:

- Los polinomios de Jacobi, ortonormales en $L^2([-1,1], dw)$, con $dw(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\, dx$. Véanse los trabajos de Pollard [**26, 27, 28, 29**], Muckenhoupt [**23**], Badkov [**2**] y Guadalupe-Pérez-Varona [**16**].
- Los polinomios y las funciones de Laguerre, ortonormales en $L^2((0,\infty), dw)$, donde $dw(x) = e^{-x}x^\alpha\, dx$, y en $L^2((0,\infty), dx)$ respectivamente. Véanse los trabajos de Askey-Wainger [**1**] y Muckenhoupt [**24, 25**]

- Los polinomios y las funciones de Hermite, ortonormales en $L^2(\mathbb{R}, dw)$, donde $dw(x) = e^{-x^2}\,dx$, y en $L^2(\mathbb{R}, dx)$ respectivamente. Véanse las mismas referencias que para los polinomios y las funciones de Laguerre.
- El sistema de Fourier-Bessel, constituido por funciones de Bessel y ortonormal en $L^2([0,1], x\,dx)$. Sobre este sistema se pueden ver los trabajos de Wing [**45**], Benedek-Panzone [**7**] y Guadalupe-Pérez-Ruiz-Varona [**15**].
- Ciertos sistemas ortonormales formados por autofunciones de determinados problemas de Sturm-Liouville. Véanse los trabajos de Benedek-Panzone [**6**], Barceló-Córdoba [**4**] y Generozov [**14**].

En algunos de los casos anteriormente citados el estudio de la convergencia ha sido realizado en espacios L^p con determinados pesos. Se ha analizado la convergencia en $L^p(\Omega, u\,d\mu)$ de la serie de Fourier asociada a $f \in L^p(\Omega, v\,d\mu)$.

Los resultados clásicos de interpolación nos aseguran que la acotación uniforme de los operadores S_n, y como consecuencia del teorema de Banach-Steinhaus la convergencia en L^p de la serie de Fourier asociada al sistema ortonormal considerado, se producirá en un determinado intervalo de valores de p, fuera del cual no es posible tener acotación ni convergencia. Este intervalo se conoce como intervalo de convergencia en media. El estudio de la acotación del operador S_n en los valores extremos del intervalo de convergencia en media es un problema de gran interés. El análisis de la acotación (p,p)-débil,

$$\|S_n f\|_{L^{p,\infty}(\Omega,\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)},$$

y la acotación (p,p)-débil restringida

$$\|S_n \chi_E\|_{L^p(\Omega,\mu)} \leq C\|\chi_E\|_{L^p(\Omega,\mu)},$$

son el modo habitual de tratar la acotación del operador S_n en estos valores extremos.

La convergencia en casi todo punto de la serie de Fourier asociada a determinados sistemas ortonormales ha sido una cuestión que también ha suscitado gran interés. El problema puede plantearse en los siguientes términos: dada $f \in L^p(\Omega, \mu)$, ¿cuándo se verifica que

$$S_n f \to f$$

en casi todo punto? El caso particular de serie de Fourier clásica, la asociada al sistema $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, fue un problema abierto durante mucho tiempo. Fue Carleson quien obtuvo un primer resultado afirmativo para el caso $p = 2$. El resultado para $1 < p < \infty$ fue obtenido poco después por Hunt. La convergencia en casi todo punto para otros sistemas ortonormales ha sido ampliamente tratada. Se han encontrados respuestas afirmativas mediante la utilización de teoremas de equiconvergencia y de transplantación.

A lo largo de esta memoria nos centraremos en la serie de Fourier asociada al sistema $\{j_n^\alpha\}_{n\geq 0}$, ortonormal en $L^2((0,\infty), x^\alpha\, dx)$, dado, para $\alpha > -1$, por

$$j_n^\alpha(x) = \sqrt{\alpha+2n+1}J_{\alpha+2n+1}(\sqrt{x})\, x^{-\alpha/2-1/2},$$

donde J_ν denota la función de orden ν. Las series de Fourier asociadas a este sistema ortonormal las denominaremos series de Fourier-Neumann. En concreto, estudiaremos la acotación del operador suma parcial n-ésima, S_n, en los espacios $L^p((0,\infty), u^p(x)x^\alpha\, dx)$ para pesos de la forma $u(x) = x^a(1+x)^{b-a}$ y trataremos, además, las acotaciones (p,p)-débil y (p,p)-débil restringida. Los resultados de convergencia, en particular la convergencia en casi todo punto, para la serie de Fourier-Neumann los obtendremos identificando el espacio de densidad de nuestro sistema ortonormal.

La presente memoria se haya dividida en siete capítulos, cuyo contenido desglosamos a continuación.

El Capítulo 1 es de carácter introductorio y contiene una relación de conceptos y resultados que serán fundamentales a lo largo de este trabajo. En la primera sección damos una descripción general de los sistemas ortonormales y de sus propiedades de convergencia. La segunda sección introduce dos herramientas que serán básicas en el estudio de la acotación uniforme del operador suma parcial n-ésima: la transformada de Hilbert y los pesos de la clase A_p. La caracterización de la acotación en L^p de la transformada de Hilbert a través de los pesos de la clase A_p se utilizará frecuentemente en nuestro trabajo y la introduciremos en esta sección. Analizaremos, también, la pertenencia a la clase A_p de determinados pesos. En la última sección presentamos la transformada de Hankel y damos algunas de sus propiedades. Para finalizar, obtenemos la transformada de Hankel de algunas funciones particulares. El conocimiento de estas transformadas será importante a la hora de identificar el espacio de densidad de nuestro sistema ortonormal.

En el Capítulo 2 incluimos toda la información referente a las funciones de Bessel que necesitaremos a lo largo de esta memoria. En concreto, damos ciertas estimaciones uniformes que nos serán útiles a la hora de intentar aplicar la teoría de pesos A_p en la acotación uniforme del operador suma parcial n-ésima. Obtenemos, también, las normas de las funciones j_n^α en determinados espacios. El conocimiento de estas normas nos permitirá determinar las condiciones necesarias para la acotación uniforme del operador suma parcial n-ésima.

En el Capítulo 3 probaremos un resultado que nos dará condiciones necesarias y suficientes para la acotación uniforme del operador suma parcial n-ésima, asociado al sistema ortonormal $\{j_n^\alpha\}_{n\geq 0}$, en los espacios $L^p((0,\infty), u^p(x)x^\alpha\, dx)$, con pesos de la forma $u(x) = x^a(1+x)^{b-a}$. La suficiencia de las condiciones la obtendremos mediante una descomposición de dicho operador en términos de la transformada de Hilbert con determinados pesos. La necesidad será consecuencia del tamaño de las normas de las funciones j_n^α en los espacios $L^p((0,\infty), u^p(x)x^\alpha\,dx)$.

El estudio de las acotaciones (p,p)-débil y (p,p)-débil restringida del operador suma parcial n-ésima asociado a $\{j_n^\alpha\}_{n\geq 0}$ es el contenido del Capítulo 4. En particular, probamos que no existe acotación (p,p)-débil para los valores extremos del intervalo de convergencia en media y obtenemos un resultado afirmativo para la acotación (p,p)-débil restringida en esos mismos valores.

El Capítulo 5 está centrado en la caracterización y estudio del espacio de densidad de las funciones de nuestro sistema ortonormal. En la Sección 2 nos ocuparemos de la identificación de los espacios $\overline{\operatorname{span}\{j_n^{\alpha+\beta}\}}$, con la clausura en $L^p((0,\infty), x^\alpha\,dx)$. Estos espacios serán descritos en términos del multiplicador de la bola unidad para la transformada de Hankel. La Sección 3 contiene algunas propiedades adicionales de estos espacios. En este capítulo, en la última sección, incluimos los resultados relativos a la convergencia en casi todo punto.

El Capítulo 6 contiene una aplicación de las series de Fourier-Neumann a la resolución de un determinado tipo de ecuaciones integrales, las denominadas ecuaciones integrales dobles de tipo Titchmarsh. En este tipo de ecuaciones se debe encontrar una función f, definida en $(0,\infty)$, que satisfaga

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty t^\beta f(t) J_\alpha(xt)\,dt = g(x), & \text{si } 0 < x < 1, \\ \displaystyle\int_0^\infty f(t) J_\alpha(xt)\,dt = 0, & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

donde g es una función dada definida en $[0,1]$. En concreto, estudiamos la existencia y unicidad de solución para una modificación de este tipo de ecuaciones, planteada en términos de operadores, en espacios de tipo L^p.

Para concluir, el último capítulo de esta memoria contiene la acotación uniforme en los espacios $L^p((0,\infty), x^\alpha\,dx)$ de los operadores de Bochner-Riesz definidos para una cierta transformada de Hankel dependiente de dos parámetros. Este operador aparece como una extensión natural de los operadores en que se puede descomponer el operador suma parcial n-ésima asociado a las series de Fourier-Neumann. La acotación de este tipo de operadores se hace de acuerdo a las técnicas clásicas. Utilizamos un operador de convolución para obtener la acotación en un rango determinado y recurrimos a la teoría de interpolación de operadores analíticos para el resto.

A lo largo de esta memoria se utilizará la letra C para denotar ciertas constantes absolutas y no será necesariamente la misma en cada ocasión que aparezca, incluso en la misma cadena de desigualdades. Por C_λ entenderemos una constante que depende del parámetro λ y que tampoco será necesariamente igual en cada circunstancia que se presente. La notación $A \sim B$ la utilizaremos para indicar que el cociente A/B está acotado superior e inferiormente por ciertas constantes positivas.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1. Sistemas ortonormales. Los sistemas de Jacobi y Fourier-Neumann

Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida con $\mu \geq 0$. Definimos $L^p(\Omega, \mu)$ o simplemente $L^p(\mu)$, cuando no de lugar a confusión, con $1 \leq p < \infty$, como el espacio de las funciones μ-medibles reales tales que

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty.$$

Denotaremos por $L^\infty(\Omega, \mu)$ o $L^\infty(\mu)$ el espacio de las funciones reales μ-medibles f esencialmente acotadas y escribiremos

$$\|f\|_{L^\infty(\mu)} = \sup \operatorname{esn}\{|f(x)| : x \in \Omega\}.$$

Con esta definición, $\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$ es una norma y $L^p(\mu)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.

Dado $p \in [1, \infty]$, llamaremos de ahora en adelante q al exponente conjugado de p; es decir, a aquel que verifica $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, admitiendo que para $p = 1$ se tiene $q = \infty$ y viceversa.

Con esta notación, para $1 < p < \infty$, se tiene la dualidad $(L^p(\mu))' = L^q(\mu)$; es decir, dado T un funcional lineal y continuo de $L^p(\mu)$ en $\mathbb{R}$, existe una única función $g \in L^q(\mu)$ tal que

$$\begin{array}{rccc} T: & L^p(\mu) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & T(f) = \int_\Omega fg \, d\mu, \end{array}$$

donde la norma de T como operador coincide con $\|g\|_{L^q(\mu)}$. Además, se verifica que

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \sup \left\{ \int_\Omega fg \, d\mu : \|g\|_{L^q(\mu)} = 1 \right\}.$$

De todos los espacios $L^p(\mu)$ únicamente $L^2(\mu)$ resulta ser un espacio de Hilbert, dotado con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega fg \, d\mu. \qquad (1)$$

Este hecho nos permite considerar sistemas ortonormales en este espacio. En concreto, podemos considerar familias de funciones $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$

verificando

$$\int_\Omega \phi_n \phi_m \, d\mu = \delta_{n,m},$$

donde $\delta_{n,m}$ es la Delta de Kronecker, definida por

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 0, & \text{si } \ n \neq m, \\ 1, & \text{si } \ n = m. \end{cases}$$

De esta manera, a cada función $f \in L^2(\mu)$ le podemos asociar sus coeficientes de Fourier con respecto a $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$

$$c_k(f) = \int_\Omega f \phi_k \, d\mu, \ \forall k \geq 0,$$

y, formalmente, su serie de Fourier

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) \phi_k.$$

Tomamos las sumas parciales n-ésimas de la serie de Fourier con respecto al sistema ortonormal $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ como

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\phi_k(x) = \int_\Omega f(t) K_n(x,t) \, d\mu(t),$$

donde $K_n(x,t) = \sum_{k=0}^n \phi_k(x)\phi_k(t)$.

Consideramos, también, el espacio B_2 definido por

$$B_2 = \overline{\operatorname{span}\{\phi_n\}},$$

donde la clausura debe entenderse en $L^2(\mu)$. Este espacio será de Hilbert con el producto escalar definido en (1) y el sistema ortonormal $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ será completo en él. Entonces, la teoría de espacios de Hilbert asegura que las sumas parciales $S_n f$ de la serie de Fourier de cada función $f \in B_2$ convergen a f en $L^2(\mu)$; exactamente se tendrá

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_{L^2(\mu)} = 0.$$

Además, $S_n f$ es la combinación lineal de $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ que mejor aproxima a f.

Por otra parte, se verifica que los operadores

$$\begin{array}{rccc} S_n: & B_2 & \longrightarrow & B_2 \\ & f & \longmapsto & S_n f \end{array}$$

están uniformemente acotados:

$$\|S_n f\|_{L^2(\mu)} \leq C \|f\|_{L^2(\mu)}, \quad \forall n \geq 0,$$

con C independiente de n. A la vista de lo que sucede en B_2 podemos preguntarnos si el comportamiento de las sumas parciales S_n será el mismo en cualquiera de los espacios B_p, con

$$B_p = \overline{\operatorname{span}\{\phi_n\}},$$

donde, en esta ocasión, la clausura debe entenderse en $L^p(\mu)$. Este espacio será de Banach con la topología inducida por la de $L^p(\mu)$ y nuestro sistema ortonormal será completo en él. Concretamente nos interesará saber:

$$¿S_n f \to f \text{ en } L^p(\mu),\ \forall f \in B_p?$$

¿Los operadores

$$\begin{array}{rccc} S_n: & B_p & \longrightarrow & B_p \\ & f & \longmapsto & S_n f \end{array}$$

están uniformemente acotados?

Un requisito previo que debe cumplir el sistema $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ para que exista S_n y esté bien definido, en principio, para funciones $f \in L^p(\mu)$ es

$$\phi_n \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu),\ \forall n \geq 0. \tag{2}$$

El siguiente resultado, cuya demostración se basa en el Teorema de Banach-Steinhaus, nos va a asegurar que nuestras dos preguntas son en realidad una misma:

Teorema 1.1. *Sea $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ un sistema ortonormal en $L^2(\mu)$, $1 < p < \infty$, y $\phi_n \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$, $\forall n \geq 0$. Entonces, son equivalentes*

(a) *$S_n f \to f$ en $L^p(\mu)$, $\forall f \in B_p$.*
(b) *Existe $C > 0$ tal que $\|S_n f\|_{L^p(\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\mu)}$, $\forall f \in B_p$, $\forall n \geq 0$.*

Mediante este resultado, el problema de la convergencia para funciones en B_p queda reducido al estudio de la acotación uniforme de los operadores S_n. Los resultados de convergencia resultan mucho más interesantes si podemos obtener una identificación más explícita de los espacios B_p.

Utilizando que el operador S_n es autoadjunto y la teoría de interpolación de operadores tendremos que el rango de valores de p para los que se tiene la acotación en $L^p(\mu)$ debe ser un intervalo, que llamaremos intervalo de convergencia en media, cuyos extremos son conjugados. El conocimiento del comportamiento del operador S_n en los extremos de dicho intervalo es una cuestión de natural interés. Su estudio se desarrolla dentro de los espacios $L^{p,\infty}$ que definimos a continuación.

Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida con $\mu \geq 0$. Denotaremos por $L^{p,\infty}(\Omega, \mu)$ o simplemente $L^{p,\infty}(\mu)$, cuando no haya lugar a confusión, con $1 \leq p < \infty$, al espacio de las funciones μ-medibles reales tales que

$$\sup_{y>0} y^p \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > y\}) < \infty$$

donde $\mu(E) = \int_E d\mu$. Se toma entonces

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\mu)} = \sup_{y>0} y \left[\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > y\})\right]^{1/p}.$$

Tal y como la hemos definido $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}(\mu)}$ no es una norma, puesto que no verifica la desigualdad de Minkowski, sino

$$\|f + g\|_{L^{p,\infty}(\mu)} \leq 2\|f\|_{L^{p,\infty}(\mu)} + 2\|g\|_{L^{p,\infty}(\mu)}.$$

No obstante, puede definirse una norma equivalente a $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}(\mu)}$, para la que utilizaremos la misma notación, verificando la desigualdad de Minkowski. Con esta nueva norma tendremos que $L^{p,\infty}(\mu)$ será un espacio de Banach. En muchas ocasiones nos referiremos a $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}(\mu)}$ como la norma débil.

Será de gran utilidad para nosotros tener un análogo de la desigualdad de Hölder aplicable en los espacios $L^{p,\infty}$. La siguiente desigualdad, a la que nos referiremos como desigualdad de Hölder débil, y que puede verse en su forma más general en [**20**], sirve a nuestros propósitos. Sean p y q conjugados, $g = \chi_E$, con E un conjunto de medida finita, y $f \in L^{q,\infty}(\mu)$; entonces

$$\left| \int_\Omega f(x)g(x)\, d\mu \right| \leq \|f\|_{L^{q,\infty}(\mu)} \|g\|_{L^p(\mu)}. \tag{3}$$

Un operador T se dice (p,p)-fuerte si verifica la acotación

$$\|Tf\|_{L^p(\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\mu)}, \ \forall f \in L^p(\mu),$$

y se dice (p,p)-débil si verifica

$$\|Tf\|_{L^{p,\infty}(\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\mu)}, \ \forall f \in L^p(\mu).$$

Utilizando que $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}(\mu)} \leq \|\cdot\|_{L^p(\mu)}$ tendremos que, si un operador es (p,p)-fuerte, es también (p,p)-débil.

El teorema de interpolación de Marcinkiewicz asegura que, si un operador T es (p_0,p_0)-débil y (p_1,p_1)-débil con $p_0 < p_1$, entonces T es (p,p)-fuerte para cada $p \in (p_0,p_1)$. Además, la constante para la acotación (p,p)-fuerte depende de las constantes que aparecen en las acotaciones débiles y de p. Para el operador S_n tendremos que, si se verifica acotación uniforme (p_0,p_0)-débil y (p_1,p_1)-débil con $p_0 < p_1$, se tendrá acotación uniforme (p,p)-fuerte para $p \in (p_0,p_1)$. Por consiguiente, sólo puede ser uniformemente de tipo (p,p)-débil en los extremos del intervalo de convergencia en media, aparte de en el propio intervalo.

Aún podemos debilitar un poco más las condiciones de acotación. Diremos que un operador T definido sobre funciones características,

χ_E, de conjuntos E de medida finita, es de tipo (p,p)-débil restringido si verifica

$$\|T\chi_E\|_{L^{p,\infty}(\mu)} \leq C\|\chi_E\|_{L^p(\mu)}.$$

Nuevamente, el teorema de interpolación de Marcinkiewicz, en el que se puede sustituir la hipótesis de acotación (p,p)-débil por la de acotación (p,p)-débil restringida, nos asegura que la acotación uniforme de tipo (p,p)-débil restringida para los operadores S_n sólo es posible en los extremos del intervalo de convergencia en media.

En numerosas ocasiones nos referiremos conjuntamente a la acotación (p,p)-débil y a la (p,p)-débil restringida como las acotaciones extremales.

Los resultados sobre convergencia en media se pueden generalizar a una familia de espacios más amplia. Dada una familia ortonormal $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ en $L^2(\mu)$ podemos preguntarnos:

$$¿S_n f \to f \text{ en } L^p(u^p\, d\mu),\ \forall f \in B_p?$$

con u un peso no negativo y considerando, en esta situación, los espacios

$$B_p = \overline{\operatorname{span}\{\phi_n\}}$$

con la clausura en $L^p(u^p\, d\mu)$. De esta manera para que los operadores $S_n f$ estén definidos para cada función $f \in L^p(u^p\, d\mu)$ y para $n \geq 0$ se deberá verificar

$$\phi_n \in L^p(u^p\, d\mu) \cap L^q(u^{-q}\, d\mu),\ \forall n \geq 0, \tag{4}$$

condición esta que generaliza la dada en (2). La relación entre la convergencia y la acotación uniforme del operador S_n vendrá dada, en esta situación, por el siguiente resultado que generaliza el Teorema 1.1:

Teorema 1.2. *Sea $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ un sistema ortonormal en $L^2(\mu)$, $1 < p < \infty$, y $\phi_n \in L^p(u^p\, d\mu) \cap L^q(u^{-q}\, d\mu)$, $\forall n \geq 0$. Entonces, son equivalentes*

(a) *$S_n f \to f$ en $L^p(u^p\, d\mu)$, $\forall f \in B_p$.*
(b) *Existe $C > 0$ tal que $\|S_n f\|_{L^p(u^p\, d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(u^p\, d\mu)}$, $\forall f \in B_p$, $\forall n \geq 0$.*

En el estudio de la convergencia con pesos obtendremos nuevamente un intervalo de valores de p, al que continuaremos llamando intervalo de convergencia en media, pero ya no tiene por qué tener los extremos conjugados.

A continuación pasaremos a describir el comportamiento de la convergencia en L^p de dos sistemas ortonormales. El primero de ellos será sobre el que se centrará esta memoria. El otro será útil para la obtención de algunos de los resultados fundamentales.

1.1. Series de Fourier-Neumann. Sea J_μ la función de Bessel de orden μ. Para $\alpha > -1$, la expresión

$$\int_0^\infty J_{\alpha+2n+1}(x) J_{\alpha+2m+1}(x)\,\frac{dx}{x} = \frac{\delta_{n,m}}{2(2n+\alpha+1)}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

(véase [**42**, Cap. XIII, págs. 404 y 405]), da lugar a un sistema ortonormal, $\{j_n^\alpha\}_{n\ge 0}$, en $L^2((0,\infty), x^\alpha\,dx)$ [$L^2(x^\alpha)$, de ahora en adelante], dado por

$$j_n^\alpha(x) = \sqrt{\alpha+2n+1}\,J_{\alpha+2n+1}(\sqrt{x})\,x^{-\alpha/2-1/2}. \tag{5}$$

Para cada función admisible f definida sobre $(0,\infty)$, tomamos su serie de Fourier con respecto a $\{j_n^\alpha\}_{n\ge 0}$ como el desarrollo formal

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) j_k^\alpha,$$

donde

$$a_k(f) = \int_0^\infty f(t) j_k^\alpha(t) t^\alpha\,dt.$$

Series de este tipo son un caso particular de las series $\sum_{k\ge 0} a_k J_{\alpha+k}$, que habitualmente son conocidas como series de Neumann; así, nos referiremos a ellas como series de Fourier-Neumann. Tomaremos el operador suma parcial n-ésima, $S_n f$, de la serie de Fourier con respecto a $\{j_n^\alpha\}_{n\ge 0}$, como

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f) j_k^\alpha(x).$$

En [**41**], Varona realiza el estudia la convergencia en $L^p(x^\alpha)$ de las series de Fourier-Neumann. En concreto prueba que si $\alpha \ge -1/2$,

$$S_n f \to f, \text{ en } L^p(x^\alpha), \ \forall f \in B_{p,\alpha},$$

donde

$$B_{p,\alpha} = \overline{\operatorname{span}\{j_n^\alpha\}},$$

con la clausura en $L^p(x^\alpha)$, para valores de p verificando

$$\text{máx}\left\{\frac{4}{3}, \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+3}\right\} < p < \text{mín}\left\{4, \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+1}\right\}.$$

Además, para ese rango de p, se identifica $B_{p,\alpha} = E_{p,\alpha}$, siendo

$$E_{p,\alpha} = \{f \in L^p(x^\alpha) : M_\alpha f = f\} = M_\alpha(L^p(x^\alpha)),$$

con M_α el operador

$$M_\alpha f = \mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]} \mathcal{H}_\alpha f),$$

y donde $\mathcal{H}_\alpha$ denota la transformada de Hankel, que será introducida en la Sección 3 de este capítulo. Veremos que, si $\alpha \ge -1/2$ y $\frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+3} < p <$

$\frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+1}$, el operador M_α es acotado en $L^p(x^\alpha)$. Por tanto, definiremos los espacios $E_{p,\alpha}$ en ese rango de valores para α y p.

En los próximos capítulos estudiaremos las acotaciones extremales y con pesos para el operador S_n asociado a este sistema ortonormal, obtendremos resultados de convergencia en media y en casi todo punto identificando determinados espacios de densidad y, además, daremos una aplicación de estas series a la resolución de un determinado tipo de ecuaciones integrales.

1.2. Series de Fourier de polinomios de Jacobi. Los polinomios de Jacobi pueden definirse mediante la expresión

$$(6)\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{(-2)^n n!(1-x)^\alpha(1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

A partir de la definición, usando partes reiteradamente, es fácil demostrar que para $\alpha, \beta > -1$ se cumple la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx = h_n^{(\alpha,\beta)}\delta_{n,m},$$
$$n, m = 0, 1, 2\dots,$$

donde

$$h_n^{(\alpha,\beta)} = 2^{\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\,n!}.$$

Por tanto, $\{P_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\ge 0}$ constituye un sistema de polinomios ortogonales en $[-1,1]$ con respecto a la medida $d\mu = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx$. Considerando la familia $\{\tilde{p}_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\ge 0}$, definida como

$$\tilde{p}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (h_n^{(\alpha,\beta)})^{-1/2}P_n^{(\alpha,\beta)}(x),$$

tendremos un sistema ortonormal en $L^2([-1,1], d\mu)$. Así para cada función g definida sobre $[-1,1]$ tomamos su serie de Fourier con respecto a $\{\tilde{p}_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\ge 0}$ como el desarrollo formal

$$g \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(g)\tilde{p}_k^{(\alpha,\beta)},$$

donde

$$a_k(g) = \int_{-1}^{1} g(t)\tilde{p}_k^{(\alpha,\beta)}(t)(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\,dt.$$

Tomaremos como $S_n g$ el operador suma parcial n-ésima con respecto a $\{\tilde{p}_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\ge 0}$; es decir,

$$S_n(g,x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(g)\tilde{p}_k^{(\alpha,\beta)}(x).$$

La convergencia en media para las series de Fourier-Jacobi ha sido ampliamente tratada en la literatura matemática (véanse [**16**], [**23**] o cualquiera de los trabajos mencionados en la Introducción a este respecto). El siguiente resultado de Muckenhoupt da condiciones necesarias y suficientes para la acotación uniforme del operador $S_n g$ con un cierto tipo de pesos y, por tanto, sobre la convergencia en media.

Teorema 1.3 (Muckenhoupt). *Sea* $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ *sobre el intervalo* $[-1,1]$*, con* $\alpha,\beta > -1$*,* $u(x) = (1-x)^a(1+x)^b$ *y* $1 < p < \infty$*. Entonces, existe una constante* C *tal que*

$$\|S_n g\|_{L^p([-1,1],u^p(x)w(x)\,dx)} \leq C\|g\|_{L^p([-1,1],u^p(x)w(x)\,dx)}, \quad \forall n \geq 0,$$

si y sólo si

$$-\tfrac{1}{4} < a + (\alpha+1)\big(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{2}\big) < \tfrac{1}{4}, \quad -\tfrac{\alpha+1}{2} < a + (\alpha+1)\big(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{2}\big) < \tfrac{\alpha+1}{2},$$
$$-\tfrac{1}{4} < b + (\beta+1)\big(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{2}\big) < \tfrac{1}{4}, \quad -\tfrac{\beta+1}{2} < b + (\beta+1)\big(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{2}\big) < \tfrac{\beta+1}{2}.$$

Además, en estas condiciones $S_n g \to g$ *en* $L^p([-1,1],u^p(x)w(x)\,dx)$ *para cualquier función* $g \in L^p([-1,1],u^p(x)w(x)\,dx)$*.*

Transformando el intervalo $[0,1]$ en el intervalo $[-1,1]$ mediante la aplicación $x \mapsto 1-2x$, obtendremos un sistema ortonormal en $[0,1]$ con respecto a $d\mu = x^\alpha(1-x)^\beta\,dx$ que denotaremos por $\{p_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\geq 0}$. Concretamente

$$(7)\quad p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (2^{-(\alpha+\beta+1)}h_n^{(\alpha,\beta)})^{-1/2}P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x), \quad n = 0,1,2,\dots .$$

El Teorema 1.3 se adapta de manera inmediata a esta situación, considerando ahora pesos de la forma $u(x) = x^a(1-x)^b$ y el sistema ortonormal $\{p_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\geq 0}$.

2. La transformada de Hilbert y pesos de la clase A_p

Llamaremos transformada de Hilbert al operador, que denotaremos por H, que a cada función f asocia

$$H(f,x) = \int_a^b \frac{f(y)}{x-y}\,dy,$$

donde (a,b) denota un intervalo de la recta real, que puede ser no acotado. La integral que aparece en la definición debe interpretarse como el valor principal.

El estudio de la acotación en los espacios de Lebesgue de este operador aparece vinculado, desde el trabajo de Hunt, Muckenhoupt y Wheeden [**21**], a la clase de pesos A_p que definimos a continuación:

DEFINICIÓN 1.1. Sean p y q conjugados, con $1 < p < \infty$. Dado un intervalo (a,b), con $-\infty \le a < b \le \infty$, diremos que un peso $w(x)$, definido en (a,b), pertenece a $A_p(a,b)$ si

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{-q/p}\,dx\right)^{p/q} \le C \tag{8}$$

para todo intervalo $I \subseteq (a,b)$, siendo C independiente de I.

Si en la definición anterior hacemos tender p hacia 1 obtendremos

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx\right) \operatorname{sup\,esn}\{w(x)^{-1} : x \in I\} \le C,$$

o, lo que es lo mismo,

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx\right) \le C \operatorname{ínf\,esn}\{w(x) : x \in I\}.$$

Como puede verse en [**13**, pág. 389], esta condición es equivalente a

$$M(w,x) \le Cw(x), \ \textit{a.e.}, \tag{9}$$

donde con M denotamos el operador maximal de Hardy-Littlewood, definido por

$$M(f,x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|\,dy. \tag{10}$$

La condición (9) se toma como definición de peso en $A_1(a,b)$.

A la menor constante C que aparece en (8) y (9) se la denomina constante A_p de w y la denotaremos por $A_p(w)$.

La estrecha relación entre la transformada de Hilbert y los pesos de la clase A_p aparece reflejada en el siguiente resultado

TEOREMA 1.4 (Hunt, Muckenhoupt y Wheeden). *Sea* $1 < p < \infty$. *Son equivalentes*

(a) $w \in A_p(a,b)$

(b) *El operador*

$$\begin{array}{rccc} H: & L^p((a,b),w) & \longrightarrow & L^p((a,b),w) \\ & f & \longmapsto & Hf \end{array}$$

es acotado.

(c) *El operador*

$$\begin{array}{rccc} H: & L^p((a,b),w) & \longrightarrow & L^{p,\infty}((a,b),w) \\ & f & \longmapsto & Hf \end{array}$$

es acotado.

Además, la constante $A_p(w)$ *y la norma de* H *como operador dependen una de otra únicamente.*

DEMOSTRACIÓN. Véase [**21**]. □

Nuestro interés se centrará en el estudio de la acotación uniforme de la transformada de Hilbert con pesos dependientes de un parámetro, para ello consideraremos familias de pesos en $A_p(a,b)$. En concreto, dado $1 < p < \infty$, diremos que una sucesión de pesos $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece a $A_p(a,b)$ uniformemente si se verifica la condición (8) con una misma constante C para todo peso w_n. Como consecuencia de la relación existente entre la constante de la definición de A_p y la norma de H como operador, tendremos que si $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sucesión de pesos pertenecientes a $A_p(a,b)$ uniformemente entonces H es un operador uniformemente acotado en $L^p((a,b),w_n)$.

Puesto que a partir de ahora utilizaremos fundamentalmente pesos sobre $(0,\infty)$ denotaremos la clase $A_p(0,\infty)$ mediante A_p. Los resultados sobre pesos A_p contenidos en los Lemas 1.1 y 1.2 serán de gran utilidad a la hora de estudiar la acotación del operador suma parcial n-ésima asociado a las series de Fourier-Neumann, que vendrá descrito en términos de la transformada de Hilbert.

LEMA 1.1. *Sean u, v, w tres pesos en $(0,\infty)$, γ una constante positiva y $1 < p < \infty$. Entonces*

(a) *$w(x) \in A_p$ si y sólo si $w(\gamma x) \in A_p$, teniendo ambos pesos la misma constante A_p.*
(b) *$w \in A_p$ si y sólo si $\gamma w \in A_p$, teniendo ambos pesos la misma constante A_p.*
(c) *Si $u, v \in A_p$, entonces $u+v \in A_p$ y $A_p(u+v) \le A_p(u)+A_p(v)$.*
(d) *Si $u, v \in A_p$ y $\frac{1}{w} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$, entonces $w \in A_p$ y $A_p(w) \le C[A_p(u) + A_p(v)]$.*

DEMOSTRACIÓN. Los apartados (a) y (b) son triviales a partir de la definición (8). El apartado (c) es una consecuencia inmediata de la desigualdad

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I (u+v)^{-q/p}\right)^{p/q} \le \min\left\{\left(\frac{1}{|I|}\int_I u^{-q/p}\right)^{p/q}, \left(\frac{1}{|I|}\int_I v^{-q/p}\right)^{p/q}\right\},$$

que nos da

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|I|}\int_I (u+v)\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I (u+v)^{-q/p}\right)^{p/q} &\le \left(\frac{1}{|I|}\int_I u\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I u^{-q/p}\right)^{p/q} + \left(\frac{1}{|I|}\int_I v\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I v^{-q/p}\right)^{p/q} \\ &\le A_p(u) + A_p(v).\end{aligned}$$

El apartado (d) es una consecuencia de (c) y del siguiente hecho básico de teoría de pesos A_p:

$$u \in A_p \iff u^{-q/p} \in A_q,$$

con $A_q(u^{-q/p}) = [A_p(u)]^{q/p}$. □

Nota 1.1. A lo largo de la demostración del próximo lema, y en distintas ocasiones a lo largo de este trabajo, nos veremos obligados a estimar integrales del tipo

$$\int_I |x|^\lambda |1-x|^\mu \, dx,$$

con I un intervalo cualquiera. Presentamos a continuación una equivalencia que nos será de gran utilidad para tratar estas integrales. Sean $\lambda, \mu > -1$, verificando que $\lambda + \mu > -1$, e I un intervalo cualquiera de la recta real. Entonces

$$\int_I |x|^\lambda |x-1|^\mu \, dx \sim |I| \, |\{I,0\}|^\lambda \, |\{I,1\}|^\mu, \tag{11}$$

donde $|\{I,0\}|$ denota la medida de Lebesgue del menor conjunto conteniendo a I y 0 (y lo análogo para $|\{I,1\}|$). La demostración de (11) es una sencilla, pero laboriosa, comprobación. Se realiza estudiando la distintas posiciones que el intervalo I puede tomar en relación al $[0,1]$. Las constantes de la equivalencia son independientes de I.

Lema 1.2. *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\gamma \geq 0$, $1 < p < \infty$,*

$$\Phi(x) = \begin{cases} x^a, & si \;\; 0 < x \leq 1, \\ x^b, & si \;\; x > 1, \end{cases}$$

y

$$\Omega(x) = \begin{cases} x^a, & si \;\; 0 < x \leq 1/2, \\ |x-1|^b, & si \;\; 1/2 < x \leq 3/2, \\ x^c, & si \;\; x > 3/2. \end{cases}$$

Entonces

(a)

$$|x-\gamma|^a \in A_p \iff -1 < a < p-1,$$

(b)

$$\Phi \in A_p \iff \begin{cases} -1 < a < p-1, \\ -1 < b < p-1, \end{cases}$$

(c)

$$\Omega \in A_p \iff \begin{cases} -1 < a < p-1, \\ -1 < b < p-1, \\ -1 < c < p-1. \end{cases}$$

Demostración. El apartado (a) es un resultado clásico de teoría de pesos. Para probar que la condición $-1 < a < p-1$ es necesaria basta tener en cuenta la integrabilidad de $|x-\gamma|^a$ y de $|x-\gamma|^{-a/(p-1)}$ en un entorno de γ. Veamos que también es suficiente.

Por los apartados (a) y (b) del Lema 1.1 tendremos que

$$|x-\gamma|^a \in A_p \iff |x-1|^a \in A_p.$$

Para concluir, bastará probar que si $-1 < a < p-1$ entonces

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I |x-1|^a\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I |x-1|^{-aq/p}\right)^{p/q} \leq C.$$

Esta estimación la obtendremos inmediatamente a partir de (11).

Vayamos con el apartado (b). La necesidad de la condición $-1 < a < p-1$ se sigue de exigir la integrabilidad de x^a y de $x^{-a/(p-1)}$ en $(0,1)$. Para obtener la necesidad de $-1 < b < p-1$ tomemos el intervalo $I = [1,n]$. En él la condición A_p es

$$(n-1)^{-p}\left(\int_1^n x^b\right)\left(\int_1^n x^{-bq/p}\right)^{p/q} \leq C.$$

Ahora, sin más que efectuar las integrales y exigiendo la acotación cuando $n \to \infty$, se sigue la condición sobre b.

Para probar la suficiencia, comencemos suponiendo que $I \subseteq (0,1)$ ó $I \subseteq (1,\infty)$. Así, usando el apartado (a) y las condiciones $-1 < a < p-1$ y $-1 < b < p-1$, tendremos que, para este tipo de intervalos,

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I \Phi\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I \Phi^{-q/p}\right)^{p/q} \leq C.$$

Veamos, ahora, que la condición A_p se verifica para intervalos de la forma $I = I_\alpha \cup I_\beta$ con $I_\alpha = [\alpha,1]$ e $I_\beta = [1,\beta]$. Observemos en primer lugar que, para $a > -1$ y $b > -1$, la equivalencia (11) nos permite obtener

$$\begin{aligned} \int_I \Phi &= \int_{I_\alpha} x^a + \int_{I_\beta} x^b \\ &\sim (|I_\alpha| + |I_\beta|\beta^b). \end{aligned} \tag{12}$$

Análogamente, si $a < p-1$ y $b < p-1$, llegamos a

$$(13)\qquad \left(\int_I \Phi^{-q/p}\right)^{p/q} = \left(\int_{I_\alpha} x^{-aq/p} + \int_{I_\beta} x^{-bq/p}\right)^{p/q}$$
$$\sim (|I_\alpha| + |I_\beta|\beta^{-bq/p})^{p/q}$$
$$\sim (|I_\alpha|^{p/q} + |I_\beta|^{p/q}\beta^{-b}),$$

donde hemos usado que, si $r, s, m > 0$, entonces $(r+s)^m \sim (r^m + s^m)$. Teniendo en cuenta ahora que, si $-1 < b < p-1$,

$$|I_\alpha||I_\beta|^{p/q}\beta^{-b} \le C|I_\beta|^p\beta^{-(b+1)} \le C|I|^p$$

y

$$|I_\alpha|^{p/q}|I_\beta|\beta^b \le C|I_\beta|^p\beta^{b-p+1} \le C|I|^p,$$

podemos concluir que

$$\left(\int_I \Phi\right)\left(\int_I \Phi^{-q/p}\right)^{p/q} \sim (|I_\alpha| + |I_\beta|\beta^b)(|I_\alpha|^{p/q} + |I_\beta|^{p/q}\beta^{-b})$$
$$\le (|I|^p + |I_\alpha||I_\beta|^{p/q}\beta^{-b} + |I_\alpha|^{p/q}|I_\beta|\beta^b)$$
$$\le C|I|^p,$$

lo que equivale a la condición A_p.

Procedamos con el apartado (c). La necesidad de $-1 < a < p-1$ y $-1 < b < p-1$ se deduce a partir de la integrabilidad de x^a y $x^{-a/(p-1)}$ en $(0, 1/2)$ y de $|x-1|^b$ y $|x-1|^{-b/(p-1)}$ en $(1/2, 3/2)$. Para ver que $-1 < c < p-1$ es también necesaria, tomaremos los intervalos $I = [2, n]$ para el peso x^c. En estos intervalos la condición A_p es

$$(n-2)^{-p}\left(\int_2^n x^c\right)\left(\int_2^n x^{-cq/p}\right)^{p/q} \le C.$$

Efectuando las integrales y exigiendo la acotación cuando $n \to \infty$ se sigue inmediatamente la condición sobre c.

Veamos que las condiciones $-1 < a < p-1$, $-1 < b < p-1$ y $-1 < c < p-1$ nos permiten asegurar que $\Omega \in A_p$. Si $I \subseteq (0, 1/2)$, $I \subseteq (1/2, 3/2)$ ó $I \subseteq (3/2, \infty)$ se tiene inmediatamente, por el apartado (a), que

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I \Omega\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I \Omega^{-q/p}\right)^{p/q} \le C.$$

Consideremos los intervalos $I = [\alpha, \beta]$ con $0 < \alpha < 1/2$ y $\beta > 3/2$. Si $-1 < b < p-1$ podemos ver que

$$\int_{1/2}^{3/2} |x-1|^b \sim \int_{1/2}^{3/2} x^a \sim \int_{1/2}^{3/2} x^c \sim 1$$

y

$$\int_{1/2}^{3/2} |x-1|^{-bq/p} \sim \int_{1/2}^{3/2} x^{-aq/p} \sim \int_{1/2}^{3/2} x^{-cq/p} \sim 1.$$

De este modo,

$$\int_I \Phi \leq \int_\alpha^1 \Phi + \int_1^\beta \Phi \leq \int_\alpha^1 x^a + \int_1^\beta x^c$$

y

$$\int_I \Phi^{-q/p} \leq \int_\alpha^1 \Phi^{-q/p} + \int_1^\beta \Phi^{-q/p} \leq \int_\alpha^1 x^{-aq/p} + \int_1^\beta x^{-cq/p}.$$

Supuesto $-1 < a < p-1$ y $-1 < c < p-1$ es fácil comprobar, procediendo como en (12) y (13), la condición A_p para este tipo de intervalos.

Tomemos, ahora, los intervalos $I = I_\alpha \cup I_\beta$ con $I_\alpha = [\alpha, 1/2]$ y $I_\beta = [1/2, \beta]$, donde $\beta < 3/2$. Con la descomposición dada de I, si $a > -1$ y $b > -1$, tendremos, por (11), que

$$\begin{aligned}\int_I \Omega &= \int_{I_\alpha} x^a + \int_{I_\beta} |x-1|^b \\ &\sim \left(2^{-a}|I_\alpha| + C_\beta^b |I_\beta|\right),\end{aligned}$$

donde

$$C_\beta = \begin{cases} 1/2, \text{ si } 1/2 < \beta < 1, \\ |\beta - 1/2|, \text{ si } 1 \leq \beta < 3/2. \end{cases}$$

Igualmente por (11), si $a < p-1$ y $b < p-1$, llegamos a que

$$\begin{aligned}\int_I \Omega^{-q/p} &= \int_{I_\alpha} x^{-aq/p} + \int_{I_\beta} |x-1|^{-bq/p} \\ &\sim \left(2^{aq/p}|I_\alpha| + C_\beta^{-bq/p}|I_\beta|\right).\end{aligned}$$

De las equivalencias anteriores podemos obtener, teniendo en cuenta la estimación $1/2 \leq C_\beta \leq 1$, que

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{|I|}\int_I \Omega\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I \Omega^{-q/p}\right)^{p/q} \\ &\qquad \leq C\left(\frac{1}{|I|}(|I_\alpha| + |I_\beta|)\right)\left(\frac{1}{|I|}(|I_\alpha| + |I_\beta|)\right)^{p/q} \leq C.\end{aligned}$$

Finalizaremos analizando los intervalos $I = I_\alpha \cup I_\beta$ con $I_\alpha = [\alpha, 3/2]$ y $I_\beta = [3/2, \beta]$ donde $1/2 < \alpha$. Al igual que en el caso anterior, usando (11) y supuesto que $-1 < a < p-1$ y $-1 < b < p-1$, se verifica que

$$\begin{aligned}\int_I \Omega &= \int_{I_\alpha} |x-1|^b + \int_{I_\beta} x^c \\ &\sim \left(C_\alpha^b |I_\alpha| + \beta^c |I_\beta|\right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\int_I \Omega^{-q/p} &= \int_{I_\alpha} |x-1|^{-bq/p} + \int_{I_\beta} x^{-cq/p} \\ &\sim \left(C_\alpha^{-bq/p} |I_\alpha| + \beta^{-cq/p} |I_\beta|\right),\end{aligned}$$

donde

$$C_\alpha = \begin{cases} |3/2-\alpha|, \text{ si } 1/2 < \alpha < 1, \\ 1/2, \text{ si } 1 \le \alpha < 3/2. \end{cases}$$

Con esto,

$$\begin{aligned}&\left(\int_I \Omega\right)\left(\int_I \Omega^{-q/p}\right)^{p/q} \\ &\qquad\sim \left(C_\alpha^b |I_\alpha| + \beta^c |I_\beta|\right)\left(C_\alpha^{-bq/p} |I_\alpha| + \beta^{-cq/p} |I_\beta|\right)^{p/q} \\ &\qquad\le C\left(C_\alpha^b |I_\alpha| + \beta^c |I_\beta|\right)\left(C_\alpha^{-b} |I_\alpha|^{p/q} + \beta^{-c} |I_\beta|^{p/q}\right) \\ &\qquad\le C\left(|I|^p + C_\alpha^b \beta^{-c} |I_\alpha|\, |I_\beta|^{p/q} + C_\alpha^{-b}\beta^c |I_\alpha|^{p/q}\, |I_\beta|\right).\end{aligned}$$

Observando que $1/2 \le C_\alpha \le 1$ podemos concluir que, si $-1 < c < p-1$, entonces

$$C_\alpha^b \beta^{-c} |I_\alpha|\, |I_\beta|^{p/q} \le C\beta^{-(c+1)} |I_\beta|^p \le C|I|^p$$

y

$$C_\alpha^{-b}\beta^c |I_\alpha|^{p/q}\, |I_\beta| \le C\beta^{c-p+1} |I|^p \le C|I|^p.$$

Esto nos lleva a

$$\left(\int_I \Omega\right)\left(\int_I \Omega^{-q/p}\right)^{p/q} \le C|I|^p,$$

tal como buscábamos. □

3. La transformada de Hankel

Definimos la transformada de Hankel $\mathcal{H}_\alpha$ de orden $\alpha > -1$ como el operador integral que a cada función f asocia

$$\mathcal{H}_\alpha(f,x) = \frac{x^{-\alpha/2}}{2}\int_0^\infty f(t) J_\alpha(\sqrt{xt}) t^{\alpha/2}\, dt, \quad x > 0. \tag{14}$$

Existen varias definiciones, todas ellas relacionadas mediante cambios de variable o de función, para la transformada de Hankel. La definición dada en (14) puede verse en [**10**].

Las propiedades del operador $\mathcal{H}_\alpha$ son mejores para $\alpha \geq -1/2$. Por ejemplo, la expresión formal $\mathcal{H}_\alpha^2 = \mathrm{Id}$ se da únicamente en esos casos. Por tanto, asumiremos esta hipótesis siempre que sea necesario. El estudio de la acotación en $L^p(x^\alpha)$ de $\mathcal{H}_\alpha$ también necesita de esta condición. El comportamiento de las funciones de Bessel, que se presentará con más detalle en el próximo capítulo, nos da la cota

$$|J_\alpha(x)| \leq C_\alpha x^\alpha, \quad x \in (0, \infty),$$

para $\alpha \geq -1/2$. De ella se sigue, de manera inmediata, que

$$\|\mathcal{H}_\alpha f\|_{L^\infty(x^\alpha)} \leq C\|f\|_{L^1(x^\alpha)}, \quad f \in L^1(x^\alpha), \tag{15}$$

para $\alpha \geq -1/2$.

El operador $\mathcal{H}_\alpha$ definido en (14) puede ser extendido a otros espacios $L^p(x^\alpha)$. Esto es posible tomando una clase de Schwartz modificada.

Consideramos el espacio

$$S^+ = \{f \in C^\infty(0,\infty) : \forall k, j \geq 0,\ |t^k f^{(j)}(t)| < C_{k,j}\}$$

dotado con la topología generada por las seminormas $\|\cdot\|_{k,j}$, $k, j \in \mathbb{N}$, definidas por $\|f\|_{k,j} = \sup_{t\in(0,\infty)} |t^k f^{(j)}(t)|$. Es fácil identificar S^+ con las funciones f tales que $f(t) = \phi(t)$, $t \geq 0$, para alguna función ϕ en la clase de Schwartz S. Así, como puede verse en [**10**], tendremos que el operador $\mathcal{H}_\alpha$ es un isomorfismo de S^+ en sí mismo, verificando que $\mathcal{H}_\alpha^2 = \mathrm{Id}$ y la identidad

$$\int_0^\infty \mathcal{H}_\alpha(f, x) g(x)\, dx = \int_0^\infty f(t)\mathcal{H}_\alpha(g, t)\, dt. \tag{16}$$

Usando que S^+ es denso en los espacios $L^p(x^\alpha)$, con $1 \leq p < \infty$ y $\alpha > -1$, la transformada de Hankel se extiende de un modo continuo a $L^2(x^\alpha)$, con $\alpha \geq -1/2$, preservando la propiedad $\mathcal{H}_\alpha^2 = \mathrm{Id}$ y cumpliendo la igualdad de normas

$$\|\mathcal{H}_\alpha f\|_{L^2(x^\alpha)} = \|f\|_{L^2(x^\alpha)}, \quad f \in L^2(x^\alpha). \tag{17}$$

Ahora, tomando $1 \leq p \leq 2$ e interpolando entre (15) y (17) tendremos

$$\|\mathcal{H}_\alpha f\|_{L^q(x^\alpha)} \leq C\|f\|_{L^p(x^\alpha)}, \quad f \in L^p(x^\alpha), \tag{18}$$

donde q es el conjugado de p y $\alpha \geq -1/2$.

La estimación (18) no será suficiente para obtener algunos de los resultados que se probarán a lo largo de esta memoria. Necesitaremos ciertas acotaciones con pesos radiales para la transformada de Hankel. En varios trabajos desarrollados a lo largo de los años setenta por P. G. Rooney (véanse [**30**] y [**31**]), pueden encontrarse resultados en esta línea. Rooney estudia acotaciones para la transformada de Hankel clásica, definida mediante el operador integral

$$H_\alpha(f, x) = \int_0^\infty (xt)^{1/2} J_\alpha(xt) f(t)\, dt. \tag{19}$$

Sin más que encontrar una relación entre (14) y (19) podemos obtener el siguiente resultado relativo a la acotación de la transformada de Hankel tal y como ha sido definida en (14):

TEOREMA 1.5 (Rooney). *Sean* $\alpha > -1$, $1 < r \le s < \infty$ *y*

$$\max\left\{\frac{1}{r}, 1 - \frac{1}{s}\right\} \le \mu < \alpha + \tfrac{3}{2}.$$

Entonces

$$(20) \quad \Big(\int_0^\infty |x^{-\mu/2+\alpha/2+3/4}\mathcal{H}_\alpha(h,x)|^s \,\frac{dx}{x}\Big)^{1/s} \le C\Big(\int_0^\infty |x^{\mu/2+\alpha/2+1/4}h(x)|^r \,\frac{dx}{x}\Big)^{1/r}.$$

DEMOSTRACIÓN. Para probar este hecho basta considerar que

$$\mathcal{H}_\alpha(f(\cdot),x) = x^{-\alpha/2-1/4}H_\alpha((\cdot)^{\alpha+1/2}f((\cdot)^2),\sqrt{x}).$$

Ahora, usando un cambio de variable y el resultado sobre H_α en [**30**], se sigue (20). □

A partir del teorema anterior pueden deducirse acotaciones con pesos más generales para la transformada de Hankel, como puede verse en el trabajo de P. Heywood y P. G. Rooney [**18**], pero no serán de relevancia para el objeto de esta memoria.

Nuestro interés por la transformada de Hankel viene justificado por la relación

$$(21) \qquad \int_0^\infty J_{\alpha+2n+1}(t)J_\alpha(xt)\,dt = x^\alpha P_n^{(\alpha,0)}(1-2x^2)\chi_{[0,1]}(x),$$

donde $P_n^{(\alpha,0)}$ denota el n-ésimo polinomio de Jacobi de orden $(\alpha,0)$, definido como en (6). La expresión (21) puede ser escrita en términos de la transformada de Hankel como

$$\mathcal{H}_\alpha(j_n^\alpha,x) = \sqrt{\alpha+2n+1}P_n^{(\alpha,0)}(1-2x)\chi_{[0,1]}(x).$$

Esto, en particular, nos está diciendo que la transformada de Hankel de $\{j_n^\alpha\}_{n\ge0}$ está soportada en el intervalo $[0,1]$. Este hecho será fundamental a la hora de identificar el espacio de densidad de nuestro sistema ortonormal.

De especial importancia para lograr nuestros objetivos será conocer la transformada de Hankel de orden α de las funciones $j_n^{\alpha+\beta}$, y $(\cdot)^\beta j_n^{\alpha+\beta}$. La expresión de estas transformadas suele expresarse comúnmente en términos de funciones hipergeométricas, denotadas por ${}_2F_1$. No es habitual, sin embargo, encontrarlas expresadas como polinomios de Jacobi, que será como nosotros las usaremos. En el siguiente lema obtenemos la expresión de estas transformadas en términos de los polinomios de Jacobi.

LEMA 1.3. *Sean $\alpha\,,\beta > -1$ y $\alpha+\beta > -1$. Entonces*

$$(22)\quad \mathcal{H}_\alpha(j_n^{\alpha+\beta}(t),x) = 2^{-\beta}\frac{\sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(\beta+n+1)}(1-x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x)\chi_{[0,1]}(x).$$

Si, además, asumimos $\beta < 1$ tenemos

$$(23)\quad \mathcal{H}_\alpha(j_n^{\alpha+\beta}(t)t^\beta,x) = 2^{\beta}\frac{\sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x), \quad x\in(0,1).$$

DEMOSTRACIÓN. Usaremos la expresión

$$(24)\quad \int_0^\infty t^{-\lambda}J_\mu(at)J_\nu(bt)\,dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\mu+\nu-\lambda+1))b^\nu}{2^\lambda a^{\nu-\lambda+1}\Gamma(\nu+1)\Gamma(\frac{1}{2}(\lambda+\mu-\nu+1))} \times {}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2},\frac{\nu-\lambda-\mu+1}{2};\nu+1;\frac{b^2}{a^2}\right), \quad 0<b<a;$$

válida para $\mu+\nu-\lambda > -1$ y $\lambda > -1$ (véase [**12**, Cap. VIII, 8.11, pág. 48]).

Tomando en (24) $a=1$, $x=b^2$, $\lambda=\beta$, $\mu=\alpha+\beta+2n+1$, $\nu=\alpha$ y haciendo el correspondiente cambio de variable tenemos

$$\mathcal{H}_\alpha(j_n^{\alpha+\beta}(t),x) = \frac{\sqrt{2n+\alpha+\beta+1}\,\Gamma(\alpha+n+1)}{2^\beta\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+1)}\,{}_2F_1(\alpha+n+1,-n-\beta;\alpha+1;x),$$

que es válida para $\alpha > -1$ y $\beta > -1$ en el intervalo $0<x<1$. Usando que, para $\alpha,\beta > -1$ y $n=0,1,2,\dots,$

$${}_2F_1(\alpha+n+1,-n-\beta;\alpha+1;x) = (1-x)^\beta\,{}_2F_1(-n,\alpha+\beta+n+1;\alpha+1;x),$$

y

$$(25)\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}\,{}_2F_1(-n,\alpha+\beta+n+1;\alpha+1;\tfrac{1-x}{2}),$$

tenemos

$$\mathcal{H}_\alpha(j_n^{\alpha+\beta}(t),x) = \frac{\sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\,\Gamma(n+1)}{2^\beta\Gamma(\beta+n+1)}(1-x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x), \quad x\in(0,1).$$

Así, para completar (22) debemos probar que $\mathcal{H}_\alpha(j_n^{\alpha+\beta}(t),x)=0$ si $x>1$. Para hacer esto tomamos $x=a^2$, $b=1$, $\lambda=\beta$, $\mu=\alpha$ y $\nu=\alpha+\beta+2n+1$ en (24). De esta forma, $\frac{1}{2}(\lambda+\mu-\nu+1)=0,-1,-2,\dots,$

lo que nos da que los coeficientes $1/\Gamma(\frac{1}{2}(\lambda+\mu-\nu+1))$ se anulan y por tanto (22) se cumple.

Análogamente, para obtener la demostración de (23) tomamos, otra vez, $a=1$ y $x=b^2$ en (24), con los parámetros $\lambda=-\beta$, $\mu=\alpha+\beta+2n+1$ y $\nu=\alpha$. Con esto, para $\beta<1$ y $\alpha+\beta>-1$, utilizando sucesivamente (24), la igualdad ${}_2F_1(a,b;c;x)={}_2F_1(b,a;c;x)$ y (25) tendremos

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_\alpha(t^\beta j_n^{\alpha+\beta}(t),x)\\
&= 2^\beta \frac{\sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(n+1)}\,{}_2F_1(\alpha+\beta+n+1,-n;\alpha+1;x)\\
&= 2^\beta \frac{\sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(n+1)}\,{}_2F_1(-n,\alpha+\beta+n+1;\alpha+1;x)\\
&\qquad\qquad = 2^\beta \frac{\sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x),
\end{aligned}$$

tal y como queríamos probar. □

Debemos hacer notar que (23) nos muestra únicamente el comportamiento de $\mathcal{H}_\alpha(t^\beta j_n^{\alpha+\beta}(t),x)$ para $x\in(0,1)$, lo cual no quiere decir que para $x>1$ sea 0.

CAPÍTULO 2

Comportamiento en norma de las funciones ortonormales de las series de Fourier-Neumann

1. Introducción

En este capítulo analizaremos determinados aspectos de las funciones de Bessel que nos serán útiles más adelante. Comenzaremos presentando unas estimaciones superiores para la función de Bessel y su derivada. Las cotas que obtengamos serán la clave para poder usar la teoría de pesos A_p y la transformada de Hilbert en el estudio de las condiciones suficientes para la acotación uniforme del operador suma parcial n-ésima, S_n, asociado al sistema ortonormal $\{j_n^\alpha\}_{n\geq 0}$, definido como en (5) para $\alpha > -1$.

Para tener definidos los operadores S_n en los espacios $L^p(u^p(x)\,x^\alpha)$, con pesos de la forma $u(x) = x^a(1+x)^{b-a}$, necesitaremos conocer para qué valores de α, a, b y p se verifica que $j_n^\alpha \in L^p(u^p(x)\,x^\alpha) \cap L^q(u^{-q}(x)\,x^\alpha)$. Además, el estudio de las condiciones necesarias para la acotación uniforme de los S_n nos obliga a conocer el comportamiento respecto a n de la norma en $L^p(u^p(x)\,x^\alpha)$ y en $L^q(u^{-q}(x)\,x^\alpha)$ de las funciones j_n^α.

El análisis de la acotaciones (p,p)-débil y (p,p)-débil restringida del operador S_n exige que conozcamos cuándo se verifica que $j_n^\alpha \in L^{p,\infty}(x^\alpha)$. También necesitaremos estimar respecto a n la norma de j_n^α en los espacios $L^{p,\infty}(x^\alpha)$.

En la Sección 3 efectuaremos el cálculo de la norma de las funciones j_n^α en los espacios $L^p(x^r(1+x)^{s-r})$. En la Sección 4, persiguiendo obtener la mayor generalidad posible, realizaremos el mismo análisis en los espacios $L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})$.

2. Estimaciones para las funciones de Bessel

Denotaremos por J_ν la función de Bessel de orden ν, con $\nu > -1$, definida mediante la serie de potencias

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2n+\nu}.$$

Es obvio, a partir de la definición de las funciones de Bessel, que

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} + O(x^{\nu+2}), \qquad \text{si } x \to 0+. \tag{26}$$

Por otra parte, es un resultado bien conocido el siguiente comportamiento cuando $x \to \infty$ de las funciones de Bessel:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1})\right]. \tag{27}$$

A partir de (26) y (27) no es difícil obtener las siguientes cotas superiores para $\nu > -1$:

$$|J_\nu(x)| \le C_\nu x^\nu, \quad x \in (0,1], \tag{28}$$

$$|J_\nu(x)| \le C_\nu x^{-1/2}, \quad x \in [1,\infty). \tag{29}$$

La estimación superior dada en (29) presenta un comportamiento poco satisfactorio en cuanto al tamaño de la constante C_ν para valores grandes de ν. De un modo más preciso podemos asegurar que

$$C_\nu \ge \nu^{1/6}. \tag{30}$$

Este comportamiento de la constante se deduce del valor que toman las funciones de Bessel para valores próximos a ν, esto es,

$$J_\nu(\nu) \sim \nu^{-1/3}, \tag{31}$$

véase [**42**, Cap. VIII, 8.2, pág. 231]. Para comprobar (30) basta considerar (29) para valores de x próximos a ν y hacer uso de (31),

$$\nu^{-1/3} \sim |J_\nu(\nu)| \le C_\nu \nu^{-1/2}.$$

Puesto que uno de nuestros objetivos es obtener acotación uniforme para el operador S_n, que dependerá de J_ν y J'_ν con $\nu = \nu(n)$, necesitaremos cotas para la función de Bessel y su derivada donde las constantes sean independientes de ν. Como $\nu = \alpha+2n+2$, con $\alpha > -1$, bastará con considerar $\nu \ge 1$. Las cotas que nos interesarán son

$$|J_\nu(x)| \le Cx^{-1/4}\left(|x-\nu| + \nu^{1/3}\right)^{-1/4}, \quad x \in (0,\infty), \tag{32}$$

$$|J'_\nu(x)| \le Cx^{-3/4}\left(|x-\nu| + \nu^{1/3}\right)^{1/4}, \quad x \in (0,\infty), \tag{33}$$

y se deducen de las usadas en [**4**] y [**9**], por ejemplo, y ya fueron utilizadas en [**41**]. Estas estimaciones se obtienen utilizando el método de la fase estacionaria. En algunas ocasiones consideraremos estas cotas únicamente para el intervalo $[\nu/2,\infty)$. En el intervalo $(0,\nu/2]$ tomaremos una estimación más apropiada.

El estudio del tamaño de las normas de j_n^α respecto a n nos obliga a conocer de forma más detallada el comportamiento de las funciones de Bessel en función de su orden. En concreto, para valores grandes de ν tenemos

$$
(34) \quad |J_\nu(x)| \leq \begin{cases} Cx^{-a}\nu^{a-1/2}(e/4)^\nu, & \text{si } 0 < x \leq \nu/2, \\ C(\nu - x)^{-1}, & \text{si } \nu/2 \leq x \leq \nu - \nu^{1/3}, \\ C\nu^{-1/3}, & \text{si } \nu - \nu^{1/3} \leq x \leq \nu + \nu^{1/3}, \\ C\nu^{-1/4}(x-\nu)^{-1/4}, & \text{si } \nu + \nu^{1/3} \leq x \leq 2\nu, \\ Cx^{-1/2}, & \text{si } 2\nu \leq x, \end{cases}
$$

donde las constantes son independientes de ν. Debemos hacer notar que las estimaciones dadas en (34) para $x \geq \nu/2$ son equivalentes a la cota dada en (32) y se siguen, nuevamente, de las usadas en [**4**] y [**9**]. La estimación para $x \leq \nu/2$ es válida para $a \in \mathbb{R}$ con $a + \nu \geq 0$, y la constante que aparece depende del valor a; es decir $C = C_a$. Esta desigualdad se demostrará en el siguiente lema. En él incluiremos, además, una estimación, para $x \leq \nu/2$, de la función J'_ν que nos será de gran utilidad.

Lema 2.1. *Sea $\nu > 0$ y $a \in \mathbb{R}$. Entonces existe $C_a > 0$ tal que*

$$
(35) \qquad 0 \leq J_\nu(x)x^a \leq C_a\nu^{a-1/2}\left(\frac{e}{4}\right)^\nu
$$

y

$$
(36) \qquad 0 \leq J'_\nu(x)x^{a+1} \leq C_a\nu^{a+1/2}\left(\frac{e}{4}\right)^\nu
$$

si $a + \nu \geq 0$ y $0 < x \leq \nu/2$.

Demostración. Comencemos verificando el resultado relativo a $J_\nu(x)$. Siguiendo [**42**, Cap. III, 3.31, pág. 49], se tiene, para $\nu > -1/2$, la expresión

$$
\Gamma(\nu+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}|J_\nu(x)| \leq 1, \quad x \geq 0.
$$

Usando la equivalencia de Stirling para estimar $\Gamma(\nu + 1)$ llegamos a

$$
|J_\nu(x)| \leq C\nu^{-1/2}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{-\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu.
$$

Multiplicando y dividiendo por el factor $(\nu/x)^a$, teniendo en cuenta que $x/\nu \leq 1/2$ (por ser $x \leq \nu/2$) y usando que $a + \nu \geq 0$ tendremos

$$
|J_\nu(x)| \leq C\nu^{-1/2}\left(\frac{e}{2}\right)^\nu\left(\frac{x}{\nu}\right)^{\nu+a}\left(\frac{\nu}{x}\right)^a \leq C\nu^{a-1/2}x^{-a}2^{-(a+\nu)}\left(\frac{e}{2}\right)^\nu.
$$

De esta estimación, y puesto que $J_\nu(x)$ es una función positiva si $x \leq \nu/2$ y $\nu > 0$ (véase [**42**, Cap. VIII, 8.51, pág. 254]), obtenemos el resultado

$$
0 \leq J_\nu(x)x^a \leq C_a\nu^{a-1/2}\left(\frac{e}{4}\right)^\nu
$$

con $C_a = 2^{-a}\,C$.

La cota superior dada para $J'_\nu(x)$ puede probarse de un modo análogo considerando la desigualdad

$$2\Gamma(\nu)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+1}|J'_\nu(x)| \le 1 + \frac{x^2}{\nu(\nu+1)},$$

válida para $x \ge 0$ y $\nu > -1/2$, y que puede verse en [**42**, Cap. III, 3.31, pág. 49]. Deberá tenerse en cuenta que

$$2\Gamma(\nu)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+1}|J'_\nu(x)| = \frac{x}{\nu}\Gamma(\nu+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}|J'_\nu(x)|$$

y que

$$0 \le \frac{x^2}{\nu(\nu+1)} \le \frac{1}{4},$$

si $0 \le x \le \nu/2$. La positividad de $J'_\nu(x)$, para $\nu > 0$, se sigue de [**42**, Cap. VIII, 8.51, pág. 254]. □

3. Estudio de la norma en los espacios $L^p(x^r(1+x)^{s-r})$

En primer lugar recordemos que, para cada $\alpha > -1$, las funciones que forman el sistema ortonormal de Fourier-Neumann fueron definidas en el capítulo anterior como

$$j_n^\alpha(x) = \sqrt{\alpha+2n+1}\,J_{\alpha+2n+1}(\sqrt{x})\,x^{-\alpha/2-1/2}, \quad n = 0,1,2,\dots .$$

En esta sección nos centraremos en el análisis de los valores de α, p, r y s que nos permitan asegurar que $j_n^\alpha \in L^p(x^r(1+x)^{s-r})$ para todo n. Estudiaremos además el tamaño respecto a n de las normas de las funciones j_n^α en los espacios $L^p(x^r(1+x)^{s-r})$.

Como paso previo a la realización de los objetivos que nos proponemos en esta sección, daremos un lema relativo a la pertenencia de las funciones j_n^α a los espacios $L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})$.

Lema 2.2. *Sean $r, s \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$ y $1 < p < \infty$ verificando*

$$-\frac{1}{4} > (s+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \frac{\alpha - s}{2}.$$

Entonces, para cada n se tiene que

$$j_n^\alpha \notin L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r}).$$

Demostración. A partir de (27) tenemos que, para cada n fijo,

$$j_n^\alpha(x) = C_{\alpha,n}\,x^{-(2\alpha+3)/4}\cos(x^{1/2} + \varphi_{\alpha,n}) + O(x^{-(2\alpha+5)/4}), \; x \to +\infty,$$

con

$$\varphi_{\alpha,n} = -\frac{\pi(\alpha+2n+1)}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Ahora, si $k \in \mathbb{N}$, consideremos el intervalo

$$I_k = [(2k\pi - \varphi_{\alpha,n} - \pi/4)^2, (2k\pi - \varphi_{\alpha,n} + \pi/4)^2].$$

La familia $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ está formada por intervalos disjuntos. Además, es inmediato observar que la longitud de I_k, para cada k fijo, es

$$|I_k| = (2k\pi - \varphi_{\alpha,n} + \pi/4)^2 - (2k\pi - \varphi_{\alpha,n} - \pi/4)^2 \sim k,$$

donde las constantes de la equivalencia dependen de n y α, pero no de k. Por otra parte, si $x \in I_k$ se tiene

$$2k\pi - \pi/4 \le x^{1/2} + \varphi_{\alpha,n} \le 2k\pi + \pi/4,$$

de donde

$$1/\sqrt{2} \le \cos(x^{1/2} + \varphi_{\alpha,n}) \le 1.$$

Así, si $k > k_0$, para un cierto k_0 fijo, y $x \in I_k$, llegamos a

$$\begin{aligned} j_n^\alpha(x) &= x^{-(2\alpha+3)/4}\left[C_{\alpha,n}\cos(x^{1/2} + \varphi_{\alpha,n}) + O(x^{-1/2})\right] \\ &\ge C_{\alpha,n}x^{-(2\alpha+3)/4} \sim C_{\alpha,n}k^{-(2\alpha+3)/2}. \end{aligned}$$

Se trata de probar ahora que

$$\|j_n^\alpha\|_{L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})} \equiv \sup_{t>0} t\left[\int_{\{x:\,|j_n^\alpha(x)|>t\}} x^r(1+x)^{s-r}\,dx\right]^{1/p} = \infty.$$

Ahora bien, $I_k \subseteq \{x : |j_n^\alpha(x)| > t\}$, si $k > k_0$ y $C_{\alpha,n}k^{-(2\alpha+3)/2} > t$; o equivalentemente, si

$$k_0 < k < C_{\alpha,n}t^{-2/(2\alpha+3)}.$$

Denotemos, para cada $t > 0$,

$$A(t) = \{k \in \mathbb{N} : \; k_0 < k < C_{\alpha,n}t^{-2/(2\alpha+3)}\}.$$

Si t es suficientemente pequeño este conjunto no es vacío y, además, tenemos que

$$I_k \subseteq \{x : |j_n^\alpha(x)| > t\}, \; \forall k \in A(t).$$

Considerando que

$$\int_{I_k} x^r(1+x)^{s-r}\,dx \sim \int_{I_k} x^s \sim k^{2s}|I_k| \sim k^{2s+1},$$

para cada $t > 0$ se verificará

$$\begin{aligned} t^p \int_{\{x:\,|j_n^\alpha(x)|>t\}} x^r(1+x)^{s-r}\,dx &\ge t^p \sum_{k\in A(t)} \int_{I_k} x^r(1+x)^{s-r}\,dx \\ &\sim t^p \sum_{k\in A(t)} k^{2s+1}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que, si $\beta > -1$ y $m \to \infty$,

$$\sum_{k=k_0}^{m} k^\beta \sim m^{\beta+1},$$

resulta

$$\begin{aligned} t^p \int_{\{x:\, |j_n^\alpha(x)|>t\}} x^r(1+x)^{s-r}\,dx &\geq C_{\alpha,n} t^p (t^{-2/(2\alpha+3)})^{2(\alpha+1)} \\ &\geq C_{\alpha,n} t^{p-4(s+1)/(2\alpha+3)} \end{aligned}$$

para t suficientemente pequeño. Y puesto que

$$p < \frac{4(s+1)}{2\alpha+3} \iff -\frac{1}{4} > (s+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) + \frac{\alpha-s}{2}$$

se deduce que, en efecto, bajo estas hipótesis

$$\sup_{t>0} t \left[\int_{\{x:\, |j_n^\alpha(x)|>t\}} x^r(1+x)^{s-r}\,dx\right]^{1/p} = \infty.$$

□

En el siguiente lema estudiaremos la pertenencia de las funciones j_n^α a los espacios $L^p(x^r(1+x)^{s-r})$.

LEMA 2.3. *Sean $r, s \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$, $1 < p < \infty$ y n un entero no negativo. Entonces,*

$$j_n^\alpha \in L^p(x^r(1+x)^{s-r}), \quad \forall n \geq 0,$$

si y sólo si $r > -1$ y

$$-\frac{1}{4} < (s+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) + \frac{\alpha-s}{2}. \tag{37}$$

DEMOSTRACIÓN. Teniendo en cuenta (28), (29) y usando que $x^r(1+x)^{s-r} \sim x^r$ en $(0,1]$ y $x^r(1+x)^{s-r} \sim x^s$ en $[1,\infty)$, tenemos

$$\|j_n^\alpha\|^p_{L^p(x^r(1+x)^{s-r})} \leq C_{\alpha,n}\left(\int_0^1 x^{np+r}\,dx + \int_1^\infty x^{-(\alpha/2+3/4)p+s}\,dx\right).$$

La convergencia de estas integrales $\forall n \geq 0$ viene asegurada por $r > -1$ y (37); de hecho

$$-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)p + s < -1 \iff -\frac{1}{4} < (s+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) + \frac{\alpha-s}{2}.$$

Para completar la equivalencia probaremos que si $r \leq -1$ ó p no verifica (37), entonces existe un $n \geq 0$ tal que $j_n^\alpha \notin L^p(x^r(1+x)^{s-r})$.

Comencemos considerando $r \leq -1$ para cualquier p. Usando (26) tenemos que

$$\|j_0^\alpha\|^p_{L^p(x^r(1+x)^{s-r})} \geq C_\alpha \int_0^1 x^r\,dx = \infty.$$

El Lema 2.2 nos asegura que si $-\frac{1}{4} > (s+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{\alpha-s}{2}$ entonces $j_n^\alpha \notin L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})$, para cada n. Así, por ser $L^p(x^r(1+x)^{s-r}) \subset L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})$, tendremos $j_n^\alpha \notin L^p(x^r(1+x)^{s-r})$.

Por tanto, únicamente nos falta por ver que para p verificando $-\frac{1}{4} = (s+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{\alpha-s}{2}$, o equivalentemente $p = p_0 = \frac{4(s+1)}{2\alpha+3}$, se tiene que $j_n^\alpha \notin L^{p_0}(x^r(1+x)^{s-r})$. Probaremos este hecho recuperando la notación del citado Lema 2.2; así, para $k > k_0$ y $x \in I_k$:

$$j_n^\alpha(x) \geq C_{\alpha,n} k^{-(2\alpha+3)/2}, \quad |I_k| \sim k, \quad x \sim k^2.$$

Luego

$$\begin{aligned}\int_{I_k} |j_n^\alpha(x)|^{p_0} x^r (1+x)^{s-r}\,dx &\sim \int_{I_k} |j_n^\alpha(x)|^{p_0} x^s\,dx \\ &\geq C_{\alpha,n} k^{-\frac{2\alpha+3}{2}p_0+2s+1} = C_{\alpha,n} k^{-1}.\end{aligned}$$

Sumando en k, se obtiene

$$\int_0^\infty |j_n^\alpha(x)|^{p_0} x^r(1+x)^{s-r}\,dx = \infty.$$

□

El próximo lema nos muestra el comportamiento del tamaño de las normas $\|j_n^\alpha\|_{L^p(x^r(1+x)^{s-r})}$ respecto a n.

Lema 2.4. *Sean $r, s \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$ y $1 < p < \infty$. Supongamos además $r > -1$ y*

$$-\frac{1}{4} < (s+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{\alpha-s}{2}.$$

Entonces

$$\|j_n^\alpha\|_{L^p(x^r(1+x)^{s-r})} \sim \begin{cases} n^{-(\alpha+1)+2(s+1)/p}, & si\ \ p<4, \\ n^{-(2\alpha-s+1)/2}(\log n)^{1/4}, & si\ \ p=4, \\ n^{-(5/6+\alpha)+(6s+4)/(3p)}, & si\ \ 4<p. \end{cases} \tag{38}$$

Demostración. Como consecuencia de las hipótesis que aparecen en el Lema 2.3, es claro que $j_n^\alpha \in L^p(x^r(1+x)^{s-r})$ para todo n entero no negativo, y por tanto no tendremos problemas de integrabilidad.

Tomaremos $\nu = \alpha + 2n + 1 \sim n$, así

$$\begin{aligned}\|j_n^\alpha\|_{L^p(x^r(1+x)^{s-r})} &\sim n^{1/2}\|x^{-(\alpha+1)/2} J_\nu(\sqrt{x})\|_{L^p(x^r(1+x)^{s-r})} \\ &= 2n^{1/2}\|t^{-(\alpha+1)} J_\nu(t)\|_{L^p(t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r})}.\end{aligned} \tag{39}$$

Para obtener el resultado basta considerar $\nu > \nu_0$.

Haciendo una descomposición en intervalos igual que en (34) (eligiendo $a = -(\alpha+1)$ si $0 < t \leq \nu/2$), tendremos

$$\int_0^\infty |t^{-(\alpha+1)} J_\nu(t)|^p t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r}\,dt \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5,$$

donde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\nu/2} |J_\nu(t)t^{-(\alpha+1)}|^p\, t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r}\,dt \\
&\le C\left[\nu^{-(\alpha+3/2)}(e/4)^\nu\right]^p \int_0^{\nu/2} t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r}\,dt \\
&\le C\left[\nu^{-(\alpha+3/2)}(e/4)^\nu\right]^p \left(\int_0^1 t^{2r+1}\,dt + \int_1^{\nu/2} t^{2s+1}\,dt\right) \\
&\le C\left[\nu^{-(\alpha+3/2)}(e/4)^\nu\right]^p \begin{cases} \nu^{2(s+1)}, & \text{si } \ s>-1, \\ \log\nu, & \text{si } \ s=-1, \\ 1, & \text{si } \ s<-1, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\nu/2}^{\nu-\nu^{1/3}} |J_\nu(t)t^{-(\alpha+1)}|^p\, t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r}\,dt \\
&\le C\nu^{-(\alpha+1)p+2s+1} \int_{\nu/2}^{\nu-\nu^{1/3}} (\nu-t)^{-p}\,dt \\
&\le C\nu^{-(\alpha+1)p+2s+1}\left[\nu^{(1-p)/3} - (\nu/2)^{1-p}\right] \sim \nu^{-(\alpha+4/3)p+2(s+2/3)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\nu-\nu^{1/3}}^{\nu+\nu^{1/3}} |J_\nu(t)t^{-(\alpha+1)}|^p\, t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r}\,dt \\
&\le C\nu^{-(\alpha+4/3)p+2s+1} \int_{\nu-\nu^{1/3}}^{\nu+\nu^{1/3}} dt \sim \nu^{-(\alpha+4/3)p+2(s+2/3)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{\nu+\nu^{1/3}}^{2\nu} |J_\nu(t)t^{-(\alpha+1)}|^p\, t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r}\,dt \\
&\le C\nu^{-(\alpha+5/4)p+2s+1} \int_{\nu+\nu^{1/3}}^{2\nu} (t-\nu)^{-p/4}\,dt \\
&\le C \begin{cases} \nu^{-(\alpha+3/2)p+2(s+1)}, & \text{si } \ p<4, \\ \nu^{-4(\alpha+1)+2s}(\log\nu), & \text{si } \ p=4, \\ \nu^{-(\alpha+4/3)p+2(s+2/3)}, & \text{si } \ 4<p, \end{cases}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_{2\nu}^{\infty} |J_\nu(t)t^{-(\alpha+1)}|^p\, t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r}\,dt \\
&\le C\int_{2\nu}^{\infty} t^{-(\alpha+3/2)p+2s+1}\,dt \sim \nu^{-(\alpha+3/2)p+2(s+1)}.
\end{aligned}$$

Observando que

$$-\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)p+2(s+1) > -\left(\alpha+\frac{4}{3}\right)p+2\left(s+\frac{2}{3}\right) \iff p<4$$

y usando (39) obtenemos la estimación superior en (38). Procederemos, ahora, con la estimación inferior.

Siguiendo [**3**] tenemos que

$$J_\nu(x) = h(x) + g(x),$$

donde

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\cos\phi(x)}{(x^2-\nu^2)^{1/4}}$$

con

$$\phi(x) = \sqrt{x^2-\nu^2} - \nu \arccos\left(\frac{\nu}{x}\right) - \frac{\pi}{4}$$

y g una función que cumple la siguiente estimación:

$$|g(x)| \le \frac{\nu^{1/4}}{(x-\nu)^{7/4}} + \frac{1}{\nu}, \qquad \text{si } \ \nu+\nu^{1/3} \le x \le 2\nu. \tag{40}$$

Con esta descomposición,

$$\begin{aligned} &\|j_n^\alpha\|_{L^p(x^r(1+x)^{s-r})} \ge C\nu^{1/2}\|J_\nu(t)t^{-(\alpha+1)}\chi_{(\nu+\nu^{1/3},2\nu)}(t)\|_{L^p(t^{2s+1})} \\ &\ge C\nu^{-(\alpha+1/2)+(2s+1)/p}\|J_\nu(t)\chi_{(\nu+\nu^{1/3},2\nu)}(t)\|_{L^p(dt)} \ge C\nu^{-(\alpha+1/2)+(2s+1)/p} \\ &\times \left(\|h(t)\chi_{(\nu+\nu^{1/3},2\nu)}(t)\|_{L^p(dt)} - \|g(t)\chi_{(\nu+\nu^{1/3},2\nu)}(t)\|_{L^p(dt)}\right). \end{aligned}$$

Sin más que utilizar (40) obtenemos que

$$\|g(t)\chi_{(\nu+\nu^{1/3},2\nu)}(t)\|_{L^p(dt)} \le \nu^{(1/p-1)/3}. \tag{41}$$

Sobre la función h asumamos el siguiente resultado que se probará en un lema posterior:

$$\|h(t)\chi_{(\nu+\nu^{1/3},2\nu)}(t)\|_{L^p(dt)} \ge \begin{cases} C\nu^{1/p-1/2}, & \text{si } \ p<4, \\ C\nu^{-1/4}(\log\nu)^{1/4}, & \text{si } \ p=4, \\ C\nu^{(1/p-1)/3}, & \text{si } \ 4<p, \end{cases} \tag{42}$$

para $\nu > \nu_0$. Observemos que si $1<p<4$ entonces $1/p-1/2 > (1/p-1)/3$. Este hecho nos permite asegurar que, en estas circunstancias, la norma de g es despreciable frente a la de h. Por tanto, podemos concluir que, si $1<p\le 4$, se verifica

$$\|j_n^\alpha\|_{L^p(x^r(1+x)^{s-r})} \ge \begin{cases} C\nu^{-(\alpha+1)+2(s+1)/p}, & \text{si } \ p<4, \\ C\nu^{-(2\alpha-s+1)/2}(\log\nu)^{1/4}, & \text{si } \ p=4. \end{cases}$$

Para conocer una cota inferior cuando $4<p$ debemos utilizar otro procedimiento, puesto que en ese caso las normas de h y g son del mismo tamaño.

La función de Bessel J_ν es positiva y creciente hasta que alcanza su primer máximo en

$$x = \nu + 0{,}808618\,\nu^{1/3} + O(\nu^{-1/3}), \tag{43}$$

véase [**42**, pág. 521]. Por ello, para $\nu < x < \nu + \nu^{1/3}/2$,

$$J_\nu(x) \geq J_\nu(\nu) \sim \nu^{-1/3}.$$

Con esto, cuando $4 < p$, tenemos

$$\begin{aligned}\|j_n^\alpha\|_{L^p(x^r(1+x)^{s-r})} &\geq C\nu^{-(\alpha+1/2)+(2s+1)/p}\|J_\nu(t)\chi_{(\nu,\nu+\nu^{1/3}/2)}(t)\|_{L^p(dt)}\\ &\geq C\nu^{-(\alpha+5/6)+(6s+4)/(3p)},\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. □

Falta por probar únicamente la acotación (42) para la norma de h. Esta se tendrá del lema que probamos a continuación.

Lema 2.5. *Sea $\nu > \nu_0$ y*

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\cos\phi(x)}{(x^2-\nu^2)^{1/4}}, \tag{44}$$

con

$$\phi(x) = \sqrt{x^2-\nu^2} - \nu\arccos\left(\frac{\nu}{x}\right) - \frac{\pi}{4}, \tag{45}$$

definida para $x \in [\nu,\infty)$. Entonces, para cada $1 \leq p < \infty$ existe una constante C, que depende sólo de p, tal que

$$\int_{\nu+\nu^{1/3}}^{2\nu} |h(x)|^p\,dx \geq \begin{cases} C\nu^{-p/2+1}, & si\ \ p<4,\\ C\nu^{-1}\log\nu, & si\ \ p=4,\\ C\nu^{(1-p)/3}, & si\ \ 4<p.\end{cases}$$

Demostración. En primer lugar haremos algunas consideraciones sobre la función ϕ que nos serán útiles más adelante.

Teniendo en cuenta que $\phi'(x) = \frac{\sqrt{x^2-\nu^2}}{x}$, tendremos que ϕ es una función estrictamente creciente en su dominio de definición; es decir, para $x \in [\nu,\infty)$.

Si $a, b \in [\nu, 2\nu]$, con $a < b$ la función ϕ verifica

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\nu^{-1/2}(b-\nu)^{1/2}(b-a) \leq \phi(b)-\phi(a) \leq \sqrt{3}\nu^{-1/2}(b-\nu)^{1/2}(b-a). \tag{46}$$

Para verlo, tomemos

$$\phi(b)-\phi(a) = \int_a^b \phi'(x)\,dx = \int_a^b \frac{\sqrt{x+\nu}}{x}\sqrt{x-\nu}\,dx.$$

Ahora bien, si $\nu \le a \le x \le b \le 2\nu$, tenemos que

$$\begin{cases} \nu \le x \le 2\nu \\ \sqrt{2}\nu^{1/2} \le \sqrt{x+\nu} \le \sqrt{3}\nu^{1/2} \end{cases} \implies 2^{-1/2}\nu^{-1/2} \le \frac{\sqrt{x+\nu}}{x} \le \sqrt{3}\nu^{-1/2},$$

lo que nos da

$$2^{-1/2}\nu^{-1/2}\int_a^b (x-\nu)^{1/2}\,dx \le \phi(b)-\phi(a) \le \sqrt{3}\nu^{-1/2}\int_a^b (x-\nu)^{1/2}\,dx.$$

Integrando obtenemos

$$\int_a^b (x-\nu)^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}[(b-\nu)^{3/2}-(a-\nu)^{3/2}],$$

de donde se sigue (46) a partir de la estimación

$$\text{mín}\{\lambda,1\} \le \frac{r^\lambda - s^\lambda}{r^{\lambda-1}(r-s)} \le \text{máx}\{\lambda,1\},$$

válida para $\lambda > 0$ y $0 \le s < r < \infty$.

En particular, tomando $a=\nu$ en (46), si $\nu \le b \le 2\nu$, queda

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\nu^{-1/2}(b-\nu)^{3/2} \le \phi(b)+\frac{\pi}{4} \le \sqrt{3}\nu^{-1/2}(b-\nu)^{3/2}. \tag{47}$$

Consideremos ahora

$$N_\nu = \left[\frac{\phi(2\nu)-\phi(\nu+\nu^{1/3})}{2\pi}\right],$$

donde $[\cdot]$ indica la parte entera. N_ν es siempre no negativo por ser ϕ estrictamente creciente. Además, por ser $\nu > \nu_0$, con ν_0 elegido de modo adecuado, y utilizando (46), podemos asegurar que $N_\nu > 1$. Por ello existirán

$$\nu+\nu^{1/3} = x_{\nu,0} < x_{\nu,1} < x_{\nu,2} < \ldots < x_{\nu,N_\nu} \le 2\nu$$

tales que $\phi(x_{\nu,j}) = \phi(\nu+\nu^{1/3})+2\pi j$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{\nu+\nu^{1/3}}^{2\nu} |h(x)|^p\,dx &= C\int_{\nu+\nu^{1/3}}^{2\nu} \frac{|\cos\phi(x)|^p}{(x^2-\nu^2)^{p/4}}\,dx \\ &= C\int_{\nu+\nu^{1/3}}^{2\nu} \frac{|\cos\phi(x)|^p}{(x^2-\nu^2)^{p/4+1/2}}x\phi'(x)\,dx \\ &\ge C\nu^{1/2-p/4}\int_{\nu+\nu^{1/3}}^{2\nu} \frac{|\cos\phi(x)|^p}{(x-\nu)^{p/4+1/2}}\phi'(x)\,dx \\ &\ge C\nu^{1/2-p/4}\sum_{j=0}^{N_\nu-1}\int_{x_{\nu,j}}^{x_{\nu,j+1}} \frac{|\cos\phi(x)|^p}{(x-\nu)^{p/4+1/2}}\phi'(x)\,dx.\end{aligned}$$

Ahora bien, si $x_{\nu,j} \le x \le x_{\nu,j+1}$ y usando repetidamente (47), resulta

$$\begin{aligned} x-\nu \ge x_{\nu,j}-\nu &\ge C\nu^{1/3}(\phi(x_{\nu,j})+\pi/4)^{2/3} \\ &= C\nu^{1/3}(2\pi j+\phi(\nu+\nu^{1/3})+\pi/4)^{2/3} \\ &\ge C\nu^{1/3}(2\pi j+\sqrt{2}/3)^{2/3} \ge C\nu^{1/3}(j+1)^{2/3}, \end{aligned}$$

con C independiente de ν y $j \ge 0$. Análogamente,

$$\begin{aligned} x-\nu \le x_{\nu,j+1}-\nu &\le C\nu^{1/3}(\phi(x_{\nu,j+1})+\pi/4)^{2/3} \\ &= C\nu^{1/3}(2\pi(j+1)+\phi(\nu+\nu^{1/3})+\pi/4)^{2/3} \\ &\le C\nu^{1/3}(2\pi(j+1)+\sqrt{3})^{2/3} \le C\nu^{1/3}(j+1)^{2/3}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\nu+\nu^{1/3}}^{2\nu} |h(x)|^p\,dx &\ge C\nu^{1/2-p/4}\sum_{j=0}^{N_\nu-1}\int_{x_{\nu,j}}^{x_{\nu,j+1}} \frac{|\cos\phi(x)|^p}{(x-\nu)^{p/4+1/2}}\phi'(x)\,dx \\ \ge C\nu^{1/2-p/4}&\sum_{j=0}^{N_\nu-1}\left[\nu^{1/3}(j+1)^{2/3}\right]^{-(p/4+1/2)}\int_{x_{\nu,j}}^{x_{\nu,j+1}}|\cos\phi(x)|^p\phi'(x)\,dx \\ &= C\nu^{(1-p)/3}\sum_{j=0}^{N_\nu-1}(j+1)^{-(p/2+1)/3}\int_{\phi(x_{\nu,j})}^{\phi(x_{\nu,j+1})}|\cos y|^p\,dy \\ &= C\nu^{(1-p)/3}\sum_{j=1}^{N_\nu} j^{-(p/2+1)/3}. \end{aligned}$$

Utilizando (46), resulta que $\phi(2\nu)-\phi(\nu+\nu^{1/3}) \sim \nu^{-1/2}\nu^{1/2}(\nu-\nu^{1/3}) \sim \nu$, luego $N_\nu \sim \nu$. Por otra parte, usando la equivalencia

$$\sum_{j=1}^{k} j^a \sim \begin{cases} k^{a+1}, & \text{si } \ a>-1, \\ \log(k+1), & \text{si } \ a=-1, \\ 1, & \text{si } \ a<-1, \end{cases}$$

y teniendo en cuenta que

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{p}{2}+1\right) > -1 \iff p<4,$$

llegamos a la estimación

$$\int_{\nu+\nu^{1/3}}^{2\nu}|h(x)|\,dx \ge C\nu^{(1-p)/3}\begin{cases} \nu^{1-(p/2+1)/3}, & \text{si } \ p<4, \\ \log\nu, & \text{si } \ p=4, \\ 1, & \text{si } \ 4<p, \end{cases}$$

que concluye la demostración. $\square$

4. Estudio de la norma en los espacios $L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})$

El estudio de las acotaciones extremales para el operador S_n requiere del conocimiento del tamaño de la norma débil de las funciones j_n^α. En los dos próximos lemas analizaremos su comportamiento.

LEMA 2.6. *Sean $r, s \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$, $1 < p < \infty$ y n un entero no negativo. Entonces,*

$$j_n^\alpha \in L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r}), \quad \forall n \geq 0,$$

si y sólo si $r > -1$ y

$$-\frac{1}{4} \leq (s+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \frac{\alpha - s}{2}. \tag{48}$$

DEMOSTRACIÓN. Para verificar que las condiciones son suficientes basta comprobar, por lo probado en Lema 2.3 y usando la desigualdad $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})} \leq \|\cdot\|_{L^p(x^r(1+x)^{s-r})}$, que para p verificando $-\frac{1}{4} = (s+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \frac{\alpha-s}{2}$ y $r > -1$ se cumple $j_n^\alpha \in L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})$; es decir, debemos ver que para $p = p_0 = \frac{4(s+1)}{2\alpha+3}$ se tiene $j_n^\alpha \in L^{p_0,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})$. Análogamente a como hicimos en la demostración de Lema 2.3, tendremos

$$\begin{aligned}&\|j_n^\alpha\|_{L^{p_0,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})} \\ &\qquad \leq C_{\alpha,n}\left(\|\chi_{[0,1]}x^n\|_{L^{p_0,\infty}(x^r)} + \|\chi_{[1,\infty)}x^{-(2\alpha+3)/4}\|_{L^{p_0,\infty}(x^s)}\right).\end{aligned}$$

La primera norma es finita puesto que

$$\chi_{[0,1]}x^\gamma \in L^{p,\infty}(x^\omega) \iff p\gamma + \omega + 1 \geq 0,\ (\gamma,\omega) \neq (0,-1), \tag{49}$$

y la segunda también lo es pues

$$\chi_{[1,\infty]}x^\gamma \in L^{p,\infty}(x^\omega) \iff p\gamma + \omega + 1 \leq 0,\ (\gamma,\omega) \neq (0,-1), \tag{50}$$

donde $0 < p < \infty$ y $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$.

Para completar la equivalencia probaremos que si $r \leq -1$ ó p no verifica (48) entonces existe algún n tal que $j_n^\alpha \notin L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})$.

Si $r \leq -1$, para cualquier p, usando (26) tendremos

$$\|j_0^\alpha\|_{L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})} \geq C_\alpha \|\chi_{[0,1]}\|_{L^{p,\infty}(x^r)} = \infty,$$

por (49).

Para $-\frac{1}{4} > (s+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \frac{\alpha-s}{2}$, ya se vio en el Lema 2.2 que $j_n^\alpha \notin L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})$. □

Conozcamos ahora el tamaño de $\|j_n^\alpha\|_{L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})}$ con respecto a n.

Lema 2.7. *Sean $r, s \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$ y $1 < p < \infty$. Supongamos además $r > -1$ y*

$$-\frac{1}{4} \leq (s+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \frac{\alpha - s}{2}.$$

Entonces

$$\|j_n^\alpha\|_{L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})} \sim \begin{cases} n^{-(\alpha+1)+2(s+1)/p}, & si \;\; p \leq 4, \\ n^{-(5/6+\alpha)+(6s+4)/(3p)}, & si \;\; 4 < p. \end{cases} \tag{51}$$

Demostración. Las hipótesis en el Lema 2.6 nos aseguran que las normas débiles son finitas. Como en el Lema 2.4, comenzaremos haciendo la siguiente observación:

$$\begin{aligned} \|j_n^\alpha\|_{L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})} &\sim n^{1/2}\|x^{-(\alpha+1)/2}J_\nu(\sqrt{x})\|_{L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})} \\ &= 2n^{1/2}\|t^{-(\alpha+1)}J_\nu(t)\|_{L^{p,\infty}(t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r})}, \end{aligned} \tag{52}$$

con $\nu = \alpha + 2n + 1 \sim n$. Consideraremos nuevamente $\nu \geq \nu_0$.

Haciendo una descomposición en intervalos igual que en (34), tendremos

$$\|t^{-(\alpha+1)}J_\nu(t)\|_{L^{p,\infty}(t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r})} \leq A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5;$$

veamos el comportamiento de cada uno de estos sumandos. Para analizar A_1, A_2 y A_3 usaremos que $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}(t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r})} \leq \|\cdot\|_{L^p(t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r})}$ y operaremos como en el Lema 2.4:

$$\begin{aligned} A_1 &= \|t^{-(\alpha+1)}J_\nu(t)\chi_{[0,\nu/2]}(t)\|_{L^{p,\infty}(t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r})} \\ &\leq \left(\int_0^{\nu/2} |J_\nu(t)t^{-(\alpha+1)}|^p\, t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r}\, dt\right)^{1/p} \\ &\leq C\nu^{-(\alpha+3/2)}(e/4)^\nu \begin{cases} \nu^{2(s+1)/p}, & \text{si } \; s > -1, \\ (\log \nu)^{1/p}, & \text{si } \; s = -1, \\ 1, & \text{si } \; s < -1, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \|t^{-(\alpha+1)}J_\nu(t)\chi_{[\nu/2,\nu-\nu^{1/3}]}(t)\|_{L^{p,\infty}(t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r})} \\ &\leq \left(\int_{\nu/2}^{\nu-\nu^{1/3}} |J_\nu(t)t^{-(\alpha+1)}|^p\, t^{2s+1}\, dt\right)^{1/p} \leq C\nu^{-(\alpha+4/3)+2(s+2/3)/p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \|t^{-(\alpha+1)}J_\nu(t)\chi_{[\nu-\nu^{1/3},\nu+\nu^{1/3}]}(t)\|_{L^{p,\infty}(t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r})} \\ &\leq \left(\int_{\nu-\nu^{1/3}}^{\nu+\nu^{1/3}} |J_\nu(t)t^{-(\alpha+1)}|^p\, t^{2s+1}\, dt\right)^{1/p} \leq C\nu^{-(\alpha+4/3)+2(s+2/3)/p}. \end{aligned}$$

Para A_4 tenemos

$$\begin{aligned} A_4 &= \|t^{-(\alpha+1)}J_\nu(t)\chi_{[\nu+\nu^{1/3},2\nu]}(t)\|_{L^{p,\infty}(t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r})} \\ &\le C\nu^{-(\alpha+5/4)+(2s+1)/p}\|(t-\nu)^{-1/4}\chi_{[\nu+\nu^{1/3},2\nu]}\|_{L^{p,\infty}(dt)} \\ &\le \begin{cases} C\nu^{-(\alpha+3/2)+2(s+1)/p}, & \text{si } p\le 4, \\ C\nu^{-(\alpha+4/3)+2(s+2/3)/p}, & \text{si } 4<p, \end{cases} \end{aligned}$$

donde para $p\neq 4$ hemos procedido como para los sumandos anteriores (acotando superiormente por la norma en $L^p(t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r})$), y para $p=4$ hemos considerado la estimación

$$\begin{aligned} \|(t-\nu)^{-1/4}\chi_{[\nu+\nu^{1/3},2\nu]}\|_{L^{4,\infty}(dt)} &\le C\|s^{-1/4}\chi_{[0,\nu]}\|_{L^{4,\infty}(ds)} \\ &= C\|z^{-1/4}\chi_{[0,1]}\|_{L^{4,\infty}(dz)} \le C, \end{aligned}$$

que se obtiene utilizando una traslación, una dilatación y (49). Por último

$$\begin{aligned} A_5 &= \|J_\nu(t)t^{-(\alpha+1)}\chi_{[2\nu,\infty)}(t)\|_{L^{p,\infty}(t^{2r+1}(1+t^2)^{s-r})} \\ &\le \|t^{-(2\alpha+3)/2}\chi_{[2\nu,\infty)}(t)\|_{L^{p,\infty}(t^{2s+1})} \le C\nu^{-(\alpha+3/2)+2(s+1)/p}, \end{aligned}$$

donde si $p_0<p$, con $p_0=\frac{4(s+1)}{2\alpha+3}$, operamos como en los primeros sumandos, y si $p=p_0$ obtenemos, por (50), que

$$\|t^{-(2\alpha+3)/2}\chi_{[2\nu,\infty)}(t)\|_{L^{p,\infty}(t^{2s+1})} \le C.$$

Observando que

$$-\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)+\frac{2s+1}{p} \ge -\left(\alpha+\frac{4}{3}\right)+\frac{2}{p}\left(s+\frac{2}{3}\right) \iff p\le 4$$

y usando (52) obtenemos la estimación superior en (51). Procederemos, ahora, con la estimación inferior.

Tomando las funciones h y g descritas en el Lema 2.4 tendremos, como allí,

$$\begin{aligned} &\|j_n^\alpha\|_{L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})} \ge C\nu^{1/2}\|J_\nu(t)t^{-(\alpha+1)}\chi_{(\nu+\nu^{1/3},2\nu)}(t)\|_{L^{p,\infty}(t^{2s+1})} \\ &\ge C\nu^{-(\alpha+1/2)+(2s+1)/p}\|J_\nu(t)\chi_{(\nu+\nu^{1/3},2\nu)}(t)\|_{L^{p,\infty}(dt)} \ge C\nu^{-(\alpha+1/2)+(2s+1)/p} \\ &\quad\times\left(\|h(t)\chi_{(\nu+\nu^{1/3},2\nu)}(t)\|_{L^{p,\infty}(dt)} - \|g(t)\chi_{(\nu+\nu^{1/3},2\nu)}(t)\|_{L^{p}(dt)}\right). \end{aligned}$$

Consideraremos la cota (41) para la norma de g dada en el Lema 2.4. Utilizaremos también el siguiente resultado, que probaremos en un lema posterior, relativo a la norma débil de h:

$$\|h(t)\chi_{(\nu+\nu^{1/3},2\nu)}(t)\|_{L^{p,\infty}(dt)} \ge \begin{cases} C\nu^{1/p-1/2}, & \text{si } p<4, \\ C\nu^{(1/p-1)/3}, & \text{si } 4\le p, \end{cases} \tag{53}$$

para $\nu>\nu_0$. Con esto tendremos que, para $1<p<4$, se verifica

$$\|j_n^\alpha\|_{L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})} \ge C\nu^{-(\alpha+1)+2(s+1)/p}.$$

Nuevamente, para conocer una cota inferior cuando $p \geq 4$ debemos utilizar otro procedimiento, puesto que en ese caso las normas de h y g son del mismo tamaño. El razonamiento que se debe seguir es el mismo que se hizo en el Lema 2.4, pero en este caso utilizando normas débiles. Recordemos que, para $\nu < x < \nu + \nu^{1/3}/2$,

$$J_\nu(x) \geq J_\nu(\nu) \sim \nu^{-1/3}.$$

De este hecho, si $4 < p$, tenemos

$$\begin{aligned}\|j_n^\alpha\|_{L^{p,\infty}(x^r(1+x)^{s-r})} &\geq C\nu^{-(\alpha+1/2)+(2s+1)/p}\|J_\nu(t)\chi_{(\nu,\nu+\nu^{1/3}/2)}(t)\|_{L^{p,\infty}(dt)}\\ &\geq C\nu^{-(\alpha+5/6)+(2s+1)/p}\|\chi_{(\nu,\nu+\nu^{1/3}/2)}(t)\|_{L^{p,\infty}(dt)}\\ &\sim \nu^{-(\alpha+5/6)+(6s+4)/(3p)},\end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\|\chi_{(\nu,\nu+\nu^{1/3}/2)}(t)\|_{L^{p,\infty}(dt)} \sim \nu^{1/(3p)}.$$

$\square$

Habremos concluido con la prueba una vez que hayamos verificado la desigualdad (53) para la función h.

LEMA 2.8. *Sea $\nu > \nu_0$ y sean h y ϕ como en (44) y (45) respectivamente. Entonces, para cada $1 \leq p < \infty$ existe una constante C, que depende sólo de p, tal que*

$$\|h(x)\chi_{(\nu+\nu^{1/3},2\nu)}(x)\|_{L^{p,\infty}(dx)} \geq \begin{cases} C\nu^{1/p-1/2}, & si\ \ p < 4,\\ C\nu^{(1/p-1)/3}, & si\ \ 4 \leq p.\end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Se trata de probar que

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^p \left|\{x \in (\nu+\nu^{1/3}, 2\nu) :\ |h(x)| > \lambda\}\right| \geq \begin{cases} C\nu^{1-p/2}, & \text{si}\ \ p < 4,\\ C\nu^{(1-p)/3}, & \text{si}\ \ 4 \leq p,\end{cases}$$

donde por $|E|$ entenderemos la medida de Lebesgue del conjunto E. Recuperando la notación del Lema 2.5, en concreto los valores $x_{j,\nu}$, es claro que

$$\begin{aligned}&\left|\{x \in (\nu+\nu^{1/3}, 2\nu) :\ |h(x)| > \lambda\}\right|\\ &\qquad\qquad \geq \sum_{j=1}^{N_\nu} \left|\{x \in (x_{\nu,j-1}, x_{\nu,j}) :\ |h(x)| > \lambda\}\right|.\end{aligned}$$

Como ya comprobamos en el Lema 2.5, se cumple que:

(a) $x + \nu \sim \nu$, si $\nu + \nu^{1/3} \leq x \leq 2\nu$;
(b) $x - \nu \sim \nu^{1/3} j^{2/3}$, si $x_{\nu,j-1} \leq x \leq x_{\nu,j}$;
(c) $N_\nu \sim \nu$.

Luego, en $(x_{\nu,j-1}, x_{\nu,j})$,

$$|h(x)| = \frac{1}{2\pi}\frac{|\cos\phi(x)|}{(x^2-\nu^2)^{1/4}} \geq C\frac{|\cos\phi(x)|}{\nu^{1/3}j^{1/6}}.$$

Por lo tanto, para cada j,

$$\begin{aligned}&\{x \in (x_{\nu,j-1}, x_{\nu,j}) : \ |h(x)| > \lambda\} \\ &\qquad\qquad \supseteq \{x \in (x_{\nu,j-1}, x_{\nu,j}) : \ |\cos\phi(x)| > C\nu^{1/3}j^{1/6}\lambda\}.\end{aligned}$$

Ahora, utilizando que $\phi'(x) \sim j^{1/3}\nu^{-1/3}$ en $(x_{\nu,j-1}, x_{\nu,j})$, la definición de los $x_{\nu,j}$ y un cambio de variable tendremos que

$$\begin{aligned}&|\{x \in (x_{\nu,j-1}, x_{\nu,j}) : \ |\cos\phi(x)| > C\nu^{1/3}j^{1/6}\lambda\}| \\ &\qquad \sim j^{-1/3}\nu^{1/3}|\{y \in (\phi_{\nu,j-1}, \phi_{\nu,j}) : \ |\cos y| > C\nu^{1/3}j^{1/6}\lambda\}|,\end{aligned}$$

donde $\phi_{\nu,j} = \phi(x_{\nu,j}) = \phi(\nu + \nu^{1/3}) + 2\pi j$.

Observemos que, para cada $r \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}|\{y \in [-\pi/2, \pi/2] : \ |\cos y| > r\}| &= |(-\arccos r, \arccos r)| \\ &= 2\arccos r.\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{r\to 1^-}\frac{\arccos r}{\sqrt{1-r}} = \sqrt{2},$$

resulta que

$$|\{y \in [-\pi/2, \pi/2] : \ |\cos y| > r\}| \sim \sqrt{1-r}, \text{ si } 0 < r < 1.$$

O, si se quiere,

$$|\{y \in [-\pi/2, \pi/2] : \ |\cos y| > r\}| \sim (1-r)_+^{1/2}, \text{ si } 0 < r,$$

donde $(x)_+^{1/2} = \text{máx}\,\{x, 0\}$. Más aún, para cada $s \in \mathbb{R}$,

$$|\{y \in [s, s+2\pi] : \ |\cos y| > r\}| \sim (1-r)_+^{1/2}, \text{ si } 0 < r,$$

donde además las constantes de la equivalencia no dependen de s. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}&\left|\{x \in (x_{\nu,j-1}, x_{\nu,j}) : \ |\cos\phi(x)| > C\nu^{1/3}j^{1/6}\lambda\}\right| \\ &\qquad\qquad \sim \nu^{1/3}j^{-1/3}\left[1 - C\nu^{1/3}j^{1/6}\lambda\right]_+^{1/2},\end{aligned}$$

lo que nos da que, para cada $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
&\lambda^p \left|\{x \in (\nu+\nu^{1/3}, 2\nu) : \ |h(x)| > \lambda\}\right| \\
&\geq \lambda^p \nu^{1/3} \sum_{j=1}^{N_\nu} j^{-1/3} \left[1 - C\nu^{1/3} j^{1/6}\lambda\right]_+^{1/2} \\
&\geq \lambda^p \nu^{1/3} \int_1^{N_\nu} x^{-1/3} \left[1 - C\nu^{1/3}\lambda x^{1/6}\right]_+^{1/2} dx \\
&= 6C^{-4}\lambda^{p-4}\nu^{-1} \int_{C\lambda\nu^{1/3}}^{C\lambda\nu^{1/3}N_\nu^{1/6}} t^3(1-t)_+^{1/2}\, dt.
\end{aligned}$$

Consideremos ahora $0 < \lambda < C^{-1}\nu^{-1/3}N_\nu^{-1/6}$; así, con esta elección de λ, $[C\lambda\nu^{1/3}, C\lambda\nu^{1/3}N_\nu^{1/6}] \subset [0,1]$. Por otra parte usaremos que, si $\lambda, \mu > -1$ y $\lambda + \mu > -1$, entonces

$$\int_a^b x^\lambda (1-x)^\mu \, dx \sim (b-a)b^\lambda(1-a)^\mu, \tag{54}$$

con $(a,b) \subseteq [0,1]$. La expresión (54) se sigue inmediatamente de (11). Con esto,

$$\begin{aligned}
&\lambda^p \left|\{x \in (\nu+\nu^{1/3}, 2\nu) : \ |h(x)| > \lambda\}\right| \\
&\geq 6C^{-4}\lambda^{p-4}\nu^{-1} \int_{C\lambda\nu^{1/3}}^{C\lambda\nu^{1/3}N_\nu^{1/6}} t^3(1-t)^{1/2}\, dt \\
&\sim C^{-4}\lambda^{p-4}\nu^{-1} \left(C\lambda\nu^{1/3}N_\nu^{1/6} - C\lambda\nu^{1/3}\right)\left(C\lambda\nu^{1/3}N_\nu^{1/6}\right)^3\left(1 - C\lambda\nu^{1/3}\right)^{1/2} \\
&= \lambda^p\nu^{1/3}N_\nu^{1/2}(N_\nu^{1/6}-1)\left(1 - C\lambda\nu^{1/3}\right)^{1/2} \\
&\geq \lambda^p\nu^{1/3}N_\nu^{1/2}(N_\nu^{1/6}-1)\left(1 - N_\nu^{-1/6}\right)^{1/2} \sim \lambda^p\nu.
\end{aligned}$$

Tomando, por ejemplo, el valor permitido $\lambda = 2^{-1}C^{-1}\nu^{-1/3}N_\nu^{-1/6}$ deducimos que

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^p \left|\{x \in (\nu+\nu^{1/3}, 2\nu) : \ |h(x)| > \lambda\}\right| \geq C\nu^{1-p/2},$$

donde esta última constante C es distinta de la anterior. Ahora consideremos valores de λ tales que $C^{-1}\nu^{-1/3}N_\nu^{-1/6} < \lambda < C^{-1}\nu^{-1/3}$, así $0 < C\lambda\nu^{1/3} < 1 < C\lambda\nu^{1/3}N_\nu^{1/6}$. De manera análoga a la anterior,

$$\begin{aligned}
&\lambda^p \left|\{x \in (\nu+\nu^{1/3}, 2\nu) : \ |h(x)| > \lambda\}\right| \\
&\geq 6C^{-4}\lambda^{p-4}\nu^{-1} \int_{C\lambda\nu^{1/3}}^{1} t^3(1-t)^{1/2}\, dt \\
&\sim C^{-4}\lambda^{p-4}\nu^{-1}\left(1 - C\lambda\nu^{1/3}\right)^{3/2},
\end{aligned}$$

donde en la equivalencia se ha utilizado nuevamente (54). Basta tomar el valor permitido $\lambda = 2^{-1}C^{-1}\nu^{-1/3}$ para deducir que

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^p \left|\{x \in (\nu + \nu^{1/3}, 2\nu) : \ |h(x)| > \lambda\}\right| \geq C\nu^{(1-p)/3}.$$

En resumen, hemos probado que

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^p \left|\{x \in (\nu + \nu^{1/3}, 2\nu) : \ |h(x)| > \lambda\}\right| \geq C \operatorname{máx}\{\nu^{1-p/2}, \nu^{(1-p)/3}\}.$$

Y, teniendo en cuenta que

$$1 - \frac{p}{2} < \frac{1-p}{3} \iff 4 < p,$$

el lema queda demostrado. $\square$

CAPÍTULO 3

Acotación del operador suma parcial en espacios de Lebesgue con pesos

1. Introducción

Como se mostró en el Capítulo 1 la convergencia en $L^p(u^p\,d\mu)$ de la serie de Fourier asociada a un determinado sistema ortonormal pasa por el estudio de la acotación uniforme del operador suma parcial n-ésima, S_n, en estos mismos espacios. Esta convergencia se producirá para funciones en

$$B_p = \overline{\operatorname{span}\{\phi_n\}},$$

con la clausura entendida en $L^p(u^p\,d\mu)$.

A lo largo de este capítulo vamos a analizar la acotación uniforme del operador S_n relativo a las funciones $\{j_n^\alpha\}_{n\geq 0}$, para $\alpha > -1$, en los espacios $L^p(u^p(x)x^\alpha)$ con pesos de la forma $u(x) = x^a(1+x)^{b-a}$. Este tipo de pesos verifica que

$$\begin{aligned} u(x) &\sim x^a, \qquad \text{si } x \to 0,\\ u(x) &\sim x^b, \qquad \text{si } x \to \infty. \end{aligned}$$

En concreto, vamos a probar el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *Sean $\alpha > -1$, $1 < p < \infty$ y $u(x) = x^a(1+x)^{b-a}$. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|S_n f\|_{L^p(u^p(x)x^\alpha)} \leq C\|f\|_{L^p(u^p(x)x^\alpha)},\ f \in L^p(u^p(x)x^\alpha),\ n \in \mathbb{N},$$

si y sólo si $\frac{4}{3} < p < 4$ y

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha+1}{2} &< (\alpha+1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right) + a < \frac{\alpha+1}{2},\\ -\frac{1}{4} &< (\alpha+1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right) + b < \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{55}$$

La demostración del Teorema 3.1 la hemos dividido en tres partes. En la primera de ellas, contenida en la siguiente sección, daremos una expresión del operador S_n en términos de la transformada de Hilbert. La segunda parte estará centrada en el análisis de las condiciones necesarias y se desarrollará en la Sección 3. Por último, en la Sección 4, trataremos las condiciones suficientes.

2. Construcción del operador suma parcial

Para $\alpha > -1$, consideraremos el sistema ortonormal en $L^2(x^\alpha)$ formado por las funciones $\{j_n^\alpha\}_{n\geq 0}$, definidas como en (5). Así, el operador suma parcial n-ésima vendrá descrito como

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f) j_k^\alpha(x), \tag{56}$$

donde

$$c_k(f) = \int_0^\infty f(t) j_k^\alpha(t) t^\alpha \, dt. \tag{57}$$

Utilizando la linealidad de la integral es posible expresar

$$S_n(f,x) = \int_0^\infty K_n(x,t) f(t) t^\alpha \, dt,$$

con

$$K_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} j_k^\alpha(x) j_k^\alpha(t). \tag{58}$$

Obtendremos, a continuación, una expresión explícita para el núcleo $K_n(x,t)$. Para ello probaremos el siguiente lema:

Lema 3.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda > -1$. Entonces*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} & 2(\lambda+2k+1) J_{\lambda+2k+1}(x) J_{\lambda+2k+1}(t) \\ &= \frac{xt}{x^2-t^2}\,[x J_{\lambda+1}(x) J_\lambda(t) - t J_\lambda(x) J_{\lambda+1}(t) \\ &\quad + x J'_{\lambda+2n+2}(x) J_{\lambda+2n+2}(t) - t J_{\lambda+2n+2}(x) J'_{\lambda+2n+2}(t)].\end{aligned}$$

Demostración. Usando la igualdad

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z)$$

para expresar $J_{\mu-1}$ y $J_{\mu+2}$ en términos de J_μ y $J_{\mu+1}$, obtenemos

$$\begin{aligned}2\mu J_\mu(x) J_\mu(t) = \frac{xt}{x^2-t^2}\,[& x J_\mu(x) J_{\mu-1}(t) - t J_{\mu-1}(x) J_\mu(t) \\ & - x J_{\mu+2}(x) J_{\mu+1}(t) + t J_{\mu+1}(x) J_{\mu+2}(t)\,].\end{aligned}$$

Lo cual nos da

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} & 2(\lambda+2k+1) J_{\lambda+2k+1}(x) J_{\lambda+2k+1}(t) \\ &= \frac{xt}{x^2-t^2}\,[x J_{\lambda+1}(x) J_\lambda(t) - t J_\lambda(x) J_{\lambda+1}(t) \\ &\quad - x J_{\lambda+2n+3}(x) J_{\lambda+2n+2}(t) + t J_{\lambda+2n+2}(x) J_{\lambda+2n+3}(t)].\end{aligned}$$

Finalmente, con la relación

$$zJ_{\nu+1}(z) = \nu J_\nu(z) - zJ'_\nu(z)$$

eliminamos el término $J_{\lambda+2n+3}$ y se obtiene el resultado. □

Otra forma de probar el lema anterior es utilizar la igualdad

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2(\lambda+2k+1) J_{\lambda+2k+1}(x) J_{\lambda+2k+1}(t) = \frac{xt}{x^2-t^2}\,[xJ_{\lambda+1}(x)J_\lambda(t) - tJ_\lambda(x)J_{\lambda+1}(t)], \tag{59}$$

como puede verse en [**41**]. La expresión (59) puede encontrarse en [**44**]. La demostración que hemos dado aquí puede verse en [**17**] y ha sido incluida en esta memoria buscando tener la mayor completitud posible.

Tomando $\lambda = \alpha$ en el Lema 3.1 tendremos

$$\begin{aligned} K_n(x,t) = \frac{1}{2}\,\frac{(xt)^{-\alpha/2}}{x-t}\,&[\sqrt{x}J_{\alpha+1}(\sqrt{x})J_\alpha(\sqrt{t}) - \sqrt{t}J_\alpha(\sqrt{x})J_{\alpha+1}(\sqrt{t}) \\ &+ \sqrt{x}J'_{\alpha+2n+2}(\sqrt{x})J_{\alpha+2n+2}(\sqrt{t}) - \sqrt{t}J_{\alpha+2n+2}(\sqrt{x})J'_{\alpha+2n+2}(\sqrt{t})]. \end{aligned}$$

Esto nos permite descomponer el operador S_n descrito por (56) en cuatro operadores,

$$S_n f = W_1 f - W_2 f + W_{3,n} f - W_{4,n} f,$$

con

$$W_1(f,x) = \tfrac{1}{2}x^{-\alpha/2+1/2}J_{\alpha+1}(x^{1/2})\,H\big(t^{\alpha/2}J_\alpha(t^{1/2})f(t),x\big), \tag{60}$$

$$W_2(f,x) = \tfrac{1}{2}x^{-\alpha/2}J_{\alpha}(x^{1/2})\,H\big(t^{\alpha/2+1/2}J_{\alpha+1}(t^{1/2})f(t),x\big), \tag{61}$$

$$W_{3,n}(f,x) = \tfrac{1}{2}x^{-\alpha/2+1/2}J'_{\nu}(x^{1/2})\,H\big(t^{\alpha/2}J_\nu(t^{1/2})f(t),x\big), \tag{62}$$

$$W_{4,n}(f,x) = \tfrac{1}{2}x^{-\alpha/2}J_{\nu}(x^{1/2})\,H\big(t^{\alpha/2+1/2}J'_{\nu}(t^{1/2})f(t),x\big), \tag{63}$$

donde H denota la transformada de Hilbert y $\nu = \alpha + 2n + 2$. Esta descomposición del operador S_n en términos de la transformada de Hilbert nos permitirá utilizar la clase de pesos A_p en el estudio de las condiciones suficientes.

3. Condiciones necesarias

Las condiciones necesarias para la acotación del operador suma parcial pueden deducirse de un resultado más general sobre sistemas ortonormales.

Sea (Ω,μ) un espacio de medida y $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ un sistema ortonormal en dicho espacio. Si definimos el operador

$$\mathcal{S}_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f)\phi_k(x)$$

con $a_k(f) = \int_\Omega f(t)\phi_k(t)\,d\mu$ tendremos el siguiente resultado:

Proposición 3.2. *Sea* $1 \le p \le \infty$. *Si*

$$\|\mathcal{S}_n f\|_{L^p(u^p\, d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\, d\mu)}, \;\; f \in L^p(v^p\, d\mu), \;\; n \in \mathbb{N},$$

entonces

$$\|\phi_n\|_{L^p(u^p\, d\mu)}\|\phi_n\|_{L^q(v^{-q}\, d\mu)} \le C, \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{64}$$

Demostración. Consideremos el operador

$$T_n(f,x) = \mathcal{S}_n(f,x) - \mathcal{S}_{n-1}(f,x) = a_n(f)\phi_n(x).$$

Usando la acotación del operador $\mathcal{S}_n$ tendremos

$$\|T_n f\|_{L^p(u^p\, d\mu)} = \left|\int_\Omega f(t)\phi_n(t)\, d\mu\right| \|\phi_n\|_{L^p(u^p\, d\mu)} \le C\|f\|_{L^p(v^p\, d\mu)}.$$

Si tenemos en cuenta que el operador $a_n(\cdot)$, dado por

$$\begin{array}{rccc} a_n(\cdot): & L^p(v^p\, d\mu) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & a_n(f), \end{array}$$

es un operador continuo sobre $L^p(v^p\, d\mu)$ que alcanza su norma y ésta es igual a $\|\phi_n\|_{L^q(v^{-q} d\mu)}$, el resultado se sigue inmediatamente. □

Con esta proposición, el estudio de las condiciones necesarias se reduce a la verificación de la desigualdad

$$\|j_n^\alpha\|_{L^p(u^p(x)x^\alpha)}\|j_n^\alpha\|_{L^q(u^{-q}(x)x^\alpha)} \le C, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{65}$$

Tomando n fijo (es suficiente $n = 0$) y aplicando el Lema 2.3 con $r = pa + \alpha$ y $s = pb + \alpha$ obtenemos que

$$\|j_n^\alpha\|_{L^p(u^p(x)x^\alpha)} < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

si y sólo si

$$\begin{aligned} -1 &< pa + \alpha, \\ -\frac{1}{4} &< (pb + \alpha + 1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \frac{\alpha - (pb + \alpha)}{2}; \end{aligned}$$

que equivale a

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha+1}{2} &< (\alpha+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) + a, \\ (\alpha+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) + b &< \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{66}$$

Considerando ahora los valores $r = -qa + \alpha$ y $s = -qb + \alpha$ en el Lema 2.3 tendremos que

$$\|j_n^\alpha\|_{L^q(u^{-q}(x)x^\alpha)} < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

si y sólo si

$$\begin{aligned} -1 &< -qa + \alpha, \\ -\frac{1}{4} &< (-qb + \alpha + 1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \frac{\alpha - (-qb + \alpha)}{2}; \end{aligned}$$

que se escriben como

$$
\begin{aligned}
(\alpha+1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)+a&<\frac{\alpha+1}{2},\\
-\frac{1}{4}<(\alpha+1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)&+b.
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Las condiciones en (66) y (67) pueden reunirse en (55).

Ahora, supuesto que (55) se cumple, las estimaciones de las normas del Lema 2.4 nos proporcionan

$$
\|j_n^\alpha\|_{L^p(u^p(x)x^\alpha)}\sim\begin{cases} n^{2(\alpha+1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)+2b}, & \text{si } p<4,\\ n^{2b-(\alpha+1)/2}(\log n)^{1/4}, & \text{si } p=4,\\ n^{(2\alpha+4/3)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)+2b-1/6}, & \text{si } p>4,\end{cases}
$$

y

$$
\|j_n^\alpha\|_{L^q(u^{-q}(x)x^\alpha)}\sim\begin{cases} n^{2(\alpha+1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)-2b}, & \text{si } q<4\ (p>4/3),\\ n^{-2b-(\alpha+1)/2}(\log n)^{1/4}, & \text{si } q=4\ (p=4/3),\\ n^{(2\alpha+4/3)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)-2b-1/6}, & \text{si } q>4\ (p<4/3).\end{cases}
$$

Combinándolas, obtenemos

$$
\|j_n^\alpha\|_{L^p(u^p(x)x^\alpha)}\|j_n^\alpha\|_{L^q(u^{-q}(x)x^\alpha)}\sim\begin{cases} n^{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{p}-\frac{3}{4}\right)}, & \text{si } p<4/3,\\ (\log n)^{1/4}, & \text{si } p=4/3,\\ C, & \text{si } 4/3<p<4,\\ (\log n)^{1/4}, & \text{si } p=4,\\ n^{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)}, & \text{si } p>4.\end{cases}
$$

Por lo tanto, para que se cumpla la condición (65) con una constante independiente de n, se debe verificar que $4/3<p<4$.

4. Condiciones suficientes

En esta sección nos vamos a centrar en la acotación de los operadores descritos en (60), (61), (62) y (63). Recordemos que $\nu=\alpha+2n+2$.

4.1. Acotación del operador W_1. El operador W_1 se define como

$$
W_1(f,x)=\tfrac{1}{2}x^{-\alpha/2+1/2}J_{\alpha+1}(x^{1/2})\,H\big(t^{\alpha/2}J_\alpha(t^{1/2})f(t),x\big).
$$

Si tomamos la función

$$
g(t)=t^{\alpha/2}J_\alpha(t^{1/2})f(t),
$$

se tiene que

$$
\|W_1f\|_{L^p(u^p(x)x^\alpha)}\le C\|f\|_{L^p(u^p(x)x^\alpha)}
$$

si y sólo si

$$\|Hg\|_{L^p(u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2+p/2}|J_{\alpha+1}(x^{1/2})|^p)} \le C\|g\|_{L^p(u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\alpha(x^{1/2})|^{-p})}.$$

Por tanto para obtener la acotación será suficiente probar que existe un peso $\Phi \in A_p$ tal que

(68)
$$Cu^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2+p/2}|J_{\alpha+1}(x^{1/2})|^p \le \Phi(x) \le C_1 u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\alpha(x^{1/2})|^{-p}.$$

En efecto, si este fuera el caso, por el Teorema 1.4, tendríamos

$$\begin{aligned}\|Hg\|_{L^p(u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2+p/2}|J_{\alpha+1}(x^{1/2})|^p)} &\le C\|Hg\|_{L^p(\Phi(x))}\\ &\le C\|g\|_{L^p(\Phi(x))} \le C\|g\|_{L^p(u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\alpha(x^{1/2})|^{-p})}.\end{aligned}$$

A partir de (28) y (29) llegamos a que

$$u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2+p/2}|J_{\alpha+1}(x^{1/2})|^p \le \begin{cases} Cx^{\alpha+p+ap}, & \text{si } 0 < x \le 1,\\ Cx^{\alpha-\alpha p/2+p/4+bp}, & \text{si } x > 1,\end{cases}$$

y

$$u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\alpha(x^{1/2})|^{-p} \ge \begin{cases} Cx^{\alpha-\alpha p+ap}, & \text{si } 0 < x \le 1,\\ Cx^{\alpha-\alpha p/2+p/4+bp}, & \text{si } x > 1.\end{cases}$$

Con estas estimaciones podemos considerar el peso

$$\Phi(x) = \begin{cases} x^r, & \text{si } 0 < x \le 1,\\ x^{\alpha-\alpha p/2+p/4+bp}, & \text{si } x > 1.\end{cases}$$

El valor de r lo elegiremos de forma que se verifique la condición (68) y que $\Phi \in A_p$, lo cual viene caracterizado por (b) en el Lema 1.2. Esto nos da que se deben cumplir las condiciones

$$\begin{cases} \alpha - \alpha p + ap \le r \le \alpha + p + ap,\\ -1 < r < p-1,\\ -1 < \alpha - \alpha p/2 + p/4 + bp < p-1.\end{cases} \tag{69}$$

La tercera desigualdad es equivalente a

$$\frac{-3}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) + b < \frac{1}{4},$$

lo que viene implicado por (55). Para las desigualdades en (69) involucrando a r, es suficiente que se cumpla

$$\max\{-1, \alpha - \alpha p + ap\} < \min\{p-1, \alpha + p + ap\},$$

puesto que así podremos elegir como r algún valor intermedio. Esta útima desigualdad se tiene a partir de

$$-1 < \alpha + p + ap, \tag{70}$$

$$\alpha - \alpha p + ap < p - 1, \tag{71}$$

$$\alpha - \alpha p + ap < \alpha + p + ap, \tag{72}$$

luego bastará con verificar éstas. Una sencilla manipulación de (70) y (71) nos da que pueden reunirse en

$$-\frac{\alpha+3}{2} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right) + a < \frac{\alpha+1}{2},$$

lo que se sigue de la primera línea en (55). La desigualdad (72) se tiene de manera inmediata sin más que usar la condición $\alpha > -1$.

4.2. Acotación del operador W_2. La demostración es enteramente similar a la de W_1. Tenemos, al igual que antes, que para

$$W_2(f,x) = \tfrac{1}{2}x^{-\alpha/2}J_\alpha(x^{1/2})\, H\big(t^{\alpha/2+1/2}J_{\alpha+1}(t^{1/2})f(t), x\big),$$

la acotación

$$\|W_2 f\|_{L^p(u^p(x)x^\alpha)} \le C\|f\|_{L^p(u^p(x)x^\alpha)}$$

equivale a

$$\|Hg\|_{L^p(u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\alpha(x^{1/2})|^p)} \le C\|g\|_{L^p(u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2-p/2}|J_{\alpha+1}(x^{1/2})|^{-p})},$$

donde en esta ocasión hemos tomado

$$g(t) = t^{\alpha/2+1/2}J_{\alpha+1}(t^{1/2})f(t).$$

Nuevamente es suficiente comprobar que existe un peso $\Psi \in A_p$ cumpliendo

$$Cu^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\alpha(x^{1/2})|^p \le \Psi(x) \le C_1 u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2-p/2}|J_{\alpha+1}(x^{1/2})|^{-p}. \tag{73}$$

En esta situación, usando el Teorema 1.4, llegaríamos a que

$$\begin{aligned}\|Hg\|_{L^p(u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\alpha(x^{1/2})|^p)} &\le C\|Hg\|_{L^p(\Psi(x))}\\ &\le C\|g\|_{L^p(\Psi(x))} \le C\|g\|_{L^p(u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2-p/2}|J_{\alpha+1}(x^{1/2})|^{-p})}.\end{aligned}$$

Utilizando las cotas (28) y (29) tenemos que

$$u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\alpha(x^{1/2})|^p \le \begin{cases} Cx^{\alpha+ap}, & \text{si } 0 < x \le 1,\\ Cx^{\alpha-\alpha p/2-p/4+bp}, & \text{si } x > 1,\end{cases}$$

y

$$u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2-p/2}|J_{\alpha+1}(x^{1/2})|^{-p} \ge \begin{cases} Cx^{\alpha-\alpha p-p+ap}, & \text{si } 0 < x \le 1,\\ Cx^{\alpha-\alpha p/2-p/4+bp}, & \text{si } x > 1.\end{cases}$$

Tomando

$$\Psi(x) = \begin{cases} x^r, & \text{si } \ 0 < x \leq 1, \\ x^{\alpha-\alpha p/2-p/4+bp}, & \text{si } \ x > 1, \end{cases}$$

las condiciones (73) y $\Psi \in A_p$ se cumplirán si

$$\begin{cases} \alpha - \alpha p - p + ap \leq r \leq \alpha + ap, \\ -1 < r < p-1, \\ -1 < \alpha - \alpha p/2 - p/4 + bp < p-1. \end{cases} \tag{74}$$

La tercera condición en (74) es equivalente a

$$\frac{-1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) + b < \frac{3}{4},$$

lo que se sigue de la segunda línea en (55). Las desigualdades en (74) que nos permitirán hacer la elección de r se cumplirán si

$$\text{máx}\{-1, \alpha - \alpha p - p + ap\} < \text{mín}\{p-1, \alpha + ap\};$$

que se tendrá a partir de

$$-1 < \alpha + ap, \tag{75}$$

$$\alpha - (\alpha+1)p + ap < p - 1, \tag{76}$$

$$\alpha - (\alpha+1)p + ap < \alpha + ap. \tag{77}$$

Ahora, las desigualdades (75) y (76) se puede comprobar que equivalen a

$$-\frac{\alpha+1}{2} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) + a < \frac{\alpha+3}{2},$$

lo que se verifica a partir de la primera línea en (55). La desigualdad (77) se obtiene, otra vez, de $\alpha > -1$.

4.3. Acotación uniforme de los operadores $W_{3,n}$. Recordemos que

$$W_{3,n}(f,x) = \tfrac{1}{2} x^{-\alpha/2+1/2} J'_\nu(x^{1/2})\, H\big(t^{\alpha/2} J_\nu(t^{1/2}) f(t), x\big)$$

y, por tanto,

$$\|W_{3,n} f\|_{L^p(u^p(x)x^\alpha)} \leq C \|f\|_{L^p(u^p(x)x^\alpha)}$$

si y sólo si

$$\|Hg\|_{L^p(u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2+p/2}|J'_\nu(x^{1/2})|^p)} \leq C\|g\|_{L^p(u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\nu(x^{1/2})|^{-p})},$$

donde hemos tomado

$$g(t) = t^{\alpha/2} J_\nu(t^{1/2}) f(t).$$

De modo análogo a como hicimos en la acotación de W_1 bastará encontrar una familia de pesos $\varphi_\nu \in A_p$ uniformemente (es decir, con constantes $A_p(\varphi_\nu)$ independientes de ν) tales que

$$Cu^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2+p/2}|J'_\nu(x^{1/2})|^p \le \varphi_\nu(x) \le C_1 u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\nu(x^{1/2})|^{-p}. \tag{78}$$

Con esto, usando nuevamente el Teorema 1.4, podríamos concluir

$$\begin{aligned}\|Hg\|_{L^p(u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2+p/2}|J'_\nu(x^{1/2})|^p)} &\le C\|Hg\|_{L^p(\varphi_\nu(x))}\\ &\le C\|g\|_{L^p(\varphi_\nu(x))} \le C\|g\|_{L^p(u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\nu(x^{1/2})|^{-p})}.\end{aligned}$$

Obtengamos ahora los pesos φ_ν. Comenzaremos utilizando la expresión (33) para acotar J'_ν, si $x > \nu^2/4$. Así, usando que $u(x) \sim x^b$, si $x > \nu^2/4$,

$$u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2+p/2}|J'_\nu(x^{1/2})|^p \le Cx^{\alpha-\alpha p/2+p/8+bp}\left[|x^{1/2}-\nu|+\nu^{1/3}\right]^{p/4}.$$

Si $x \le \nu^2/4$ utilizaremos otra cota más precisa; en concreto

$$u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2+p/2}|J'_\nu(x^{1/2})|^p \le C\nu^{-\alpha p-3p/2+2p(b-a)}x^{\alpha+p+ap}. \tag{79}$$

Veamos que, efectivamente, se cumple esta estimación. La desigualdad (79) se seguirá inmediatamente si probamos que, para $x \le \nu^2/4$,

$$(1+x)^{b-a}x^{-(\alpha+1)/2}\nu^{\alpha+3/2-2(b-a)}|J'_\nu(x^{1/2})| \le C. \tag{80}$$

Comencemos considerando $b \ge a$; así, $(1+x)^{b-a} \le C\nu^{2(b-a)}$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}(1+x)^{b-a}x^{-(\alpha+1)/2}&\nu^{\alpha+3/2-2(b-a)}|J'_\nu(x^{1/2})|\\ &\le Cx^{-(\alpha+1)/2}\nu^{\alpha+3/2}|J'_\nu(x^{1/2})|.\end{aligned}$$

Eligiendo, ahora, convenientemente el parámetro que aparece en (36) del Lema 2.1 (debe tomarse $a = -(\alpha+2)$) obtenemos que

$$x^{-(\alpha+1)/2}\nu^{\alpha+3/2}|J'_\nu(x^{1/2})| \le C\left(\frac{e}{4}\right)^\nu \le C,$$

con lo que podemos finalizar (80). Si $b < a$, basta observar que $(1+x)^{b-a} \le x^{b-a}$ y utilizar nuevamente el Lema 2.1 (en esta ocasión debe tomarse el parámetro a de (36) igual a $2(b-a)-(\alpha+2)$).

Por (32) tendremos que, si $x > \nu^2/4$,

$$u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\nu(x^{1/2})|^{-p} \ge Cx^{\alpha-\alpha p/2+p/8+bp}\left[|x^{1/2}-\nu|+\nu^{1/3}\right]^{p/4},$$

teniendo en cuenta nuevamente que, en este rango de valores de x, $u(x) \sim x^b$. En el intervalo $0 < x \le \nu^2/4$ tomaremos la cota

$$u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\nu(x^{1/2})|^{-p} \ge C\nu^{\alpha p+p/2+2p(b-a)}x^{\alpha-\alpha p+ap}. \tag{81}$$

Procedamos, ahora, a comprobar (81). Será suficiente ver que

$$(1+x)^{a-b}x^{-\alpha/2}\nu^{\alpha+1/2+2(b-a)}|J_\nu(x^{1/2})| \le C. \tag{82}$$

Para concluir (82) comenzaremos tomando $b \le a$. Esto nos permite obtener inmediatamente que

$$(1+x)^{a-b}x^{-\alpha/2}\nu^{\alpha+1/2+2(b-a)}|J_\nu(x^{1/2})| \le Cx^{-\alpha/2}\nu^{\alpha+1/2}|J_\nu(x^{1/2})|.$$

Considerando el parámetro adecuado en (35) del Lema 2.1 (tomar $a = -\alpha$) tendremos

$$x^{-\alpha/2}\nu^{\alpha+1/2}|J_\nu(x^{1/2})| \le C\left(\frac{e}{4}\right)^\nu \le C.$$

Si $b > a$, utilizaremos que $(1+x)^{a-b} \le x^{a-b}$ y el Lema 2.1, en concreto (35) tomando el parámetro igual a $2(a-b)-\alpha$.

Con todo lo anterior, podemos afirmar que

$$u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2+p/2}|J'_\nu(x^{1/2})|^p \le C\begin{cases}\nu^{-\alpha p-3p/2+2p(b-a)}x^{\alpha+p+ap}, & \text{si } 0<x\le\nu^2/4,\\ x^{\alpha-\alpha p/2+p/8+bp}\left[|x^{1/2}-\nu|+\nu^{1/3}\right]^{p/4}, & \text{si } x>\nu^2/4,\end{cases}$$

y

$$u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\nu(x^{1/2})|^{-p} \ge C\begin{cases}\nu^{\alpha p+p/2+2p(b-a)}x^{\alpha-\alpha p+ap}, & \text{si } 0<x\le\nu^2/4,\\ x^{\alpha-\alpha p/2+p/8+bp}\left[|x^{1/2}-\nu|+\nu^{1/3}\right]^{p/4}, & \text{si } x>\nu^2/4.\end{cases}$$

Esto nos lleva a considerar los pesos

$$\varphi_\nu(x) = \begin{cases}\nu^{-\alpha p+p/2+2pb+2\alpha-2r}x^r, & \text{si } 0<x\le\nu^2/4,\\ x^w\left[|x^{1/2}-\nu|+\nu^{1/3}\right]^{p/4}, & \text{si } x>\nu^2/4,\end{cases}$$

donde, por brevedad en la notación, tomamos $w = \alpha-\alpha p/2+p/8+bp$. Esta familia de pesos debe verificar (78); para ello basta con que

$$C\nu^{-\alpha p-3p/2+2p(b-a)}x^{\alpha+p+ap} \le \nu^{-\alpha p+p/2+2pb+2\alpha-2r}x^r \le C_1\nu^{\alpha p+p/2+2p(b-a)}x^{\alpha-\alpha p+ap}, \tag{83}$$

si $x \le \nu^2/4$. Para probar que existe algún valor de r para el que se cumple (83) debemos observar que es equivalente a

$$C\left(\frac{x}{\nu^2}\right)^{\alpha+p+ap} \le \left(\frac{x}{\nu^2}\right)^r \le C_1\left(\frac{x}{\nu^2}\right)^{\alpha-\alpha p+ap},$$

si $x/\nu^2 \le 1/4$. De este hecho se concluye inmediatamente que (83) se tiene si

$$\alpha-\alpha p+ap \le r \le \alpha+p+ap. \tag{84}$$

Veamos, ahora, que $\varphi_\nu \in A_p$ uniformemente. El Lema 1.1 nos da

$$\varphi_\nu(x) \in A_p \text{ unif.} \iff \varphi_\nu(\nu^2 x) \in A_p \text{ unif.}$$

$$\iff \begin{cases} x^r, & \text{si } 0 < x \le 1/4, \\ x^w \left[|x^{1/2} - 1| + \nu^{-2/3}\right]^{p/4}, & \text{si } x > 1/4, \end{cases} \in A_p \text{ unif.}$$

$$\iff \begin{cases} x^r, & \text{si } 0 < x \le 1/4, \\ x^w \left[|x^{1/2} - 1|^{p/4} + \nu^{-p/6}\right], & \text{si } x > 1/4, \end{cases} \in A_p \text{ unif.},$$

donde la última equivalencia se sigue de

$$\left[|x^{1/2} - 1| + \nu^{-2/3}\right]^{p/4} \sim |x^{1/2} - 1|^{p/4} + \nu^{-p/6}.$$

Observemos, ahora, que

$$\begin{cases} x^r, & \text{si } 0 < x \le 1/4, \\ x^w \left[|x^{1/2} - 1|^{p/4} + \nu^{-p/6}\right], & \text{si } x > 1/4, \end{cases}$$
$$\sim \begin{cases} x^r(1 + \nu^{-p/6}), & \text{si } 0 < x \le 1/4, \\ x^w \left[|x^{1/2} - 1|^{p/4} + \nu^{-p/6}\right], & \text{si } x > 1/4, \end{cases}$$
$$= \omega_1(x) + C_\nu \omega_2(x),$$

con $C_\nu = \nu^{-p/6}$,

$$\omega_1(x) = \begin{cases} x^r, & \text{si } 0 < x \le 1/4, \\ x^w |x^{1/2} - 1|^{p/4}, & \text{si } x > 1/4, \end{cases}$$
$$\sim \begin{cases} x^r, & \text{si } 0 < x \le 1/2, \\ |x - 1|^{p/4}, & \text{si } 1/2 < x \le 3/2, \\ x^{w+p/8}, & \text{si } x > 3/2, \end{cases}$$

y

$$\omega_2(x) = \begin{cases} x^r, & \text{si } 0 < x \le 1/4, \\ x^w, & \text{si } x > 1/4, \end{cases}$$
$$\sim \begin{cases} x^r, & \text{si } 0 < x \le 1, \\ x^w, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

De este modo, usando los apartados (b) y (c) en el Lema 1.1, bastará comprobar que ω_1 y ω_2 están en A_p. Para que $\omega_1 \in A_p$ será suficiente, por el Lema 1.2, que se cumplan

$$\begin{cases} -1 < r < p - 1, \\ -1 < p/4 < p - 1, \\ -1 < \alpha - \alpha p/2 + p/4 + bp < p - 1. \end{cases} \tag{85}$$

La desigualdad en la que interviene r, analizada junto con (84) y la última condición en (85) se comportan igual que en W_1; la desigualdad

$-1 < p/4 < p-1$ equivale a $p > 4/3$. Por el Lema 1.2, el peso ω_2 pertenecerá a A_p si

$$\begin{cases} -1 < r < p-1, \\ -1 < \alpha - \alpha p/2 + p/8 + bp < p-1. \end{cases} \tag{86}$$

La condición sobre r es la misma que en (85), y la otra restricción en (86) equivale a

$$-\frac{5}{8} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) + b < \frac{3}{8},$$

que viene implicada por la segunda línea en (55).

4.4. Acotación uniforme de los operadores $W_{4,n}$. Para concluir tomemos

$$W_{4,n}(f,x) = \tfrac{1}{2}x^{-\alpha/2} J_\nu(x^{1/2})\, H\big(t^{\alpha/2+1/2} J'_\nu(t^{1/2}) f(t), x\big).$$

Así, tendremos que

$$\|W_{4,n} f\|_{L^p(u^p(x)x^\alpha)} \le C\|f\|_{L^p(u^p(x)x^\alpha)}$$

si y sólo si

$$\|Hg\|_{L^p(u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\nu(x^{1/2})|^p)} \le C\|g\|_{L^p(u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2-p/2}|J'_\nu(x^{1/2})|^{-p})},$$

sin más que tomar

$$g(t) = t^{\alpha/2+1/2} J'_\nu(t^{1/2}) f(t).$$

Procediendo como en W_2 será suficiente con encontrar pesos $\psi_\nu \in A_p$ uniformemente tal que

$$Cu^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\nu(x^{1/2})|^p \le \psi_\nu(x) \le C_1 u^p(x) x^{\alpha-\alpha p/2-p/2}|J'_\nu(x^{1/2})|^{-p}. \tag{87}$$

Con tal familia de pesos, usando de nuevo el Teorema 1.4, tendríamos

$$\begin{aligned} \|Hg\|_{L^p(u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\nu(x^{1/2})|^p)} &\le C\|Hg\|_{L^p(\psi_\nu(x))} \\ &\le C\|g\|_{L^p(\psi_\nu(x))} \le C\|g\|_{L^p(u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2-p/2}|J'_\nu(x^{1/2})|^{-p})}. \end{aligned}$$

Veamos ciertas acotaciones que nos permitan elegir los pesos ψ_ν. Para $x > \nu^2/4$, aplicando (32) a J_ν llegaremos a

$$u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\nu(x^{1/2})|^p \le Cx^{\alpha-\alpha p/2-p/8+bp}\left[|x^{1/2}-\nu| + \nu^{1/3}\right]^{-p/4},$$

donde nuevamente hemos tenido en cuenta que, si $x > \nu^2/4$, $u(x) \sim x^b$. Al igual que para $W_{3,n}$, si $x \le \nu^2/4$ usaremos una estimación más apropiada:

$$u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\nu(x^{1/2})|^p \le C\nu^{-\alpha p-p/2+2p(b-a)}x^{\alpha+ap}. \tag{88}$$

Para comprobar la expresión (88) será suficiente tener que

$$(1+x)^{b-a}x^{-\alpha/2}\nu^{\alpha+1/2-2(b-a)}|J_\nu(x^{1/2})| \le C.$$

Esta última cota puede obtenerse como (82).

Con (33), podemos concluir que, para $x > \nu^2/4$,

$$u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2-p/2}|J'_\nu(x^{1/2})|^{-p} \geq Cx^{\alpha-\alpha p/2-p/8+bp}\left[|x^{1/2}-\nu|+\nu^{1/3}\right]^{-p/4},$$

haciendo uso también de la equivalencia $u(x) \sim x^b$. En el intervalo $0 < x \leq \nu^2/4$ utilizaremos que

$$u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2-p/2}|J'_\nu(x^{1/2})|^{-p} \geq C\nu^{\alpha p+3p/2+2p(b-a)}x^{\alpha-\alpha p-p+ap}. \tag{89}$$

Para verificar (89) basta probar que, para $0 < x \leq \nu^2/4$,

$$(1+x)^{a-b}x^{-(\alpha+1)/2}\nu^{\alpha+3/2+2(b-a)}|J'_\nu(x^{1/2})| \leq C.$$

Para concluir esta desigualdad podemos proceder como con (80).

Reuniendo toda la información precedente, llegamos a que

$$\begin{aligned} &u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2}|J_\nu(x^{1/2})|^p \\ &\quad\leq C\begin{cases}\nu^{-\alpha p-p/2+2p(b-a)}x^{\alpha+ap}, & \text{si } 0 < x \leq \nu^2/4,\\ x^{\alpha-\alpha p/2-p/8+bp}\left[|x^{1/2}-\nu|+\nu^{1/3}\right]^{-p/4}, & \text{si } x > \nu^2/4;\end{cases}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &u^p(x)x^{\alpha-\alpha p/2-p/2}|J'_\nu(x^{1/2})|^{-p} \\ &\quad\geq C\begin{cases}\nu^{\alpha p+3p/2+2p(b-a)}x^{\alpha-\alpha p-p+ap}, & \text{si } 0 < x \leq \nu^2/4,\\ x^{\alpha-\alpha p/2-p/8+bp}\left[|x^{1/2}-\nu|+\nu^{1/3}\right]^{-p/4}, & \text{si } x > \nu^2/4,\end{cases}\end{aligned}$$

Tomaremos, ahora, los pesos

$$\psi_\nu(x) = \begin{cases}\nu^{-\alpha p-p/2+2pb+2\alpha-2r}x^r, & \text{si } 0 < x \leq \nu^2/4,\\ x^v\left[|x^{1/2}-\nu|+\nu^{1/3}\right]^{-p/4}, & \text{si } x > \nu^2/4,\end{cases}$$

donde hemos denotado $v = \alpha - \alpha p/2 - p/8 + bp$. Estos pesos deben cumplir la condición (87), y para ello es suficiente que

$$\begin{aligned} C\nu^{-\alpha p-p/2+2p(b-a)}x^{\alpha+ap} &\leq \nu^{-\alpha p-p/2+2pb+2\alpha-2r}x^r \\ &\leq C_1\nu^{\alpha p+3p/2+2p(b-a)}x^{\alpha-\alpha p-p+ap}, \end{aligned} \tag{90}$$

si $x \leq \nu^2/4$. La desigualdad (90) es equivalente a

$$C\left(\frac{x}{\nu^2}\right)^{\alpha+ap} \leq \left(\frac{x}{\nu^2}\right)^r \leq C_1\left(\frac{x}{\nu^2}\right)^{\alpha-\alpha p-p+ap},$$

si $x/\nu^2 \leq 1/4$. Así, es claro que (90) se sigue si tuviéramos

$$\alpha - \alpha p - p + ap \leq r \leq \alpha + ap. \tag{91}$$

Veamos ahora bajo qué condiciones tenemos que $\psi_\nu \in A_p$ uniformemente. Usando, como en el caso anterior, el Lema 1.1, tenemos

$$\psi_\nu(x) \in A_p \text{ unif.} \iff \psi_\nu(\nu^2 x) \in A_p \text{ unif.}$$

$$\iff \begin{cases} x^r, & \text{si } 0 < x \leq 1/4, \\ x^v \left[|x^{1/2} - 1| + \nu^{-2/3}\right]^{-p/4}, & \text{si } x > 1/4, \end{cases} \in A_p \text{ unif.}$$

Buscando aplicar el apartado (d) del Lema 1.1 tendremos en cuenta que

$$\begin{cases} x^{-r}, & \text{si } 0 < x \leq 1/4, \\ \left(x^v \left[|x^{1/2} - 1| + \nu^{-2/3}\right]^{-p/4}\right)^{-1}, & \text{si } x > 1/4, \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x^{-r}, & \text{si } 0 < x \leq 1/4, \\ x^{-v} \left[|x^{1/2} - 1|^{p/4} + \nu^{-p/6}\right], & \text{si } x > 1/4, \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x^{-r}(1 + \nu^{-p/6}), & \text{si } 0 < x \leq 1/4, \\ x^{-v} \left[|x^{1/2} - 1|^{p/4} + \nu^{-p/6}\right], & \text{si } x > 1/4, \end{cases}$$

$$= \delta_1^{-1}(x) + (C_\nu \delta_2(x))^{-1},$$

con $C_\nu = \nu^{p/6}$,

$$\delta_1(x) = \begin{cases} x^r, & \text{si } 0 < x \leq 1/4, \\ x^v |x^{1/2} - 1|^{-p/4}, & \text{si } x > 1/4 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x^r, & \text{si } 0 < x \leq 1/2, \\ |x - 1|^{-p/4}, & \text{si } 1/2 < x \leq 3/2, \\ x^{v - p/8}, & \text{si } x > 3/2, \end{cases}$$

y

$$\delta_2(x) = \begin{cases} x^r, & \text{si } 0 < x \leq 1/4, \\ x^v, & \text{si } x > 1/4, \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x^r, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ x^v, & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

Por lo tanto, usando (b) y (d) en el Lema 1.1, llegaremos a que $\psi_\nu \in A_p$ uniformemente si $\delta_1, \delta_2 \in A_p$. De este modo, para que $\delta_1 \in A_p$ bastará, por el Lema 1.2, que

$$\begin{cases} -1 < r < p - 1, \\ -1 < -p/4 < p - 1, \\ -1 < \alpha - \alpha p/2 - p/4 + bp < p - 1. \end{cases} \tag{92}$$

La desigualdad que involucra a r, estudiada junto con (91) y la última condición en (92) son análogas a las que se estudiaron en W_2; la desigualdad $-1 < -p/4 < p-1$ equivale a $p < 4$. Para que el peso δ_2 pertenezca a A_p será suficiente, utilizando otra vez el Lema 1.2, que

$$\begin{cases} -1 < r < p-1, \\ -1 < \alpha - \alpha p/2 - p/8 + bp < p-1. \end{cases} \tag{93}$$

La restricción sobre r es igual que en (92) y la segunda condición en (93) es equivalente a

$$-\frac{3}{8} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) + b < \frac{5}{8},$$

que viene implicada por la segunda línea en (55).

CAPÍTULO 4

Acotaciones extremales del operador suma parcial

1. Introducción

Consideremos nuevamente el sistema ortonormal en $L^2(x^\alpha)$ dado por $\{j_n^\alpha\}_{n\geq 0}$. Como se mencionó anteriormente y como se deduce del resultado básico en el capítulo anterior la acotación uniforme de los operadores S_n en $L^p(x^\alpha)$ se verifica en un cierto intervalo abierto de valores de p, denominado intervalo de convergencia en media. Basta tomar $a = b = 0$ en Teorema 3.1 para ver que en este caso tendremos que el intervalo de convergencia en media es

$$\begin{cases} \frac{4}{3} < p < 4, & \text{si } -1 < \alpha < 0, \\ \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+3} < p < \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+1}, & \text{si } \alpha \geq 0. \end{cases}$$

Parece natural preguntarse por el comportamiento del operador S_n en los extremos de este intervalo. Para efectuar este análisis utilizaremos los espacios $L^{p,\infty}(x^\alpha)$, que fueron definidos en el Capítulo 1. Veremos, para $\alpha \geq 0$, que en los valores extremos del intervalo de convergencia en media S_n no verifica la acotación uniforme (p,p)-débil. En particular encontraremos una familia de funciones, f_n, que muestra que no es posible que se verifique la acotación uniforme

$$\|S_n f_n\|_{L^{p,\infty}(x^\alpha)} \leq C\|f_n\|_{L^p(x^\alpha)}.$$

Por tanto, para $\alpha \geq 0$, la acotación (p,p)-débil sólo ocurre en el intervalo de convergencia en media. Creemos que este hecho se cumple también para $-1 < \alpha < 0$ pero desgraciadamente no hemos logrado encontrar una demostración de ello. Probaremos, en este caso para $\alpha > -1$, que la acotación uniforme (p,p)-débil restringida sí se verifica para los valores extremos del intervalo.

Recordemos que el operador S_n se describe como

$$S_n f = W_1 f - W_2 f + W_{3,n} f - W_{4,n} f,$$

con

$$\begin{aligned} W_1(f,x) &= \tfrac{1}{2} x^{-\alpha/2+1/2} J_{\alpha+1}(x^{1/2})\, H\big(t^{\alpha/2} J_\alpha(t^{1/2}) f(t), x\big), \\ W_2(f,x) &= \tfrac{1}{2} x^{-\alpha/2} J_\alpha(x^{1/2})\, H\big(t^{\alpha/2+1/2} J_{\alpha+1}(t^{1/2}) f(t), x\big), \\ W_{3,n}(f,x) &= \tfrac{1}{2} x^{-\alpha/2+1/2} J'_\nu(x^{1/2})\, H\big(t^{\alpha/2} J_\nu(t^{1/2}) f(t), x\big), \\ W_{4,n}(f,x) &= \tfrac{1}{2} x^{-\alpha/2} J_\nu(x^{1/2})\, H\big(t^{\alpha/2+1/2} J'_\nu(t^{1/2}) f(t), x\big), \end{aligned}$$

donde $\nu = \alpha + 2n + 2$.

2. Acotación débil del operador suma parcial

El estudio de la acotación (p,p)-débil del operador S_n asociado al sistema ortonormal $\{j_n^\alpha\}$ será el objetivo único de esta sección. Probaremos el siguiente resultado:

TEOREMA 4.1. *Sean $\alpha \geq 0$ y $1 < p < \infty$. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|S_n f\|_{L^{p,\infty}(x^\alpha)} \leq C\|f\|_{L^p(x^\alpha)}, \quad f \in L^p(x^\alpha), \quad n \in \mathbb{N},$$

si y sólo si

$$\frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+3} < p < \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+1} \tag{94}$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, notar que, por el Teorema 3.1 con $a = b = 0$, es claro que (94) implica la acotación (p,p)-fuerte, luego también la (p,p)-débil. Bastará, pues, con estudiar la otra implicación.

Una sencilla modificación de la Proposición 3.2, con $u = v = 1$ y considerando la acotación (p,p)-débil del operador S_n en lugar de la acotación (p,p)-fuerte, nos dará que

$$\|S_n f\|_{L^{p,\infty}(x^\alpha)} \leq C\|f\|_{L^p(x^\alpha)} \Longrightarrow \|j_n^\alpha\|_{L^{p,\infty}(x^\alpha)}\|j_n^\alpha\|_{L^q(x^\alpha)} \leq C.$$

Usando las estimaciones de los Lemas 2.6 y 2.3 (con $r = s = \alpha$), obtendremos

$$j_n^\alpha \in L^{p,\infty}(x^\alpha) \iff -\frac{1}{4} \leq (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$$

y

$$\begin{aligned} j_n^\alpha \in L^q(x^\alpha) &\iff -\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \\ &\iff (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) < \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ambas condiciones pueden reunirse en

$$-\frac{1}{4} \leq (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) < \frac{1}{4}. \tag{95}$$

Considerando ahora las estimaciones de los Lemas 2.4 y 2.7 podremos deducir, supuesto que (95) se verifique,

$$\|j_n^\alpha\|_{L^{p,\infty}(x^\alpha)}\|j_n^\alpha\|_{L^q(x^\alpha)} \sim \begin{cases} n^{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{p}-\frac{3}{4}\right)}, & \text{si } p < 4/3, \\ (\log n)^{1/4}, & \text{si } p = 4/3, \\ C, & \text{si } 4/3 < p \leq 4, \\ n^{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)}, & \text{si } p > 4. \end{cases}$$

Lo que nos asegura que debemos tener

$$\frac{4}{3} < p \leq 4.$$

De todo lo anterior concluimos que

$$
\begin{aligned}
\|S_n f\|_{L^{p,\infty}(x^\alpha)} \le C\|f\|_{L^p(x^\alpha)} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} < p \le 4, \\ -\frac{1}{4} \le (\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) < \frac{1}{4}, \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} < p < 4, & \text{si } \alpha = 0, \\ \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+3} \le p < \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+1}, & \text{si } \alpha > 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Así, para completar la equivalencia bastará con probar que para $p = p_0 = \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+3}$, con $\alpha > 0$, no se puede dar la acotación débil.

A la vista de la demostración del Teorema 3.1 (en concreto, las subsecciones 4.2 y 4.4 del Capítulo 3), tomando $a = b = 0$, sabemos que los operadores W_2 y $W_{4,n}$, descritos en (61) y (63) respectivamente, son acotados en $L^{p_0}(x^\alpha)$. Bastará, por tanto, con estudiar el comportamiento de W_1 y $W_{3,n}$, descritos por (60) y (62). De esta forma es suficiente probar que existe una sucesión de funciones f_n para la que la desigualdad

$$\|W_1 f_n + W_{3,n} f_n\|_{L^{p_0,\infty}(x^{2\alpha})} \le C\|f_n\|_{L^{p_0}(x^\alpha)} \tag{96}$$

falla para cada constante C.

Consideremos la sucesión de funciones

$$f_n(t) = \operatorname{sgn}(J_\alpha(t^{1/2}))t^{-\frac{2\alpha+3}{4}}\chi_{[1,n^2]}(t).$$

En primer lugar, es fácil observar que

$$\|f_n\|_{L^{p_0}(x^\alpha)} = C(\log n)^{\frac{1}{p_0}}. \tag{97}$$

Ahora, para $x > (2\nu)^2$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
|W_{3,n}(f_n, x)| &\le Cx^{-(\alpha+1)/2}|J_\nu'(x^{1/2})| \int_1^{n^2} t^{-\frac{3}{4}}|J_\nu(t^{1/2})|\,dt \\
&\le Cx^{-(2\alpha+3)/2}\left(\frac{e}{4}\right)^{2n},
\end{aligned}
$$

donde el último paso se sigue de (33) y (35). Usando este hecho llegamos a la acotación

$$\|\chi_{((2\nu)^2,\infty)} W_{3,n} f_n\|_{L^{p_0,\infty}(x^\alpha)} \le C\left(\frac{e}{4}\right)^{2n}. \tag{98}$$

Tomando otra vez $x > (2\nu)^2$, se comprueba que

$$
\begin{aligned}
|W_1(f_n, x)| &\ge Cx^{-(\alpha+1)/2}|J_{\alpha+1}(x^{1/2})| \int_1^{n^2} t^{-\frac{3}{4}}|J_\alpha(t^{\frac{1}{2}})|\,dt \\
&\ge C(\log n)x^{-(\alpha+1)/2}|J_{\alpha+1}(x^{1/2})|,
\end{aligned}
$$

donde para obtener la última desigualdad se ha hecho uso de (27). De esta estimación concluimos inmediatamente que

$$\|\chi_{((2\nu)^2,\infty)}(x)W_1 f_n\|_{L^{p_0,\infty}(x^\alpha)} \geq C \log n. \tag{99}$$

Reuniendo (98) y (99) tendremos que

$$\|W_1 f_n + W_{3,n} f_n\|_{L^{p_0,\infty}(x^\alpha)} \geq C \log n,$$

lo que, junto a (97), nos permite finalizar que (96) no puede verificarse.

□

3. Acotación débil restringida del operador suma parcial

En el teorema de la sección anterior hemos probado que para determinados valores de α no es posible tener acotación uniforme (p,p)-débil en los extremos del intervalo de convergencia en media. Esto nos lleva inmediatamente a pensar en estudiar la acotación uniforme (p,p)-débil restringida para el operador S_n en dichos valores extremales. El siguiente resultado es el trabajo que hemos realizado respecto a esta cuestión:

Teorema 4.2. *Sea*

$$\begin{cases} \frac{4}{3} \leq p \leq 4, & si\ -1 < \alpha < 0, \\ \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+3} \leq p \leq \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+1}, & si\ \alpha \geq 0. \end{cases}$$

Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|S_n f\|_{L^{p,\infty}(x^\alpha)} \leq C\|f\|_{L^p(x^\alpha)}, \quad f = \chi_E, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde E es un conjunto de medida finita.

Demostración. Probaremos la acotación únicamente para los valores extremos. Es bien conocido que si un operador es autoadjunto la acotación débil restringida para un valor de p nos da inmediatamente la acotación débil restringida en q, con q el conjugado de p. En nuestro caso concreto la acotación

$$\|S_n f\|_{L^{4,\infty}(x^\alpha)} \leq C\|f\|_{L^4(x^\alpha)}, \quad f = \chi_E,$$

implica

$$\|S_n f\|_{L^{4/3,\infty}(x^\alpha)} \leq C\|f\|_{L^{4/3}(x^\alpha)}, \quad f = \chi_E,$$

y lo mismo para $p_0 = \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+3}$ y $p_1 = \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+1}$, puesto que p_0 y p_1 son conjugados. Por tanto, nos centraremos en el estudio del extremo superior. Dividiremos la demostración en dos casos; en el primera de ellos consideraremos $p = p_1$ (por tanto $\alpha \geq 0$) y en el segundo tomaremos $p = 4$ (con $-1 < \alpha < 0$).

Caso a: $p = p_1$ ($\alpha \geq 0$).

Las estimaciones contenidas en las subsecciones 4.1 y 4.3 del Capítulo 3, con $a = b = 0$, nos permiten afirmar que W_1 y $W_{3,n}$ son operadores que verifican la acotación uniforme (p_1, p_1)-fuerte; y como consecuencia cumplen la acotación uniforme (p_1, p_1)-débil restringida. Bastará, para obtener la conclusión deseada, con probar que W_2 y $W_{4,n}$ también tienen esta propiedad. Estudiemos cada uno de estos operadores.

Caso a.1: Acotación débil restringida del operador W_2.

Comenzaremos considerando, para cada $k \in \mathbb{Z}$, los intervalos $I_k = [2^k, 2^{k+1})$ y las funciones

$$\begin{aligned} f_1^k =& f\chi_{(0,2^{k-1})}, \\ f_2^k =& f\chi_{[2^{k-1},2^{k+2})}, \\ f_3^k =& f\chi_{[2^{k+2},\infty)}. \end{aligned}$$

De este modo $\cup_{k\in\mathbb{Z}} I_k = (0,\infty)$ y, para cada k, $f = f_1^k + f_2^k + f_3^k$. Esto nos permite escribir

$$W_2 f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(W_2 f_1^k + W_2 f_2^k + W_2 f_3^k \right) \chi_{I_k}.$$

Con esta descomposición tendremos

$$\begin{aligned} \{x \in (0,\infty) : |W_2(f,x)| > y\} \subset A_k \cup B_k \cup C_k& \\ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (A_k \cup B_k \cup C_k) \cap I_k&, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A_k &= \left\{ x \in (0,\infty) : |W_2(f_1^k, x)| > \frac{y}{3} \right\}, \\ B_k &= \left\{ x \in (0,\infty) : |W_2(f_2^k, x)| > \frac{y}{3} \right\} \end{aligned}$$

y

$$C_k = \left\{ x \in (0,\infty) : |W_2(f_3^k, x)| > \frac{y}{3} \right\}.$$

Veamos que se verifica

$$(A_k \cup C_k) \cap I_k \subset \{x \in (0,\infty) : Cx^{-(2\alpha+1)/4} \|f\|_{L^{p_1}(x^\alpha)} > y\}. \tag{100}$$

Para $W_2(f_1^k, x)$ con $x \in I_k$ se tiene que $t < x/2$. De esto concluimos que $(x-t)^{-1} \le t^{-1}$ y así

$$\begin{aligned} |W_2(f_1^k, x)| &\le Cx^{-\alpha/2} |J_\alpha(x^{1/2})| \int_0^{x/2} t^{(\alpha+1)/2} |J_{\alpha+1}(t^{1/2})| \frac{f(t)}{x-t}\, dt \\ &\le Cx^{-\alpha/2} |J_\alpha(x^{1/2})| \int_0^{x/2} t^{(\alpha-1)/2} |J_{\alpha+1}(t^{1/2})| f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $|J_\alpha(x^{1/2})| \le Cx^{-1/4}$, la desigualdad de Hölder débil, (3), con $p = p_1$ y $q = p_0$, y que (por (49) y (50)) $t^{-(2\alpha+3)/4} \in$

$L^{p_0,\infty}(t^\alpha)$, se tiene

$$\begin{aligned}|W_2(f_1^k,x)| &\le Cx^{-(2\alpha+1)/4}\int_0^{x/2} t^{-(2\alpha+3)/4}f(t)t^\alpha\,dt\\ &\le Cx^{-(2\alpha+1)/4}\|t^{-(2\alpha+3)/4}\|_{L^{p_0,\infty}(t^\alpha)}\|f\|_{L^{p_1}(t^\alpha)}\\ &\le Cx^{-(2\alpha+1)/4}\|f\|_{L^{p_1}(t^\alpha)},\end{aligned}$$

que es lo que queríamos comprobar.

Para $W_2(f_3^k,x)$ con $x\in I_k$ se verifica que $t>2x$, lo que nos da $(t-x)^{-1}\le 2t^{-1}$. De este modo, operando igual que para $W_2(f_1^k,x)$, tendremos

$$|W_2(f_3^k,x)|\le Cx^{-(2\alpha+1)/4}\|f\|_{L^{p_1}(t^\alpha)}.$$

Las estimaciones obtenidas para $|W_2(f_1^k,x)|$ y $|W_2(f_3^k,x)|$ nos permiten concluir (100) y, como consecuencia, la acotación (p_1,p_1)-débil restringida para $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(W_2f_1^k+W_2f_3^k\right)\chi_{I_k}$. En efecto, para ver que realmente es así basta tener en cuenta que

$$\begin{aligned}&\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(A_k\cup C_k)\cap I_k\right)\\ &\qquad\le \mu\left\{\left(x\in(0,\infty):Cx^{-(2\alpha+1)/4}\|f\|_{L^{p_1}(t^\alpha)}>y\right)\right\}\\ &\qquad\le \mu\left(\left(0,\left(\frac{C\|f\|_{L^{p_1}(t^\alpha)}}{y}\right)^{4/(2\alpha+1)}\right)\right)\le C\left(\frac{\|f\|_{L^{p_1}(t^\alpha)}}{y}\right)^{p_1}.\end{aligned}$$

Veamos, para finalizar la acotación para W_2, qué sucede con B_k. Es evidente que

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}B_k\cap I_k\right)\le\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mu\left(\left\{x\in I_k:|W_2(f_2^k,x)|>\frac{y}{3}\right\}\right);$$

analicemos cómo se comporta cada conjunto de este sumatorio. Si $x\in I_k$ entonces $x\sim 2^k$. Esto, junto con la cota $|J_\alpha(x^{1/2})|\le Cx^{-1/4}$, nos da

$$\begin{aligned}|W_2(f_2^k,x)| &\le Cx^{-(2\alpha+1)/4}\left|H\left(t^{\alpha/2+1/2}J_{\alpha+1}(t^{1/2})f_2^k(t),x\right)\right|\\ &\sim 2^{-(2\alpha+1)k/4}\left|H\left(t^{\alpha/2+1/2}J_{\alpha+1}(t^{1/2})f_2^k(t),x\right)\right|.\end{aligned}$$

Así, para cada conjunto I_k tendremos

$$\begin{aligned}&\mu\left(\left\{x\in I_k:|W_2(f_2^k,x)|>\frac{y}{3}\right\}\right)\\ &\le\mu\left(\left\{x\in I_k:C2^{-(2\alpha+1)k/4}\left|H\left(t^{\alpha/2+1/2}J_{\alpha+1}(t^{1/2})f_2^k(t),x\right)\right|>y\right\}\right)\\ &\le C2^{-(\alpha+1)k}y^{-p_1}\int_{I_k}\left|H\left(t^{\alpha/2+1/2}J_{\alpha+1}(t^{1/2})f_2^k(t),x\right)\right|^{p_1}x^\alpha\,dx\\ &\sim 2^{-k}y^{-p_1}\int_{I_k}\left|H\left(t^{\alpha/2+1/2}J_{\alpha+1}(t^{1/2})f_2^k(t),x\right)\right|^{p_1}\,dx.\end{aligned}$$

Utilizando, ahora, la acotación de la transformada de Hilbert sin pesos y, nuevamente, la estimación $|J_{\alpha+1}(x^{1/2})| \leq Cx^{-1/4}$, llegamos a

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\left\{x \in I_k : |W_2(f_2^k, x)| > \frac{y}{3}\right\}\right) \\
&\leq C2^{-k}y^{-p_1} \int_{I_k} |x^{\alpha/2+1/2} J_{\alpha+1}(x^{1/2}) f_2^k(x)|^{p_1}\, dx \\
&\leq C2^{-k}y^{-p_1} \int_{I_k} |f_2^k(x)|^{p_1} x^{\alpha+1}\, dx \\
&\sim y^{-p_1} \int_{I_k} |f_2^k(x)|^{p_1} x^{\alpha}\, dx.
\end{aligned}$$

Con esto,

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} B_k \cap I_k\right) &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu\left(\left\{x \in I_k : |W_2(f_2^k, x)| > \frac{y}{3}\right\}\right) \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} y^{-p_1} \int_{I_k} |f_2^k(x)|^{p_1} x^{\alpha}\, dx \leq C\left(\frac{\|f\|_{L^{p_1}(x^\alpha)}}{y}\right)^{p_1}.
\end{aligned}$$

De esta manera se tiene la acotación (p_1, p_1)-débil restringida para $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(W_2 f_2^k)\chi_{I_k}$, lo que concluye la demostración para W_2.

Caso a.2: Acotación uniforme débil restringida del operador $W_{4,n}$.

Utilizaremos una notación análoga a la del caso anterior, siendo ahora

$$A_k = \left\{x \in (0,\infty) : |W_{4,n}(f_1^k, x)| > \frac{y}{3}\right\},$$
$$B_k = \left\{x \in (0,\infty) : |W_{4,n}(f_2^k, x)| > \frac{y}{3}\right\}$$

y

$$C_k = \left\{x \in (0,\infty) : |W_{4,n}(f_3^k, x)| > \frac{y}{3}\right\}.$$

Veamos que se verifica el contenido

(101)
$$(A_k \cup C_k) \cap I_k \subset \{x \in (0,\infty) : Cx^{-\alpha/2}|J_\nu(x^{1/2})|\, \|f\|_{L^{p_1}(x^\alpha)} > y\}.$$

Para $W_{4,n}(f_1^k, x)$ con $x \in I_k$ se tiene $t < x/2$, de donde se deduce que $(x-t)^{-1} \leq t^{-1}$. Así

$$\begin{aligned}
|W_{4,n}(f_1^k, x)| &\leq Cx^{-\alpha/2}|J_\nu(x^{1/2})| \int_0^{x/2} t^{(\alpha+1)/2}|J_\nu'(t^{1/2})| \frac{f(t)}{x-t}\, dt \\
&\leq Cx^{-\alpha/2}|J_\nu(x^{1/2})| \int_0^{x/2} t^{(\alpha-1)/2}|J_\nu'(t^{1/2})| f(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Hölder débil, (3), con $p = p_1$ y $q = p_0$ y usando que

$$\|t^{-(\alpha+1)/2} J_\nu'(t^{1/2})\|_{L^{p_0,\infty}(t^\alpha)} \leq C, \tag{102}$$

lo que se probará posteriormente, se tiene

$$\begin{aligned}|W_{4,n}(f_1^k,x)| &\le Cx^{-\alpha/2}|J_\nu(x^{1/2})|\,\|t^{-(\alpha+1)/2}J_\nu'(t^{1/2})\|_{L^{p_0,\infty}(t^\alpha)}\|f\|_{L^{p_1}(t^\alpha)}\\ &\le Cx^{-\alpha/2}|J_\nu(x^{1/2})|\,\|f\|_{L^{p_1}(t^\alpha)},\end{aligned}$$

que es lo que queríamos ver. Comprobemos que, efectivamente, se cumple (102). A partir de

$$2J_\nu'(t)=J_{\nu-1}(t)-J_{\nu+1}(t), \tag{103}$$

tendremos

$$\begin{aligned}&\|t^{-(\alpha+1)/2}J_\nu'(t^{1/2})\|_{L^{p_0,\infty}(t^\alpha)}\\ &\le C\|t^{-(\alpha+1)/2}J_{\nu-1}(t^{1/2})\|_{L^{p_0,\infty}(t^\alpha)}+C\|t^{-(\alpha+1)/2}J_{\nu+1}(t^{1/2})\|_{L^{p_0,\infty}(t^\alpha)}\\ &\qquad\le C(\nu-1)^{-1/2}\|j_n^\alpha(t)\|_{L^{p_0,\infty}(t^\alpha)}\\ &\qquad\qquad+C(\nu+1)^{-1/2}\|j_{n+1}^\alpha(t)\|_{L^{p_0,\infty}(t^\alpha)}\le C,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la estimación dada en el Lema 2.7.

Para $W_{4,n}(f_3^k,x)$ con $x\in I_k$ se verifica que $t>2x$, con lo que tendremos $(t-x)^{-1}\le 2t^{-1}$. Así, operando igual que para $W_{4,n}(f_1^k,x)$,

$$|W_{4,n}(f_3^k,x)|\le Cx^{-\alpha/2}|J_\nu(x^{1/2})|\,\|f\|_{L^{p_1}(t^\alpha)}.$$

La expresión (101) se concluye de manera inmediata de las mayoraciones que hemos realizado para $W_{4,n}(f_1^k,x)$ y $W_{4,n}(f_3^k,x)$, con $x\in I_k$. Veamos que a partir de este hecho se tiene la acotación uniforme (p_1,p_1)-débil restringida para $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(W_{4,n}f_1^k+W_{4,n}f_3^k\right)\chi_{I_k}$. Para ello haremos uso de la cota

$$\|x^{-\alpha/2}J_\nu(x^{1/2})\|_{L^{p_1,\infty}(x^\alpha)}\le C, \tag{104}$$

que probaremos posteriormente. En efecto, de este modo

$$\begin{aligned}&\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(A_k\cup C_k)\cap I_k\right)\\ &\qquad\le\mu\left(\left\{x\in(0,\infty):Cx^{-\alpha/2}|J_\nu(x^{1/2})|\,\|f\|_{L^{p_1}(t^\alpha)}>y\right\}\right)\\ &\qquad\quad\le C\left(\frac{\|f\|_{L^{p_1}(t^\alpha)}}{y}\right)^{p_1}\|x^{-\alpha/2}J_\nu(x^{1/2})\|_{L^{p_1,\infty}(x^\alpha)}^{p_1}\\ &\qquad\qquad\le C\left(\frac{\|f\|_{L^{p_1}(t^\alpha)}}{y}\right)^{p_1}.\end{aligned}$$

Comprobemos (104):

$$\begin{aligned}\|x^{-\alpha/2}J_\nu(x^{1/2})\|_{L^{p_1,\infty}(x^\alpha)}&\le\|x^{-\alpha/2}J_\nu(x^{1/2})\chi_{(0,(2\nu)^2]}(x)\|_{L^{p_1,\infty}(x^\alpha)}\\ &\quad+\|x^{-\alpha/2}J_\nu(x^{1/2})\chi_{[(2\nu)^2,\infty)}(x)\|_{L^{p_1,\infty}(x^\alpha)}\\ &\le C\left(\nu^{1/2}\|j_n^\alpha(x)\|_{L^{p_1,\infty}(x^\alpha)}+\|x^{-(2\alpha+1)/4}\|_{L^{p_1,\infty}(x^\alpha)}\right)\le C,\end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de que $x^{-(2\alpha+1)/4} \in L^{p_1,\infty}(x^\alpha)$ y que para $\alpha \geq 0$, por el Lema 2.7, se tiene que $\|j_n^\alpha(x)\|_{L^{p_1,\infty}(x^\alpha)} \leq C\nu^{-1/2}$.

A continuación estudiaremos la acotación para $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(W_{4,n}f_2^k)\chi_{I_k}$. Procediendo como para W_2 partimos de

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} B_k \cap I_k\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu\left(\left\{x \in I_k : |W_{4,n}(f_2^k, x)| > \frac{y}{3}\right\}\right).$$

Teniendo en cuenta que para $x \in I_k$ se cumple $x \sim 2^k$, obtenemos

$$|W_{4,n}(f_2^k, x)| \sim 2^{-\alpha k/2}\left|L_\nu\big(t^{\alpha/2}f_2^k(t), x\big)\right|,$$

donde $L_\nu f$ es el operador definido por

$$L_\nu(f, x) = J_\nu(x^{1/2})H(t^{1/2}J'_\nu(t^{1/2})f(t), x), \tag{105}$$

con H la transformada de Hilbert y $\nu = \alpha + 2n + 2$. De modo que, denotando por $|\cdot|$ la medida de Lebesgue, llegamos a

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\left\{x \in I_k : |W_{4,n}(f_2^k, x)| > \frac{y}{3}\right\}\right)\\
&\qquad \leq C\mu\left(\left\{x \in I_k : C2^{-\alpha k/2}\left|L_\nu\big(t^{\alpha/2}f_2^k(t), x\big)\right| > y\right\}\right)\\
&\qquad\qquad \leq C2^{\alpha k}\left|\left\{x \in I_k : C\left|L_\nu\big(t^{\alpha/2}f_2^k(t), x\big)\right| > 2^{\alpha k/2}y\right\}\right|.
\end{aligned}$$

Demos por supuesto el siguiente hecho referente al operador $L_\nu f$ que se probará en un lema posterior: para $p \leq 4$,

$$\|L_\nu f\|_{L^{p,\infty}(dx)} \leq C\|f\|_{L^p(dx)},$$

con C independiente de ν y $f = \chi_E$. Observando que, para $\alpha \geq 0$, se verifica que $p_1 \leq 4$, y haciendo uso de la estimación dada para L_ν, podemos concluir

$$\begin{aligned}
\mu\left(\left\{x \in I_k : |W_{4,n}f_2^k(x)| > \frac{y}{3}\right\}\right) &\leq C2^{\alpha k}\left(\frac{\|x^{\alpha/2}f_2^k(x)\|_{L^{p_1}(dx)}}{2^{\alpha k/2}y}\right)^{p_1}\\
&\sim 2^{\alpha k}\left(\frac{\|f_2^k(x)\|_{L^{p_1}(dx)}}{y}\right)^{p_1} \sim \left(\frac{\|f_2^k(x)\|_{L^{p_1}(x^\alpha)}}{y}\right)^{p_1}.
\end{aligned}$$

Este hecho nos conduce a la finalización de la acotación uniforme (p_1, p_1)-débil restringida para $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(W_{4,n}f_2^k)\chi_{I_k}$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} B_k \cap I_k\right) &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu\left(\left\{x \in I_k : |W_{4,n}(f_2^k, x)| > \frac{y}{3}\right\}\right)\\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} y^{-p_1}\int_{I_k}|f_2^k(x)|^{p_1}x^\alpha\,dx \leq C\left(\frac{\|f\|_{L^{p_1}(x^\alpha)}}{y}\right)^{p_1}.
\end{aligned}$$

Caso b: $p = 4$ $(-1 < \alpha < 0)$.

Al igual que en el *Caso a*, tendremos en cuenta la demostración del Teorema 3.1 con $a = b = 0$, en esta ocasión necesitaremos considerar las estimaciones en las subsecciones 4.1, 4.2 y 4.3 del Capítulo 3. Éstas nos permiten asegurar que W_1, W_2 y $W_{3,n}$ son operadores que verifican la acotación uniforme $(4,4)$-débil restringida. Por tanto, para concluir será suficiente probar esta acotación para el operador $W_{4,n}$.

Caso b.1: Acotación uniforme débil restringida del operador $W_{4,n}$.

Manteniendo la notación del *Caso a.2*, procedemos primero a estudiar la acotación uniforme $(4,4)$-débil restringida de los sumandos $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(W_{4,n}f_1^k + W_{4,n}f_3^k\right)\chi_{I_k}$. Probemos un contenido que nos permita concluir dicha acotación:

(106)
$$(A_k \cup C_k) \cap I_k \subset \{x \in (0,\infty) : Cx^{-\alpha/4}|J_\nu(x^{1/2})|\,\|f\|_{L^4(x^\alpha)} > y\}.$$

Para $W_{4,n}(f_1^k, x)$ con $x \in I_k$ se verifica que $2t < x$, lo que nos da $(x-t)^{-1} \le 2x^{-1}$; así

$$\begin{aligned}|W_{4,n}(f_1^k,x)| &\le Cx^{-\alpha/2}|J_\nu(x^{1/2})| \int_0^{x/2} t^{(\alpha+1)/2}|J'_\nu(t^{1/2})|\frac{f(t)}{x-t}\,dt\\ &\le Cx^{-\alpha/2-1}|J_\nu(x^{1/2})| \int_0^{x/2} t^{(\alpha+1)/2}|J'_\nu(t^{1/2})|f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Puesto que $t < x$ y $-\alpha/4 - 1 < 0$, se puede pasar $x^{-\alpha/4-1}$ al interior de la integral como $t^{-\alpha/4-1}$, obteniéndose una expresión mayor. De este modo

$$|W_{4,n}(f_1^k,x)| \le Cx^{-\alpha/4}|J_\nu(x^{1/2})| \int_0^{x/2} t^{\alpha/4-1/2}|J'_\nu(t^{1/2})|f(t)\,dt.$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Hölder débil, (3), con $p = 4$ y $q = 4/3$ y usando que

$$\|t^{-(3\alpha+2)/4}J'_\nu(t^{1/2})\|_{L^{4/3,\infty}(t^\alpha)} \le C, \tag{107}$$

lo que se probará posteriormente, se tiene

$$\begin{aligned}|W_{4,n}(f_1^k,x)| &\le Cx^{-\alpha/4}|J_\nu(x^{1/2})|\,\|t^{-(3\alpha+2)/4}J'_\nu(t^{1/2})\|_{L^{4/3,\infty}(t^\alpha)}\|f\|_{L^4(t^\alpha)}\\ &\le Cx^{-\alpha/4}|J_\nu(x^{1/2})|\,\|f\|_{L^4(t^\alpha)}.\end{aligned}$$

Comprobemos (107). Para ello utilizaremos, otra vez, la expresión (103) y una descomposición en dos intervalos

$$\begin{aligned}&\|t^{-(3\alpha+2)/4}J'_\nu(t^{1/2})\|_{L^{4/3,\infty}(t^\alpha)}\\ &\le C\left(\|t^{-(3\alpha+2)/4}J_{\nu-1}(t^{1/2})\|_{L^{4/3,\infty}(t^\alpha)} + \|t^{-(3\alpha+2)/4}J_{\nu+1}(t^{1/2})\|_{L^{4/3,\infty}(t^\alpha)}\right)\\ &\qquad\le C\|t^{-(3\alpha+2)/4}J_{\nu-1}(t^{1/2})\chi_{(0,(2(\nu-1))^2]}(t)\|_{L^{4/3,\infty}(t^\alpha)}\\ &\qquad\qquad + C\|t^{-(3\alpha+2)/4}J_{\nu+1}(t^{1/2})\chi_{(0,(2(\nu+1))^2]}(t)\|_{L^{4/3,\infty}(t^\alpha)}\\ &\qquad\qquad + C\|t^{-(3\alpha+2)/4}J_{\nu-1}(t^{1/2})\chi_{[(2(\nu-1))^2,\infty)}(t)\|_{L^{4/3,\infty}(t^\alpha)}\\ &\qquad\qquad + C\|t^{-(3\alpha+2)/4}J_{\nu+1}(t^{1/2})\chi_{[(2(\nu+1))^2,\infty)}(t)\|_{L^{4/3,\infty}(t^\alpha)}.\end{aligned}$$

Empleando de nuevo el Lema 2.7,

$$\begin{aligned}
&\|t^{-(3\alpha+2)/4}J_{\nu-1}(t^{1/2})\chi_{(0,(2(\nu-1))^2]}(t)\|_{L^{4/3,\infty}(t^\alpha)}\\
&\qquad + C\|t^{-(3\alpha+2)/4}J_{\nu+1}(t^{1/2})\chi_{(0,(2(\nu+1))^2]}(t)\|_{L^{4/3,\infty}(t^\alpha)}\\
&\qquad\qquad \le C(\nu-1)^{-(\alpha+1)/2}\|j_n^\alpha(t)\|_{L^{4/3,\infty}(t^\alpha)}\\
&\qquad\qquad\qquad + C(\nu+1)^{-(\alpha+1)/2}\|j_{n+1}^\alpha(t)\|_{L^{4/3,\infty}(t^\alpha)} \le C.
\end{aligned}$$

Las normas restantes se acotan usando las cotas $|J_{\nu-1}(t^{1/2})| \le Ct^{-1/4}$, $|J_{\nu+1}(t^{1/2})| \le Ct^{-1/4}$ y el hecho $t^{-3(\alpha+1)/4} \in L^{4/3,\infty}(t^\alpha)$.

Para $W_{4,n}(f_3^k, x)$ con $x \in I_k$ se verifica $t > 2x$, por lo que $(t-x)^{-1} \le 2t^{-1}$. Así, tendremos

$$\begin{aligned}
|W_{4,n}(f_3^k,x)| &\le Cx^{-\alpha/2}|J_\nu(x^{1/2})| \int_{x/2}^\infty t^{\alpha/2-1/2}|J_\nu'(t^{1/2})||f(t)|\,dt\\
&\le Cx^{-\alpha/4}|J_\nu(x^{1/2})| \int_{x/2}^\infty t^{\alpha/4-1/2}|J_\nu'(t^{1/2})||f(t)|\,dt,
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que pasando $x^{-\alpha/4}$ a la integral como $t^{-\alpha/4}$ aparece una expresión mayor, ya que $\alpha < 0$ y $x < t$. Ahora, siguiendo como con $W_{4,n}f_1^k$, obtenemos

$$|W_{4,n}(f_3^k,x)| \le Cx^{-\alpha/4}|J_\nu(x^{1/2})|\,\|f\|_{L^4(t^\alpha)}.$$

Con lo visto hasta ahora para $|W_{4,n}(f_1^k,x)|$ y $|W_{4,n}(f_3^k,x)|$, con $x \in I_k$, podemos concluir (106). Esto nos conducirá a la acotación uniforme $(4,4)$-débil restringida para $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(W_{4,n}f_1^k + W_{4,n}f_3^k\right)\chi_{I_k}$:

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(A_k \cup C_k)\cap I_k\right)\\
&\qquad \le \mu\left(\left\{x \in (0,\infty) : Cx^{-\alpha/4}|J_\nu(x^{1/2})|\,\|f\|_{L^4(t^\alpha)} > y\right\}\right)\\
&\qquad \le C\left(\frac{\|f\|_{L^4(t^\alpha)}}{y}\right)^4 \|x^{-\alpha/4}J_\nu(x^{1/2})\|_{L^{4,\infty}(x^\alpha)}^4 \le C\left(\frac{\|f\|_{L^4(t^\alpha)}}{y}\right)^4,
\end{aligned}$$

donde para obtener la última desigualdad hemos usado la estimación $\|x^{-\alpha/4}J_\nu(x^{1/2})\|_{L^{4,\infty}(x^\alpha)} \le C$, que comprobamos a continuación. Para ello descomponemos en dos intervalos

$$\begin{aligned}
\|x^{-\alpha/4}J_\nu(x^{1/2})\|_{L^{4,\infty}(x^\alpha)} &\le \|x^{-\alpha/4}J_\nu(x^{1/2})\chi_{(0,(2\nu)^2]}(x)\|_{L^{4,\infty}(x^\alpha)}\\
&\qquad + \|x^{-\alpha/4}J_\nu(x^{1/2})\chi_{[(2\nu)^2,\infty)}(x)\|_{L^{4,\infty}(x^\alpha)}.
\end{aligned}$$

En la primera norma usaremos el Lema 2.7, que nos da

$$\|x^{-\alpha/4}J_\nu(x^{1/2})\chi_{(0,(2\nu)^2]}(x)\|_{L^{4,\infty}(x^\alpha)} \le C\nu^{(\alpha+1)/2}\|j_n^\alpha(x)\|_{L^{4,\infty}(x^\alpha)} \le C$$

La segunda norma se acota, como antes, a partir de $|J_\nu(x^{1/2})| \le Cx^{-1/4}$ y de $x^{-(\alpha+1)/4} \in L^{4,\infty}(x^\alpha)$.

Finalmente, para obtener la estimación

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} B_k \cap I_k\right) \leq C\left(\frac{\|f\|_{L^4(x^\alpha)}}{y}\right)^4$$

procederemos como se hizo en el *Caso a.2*, usando la acotación

$$\|L_\nu f\|_{L^{4,\infty}(dx)} \leq C\|f\|_{L^4(dx)}.$$

□

Probaremos a continuación la acotación de $L_\nu f$ utilizada en la demostración del teorema anterior.

LEMA 4.1. *Sea $\alpha > -1$ y el operador*

$$L_\nu(f,x) = J_\nu(x^{1/2})H(t^{1/2}J'_\nu(t^{1/2})f(t),x),$$

donde H denota la transformada de Hilbert y $\nu = \alpha+2n+2$. Entonces existe C, independiente de ν, tal que

(a)

$$\|L_\nu f\|_{L^p(dx)} \leq C\|f\|_{L^p(dx)}, \ \ f \in L^p(dx), \ \ si\ p < 4,$$

(b)

$$\|L_\nu f\|_{L^{4,\infty}(dx)} \leq C\|f\|_{L^4(dx)}, \ \ f = \chi_E, \ \ si\ p = 4,$$

con E un conjunto de medida finita.

DEMOSTRACIÓN. Comencemos demostrando el apartado (a). Teniendo en cuenta la estimación (32), llegamos a

$$\|L_\nu(f,x)\|_{L^p(dx)} \leq C\|H(t^{1/2}J'_\nu(t^{1/2})f(t),x)\|_{L^p(w_\nu(x))}$$

donde $w_\nu(x) = x^{-p/8}(|x^{1/2}-\nu| + \nu^{1/3})^{-p/4}$. Usando que $w_\nu(x) \in A_p$ uniformemente si $p < 4$ y la estimación $t^{1/2}|J'_\nu(t^{1/2})| \leq Cw_\nu^{-1/p}(t)$ (que se sigue de (33)) concluimos que

$$\|L_\nu f\|_{L^p(dx)} \leq C\|x^{1/2}J'_\nu(x^{1/2})f(x)\|_{L^p(w_\nu(x))} \leq C\|f\|_{L^p(dx)}.$$

Vayamos con el apartado (b). A partir de ahora, por brevedad, denotaremos $\beta_\nu(x) = (|x^{1/2}-\nu| + \nu^{1/3})^{1/4}$. Así, tendremos

$$|L_\nu(f,x)| = |J_\nu(x^{1/2})|\left|H\left(t^{1/2}\frac{J'_\nu(t^{1/2})}{\beta_\nu(t)}\beta_\nu(t)f(t),x\right)\right|.$$

Ahora, sumando y restando $\beta_\nu(x)H\left(t^{1/2}\frac{J'_\nu(t^{1/2})}{\beta_\nu(t)}f(t),x\right)$ en el interior del valor absoluto obtenemos

$$|L_\nu(f,x)| \leq L_{\nu,1}(f,x) + L_{\nu,2}(f,x),$$

con

$$L_{\nu,1}(f,x) = \beta_\nu(x)|J_\nu(x^{1/2})|\left|H\left(t^{1/2}\frac{J'_\nu(t^{1/2})}{\beta_\nu(t)}f(t),x\right)\right|$$

y

$$L_{\nu,2}(f,x) = |J_\nu(x^{1/2})| \left| H\left(t^{1/2}\frac{J'_\nu(t^{1/2})}{\beta_\nu(t)}\left(\beta_\nu(t)-\beta_\nu(x)\right)f(t),x\right)\right|.$$

La acotación uniforme de $L_{\nu,1}f$ es sencilla usando la acotación de la transformada de Hilbert con pesos (Teorema 1.4). De (32), se obtiene la cota $\beta_\nu(x)|J_\nu(x^{1/2})| \le Cx^{-1/8}$ que nos permite dar la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}\|L_{\nu,1}f\|_{L^{4,\infty}(dx)} \le \|L_{\nu,1}f\|_{L^4(dx)} &\le C\left\| H\left(t^{1/2}\frac{J'_\nu(t^{1/2})}{\beta_\nu(t)}f(t),x\right)\right\|_{L^4(x^{-1/2})} \\ &\le C\left\| x^{1/2}\frac{J'_\nu(x^{1/2})}{\beta_\nu(x)}f(x)\right\|_{L^4(x^{-1/2})} \\ &\le C\|x^{1/8}f(x)\|_{L^4(x^{-1/2})} = C\|f\|_{L^4(dx)},\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que el peso $w(x)=x^{-1/2}\in A_4$ y que, por (33), $\left|x^{1/2}\frac{J'_\nu(x^{1/2})}{\beta_\nu(x)}\right| \le Cx^{1/8}$.

La acotación del operador $L_{\nu,2}f$ la realizaremos analizando el comportamiento de la diferencia $(\beta_\nu(t)-\beta_\nu(x))$. Para ello haremos uso de la desigualdad $|a^{1/4}-b^{1/4}| \le |a-b|(a^{3/4}+b^{3/4})^{-1}$, válida para $a,b>0$. Así,

$$\begin{aligned}|\beta_\nu(t)-\beta_\nu(x)| &= |(|t^{1/2}-\nu|+\nu^{1/3})^{1/4} - (|x^{1/2}-\nu|+\nu^{1/3})^{1/4}| \\ &\le \big||t^{1/2}-\nu| - |x^{1/2}-\nu|\big| \\ &\times \left((|t^{1/2}-\nu|+\nu^{1/3})^{3/4} + (|x^{1/2}-\nu|+\nu^{1/3})^{3/4}\right)^{-1} \\ &\le |t^{1/2}-x^{1/2}|(|t^{1/2}-\nu|+\nu^{1/3})^{-3/4} = |t^{1/2}-x^{1/2}|\beta_\nu^{-3}(t).\end{aligned}$$

De esta forma, pasando el valor absoluto al interior de la transformada de Hilbert y teniendo en cuenta que $t^{1/2}/(x^{1/2}+t^{1/2}) \le 1$, tenemos

$$\begin{aligned}L_{\nu,2}(f,x) &\le |J_\nu(x^{1/2})| \int_0^\infty t^{1/2}\frac{|J'_\nu(t^{1/2})|}{(x^{1/2}+t^{1/2})\beta_\nu^4(t)}f(t)\,dt \\ &\le |J_\nu(x^{1/2})| \int_0^\infty |J'_\nu(t^{1/2})|\beta_\nu^{-4}(t)f(t)\,dt.\end{aligned}$$

La desigualdad de Hölder débil, (3), con $p=4$ y $q=4/3$ nos lleva a

$$L_{\nu,2}(f,x) \le |J_\nu(x^{1/2})|\,\|J'_\nu(x^{1/2})\beta_\nu^{-4}(x)\|_{L^{4/3,\infty}(dx)}\|f\|_{L^4(dx)},$$

lo que nos permite concluir

$$\begin{aligned}\|L_{\nu,2}f\|_{L^{4,\infty}(dx)} &\le \|J_\nu(x^{1/2})\|_{L^{4,\infty}(dx)}\|J'_\nu(x^{1/2})\beta_\nu^{-4}(x)\|_{L^{4/3,\infty}(dx)}\|f\|_{L^4(dx)} \\ &\le C\|f\|_{L^4(dx)},\end{aligned}$$

supuesto que

$$\|J_\nu(x^{1/2})\|_{L^{4,\infty}(dx)}\|J'_\nu(x^{1/2})\beta_\nu^{-4}(x)\|_{L^{4/3,\infty}(dx)} \le C. \tag{108}$$

Veamos que, efectivamente, se cumple (108). Descomponiendo, en la primera norma, $(0,\infty)$ en $(0,(\nu/2)^2)$, $((\nu/2)^2,(2\nu)^2)$ y $((2\nu)^2,\infty)$, tendremos que

$$\|J_\nu(x^{1/2})\|_{L^{4,\infty}(dx)} \le T_1 + T_2 + T_3,$$

con

$$T_1 = \|\chi_{(0,(\nu/2)^2)}(x)J_\nu(x^{1/2})\|_{L^{4,\infty}(dx)},$$

$$T_2 = \|\chi_{((\nu/2)^2,(2\nu)^2)}(x)J_\nu(x^{1/2})\|_{L^{4,\infty}(dx)}$$

y

$$T_3 = \|J_\nu(x^{1/2})\chi_{((2\nu)^2,\infty)}(x)\|_{L^{4,\infty}(dx)}.$$

El primer trozo en la estimación (34), tomando $a = 0$, nos permite asegurar que

$$\begin{aligned} T_1 &= \|\chi_{(0,(\nu/2)^2)}(x)J_\nu(x^{1/2})\|_{L^{4,\infty}(dx)} \\ &\le C\nu^{-1/2}(e/4)^\nu \|\chi_{(0,(\nu/2)^2)}(x)\|_{L^{4,\infty}(dx)} \\ &\sim (e/4)^\nu \le C. \end{aligned}$$

Usando la equivalencia del Lema 2.7 (con $r = s = \alpha$), el sumando T_2 se comporta como

$$\begin{aligned} T_2 &\sim \nu^{\alpha+1}\|\chi_{((\nu/2)^2,(2\nu)^2)}x^{-(\alpha+1)/2}J_\nu(x^{1/2})\|_{L^{4,\infty}(dx)} \\ &\sim \nu^{\alpha/2+1}\|\chi_{((\nu/2)^2,(2\nu)^2)}x^{-(\alpha+1)/2}J_\nu(x^{1/2})\|_{L^{4,\infty}(x^\alpha)} \\ &\le C\nu^{(\alpha+1)/2}\|j_n^\alpha(x)\|_{L^{4,\infty}(x^\alpha)} \sim C. \end{aligned}$$

En el intervalo en el que está definido T_3 tenemos que $|J_\nu(x^{1/2})| \le Cx^{-1/4}$; así

$$T_3 \le C\|x^{-1/4}\|_{L^{4,\infty}(dx)} \le C,$$

puesto que $x^{-1/4} \in L^{4,\infty}(dx)$. Para el estudio de la segunda norma débil que aparece en (108) tendremos en cuenta la cota (33) para J'_ν. A partir de ella obtenemos que

$$\|J'_\nu(x^{1/2})\beta_\nu^{-4}(x)\|_{L^{4/3,\infty}(dx)} \le C\|x^{-3/8}\beta_\nu^{-3}(x)\|_{L^{4/3,\infty}(dx)}.$$

Considerando los intervalos $(0,(\nu/2)^2)$, $((\nu/2)^2,(2\nu)^2)$ y $((2\nu)^2,\infty)$ se sigue que

$$\|J'_\nu(x^{1/2})\beta_\nu^{-3}(x)\|_{L^{4/3,\infty}(dx)} \le I_1 + I_2 + I_3;$$

con

$$\begin{aligned} I_1 &= \|\chi_{(0,(\nu/2)^2)}(x)x^{-3/8}\beta_\nu^{-3}(x)\|_{L^{4/3,\infty}(dx)}, \\ I_2 &= \|\chi_{((\nu/2)^2,(2\nu)^2)}(x)x^{-3/8}\beta_\nu^{-3}(x)\|_{L^{4/3,\infty}(dx)} \end{aligned}$$

e

$$I_3 = \|\chi_{((2\nu)^2,\infty)}(x)x^{-3/8}\beta_\nu^{-3}(x)\|_{L^{4/3,\infty}(dx)}.$$

Para I_1, usando que en $(0,(\nu/2)^2)$ es inmediata la estimación $\beta_\nu^{-1}(x) \leq C\nu^{-1/4}$, tenemos que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C\nu^{-3/4}\|\chi_{[0,(\nu/2)^2)}(x)x^{-3/8}\|_{L^{4/3,\infty}(dx)} \\ &\leq C\nu^{-3/4}\|\chi_{[0,(\nu/2)^2)}(x)x^{-3/8}\|_{L^{4/3}(dx)} \leq C. \end{aligned}$$

En I_2 utilizaremos que $\beta_\nu^{-1}(x) \leq |x^{1/2}-\nu|^{-1/4}$ y que

$$\begin{aligned} &\|\chi_{((\nu/2)^2,(2\nu)^2)}(x)|x^{1/2}-\nu|^{-3/4}\|_{L^{4/3,\infty}(dx)} \\ &\qquad = C\|\chi_{(\nu/2,2\nu)}(t)|t-\nu|^{-3/4}\|_{L^{4/3,\infty}(t)} \\ &\qquad \leq C\nu^{3/4}\|\chi_{(\nu/2,2\nu)}(t)|t-\nu|^{-3/4}\|_{L^{4/3,\infty}(dt)} \\ &\qquad = C\nu^{3/4}\|\chi_{(1/2,2)}(z)|z-1|^{-3/4}\|_{L^{4/3,\infty}(dz)} \leq C\nu^{3/4}. \end{aligned}$$

Con esto,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C\|\chi_{((\nu/2)^2,(2\nu)^2)}(x)x^{-3/8}|x^{1/2}-\nu|^{-3/4}\|_{L^{4/3,\infty}(dx)} \\ &\leq C\nu^{-3/4}\|\chi_{((\nu/2)^2,(2\nu)^2)}(x)|x^{1/2}-\nu|^{-3/4}\|_{L^{4/3,\infty}(dx)} \leq C. \end{aligned}$$

Finalizamos con la estimación

$$I_3 \leq C\|\chi_{((2\nu)^2,\infty)}(x)x^{-3/4}\|_{L^{4/3,\infty}(dx)} \leq C,$$

para la que basta observar que, cuando $x > (2\nu)^2$, la función $\beta_\nu^{-1}(x)$ se comporta esencialmente como $x^{-1/8}$, y que $x^{-3/4} \in L^{4/3,\infty}(dx)$. $\square$

CAPÍTULO 5

Resultados de convergencia

1. Introducción

Como se indicó en el primer capítulo de esta memoria, la acotación uniforme en $L^p(u^p\,d\mu)$ del operador suma parcial implica de manera inmediata la convergencia de la serie de Fourier para funciones pertenecientes a la clausura en $L^p(u^p\,d\mu)$ del sistema ortonormal dado. En este capítulo nos centraremos en la identificación de la clausura en $L^p(x^\alpha)$ del sistema ortonormal en $L^2(x^{\alpha+\beta})$ dado por $\{j_n^{\alpha+\beta}\}_{n\geq 0}$, con

$$j_n^{\alpha+\beta}(x) = \sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\,J_{\alpha+\beta+2n+1}(x^{1/2})x^{-(\alpha+\beta+1)/2}.$$

Para que las funciones $j_n^{\alpha+\beta}$ estén en $L^2(x^{\alpha+\beta})$ para cada $n \geq 0$ basta que $\alpha+\beta > -1$.

El problema así descrito equivale al estudio de la clausura de las funciones $\{j_n^{\alpha+\beta}\}_{n\geq 0}$ en los espacios $L^p(u^p(x)x^{\alpha+\beta})$, con $u(x) = x^{-\beta/p}$. El conocimiento de este tipo de espacios será una de las piezas clave para estudiar, en el próximo capítulo, las ecuaciones integrales dobles. Una primera condición que se debe verificar es la pertenencia de nuestro sistema ortonormal a $L^p(x^\alpha)$. A partir del Lema 2.3 tendremos que, para $\alpha+\beta > -1$ y $1 < p < \infty$,

$$j_n^{\alpha+\beta} \in L^p(x^\alpha) \iff \alpha > -1 \text{ y } -\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{\beta}{2}.$$

Este comportamiento nos permite dar la siguiente

Definición 5.1. Para cada α, β y p con $\alpha > -1$, $\alpha+\beta > -1$, $1 < p < \infty$ y

$$-\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{\beta}{2},$$

definimos

$$B_{p,\alpha,\beta} = \overline{\operatorname{span}\{j_n^{\alpha+\beta}(x)\}},$$

donde consideramos la clausura en $L^p(x^\alpha)$.

Esta definición, el Teorema 3.1 y el Teorema 1.2 nos permiten probar el resultado que presentamos a continuación:

PROPOSICIÓN 5.1. *Sea* $\alpha > -1$, $\alpha+\beta > -1$, $\frac{4}{3} < p < 4$ *y*

$$-\frac{\alpha+\beta+1}{2} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{\beta}{2},$$
$$-\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{\beta}{2} < \frac{1}{4}.$$

Entonces,

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n} c_k(f) j_n^{\alpha+\beta} \to f \text{ en } L^p(x^\alpha), \ \forall f \in B_{p,\alpha,\beta}.$$

DEMOSTRACIÓN. Usando el Teorema 1.2 tendremos que

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n} c_k(f) j_n^{\alpha+\beta} \to f \text{ en } L^p(x^\alpha), \ \forall f \in B_{p,\alpha,\beta},$$

si

$$\|S_n f\|_{L^p(x^\alpha)} \le C\|f\|_{L^p(x^\alpha)}, \quad \forall f \in B_{p,\alpha,\beta}, \quad n \ge 0.$$

Esta acotación se sigue de manera inmediata del Teorema 3.1 tomando $\alpha+\beta$ en lugar de α y el peso $u(x) = x^{-\beta/p}$. Así, teniendo en cuenta que $\alpha+\beta > -1$, llegamos a que

$$\|S_n f\|_{L^p(x^\alpha)} \le C\|f\|_{L^p(x^\alpha)}$$
$$\iff \begin{cases} \frac{4}{3} < p < 4, \\ -\frac{\alpha+\beta+1}{2} < (\alpha+\beta+1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right) - \frac{\beta}{p} < \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \\ -\frac{1}{4} < (\alpha+\beta+1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right) - \frac{\beta}{p} < \frac{1}{4} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \frac{4}{3} < p < 4, \\ \alpha > -1, \\ -\frac{\alpha+\beta+1}{2} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) + \frac{\beta}{2}, \\ -\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) + \frac{\beta}{2} < \frac{1}{4}, \end{cases}$$

lo que concluye la demostración. □

Procederemos a lo largo de este capítulo a dar una caracterización más explícita de los espacios $B_{p,\alpha,\beta}$ para determinados valores de p, α y β. A la hora de de obtener dicha caracterización nos será de gran utilidad el siguiente

LEMA 5.1. *Sean* $\alpha > -1$, $\alpha+\beta > -1$ *y* $1 < p < 4$ *tales que*

$$\frac{-1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) - \frac{|\beta|}{2}.$$

Entonces,

$$j_n^\alpha = \sum_{k=n}^{\infty} a_{n,k} j_k^{\alpha+\beta} \tag{109}$$

en casi todo punto y en $L^p(x^\alpha)$, donde

$$a_{n,k} = \frac{2^\beta \sqrt{\alpha+2n+1}\,\sqrt{\alpha+\beta+2k+1}\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta+k+n+1)}{\Gamma(1+k-n)\,\Gamma(1-\beta-k+n)\,\Gamma(\alpha+k+n+2)}. \tag{110}$$

Nota 5.1. Si $\beta \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(1-\beta)/\Gamma(1-\beta-k+n)$ debe ser reemplazado por $-\beta(-\beta-1)(-\beta-2)\dots(1-\beta-k+n)$ en la fórmula (110).

Demostración. En [**42**, Cap. V, 5.21, pág. 139] puede encontrarse la siguiente expresión, válida para μ, ν y $\mu-\nu$ enteros no negativos:

(111)
$$\left(\frac{z}{2}\right)^{-\mu} J_\mu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\nu+2m)\Gamma(1+\mu-\nu)\Gamma(\nu+m)}{m!\,\Gamma(1+\mu-\nu-m)\Gamma(\mu+m+1)} J_{\nu+2m}(z).$$

Tomando $\mu = \alpha+2n+1$ y $\nu = \alpha+\beta+2n+1$ se verificará que μ, ν y $\mu-\nu$ son enteros no negativos si $\beta \notin \mathbb{N}$. Con esta elección de los parámetros, y expresando (111) en términos de las funciones $j_n^{\alpha+\beta}$, tendremos que

$$\begin{aligned} j_n^\alpha(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^\beta\sqrt{\alpha+2n+1}\sqrt{\alpha+\beta+2(m+n)+1}\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta+2n+m+1)}{m!\,\Gamma(1-\beta-m)\Gamma(\alpha+2n+m+2)} j_{m+n}^{\alpha+\beta}(x) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} a_{n,k} j_k^{\alpha+\beta}(x), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos realizado una traslación en el índice.

No es difícil observar que el requerimiento sobre $\mu-\nu$ para tener la serie (111) es puramente formal: permite obtener los coeficientes del desarrollo de una manera más concisa. Si expresamos estos coeficientes de la manera equivalente

$$\frac{(\nu+2m)(\mu-\nu)(\mu-\nu-1)\dots(\mu-\nu-m+1)\Gamma(\nu+m)}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)}$$

no será necesario imponer que $\mu-\nu$ sea un entero no negativo. Esto nos permite tener la expresión (109) para $\beta \in \mathbb{N}$ con la variación dada en la Nota 5.1 para los coeficientes (110).

Con todo lo anterior obtenemos la convergencia en casi todo punto de (109). La convergencia en L^p se seguirá inmediatamente si

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_{n,k}|\, \|j_k^{\alpha+\beta}\|_{L^p(x^\alpha)} < \infty.$$

Si $\beta = r$ con r un entero negativo tendremos que $a_{n,k} = 0$ si $k > n - r$ y por tanto

$$j_n^\alpha(x) = \sum_{k=n}^{n-r} a_{n,k} j_k^{\alpha+r}(x).$$

Puesto que, bajo nuestras hipótesis, $j_k^{\alpha+r}(x) \in L^p(x^\alpha)$, podemos concluir la convergencia de la serie en este caso.

Si β no es un entero negativo, la fórmula de Stirling para la función Gamma nos da que, para cada n fijo,

$$|a_{n,k}| \sim k^{2\beta-3/2}, \quad k \to \infty.$$

A partir del Lema 2.4, con $p < 4$ y $\frac{-1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \frac{\beta}{2}$, tenemos

$$\|j_k^{\alpha+\beta}\|_{L^p(x^\alpha)} \sim k^{-(\alpha+\beta+1)+2(\alpha+1)/p}.$$

Con esto llegamos a que

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_{n,k}| \, \|j_k^{\alpha+\beta}\|_{L^p(x^\alpha)} \sim \sum_{k=n}^{\infty} k^{\beta-\alpha-5/2+2(\alpha+1)/p}.$$

Esta serie será convergente si

$$\beta - \alpha - \frac{5}{2} + \frac{2(\alpha+1)}{p} < -1,$$

lo que equivale a

$$\frac{-1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) - \frac{\beta}{2},$$

que es una de nuestras hipótesis. □

NOTA 5.2. El lema anterior nos está asegurando que, bajo ciertas condiciones sobre p, α y β, se verifica que $B_{p,\alpha,0} \subset B_{p,\alpha,\beta}$.

De aquí en adelante tomaremos $\alpha \geq -1/2$ y denotaremos, como ya hicimos en el capítulo anterior,

$$p_0 = \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+3} \qquad \text{y} \qquad p_1 = \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+1}.$$

En multiples ocasiones aparecerá la condición

$$p_0 < p < p_1,$$

que equivale a

$$-\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) < \frac{1}{4}.$$

2. Los espacios $E_{p,\alpha}$

La expresión

(112)
$$\mathcal{H}_\alpha(j_n^{\alpha+\beta}(t),x) = 2^{-\beta}\frac{\sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(\beta+n+1)}(1-x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x)\chi_{[0,1]}(x),$$

que mostrábamos en el primer capítulo ((22) del Lema 1.3), indica que la transformada de Hankel de $j_n^{\alpha+\beta}$ está soportada en el intervalo $[0,1]$. De este hacho se deduce que no toda función $f\in L^p(x^\alpha)$ con $1<p\le 2$ va a poder ser aproximada por su serie de Fourier-Neumann; al menos deberá verificar que su transformada de Hankel este soportada en $[0,1]$. Nuestro deseo sería, además, obtener resultados para $L^p(x^\alpha)$ con $p>2$, donde $\mathcal{H}_\alpha$ no está definido. Para lograr nuestro objetivo consideraremos un operador íntimamente vinculado con la transformada de Hankel y que caracterizará las funciones que podremos aproximar por su serie de Fourier-Neumann.

Para cada $f\in S^+$ definimos el operador

$$M_\alpha(f,x) = \mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}\mathcal{H}_\alpha f, x), \tag{113}$$

donde S^+ y $\mathcal{H}_\alpha$ están definidos como en la Sección 3 del Capítulo 1. El operador M_α es, en realidad, el multiplicador de la bola unidad asociado a la transformada de Hankel y está bien definido para funciones de S^+. En efecto, dada $f\in S^+$ se tiene, por ser $\mathcal{H}_\alpha$ un isomorfismo de S^+, que $\mathcal{H}_\alpha f\in S^+$ y así $\chi_{[0,1]}\mathcal{H}_\alpha f\in L^2(x^\alpha)$, lo que nos da que $M_\alpha f$ existe para cada $f\in S^+$. La siguiente proposición, cuya demostración puede verse en [**41**], recoge algunas de las propiedades del operador M_α que nos serán útiles más adelante.

Proposición 5.2. *Sea $\alpha\ge -1/2$ y $p_0<p<p_1$. Entonces existe una constante C tal que*

$$\|M_\alpha f\|_{L^p(x^\alpha)} \le C\|f\|_{L^p(x^\alpha)},\ \forall f\in S^+.$$

Por tanto M_α puede ser extendido a un operador acotado en $L^p(x^\alpha)$. Este operador, que también denotamos por M_α, verifica:

(a) $\mathcal{H}_\alpha(M_\alpha f) = \chi_{[0,1]}\mathcal{H}_\alpha f,\ \forall f\in L^2(x^\alpha)\cap L^p(x^\alpha)$.
(b) $M_\alpha^2 f = M_\alpha f,\ \forall f\in L^p(x^\alpha)$.
(c) *Dadas $f\in L^p(x^\alpha)$ y $g\in L^q(x^\alpha)$, con p y q conjugados, se tiene*

$$\int_0^\infty f(x)M_\alpha(g,x)x^\alpha\,dx = \int_0^\infty g(x)M_\alpha(f,x)x^\alpha\,dx.$$

Nota 5.3. Para cada $f\in S^+$, aplicando el Teorema de Fubini al operador $M_\alpha f = \mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}\mathcal{H}_\alpha(f))$ y la fórmula de Lommel,

(114)
$$\int_0^1 J_\alpha(yt)J_\alpha(yx)y\,dy = \frac{1}{t^2-x^2}(tJ_{\alpha+1}(t)J_\alpha(x) - xJ_\alpha(t)J_{\alpha+1}(x)),$$

tendremos

$$\begin{aligned} M_\alpha(f,x) &= \tfrac{1}{2}x^{-\alpha/2+1/2}J_{\alpha+1}(x^{1/2})H(t^{\alpha/2}J_\alpha(t^{1/2})f(t),x) \\ &\quad - \tfrac{1}{2}x^{-\alpha/2}J_\alpha(x^{1/2})H(t^{\alpha/2+1/2}J_{\alpha+1}(t^{1/2})f(t),x) \\ &= W_1(f,x) - W_2(f,x), \end{aligned}$$

donde los operadores W_1 y W_2 son los definidos en (60) y (61) respectivamente. La acotación de M_α que aparece en la Proposición 5.2 se obtiene a partir de la diferencia anterior como en las subsecciones 4.1 y 4.2 (de hecho, allí se obtiene una acotación con pesos de la forma $u(x) = x^a(1+x)^{b-a}$).

El resultado anterior motiva la siguiente

Definición 5.2. Sea $\alpha \geq -1/2$ y $p_0 < p < p_1$. Definimos

$$E_{p,\alpha} = \{f \in L^p(x^\alpha) : M_\alpha f = f\},$$

dotado con la topología inducida por $L^p(x^\alpha)$.

El apartado (b) de la Proposición 5.2 asegura que el operador M_α es una proyección. Por tanto, los espacios $E_{p,\alpha} = M_\alpha(L^p(x^\alpha))$ son la proyección de $L^p(x^\alpha)$ mediante M_α.

El espacio así definido es, en principio, un candidato adecuado para nuestros propósitos. Cada función $f \in E_{p,\alpha} \cap L^2(x^\alpha)$, por (b) de la Proposición 5.2, verifica que su transformada de Hankel está soportada en $[0,1]$. A continuación, mostraremos algunas interesantes propiedades de los espacios $E_{p,\alpha}$; éstas fueron probadas en [**41**], pero por completitud incluimos aquí su demostración.

Proposición 5.3. *Sea $\alpha \geq -1/2$ y $p_0 < s < r < p_1$. Entonces $E_{s,\alpha} \subset E_{r,\alpha}$, donde la inclusión es continua y densa.*

Demostración. Recordemos que para $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$, con p y q conjugados, teníamos

$$\|\mathcal{H}_\alpha f\|_{L^q(x^\alpha)} \leq C\|f\|_{L^p(x^\alpha)}, \quad f \in L^p(x^\alpha).$$

Entonces, para $f \in L^p(x^\alpha)$ con $\frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+3} < p \leq 2$, llegamos a que

$$\begin{aligned} \|M_\alpha f\|_{L^\infty(x^\alpha)} &= \|\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}\mathcal{H}_\alpha f)\|_{L^\infty(x^\alpha)} \\ &\leq C\|\chi_{[0,1]}\mathcal{H}_\alpha f\|_{L^1(x^\alpha)} \leq C\|\mathcal{H}_\alpha f\|_{L^q(x^\alpha)} \leq C\|f\|_{L^p(x^\alpha)}. \end{aligned}$$

Con esto, usando interpolación, podemos concluir que

$$\begin{cases} \|M_\alpha f\|_{L^\infty(x^\alpha)} \leq C\|f\|_{L^p(x^\alpha)}, \text{ si } p_0 < p \leq 2, \\ \|M_\alpha f\|_{L^p(x^\alpha)} \leq C\|f\|_{L^p(x^\alpha)}, \text{ si } p_0 < p < p_1, \end{cases}$$
$$\Rightarrow \|M_\alpha f\|_{L^r(x^\alpha)} \leq C\|f\|_{L^p(x^\alpha)}, \text{ si } p_0 < p \leq r.$$

El mismo tipo de argumentación nos da

$$\begin{cases} \|M_\alpha f\|_{L^r(x^\alpha)} \le C\|f\|_{L^p(x^\alpha)}, \text{ si } p_0 < p \le r, \\ \|M_\alpha f\|_{L^r(x^\alpha)} \le C\|f\|_{L^r(x^\alpha)}, \text{ si } p_0 < r < p_1, \end{cases}$$
$$\Rightarrow \|M_\alpha f\|_{L^r(x^\alpha)} \le C\|f\|_{L^s(x^\alpha)}, \text{ si } p_0 < s \le r < p_1.$$

Ahora, tomando $f \in E_{s,\alpha}$ se tiene que $M_\alpha f = f$ y por tanto $\|f\|_{L^r(x^\alpha)} \le C\|f\|_{L^s(x^\alpha)}$, si $p_0 < s \le r < p_1$. De lo que se deduce que $E_{s,\alpha} \subset E_{r,\alpha}$ para $p_0 < s < r < p_1$.

Para probar que la inclusión es densa consideremos una función $f \in E_{r,\alpha}$. Dado que $L^r(x^\alpha) \cap L^s(x^\alpha)$ es denso en $L^r(x^\alpha)$, tendremos que para cada $\epsilon > 0$ existirá una función $g \in L^r(x^\alpha) \cap L^s(x^\alpha)$ tal que $\|f - g\|_{L^r(x^\alpha)} < \epsilon$. Tomando ahora $h = M_\alpha g$ tendremos

$$\|f - h\|_{L^r(x^\alpha)} = \|M_\alpha(f - g)\|_{L^r(x^\alpha)} \le C\|f - g\|_{L^r(x^\alpha)} < C\epsilon,$$

lo que concluye la prueba. □

La siguiente proposición nos va a decir que el espacio dual de $E_{p,\alpha}$ es isomorfo, en el sentido habitual, a $E_{q,\alpha}$, con p y q conjugados.

Proposición 5.4. *Sea $\alpha \ge -1/2$, $p_0 < p < p_1$, y el operador*

$$\begin{array}{rccc} T: & E_{p,\alpha} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & T(f). \end{array}$$

Entonces existe una única función $g \in E_{q,\alpha}$, con p y q conjugados, tal que

$$T(f) = \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha\,dx, \ \forall f \in E_{p,\alpha}.$$

Además, $\|T\| \sim \|g\|_{L^q(x^\alpha)}$.

Demostración. Usando el Teorema de Hahn-Banach, el operador T puede ser extendido a todo $L^p(x^\alpha)$ preservando su norma, $\|T\|$. Por ser $L^q(x^\alpha)$ el dual de $L^p(x^\alpha)$, existirá una única función $h \in L^q(x^\alpha)$ tal que

$$T(f) = \int_0^\infty f(x)h(x)x^\alpha\,dx, \ \forall f \in L^p(x^\alpha),$$

y además $\|T\| = \|h\|_{L^q(x^\alpha)}$. Consideremos, ahora, la función $g(x) = M_\alpha(f, x)$. Por (b) en la Proposición 5.2 tendremos que $g \in E_{q,\alpha}$. Veamos que esta función g sirve para nuestros propósitos. Sea $f \in E_{p,\alpha}$; usando (c) en la Proposición 5.2, tendremos

$$\begin{aligned} T(f) &= \int_0^\infty f(x)h(x)x^\alpha\,dx = \int_0^\infty M_\alpha(f, x)h(x)x^\alpha\,dx \\ &= \int_0^\infty f(x)M_\alpha(h, x)x^\alpha\,dx = \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha\,dx. \end{aligned}$$

La estimación superior para la norma de $\|T\|$ se obtiene aplicando Hölder, $\|T\| \leq \|g\|_{L^q(x^\alpha)}$. Para la estimación inferior basta tener en cuenta

$$\|T\| = \|h\|_{L^q(x^\alpha)} \geq C\|M_\alpha h\|_{L^q(x^\alpha)} = C\|g\|_{L^q(x^\alpha)}.$$

Falta comprobar la unicidad de g. Sea $2 \leq p < p_1$ y supongamos que existen g y g' en $E_{q,\alpha}$ tales que

$$\int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha\,dx = \int_0^\infty f(x)g'(x)x^\alpha\,dx,\ \forall f \in E_{p,\alpha},$$

o, equivalentemente,

$$\int_0^\infty f(x)(g(x) - g'(x))x^\alpha\,dx = 0,\ \forall f \in E_{p,\alpha}.$$

Tomando $f = g - g' \in E_{q,\alpha} \subset E_{p,\alpha}$ tendremos que $g - g' = 0$ en casi todo punto. El caso $p_0 < p < 2$ se obtiene si observamos que los espacios $E_{p,\alpha}$ son reflexivos por ser subespacios cerrados de un espacio reflexivo. $\square$

Pasemos, a continuación, a probar el resultado fundamental de este capítulo. En él veremos que para ciertos valores p, α y β se verifica $B_{p,\alpha,\beta} = E_{p,\alpha}$. Nótese que para definir los espacios $B_{p,\alpha,\beta}$ hemos considerado $\alpha > -1$ y, sin embargo, hemos tomado $\alpha \geq -1/2$ para definir los espacios $E_{p,\alpha}$. La acotación del operador M_α puede ser estudiada para $\alpha > -1$; así la definición de los espacios $E_{p,\alpha}$ podría extenderse de manera natural hasta $\alpha > -1$. Sin embargo, el operador $\mathcal{H}_\alpha$ para $-1 < \alpha < -1/2$ no tiene tan buenas propiedades como para $\alpha \geq -1/2$. Por ello cabe esperar que el comportamiento de los espacios $E_{p,\alpha}$ para $-1 < \alpha < -1/2$ no sea como en el caso $\alpha \geq -1/2$. Esto justifica que cuando aparezcan los espacios $E_{p,\alpha}$ debamos referirnos a $\alpha \geq -1/2$.

Teorema 5.5. *Sean $\alpha \geq -1/2$, $\beta > -1/2$, $4/3 < p$, con*

$$-\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) < \frac{1}{4}.$$

Si $p < 2$ asumimos, además,

$$-\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) - \frac{|\beta|}{2}.$$

Entonces $B_{p,\alpha,\beta} = E_{p,\alpha}$.

Demostración. *Caso $p = 2$.* Los espacios $B_{2,\alpha,\beta}$ y $E_{2,\alpha}$ están bien definidos. Usando (112) tenemos la igualdad

$$\mathcal{H}_\alpha(M_\alpha(j_n^{\alpha+\beta})) = \mathcal{H}_\alpha(j_n^{\alpha+\beta}),$$

y dado que $\mathcal{H}_\alpha^2 = \mathrm{Id}$, concluimos que

$$M_\alpha(j_n^{\alpha+\beta}) = j_n^{\alpha+\beta}; \tag{115}$$

es decir, se verifica $B_{2,\alpha,\beta} \subseteq E_{2,\alpha}$. Supongamos que no son iguales. El Teorema de Hahn-Banach nos asegura que existirá un operador lineal y continuo sobre $E_{2,\alpha}$, $T \in (E_{2,\alpha})'$, $T \neq 0$, tal que

$$T(j_n^{\alpha+\beta}) = 0, \ \forall n.$$

Usando que $(E_{2,\alpha})' = E_{2,\alpha}$, existirá una única función $\varphi \in E_{2,\alpha}$, $\varphi \neq 0$, tal que

$$\int_0^\infty \varphi j_n^{\alpha+\beta} x^\alpha \, dx = 0, \ \forall n.$$

Entonces, por (115) y (112),

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \varphi j_n^{\alpha+\beta} x^\alpha \, dx = \int_0^\infty \varphi M_\alpha j_n^{\alpha+\beta} x^\alpha \, dx \\ &= \int_0^1 (\mathcal{H}_\alpha \varphi)(\mathcal{H}_\alpha j_n^{\alpha+\beta}) x^\alpha \, dx \\ &= k_n \int_0^1 (\mathcal{H}_\alpha \varphi) P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x)(1-x)^\beta x^\alpha \, dx \end{aligned}$$

para $n \geq 0$. En el Capítulo 1 se vio que los polinomios de Jacobi compuestos con la dilatación $t = 1-2x$, es decir $P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x)$, forman un sistema ortogonal completo con respecto a la medida $(1-x)^\beta x^\alpha \, dx$ sobre $(0,1)$; este hecho nos da que $\mathcal{H}_\alpha \varphi = 0$ sobre $(0,1)$. Dado que $\varphi \in E_{2,\alpha}$, también tendremos que $\mathcal{H}_\alpha \varphi = 0$ en $(1,\infty)$. Por tanto, $\mathcal{H}_\alpha \varphi = 0$ y llegamos a que $\varphi = 0$, lo que es una contradicción.

Caso $p > 2$. Notar que α, β, y p verifican las condiciones de la Definición 5.1. Por el caso precedente, y usando la Proposición 5.3, tenemos $j_n^{\alpha+\beta} \in B_{2,\alpha,\beta} = E_{2,\alpha} \subset E_{p,\alpha}$, lo que nos permite concluir que $B_{p,\alpha,\beta} \subseteq E_{p,\alpha}$.

Sea, ahora, $f \in E_{p,\alpha}$; para cada $\varepsilon > 0$, existe una función $g \in L^2(x^\alpha) \cap L^p(x^\alpha)$ tal que $\|f-g\|_{L^p(x^\alpha)} < \varepsilon$. Consideremos $h = M_\alpha g$; entonces $h \in L^2(x^\alpha) \cap L^p(x^\alpha)$ y $M_\alpha h = h$, luego $h \in E_{2,\alpha} \cap E_{p,\alpha} = B_{2,\alpha,\beta} \cap E_{p,\alpha}$. Puesto que el operador M_α es continuo, se verificará

$$\|f-h\|_{L^p(x^\alpha)} = \|M_\alpha f - M_\alpha g\|_{L^p(x^\alpha)} < C\varepsilon.$$

Como $h \in B_{2,\alpha,\beta}$, existirá $h' \in \operatorname{span}\{j_n^{\alpha+\beta}\}$ tal que $\|h-h'\|_{L^2(x^\alpha)} < \varepsilon$. Además la inclusión $E_{2,\alpha} \subset E_{p,\alpha}$ nos da

$$\|h-h'\|_{L^p(x^\alpha)} < C\|h-h'\|_{L^2(x^\alpha)} < C\varepsilon.$$

Con esto tendremos

$$\|f-h'\|_{L^p(x^\alpha)} \leq \|f-h\|_{L^p(x^\alpha)} + \|h-h'\|_{L^p(x^\alpha)} < C\varepsilon,$$

lo que nos permite concluir la inclusión $E_{p,\alpha} \subseteq B_{p,\alpha,\beta}$.

Caso $p < 2$. Usando el Lema 2.3 y (112) tenemos que $j_n^{\alpha+\beta} \in L^2(x^\alpha)$ y $\mathcal{H}_\alpha(j_n^{\alpha+\beta})$ está soportada en $[0,1]$, por tanto $M_\alpha j_n^{\alpha+\beta} = j_n^{\alpha+\beta}$. Puesto que, por el Lema 2.3, $j_n^{\alpha+\beta} \in L^p(x^\alpha)$, se sigue que $j_n^{\alpha+\beta} \in E_{p,\alpha}$ y por tanto $B_{p,\alpha,\beta} \subseteq E_{p,\alpha}$.

La igualdad se obtendrá si probamos que el único operador $T \in (E_{p,\alpha})'$ tal que $T(f) = 0$ para toda función $f \in B_{p,\alpha,\beta}$ es $T = 0$. Para dicho operador se verificará que $T(j_n^\alpha) = 0$ para $n \geq 0$, puesto que, por el Lema 5.1, $j_n^\alpha \in B_{p,\alpha,\beta}$. Por otro lado, usando dualidad, se tiene que $(E_{p,\alpha})' = E_{q,\alpha}$, lo que nos asegura la existencia de una única función $\varphi \in E_{q,\alpha}$ tal que

$$T(f) = \int_0^\infty \varphi f x^\alpha \, dx, \ \forall f \in E_{p,\alpha}.$$

En particular,

$$\int_0^\infty \varphi j_n^\alpha x^\alpha \, dx = 0, \quad n \geq 0. \tag{116}$$

En nuestras condiciones sobre p y α, los casos precedentes nos aseguran que $B_{q,\alpha,0} = E_{q,\alpha}$ y así $\varphi \in B_{q,\alpha,0}$. Por tanto, usando la Proposición 5.1, tenemos que

$$\varphi = \sum_{n=0}^\infty a_n(\varphi) j_n^\alpha,$$

donde la igualdad se da en $L^p(x^\alpha)$. Este hecho, junto con (116), que nos indica que $a_n(\varphi) = 0$ para $n \geq 0$, permite concluir que $\varphi = 0$, lo que finaliza la prueba. □

3. Algunas propiedades adicionales de los espacios $E_{p,\alpha}$

El Teorema 5.5 nos va a permitir obtener nuevas propiedades relativas a los espacios $E_{p,\alpha}$. Estas propiedades se obtendrán a partir del siguiente resultado.

Corolario 5.6. *Sean $\alpha \geq -1/2$ y $4/3 < p < 4$ verificando*

$$-\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) < \frac{1}{4}.$$

Entonces,

$$S_n f = \sum_{k=0}^n c_k(f) j_k^\alpha \to M_\alpha f \ \text{en} \ L^p(x^\alpha), \ \forall f \in L^p(x^\alpha).$$

Demostración. Sea $f \in L^p(x^\alpha)$; así, haciendo uso de la Proposición 5.2, $M_\alpha f \in L^p(x^\alpha)$ y $M_\alpha^2 f = M_\alpha f$. Por tanto se tiene que $M_\alpha f \in E_{p,\alpha}$. Entonces, usando el Teorema 5.5 y la Proposición 5.1, ambos con $\beta = 0$,

$$S_n(M_\alpha f) \to M_\alpha f \text{ en } L^p(x^\alpha).$$

Con lo anterior basta probar que $S_n(M_\alpha f) = S_n(f)$, pero esto es claro, usando el apartado (c) en la Proposición 5.2,

$$\begin{aligned} c_n(M_\alpha f) &= \int_0^\infty (M_\alpha f) j_n^\alpha x^\alpha \, dx = \int_0^\infty f(M_\alpha j_n^\alpha) x^\alpha \, dx \\ &= \int_0^\infty f j_n^\alpha x^\alpha \, dx = c_n(f). \end{aligned}$$

□

Nótese que el corolario anterior nos está diciendo que la convergencia de la serie de Fourier-Neumann asociada a $\{j_n^\alpha\}_{n\geq 0}$ se produce para toda función $f \in L^p(x^\alpha)$, siempre que el operador $S_n f$ este acotado; solo que para funciones que no están en $E_{p,\alpha}$ la convergencia no es hacia la función f sino hacia $M_\alpha f$.

Veamos ahora las propiedades anunciadas de los espacios $E_{p,\alpha}$.

Corolario 5.7. *Sean $\alpha \geq -1/2$, $\beta < 1/2$, $4/3 < p < 4$ con $\alpha + \beta \geq -1/2$,*

$$-\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) < \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} \text{máx}\left\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} + \frac{\beta}{2}, -\frac{\alpha+1}{2} + \frac{\beta}{2}\right\} &< (\alpha+\beta+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \\ &< \text{mín}\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\beta}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Si $p < 2$ asumimos, además,

$$-\frac{1}{4} - \frac{\beta}{2} < (\alpha+\beta+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right).$$

Entonces,

$$E_{p,\alpha+\beta} \cap L^p(x^\alpha) \subset E_{p,\alpha}.$$

Demostración. Sea $f \in E_{p,\alpha+\beta} \cap L^p(x^\alpha)$. Por el Teorema 5.5 tendremos que

$$E_{p,\alpha+\beta} = B_{p,\alpha+\beta,-\beta},$$

lo cual, aplicando el Corolario 5.1, nos da

$$S_n f = \sum_{k=0}^n c_k(f) j_k^\alpha \to f, \text{ en } L^p(x^{\alpha+\beta}). \tag{117}$$

Puesto que $f \in L^p(x^\alpha)$, el Corolario 5.6 nos permite asegurar que

$$S_n f = \sum_{k=0}^n c_k(f) j_k^\alpha \to M_\alpha f, \text{ en } L^p(x^\alpha). \tag{118}$$

Así, para (117) y (118) la convergencia debe producirse en casi todo punto, al menos para alguna subsucesión de la sumas parciales. Entonces, $f = M_\alpha f$ en casi todo punto, es decir $f \in E_{p,\alpha}$. □

En la demostración del corolario anterior se ha hecho uso de que la convergencia en $L^p(x^\alpha)$ implica la convergencia en casi todo punto para alguna subsucesión. En la próxima sección probaremos que no es necesario tomar una subsucesión sino que la propia sucesión $S_n f$ converge en casi todo punto.

A partir del corolario anterior es posible concluir otra nueva propiedad para los espacios $E_{p,\alpha}$.

COROLARIO 5.8. *Sean $\alpha \geq -1/2$, $-1/2 < \beta < 1/2$, $4/3 < p < 4$ con $\alpha + \beta \geq -1/2$,*

$$\text{máx}\left\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} - \frac{\beta}{2}, -\frac{\alpha+1}{2} - \beta\right\} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) < \text{mín}\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4} - \frac{\beta}{2}\right\},$$

$$\text{máx}\left\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} + \frac{\beta}{2}, -\frac{\alpha+1}{2} + \frac{\beta}{2}\right\} < (\alpha+\beta+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) < \text{mín}\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\beta}{2}\right\}.$$

Si $p < 2$ asumimos, además,

$$-\frac{1}{4} + \frac{\beta}{2} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$$

y

$$-\frac{1}{4} - \frac{\beta}{2} < (\alpha+\beta+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right).$$

Entonces,

$$E_{p,\alpha} \cap L^p(x^{\alpha+\beta}) = E_{p,\alpha+\beta} \cap L^p(x^\alpha).$$

DEMOSTRACIÓN. La inclusión "$\supseteq$" es clara por el Corolario 5.7. La inclusión "$\subseteq$" se sigue también del Corolario 5.7 considerando, en este último, $\alpha + \beta$ en vez de α y $-\beta$ en lugar de β. □

Los resultados que hemos probado hasta ahora nos permiten obtener el siguiente

COROLARIO 5.9. *Sean* $\alpha \geq -1/2$, $-1/2 < \beta < 1/2$, $4/3 < p < 4$ *con* $\alpha + \beta \geq -1/2$,

$$\text{máx}\left\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} - \frac{\beta}{2}, -\frac{\alpha+1}{2} - \beta\right\} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) < \text{mín}\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4} - \frac{\beta}{2}\right\},$$

$$\text{máx}\left\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} + \frac{\beta}{2}, -\frac{\alpha+1}{2} + \frac{\beta}{2}\right\} < (\alpha+\beta+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) < \text{mín}\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\beta}{2}\right\}.$$

Si $p < 2$ *asumimos, además,*

$$-\frac{1}{4} + \frac{\beta}{2} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$$

y

$$-\frac{1}{4} - \frac{\beta}{2} < (\alpha+\beta+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right).$$

Entonces,

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n} c_k(f) j_k^{\alpha+\beta} \to M_{\alpha+\beta} f \ \text{en}\ L^p(x^\alpha),\ \forall f \in L^p(x^\alpha) \cap L^p(x^{\alpha+\beta}).$$

DEMOSTRACIÓN. La Proposición 5.2 (con $\alpha + \beta$ en lugar de α) nos asegura que $M_{\alpha+\beta} f \in L^p(x^{\alpha+\beta})$ y $M_{\alpha+\beta}^2 f = M_{\alpha+\beta} f$, de donde se concluye que $M_{\alpha+\beta} f \in E_{p,\alpha+\beta}$.

La descomposición dada en la Nota 5.3 nos lleva a que

$$M_{\alpha+\beta} f = W_1 f - W_2 f,$$

donde W_1 y W_2 son los operadores descritos en (60) y (61) con α sustituido por $\alpha + \beta$. Así siguiendo las estimaciones en las subsecciones 4.1 y 4.2 llegamos a que $M_{\alpha+\beta} f \in L^p(x^\alpha)$ si

$$-\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \frac{\beta}{2} < \frac{1}{4},$$

lo que se tiene a partir de nuestras hipótesis.

Con lo anterior, tendremos, por el Corolario 5.7, que $M_{\alpha+\beta} f \in E_{p,\alpha}$. Usando, ahora, el Teorema 5.5 y la Proposición 5.1 podemos afirmar que

$$S_n\left(M_{\alpha+\beta} f\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k\left(M_{\alpha+\beta} f\right) j_k^{\alpha+\beta} \to M_{\alpha+\beta} f \ \text{en}\ L^p(x^\alpha).$$

Si comprobamos que

$$S_n\left(M_{\alpha+\beta}f\right) = S_n f \tag{119}$$

habremos finalizado la demostración. El apartado (c) de la Proposición 5.2 (con $\alpha+\beta$ en lugar de α) nos proporciona la siguiente cadena de igualdades de la que podemos deducir inmediatamente (119):

$$\begin{aligned} c_n\left(M_{\alpha+\beta}f\right) &= \int_0^\infty (M_{\alpha+\beta}f) j_n^{\alpha+\beta} x^{\alpha+\beta}\,dx = \int_0^\infty f(M_{\alpha+\beta} j_n^{\alpha+\beta}) x^{\alpha+\beta}\,dx \\ &= \int_0^\infty f j_n^{\alpha+\beta} x^{\alpha+\beta}\,dx = c_n(f). \end{aligned}$$

□

El Teorema 5.5 nos proporciona diferentes bases para los espacios $E_{p,\alpha}$ según los diferentes valores de β. Parece de interés conocer las expresiones para el cambio de base entre $\{j_n^\alpha\}_{n\geq 0}$ y $\{j_n^{\alpha+\beta}\}_{n\geq 0}$ en $E_{p,\alpha}$.

Corolario 5.10. *Sean $\alpha \geq -1/2$, $-1/2 < \beta < 1$, $4/3 < p < 4$ con*

$$\begin{aligned} \text{máx}\left\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}, -\frac{\alpha+1}{2}-\beta\right\} &< (\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) \\ &< \text{mín}\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Si $p<2$ asumimos, además,

$$-\frac{1}{4}+\frac{\beta}{2} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right).$$

Entonces, $\{j_n^\alpha\}_{n\geq 0}$ y $\{j_n^{\alpha+\beta}\}_{n\geq 0}$ son bases del espacio $E_{p,\alpha}$ y el cambio de base viene dado por las expresiones

$$j_n^\alpha = \sum_{k=n}^\infty a_{n,k} j_k^{\alpha+\beta}, \qquad j_n^{\alpha+\beta} = \sum_{k=n}^\infty b_{n,k} j_k^\alpha,$$

donde

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= \frac{2^\beta\sqrt{\alpha+2n+1}\,\sqrt{\alpha+\beta+2k+1}\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta+k+n+1)}{\Gamma(1+k-n)\,\Gamma(1-\beta-k+n)\,\Gamma(\alpha+k+n+2)}, \\ b_{n,k} &= \frac{2^{-\beta}\sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\,\sqrt{\alpha+2k+1}\,\Gamma(1+\beta)\,\Gamma(\alpha+k+n+1)}{\Gamma(1+k-n)\,\Gamma(1+\beta-k+n)\,\Gamma(\alpha+\beta+k+n+2)}. \end{aligned} \tag{120}$$

Demostración. Dado que $j_n^\alpha \in E_{p,\alpha}$ y que, por el Teorema 5.5, $E_{p,\alpha} = B_{p,\alpha,\beta}$, es posible obtener su desarrollo como una serie de Fourier-Neumann de las funciones $\{j_n^{\alpha+\beta}\}_{n\geq 0}$. El Corolario 5.1 nos asegura la convergencia $L^p(x^\alpha)$. De lo anterior tendremos que

$$j_n^\alpha = \sum_{k=0}^\infty a_{n,k} j_k^{\alpha+\beta}$$

en $L^p(x^\alpha)$, donde

$$a_{n,k} = \int_0^\infty j_n^\alpha j_k^{\alpha+\beta} x^{\alpha+\beta}\, dx.$$

De un modo análogo, $j_n^{\alpha+\beta} \in B_{p,\alpha,\beta} = B_{p,\alpha,0}$ y podremos obtener su desarrollo como serie de Fourier-Neumann de las funciones $\{j_n^\alpha\}_{n\geq 0}$, es decir,

$$j_n^{\alpha+\beta} = \sum_{k=0}^\infty b_{n,k} j_k^\alpha$$

en $L^p(x^\alpha)$, donde

$$b_{n,k} = \int_0^\infty j_n^{\alpha+\beta} j_k^\alpha x^\alpha\, dx.$$

Por último, la expresión

$$\int_0^\infty \frac{J_\mu(at)J_\nu(at)}{t^\lambda}\, dt = \frac{a^{\lambda-1}\Gamma(\lambda)\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}(\mu+\nu-\lambda+1)\Big)}{2^\lambda\Gamma\Big(\frac{1}{2}(\lambda+\nu-\mu+1)\Big)\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}(\mu+\nu+\lambda+1)\Big)\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}(\mu+\lambda-\nu+1)\Big)},$$

válida para $\mathrm{Re}(\mu+\nu+1) > \mathrm{Re}(\lambda) > 0$, y que puede verse en [**42**, Cap. XIII, 13.41, pág. 403], nos da $a_{n,k} = b_{n,k} = 0$ para $k < n$ y (120) para $k \geq n$, supuesto que $\beta < 1$. □

Nota 5.4. En las hipótesis convenientes, que no detallaremos, sobre α, β, β' y p se tiene la siguiente expresión para el cambio entre dos bases $\{j_n^{\alpha+\beta}\}_{n\geq 0}$ y $\{j_n^{\alpha+\beta'}\}_{n\geq 0}$ en $E_{p,\alpha}$:

$$j_n^{\alpha+\beta} = \sum_{k=n}^\infty c_{n,k} j_n^{\alpha+\beta'},$$

con

$$c_{n,k} = \frac{2^{-\beta+\beta'}\sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\,\sqrt{\alpha+\beta'+2n+1}\,\Gamma(1+\beta-\beta')\,\Gamma(\alpha+\beta'+k+n+1)}{\Gamma(1+k-n)\,\Gamma(1+\beta-\beta'-k+n)\,\Gamma(\alpha+\beta+k+n+2)}.$$

4. Convergencia en casi todo punto de las series de Fourier-Neumann

Como anunciamos en la sección anterior, es posible obtener un resultado sobre la convergencia en casi todo punto de las series de Fourier-Neumann. El estudio de la convergencia en casi todo de las series de Fourier de sistemas ortonormales suele realizarse bien mediante el estudio del operador maximal,

$$S^*(f,x) = \sup_{n\geq 0} |S_n(f,x)|,$$

cuya acotación en L^p implica la convergencia en casi todo punto, o bien mediante teoremas de equiconvergencia, que comparan la serie de Fourier relativa a un sistema concreto con la serie de Fourier clásica. En nuestro caso la demostración no sigue ninguno de esos modelos.

Considerando el sistema ortonormal en $L^2(x^{\alpha+\beta})$ dado por $\{j_n^{\alpha+\beta}\}_{n\geq 0}$, el resultado que aquí probamos es como sigue:

TEOREMA 5.11. *Sean $\alpha > -1$, $\alpha+\beta > -1$, $\frac{4}{3} < p < 4$, y*

$$-\frac{\alpha+\beta+1}{2} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{\beta}{2},$$
$$-\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{\beta}{2} < \frac{1}{4}.$$

Entonces,

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n} c_k(f) j_k^{\alpha+\beta} \to f \text{ en casi todo punto, } \forall f \in B_{p,\alpha,\beta}.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que $S_n(f,x)$ converge hacia alguna función $g(x)$ en casi todo punto. Esto, junto con la Proposición 5.1, nos da $g = f$ en casi todo punto. Recordemos que

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n} c_k(f) j_k^{\alpha+\beta},$$

donde

$$c_k(f) = \int_0^\infty f(t) j_k^{\alpha+\beta}(t) t^{\alpha+\beta}\, dt.$$

Usando (38) del Lema 2.4 con $\alpha+\beta$ en lugar de α y tomando $r = s = \beta q + \alpha$, tendremos que $x^\beta j_n^{\alpha+\beta} \in L^q(x^\alpha)$ con

$$\|x^\beta j_n^{\alpha+\beta}\|_{L^q(x^\alpha)} \sim n^{-(\alpha+\beta+1)+2(\beta q+\alpha+1)/q} \sim n^{\beta+2(\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}.$$

Así,

$$|c_n(f)| \leq \|f\|_{L^p(x^\alpha)} \|x^\beta j_n^{\alpha+\beta}\|_{L^q(x^\alpha)} \leq C\|f\|_{L^p(x^\alpha)}\, n^{\beta+2(\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}.$$

Utilizaremos ahora la conocida estimación

$$|J_\nu(x)| \leq \frac{2^{-\nu}x^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \qquad \nu > -1/2,$$

que puede verse en [**42**, Cap. III, 3.31, pág. 49]. Con esto se tiene

$$\begin{aligned}|j_n^{\alpha+\beta}(x)| &= \sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\; |J_{\alpha+\beta+2n+1}(x^{1/2})|\; x^{-\frac{\alpha+\beta+1}{2}} \\ &\leq \frac{\sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\; 2^{-(\alpha+\beta+2n+1)}x^n}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)},\end{aligned}$$

lo que, utilizando la fórmula de Stirling, nos da

$$\begin{aligned}|c_n(f) j_n^{\alpha+\beta}(x)| &\leq C\|f\|_{L^p(x^\alpha)}\; \frac{n^{\beta+2(\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+1/2}(x/4)^n}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)} \\ &\sim \|f\|_{L^p(x^\alpha)} \left(\frac{e}{4n}\right)^{2n} n^{-2(\alpha+1)/p} x^n\end{aligned}$$

y así la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) j_n^{\alpha+\beta}(x)$ converge puntualmente para cada $x \in (0,\infty)$. $\square$

Una consecuencia del Teorema anterior es el siguiente análogo del Corolario 5.6:

Corolario 5.12. *Sean $\alpha \geq -1/2$ y $4/3 < p < 4$ verificando*

$$-\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) < \frac{1}{4}.$$

Entonces,

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n} c_k(f) j_k^{\alpha} \to M_\alpha f \text{ en casi todo punto}, \ \forall f \in L^p(x^\alpha).$$

La demostración sigue el mismo patrón que la del Corolario 5.6 cambiando la convergencia en $L^p(x^\alpha)$ por la convergencia en casi todo punto. Con el mismo procedimiento probaríamos el siguiente

Corolario 5.13. *Sean $\alpha \geq -1/2$, $-1/2 < \beta < 1/2$, $4/3 < p < 4$ con $\alpha+\beta \geq -1/2$,*

$$\max\left\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}, -\frac{\alpha+1}{2}-\beta\right\} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}\right\},$$

$$\max\left\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}+\frac{\beta}{2}, -\frac{\alpha+1}{2}+\frac{\beta}{2}\right\} < (\alpha+\beta+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}+\frac{\beta}{2}\right\}.$$

Si $p < 2$ asumimos, además,

$$-\frac{1}{4}+\frac{\beta}{2} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)$$

y

$$-\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2} < (\alpha+\beta+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right).$$

Entonces, $\forall f \in L^p(x^\alpha) \cap L^p(x^{\alpha+\beta})$,

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n} c_k(f) j_k^{\alpha+\beta} \to M_{\alpha+\beta} f \text{ en casi todo punto.}$$

CAPÍTULO 6

Ecuaciones integrales dobles

1. Introducción

En algunas aplicaciones relacionadas con el potencial, el electromagnetismo o la teoría de la radiación acústica aparecen ciertas ecuaciones integrales en las que la función incógnita satisface una condición sobre una parte del rango $(0,\infty)$ y otra diferente sobre el resto. Este tipo de ecuaciones son conocidas como ecuaciones integrales dobles. Un caso importante son las denominadas ecuaciones integrales dobles de tipo Titchmarsh:

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\int_0^\infty t^\beta f(t) J_\alpha(xt)\,dt = g(x), & \text{si } 0 < x < 1, \\ \displaystyle\int_0^\infty f(t) J_\alpha(xt)\,dt = 0, & \text{si } x > 1, \end{array}\right. \tag{121}$$

donde J_α denota, como siempre, la función de Bessel de orden α, g es una función dada y f es la función incógnita.

Existe muchos métodos de resolución de este tipo de ecuaciones, pero la mayor parte de ellos son formales. Por ejemplo, pueden ser resueltas utilizando transformadas de Mellin o algún otro tipo de transformadas integrales. También pueden ser reducidas a ecuaciones integrales de tipo Fredholm. Habitualmente estos métodos nos permiten obtener la función f mediante una expresión integral; pueden verse en [**37**, pág. 337], [**32**, pág. 65], [**19**] y [**11**, pág. 76]. Otro método consiste en utilizar series de Fourier-Neumann; véanse a este respecto [**38**] y [**39**], el primero de ellos con una amplia bibliografía, pero el estudio que se realiza en ellos es puramente formal. Por esta razón nos hemos planteado rigorizar el uso de estas series en la resolución de las ecuaciones integrales dobles de tipo Titchmarsh.

A fin de conseguir nuestro objetivo reformularemos la ecuación (121) para obtener una descripción de la misma en términos de operadores definidos sobre ciertos espacios L^p; sobre estos espacios resolveremos la ecuación reformulada. También identificaremos la solución como una serie de Fourier-Neumann convergente en L^p.

Dada una función g definida sobre $[0,1]$, la extensión dada por $g(x) = 0$ para cada $x > 1$ la denotaremos por $\chi_{[0,1]}g$, haciendo uso de un pequeño abuso de notación.

A lo largo de este capítulo consideraremos funciones definidas en $[0,1]$ y en $(0,\infty)$, y con diversas medidas $d\mu$ y $d\tilde{\mu}$; por ello denotaremos los espacios L^p correspondientes como $L^p([0,1],d\mu)$ y $L^p((0,\infty),d\tilde{\mu})$.

2. La ecuación doble

Recordemos que, para $\alpha > -1$, hemos definido la transformada de Hankel, $\mathcal{H}_\alpha$, como

$$\mathcal{H}_\alpha(f,x) = \frac{x^{-\alpha/2}}{2}\int_0^\infty f(t)J_\alpha(\sqrt{xt})t^{\alpha/2}\,dt, \quad x>0,$$

y el operador M_α como

$$M_\alpha f = \mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}\mathcal{H}_\alpha f).$$

De esta forma (y teniendo en cuenta que, de algún modo, $\mathcal{H}_\alpha^2 = \mathrm{Id}$) una manera alternativa de expresar que $\mathcal{H}_\alpha f$ está soportada en $[0,1]$ es decir que $M_\alpha f = f$; esto puede tener sentido incluso aunque $\mathcal{H}_\alpha f$ no esté definido.

Haciendo uso de estos operadores reformularemos las ecuaciones integrales dobles. Con un simple cambio de notación podemos escribir (121) como

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x^{-\alpha/2}}{2}\displaystyle\int_0^\infty t^\beta f(t)J_\alpha(\sqrt{xt})t^{\alpha/2}\,dt = g(x), & \text{si } 0<x<1,\\ \dfrac{x^{-\alpha/2}}{2}\displaystyle\int_0^\infty f(t)J_\alpha(\sqrt{xt})t^{\alpha/2}\,dt = 0, & \text{si } x>1. \end{array}\right. \tag{122}$$

La segunda ecuación en (122) nos está diciendo que $\operatorname{supp}(\mathcal{H}_\alpha f) \subseteq [0,1]$; es decir, $M_\alpha f = f$, siempre que f pertenezca a un espacio $L^p((0,\infty),x^\alpha\,dx)$ conveniente.

La primera ecuación en (122) puede entenderse como

$$\mathcal{H}_\alpha(t^\beta f)\chi_{[0,1]} = \chi_{[0,1]}g.$$

Usando que, bajo ciertas circunstancias, $\mathcal{H}_\alpha$ es un operador inversible, se obtiene la ecuación equivalente

$$M_\alpha(t^\beta f,x) = \mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}g,x).$$

Por conveniencia multiplicaremos ambos lados por el factor $x^{-\beta}$, para tener

$$x^{-\beta}M_\alpha(t^\beta f,x) = x^{-\beta}\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}g,x).$$

Reuniendo todo lo anterior, nuestro interés se centrará en resolver, sobre los espacios $L^p((0,\infty),x^\alpha\,dx)$, la que denominaremos ecuación doble

$$\left\{\begin{array}{l} x^{-\beta}M_\alpha(t^\beta f,x) = x^{-\beta}\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}g,x),\\ M_\alpha(f,x) = f(x). \end{array}\right. \tag{123}$$

En un sentido estricto, (122) y (123), no son exactamente equivalentes si no exigimos que las funciones pertenezcan a un espacio conveniente. Sin embargo, es interesante notar que, para cualquier aplicación física práctica, la interpretación de una ecuación integral doble y su solución como en (122) es equivalente a su interpretación como en (123).

Junto con $\mathcal{H}_\alpha$ y M_α, consideraremos los operadores $M_{\alpha,\beta}$ y $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ dados por

$$\begin{aligned} M_{\alpha,\beta}(f,x) &= x^{-\beta} M_\alpha(t^\beta f, x), \\ \mathcal{H}_{\alpha,\beta}(g,x) &= x^{-\beta}\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]} g, x). \end{aligned}$$

Utilizando estos operadores, la ecuación doble (123) puede ser escrita como

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\alpha,\beta} f = \mathcal{H}_{\alpha,\beta} g, \\ M_\alpha f = f. \end{array} \right. \tag{124}$$

Estos operadores están bien definidos, por ejemplo, si $f \in S^+$ y $g \in C^\infty([0,1])$.

Veamos ahora que $M_{\alpha,\beta}$ es acotado en la norma de $L^p((0,\infty), x^\alpha\, dx)$, bajo ciertas condiciones sobre α, β y p. Este hecho nos permite extenderlo como un operador acotado a todo el espacio $L^p((0,\infty), x^\alpha\, dx)$. Con un argumento similar extendemos $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ a un operador acotado de $L^p([0,1], x^\alpha\, dx)$ en $L^p((0,\infty), x^\alpha\, dx)$.

Proposición 6.1. *Sea $\alpha \geq -1/2$, $\beta \geq 0$ y $1 < p < \infty$ verificando*

$$-\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \beta < \frac{1}{4}.$$

Entonces,

$$\|M_{\alpha,\beta} f\|_{L^p((0,\infty),x^\alpha\, dx)} \leq C \|f\|_{L^p((0,\infty),x^\alpha\, dx)}, \qquad f \in L^p((0,\infty), x^\alpha\, dx).$$

Demostración. La Nota 5.3 nos permite expresar

$$M_{\alpha,\beta}(f,x) = x^{-\beta} W_1(t^\beta f(t), x) - x^{-\beta} W_2(t^\beta f(t), x).$$

Entonces, usando la estimación $|J_\alpha(x)| \leq C x^{-1/2}$, $\forall x \geq 0$, la acotación en $L^p((0,\infty), x^\alpha\, dx)$ de la diferencia anterior, bajo nuestras hipótesis sobre p, se sigue como en el Teorema 3.1 (en concreto, las subsecciones 4.1 y 4.2 del Capítulo 3). □

Nota 6.1. Se puede comprobar que en la proposición anterior las condiciones sobre p son, además de suficientes, necesarias.

La acotación de $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ se realizará en la siguiente proposición.

Proposición 6.2. *Sea $\alpha \geq -1/2$, $\beta \geq 0$ y $1 < p < \infty$ verificando*

$$\frac{\beta}{2} \leq (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \beta < \frac{\alpha+1}{2}.$$

Entonces,

$$\|\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g\|_{L^p((0,\infty),x^\alpha\,dx)} \le C\|g\|_{L^p([0,1],x^\alpha\,dx)}, \qquad g \in L^p([0,1],x^\alpha\,dx).$$

DEMOSTRACIÓN. Tomando $\mu = 2\beta + \alpha + \frac{3}{2} - \frac{2(\alpha+1)}{p}$ tendremos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g\|_{L^p((0,\infty),x^\alpha\,dx)} &= \|x^{-\beta+(\alpha+1)/p}\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}g)\|_{L^p((0,\infty),\frac{dx}{x})}\\ &= \|x^{-\mu/2+\alpha/2+3/4}\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}g)\|_{L^p((0,\infty),\frac{dx}{x})}.\end{aligned}$$

Eligiendo $r = s = p$ en el Teorema 1.5 y observando que

$$\frac{\beta}{2} \le (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \beta \Longrightarrow \max\left\{\frac{1}{p}, 1 - \frac{1}{p}\right\} \le \mu$$

y

$$(\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \beta < \frac{\alpha+1}{2} \iff \mu < \alpha + \frac{3}{2}$$

podemos concluir

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g\|_{L^p((0,\infty),x^\alpha\,dx)} &\le C\|x^{\mu/2+\alpha/2+1/4}\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}g)\|_{L^p((0,\infty),\frac{dx}{x})}\\ &= C\|x^{\beta+(\alpha+1)(1-1/p)}\chi_{[0,1]}g\|_{L^p((0,\infty),\frac{dx}{x})}\\ &= C\|x^{\beta+(\alpha+1)(1-2/p)}\chi_{[0,1]}g\|_{L^p((0,\infty),x^\alpha\,dx)}\\ &\le C\|g\|_{L^p([0,1],x^\alpha\,dx)},\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de $\beta + (\alpha+1)(1-2/p) \ge 0$, que es equivalente a la hipótesis $\frac{\beta}{2} \le (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \beta$. □

Con esto, la ecuación doble (124) es un problema bien propuesto en el siguiente sentido: dada $g \in L^p([0,1],x^\alpha\,dx)$, ¿existe solución en $f \in L^p((0,\infty),x^\alpha\,dx)$?, ¿es única?

Consideremos $g(x) = 2^\beta \frac{\sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x)$ para $x \in (0,1)$. El Lema 1.3 nos permite asegurar que, bajo ciertas hipótesis para α y β, la solución de (121), y por tanto de la ecuación doble (124), es $f(t) = j_n^{\alpha+\beta}(t)$.

Este hecho motiva que nos planteemos el siguiente esquema para resolver la ecuación doble (124): desarrollaremos $g \in L^p([0,1],x^\alpha\,dx)$ como una serie de Fourier-Jacobi. Para ello usaremos los polinomios de Jacobi clásicos trasladados al intervalo $[0,1]$ tal y como se vieron en el primer capítulo de esta memoria. Tomaremos el desarrollo $g = \sum_{n=0}^\infty a_n p_n^{(\alpha,\beta)}$. De este modo, la solución será $f = \sum_{n=0}^\infty b_n j_n^{\alpha+\beta}$, donde los coeficientes b_n vendrán dados explícitamente en términos de los coeficientes a_n de la serie de Fourier-Jacobi asociada a g. Se probará que la serie asociada a f es convergente en $L^p((0,\infty),x^\alpha\,dx)$ construyendo un operador, que denotaremos por $L_{\alpha,\beta}$, que transforme series de Fourier-Jacobi en series de Fourier-Neumann.

Para asegurarnos la convergencia en $L^p([0,1], x^\alpha\, dx)$ de la serie de Fourier-Jacobi asociada a g haremos uso del Teorema 1.3.

COROLARIO 6.3. *Sea* $\alpha \geq -1/2$, $\beta \geq 0$, $1 < p < \infty$,

$$-\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) < \frac{1}{4},$$

y

$$-\frac{1}{4} < \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) + \frac{\beta}{2} < \frac{1}{4}.$$

Entonces, las series de Fourier-Jacobi verifican

$$\lim_{n\to\infty} S_n g = g$$

en $L^p([0,1], x^\alpha\, dx)$, *para* $g \in L^p([0,1], x^\alpha\, dx)$.

DEMOSTRACIÓN. Será suficiente hacer un cambio de variable en Teorema 1.3 y tomar en él $a = 0$ y $b = -\beta/p$. (Véase el comentario posterior al Teorema 1.3 en la página 16.) $\square$

3. La solución de la ecuación

En esta sección introduciremos un nuevo operador, que denotaremos por $L_{\alpha,\beta}$, y estableceremos algunas de sus propiedades. Este operador será el que nos dé la solución de la ecuación doble (124). Intentemos encontrar, razonadamente, una expresión para este operador.

El operador $L_{\alpha,\beta}$ debe transformar series de Fourier-Jacobi en series de Fourier-Neumann. Para que ocurra esto es suficiente con que

$$L_{\alpha,\beta}(R_n P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2t), x) = j_n^{\alpha+\beta}(x),$$

para alguna constante R_n. Vamos a intentar describir $L_{\alpha,\beta}$ como composición de dos operadores, es decir, $L_{\alpha,\beta} = B \circ A$.

El Lema 1.3 nos permite asegurar que

$$\mathcal{H}_{\alpha+\beta}(j_n^{\alpha+\beta}(x), t) = \sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\, P_n^{(\alpha+\beta,0)}(1-2t)\chi_{[0,1]}(t).$$

Usando que la transformada de Hankel es autoinversa se tiene que

$$\mathcal{H}_{\alpha+\beta}(\sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\, P_n^{(\alpha+\beta,0)}(1-2t)\chi_{[0,1]}(t), x) = j_n^{\alpha+\beta}(x).$$

Por tanto, si consideramos $Bh = \mathcal{H}_{\alpha+\beta}(h\chi_{[0,1]})$ tendremos un operador que, salvo constantes, transforma $P_n^{(\alpha+\beta,0)}$ en $j_n^{\alpha+\beta}$. Llegaremos a una expresión para $L_{\alpha,\beta}$ si encontramos A que aplique, salvo constantes, $P_n^{(\alpha,\beta)}$ en $P_n^{(\alpha+\beta,0)}$. Pero esto es precisamente lo que hace el operador de Erdélyi-Kober, definido como

$$(125) \qquad I_{\delta,\varepsilon}(h(u), t) = \frac{t^{-(\delta+\varepsilon)}}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^t (t-u)^{\varepsilon-1} u^\delta h(u)\, du, \quad 0 < x < 1,$$

si $\delta > -1$ y $\varepsilon > 0$. Siguiendo [**12**, Cap. XIII, 13.1, pág. 191], se verifica

$$I_{\alpha,\varepsilon}(P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2u),t) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\varepsilon+n+1)} t^{\alpha+\varepsilon} P_n^{(\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon)}(1-2t).$$

Por tanto, tomaremos $A = I_{\alpha,\beta}$.

De este modo, dada g, una función conveniente en $[0,1]$, definimos el operador $L_{\alpha,\beta} g$ mediante la expresión

$$L_{\alpha,\beta}(g,x) = \frac{1}{2^{\beta+1}\Gamma(\beta)} \int_0^1 \frac{J_{\alpha+\beta}(\sqrt{xt})}{(xt)^{\alpha/2+\beta/2}} \int_0^t g(u)(t-u)^{\beta-1} u^\alpha \, du \, dt, \qquad x > 0,$$

si $\beta > 0$, y $L_{\alpha,0} g = \mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]} g)$. En la definición de $L_{\alpha,\beta}$ hemos añadido el factor $2^{-\beta}$ por conveniencia en la notación. En nuestro primer resultado estableceremos que $L_{\alpha,\beta}$ es un operador acotado de $L^p([0,1], x^\alpha \, dx)$ en $L^p((0,\infty), x^\alpha \, dx)$:

Teorema 6.4. *Sea $\alpha \geq -1/2$, $\beta \geq 0$ y $1 < p < \infty$ verificando*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \leq \frac{\beta}{2\alpha+3}.$$

Entonces,

$$\|L_{\alpha,\beta} g\|_{L^p((0,\infty), x^\alpha \, dx)} \leq C \|g\|_{L^p([0,1], x^\alpha \, dx)}, \qquad g \in L^p([0,1], x^\alpha \, dx).$$

Antes de comenzar su demostración probaremos el siguiente

Lema 6.1. *Sea $\alpha \geq -1/2$, $\beta \geq 0$ y $1 < p < \infty$, verificando*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \leq \frac{\beta}{2\alpha+3}.$$

Entonces,

$$\|\mathcal{H}_{\alpha+\beta}(\chi_{[0,1]} h)\|_{L^p((0,\infty), x^\alpha \, dx)} \leq C \|h\|_{L^p([0,1], x^\alpha \, dx)}, \; h \in L^p([0,1], x^\alpha \, dx).$$

Demostración. Tomando $\mu = \alpha + \beta + \frac{3}{2} - \frac{2(\alpha+1)}{p}$ tendremos

$$\|\mathcal{H}_{\alpha+\beta}(\chi_{[0,1]} h)\|_{L^p((0,\infty), x^\alpha \, dx)} = \|x^{-\mu/2+(\alpha+\beta)/2+3/4} \mathcal{H}_{\alpha+\beta}(\chi_{[0,1]} h)\|_{L^p((0,\infty), \frac{dx}{x})}.$$

Es fácil comprobar que nuestras hipótesis sobre α, β y p implican

$$\text{máx}\left\{\frac{1}{p}, 1 - \frac{1}{p}\right\} \leq \mu < \alpha + \beta + \frac{3}{2}.$$

Entonces, eligiendo $r = s = p$ en el Teorema 1.5, podemos obtener

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}_{\alpha+\beta}(\chi_{[0,1]}h)\|_{L^p((0,\infty),x^\alpha\,dx)}\\ \le C\|x^{\mu/2+(\alpha+\beta)/2+1/4}\mathcal{H}_{\alpha+\beta}(\chi_{[0,1]}h)\|_{L^p((0,\infty),\frac{dx}{x})}\\ = C\|x^{\alpha+\beta+1-2(\alpha+1)/p}h\|_{L^p([0,1],x^\alpha\,dx)}.\end{aligned}$$

Usando que

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\le\frac{\beta}{2\alpha+3}\implies \alpha+\beta+1-\frac{2(\alpha+1)}{p}\ge 0$$

finalizamos. □

Demostración del Teorema 6.4. Para $\beta = 0$, ya que $L_{\alpha,0}g = \mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}g)$, el Lema 6.1 nos prueba el resultado. Si $\beta > 0$, recordemos que $L_{\alpha,\beta}g = 2^{-\beta}\mathcal{H}_{\alpha+\beta}(\chi_{[0,1]}I_{\alpha,\beta}g)$, donde $I_{\alpha,\beta}$ es el operador de Erdélyi-Kober definido en (125). Es un hecho conocido que $I_{\alpha,\beta}$ es acotado en $L^p([0,1],x^\alpha\,dx)$ si $\alpha > -1$, $\beta > 0$ y $1 < p < \infty$. Por completitud, ofrecemos una sencilla demostración de este hecho. Mediante un cambio de variable tenemos

$$I_{\alpha,\beta}(g,x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-z)^{\beta-1}z^\alpha g(xz)\,dz;$$

con esto, utilizando la desigualdad integral de Minkowski,

$$\begin{aligned}\|I_{\alpha,\beta}g\|_{L^p([0,1],x^\alpha\,dx)}&\le\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-z)^{\beta-1}z^\alpha\|g(xz)\|_{L^p([0,1],x^\alpha\,dx)}\,dz\\ &\le\|g\|_{L^p([0,1],x^\alpha\,dx)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-z)^{\beta-1}z^{\alpha-(\alpha+1)/p}\,dz\\ &=C\|g\|_{L^p([0,1],x^\alpha\,dx)},\end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\|g(xz)\|_{L^p([0,1],x^\alpha\,dx)}\le z^{-(\alpha+1)/p}\|g\|_{L^p([0,1],x^\alpha\,dx)}$$

y

$$\int_0^1(1-z)^{\beta-1}z^{\alpha-(\alpha+1)/p}\,dz=B(\beta,(\alpha+1)(1-1/p))<\infty.$$

De esta manera $I_{\alpha,\beta}$ es acotado. Ahora, usando el Lema 6.1 se concluye la demostración. □

En lo que resta de capítulo escribiremos $P^\uparrow \le Q$ con el significado $P < Q$. Con esta notación tendremos que

$$\max\{A,B^\uparrow\}\le M \iff A\le M \text{ y } B<M,$$

lo que nos permitirá expresar las hipótesis de los teoremas que siguen de un modo más compacto.

COROLARIO 6.5. *Sea* $\alpha \geq -1/2$, $\beta \geq 0$ *y* $1 < p < \infty$ *verificando*

$$\text{máx}\left\{\frac{-\beta}{2\alpha+3}, \left(\frac{-1}{4(\alpha+1)}\right)^{\uparrow}\right\} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{p} < \text{mín}\left\{\frac{1}{4(\alpha+1)}, \frac{1-2\beta}{4}\right\}.$$

Entonces, dada $g \in L^p([0,1], x^\alpha\, dx)$, *tenemos*

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(g) p_n^{(\alpha,\beta)},$$

donde

$$a_n(g) = \int_0^1 g(x) p_n^{(\alpha,\beta)}(x) x^\alpha (1-x)^\beta\, dx,$$

en $L^p([0,1], x^\alpha\, dx)$, *y*

$$L_{\alpha,\beta} g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n j_n^{\alpha+\beta},$$

donde

$$b_n = 2^{-\beta} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)^{1/2}\, (n!)^{1/2}}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)^{1/2}\, \Gamma(\beta+n+1)^{1/2}} a_n(g),$$

en $L^p((0,\infty), x^\alpha\, dx)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $g \in L^p([0,1], x^\alpha\, dx)$. Es fácil ver que, bajo las hipótesis sobre α, β y p, podemos aplicar el Corolario 6.3 de forma que

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(g) p_n^{(\alpha,\beta)}$$

en $L^p([0,1], x^\alpha\, dx)$, con

$$a_n(g) = \int_0^1 g(x) p_n^{(\alpha,\beta)}(x) x^\alpha (1-x)^\beta\, dx.$$

Por el Teorema 6.4, $L_{\alpha,\beta}$ es un operador continuo de $L^p([0,1], x^\alpha\, dx)$ en $L^p((0,\infty), x^\alpha\, dx)$. Entonces,

$$L_{\alpha,\beta} g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(g) L_{\alpha,\beta} p_n^{(\alpha,\beta)},$$

donde la convergencia se da en $L^p((0,\infty), x^\alpha\, dx)$. Ahora, considerando la expresión (ver [**12**, Cap. XIII, 13.1, pág. 191])

$$I_{\alpha,\beta}(P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2t), x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} P_n^{(\alpha+\beta,0)}(1-2x)$$

y (22) en el Lema 1.3 (con parámetros $\alpha+\beta$ y 0 en vez de α y β, respectivamente) tenemos

$$\mathcal{H}_{\alpha+\beta}(j_n^{\alpha+\beta}(t),x) = \sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\,P_n^{(\alpha+\beta,0)}(1-2x)\chi_{[0,1]}(x),$$

de manera que

$$\mathcal{H}_{\alpha+\beta}(\chi_{[0,1]}P_n^{(\alpha+\beta,0)}(1-2t),x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta+2n+1}}j_n^{\alpha+\beta}(x) \tag{126}$$

(usando que $\mathcal{H}_{\alpha+\beta}^2 = \mathrm{Id}$ en L^2). Esto nos da

$$\begin{aligned} L_{\alpha,\beta}&(P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2t),x) \\ &= 2^{-\beta}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\sqrt{\alpha+\beta+2n+1}\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}j_n^{\alpha+\beta}(x) \end{aligned} \tag{127}$$

si $\beta > 0$. En el caso $\beta = 0$, (126) y $L_{\alpha,0}g = \mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}g)$ proporcionan (127). En términos de los polinomios ortonormales $p_n^{(\alpha,\beta)}$, esto significa

$$L_{\alpha,\beta}p_n^{(\alpha,\beta)} = 2^{-\beta}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)^{1/2}\,(n!)^{1/2}}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)^{1/2}\,\Gamma(\beta+n+1)^{1/2}}j_n^{\alpha+\beta};$$

así

$$L_{\alpha,\beta}g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(g)2^{-\beta}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)^{1/2}\,(n!)^{1/2}}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)^{1/2}\,\Gamma(\beta+n+1)^{1/2}}j_n^{\alpha+\beta}$$

en $L^p((0,\infty),x^\alpha\,dx)$. □

Antes de continuar, escribamos el Lema 1.3 en términos de M_α, $M_{\alpha,\beta}$ y $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$. Es claro, a partir de (22), que $\mathcal{H}_\alpha j_n^{\alpha+\beta}$ está soportada en $[0,1]$, con lo que

$$M_\alpha(j_n^{\alpha+\beta}) = j_n^{\alpha+\beta}. \tag{128}$$

Teniendo en cuenta (7) y la relación (23) tenemos

$$\begin{aligned} M_{\alpha,\beta}(j_n^{\alpha+\beta}) &= x^{-\beta}M_\alpha(t^\beta j_n^{\alpha+\beta}) = x^{-\beta}\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}\mathcal{H}_\alpha(t^\beta j_n^{\alpha+\beta})) \\ &= x^{-\beta}\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}d_np_n^{(\alpha,\beta)}) = d_n\mathcal{H}_{\alpha,\beta}p_n^{(\alpha,\beta)} \end{aligned} \tag{129}$$

con

$$d_n = 2^\beta\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)^{1/2}\,\Gamma(\beta+n+1)^{1/2}}{\Gamma(\alpha+n+1)^{1/2}\,(n!)^{1/2}}.$$

De esta manera el resultado principal de esta sección es como sigue:

TEOREMA 6.6. *Sea $\alpha \ge -1/2$, $0 \le \beta < 1$ y $1 < p < \infty$ verificando*

$$\begin{aligned} \max&\left\{\frac{-\beta}{2\alpha+3},\left(\frac{-1}{4(\alpha+1)}\right)^{\uparrow}\right\} \le \frac{1}{2}-\frac{1}{p} \\ &< \min\left\{\frac{1-4\beta}{4(\alpha+1)},\frac{1-2\beta}{4}\right\}. \end{aligned} \tag{130}$$

Entonces, para cada $g \in L^p([0,1], x^\alpha\, dx)$, $f = L_{\alpha,\beta} g$ es una solución en $L^p((0,\infty), x^\alpha\, dx)$ de la ecuación doble

$$\begin{cases} M_{\alpha,\beta} f = \mathcal{H}_{\alpha,\beta} g, \\ M_\alpha f = f. \end{cases}$$

Demostración. Sea $g \in L^p([0,1], x^\alpha\, dx)$ y $f = L_{\alpha,\beta} g$. Es claro que

$$(130) \Longrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \beta < \frac{1}{4}, \\ \frac{\beta}{2} \le (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \beta < \frac{\alpha+1}{2}, \end{cases}$$

por lo que podemos aplicar las Proposiciones 6.1 y 6.2. Es evidente que (130) nos permite asegurar que $L_{\alpha,\beta}$ es acotado (por el Teorema 6.4). Entonces, usando el Corolario 6.5, cuyas hipótesis también vienen implicadas por (130), y (129) tenemos

$$\begin{aligned} M_{\alpha,\beta} f &= \lim_{n\to\infty} M_{\alpha,\beta}\Big(\sum_{k=0}^{n} b_k j_k^{\alpha+\beta}\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}_{\alpha,\beta}\Big(\sum_{k=0}^{n} b_k d_k p_k^{(\alpha,\beta)}\Big) = \mathcal{H}_{\alpha,\beta} g, \end{aligned}$$

puesto que $b_k d_k = a_k(g)$. Ahora, usando la Proposición 6.1 con $\beta = 0$, el Corolario 6.5 y (128) llegamos a

$$M_\alpha f = \lim_{n\to\infty} M_\alpha\Big(\sum_{k=0}^{n} b_k j_k^{\alpha+\beta}\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k j_k^{\alpha+\beta} = f.$$

□

4. Unicidad de la solución

Usando los resultados relativos a la convergencia de las series de Fourier-Neumann en los espacios $E_{p,\alpha}$ contenidos en el capítulo anterior es posible probar el siguiente resultado sobre la unicidad de la solución de la ecuación doble (124):

Teorema 6.7. *Sea $\alpha \ge -1/2$, $0 \le \beta < 1$ y $1 < p < \infty$ verificando*

$$(131) \quad \max\left\{\frac{-\beta}{2\alpha+3}, \left(\frac{2\beta-1}{4(\alpha+1)}\right)^{\uparrow}\right\} \le \frac{1}{2} - \frac{1}{p} < \min\left\{\frac{1-4\beta}{4(\alpha+1)}, \frac{1-2\beta}{4}\right\}.$$

Entonces,

$$f = L_{\alpha,\beta} g$$

es la única solución en $L^p((0,\infty), x^\alpha\,dx)$ de la ecuación doble

$$\begin{cases} M_{\alpha,\beta} f = \mathcal{H}_{\alpha,\beta} g, \\ M_\alpha f = f. \end{cases}$$

Demostración. Puesto que en nuestras hipótesis sobre α y β se verifica

$$-\frac{1}{4(\alpha+1)} \le \frac{2\beta-1}{4(\alpha+1)}$$

tendremos que (131) implica (130) y, por tanto, podremos hacer uso del Teorema 6.6. Veamos que con (131) también es posible utilizar la Proposición 5.1 y el Teorema 5.5. Observando que

$$\frac{-\beta}{2\alpha+3} \le \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \Longrightarrow -\frac{\alpha+\beta+1}{2} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) + \frac{\beta}{2},$$

y

$$\begin{aligned} &\frac{2\beta-1}{4(\alpha+1)} < \frac{1}{2} - \frac{1}{p} < \frac{1-4\beta}{4(\alpha+1)} \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow -\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) + \frac{\beta}{2} < \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

bastará ver que se cumple $\frac{4}{3} < p < 4$ para tener las hipótesis de la Proposición 5.1. La condición $p < 4$ se tiene inmediatamente a partir de

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{p} < \frac{1-2\beta}{4}.$$

Para concluir que $\frac{4}{3} < p$ usaremos que

$$-\frac{1}{4} < \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \iff \frac{4}{3} < p$$

y

$$-\frac{1}{4} < \max\left\{\frac{-\beta}{2\alpha+3}, \frac{2\beta-1}{4(\alpha+1)}\right\}. \tag{132}$$

Veamos que, efectivamente, se cumple (132). Supongamos que no se verifica, es decir, que se cumple

$$\begin{aligned} \frac{-\beta}{2\alpha+3} &\le -\frac{1}{4}, \\ \frac{2\beta-1}{4(\alpha+1)} &\le -\frac{1}{4}; \end{aligned}$$

esto nos dará

$$\begin{aligned} 2\alpha+3 &\le 4\beta, \\ \alpha+2\beta &\le 0, \end{aligned}$$

respectivamente. Estas desigualdades implican, de manera inmediata, $\alpha \leq -3/4$, lo que contradice la condición $\alpha \geq -1/2$. Para llegar a las hipótesis del Teorema 5.5 basta tener en cuenta que

$$\frac{2\beta-1}{4(\alpha+1)} < \frac{1}{2} - \frac{1}{p} < \frac{1-4\beta}{4(\alpha+1)} \Longrightarrow -\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) < \frac{1}{4}$$

y

$$\frac{2\beta-1}{4(\alpha+1)} < \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \iff -\frac{1}{4} < (\alpha+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) - \frac{\beta}{2}.$$

De acuerdo con el Teorema 6.6, $L_{\alpha,\beta}g$ es una solución de la ecuación doble. Veamos que, en nuestras hipótesis, ésta es la única solución. Si f es una solución se tiene que

$$\begin{cases} M_{\alpha,\beta}f = \mathcal{H}_{\alpha,\beta}g, \\ M_\alpha f = f, \end{cases}$$

en $L^p((0,\infty), x^\alpha\,dx)$. En particular, $f \in E_{p,\alpha}$. Por el Teorema 5.5 y la Proposición 5.1, podemos desarrollar f como una serie de Fourier-Neumann de $\{j_n^{\alpha+\beta}\}_{n\geq 0}$ convergente en $L^p((0,\infty), x^\alpha\,dx)$, es decir,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(f) j_n^{\alpha+\beta}.$$

Probando que los coeficientes $b_n(f)$ están unívocamente determinados concluiremos de manera inmediata la unicidad de la solución.

A partir de (129) y dado que $M_{\alpha,\beta}$ es un operador continuo en $L^p((0,\infty), x^\alpha\,dx)$ tendremos

$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g = M_{\alpha,\beta}f = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(f) d_n \mathcal{H}_{\alpha,\beta} p_n^{(\alpha,\beta)}.$$

Bajo nuestras hipótesis sobre α, β y p no es difícil comprobar, usando el Lema 2.3, que $x^\beta j_k^{\alpha+\beta} \in L^q((0,\infty), x^\alpha\,dx)$, donde q es, como siempre, el conjugado de p. De esta manera el operador

$$T(h) = \int_0^\infty x^\beta j_k^{\alpha+\beta}(x) h(x) x^\alpha\,dx$$

definido de $L^p((0,\infty), x^\alpha\,dx)$ en $\mathbb{R}$ es continuo. Entonces,

$$\int_0^\infty x^\beta j_k^{\alpha+\beta}(x) \mathcal{H}_{\alpha,\beta}(g,x) x^\alpha\,dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(f) d_n \int_0^\infty x^\beta j_k^{\alpha+\beta}(x) \mathcal{H}_{\alpha,\beta}(p_n^{(\alpha,\beta)}, x) x^\alpha\,dx.$$

Ahora, usando la fórmula de multiplicación para la transformada de Hankel dada en (16) y la definición de $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$, junto con (22) y la ortogonalidad para los polinomios de Jacobi, tendremos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^\beta j_k^{\alpha+\beta}(x)\mathcal{H}_{\alpha,\beta}(p_n^{(\alpha,\beta)},x)x^\alpha\,dx&\\ &= \int_0^\infty j_k^{\alpha+\beta}(x)\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}p_n^{(\alpha,\beta)},x)x^\alpha\,dx\\ &= r_k\int_0^1(1-x)^\beta p_k^{(\alpha,\beta)}(x)p_n^{(\alpha,\beta)}(x)x^\alpha\,dx = r_k\delta_{kn}\end{aligned}$$

con $r_k = 1/d_k$. Por tanto,

$$\int_0^\infty x^\beta j_n^{\alpha+\beta}(x)\mathcal{H}_{\alpha,\beta}(g,x)x^\alpha\,dx = b_n(f),$$

lo que concluye la demostración. $\square$

CAPÍTULO 7

Los operadores de Bochner-Riesz para una modificación de la transformada de Hankel

1. Introducción

A lo largo de esta memoria hemos descrito el operador suma parcial n-ésima, S_n, asociado a $\{j_n^\alpha\}_{n\geq 0}$ como

$$S_n f = W_1 f - W_2 f + W_{3,n} f - W_{4,n} f.$$

En la Nota 5.3 vimos que

$$M_\alpha f = \mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}\mathcal{H}_\alpha f) = W_1 f - W_2 f.$$

La fórmula de Lommel (114), descrita en la nota antes citada, puede reescribirse, a partir de la igualdad

$$zJ'_\alpha(z) - \alpha J_\alpha(z) = -zJ_{\alpha+1}(z),$$

como

$$\int_0^1 J_\alpha(yt)J_\alpha(yx)y\,dy = \frac{1}{t^2-x^2}(xJ'_\alpha(x)J_\alpha(t) - tJ'_\alpha(t)J_\alpha(x)).$$

Con esto podemos concluir

$$-W_{3,n}f + W_{4,n}f = M_{\alpha,2n+2}f,$$

donde el operador $M_{\alpha,k}$ viene dado como el multiplicador de la bola unidad para la siguiente modificación de la transformada de Hankel:

$$\mathcal{H}_\alpha^k(f,x) = \frac{x^{-\alpha/2}}{2}\int_0^\infty f(t)J_{\alpha+k}(\sqrt{xt})t^{\alpha/2}\,dt, \quad x>0; \tag{133}$$

es decir,

$$M_{\alpha,k}f = \mathcal{H}_\alpha^k(\chi_{[0,1]}\mathcal{H}_\alpha^k f). \tag{134}$$

(Notar que $M_\alpha = M_{\alpha,0}$.) Así,

$$S_n f = M_\alpha f - M_{\alpha,2n+2}f,$$

y, por tanto, la acotación uniforme de $S_n f$ en $L^p(x^\alpha)$ (donde por $L^p(x^\alpha)$ volvemos a denotar el espacio $L^p((0,\infty), x^\alpha\,dx)$) se obtiene inmediatamente a partir de la acotación de $M_\alpha f$ y de la acotación uniforme de $M_{\alpha,2n+2}f$ en $L^p(x^\alpha)$. Así es como procedimos en el Capítulo 3.

Nos pareció una cuestión de interés plantearnos el estudio de los operadores de Bochner-Riesz para esta modificación de la transformada de Hankel; es decir, los operadores descritos, en un principio para funciones de S^+, como

$$M^{\delta}_{\alpha,k} f = \mathcal{H}^k_\alpha \left((1-x)^\delta_+ \mathcal{H}^k_\alpha f\right), \tag{135}$$

donde $(1-x)_+ = \max\{0, 1-x\}$ y $\delta > 0$ (notar que estos operadores generalizan a $M_{\alpha,k}$, puesto que $M_{\alpha,k} = M^0_{\alpha,k}$). En particular centramos nuestra atención en el estudio de la acotación uniforme en $L^p(x^\alpha)$ de este tipo de operadores.

Operadores de este tipo se presentan al analizar los operadores de Bochner-Riesz para la transformada de Fourier en espacios de norma mixta sobre $\mathbb{R}^n$. En el estudio referente a la transformada de Fourier aparece un valor de δ, que se denota por δ_0 y que se denomina índice crítico, que nos separa el conjunto de δ's en dos. En uno de ellos se tiene acotación para $1 \le p \le \infty$, en el otro la acotación se produce en un rango acotado de valores de p.

En primer lugar obtendremos la acotación uniforme en $L^p(x^\alpha)$ de $M^\delta_{\alpha,k}$ cuando $\alpha \ge 0$ y $\delta > \delta_0$, donde $\delta_0 = (2\alpha+1)/2$ es el índice crítico en este caso. Para obtener esta estimación haremos uso de un producto de convolución adecuado.

Finalmente abordaremos el caso $0 < \delta \le \delta_0$. Utilizaremos un resultado sobre interpolación de familias analíticas de operadores para concluir la acotación uniforme de $M^\delta_{\alpha,k}$ en un rango óptimo de valores de p.

2. Acotación uniforme por encima del índice crítico

Antes de enunciar nuestro primer resultado definiremos un producto de convolución que será la pieza clave para obtener la acotación uniforme del operador $M^\delta_{\alpha,k}$, si $\delta > \delta_0$.

Tomemos el operador de translación T^x, con $x \ge 0$, definido, para funciones f apropiadas, como

$$T^x(f,t) = c(\alpha) \int_0^\pi f(w) \operatorname{sen}^{2\alpha}\theta \, d\theta \tag{136}$$

donde $w^2 = x^2 + t^2 - 2xt\cos\theta$, $x, t \ge 0$ y $c(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)}$.

Veamos una propiedad de T^x que nos será de gran utilidad:

Lema 7.1. *Sean $1 \le p \le \infty$ y $\alpha > -1/2$. Entonces,*

$$\|T^x(f,t)\|_{L^p(t^{2\alpha+1})} \le \|f\|_{L^p(t^{2\alpha+1})}, \quad \forall x \in (0,\infty). \tag{137}$$

Demostración. Un cambio de variable nos permite afirmar que

$$T^x(f,t) = \int_0^\infty D_\alpha(x,t,z) f(z) z^{2\alpha+1}\, dz$$

donde

$$D_\alpha(x,t,z) = 2^{2\alpha-1}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)}(xtz)^{-2\alpha}(A(x,t,z))^{2\alpha-1},$$
$$\forall x,t,z \in (0,\infty),$$

con $A(x,t,z)$ el área del triángulo cuyos lados tienen longitudes x, t y z, si este triángulo existe, y 0, en otro caso. Se observa fácilmente que la función $D_\alpha(x,t,z)$ es simétrica respecto a las tres variables y que $D_\alpha(x,t,z) \geq 0$, para $x,t,z \in (0,\infty)$. La relación

$$\int_0^\pi \frac{J_\alpha(yw)}{(yw)^\alpha}\operatorname{sen}^{2\alpha}\theta\, d\theta = 2^\alpha\Gamma(\alpha+1/2)\sqrt{\pi}\frac{J_\alpha(yx)}{(yx)^\alpha}\frac{J_\alpha(yt)}{(yt)^\alpha},$$

válida para $x,y,t \in (0,\infty)$ y $\alpha > -1/2$, que puede verse en [**42**, Cap. XI, 11.41, pág. 367], nos lleva (nuevamente mediante un cambio de variable) a que

$$\int_0^\infty \frac{J_\alpha(zy)}{(zy)^\alpha}D_\alpha(x,t,z)z^{2\alpha+1}\,dz = 2^\alpha\Gamma(\alpha+1)\frac{J_\alpha(yx)}{(yx)^\alpha}\frac{J_\alpha(yt)}{(yt)^\alpha}.$$

Con esto, tomando límites cuando $y \to 0$, deducimos que

$$\int_0^\infty D_\alpha(x,t,z)z^{2\alpha+1} = 1. \tag{138}$$

Esta propiedad de la función $D_\alpha(x,t,z)$ nos permitirá establecer (137). Probaremos (137) para $p=1$ y $p=\infty$; el resto de valores de p pueden obtenerse por interpolación. Si $p=1$, teniendo en cuenta la positividad de la función D_α y (138) llegamos a

$$\begin{aligned}\|T^x(f,t)\|_{L^1(t^{2\alpha+1})} &= \int_0^\infty \left|\int_0^\infty D_\alpha(x,t,z)f(z)z^{2\alpha+1}\,dz\right| t^{2\alpha+1}\,dt\\ &\leq \int_0^\infty \left(\int_0^\infty D_\alpha(x,t,z)|f(z)|z^{2\alpha+1}\,dz\right)t^{2\alpha+1}\,dt\\ &= \int_0^\infty |f(z)|z^{2\alpha+1}\left(\int_0^\infty D_\alpha(x,t,z)t^{2\alpha+1}\,dt\right)dz\\ &= \|f\|_{L^1(t^{2\alpha+1})}.\end{aligned}$$

Si $f \in L^\infty(t^{2\alpha+1})$, a partir de (138) tenemos

$$\|T^x(f,t)\|_{L^\infty(t^{2\alpha+1})} \leq \|f\|_{L^\infty(t^{2\alpha+1})}.$$

□

Con este operador de traslación definimos el producto de convolución

$$h * g(x) = \int_0^\infty g(t)T^x(h,t)t^{2\alpha+1}\,dt. \tag{139}$$

No es díficil comprobar, intercambiando el orden de integración, que $h * g = g * h$. Aplicando este hecho, el lema anterior y la desigualdad integral de Minkowski se obtiene la estimación

$$\|h * g\|_{L^p(x^{2\alpha+1})} \leq \|h\|_{L^1(x^{2\alpha+1})}\|g\|_{L^p(x^{2\alpha+1})}, \tag{140}$$

válida para $1 \leq p \leq \infty$.

El producto de convolución definido en (139) y la estimación dada para él en (140) nos permitirán probar el siguiente resultado relativo a los operadores $M_{\alpha,k}^\delta$:

Teorema 7.1. *Sean $\alpha \geq 0$, $\delta > \delta_0 = (2\alpha+1)/2$ y $1 \leq p \leq \infty$. Consideremos la familia de operadores $M_{\alpha,k}^\delta$ definidos como en (135). Entonces*

$$\|M_{\alpha,k}^\delta f\|_{L^p(x^\alpha)} \leq C\|f\|_{L^p(x^\alpha)}, \;\; f \in L^p(x^\alpha), \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Antes de comenzar su demostración encontraremos, en el siguiente lema, una expresión más satisfactoria para los operadores $M_{\alpha,k}^\delta$. En ella aparecerán los polinomios ultraesféricos de orden α, que denotaremos por $C_k^{(\alpha)}$, con $k = 0, 1, \dots$ y $\alpha \geq 0$. Como es habitual, si $\alpha = 0$ consideraremos en su lugar los polinomios de Chebyshev. La definición de estos polinomios, así como múltiple información sobre ellos, puede encontrarse en [**36**].

Lema 7.2. *Sean $\alpha > -1/2$, $\delta > -1$ y $f \in S^+$. Entonces,*

$$M_{\alpha,k}^\delta(f,x) = \frac{x^{-\alpha/2}}{4}\int_0^\infty f(t)t^{\alpha/2}K_{\alpha+k}^\delta(x,t)\,dt \tag{141}$$

con

$$K_{\alpha+k}^\delta(x^2,t^2) = 2(xt)^\alpha \int_0^\pi j_{\alpha+\delta+1}(w)c_k^\alpha(\cos\theta)\operatorname{sen}^{2\alpha}\theta\,d\theta, \tag{142}$$

donde $w^2 = x^2 + t^2 - 2xt\cos\theta$,

$$c_k^\alpha(x) = \frac{2^{\alpha-1}k!\Gamma(\alpha)}{\pi\Gamma(2\alpha+k)}C_k^{(\alpha)}(x),$$

y

$$j_{\alpha+\delta+1}(x) = 2^\delta\Gamma(\delta+1)\frac{J_{\alpha+\delta+1}(x)}{x^{\alpha+\delta+1}}.$$

Demostración. Para cada función $f \in S^+$, aplicando Fubini en la definición dada en (135) de los operadores $M_{\alpha,k}^\delta$, tendremos

$$M_{\alpha,k}^\delta(f,x) = \frac{x^{-\alpha/2}}{4}\int_0^\infty f(t)t^{\alpha/2}K_{\alpha+k}^\delta(x,t)\,dt,$$

donde

$$K_{\alpha+k}^\delta(x,t) = \int_0^1 (1-s)^\delta J_{\alpha+k}(\sqrt{xs})J_{\alpha+k}(\sqrt{ts})\,ds. \tag{143}$$

Veamos que $K^\delta_{\alpha+k}(x^2,t^2)$ puede describirse como en (142). Para ello utilizaremos la expresión

$$\int_0^\pi \frac{J_\alpha(w)}{w^\alpha} c_k^\alpha(\cos\theta)\operatorname{sen}^{2\alpha}\theta\, d\theta = \frac{J_{\alpha+k}(x)}{x^\alpha}\frac{J_{\alpha+k}(t)}{t^\alpha},$$

válida para $\alpha > -1/2$, con w y c_k^α definidos como en el enunciado del lema y que puede encontrarse en [**42**, Cap. XI, 11.41, pág. 367]. Así, mediante una cambio de variable, tendremos

$$\begin{aligned} &K^\delta_{\alpha+k}(x^2,t^2)\\ &\quad = 2\int_0^1 r(1-r^2)^\delta J_{\alpha+k}(xr)J_{\alpha+k}(tr)\,dr\\ &\quad = 2(xt)^\alpha \int_0^1 r^{2\alpha+1}(1-r^2)^\delta \left(\int_0^\pi \frac{J_\alpha(rw)}{(rw)^\alpha}c_k^\alpha(\cos\theta)\operatorname{sen}^{2\alpha}\theta\,d\theta\right)dr. \end{aligned}$$

Intercambiando el orden de integración y aplicando la fórmula de Sonine (ver [**42**, Cap. XII, 12.11, pág. 373])

$$J_{\nu+\mu+1}(z) = \frac{z^{\nu+1}}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\int_0^1 J_\mu(zr)r^{\mu+1}(1-r^2)^\nu\,dr,$$

que se cumple para $\operatorname{Re}(\mu) > -1$ y $\operatorname{Re}(\nu) > -1$, podemos concluir

$$\begin{aligned} &K^\delta_{\alpha+k}(x^2,t^2)\\ &\quad = 2(xt)^\alpha \int_0^\pi w^{-\alpha}c_k^\alpha(\cos\theta)\operatorname{sen}^{2\alpha}\theta\left(\int_0^1 r^{\alpha+1}(1-r^2)^\delta J_\alpha(rw)\,dr\right)d\theta\\ &\quad = 2(xt)^\alpha\int_0^\pi j_{\alpha+\delta+1}(w)c_k^\alpha(\cos\theta)\operatorname{sen}^{2\alpha}\theta\,d\theta. \end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 7.1. Un simple cambio de variable en (141) nos permite ver que

(144)
$$\|M^\delta_{\alpha,k}f\|_{L^p(x^\alpha)} = C\left\|x^{-\alpha}\int_0^\infty f(t^2)t^{\alpha+1}K^\delta_{\alpha+k}(x^2,t^2)\,dt\right\|_{L^p(x^{2\alpha+1})},$$

donde $K^\delta_{\alpha+k}$ es como en (142). Ahora, utilizando la estimación $|c_k^\alpha(x)| \le 1$, que se sigue inmediatamente de [**36**, Teorema 7.33.1] para $\alpha \ge 0$, tenemos

$$\left|K^\delta_{\alpha+k}(x^2,t^2)\right| \le C\,(xt)^\alpha\int_0^\pi |j_{\alpha+\delta+1}(w)|\operatorname{sen}^{2\alpha}\theta\,d\theta.$$

De lo anterior y usando (139) se deduce que

$$\begin{aligned}\left| x^{-\alpha} \int_0^\infty f(t^2) t^{\alpha+1} K^\delta_{\alpha+k}(x^2, t^2)\, dt \right| \\ &\le C \int_0^\infty |f(t^2)| \int_0^\pi |j_{\alpha+\delta+1}(w)| \operatorname{sen}^{2\alpha}\theta \, d\theta t^{2\alpha+1}\, dt \\ &= C \int_0^\infty g(t) T^x(|j_{\alpha+\delta+1}|, t) t^{2\alpha+1}\, dt \\ &\le C |j_{\alpha+\delta+1}| * g(x),\end{aligned}$$

donde $g(t) = |f(t^2)|$. Ahora, la igualdad (144) y la acotación (140) nos permiten concluir

$$\begin{aligned}\|M^\delta_{\alpha,k} f\|_{L^p(x^\alpha)} &\le C \|\, |j_{\alpha+\delta+1}| * g \,\|_{L^p(x^{2\alpha+1})} \\ &\le C \|j_{\alpha+\delta+1}\|_{L^1(x^{2\alpha+1})} \|g\|_{L^p(x^{2\alpha+1})}.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que, en nuestras hipótesis sobre δ y p, se verifica

$$\|j_{\alpha+\delta+1}\|_{L^1(x^{2\alpha+1})} \le C,$$

y observando que $\|g\|_{L^p(x^{2\alpha+1})} = C\|f\|_{L^p(x^\alpha)}$, tendremos el resultado. □

3. Acotación uniforme por debajo del índice crítico

Una vez obtenido el resultado anterior parece natural preguntarse por la acotación uniforme del operador $M^\delta_{\alpha,k}$ para $0 < \delta \le \delta_0$. En esta sección vamos a demostrar el siguiente resultado, referido a este rango de valores de δ:

TEOREMA 7.2. *Sean $\alpha \ge 0$, $0 < \delta \le \delta_0$ y $1 \le p \le \infty$. Consideremos la familia de operadores $M^\delta_{\alpha,k}$ definidos como en (135). Entonces,*

$$\|M^\delta_{\alpha,k} f\|_{L^p(x^\alpha)} \le C\|f\|_{L^p(x^\alpha)},\ \ f \in L^p(x^\alpha),\ \ k \in \mathbb{N},$$

si y sólo si

$$\frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+3+2\delta} < p < \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+1-2\delta}. \tag{145}$$

Para realizar la demostración de este resultado haremos uso del conocido Teorema de interpolación de familias analíticas de operadores de Stein, que presentamos a continuación adaptado a nuestro espacio de medida. Las definiciones que aquí damos y el Teorema de Stein pueden verse en [**33**].

Una familia de operadores $\{T_z\}$ dependiendo de un parámetro complejo z que varía en la banda $0 \le \operatorname{Re} z \le 1$ se dice analítica si verifica:

(a) Para cada z, T_z es una transformación lineal de funciones simples de $(0,\infty)$ a funciones medibles de $(0,\infty)$.

(b) Si ϕ y ψ son funciones simples de $(0,\infty)$, entonces la función

$$\Phi(z) = \int_0^\infty T_z(\psi, x)\phi(x)\, dx$$

es analítica en $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$ y continua en $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$.

Diremos que una familia analítica $\{T_z\}$ es de crecimiento admisible si $\Phi(z)$ es de crecimiento admisible; es decir, si

$$\sup_{|y|\leq r} \sup_{0\leq x\leq 1} \log|\Phi(x+iy)| \leq Ae^{ar}$$

donde $a < \pi$ y A es una constante. Ambas, A y a, pueden depender de las funciones ϕ y ψ.

Así, el Teorema de interpolación de Stein es como sigue:

Teorema 7.3 (Stein). *Sea $\{T_z\}$ una familia analítica de operadores lineales de crecimiento admisible definida en la banda $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$. Asumamos $1 \leq p_0, p_1, \tilde{p}_0, \tilde{p}_1 \leq \infty$ y*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \qquad \frac{1}{\tilde{p}} = \frac{1-t}{\tilde{p}_0} + \frac{t}{\tilde{p}_1},$$

donde $0 \leq t \leq 1$. Supongamos, además, que

$$\|T_{iy} f\|_{L^{\tilde{p}_0}(x^\alpha)} \leq A_0(y)\|f\|_{L^{p_0}(x^\alpha)} \tag{146}$$

y

$$\|T_{1+iy} f\|_{L^{\tilde{p}_1}(x^\alpha)} \leq A_1(y)\|f\|_{L^{p_1}(x^\alpha)} \tag{147}$$

para funciones simples f, verificándose

$$\log|A_i(y)| \leq Ae^{a|y|}, \;\; a < \pi, \;\; i = 0, 1. \tag{148}$$

Entonces, podemos concluir que

$$\|T_t f\|_{L^{\tilde{p}}(x^\alpha)} \leq A_t\|f\|_{L^p(x^\alpha)} \tag{149}$$

donde

$$\log A_t \leq \int_{\mathbb{R}} \omega(1-t, y)\log A_0(y)\, dy + \int_{\mathbb{R}} \omega(t, y)\log A_1(y)\, dy$$

y

$$\omega(t, y) = \frac{\tan(\pi t/2)}{2[\tan^2(\pi t/2) + \tanh^2(\pi y/2)]\cos^2(\pi y/2)}.$$

Nota 7.1. Obsérvese que si la familia $\{T_z\}$ depende de un cierto parámetro k y se obtienen las estimaciones (146) y (147) independientemente de k, podremos concluir que la acotación (149) será uniforme.

La demostración de nuestro resultado sobre el rango $0 < \delta \leq \delta_0$ está basada en la construcción de una familia analítica de operadores de crecimiento admisible vinculada al operador $M^\delta_{\alpha,k}$.

Consideremos $\delta(z) = (1-z)\delta_0 + \epsilon$ con $\epsilon > 0$, $0 \le \mathrm{Re}(z) \le 1$ y δ_0 definido como anteriormente, es decir $\delta_0 = (2\alpha+1)/2$. Tomaremos la familia de operadores

$$M_{\alpha,k}^{\delta(z)}(f,x) = \frac{x^{-\alpha/2}}{4}\int_0^\infty f(t)t^{\alpha/2}K_{\alpha+k}^{\delta(z)}(x,t)\,dt, \tag{150}$$

donde el núcleo $K_{\alpha+k}^{\delta(z)}$ es como en (142) con δ sustituido por $\delta(z)$. Esta definición de $M_{\alpha+k}^{\delta(z)}$ es válida para funciones simples de $(0,\infty)$. Las funciones de Bessel de orden complejo $\lambda = \nu + i\mu$ satisfacen

$$J_\lambda(t) = \frac{(t/2)\lambda}{\Gamma(1/2)\Gamma(\lambda+1/2)}\int_0^1 (1-s^2)^{\lambda-1/2}\cos(st)\,ds, \quad \nu > -1/2,$$

y las estimaciones

$$|J_{\nu+i\mu}(t)| \le C_\nu e^{\pi|\mu|}t^{-1/2}, \quad t \ge 1,\ \nu \ge 0, \tag{151}$$

$$|J_{\nu+i\mu}(t)| \le C_\nu e^{\pi|\mu|}t^{\nu}, \quad t > 0,\ \nu \ge 0. \tag{152}$$

Así, no es difícil probar que, para cada k fijo, la familia de operadores (150) es analítica y de crecimiento admisible. Los detalles pueden verse en [**43**].

Obtengamos, ahora, las acotaciones uniformes del operador $M_{\alpha,k}^{\delta(z)}$ para $\mathrm{Re}(z) = 0$ y $\mathrm{Re}(z) = 1$ en un cierto rango de valores de p. El Lema 7.3 contendrá la acotación para $\mathrm{Re}(z) = 0$, y el Lema 7.4 la correspondiente a $\mathrm{Re}(z) = 1$.

LEMA 7.3. *Sean $\alpha \ge 0$ y $1 \le p \le \infty$. Consideremos $M_{\alpha,k}^{\delta(z)}$ la familia de operadores dada por (150), donde $\delta(z) = (1-z)\delta_0 + \epsilon$ con $\epsilon > 0$, $0 \le \mathrm{Re}(z) \le 1$ y $\delta_0 = (2\alpha+1)/2$. Entonces,*

$$\|M_{\alpha,k}^{\delta(iy)}f\|_{L^p(x^\alpha)} \le A_0(y)\|f\|_{L^p(x^\alpha)},\ k \in \mathbb{N}, \tag{153}$$

con $A_0(y) = C_{\alpha,p}e^{\pi|\delta_0 y|}$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue los mismos pasos que la dada para el Teorema 7.1, pero utilizando la estimación

$$\|j_{\alpha+\delta(iy)+1}(x)\|_{L^1(x^{2\alpha+1})} \le C_\alpha e^{\pi|\delta_0 y|},$$

que se sigue de las cotas (151) y (152). □

En el siguiente lema probaremos la acotación para $M_{\alpha,k}^{\delta(1+iy)}$.

LEMA 7.4. *Sean $\alpha \ge 0$ y $1 \le p \le \infty$. Consideremos $M_{\alpha,k}^{\delta(z)}$ la familia de operadores dada por (150), donde $\delta(z) = (1-z)\delta_0 + \epsilon$ con $\epsilon > 0$, $0 \le \mathrm{Re}(z) \le 1$ y $\delta_0 = (2\alpha+1)/2$. Si*

$$\frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+3} < p < \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+1}, \tag{154}$$

entonces,

$$\|M_{\alpha,k}^{\delta(1+iy)}f\|_{L^p(x^\alpha)} \leq A_1(y)\|f\|_{L^p(x^\alpha)}, \ k\in\mathbb{N},$$

con $A_1(y) = C_{\alpha,p}\left(1+\frac{|\delta_0 y|}{\epsilon}\right)$.

Demostración. Usando la fórmula de Lommel (114), es sencillo concluir que

$$sJ_\nu(xs)J_\nu(ts) = \frac{1}{x^2-t^2}\frac{d}{ds}\{stJ_\nu(xs)J'_\nu(ts) - sxJ'_\nu(xs)J_\nu(ts)\}.$$

A partir de esta igualdad, y utilizando integración por partes en la expresión dada para $K_{\alpha+k}^{\delta(z)}$ en (143), obtendremos

$$K_{\alpha+k}^{\delta(1+iy)}(x,t) = 2\delta(1+iy)\int_0^1 (1-s)^{\delta(1+iy)-1}\mathcal{K}_{\alpha+k}^s(x,t)\,ds,$$

donde

$$\mathcal{K}_\nu^{s^2}(x^2,t^2) = \frac{stJ_\nu(xs)J'_\nu(ts) - sxJ'_\nu(xs)J_\nu(ts)}{x^2-t^2}.$$

Así, denotando

$$\mathcal{T}_{\alpha,k}^s(f,x) = x^{-\alpha/2}\int_0^\infty f(t)\mathcal{K}_{\alpha+k}^s(x,t)t^{\alpha/2}\,dt$$

e intercambiando el orden de integración, podemos escribir

$$M_{\alpha,k}^{\delta(1+iy)}(f,x) = 2\delta(1+iy)\int_0^1 (1-s)^{\delta(1+iy)-1}\mathcal{T}_{\alpha,k}^s(f,x)\,ds.$$

Teniendo en cuenta que $\delta(1+iy) = \epsilon - iy\delta_0$ y aplicando la desigualdad integral de Minkowski, llegamos a

$$\begin{aligned}\|M_{\alpha,k}^{\delta(1+iy)}f\|_{L^p(x^\alpha)} &\leq C(\epsilon+|\delta_0 y|)\left\|\int_0^1 (1-s)^{-iy\delta_0}\mathcal{T}_{\alpha,k}^s(f,x)\,ds\right\|_{L^p(x^\alpha)}\\ &\leq C(\epsilon+|\delta_0 y|)\int_0^1 (1-s)^{\epsilon-1}\left\|\mathcal{T}_{\alpha,k}^s(f,x)\right\|_{L^p(x^\alpha)}ds.\end{aligned}$$

Veamos ahora que

$$\|\mathcal{T}_{\alpha,k}^s f\|_{L^p(x^\alpha)} \leq C_{\alpha,p}\|f\|_{L^p(x^\alpha)},$$

para todo s, con p verificando (154). Observando en primer lugar que $\mathcal{T}_{\alpha,k}^s(f(\cdot),x) = \mathcal{T}_{\alpha,k}^1(f(\frac{(\cdot)}{s}),sx)$, será suficiente obtener la desigualdad

$$\|\mathcal{T}_{\alpha,k}^1 f\|_{L^p(x^\alpha)} \leq C_{\alpha,p}\|f\|_{L^p(x^\alpha)}.$$

Pero es fácil comprobar, procediendo como la demostración del Teorema 3.1, que en las hipótesis (154) se verifica esta estimación.

Por último, usando

$$(\epsilon+|\delta_0 y|)\int_0^1 (1-s)^{\epsilon-1}\,ds \leq \left(1+\frac{|\delta_0 y|}{\epsilon}\right),$$

concluimos

$$\|M_{\alpha,k}^{\delta(1+iy)} f\|_{L^p(x^\alpha)} \le C_{\alpha,p} \left(1 + \frac{|\delta_0 y|}{\epsilon}\right) \|f\|_{L^p(x^\alpha)}.$$

□

Demostración del Teorema 7.2. Para comprobar que (145) es una condición necesaria basta tener en cuenta que, en [**43**], Welland demuestra que, para $\delta > \delta_0$, la acotación

$$\|M_{\alpha,0}^{\delta} f\|_{L^p(x^\alpha)} \le C\|f\|_{L^p(x^\alpha)}$$

se tiene si, y sólo si, se cumple (145).

Para finalizar veamos que (145) es una condición suficiente. Centraremos nuestro análisis en el extremo inferior de (145). El extremo superior se obtendrá por dualidad, puesto que, para funciones de S^+, se tiene

$$\int_0^\infty f(x) M_{\alpha,k}^{\delta}(g(t),x) x^\alpha \, dx = \int_0^\infty M_{\alpha,k}^{\delta}(f(x),t) g(t) t^\alpha \, dt.$$

Consideremos la familia de operadores analíticos (150), con $\delta(z) = (1-z)\delta_0 + \epsilon$, $\delta_0 = (2\alpha+1)/2$ y $\epsilon > 0$, y tomemos $p_0 = \tilde{p}_0 = 1$, $p_1 = \tilde{p}_1 = 4(\alpha+1)/(2\alpha+3) + \epsilon$. Usando los Lemas 7.3 y 7.4 tendremos

$$\|M_{\alpha,k}^{\delta(iy)} f\|_{L^{p_0}(x^\alpha)} \le A_0(y) \|f\|_{L^{p_0}(x^\alpha)},$$

con $A_0(y) = C_{\alpha,p_0} e^{\pi|\delta_0 y|}$, y

$$\|M_{\alpha,k}^{\delta(1+iy)} f\|_{L^{p_1}(x^\alpha)} \le A_1(y) \|f\|_{L^{p_1}(x^\alpha)},$$

con $A_1(y) = C_{\alpha,p_1}\left(1 + \frac{|\delta_0 y|}{\epsilon}\right)$. Entonces, el Teorema 7.3 nos asegura la estimación

$$\|M_{\alpha,k}^{\delta(t)} f\|_{L^p(x^\alpha)} \le C\|f\|_{L^p(x^\alpha)} \tag{155}$$

para valores de p verificando

$$\frac{1}{p} = (1-t) + \frac{t}{p_1}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Usando que $\delta = \delta(t) = (1-t)\delta_0 + \epsilon$, tendremos $t = 1 - \frac{\delta-\epsilon}{\delta_0}$, y por tanto (155) se satisface si

$$\frac{1}{p} = \left(\frac{\delta-\epsilon}{\delta_0}\right)\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) + \frac{1}{p_1}, \quad \epsilon \le \delta \le \epsilon + \delta_0.$$

Tomando ϵ arbitrariamente pequeño, se concluye que, para $0 < \delta < \delta_0$, la acotación (155) se cumple siempre que $\frac{1}{p} < \frac{2\alpha+3+2\delta}{4(\alpha+1)}$. □

Bibliografía

1. R. Askey y S. Wainger, Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series, *Amer. J. Math.* **87** (1965), 695–708.
2. V. M. Badkov, Approximaton of functions of Fourier series in orthogonal polynomials, *Russian Math. Surveys* **33** (1978), 53–117.
3. J. A. Barceló, *"Funciones de banda limitada"*, Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Madrid, 1988.
4. J. A. Barceló y A. Córdoba, Band-limited functions: L^p-convergence, *Trans. Amer. Math. Soc.* **313** (1989), 655–669.
5. A. Benedek y R. Panzone, The spaces L^P, with mixed norm, *Duke Math. J.* **28** (1961), 301–324.
6. A. Benedek y R. Panzone, Note on mean convergence eigenfunctions expansions, *Rev. Un. Mat. Argentina* **25** (1970), 167–184.
7. A. Benedek y R. Panzone, On convergence of orthogonal series of Bessel functions, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)* **27** (1973), 505–525.
8. Ó. Ciaurri, J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Mean and almost everywhere convergence of Fourier-Neumann series, *J. Math. Anal. Appl.* **236** (1999), 125–147.
9. A. Córdoba, The disc multiplier, *Duke Math. J.* **58** (1989), 21–27.
10. A. J. Durán, On Hankel transform, *Proc. Amer. Math. Soc.* **110** (1990), 417–424.
11. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger y F. Tricomi, *"Higher Transcendental Functions"*, Vol. II, McGraw-Hill, Nueva York, 1953.
12. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger y F. Tricomi, *"Tables of Integral Transforms"*, Vol. II, McGraw-Hill, Nueva York, 1954.
13. J. García-Cuerva y J. L. Rubio de Francia, *"Weighted Norm Inequalities and Related Topics"*, North-Holland, Amsterdam, 1985.
14. V. L. Generozov, L_p-convergence for expansions in terms of the eigenfunctions of a Sturm-Liouville problem, *Math. Notes* **3** (1968), 436–441.
15. J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Mean and weak convergence of Fourier-Bessel series, *J. Math. Anal. Appl.* **173** (1993), 370–389.
16. J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Mean and weak convergence of some orthogonal Fourier expansions by using A_p theory, en *Orthogonal Polynomials and Their Applications* (Proc. Int. Congr., Laredo, España, 1987) (J. Vinuesa, Ed.), 161–169, *Lect. Notes Pure Appl. Math.* **117**, Dekker, Nueva York, 1989.
17. J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Commutators and analytic dependence of Fourier-Bessel series on $(0, \infty)$, *Canad. Math. Bull.* **42** (2) (1999), 198–208.
18. P. Heywood y P. G. Rooney, A weighted norm inequality for the Hankel transformation, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **99A** (1984), 45–50.
19. H. Hochstadt, *"Integral Equations"*, Wiley, Nueva York, 1973.
20. G. H. Hunt, On $L(p, q)$ spaces, *Enseign. Math.* **12** (1966), 249–275.

21. G. H. Hunt, B. Muckenhoupt y R. L. Wheeden, Weighted norm inequalities for the conjugate function and the Hilbert transform, *Trans. Amer. Math. Soc.* **176** (1973), 227–251.
22. J. M. Méndez y M. M. Socas, A pair of generalized Hankel-Clifford transformations and their applications, *J. Math. Anal. Appl.* **154** (1991), 543–557.
23. B. Muckenhoupt, Mean convergence of Jacobi series, *Proc. Amer. Math. Soc.* **23** (1969), 306–310.
24. B. Muckenhoupt, Mean convergence of Hermite and Lagurre series I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **147** (1970), 419–431.
25. B. Muckenhoupt, Mean convergence of Hermite and Laguerre series II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **147** (1970), 433–460.
26. H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series of polynomials, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **32** (1946), 8–10.
27. H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series. I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **62** (1947), 387–403.
28. H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series. II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **63** (1948), 355–367.
29. H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series. III, *Duke Math. J.* **16** (1949), 189–191.
30. P. G. Rooney, A technique for studying the boundedness and extendability of certain types of operators, *Canad. J. Math.* **25** (1973), 1090–1102.
31. P. G. Rooney, On the range of the Hankel transformation, *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), 45–48.
32. I. N. Sneddon, *"Fourier Transforms"*, McGraw-Hill, Nueva York, 1951. Reedición: Dover, Nueva York, 1995.
33. E. M. Stein, Interpolation of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* **83** (1956), 482–492.
34. K. Stempak, A weighted uniform L^p-estimate of Bessel functions: A note on a paper of Guo, *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (2000), 2943–2945.
35. K. Stempak y W. Trebels, Hankel multipliers and transplanting operators, *Studia Math.* **126** (1997), 51–66.
36. G. Szegő, *"Orthogonal Polynomials"* (4.ª edición), Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
37. E. C. Titchmarsh, *"Introduction to the Theory of Fourier Integrals"*, Oxford, Nueva York, 1937.
38. C. J. Tranter, *"Integral Transforms in Mathematical Physics"* (3.ª edición), Methuen, Londres, 1966.
39. C. J. Tranter, *"Bessel Functions with Some Physical Applications"*, English Univ. Press, Londres, 1968.
40. J. L. Varona, *"Convergencia en L^p con pesos de la serie de Fourier respecto de algunos sistemas ortogonales"*, Tesis Doctoral, Sem. Mat. García de Galdeano, Sec. 2, n.º 22, Zaragoza, 1989.
41. J. L. Varona, Fourier series of functions whose Hankel transform is supported on $[0,1]$, *Constr. Approx.* **10** (1994), 65–75.
42. G. N. Watson, *"A Treatise on the Theory of Bessel Functions"* (2.ª edición), Cambridge Univ. Press, 1944.
43. G. V. Welland, Mean convergence of Riesz-Bochner means for radial functions, *Can. J. Math.* **27** (1975), 176–185.
44. J. E. Wilkins, Neumann series of Bessel functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **64** (1948), 359–385.
45. G. M. Wing, The mean convergence of orthogonal series, *Amer. J. Math.* **75** (1950), 792–808.