UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA
Facultad de Educación

Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales
y de las Matemáticas

Los Ejemplos en Clase de Matemáticas de Secundaria como Referente del Conocimiento Profesional

TESIS DOCTORAL

Carlos Alberto Barros Pacheco Abrantes de Figueiredo

Badajoz, Abril de 2010

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA
Facultad de Educación

Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales
y de las Matemáticas

Los Ejemplos en Clase de Matemáticas de Secundaria como Referente del Conocimiento Profesional

Tesis Doctoral presentada por
Carlos Alberto Barros Pacheco Abrantes de Figueiredo
para optar al grado de Doctor.

Dirigida por:
Dr. Lorenzo Jesús Blanco Nieto
Dr. Luis Carlos Contreras González

Badajoz, Abril de 2010

Aos $\frac{3}{4}$ mais significativos da nossa Unidade,

Sem os quais a existência do restante $\frac{1}{4}$ perderia significado.

E,
Evidentemente,
Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Aos Professores Doutores Lorenzo Jesús Blanco Nieto e Luis Carlos Contreras González que me guiaram os passos com tantos e sábios conselhos e em quem sempre encontrei uma palavra de ânimo. Agradeço ao Luis Carlos os sete anos de comentários motivadores (porque tudo estava sempre muito bem) que sempre me impulsionaram numa vontade de fazer ainda melhor. Agradeço, também, o "puxão de orelhas" que D. Lorenzo me brindou quando sentiu que o meu trabalho perdia alento e cuja "força" me fez retomar o caminho correcto e terminar esta tese. As duas Orientações foram determinantes, decisivas e insubstituíveis.

A professora Esmeralda é minha amiga, e foi como tal que se dispôs ao frete de me aturar. Tarefa árdua, Esmeralda, que te agradeço de coração.

Às duas alunas que disponibilizaram os seus cadernos diários e que, ao saberem que eu os iria utilizar, se esforçaram por neles registar toda a informação de forma clara e completa. Obrigado Maria Helena. Obrigado Magda.

Agradeço ao Conselho Executivo da escola onde trabalho, Escola Secundária de D. Sancho II de Elvas, por me ter autorizado a fazer a minha investigação nas suas instalações, com os seus alunos e com a sua professora.

A todos o meu mais sincero Muito Obrigado.

ÍNDICE

I INTRODUÇÃO 1

II FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 9

1. Introdução 9

2. Funções 9

2.1 Notas Históricas sobre Funções 9

2.2 A importância das representações do conceito de função. Terminologia sobre funções utilizada na investigação 16

2.2.1 A importância das representações do conceito de função 16

2.2.2 Terminologia sobre funções utilizada na investigação 21

2.3 O tema Funções no 10º ano de escolaridade 25

2.4 A construção do Conceito de Função 39

2.4.1 O conceito de função como elemento matemático 39

2.4.2 O conceito de função como elemento de ensino e aprendizagem 41

3. Conhecimento Didáctico do Conteúdo 55

3.1 Notas históricas sobre Conhecimento Didáctico do Conteúdo 55

3.1.1 Alguns modelos e conceptualizações 60

3.1.2 Alguns resultados obtidos das investigações sobre o CDC 70

3.1.3 Medindo o Conhecimento Didáctico do Conteúdo 73

3.1.4 O CDC-Tecnológico 78

3.2 Elementos do Conhecimento Didáctico do Conteúdo presentes nesta investigação 80

4. Utilização de Exemplos 85

4.1 Notas históricas sobre a utilização de Exemplos na aula de Matemática 85

4.2 Definição de Exemplo. O uso de Exemplos 88

4.2.1 Definição de Exemplo 90

4.2.2 O uso de Exemplos 94

4.2.3 O uso de exemplos em Investigação 98

4.3 Espaços de Exemplos 102

4.4 Sequências de Exemplos e Variação. 107

4.5 Transparência de um Exemplo a uma noção matemática 113

4.6 Escolha de Exemplos pelo professor 118

4.7 Os vários tipos de Exemplos presentes na bibliografia específica 126

4.7.1 O Sistema de Categorias de Rissland-Michener 126

4.7.2 A Exemplificação na Perspectiva de Randall Charles 127

4.7.3 Exemplos Genéricos 129

4.7.4 Exemplos Resolvidos 133

4.7.5 Contra-exemplos 139

4.7.6 Exemplos Fulcrais e Exemplos Ponte. Resolução de conflitos cognitivos 142

4.7.7 Exemplos Passivos e Exemplos Activos 148

4.7.8 Dê exemplo de … (com restrições) 149
4.8 Relações entre a exemplificação e o conhecimento do professor 157

III METODOLOGIA 165
1. Introdução 165
2. Objectivos da investigação 165
3. O plano da investigação 166
4. Definição de Exemplo nesta investigação 171
5. Recolha da informação 174
5.1 Entrevista 175
5.2 As aulas 176
5.3 Os testes de avaliação 177
6. Definição de Episódio nesta investigação 178
7. Os Instrumentos utilizados 179
7.1 Elaboração do Instrumento para a classificação dos Exemplos utilizados por Esmeralda quanto ao objectivo 180
7.2 Escolha do instrumento para descrição do Conhecimento Didáctico do Conteúdo de Esmeralda 188
8. A transcrição das aulas. Separação em Episódios 191
9. Aplicação dos Instrumentos e das Situações Tipificadas na Biografia 192
9.1 Aos Episódios 192
9.2 À Entrevista 194
9.3 Aos Testes de Avaliação 194

IV ANÁLISE DA INFORMAÇÃO RECOLHIDA 197
1. Análise dos Episódios 197

V APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS 501
1. A Exemplificação do Conceito de Função e o Conhecimento Didáctico do Conteúdo 501
2. A professora Esmeralda 503
3. A Exemplificação de Esmeralda 504
3.1 Os Exemplos quanto à classificação 504
3.2 Os Exemplos quanto ao uso 508
3.3 O uso de Exemplos na Entrevista 520
3.4 Notas finais sobre a exemplificação de Esmeralda 526
4. O Conhecimento Didáctico do Conteúdo de Esmeralda 527
4.1 O Conhecimento Didáctico do Conteúdo pelos exemplos 527
4.1.1 Claramente CDC 527
4.1.2 Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico 532
4.1.3 Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo 535
4.2 O Conhecimento Didáctico do Conteúdo pela Entrevista 537
4.3 Notas finais sobre o Conhecimento Didáctico do Conteúdo

de Esmeralda **543**

VI DISCUSSÃO DOS RESULTADOS **545**

1. Introdução **545**
2. Discussão do Conhecimento Didáctico do Conteúdo de Esmeralda **546**
2.1 Duas novas categorias do Conhecimento Didáctico do Conteúdo identificadas nesta investigação **547**
2.1.1 O rigor na linguagem e na notação 547
2.1.2 A avaliação do processo de aprendizagem em aula 549
2.2 Sobre o Conhecimento Didáctico do Conteúdo Tecnológico **551**
3. Discussão sobre o Uso dos Exemplos por Esmeralda **556**
3.1 Variação e Transparência. Transparência Imediata e Transparência Mediata **557**
3.2 Associação entre a Ampliação dos Espaços de Exemplos e a construção da Imagem do Conceito **568**
3.3 A exemplificação na avaliação dos alunos **574**
4. Como exemplificar o conteúdo: um conhecimento do professor **591**
5. Novo modelo de construção do Conceito de Função **599**

VII CONCLUSÕES E IMPLICAÇÕES **603**

1. Conhecimento Didáctico do Conteúdo de Esmeralda quando ensina o Conceito de Função **605**
2. Uso dos Exemplos no ensino do Conceito de Função **606**
3. A relação entre Conhecimento Didáctico do Conteúdo e o Uso dos Exemplos, quando Esmeralda ensina o Conceito de Função **609**
4. Implicações desta investigação **610**
5. Contribuições desta investigação à Educação Matemática **611**
6. Limitações e Continuidade **613**

REFERÊNCIAS **615**

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Lei de Oresme 11

Figura 2: Evolução da definição do conceito de função 16

Figura 3: As facetas e as camadas na construção do conceito de função 23

Figura 4: Relação entre as facetas do conceito de função 24

Figura 5: Exemplo de perfil 1 24

Figura 6: exemplo de perfil 2 25

Figura 7: O conceito de função no manual adoptado 47

Figura 8: Modelo do CDC de Blanco, Mellado e Ruiz (1995) 62

Figura 9: Modelo Integrador de Gess-Newsome (1999) 63

Figura 10: Modelo Transformativo de Gess-Newsome (1999) 63

Figura 11: Modelo de Magnusson, Krajcik e Borko simplificado (1999) 65

Figura 12: Facetas do Conhecimento Pedagógico de Morine-Dershimer e Kent (1999) 66

Figura 13: Modelo de CDC de Acevedo (2009) 67

Figura 14: Modelo de CDC de Park e Oliver, (2008) 68

Figura 15: Modelo de CDC de Friedrichsen e colegas (2009) 69

Figura 16: Modelo do *Conhecimento Matemático para o Ensino* de Ball et al, (2008) 74

Figura 17: Modelo de competência profissional de Riese e Reinhold (2009) 77

Figura 18: Modelo de McCrory (2008) 80

Figura 19: O modelo de Figueiredo, Blanco e Contreras (2006) 81

Figura 20: Os raciocínios Lógico e Analógico 90

Figuras 21 e 22: Exemplos de gráficos de funções 111

Figura 23: Aspectos inerentes aos exemplos resolvidos 137

Figura 24: Rectângulos com a mesma diagonal e que não são congruentes 140

Figura 25: Resultados da aplicação do questionário (Zaslavsky e Ron, 1998) 141

Figura 26: Condições que melhoram o processo de apresentação de exemplos 153

Figura 27: Plano da Investigação 170

Figura 28: Primeiro Instrumento de Observação 188

Figura 29: Segundo Instrumento de Observação 190

Figura 30: A forma como Esmeralda usou os exemplos 519

Figura 31: Relação entre Variação, Transparência e Generalização 563

Figura 32: A Transparência e a Variação na generalização do conceito 566

Figura 33: Transparência Imediata e Transparência Mediata 568

Figura 34: Categorização do Conhecimento Exemplificativo do Conteúdo 598

Figura 35: Objectivos e Aspectos do uso de Exemplos 599

Figura 35: O CEC e os objectivos do uso dos exemplos 600

I INTRODUÇÃO

Existem evidências desde os mais remotos registos históricos de que os exemplos têm um papel central, quer no desenvolvimento da Matemática como disciplina, quer no ensino da matemática. Muitos argumentam que o uso dos exemplos é parte integrante da disciplina de matemática e não apenas um auxiliar no ensino e aprendizagem. […] Nós argumentamos que dar atenção aos exemplos proporciona uma perspectiva simultaneamente útil na prática e teoricamente importante na criação de actividades lectivas, na análise da prática dos alunos e no desenvolvimento profissional dos professores de matemática.
(Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson e Zaslavsky, 2006)

Todos nós aprendemos com os exemplos, mais que com as definições (e.g. Watson e Mason, 2002a; Zazkis e Leikin 2007) e a matemática ensina-se, sobretudo, através dos exemplos (Mason e Watson, 2005). De facto, é apenas pelos exemplos que as definições adquirem algum significado, já que a linguagem técnica da Matemática descreve classes de objectos ou relações com os quais o aluno se deve familiarizar (Watson e Mason 2002b). É através dos exemplos que os professores transmitem a essência dos conceitos matemáticos e as técnicas de cálculo (Tall e Vinner, 1981) e são eles que constituem a base da generalização, abstracção e do raciocínio analógico (Zaslavsky, Harel e Manaster, 2006). Os exemplos são, portanto, parte integrante da Matemática e um elemento importante no conhecimento especializado (Rissland-Michener, 1978). Além do mais, desde uma perspectiva de ensino, existem vários aspectos pedagógicos do uso lectivo de exemplos que realçam a significância e exprimem a complexidade deste elemento central do ensino (Zaslavsky, 2010).
A maioria dos professores usa de uma forma ou outra os exemplos na sua prática lectiva, seja mostrando uma forma em particular de como se resolve um problema, seja na preparação de exercícios para os alunos (Chick e Harris, 2007). Charles (1980) afirma que a investigação efectuada, tanto em psicologia educacional como em educação matemática, mostra que existem muitas acções que promovem a aquisição dos conceitos matemáticos mas, entre todas elas, destaca como objectivo preferencial de estudo a *exemplificação* dos professores. Hazzan e Zazkis (1999) colocam duas perguntas muito pertinentes: *Quão importantes são os exemplos? Podemos ensinar e aprender matemática sem eles?*

As teorias clássicas da psicologia da aprendizagem tomam como um dos seus fundamentos teóricos a habilidade que o ser humano tem para distinguir e para identificar a semelhança e a diferença, a homogeneidade e a diversidade, e, desse modo, agrupar, separar e classificar. A noção de classificação permite-nos conceber os elementos de uma classe e, portanto, os representantes dessa classe: os exemplos (Bills, 1996). As noções de *classe* e de *membro* transportam-nos para as noções de *geral* e de *particular*. O que é particular apresenta traços que são próprios de um elemento da classe, enquanto que o geral apresenta traços que são comuns a todos os membros da classe. Os exemplos têm estas duas capacidades. Conforme olharmos um exemplo podemos ver apenas os traços que o diferenciam dos outros exemplos e o tornam único e, no entanto, também podemos focalizar a nossa atenção nos outros aspectos que o torna membro de uma dada classe, naqueles aspectos que são compartilhados por todos os que se integram nessa classe e que permitem generalizar e abstrair. A Matemática é um mundo de exemplos. Há evidências nos registos históricos mais antigos que os exemplos desempenham um papel central no desenvolvimento da Matemática como disciplina, e também no ensino da Matemática (Bills *et al.* 2006), tanto que os alunos têm sido sujeitos ao trabalho com exemplos, como pratica, desde que há registos históricos (Mason e Watson, 2005).

Segundo Watson e Mason (2005), o termo *Exemplificação* é usado para descrever qualquer situação em que qualquer coisa específica é apresentada como representante de uma classe mais geral e para a qual a atenção dos alunos deve ser direccionada. Os objectos matemáticos somente se tornam exemplos quando forem percebidos como "exemplos *de* algo": conjecturas e conceitos, aplicações de métodos ou técnicas, constructos de ordem superior (como tipos de prova), uso de diagramas, notações em particular ou outros suportes, além de outros mais. A ideia fundamental é o acto de *ver algo como um exemplo de alguma "coisa"* (Goldenberg e Mason, 2008).
Por sua vez, em educação matemática, a palavra *Exemplo* é utilizada com uma ampla variedade de sentidos (Bills et al., 2006). De muitos desses sentidos se fará referência ao longo do enquadramento teórico e, na parte dedicada à metodologia, indicar-se-á de forma precisa o que deve ser entendido neste estudo como sendo *um exemplo*: desde a particularização de uma definição à resolução de um problema, passando pelo procedimento matemático a ser reproduzido pelos alunos. Em qualquer dos sentidos, os exemplos podem ser vistos como ferramentas culturalmente mediadoras entre os alunos e os conceitos matemáticos, os teoremas e as técnicas; eles também contextualizam, já que a variação nos exemplos apresentados podem ajudar os alunos a distinguir o essencial dos aspectos acidentais e, se bem seleccionados, a amplitude dentro da qual essa variação é permitida (Goldenberg e Mason, 2008).

Podemos encontrar na bibliografia estudos sobre a exemplificação dos mais variados conteúdos, indo da Teoria dos Números (Zaslavsky e Peled, 1996; Zazkis, Liljedahl e Chernoff, 2008) até à Geometria (Charles, 1980, Peled e Zaslavsky, 1997; Zaslavsky, Harel e Manaster, 2006; Zazkis e Leikin, 2008) passando pela Álgebra (Bills, 1995). Contudo, é bem identificável que a exemplificação de conceitos é o traço comum a todos eles e que o aspecto da exemplificação que apresentam poderia ser estudado em qualquer outro conteúdo matemático. Conjuntamente, na bibliografia sobre exemplificação, também se encontram estudos sobre a forma de exemplificar de professores com e sem experiência e a relação que ela possa ter com o seu conhecimento sobre o conteúdo matemático (Rowland e colegas, 2003a; 2003b; 2003c; 2003d; 2004; 2005; Turner, 2005; Huntley, 2008; Rowland, 2008). Prestando atenção aos exemplos obtém-se, simultaneamente, uma utilidade prática e uma importante perspectiva teórica no esboço de actividades de ensino, na observação das experiencias dos alunos e no desenvolvimento profissional dos professores (Bills et al. 2006).

O conceito de função assume, neste trabalho, um papel importante. A apresentação de um exemplo deverá, como é óbvio, transmitir uma ideia; neste caso, as ideias matemáticas que transmitem todos os exemplos que observámos estão relacionadas com o conceito de função.
A escolha do tema matemático, sobre o qual os exemplos incidem, não foi aleatória. Como este estudo é a continuação natural de um estudo anterior, centrado na forma como quatro professores sem experiência utilizavam os exemplos para ensinar o conceito de função (Figueiredo, 2005; Figueiredo, Blanco y Contreras, 2007; Blanco et al, 2010), decidimos manter o tema com o intuito de aproveitar todas as vantagens óbvias dessa decisão. Como bem se compreenderá, é mais vantajoso utilizar os materiais, pesquisas, bibliografia, resultados, entre tantos outros recursos, já obtidos e com os quais estamos familiarizados que iniciar todo um processo em terreno que fosse desconhecido. Particularmente, um dos instrumentos de análise que melhorámos e aplicámos foi especificamente criado e usado no contexto da exemplificação do conceito de função daqueles quatro professores inexperientes. Assim, a opção foi dar seguimento ao estudo já realizado e aprofundar em aspectos já tratados, bem como alargar a outros que, de algum modo, ficaram por pesquisar por não se enquadrarem no grau de exigência adequado à obtenção do Diploma de Estudos Avançados.
No que respeita ao referido estudo, são de salientar os resultados que se puderam alcançar e que são a base de toda a pesquisa que desenvolvemos desde 2005 até ao fim do ano de 2009. As diferenças mais significativas entre os dois estudos radicam nas experiências dos professores observados, nos conhecimentos envolvidos na escolha e uso dos exemplos e na profundidade com que foi levada a cabo a análise e a caracterização desses conhecimentos. No final, a natureza dos resultados obtidos e a orientação das discussões efectuadas também são diversas em alguns aspectos, contudo o fio condutor entre as duas continua a ser a exemplificação do conceito de função.
Por tudo isto, os dois estudos apresentam algumas diferenças e tantas semelhanças.
Por tudo isto, mantivemos o conceito de função como tema primordial da exemplificação observada e, naturalmente, aproveitámos muito do material que lhe está associado.

Todavia, o que atrás foi referido não representa a única razão pela qual o conceito de função é o tema matemático escolhido. O conceito de função, e os sub-conceitos com ele relacionados, é dos temas mais tratados na educação matemática e na investigação com ela relacionada. Sobre este conceito podemos encontrar na bibliografia estudos e pesquisas cuja natureza abrange um amplo leque de enfoques. Um dos aspectos importantes para esta investigação é a forma como os alunos adquirem e aprofundam os conceitos matemáticos. Pois bem, a maior parte dos textos que sustentam a base teórica desta investigação, no que à aquisição de conceitos diz respeito, é justamente sobre o

conceito de função. Principalmente os estudos de David Tall, Shlomo Viner, Ed Dubinsky, Anna Sierpinska e Phil DeMarois, entre outros.
O conceito de função é um tema central no ensino da matemática pré-universitária, fundamental na matemática moderna e essencial às áreas relacionadas das ciências. Uma forte compreensão do conceito de função também é essencial para qualquer aluno que deseje aprender cálculo, a disciplina que se revela fundamental para o desenvolvimento de futuros cientistas, engenheiros e matemáticos (Carlson e Oehrtman, 2005).

A investigação que se plasma nesta tese deve ser, portanto, contextualizada nas particularidades sociais da professora que se prontificou para ser observada e, por seu lado, também nas dos alunos, porque a exemplificação escolhida pela professora lhes foi especificamente dirigida.

Em concreto, o carácter qualitativo desta investigação vai-nos permitir observar não só os exemplos em si mas, também, introduzi-los no contexto de uma aula sobre funções, analisar a sua natureza, evidenciar o seu objectivo, apontar a sua eficácia e, de certo modo, avaliar o seu efeito. Além disso, o próprio contexto de escolha ou criação do exemplo irá ser alvo de uma atenção particular, especialmente no que respeita ao conhecimento que o professor mobiliza para o fazer.

Entre a investigação que se desenvolveu em 2005 e os princípios de 2010 foi publicada uma quantidade significativa de bibliografia dedicada ao tema da escolha e uso de exemplos por parte do professor. Isto indica que este tema tem interessado um cada vez maior número de investigadores. Eventualmente, pode-se discordar da localização que as referências a determinados trabalhos têm nas diversas secções da Fundamentação Teórica, mas deve ser tido em conta que a maioria das investigações e artigos aqui referenciados tratam várias vertentes da exemplificação do professor, as ideias matemáticas incluídas são diferentes e, até, o grau de experiência dos professores pode ser diverso. O critério adoptado foi de que os trabalhos fossem referenciados na respectiva secção segundo o tema predominante que tratam.

O conhecimento que os professores necessitam adquirir com vista a seleccionar e construir exemplos úteis nas suas aulas de matemática envolve uma matemática sólida e uma didáctica aprofundada (Zaslavsky, 2008) e, quando ajudam os alunos a construir as suas compreensões matemáticas, a selecção dos exemplos que fazem pode ser um indicador de um ensino eficaz do ponto de vista do conhecimento do conteúdo e do conhecimento didáctico desse conteúdo como factor determinante no processo da selecção (Muir, 2007).
A escolha de exemplos adequados é uma tarefa delicada, difícil e complexa, bem como usá-los para ilustrar de forma eficaz os princípios gerais; a necessidade da escolha de representações ajustadas revela-se, evidentemente, de particular importância (Rowland, 2005; Figueiredo, 2005; Chick e Harris, 2007). Estudos relacionados com a formação de conceitos sublinham o papel da cuidadosa selecção e sequenciação dos exemplos e de não-exemplos como suporte tanto na distinção entre os aspectos que são críticos e os que não o são, como na construção de conceitos e de conjuntos de exemplos com eles relacionados (e.g. Vinner, 1983; Zaslavsky e Peled, 1996).

Os estudos sobre o uso de exemplos e de como os alunos aprendem com eles mostram que um ensino eficaz deve incluir uma multiplicidade de exemplos, de vários tipos, que sustentem as evidências da estrutura profunda [dos conceitos] em vez de desviar a atenção para os aspectos superficiais (Atkinson et al., 2000). A exemplificação do professor é a ligação entre o conhecimento do conteúdo do professor e os seus alunos. A forma de exemplificar é um produto do conhecimento profissional do professor, que pode ser adequada ou não; pode ajudar o aluno a perceber os conteúdos que o professor lhe quer transmitir, ou pode confundi-lo.
Analisar a forma como um professor constrói (ou selecciona) os exemplos que vai apresentar aos seus alunos, seja para que eles os trabalhem sozinhos ou conjuntamente com o professor, é um espelho de um conhecimento muito específico do professor de matemática. Estudar o modo como um professor exemplifica, com que exemplos e em que contextos, pode revelar-se uma boa metodologia que nos permita aprofundar esse seu conhecimento específico e, pela análise mais profunda do conhecimento de um só professor, contribuir para a ampliação do conhecimento de outros.

O conhecimento dos professores é um dos temas mais estudados hoje em dia porque é daqueles que mais influi e mais contribui para a educação matemática.

A necessidade de aprofundar no conhecimento do professor torna útil esta investigação sobre um instrumento particular que o professor de matemática tanto utiliza nas suas aulas. Os exemplos sempre tiveram um papel central tanto no desenvolvimento como no ensino da matemática. Consequentemente eles têm, de alguma forma, o seu lugar em muitas teorias sobre a aprendizagem da matemática, quer eles sejam vistos como matéria-prima para generalização, ilustrações de técnicas ou conceitos, elementos de classes, ou modelos genéricos estruturantes (Bills e Watson, 2008). É o conhecimento do professor, em particular de como construir (ou escolher) e utilizar os exemplos, que faz a ponte entre a teoria, aquilo que é abstracto e geral, e a prática, que é concreta e particular, e que ajuda os alunos a aprender os conceitos matemáticos, as técnicas e os procedimentos que esta disciplina emprega.
Muitos dos trabalhos que se publicaram sobre didáctica da matemática parecem dar mais ênfase aos aspectos gerais das aulas, à problemática e às formas de trabalhar sem que se problematize sobre os exemplos, a sua estrutura e sequência que, em última análise, é a essência da experiência matemática dos alunos e, também, muito do material observável de uma sala de aula (Bills e Watson, 2008). O interesse deste campo de investigação pôde ser constatado no ano de 2006 em Praga. A 30ª PME incluiu um fórum de pesquisa dedicado exclusivamente ao papel dos exemplos na educação matemática, onde se fez uma actualização sobre o assunto e se estabeleceu a *Exemplificação* como uma área de investigação (Bills et al., 2006).

O conhecimento que o professor utiliza para ensinar matemática ainda constitui um dos principais temas de investigação. Trata-se de saber em que consiste esse saber, a sua natureza, o seu desenvolvimento, a relação com a prática profissional e a teoria educacional (Ponte, 2000). A observação do professor e a análise da sua exemplificação podem contribuir com contributos didácticos para a formação inicial e/ou contínua do professor.

De uma forma geral, aprofundar o papel dos exemplos é "*explorar as formas pelas quais os exemplos contribuem para a transformação das crianças em matemáticos e de matemáticos em professores de matemática. Em cada nível deste desenvolvimento a criação e o uso de, e a reflexão sobre, os exemplos é vista como sendo parte integral da aprendizagem.*" (Bills e Watson, 2008, p. 79).

A estrutura desta tese é constituída por sete capítulos:
O primeiro capítulo aponta algumas das razões que levaram ao desenvolvimento da investigação e qual o interesse que ela pode ter num contexto de educação matemática.

O segundo capítulo traça todo o enquadramento teórico da investigação. Este enquadramento apresenta três vertentes: o conceito de função, o conhecimento didáctico do conteúdo do professor e a utilização de exemplos no ensino do conceito de função.
Sobre o conceito de função apresenta-se, em linhas muito gerais, a forma como evoluiu em termos históricos e a importância que as várias representações do conceito de função tiveram ao longo do seu desenvolvimento. Também no âmbito deste trabalho o papel das várias representações é crucial, dado que a exemplificação do conceito de função tem que ser feita apoiada em alguma delas. Além disso, a construção correcta do conceito de função passa por todas elas e pelas relações que se estabelecem entre umas e outras. Para que fiquem bem definidos os limites do estudo deste tema para os alunos envolvidos apresentam-se as planificações de unidade utilizadas pela professora no ano lectivo em que a observámos.
Relativamente ao conhecimento didáctico do conteúdo, também se faz uma revisão histórica do seu desenvolvimento. A evolução deste tipo de conhecimento do professor passou pela sua conceptualização. Muitos investigadores tiveram a sua intervenção neste domínio, das várias conceptualizações existentes apresentam-se aquelas que pelas suas características têm afinidades com a investigação aqui descrita. De forma breve, dá-se conta da tendência emergente para a *medição* conhecimento do professor, através do aparecimento de instrumentos com esse propósito específico. Também se regista o surgimento de um novo aspecto do conhecimento didáctico do conteúdo, aquele que se vincula com as novas tecnologias de informação e comunicação, e que cada vez mais se torna preponderante nas aulas de ciências.
Finalmente, este capítulo faz uma revisão da literatura existente sobre a escolha e o uso dos exemplos nas aulas de matemática. Desde as primeiras referências históricas aos exemplos até aos últimos trabalhos de investigação sobre a exemplificação, desde as simples referências aos exemplos até ao estabelecimento da Exemplificação como área autónoma de investigação, a última secção deste capítulo inclui todos os aspectos da exemplificação e os casos que a bibliografia tipificou e que podem ajudar o professor de matemática no seu trabalho diário.

O terceiro capítulo descreve a metodologia que orientou a investigação. Também nele se dão os sentidos precisos da terminologia empregue, a obtenção dos instrumentos de análise e a forma de recolha e tratamento da informação. É neste capítulo que também se podem encontrar os objectivos da investigação, sendo que a orientação de todo o trabalho foi orientado por eles.

Para que se pudesse observar a professora e analisar a sua exemplificação foi necessário dividir as suas aulas em segmentos, aos quais se chamaram episódios, e analisar esses segmentos segundo os instrumentos de análise. A estruturação da investigação obrigou, por isso, à definição precisa do que se entendeu por episódio e por exemplo. Por sua vez, foi necessário proceder à obtenção dos instrumentos que permitissem estabelecer a forma de trabalhar toda a informação que se recolheu através da entrevista, dos episódios procedentes da videogravação das aulas e das questões incluídas nos testes de avaliação.
Estando bem definido em que consistem os objectos de análise, explica-se a forma como os instrumentos de análise foram aplicados, como se extraíram os dados a analisar e como se procedeu à sua análise.

O quarto capítulo abrange a transcrição das aulas, episódio por episódio, e a respectiva análise à luz dos instrumentos utilizados.
As aulas videogravadas foram divididas em 60 episódios. A cada episódio foram aplicados os dois instrumentos de análise.
O primeiro distingue os exemplos observados através de um sistema de cinco categorias que classifica os exemplos quanto ao objectivo com que são propostos. Para além disso, são distinguidos pela sua natureza: exemplos de conceito, de procedimento ou de teorema; e pelo grau de planeamento: planeados, modificados ou espontâneos. Este instrumento de análise permite conhecer a forma como os exemplos são escolhidos e usados pela professora para ensinar os seus alunos.
O segundo instrumento, por sua vez, permite compreender o conhecimento didáctico do conteúdo da professora observada. Este conhecimento é abordado segundo três subcategorias, uma que inclui os aspectos claramente relacionados com aspectos do conhecimento didáctico do conteúdo, outra vinculada a aspectos do conhecimento do conteúdo num contexto pedagógico e a terceira prende-se com aspectos do conhecimento pedagógico inserido num contexto de conteúdo. O trabalho que a professora desenvolve com os alunos mediante o uso dos exemplos é o espelho do conhecimento que emprega no seu labor e este instrumento proporciona umas lentes adequadas à visão desse reflexo.

O quinto capítulo apresenta os resultados obtidos da aplicação dos dois instrumentos e da análise à luz dos casos tipificados na bibliografia de toda a informação contida nos episódios. Estes resultados são exibidos segundo duas das vertentes indicadas no enquadramento teórico: a forma como a professora exemplifica e o conhecimento didáctico do conteúdo que ela mobilizou quando trabalhou os exemplos com os alunos. Assim, este capítulo apresenta um perfil da professora que se divide em duas faces e elas complementam-se de forma a darem uma imagem que integra, simultaneamente, a escolha e uso dos exemplos bem como o conhecimento didáctico envolvido.

O sexto capítulo contém a discussão dos resultados no âmbito da fundamentação teórica. Nele é feito o contraste entre os resultados obtidos na investigação e os casos apresentados na bibliografia compilada. Também neste capítulo são evidenciados alguns resultados que foram obtidos neste estudo e que não encontram paralelo na bibliografia, são aspectos do conhecimento da professora e também da sua forma de escolher, criar e usar os exemplos. Juntamente com estes resultados originais concebeu-se um instrumento capaz de descrever globalmente o conhecimento específico empregue na exemplificação de um professor, já que integra o que de crítico se pôde encontrar na bibliografia específica.

O sétimo capítulo é aquele onde se podem constatar as conclusões, implicações e continuidade da investigação desenvolvida.
Efectivamente, as conclusões relacionam-se directamente com os objectivos que se formularam, e o seu âmbito é enquadrado por três pilares: o conhecimento do professor de matemática, a exemplificação e o conceito de função. As implicações que resultam deste trabalho situam-se ao nível da formação inicial e permanente dos professores e a continuidade a esta investigação que abrimos remete para a inclusão da exemplificação na avaliação das aprendizagens dos alunos e nas novas tecnologias.

Por fim, faz-se a listagem de todas as referências bibliográficas utilizadas na investigação.

II FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1. Introdução

A fundamentação teórica inclui as três vertentes fundamentais que sustentaram a investigação. O aspecto fundamental é, sem dúvida, a exemplificação que a professora apresenta aos seus alunos para que eles aprendam. A primeira pergunta que se põe é sobre os conteúdos que os seus alunos devem aprender; esses conteúdos são sobre as funções. A segunda questão que se coloca prende-se com as capacidades que a professora tem para criar, escolher e usar os exemplos que apresenta.
Estes três elementos não podem existir independentemente uns dos outros numa aula onde um professor se dispões a ensinar os seus alunos este tema. Necessita do conceito de função, sob pena de se ensinar sem conteúdo, ou não ter os instrumentos com que ensinar ou, simplesmente, não saber como se ensina.
Neste contexto podemos, facilmente, apresentar as três perspectivas que se perfilam e que moldam este capítulo:

- O conceito de função
- O conhecimento didáctico do conteúdo
- A utilização dos exemplos

2. Funções

Pela natureza da investigação que esta tese descreve, o enfoque sobre o conceito de função será, sobretudo, nas suas representações. É pelas representações que a comunicação sobre funções se realiza, é através delas que os alunos tomam contacto com o conceito de função e o generalizam.

2.1 Notas históricas sobre funções

O conceito de função é um conceito que atravessa toda a história matemática da humanidade. Pelo menos no que respeita à história documentada. O conceito de função evolui e desenvolve-se ao longo dos tempos suportado pelas justificações disponíveis em cada época e este desenvolvimento caracteriza-se pela necessidade de generalizar e ampliar este conceito (Palaro, 2008).

Atendendo a Youschkevitch (1976), podemos dividir a evolução do conceito de função em três grandes fases:

1. Antiguidade. Neste período da História o conceito de função aparece apenas em alguns casos de dependência entre duas quantidades, não existindo a noção de variável.
2. Idade Média. Nesta fase podem-se encontrar casos de dependência entre duas quantidades apresentados por descrições verbais e gráficas apresentadas mediante suportes geométricos e mecânicos.
3. Período Moderno. A predominância das expressões analíticas é a principal característica desta época.

No que respeita às representações próprias do conceito de função, Moura e Moretti (2003, p. 69; obtido de Braga, 2009) destacam que a representações numérica, a gráfica e a algébrica surgem ao longo das três fases atrás indicadas:

> Na Antiguidade há o estudo de casos particulares de dependência entre duas variáveis, não havendo, contudo, a noção geral de quantidade variável e funções. Já na Idade Média, estas noções gerais são expressas pela primeira vez sob a forma geométrica e mecânica, mas na qual cada caso concreto de dependência entre duas quantidades é definido por uma descrição verbal ou por um gráfico. É só no período Moderno, final do século XVI, que expressões analíticas e funções começam a prevalecer. Estes estágios reflectem, na realidade, o caminho percorrido pelo homem através da História rumo à generalização e à formalização do conceito de função. O processo de abstracção demonstra uma real e profunda compreensão do conceito ao mesmo tempo que é factor de construção desta compreensão.

Ao longo da história o conceito de função sofre alterações na forma e no conteúdo. O conceito de função tem sido constantemente estendido e aprofundado, sendo cada vez mais geral, abarcando casos novos e mais formalizado nos seus fundamentos. Embora haja pouco consenso sobre a origem do conceito de função, a ideia de dependência entre quantidades é atribuída aos Babilónios e ao uso de tabelas entre os gregos, estabelecendo a conexão entre a Matemática e a Astronomia (Braga, 2009). Segundo Zuffi (2001, p.11):

> (…) não parece existir consenso entre os autores, a respeito da origem do conceito de função talvez pelo seu próprio aspecto intuitivo. Alguns deles consideram que os Babilónios (2000 a.C.) já possuíam um instinto de funcionalidade (...) em seus cálculos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas (...) que eram destinadas a um fim prático. As tabelas, entre os gregos, que faziam a conexão entre a Matemática e a Astronomia, mostravam evidência de que estes percebiam a ideia de dependência funcional, pelo emprego de interpolação linear.

Na Idade Média, Nicole Oresme (1323-1382) destacou-se entre vários estudiosos da matemática no que respeita ao conceito de função. Teólogo, mas também matemático, os seus trabalhos incluem descrições gráficas da relação de dependência entre a velocidade e o tempo num corpo que está sujeito a uma aceleração constante. Segundo o seu manuscrito *Tractatus de configuratione qualitatum et motuum*, esta relação é apresentada num sistema que incluía dois eixos, num horizontal (a que chamava longitude) que representava o tempo e num eixo vertical (a que chamava latitude) que representava a velocidade. O aspecto interessante deste estudo de Oresme é que ele utilizava e representava o conceito de função de forma gráfica para explicar a relação entre a velocidade e o tempo. A lei proposta por Oresme foi estudada durante mais de duzentos anos, sendo que, a demonstração que celebrizou Galileu (1564-1642) sobre a lei do movimento uniformemente variado é a mesma que foi utilizada por Oresme:

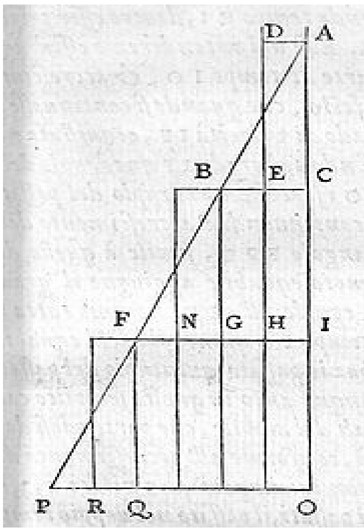


Figura 1: Lei de Oresme

Fonte: http://en.wikipedia.org/wiki/Nicole_Oresme

Por seu lado, Galileu estabeleceu uma lei que relacionava o tempo e o espaço percorrido por um corpo em queda livre. A lei, como sabemos, estabelece que o espaço percorrido é directamente proporcional ao quadrado do tempo da queda, considerando também que o corpo está sujeito à acção da gravidade. A relação proporcional entre as duas quantidades, o espaço e o tempo, são relacionadas por Galileu de forma verbal, privilegiando esta representação do conceito de função. Ainda nos tempos de Galileu, tal como na antiguidade, as leis que relacionavam duas quantidades eram definidas por descrições verbais e gráficos.

É já no período moderno que as expressões analíticas das funções começam a prevalecer, em detrimento das descrições verbais ou representações gráficas (Palaro, 2008). Um marco no desenvolvimento do conceito de função acontece com a publicação de *La Geómètrie* por Descartes (1596-1650). Segundo Boyer (1974), esta obra está voltada para a aplicação da Álgebra à Geometria. Na união entre a Álgebra e a Geometria, os elementos chave foram a introdução de *variáveis* e a expressão da relação entre as variáveis através das *equações* (Kleiner, 1989).
Mais tarde, a teoria das funções apoia-se nesta obra de Descartes, uma vez que em *La Geómètrie* se estabelece a relação de dependência entre quantidades variáveis mediante a utilização das variáveis x e y. Assim, com Descartes, e também com Fermat (1602-1665), podemos afirmar que a algebrização da Geometria determina uma relação estreita entre a representação algébrica e a representação geométrica no conceito de função e que culminou com a moderna Geometria Analítica. Esta alteração materializa uma mudança radical no desenvolvimento da Matemática, dado que a transição da

utilização das representações gráficas para as representações algébricas, juntamente com as operações que as produzem a partir de regras específicas, conferem ao estudo das funções um carácter de verdadeiro cálculo (Palaro, 2008). Além disso, tal como podemos ler em Youschkevitch (1981, p. 9), o método analítico para expressar a dependência funcional tornou-se tão eficiente que a noção de função passou a assumir um lugar central em todas as ciências exactas.

Nesta época, mas já no século XVII, as contribuições mais importantes ao desenvolvimento do conceito de função são dadas por Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), respectivamente, com a publicação de *Method of Fluxions* (1736) e *Nova methodus pro maximus et minimis, itemque tangentibus,qua necirrationales quantitates moratur* (1684). Newton descrevia a geração de uma curva através do movimento contínuo de um ponto, em que a abcissa e a ordenada desse ponto gerador eram consideradas variáveis (Braga, 2009) e Leibniz indicava a forma de se encontrarem os máximos e os mínimos de curvas e, também, as tangentes em pontos dados (Cooke, 1974). Ambos contribuíram de forma decisiva para a análise infinitesimal e diferencial através dos seus estudos de curvas e respectivas equações; como afirma Cooke, "Newton e Leibniz desenvolveram a sua nova análise muito rapidamente, de modo a incluir diferenciais e fluxos de ordem superior (Newton usava o termo *fluentes* e *fluxões* para expressar a sua noção de função), como no caso da fórmula para a curvatura de uma curva num ponto." (Cooke, 1974, pp. 296). Newton também utilizou os termos "*relata*" para designar a variável dependente e "*genita*" para uma quantidade obtida através de outras pela utilização das quatro operações aritméticas fundamentais (Ponte, 1990). Foram Leibniz e Newton que descobriram o desenvolvimento em séries infinitas, sendo esta descoberta tida como a mais notável e fecunda até à época pois tornou possível representar analiticamente toda a relação funcional estudada até então (Boutroux, 1920, citado por Palaro, 2008).
Destaque-se que foi Leibniz que pela primeira vez usou o termo "função" com o mesmo sentido que é utilizado actualmente e que as definições das funções utilizadas era feitas a partir de equações. Tanto Newton como Leibniz utilizavam expressões algébricas (representação algébrica) para encontrar curvas (representação geométrica) e os cálculos destinavam-se a descrever e determinar aspectos gráficos das curvas em estudo.

A importância das fórmulas e das equações que descrevem curvas começaram a ter uma importância cada vez maior nos finais do século XVII. Essa importância fez com que a atenção se deslocasse para o papel dos símbolos que aparecem nas equações e, por isso, nas relações que se estabelecem entre esses símbolos, independentemente da curva que está associada à equação. A correspondência trocada entre Leibniz e Johann Bernoulli expõe a ausência de um termo geral para representar a relação que se estabelece entre quantidades que dependem de outras naquelas fórmulas e equações, fazendo surgir o uso do termo "funções" tal como aparece na definição de Bernoulli em 1718 (Kleiner, 1989): "*Chamamos Função de uma variável à quantidade constituída de qualquer forma por esta variável e por constantes*". Esta foi a primeira definição formal de função.

Contudo, o método analítico criado para representar funções, começa a apresentar as suas debilidades e limitações. Pode-se dizer que foi com Euler que o conceito de função

obteve maior notoriedade aquando da publicação de *Introductio in analysin infinitorum*, onde o conceito de função ocupa uma posição central na sua apresentação da análise. Nessa obra, Euler apresenta a definição de função: "*Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de uma qualquer forma a partir da quantidade variável e de números ou quantidades constantes*" (Kleiner, 1989). Por comparação de definições podemos observar que Euler apenas deu um retoque final à definição de Bernoulli, trocando o termo "*quantidade*" por "*expressão analítica*" (Ponte, 1990).
Foi com Euler (1707-1783) que o conceito de função sofreu uma ampliação no seu significado através da introdução de processos infinitos (desenvolvimentos em séries de potencias), da noção de variável complexa e pela contribuição para o desenvolvimento da linguagem simbólica, introduzindo alguma da notação que se utiliza hoje em dia (Braga, 2009), a ele se deve a notação mais bem sucedida de todos os tempos: $f(x)$ como uma função de x (Boyer, 1974; Palaro, 2008). No campo das funções, aquelas a que Euler deu mais atenção foram as funções exponenciais e as logarítmicas e foi com ele que as *quantidades trigonométricas* tiveram uma abordagem funcional, deixando de ser apenas linhas relacionadas com o círculo.

A ideia de que uma função podia ser pensada como uma expressão analítica definida por uma série de potências foi sendo posta em causa, ainda no século XVIII, à medida que vários problemas da matemática aplicada mostravam o carácter restrito de um tal conceito de dependência funcional. O estudo das regularidades mecânicas, tal como o movimento dos corpos celestes, a teoria das vibrações ou a teoria do calor, exigiam a utilização de novos métodos de descrição analítica, uma vez que essas regularidades já não podiam ser expressas numa forma tão simples como uma série de potências. A partir da segunda metade do século XVIII, um novo método foi sendo crescentemente utilizado para definir as dependências funcionais que expressavam essas regularidades: as séries trigonométricas. Uma importante aplicação neste contexto, pela disputada polémica que gerou e pela influência que exerceu na evolução do conceito de função, foi o problema da vibração das cordas sonoras (Correia, 1999).
O problema das cordas vibrantes proporciona uma troca de correspondência entre Euler e D'Alembert (1717- 1783) na qual discordavam em muitos aspectos, o que proporcionou novo impulso ao estudo das equações diferenciais através da hidrodinâmica, da aerodinâmica e das equações diferenciais parciais. D'Alembert trabalhou o conceito de limite e, com isso, contribuiu para o aperfeiçoamento da definição de função.

Lagrange (1736-1813) influenciou de forma muito significativa o desenvolvimento da chamada "Era do Rigor" no século XIX pela utilização de uma linguagem e notação precisas e a preocupação com a definição do conceito de função (Braga, 2009) e é a ele que se deve a notação $f'(x)$ para designar a derivada de uma função quando representa uma função $f(x)$ através de uma série de Taylor. Assim, no século XIX o pensamento matemático foi marcado pelo rigor e pela preocupação com os fundamentos. No que respeita às funções, destacam-se Gauss (1777-1855) e Cauchy (1789-1857).
Gauss foi dos primeiros matemáticos a estudar as funções elípticas, campo onde precedeu muitos dos seus matemáticos contemporâneos e o seu tema de pesquisa principal. Aliás, este tema foi por ele leccionado na Universidade de Berlim.

Cauchy foi o primeiro a fazer um estudo rigoroso sobre as condições de convergência das séries infinitas e a conseguir uma definição rigorosa de integral. No âmbito da teoria das funções, dedicou-se às funções de uma ou mais variáveis e os resultados mais importantes situam-se no campo da análise complexa. Em *Leçons sur le Calcul Différencial* definiu, pela primeira vez, o conceito de função complexa de variável complexa. Em 1821 escreveu o texto *Cours d'Analyse*, destinado aos estudantes da Ecole Polytechnique, que versava sobre os teoremas básicos do Cálculo. Nesta sua obra era bem patente o rigor que sempre o preocupou.

O conceito de função continua o seu processo de evolução quando Fourier (1768-1830) afirmou que qualquer função pode ser representada por uma série trigonométrica, num intervalo apropriado (Ponte, 1990). Estes resultados foram obtidos pelo estudo da propagação do calor nos objectos materiais (em que a temperatura do corpo é função de duas variáveis, o tempo e o espaço) e, como se sabe, hoje estas séries chamam-se séries de Fourier. Aquela afirmação foi recebida com estupefacção pelos matemáticos da época pois contrariava inúmeros dogmas da época. Segundo Kleiner (1989), para convencer os seus colegas Fourier precisava mostrar que

1. Os coeficientes das Séries de Fourier podiam ser calculadas a partir de qualquer função.
2. Qualquer função podia ser representada pela sua Série de Fourier no intervalo $(-l,l)$.

A prova informal que Fourier apresentou aos seus contemporâneos, inaceitável nos dias de hoje, foi a promotora do impulso dado ao conceito de função. Com o seu trabalho, Fourier contrariou o "*artigo de fé*" que afirmava que duas funções coincidiam em toda a sua extensão se fossem coincidentes num intervalo; mostrou que o conceito de *descontinuidade* de Euler (Euler chamava *funções descontinuas* às funções que hoje conhecemos como *funções por ramos*) era imperfeito, pois algumas *funções descontínuas* podiam ser representadas por uma Série de Fourier, apenas com uma equação, sendo *contínua* no sentido de Euler.

Contemporâneo de Cauchy e Gauss, Dirichlet (1805-1859) apresentou uma definição de função com um grau de generalidade e rigor considerável (Kleiner, 1989; Boyer, 1974, p. 405):

> "Se uma variável *y* está relacionada com uma variável *x* de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a *x*, existe uma regra segundo a qual um valor único de *y* fica determinado, então diz-se que *y* é função da variável independente *x*."

Repare-se que a definição de função relaciona valores numéricos mas não impõe uma representação específica, a relação pode ser através de uma tabela numérica, de um gráfico ou de uma equação. Esta forma de definir atinge um grau de generalidade que não tinha até então. Esta definição é a primeira a apresentar o conceito de função como uma correspondência entre valores numéricos, e não como uma fórmula. Para melhor enfatizar a definição em termos de correspondência, mostrando as fragilidades das equações e das representações gráficas, Dirichlet apresenta a função

$$D(x)=\begin{cases} c, & \text{se } x \text{ racional} \\ \mathrm{d}, & \text{se } x \text{ irracional} \end{cases}$$

que não pode ser representada por uma Série de Fourier, não pode ser representada por uma equação e que não pode ser representada graficamente. Esta função é descontínua em qualquer sítio no sentido actual, e não no de Euler (Kleiner, 1989).

Weirstrass (1815-1897) contribuiu para o desenvolvimento do conceito de função com a teoria das funções complexas por meio de séries de potências, demonstrando um interesse especial por funções inteiras e funções definidas por produtos infinitos. Weirstrass ficou conhecido como o *Pai da Análise* por ter por ter dado início à aritmetização da análise, reduzindo os seus princípios ao conceito de número real (Palaro, 2008), contribuindo para a formalização da área da Matemática que trata os processos ligados ao infinito e aos infinitésimos e, portanto, separando a Análise da Geometria. Weirstrass demonstrou que qualquer função contínua é o limite de uma sequência de polinómios que converge uniformemente.

O conceito de função tem um papel importante na definição de conjunto com infinitos elementos. Dedekind (1831-1916) definiu este tipo de conjunto através da correspondência biunívoca entre o conjunto e um dos seus subconjuntos próprios.

Relativamente aos fundamentos da teoria das funções reais, Cantor (1845-1918) deu o seu importante contributo através do desenvolvimento da teoria de conjuntos. Contudo, o conceito de função, tal como o conhecemos hoje, deve-se a Bourbaki em 1939 tendo como suporte os desenvolvimentos da teoria de conjuntos. Segundo Zuffi (2001), a definição actual de função é formada pela síntese de dois aspectos, a sua lei e o seu valor, acrescida dos conceitos de domínio e de contradomínio. Esta definição já não apresenta um aspecto verbal, sendo apresentada simbólica e formalmente, atingindo o mais alto grau de abstracção para o conceito. O grupo Bourbaki elaborou em 1939 a definição hoje utilizada nos meios matemáticos, para função: *Uma função é uma tripla ordenada (X, Y, f), onde X e Y são conjuntos e f é um subconjunto de XxY, tal que se (x,y)∈f e (x, y′)∈ f então y = y′.*

E não se julgue que o desenvolvimento do conceito de função estabilizou, segundo Ponte

> Trata-se de uma evolução que ainda não parou. Da noção de correspondência passou-se à noção de relação. Um parente próximo da ideia de função constitui um conceito primitivo da Teoria das Categorias. Na teoria da Computabilidade (por exemplo, no Cálculo-λ), encara-se uma função já não como uma relação mas como uma regra de cálculo. (Ponte, 1990, p. 4)

Os momentos em que se verificam mudanças significativas na evolução do conceito de função podem ser melhor visualizados no quadro que segue:

QUADRO RESUMO DO DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DA NOÇÃO DE "FUNÇÃO"
(Vera Garcia. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.
Disponível em: http://euler.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/laboratorio/texto_funcoes.pdf)

Século	Autor	Frases Geradoras
XVI	Galileu-Galilei (1564-1642). Termo "função" não é usado. Noção corresponde à de Lei natural: Lei quantitativa que expressa regularidades de um fenómeno natural; relações entre a variação de quantidades observáveis.	**Função) é relação entre variáveis.** **Variáveis são quantidades observáveis na natureza.**
XVII	Leibniz (1646-1716), Newton (1642-1727) – relação entre medidas associadas a uma curva, como por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio de curvatura. Leibniz (1670) introduz o termo função	**Função é uma correspondência entre quantidades associadas a uma curva da Geometria.** **Variáveis são quantidades que assumem diferentes valores, na construção de uma curva.**
XVIII	Johann Bernoulli (1667-1748): função é expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes. Euler (1707-1783): função é uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes.	**Função é uma equação, uma fórmula.** **Variável é um símbolo, um elemento de linguagem.**
XIX	Dirichlet (1805-1859): uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é função unívoca de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada variável dependente.	**Função é uma correspondência entre Variáveis.** **Variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números.**
XX	Grupo Bourbaki (1939): função f é um conjunto de pares ordenados de elementos, sujeitos à condição seguinte: se (a,b) e (a,c) são elementos de f, então b=c.	**Função é um conjunto de pares ordenados.** **Omite-se variável.**

Figura 2: Evolução da definição do conceito de função

2.2 A importância das representações do conceito de função. Terminologia sobre funções utilizada na investigação

2.2.1 A importância das representações do conceito de função

O conceito de função é tido como um elemento fundamental na organização da Matemática. Yerushalmy e Schwartz acreditam que "… a função é um objecto fundamental da Álgebra e obrigatoriamente está presente numa variedade de representações desde o início do ensino e aprendizagem da álgebra" (1993, p. 41) e o conceito de função tem sido um dos principais focos de atenção da Investigação em Educação Matemática desde os anos 80 (DeMarois e Tall, 1996).
No âmbito do ensino e aprendizagem do conceito de função, nos ensinos básico e secundário (alunos dos 12 aos 18 anos), as três representações que mais frequentemente

são utilizadas, que figuram nas programações e que permitem a construção do conceito são: as tabelas numéricas, as representações algébricas e as representações gráficas. É curioso verificar que a representação verbal na língua natural, tão utilizada quanto as outras, não assume um papel individualizado no quotidiano de professores e alunos. De qualquer forma, a necessidade de que os alunos interliguem estas representações é inquestionável, já que a tendência dos alunos a compartimentar e desligar as várias representações não ajuda à resolução de situações que incluam este conceito (Ryan, 1994).

A introdução do conceito de função, ao nível pré-algébrico, costuma assentar na descrição da relação de duas quantidades através da linguagem natural e nas tabelas numéricas mas, rapidamente, a construção do conceito passa a centrar-se nas representações geométricas e algébricas. Esta forma de introdução e desenvolvimento do conceito de função é compatível com a perspectiva evolutiva. Como vimos na secção anterior, a relação entre as duas quantidades aparece na Antiguidade e, na Idade Moderna, evolui para a relação entre representações geométricas e algébricas até à relação de correspondência. Kleiner (1989) descreve o desenvolvimento do conceito de função ao longo dos últimos trezentos anos nos seguintes termos, "Um *jogo da corda* entre dois elementos, entre duas imagens mentais: a geométrica (expressa na forma de uma curva) e a algébrica (expressa como uma fórmula – primeiro finita, admitindo depois infinitos termos; a chamada expressão analítica). […] Subsequentemente, aparece um terceiro elemento, nomeadamente, a definição "lógica" de função como sendo uma correspondência (com uma imagem mental de máquina de Imput-output)." Todavia, convém notar que o contexto geométrico apareceu primeiro. As imagens de Newton e Leibniz eram geométricas. Com o tempo, a ênfase foi posta nas fórmulas e nas equações relacionadas com as curvas associadas, eventualmente conduzindo-nos a elas, mas sendo independente da curva original (Kleiner, 1989).

A prática mostra que assim é nas aulas de matemática de hoje: a imagem geométrica é subordinada à forma algébrica ou, então, é pouco referida. Assim, as fórmulas e as equações (representação algébrica) têm existência própria e independente. "Se assim é, que mensagem passa ao aluno que prefere as imagens matemáticas?" (Ryan, 1994). Mais, será que o tratamento independente da representação algébrica (como objecto e como processo) promove a separação e compartimentação entre representações?

No dia-a-dia, podemos ver que a função como objecto ou como processo se tornou um tema muito popular na literatura relativa ao estudo da compreensão e construção do conceito de função. Vejam-se, por exemplo, os trabalhos de David Tall, Ed Dubinsky, Guershon Harel, Phill DeMarois e Anna Sfard, entre tantos outros.

Abstraindo-nos da importância de cada uma das representações do conceito de função, o tratamento do conceito nas aulas de matemática envolve quase sempre as representações geométricas e as representações algébricas. O uso de umas ou de outras depende do objectivo perseguido pelo professor, por isso podemos pensar que estas duas representações têm naturezas didácticas diferentes. Schwartz e Yerushalmy (1992) argumentam que a representação simbólica é relativamente mais eficiente em salientar as características da função como um processo, enquanto que a representação gráfica é mais eficiente a salientar a essência da função como entidade. Cabe ao professor não deixar que a falsa concepção de separação entre representações se arreigue no aluno; tal como alertam Dubinsky e Harel (1992), as duas representações estão inextricavelmente ligadas. A dependência natural (ou aprendida) entre as duas representações pode ser

uma razão para as dificuldades dos alunos com o processo de ligação entre representações. É próprio da nossa experiência, como professores, depararmo-nos com as atrapalhações dos alunos com a representação algébrica, quando a representação geométrica resolveria o problema de forma estrategicamente mais eficiente.
Se existem dificuldades com a relação entre a representação simbólica e a gráfica nos alunos mais avançados, não se pense que a introdução do conceito de função à custa de tabelas numéricas é mais fácil para os alunos mais jovens. A prática corrente nas escolas usualmente desenvolve a base intuitiva para a construção do conceito de função mediante a utilização da representação numérica, propondo pares ordenados de valores entrada/saida; por exemplo, a utilização da estratégia "adivinha a regra". A utilização de tabelas numéricas como forma de introdução do conceito pode ser, na realidade, mais complicada do que supomos. Vista como a forma ideal de introdução do conceito de função, por mostrar a relação funcional entre as variáveis dependentes e independentes, os padrões que esperamos que os alunos obtenham das tabelas podem estar tanto no plano aritmético como no plano algébrico. Perceber padrões numéricos pode ser mais complicado do que pensamos: obter uma forma algébrica a partir de dados numéricos envolve um salto de perspectiva considerável, de um par isolado de dados para uma concepção global de todos os pares de dados; por outras palavras, ver o geral através do que é particular (Ryan, 1994).
Das linhas anteriores, e também de toda a secção anterior, se pode constatar que, tanto no processo de ensino e aprendizagem do conceito de função como na evolução histórica deste conceito,

- existiu e existe a necessidade de definir cabalmente o conceito de função;
- a definição e as representações, embora intimamente ligadas, podem ser pensadas e apresentadas separadamente.

Historicamente, pudemos ver que todos os resultados obtidos ao longo dos últimos trezentos anos se baseiam nas representações do conceito de função e a definição, por outro lado, vai sendo *afinada* de acordo com esses resultados e de forma a enquadrá-los. Na sala de aula, tal como ao longo da história, a definição do conceito de função é da maior importância (na voz dos professores) mas, na prática, são as representações que constituem o material de trabalho que professores e alunos utilizam na construção do conceito de função.

A relação dos alunos com as representações do conceito de função parece ser mais fácil que a relação que eles conseguem manter com a sua definição. Aliás, o sentido que os alunos conseguem perceber na definição do conceito é tornado mais claro à medida que tomam contacto com as suas representações. Muitas vezes, quando perguntamos a um aluno o que é uma função, ou ele não entende que lhe estamos perguntar a definição do conceito ou, se é consciente do sentido da pergunta, a resposta pode ser qualquer coisa do género: " – Professor, eu sei o que é, mas não sei explicar!" Perante esta resposta, muitos professores menos experientes poderão pensar que, não sabendo a definição, não estarão em condições de responder correctamente a uma qualquer situação que envolva o conceito de função. Contudo, os professores mais experientes sabem que, mesmo não conseguindo reproduzir de forma correcta a definição do conceito de função, muitos alunos conseguem resolver correctamente os exercícios e os problemas com que possam ser confrontados.

A razão pela qual alguns alunos conseguem resolver as situações que lhes são apresentadas, embora não consigam reproduzir fielmente a definição de função fornecida pelo professor (recentemente ou após um período de tempo alargado), é que eles possuem uma estrutura relativa ao conceito de função que não depende da formulação verbal da definição. Tall e Vinner (1981) explicaram muito bem o que se acabou de descrever com a introdução dos termos *Concept Image* e *Concept Definition*.

> "Usaremos o termo *imagem do conceito* para descrever toda a estrutura cognitiva que está associada ao conceito, a qual inclui todas as imagens mentais e as propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos tempos através de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo contacta com novos estímulos e amadurece." (Tall e Vinner, 1981, p. 152).

Mais tarde, o sentido de "as imagens mentais e as propriedades e processos associados" é explicitado por Vinner: "… as representações visuais, as imagens mentais, as impressões, e as experiências associadas com o nome do conceito." (1991, p. 61). Vinner recorre às representações para melhor explicar aquilo que a imagem do conceito inclui. A expressão *representações visuais* não deve ser entendido no sentido restrito das representações gráficas, pelo contrário, o sentido amplo inclui a *visão* tanto dos gráficos, como das equações, como das tabelas numéricas (no caso do conceito de função). Por coincidência ou não, o conceito que Tall e Vinner apresentam como exemplo é, precisamente, o conceito de função. Nas suas palavras,

> "Por exemplo a definição do conceito de função matemática pode ser enunciada como 'a relação entre dois conjuntos A e B em que para cada elemento de A está relacionado com precisamente um elemento de B'. Mas as pessoas que estudaram funções podem lembrar-se, ou não, da definição de função e a imagem do conceito pode incluir muitos outros aspectos, tais como a ideia de que a função é dada por uma regra ou fórmula, ou talvez que várias formulas podem ser usadas em diferentes partes do domínio A. Podem existir outras noções, por exemplo, as funções podem ser ensinadas como uma *acção* que mapeia *a* de A em *f(a)* em B, ou um *gráfico*, ou uma *tabela de valores*." (Tall e Vinner, 1998, p. 153).

Mais uma vez, por coincidência ou não, as representações do conceito de função são as experiências e as imagens mentais que, segundo os autores, se incluem na imagem do conceito, justamente por ser com elas que todos trabalhamos a grande parte do tempo, depois de termos utilizado a definição durante um curto período (Tall e Vinner, 1981).
Assim, imagem do conceito de função incorpora mais do que imagens mentais de parábolas, de tabelas e de equações. Azcárate, explica melhor o que na mente dos alunos constitui a imagem do conceito de função; o que são os processos, os procedimentos e as propriedades das funções segundo os conhecimentos (muitas vezes implícito) de alunos de 16-18 anos:

- uma função tem sempre uma expressão algébrica;
- o gráfico de uma função linear passa pela origem das coordenadas;
- o gráfico de uma função passa sempre pela origem das coordenadas;
- numa função os valores da variável são sempre naturais (ou inteiros, ou …);

- a função soma de duas funções obtém-se …;
- numa função dada pela sua expressão algébrica, a imagem de um valor qualquer $x = a$ obtém-se …;
- numa função dada pelo seu gráfico, a imagem de um valor qualquer $x = a$ obtém-se …;
- a derivada de um produto (ou do cociente) de duas funções é o produto (cociente) das ditas funções. (1995, p. 56)

Se por um lado, a *imagem do conceito* é, muitas vezes, suficiente para lidar com muitas situações, a *definição do conceito* não é menos importante para outras. Mas primeiro vejamos o que entendem aqueles autores por definição do conceito:

> "A definição do conceito (se ela existir) é um assunto bem diferente. Iremos considerar a *definição do conceito* como sendo uma forma verbal usada para especificar aquele conceito. Pode ser aprendida pelo aluno de maneira memorizada ou aprendida significativamente e relacionada em maior ou menor grau com o conceito como um todo. Pode ser também uma reconstrução pessoal do aluno da definição. Será, então, uma forma verbal que o aluno usa para a sua própria exposição da sua […] imagem do conceito. Quer a definição do conceito lhe seja dada ou por si construída, o aluno pode fazê-la variar de tempos em tempos. Desta maneira a definição do conceito *pessoal* pode diferir da definição do conceito *formal*, sendo a última a definição do conceito que é aceite pela comunidade matemática em geral." (Tall e Vinner, 1998, p. 152).

Em geral, a imagem que o aluno formou do conceito é suficiente para lidar com determinadas situações. No entanto, ao longo da sua formação ele será confrontado com alguma situação que entrará em conflito com a imagem do conceito que na altura possuir. Nesse momento a sua imagem do conceito irá necessitar de algum ajuste, de modo a incluir de forma coerente a situação que gerou o conflito. Este processo é bem explicado por uma metáfora. A *Metáfora do Andaime* ilustra de forma precisa o papel da definição do conceito na actividade matemática de um indivíduo. No construção da imagem do conceito, a definição desse conceito tem o papel equivalente ao de um andaime durante a construção de um edifício que, depois de construído o edifício, pode ser retirado porque o edifício já não necessita do seu auxilio na sustentação. Assim, o papel da definição aparece como o suporte para a construção da imagem do conceito que, uma vez construída, é ela a que se utiliza e dispensa a definição do conceito. Porém, em qualquer altura, esse andaime pode ser novamente montado se o edifício necessitar de alguma intervenção; do mesmo modo, a definição poderá ser utilizada, se necessário, para ajustar a imagem às novas vivências do indivíduo (Figueiredo, 2005).

A estrutura da imagem do conceito de função de um indivíduo pode ser representada por um diagrama. O *Mapa Conceptual* é um diagrama onde os nós representam conceitos e as conexões representam as ligações cognitivas entre eles. O uso de mapas conceptuais no ensino e na investigação tem tido uma ampla utilização em Ciências da Educação (e.g. Novak, 1985, 1990).
Novak introduziu em 1984 os mapas conceptuais como recurso cognitivo e como recurso investigativo. Na investigação, Novak desenhou este tipo de diagramas para apresentar de forma concentrada uma representação daquilo que os entrevistados tinham

respondido (Novak e Gowin, 1984). Em investigação, este tipo de diagramas pode ser utilizado para seguir o desenvolvimento conceptual de um dado indivíduo ou de um grupo de indivíduos. Por exemplo, no âmbito do conceito de função, McGowen e Tall (1999) usaram os diagramas de Novak para fazer o seguimento do desenvolvimento cognitivo de vários estudantes ao longo de um curso de matemáticas superiores, procurando diferenças qualitativas entre estudantes com diferentes graus de aptidão para a matemática. Através dos diagramas construídos pelos estudantes, estes investigadores puderam seguir a forma como se desenvolveu o conceito de função como princípio organizativo do seu curso de Álgebra. Mais recentemente Grevholm (2008) usou uma técnica semelhante, com mapas conceptuais, como instrumento de investigação para um estudo de cariz longitudinal de um grupo de estudantes para professores sobre o seu desenvolvimento conceptual. Os mapas conceptuais foram usados para analisar previamente os grupos de conceitos que faziam parte dos conteúdos do curso de formação de professores, bem como instrumento para que os alunos pudessem expressar as suas concepções sobre funções, equações, e outros conceitos.
O papel dos *Mapas Conceptuais* nesta investigação não se aplica à análise do desenvolvimento do conceito de função nos alunos. Também não se aplica à professora que foi informante, como forma de *ilustrar* a sua imagem do conceito de função. Os mapas conceptuais servirão apenas para *ilustrar* de forma concentrada como o conceito de função é tratado no 10º ano de escolaridade (15-16 anos) do sistema de ensino português.

2.2.2 Terminologia sobre funções utilizada na investigação

O conceito de função tem sido, nas últimas décadas, considerado fundamental no ensino e aprendizagem da matemática. É certo que o grosso da atenção dada ao assunto versa, sobretudo, no que respeita às dificuldades de aquisição deste conceito por parte dos alunos e, também, todos os obstáculos e concepções alternativas que todos os dias são evidenciados por eles. Porém esta atenção não se manifesta apenas naquela vertente, uma grande maioria das investigações feitas sobre a aquisição de conceitos e evolução de estruturas cognitivas nos alunos é feita com base neste conceito. Um número muito significativo de investigadores dedicou muita atenção e publicaram profusamente sobre o conceito de função e aspectos com ele relacionado. Para referir apenas alguns, podemos considerar os trabalhos de Carmen Azcárate (1995, 1997), David Tall (1981, 1989), Shlomo Vinner (1991), Phill Demarois (1996, 1999), Anna Sierpinska (1988), Ed Dubinsky (1996, 2001), Ann Sfard (1992) ou Eduard Gray (1994) cujos trabalhos sobre a construção de conceitos se baseiam quase sempre no conceito de função.

Da revisão bibliográfica feita chamou-nos a atenção a variedade de formas de tratar este tema e o número de investigações orientadas no sentido de aclarar pontos e pormenores relacionados com aspectos ou sub temas do conceito de função. Não é nossa intenção fazer um relato extensivo dos actuais interesses e linhas de investigação, contudo há alguns trabalhos que nos pareceram poder dar uma base orientadora à metodologia empregue para a investigação que se descreve.

No início da década de noventa estudava-se a aquisição do conceito de função segundo duas dimensões diferentes: em *profundidade* e em *amplitude*. Este conceito era tanto mais aprofundado pelo aluno quanto maior fosse o grau de abstracção que ele pudesse

conseguir e, pelo outro lado, seria mais amplo se o aluno pudesse desenvolver e inter relacionar diferentes representações do conceito de função. Nesse tempo investigava-se o modo em como a imagem do conceito no aluno podia ser descrito segundo estas duas dimensões (DeMarois e Tall, 1996).
Em 1996 Phill DeMarois e David Tall apresentaram a sua visão da forma como o aluno constrói o conceito de função, bem como o modo de descrever como esse conceito vai sendo compreendido. O modelo apresentado assenta nos termos ***Camadas*** e ***Facetas***. O termo ***facetas*** destina-se a descrever a dimensão relativa à *amplitude* do conceito de função, enquanto o termo ***camada*** se destina a descrever a dimensão relativa à *profundidade* com que o conceito de função é construído pelo aluno.
O que nos interessou neste modelo foi o facto de se destinar exclusivamente ao conceito de função. Por outro lado, visto que na investigação que descreveremos se recorreu ao conceito de função como veículo que permitiu analisar a exemplificação de uma professora, pensamos ser este o modelo mais adequado a ser utilizado na investigação.

O modelo que escolhemos inclui o termo ***faceta*** que deve ser entendido como "qualquer uma das perspectivas ou aspectos" e o termo ***camada*** entendido como "uma das várias capas ou estratos". A designação das várias camadas variou desde a sua primeira apresentação em 1996 até à designação apresentada em 1999.
As camadas do conceito de função, especialmente as camadas de **acção**/**processo**/**objecto**, foram alvo de tratamento muito extensivo na literatura específica. De acordo com Cuoco, "os estudantes que vêem as funções como acções pensam a função como sendo uma sequência de cálculos isolados ou manipulações" (Cuoco, 1994, p.122, citado por DeMarois e Tall, 1996). Os procedimentos específicos são vistos como estando ao nível da acção. A este nível os alunos dependem do procedimento realizado para obterem os outputs através dos inputs. Cuoco sugere que "os alunos que vêm a função como um procedimento pensam a função como uma transformação dinâmica que pode ser composta por outras transformações" (ibib, ibidem) e continua sugerindo que os alunos que conseguem ver as funções como "estruturas atómicas que podem ser inputs e outputs de um processo de ordem superior" (ibid, ibidem). Os alunos alcançam a maior profundidade – a camada **proceito** – quando conseguem demonstrar flexibilidade ao ver a função simultaneamente como um processo e como um objecto, segundo a situação o requeira (DeMarois e Tall, 1996).
Mais tarde as designações das camadas são alteradas e o sentido do seu significado é ajustado. Assim, com um crescente grau de profundidade teremos as noções de **Pré-procedimento**, **Procedimento**, **Processo**, **Objecto** e **Proceito**. O **pré-procedimento** denota que o aluno ainda não alcançou a camada procedimento. Os alunos que se situam na camada relativa ao **procedimento** dependem da realização de uma sequência de acções passo-a-passo. Quando se situam na camada relativa ao **processo**, os alunos aceitam a existência de um processo entre o input e o output sem a necessidade de conhecerem os passos o compõem; neste patamar, os estudantes vêem dois procedimentos com os mesmos input-output como sendo o mesmo processo. Quando os alunos passam à camada **objecto** denotam a capacidade de tratar a ideia como um objecto mental que é manipulável ao qual um processo pode ser aplicado. A camada **proceito** indica que o aluno alcanço a capacidade de se mover entre o processo e o objecto mental de uma forma flexível (DeMarois e Tall, 1996).

O termo proceito pode ser entendido como uma camada, como vimos. Porém, anteriormente, o termo Proceito é descrito como uma simbiose entre três coisas: *um processo* (por exemplo a adição entre 3 e 4), *um conceito* produzido por esse processo (a soma) e e um sinal que invoca tanto o processo como o conceito (por exemplo 3+4) (Grey e Tall, 1994). No que concerne à camada mais profunda deste modelo relativamente ao conceito de função, o proceito apenas é alcançado pelos estudantes que evidenciam uma flexibilidade em ver e manipular uma função tanto como um processo como um objecto quando situados numa situação problemática.

Por outro lado, no que se refere à dimensão que descreve a construção do conceito de função na sua amplitude, importa descrever as facetas que integram o modelo.
DeMarois e Tall (1996) empregam o termo *faceta* para construir uma descrição da dimensão relativa à amplitude do conceito de função que um individuo tenha alcançado em dado momento. As facetas de uma ideia matemática vinculam-se às várias formas de a pensar, de a referir e de a transmitir aos outros, incluindo os aspectos: verbal (falado), escrito, coloquial (informal ou idiomático), convenções relativas à notação, numérica, simbólica e geométrica (visual). Estes aspectos não se pretendem independentes ou exaustivos, mas proporcionam um amplo enquadramento teórico que se ajusta à […] análise do conceito de função (DeMarois e Tall, 1996).
Posteriormente o modelo foi ligeiramente alterado no que concerne à divisão e designação das facetas. As facetas apresentadas incluem a ***notação*** do conceito de função (inclui o significado de $f(x)$), o uso ***coloquial*** de uma máquina de funções como caixa de input-output, a ***simbologia*** standard (formula algébrica), ***numérica*** (tabela) e ***geométrica*** (gráficos) (DeMarois e Tall, 1999).

Considerando as facetas e as camadas descritas por DeMarois e Tall, na sua versão de 1999, o modelo poderá ser representado como um disco dividido em fatias (as facetas) e de sectores circulares concêntricos (as camadas) conforme a figura 3. Cada faceta deve estar em contacto com qualquer outra, esta articulação pode ser obtida mediante a recolocação das fatias, que podem ser destacadas e encaixadas em qualquer outro sítio.

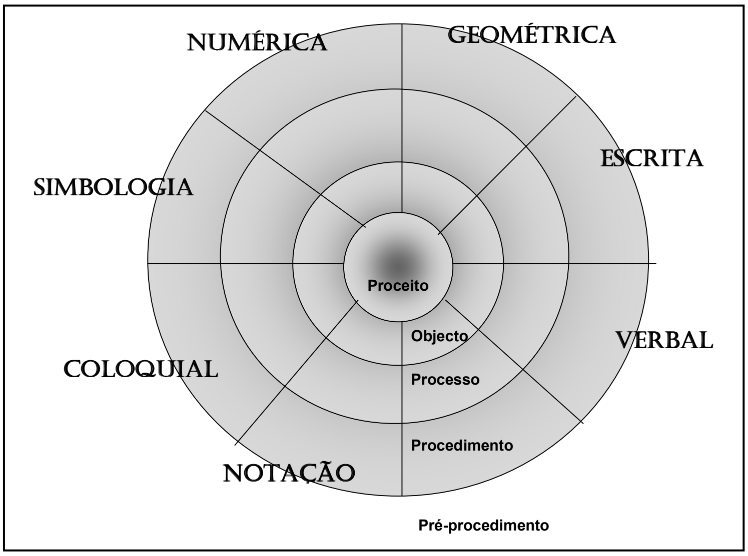


Figura 3: As facetas e as camadas na construção do conceito de função

Este modelo ainda suporta as relações entre as várias facetas. As quatro facetas, Numérica, Simbólica, Coloquial e Gráfica possuem ligações que poderão, ou não, ser evidenciadas se o estudante realiza as ligações entre as várias facetas, conforme a figura 4.

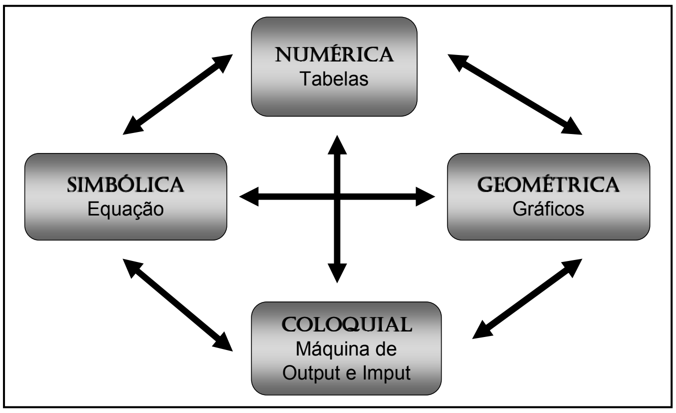


Figura 4: Relação entre as facetas do conceito de função

Este modelo foi aplicado pelos dois investigadores com o objectivo de estudar e representar o perfil dos alunos em termos da construção do conceito de função. Por meio de actividades focadas a cada uma das facetas e analisando o nível de aprofundamento do aluno nessa faceta, é possível apresentar o perfil de um aluno. O perfil obtido é representado pela coloração de sectores no círculo e da introdução de ligações entre as facetas.
O resultado de um perfil pode ser representando pelos diagramas

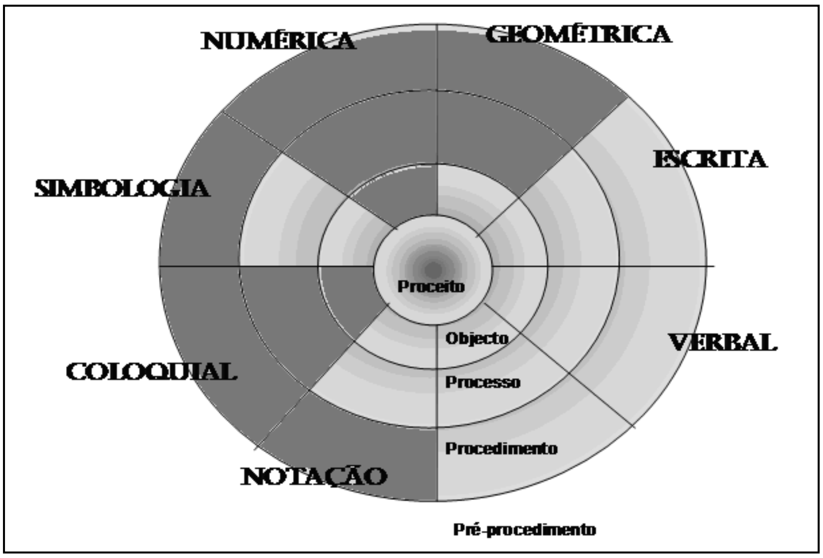


Figura 5: Exemplo de perfil 1

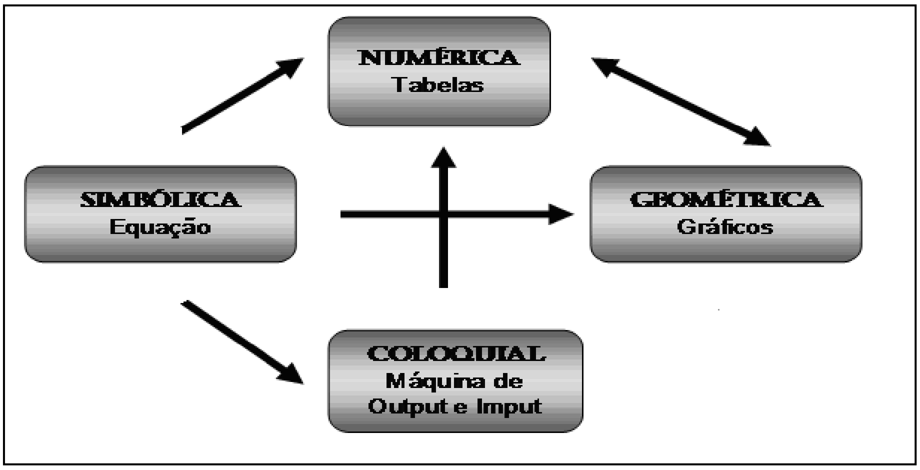


Figura 6: exemplo de perfil 2

Por tudo o que se expôs, interessa-nos este tipo de modelo porque se adequa ao nosso estudo de forma muito particular, pois fornece as perspectivas adequadas à observação e análise de qualquer processo de exemplificação que se apresente num contexto de conceito de função.
Porém, no nosso anseio de recolher dados e tentativa de descrever situações não perdemos a noção de que é impossível saber o que os estudantes realmente pensam. Tudo o que se pode fazer é ver o que eles conseguem atingir, dizer e fazer (Asiala et al, 1996).

2.3 O tema Funções no 10º ano de escolaridade

O tema "Funções" é um conteúdo que atravessa todo o percurso escolar de um aluno do 2º e 3º ciclos e do ensino secundário (12-18 anos) em Portugal. No ensino secundário (16-18 anos), tem uma importância tal que lhe são dedicados três trimestres, um em cada um dos três anos do secundário, nos 10º, 11º e 12º anos.
Interessa, portanto, fazer uma análise mais detalhada para que se possa compreender melhor a importância deste tema, quais os conteúdos a tratar no 10º ano e a profundidade e metodologias a considerar. As articulações entre os conceitos dentro de cada conteúdo ficam plasmadas em diagramas conceptuais.
Pensamos que desta análise resultará uma imagem de qual deverá ser o tratamento a dar aos temas e poder enquadrar aquele que foi dado pela professora aos seus alunos.

O programa curricular (referente à disciplina de MATEMÁTICA-A do 10º ano do ensino secundário, na sua reformulação de 2001, indica no que concerne ao capitulo das Funções que: "*A abordagem das funções reais considerará sempre estudos dos diferentes pontos de vista – gráfico, numérico e algébrico – sobre tipos simples de funções, desde as algébricas inteiras (que são tratadas no 10º ano), passando pelas fraccionárias e acabando nas transcendentes – Exponenciais e logarítmicas ou trigonométricas.*" (Ministério da Educação, 2001, pág. 2), e segue *" Os conhecimentos sobre funções, indispensáveis para a compreensão do mundo em que vivemos, vão ser* *ampliados com base no estudo analítico, numérico e gráfico devendo privilegiar o trabalho intuitivo com funções que relacionam variáveis da vida corrente, da Geometria, da Física, da Economia ou de outras disciplinas. Em particular faz-se o estudo detalhado de algumas funções polinomiais e da função módulo e resolvem-se analítica, gráfica e numericamente algumas equações e inequações. "* (pág. 28) e também *"Este tema tem uma ênfase muito grande na ligação entre as fórmulas e as representações geométricas. Esta ligação é muito importante para todos os que utilizarem matemática. A capacidade de as relacionar é uma capacidade fundamental para o mundo de hoje e do futuro e assim este tema deverá fornecer uma formação para a vida toda tão básica como a tabuada."* (pág. 28-29).

De um ponto de vista abrangente, as considerações gerais que este programa curricular (referente à disciplina de MATEMÁTICA A do 10º ano do ensino secundário) faz no início sobre a generalidade dos conteúdos, e com as funções em particular, prende-se com as necessidades que se presume um ensino secundário de qualidade deve suprir, *"Um cidadão com formação secundária necessita mais de noções que de notações para enfrentar as situações que precise de compreender (e esclarecer) e os problemas que tenha de resolver."* (pág. 5). As noções referidas são sem dúvida conceitos ou suas construções que este estudo ilustra.

Se nos debruçarmos mais atentamente em aspectos mais particulares, isto é, no que é importante em termos de Conteúdos e Indicações Metodológicas destes programas curriculares, podemos ressaltar:

Quanto aos Conteúdos:

- Função, gráfico e representação gráfica.
- Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos.
- Resolução de problemas envolvendo funções polinomiais.

Quanto às Indicações Metodológicas:

- Para todos os tipos de funções devem ser dados exemplos a partir de questões concretas (tanto de outras disciplinas que os estudantes frequentem — Física, Química, Economia, etc. — como de situações reais — por exemplo de recortes de jornais). Particular importância deverá ser dada a situações problemáticas, situações de modelação matemática e a exemplos de Geometria, …
- As propriedades sugeridas são: domínio, contradomínio, pontos notáveis (intersecção com os eixos coordenados), monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, limites nos ramos infinitos.
- O estudo das transformações simples de funções deve ser feito tanto usando papel e lápis como calculadora gráfica ou computador; a função f tanto pode ser dada a partir de um gráfico como a partir de uma expressão analítica.
- Deve ser dada ênfase especial à resolução de problemas usando métodos numéricos e gráficos, nomeadamente quando forem usadas inequações.
- A resolução analítica de problemas deve ser sempre acompanhada da verificação numérica ou gráfica.

Para uma melhor visualização de todo o processo de leccionação dos temas sobre funções no 10º ano, seguem-se os planos de unidade e os mapas conceptuais respectivos:

PLANO DE UNIDADE
1. Funções e gráficos

Matemática A – 10.º ano

Os tempos são períodos de 45 minutos

Nº de Tempos	CONTEÚDOS	OBJECTIVOS ESPECÍFICOS	ESTRATÉGIAS	AVALIAÇÃO
2	*Nota histórica Introdução ao estudo das funções*	• Enquadrar historicamente o conceito de função; • Distinguir variável dependente de variável independente.	• Utilização da calculadora gráfica; • Utilização de acetatos; • Utilização do View Screen; • Utilização de fichas formativas	• Observação directa dos alunos no que diz respeito ao comportamento, motivação e realização de tarefas propostas; • Trabalhos para casa; • Fichas de avaliação
	1. Conceito de função	• Compreender a noção intuitiva de função; • Verificar se uma correspondência entre dois conjuntos é uma função; • Identificar o domínio de uma função; • Identificar o contradomínio de uma função; • Identificar o conjunto de chegada de uma função; • Escrever um modelo matemático que represente uma função; • Definir função; • Calcular a imagem de um objecto dada uma função; • Definir função real de variável real; • Determinar o domínio de uma função; • Reconhecer uma função através da sua definição verbal; • Reconhecer uma função através da sua definição algébrica; • Reconhecer uma função através da sua definição gráfica; • Reconhecer uma função através da sua definição numérica.		
	2. Gráfico e representação gráfica de uma função	• Definir gráfico de uma função; • Representar graficamente uma função; • Utilizar o teste da recta		

		vertical para verificar se um gráfico representa uma função; • Representar o gráfico de uma função através da calculadora gráfica.		
3	*3. Pontos notáveis de uma função*	• Definir zeros de uma função; • Determinar a intersecção do gráfico com o eixo das abcissas; • Determinar a intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas; • Identificar a intersecção do gráfico com o eixo das abcissas; • Identificar a intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas; • Definir extremos absolutos de uma função; • Definir extremos relativos de uma função; • Identificar os extremos absolutos de uma função; • Identificar os extremos relativos de uma função; • Definir função crescente; • Definir função decrescente; • Definir função estritamente crescente; • Definir função estritamente decrescente; • Identificar um intervalo onde a função é crescente; • Identificar um intervalo onde a função é decrescente; • Identificar um intervalo onde a função é estritamente crescente; • Identificar um intervalo onde a função é estritamente decrescente; • Identificar um intervalo onde a função é constante; • Estudar a monotonia de uma função; • Construir a tabela de variação de uma função; • Compreender o conceito intuitivo de continuidade; • Verificar se uma função é contínua; • Estudar o comportamento de uma função quando a variável independente tende para mais infinito; • Estudar o comportamento de uma função quando a variável independente tende para menos infinito.		
1	*4. Função afim*	• Definir função afim; • Reconhecer que uma função constante é um caso particular de uma função afim; • Reconhecer que uma função linear é um caso particular de uma		

		função afim; • Resolver exercícios da vida real envolvendo funções.		

PLANO DE UNIDADE
2. Transformações e simetrias do gráfico de uma função

Matemática A – 10.º ano

Os tempos são períodos de 45 minutos

Nº de tempos	CONTEÚDOS	OBJECTIVOS ESPECÍFICOS	ESTRATÉGIAS	AVALIAÇÃO
1	*Nota histórica. Introdução ao estudo das transformações de funções*	• Enquadrar historicamente o aparecimento das primeiras máquinas de calcular; • Utilizar a calculadora gráfica para representar algumas funções básicas.	• Utilização da calculadora gráfica; • Utilização de acetatos; • Utilização do View Screen; • Utilização de fichas formativas	• Observação directa dos alunos no que diz respeito ao comportamento, motivação e realização de tarefas propostas; • Trabalhos para casa; • Fichas de avaliação
	1. Translação do gráfico de uma função	• Efectuar a translação horizontal do gráfico de uma função; • Efectuar a translação vertical do gráfico de uma função; • Escrever a expressão algébrica de uma função dado o seu gráfico; • Estudar as características de uma família de funções que se obtém de uma função dada, adicionando uma constante à variável independente e/ou à variável dependente;		
2	*2. Expansão e contracção na vertical do gráfico de uma função*	• Estudar a expansão na vertical de uma função g definida por $g(x) = cf(x),$ para $c > 1$, conhecendo o valor de c; • Estudar a contracção na vertical de uma função g definida por $g(x) = cf(x),$ para $0 < c < 1$, conhecendo o valor de c.		
	3. Expansão e contracção na horizontal do gráfico de uma	• Estudar a expansão na horizontal de uma função g definida por		

	função	$g(x) = f(cx),$ para $0 < c < 1$, conhecendo o valor de c; • Estudar a contracção na horizontal de uma função g definida por $g(x) = f(cx),$ para $c > 1$, conhecendo o valor de c.		
	4. Expansão e contracção do gráfico de uma função: generalização	• Estudar a expansão na horizontal de uma função g definida por $g(x) = f(cx),$ para $0 < c < 1$; • Estudar a contracção na horizontal de uma função g definida por $g(x) = f(cx),$ para $c > 1$; • Estudar a expansão na vertical de uma função g definida por $g(x) = cf(x),$ para $c > 1$; • Estudar a contracção na vertical de uma função g definida por $g(x) = cf(x),$ para $0 < c < 1$.		
1	*5. Simetrias do gráfico de uma função. Função par e função ímpar*	• Efectuar a simetria relativamente ao eixo dos yy do gráfico de uma função; • Definir função par; • Identificar graficamente uma função par; • Identificar analiticamente uma função par; • Efectuar a simetria relativamente ao eixo dos xx do gráfico de uma função; • Efectuar a simetria relativamente à origem do referencial do gráfico de uma função; • Definir função ímpar; • Identificar graficamente uma função ímpar; • Identificar analiticamente uma função ímpar.		

PLANO DE UNIDADE
3. Funções Quadráticas

Matemática A – 10.º ano

Os tempos são períodos de 45 minutos

Nº de tempos	CONTEÚDOS	OBJECTIVOS ESPECÍFICOS	ESTRATÉGIAS	AVALIAÇÃO
1	*Nota histórica. Introdução ao estudo de uma função quadrática.*	• Enquadrar historicamente função quadrática.	• Utilização de acetatos; • Utilização da calculadora gráfica; • Utilização do View Screen;	• Observação directa dos alunos no que diz respeito ao comportamento, motivação e realização de tarefas propostas; • Trabalhos para casa; • Fichas de avaliação
	1. Função quadrática. Domínio e gráfico	• Definir função quadrática; • Representar graficamente uma função quadrática.		
	2. Concavidade do gráfico de uma função quadrática	• Relacionar o sinal do coeficiente de x^2, de uma função quadrática, e o sentido da concavidade do gráfico da função; • Indicar o sentido da concavidade do gráfico de uma função quadrática.		
1	*3. Intersecção do gráfico de uma função quadrática com os eixos coordenados*	• Determinar os pontos de intersecção do gráfico de uma função quadrática com o eixo dos yy; • Determinar os pontos de intersecção do gráfico de uma função quadrática com o eixo dos xx; • Interpretar problemas da vida real; • Resolver em IR, equações do segundo grau através da representação gráfica de uma função quadrática adequada.		
1	*4. Aplicação do conhecimento dos pontos de intersecção do gráfico de uma função quadrática com o eixo dos xx*	• Identificar os intervalos onde uma função quadrática é positiva; • Identificar os intervalos onde uma função quadrática é negativa; • Resolver em R, inequações do segundo grau através da representação gráfica de uma função quadrática adequada.		
2	*5. Outras propriedades da função quadrática. Contradomínio, vértice e eixo de simetria da parábola*	• Definir eixo de simetria do gráfico de uma função quadrática; • Escrever a equação do eixo de simetria do gráfico de uma função quadrática; • Definir vértice do gráfico de função quadrática;		

		• Escrever as coordenadas do vértice do gráfico de uma função quadrática; • Relacionar o gráfico da função $f(x)=ax^2, a \neq 0$ com o gráfico da função $f(x)=x^2$; • Relacionar o gráfico da função $f(x)=ax^2+c, a \neq 0, c \in IR$ com o gráfico da função $f(x)=ax^2, a \neq 0$; • Relacionar o gráfico da função $f(x)=a(x+d)^2+c, a \neq 0, c,$ com o gráfico da função $f(x)=ax^2+c, a \neq 0, c \in IR$; • Relacionar o gráfico da função $f(x)=a(x+d)^2+c, a \neq 0, c,$ com o gráfico da função $f(x)=ax^2, a \neq 0$; • Escrever a equação de uma parábola dado o seu vértice e um seu ponto; • Resolver problemas de investigação usando famílias de funções quadráticas.		
2	*6. A função quadrática em contexto real*	• Aplicar os conhecimentos sobre a função quadrática no estudo de situações reais ou em contexto real, utilizando o modelo matemático dado ou definindo esse modelo.		
	7. Parábolas	• Estudar as diferentes secções cónicas resultantes do corte de um duplo cone por um plano; • Definir parábola como lugar geométrico.		

PLANO DE UNIDADE
4. Função módulo

Matemática A – 10.º ano

Os tempos são períodos de 45 minutos

Nº de tempos	CONTEÚDOS	OBJECTIVOS ESPECÍFICOS	ESTRATÉGIAS	AVALIAÇÃO
1	*Introdução ao estudo da função módulo*	• Definir módulo de um número real.	• Utilização da calculadora gráfica;	• Observação directa dos alunos

	1. Função módulo. Gráfico e propriedades	• Definir função módulo; • Representar graficamente função módulo; • Fazer o estudo da função módulo.	• Utilização do View Sreen. • Utilização de acetatos;	no que diz respeito ao comportamento, motivação e realização de tarefas propostas; • Trabalhos para casa; • Fichas de avaliação
	2. Gráfico da função $y=\|f(x)\|$	• Relacionar o gráfico da função $y = f(x)$ com o gráfico da função $y=\|f(x)\|$; • Fazer o estudo de funções definidas por $g(x)=\|f(x)\|$.		
2	*3. Funções com módulos*	• Resolver em IR condições com módulos usando funções adequadas; • Verificar que o módulo do produto é igual ao produto do módulo; • Verificar que o módulo do quociente é igual ao quociente do módulo; • Verificar a desigualdade triangular; • Representar graficamente funções definidas por ramos; • Fazer o estudo de funções definidas por ramos; • Escrever uma condição em IR^2 que represente um conjunto de pontos dado; • Representar geometricamente condições em IR^2.		

PLANO DE UNIDADE
5. Funções Polinomiais.

Matemática A – 10.º ano

Os tempos são períodos de 45 minutos

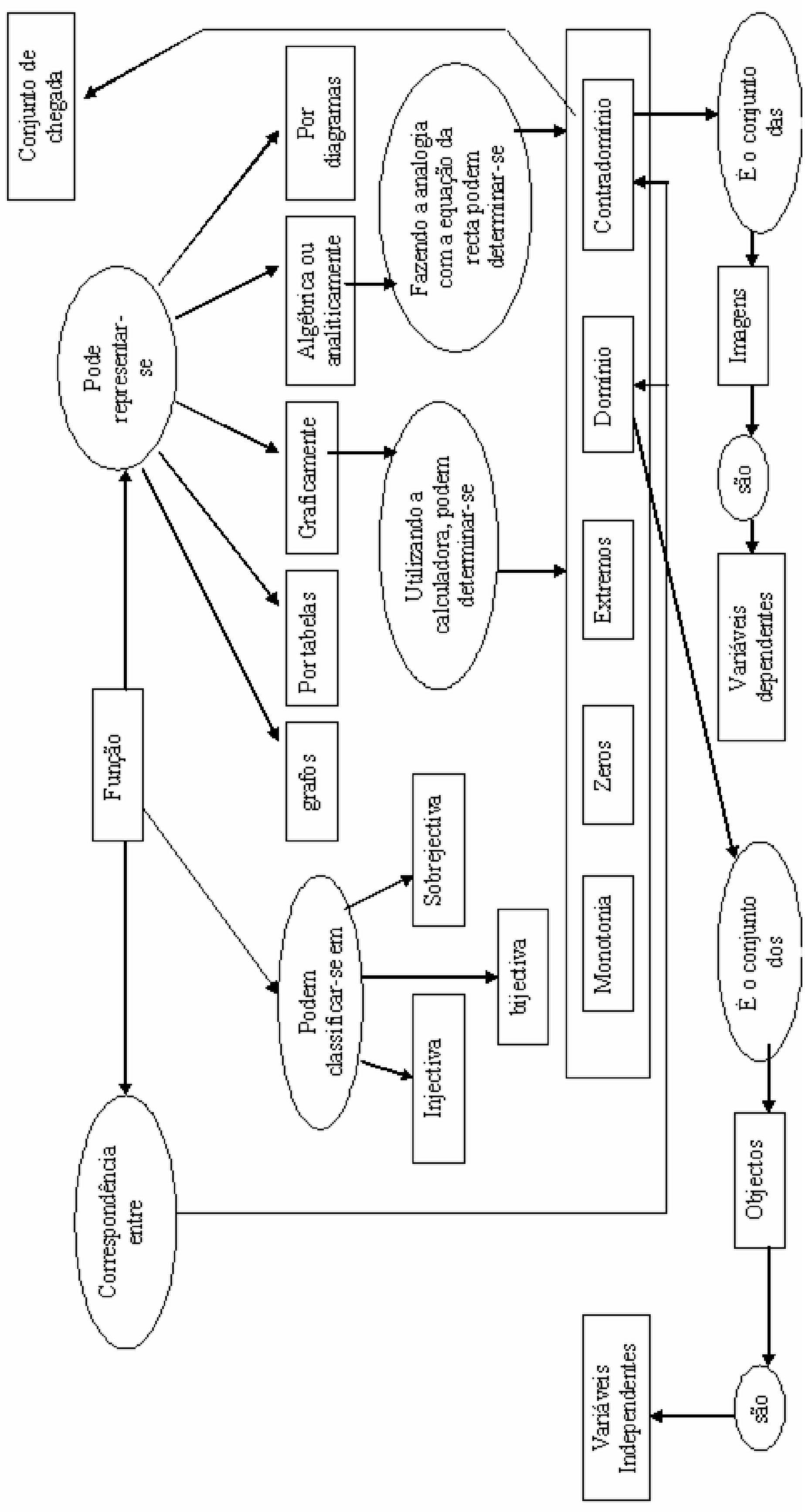
Nº de tempos	CONTEÚDOS	OBJECTIVOS ESPECÍFICOS	ESTRATÉGIAS	AVALIAÇÃO
1	*Nota histórica. Introdução ao estudo das funções polinomiais*	• Enquadrar historicamente o conceito de função polinomial;	• Utilização da calculadora gráfica; • Resolução de problemas, • Utilização do View Screen.	• Observação directa dos alunos no que diz respeito ao comportamento, motivação e realização de
	1. Polinómios. Terminologia e	• Conhecer as principais terminologias no contexto		

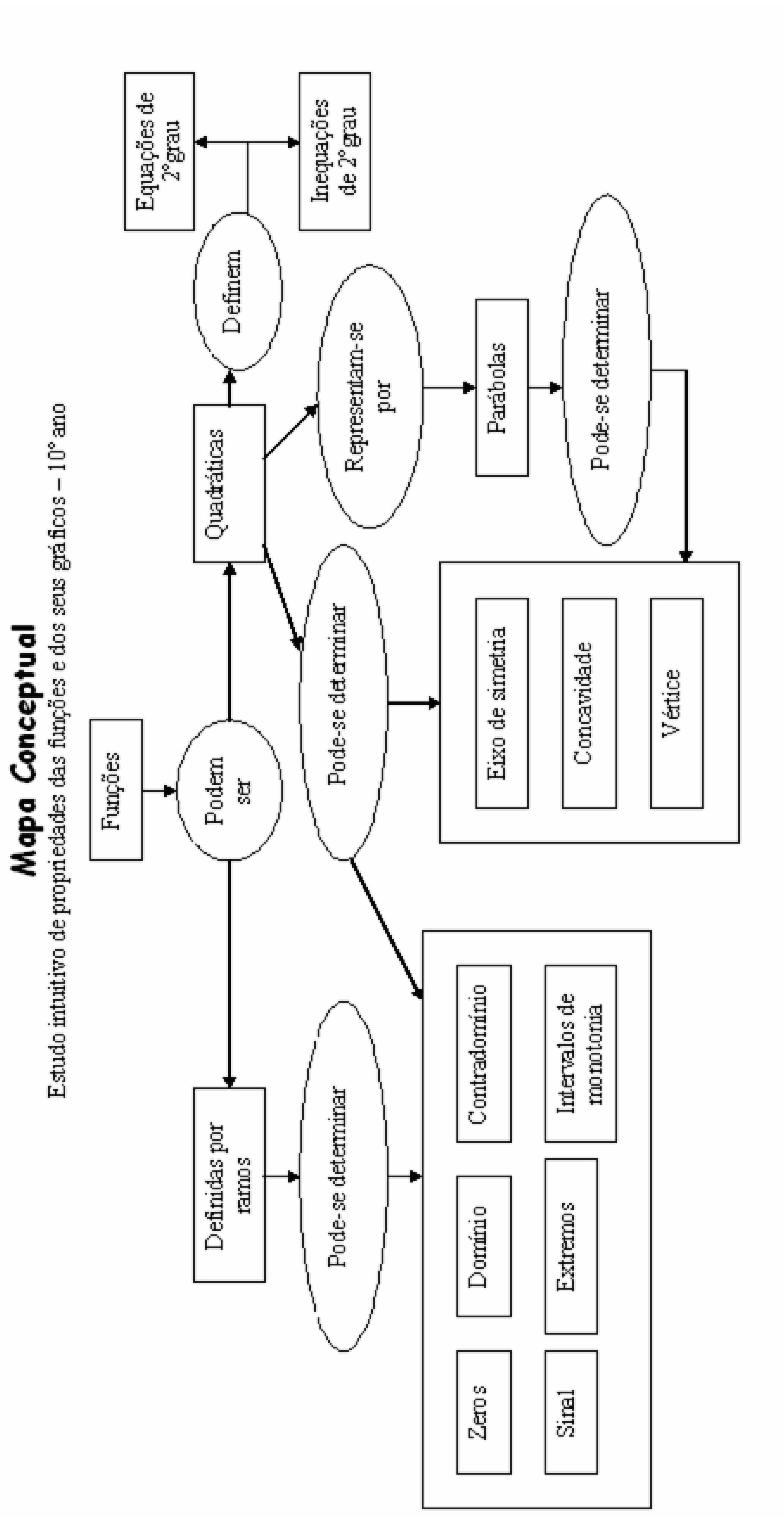
	operações	de funções polinomiais; • Reduzir polinómios; • Ordenar polinómios; • Indicar o grau de um polinómio; • Indicar os termos nulos de um polinómio; • Indicar o termo independente de um polinómio; • Adicionar polinómios; • Subtrair polinómios; • Multiplicar polinómios; • Aplicar os casos notáveis da multiplicação de polinómios.		tarefas propostas; • Trabalhos para casa; • Fichas de avaliação
	2. Funções polinomiais e respectivos gráficos	• Definir função polinomial; • Verificar se uma função é uma função polinomial; • Representar graficamente funções polinomiais, com auxílio da máquina de calcular; • Encontrar regularidades em funções do tipo: $y = x^n, n \in R$.		
2	*3. Propriedades das funções polinomiais*	• Encontrar regularidades em funções do tipo: $y = ax^n$, $a \in IR \setminus \{0\}$ e $n \in I$; • Estudar o comportamento de uma função polinomial qualquer; • Relacionar o grau do polinómio com o número de zeros do polinómio; • Conhecer o teorema fundamental da Álgebra; • Conhecer a multiplicidade de um zero; • Indicar a multiplicidade de um zero; • Conhecer o intervalo dos zeros de um polinómio; • Caracterizar uma função polinomial; • Resolver problemas em contexto real.		

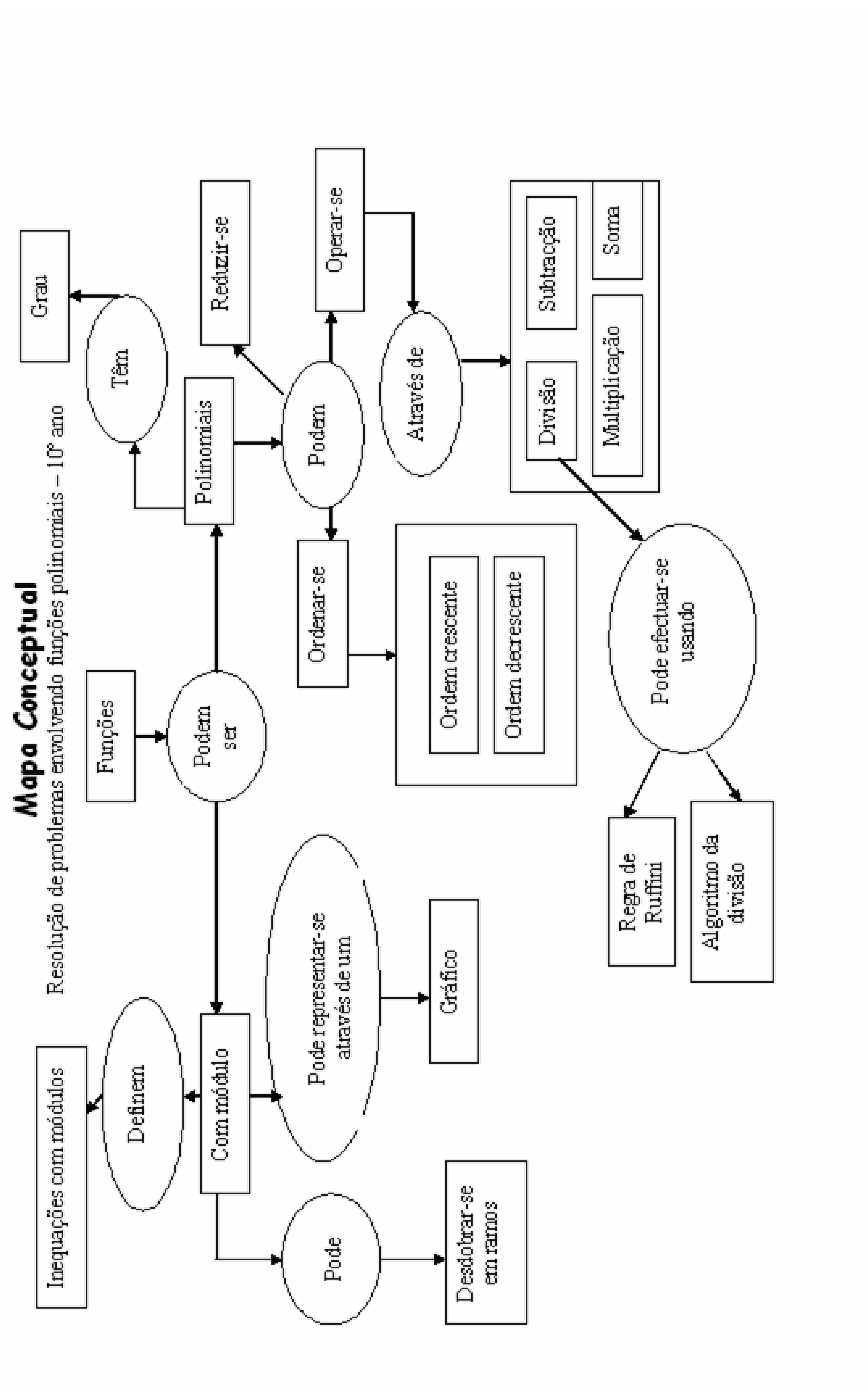
4	*4. Zeros de um polinómio*	• Conhecer o algoritmo da divisão inteira de polinómios; • Aplicar o algoritmo da divisão inteira de polinómios; • Determinar o quociente da divisão inteira de polinómios; • Determinar o resto da divisão inteira de polinómios; • Estudar a regra de Ruffini; • Aplicar a regra de Ruffini para determinar o quociente da divisão de polinómios; • Aplicar a regra de Ruffini para determinar o resto da divisão de polinómios; • Determinar analiticamente os zeros de funções polinomiais; • Conhecer o Teorema do Resto; • Conhecer a consequência directa do Teorema do Resto; • Aplicar o Teorema do Resto; • Decompor um polinómio em factores; • Num contexto de problemas resolver graficamente uma inequação de grau superior ao segundo; • Num contexto de problemas resolver analiticamente uma inequação de grau superior ao segundo;		

Mapa Conceptual

Função, gráfico e representação gráfica – 10.º ano




Mapa Conceptual
Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos – 10º ano
Funções
Podem ser
Quadráticas
Definem
Equações de 2º grau
Inequações de 2º grau
Representam-se por
Parábolas
Pode-se determinar
Pode-se determinar
Eixo de simetria
Concavidade
Vértice
Definidas por ramos
Pode-se determinar
Zeros
Domínio
Contradomínio
Sinal
Extremos
Intervalos de monotonia


Mapa Conceptual
Resolução de problemas envolvendo funções polinomiais – 10º ano
Funções
Podem ser
Polinomiais
Têm
Grau
Podem
Reduzir-se
Operar-se
Através de
Divisão
Subtracção
Multiplicação
Soma
Ordenar-se
Ordem crescente
Ordem decrescente
Pode efectuar-se usando
Regra de Ruffini
Algoritmo da divisão
Com módulo
Definem
Inequações com módulos
Pode representar-se através de um
Gráfico
Pode
Desdobrar-se em ramos

2.4 A construção do Conceito de Função

O conceito de função insere-se em todos os ramos da Matemática e ocupa uma posição central em todo o seu desenvolvimento, contudo mostra-se subtil e pouco acessível sempre que o tentamos ensinar nas escolas (Tall e Bakar, 1992). No entanto, a noção de função tem sido frequentemente usada como princípio organizativo no ensino da Matemática (Yerushalmy e Schwartz, 1993), figura nos currículos da disciplina de matemática dos países da Europa ocupando neles uma posição importante e o seu ensino é central na investigação sobre educação matemática, tal como podemos observar na quantidade de bibliografia dedicada.

2.4.1 O conceito de função como elemento matemático

"Para um matemático, a noção de função é um modelo de simplicidade. O que poderia ser mais simples que a ideia de que «temos dois conjuntos e cada elemento do primeiro está ligado a precisamente um elemento do segundo»? A definição não é apenas matematicamente simples, para o matemático ela proporciona o acesso a uma enorme complexidade de ideias matemáticas."

(Akkoç e Tall, 2002, p. 25)

Alguns estudantes conseguem envolver-se com esta subtil combinação entre o simples e o complexo; para outros, contudo, a situação é bem diferente (Akkoç e Tall, 2002). Mas, para todos eles, quando confrontados pela primeira vez com uma definição matemática é praticamente inevitável que apenas contactem com uma pequena amplitude de possibilidades que possam colorir as suas imagens do conceito de tal sorte que irá causar futuros conflitos cognitivos (Tall, 1992). Por maioria de razão o mesmo acontece com a definição de função acima.

Chegar a uma formulação da definição do conceito de função não foi um processo simples nem rápido. "A definição geral de função, que hoje chamamos *Clássica*, formou-se na Matemática não há muito tempo, somente nos princípios do século XIX. Ainda que os matemáticos manejassem funções concretas em quase todos os passos do longo desenvolvimento da ciência, teve que ser percorrido um longo caminho de cristalização paulatina dos conceitos elementares e das suas generalizações, até que aos científicos se lhes deparou a necessidade de obter uma definição geral de função, e encontraram-na" (Shílov, 2004, p. 137).

Assim, desde que pela primeira vez se definiu *função* até se obter a definição que hoje se utiliza na maioria das escolas por esse mundo fora passaram um pouco mais de 100 anos.

Recordemos a evolução da definição de função desde o séc. XVIII até ao séc. XIX:

"Uma função de uma magnitude variável é uma expressão analítica, composta por esta magnitude e por constantes." (J. Bernoulli, 1718)

"Uma função é uma curva, desenhada por um movimento livre da mão." (L. Euler, 1748)

"Quando umas quantidades dependem de outras de tal forma que ao variar as últimas também variam as primeiras, então as primeiras chamam-se funções das segundas." (L. Euler, 1755)

"Qualquer quantidade, cujo valor depende de uma ou de outras quantidades, chama-se função destas últimas, independentemente de se se conhecem ou não as operações que há que realizar para passar destas para a primeira." (S. La Croix, 1797)

"Uma função de *x* é um número que se dá a cada x e que varia constantemente com *x*. O valor da função pode ser dado ou por uma expressão analítica ou por uma condição que dá o procedimento para provar todos os números. A dependência pode existir e permanecer desconhecida." (N. I. Lobachevski, 1834)

"*y* é função de *x*, se a cada valor de *x* corresponde um valor completamente determinado de *y*; além disso não é importante o método com que se estabeleceu a correspondência assinalada." (P. Dirichlet, 1837)

(definições retiradas de Shílov, 2004, p. 141)

Assim, classicamente, uma função pode ser definida como um processo que faz corresponder a cada elemento de um conjunto (o domínio) um único elemento noutro conjunto (o contradomínio). Não é possível transmitir à partida toda a extensão de possibilidades incluídas nesta definição – que os conjuntos envolvidos podem ser conjuntos numéricos, ou pontos de um espaço n-dimensionado, ou formas geométricas, ou matrizes, ou qualquer outro tipo de objectos, incluindo outras funções – e que o método de correspondência pode ser através de uma fórmula, de um processo iterativo ou recorrente, uma transformação geométrica, uma lista de valores, ou uma combinação feliz que desejemos, desde que satisfaça o critério de correspondência unívoca (Tall, 1992). Mas, no trabalho quotidiano das nossas aulas, os alunos interiorizam melhor o conceito de função como sendo um processo em que se necessita um input, sobre o qual se executa algum tipo de procedimento, para se poder obter um dado output (Tall e Bakar, 1992).

Qualquer que seja a forma como apresentemos o conceito de função – como processo de transformar números em outros, como dependência entre duas quantidades ou como correspondência unívoca – o conceito de função admite várias formas de ser representado.
A pergunta que os professores se fazem é "Qual a melhor forma de introduzir este conceito?" A resposta não é fácil e, por isso, tantas formas têm vindo a ser utilizadas. Nos últimos tempos uma delas tem sobressaído, a função como dependência entre quantidades que variam, e a melhor forma de observar esta dependência é através de um gráfico. Mesmo ombreando com uma multiplicidade de níveis de representação, a representação gráfica assume, claramente, um papel fundamental (Mavarech e Kramarsky, 1997; Vinner, 1992), no entanto, é apenas através da coordenação de [todos os] diferentes registros (verbal, tabelar e algébrico) que [com tempo e trabalho] se pode alcançar a verdadeira conceptualização (Duval, 2000) do conceito de função.

Como qualquer outro conceito matemático que depende de uma definição, o conceito de função é naturalmente complexo de construir. Como veremos, as definições são fáceis de reproduzir, fáceis de relembrar, mas isso não quer dizer que os conceitos sejam fáceis de compreender. Vinner (1991) afirma que as definições matemáticas representam um conflito entre a estrutura da Matemática e a aquisição dos conceitos por via de processos cognitivos. Os resultados em Matemática são deduzidos dos axiomas e das definições. Os conceitos formam-se a partir dos que lhes são prévios de uma forma lógica. Ainda assim, nem sempre é esta a forma como a Matemática é concebida.

2.4.2 O conceito de função como elemento de ensino e aprendizagem

> ***O que é uma boa definição? Para o filósofo ou para o cientista, é uma definição que se aplica a todos os objectos a serem definidos, e aplica-se apenas a esses; é aquela que satisfaz as regras da lógica. Mas em educação não é isso; é aquela que pode ser compreendida pelos alunos.*** (Poincaré)

Considerando os anos que o conceito de função levou a desenvolver-se, as polémicas e discussões que provocou entre os maiores matemáticos da história e a atenção que ainda desperta, é natural que seja um conceito que crie dificuldades de aprendizagem aos alunos de hoje.

Assim sendo, a grande maioria dos textos sobre o conceito de função debruça-se sobre as dificuldades que os alunos apresentam quando têm que lidar com este conceito (veja-se, por exemplo, Ponte, 1990). Alguma da biografia centra-se na problemática que envolve as várias representações do conceito de função (Garcia e Llinares, 1996) e como a apresentação de situações aos alunos que as integram promovem dificuldades, obstáculos cognitivos e falsas concepções devido à grande complexidade deste conceito (por exemplo, Tall e Bakar, 1992; Dubinsky e Harel, 1992; Sfard, 1992; Cuoco, 1994; Thompson, 1994).

As razões pelas quais a compreensão do conceito de função aparenta não ser fácil assentam na diversidade de representações associadas ao conceito e, também, nas dificuldades que se apresentam no processo de articulação entre os sistemas de representação associadas que estão envolvidas na resolução de situações problemáticas (Yamada, 2000). Em consequência, um número substancial de pesquisas examinou o papel das diferentes representações na compreensão e interpretação das funções (Zazkis, Liljedahl e Gadowsky, 2003).

Como exemplo das dificuldades que os alunos sentem ao tratar com o conceito de função, Akkoç e Tall afirmam que,

> "na prática, o núcleo simples do conceito de função (dado essencialmente pela definição) mostra-se cognitivamente inapreensível e os alunos são introduzidos no conceito através de exemplos de formas variadas:
>
> - A representação verbal de uma função em linguagem formal ou em linguagem coloquial (quotidiana).
> - Diagramas de conjuntos (representando a função por dois conjuntos ligados entre si por setas).
> - Uma caixa de funções (representando uma relação de input e output).
> - Um conjunto de pares ordenados (considerado conjunto-teoricamente).
> - Uma tabela de valores (frequentemente computados usando um procedimento computacional).
> - Um gráfico (desenhado por computador ou manualmente).

- Uma fórmula."

  Cada uma delas possuindo as suas peculiaridades que contribuem para a complicação da imagem do conceito de função (2002, p. 26).

Seguindo estes investigadores, a introdução do conceito de função através de exemplos apresenta um dilema:

> "O aluno não pode construir o conceito abstracto de função sem experimentar exemplos do conceito de função em acção, e eles não podem estudar exemplos do conceito de função em acção sem desenvolver exemplos protótipos por terem interiorizado limitações que não se aplicam ao conceito abstracto." (Bakar e Tall, 1992, p. 13).

Annie e John Selden (1992), numa investigação que levaram a cabo sobre concepções de estudantes sobre funções, explicam que "existe um conflito (tensão) inevitável entre a estrutura matemática e o processo cognitivo de aquisição de conceitos. Enquanto é necessário apenas uma frase para apresentar uma definição, 'desembrulhar' o sentido da definição é uma tarefa cognitiva bastante árdua". Esta tarefa é especialmente difícil quando os alunos enfrentam conceitos, tal como funções, com tantas definições e representações diferentes. Novas formas de representar o conceito de função têm surgido continuamente ao longo do seu desenvolvimento. Cada uma destas representações é importante na compreensão de um aspecto específico da ideia matemática e está intimamente ligada a cada uma das outras, mas em conjunto, podem confundir e oprimir os alunos.

De facto, compreender o conceito de função é muito mais profundo que papaguear definições (Jones, 2006). São três as concepções básicas sobre funções que se destacam ao longo da literatura dedicada ao ensino do conceito de função. Estas três categorias, nomeadas e caracterizadas no trabalho de Dubinsky e Harel (1992), indicam o nível de compreensão alcançado pelos alunos: Acção, Processo e Objecto. Elas não são três noções completamente diferenciadas, antes, representam um contínuo de abstracção e progridem desde uma compreensão básica até uma compreensão profunda e abstracta. De forma muito simples, Jones (2006) descreve os três patamares da seguinte forma:

- **Acção**. Os alunos que se encontram neste nível de compreensão necessitam da evidência de uma acção concreta de modo a poderem entender que algo é uma função.
- **Processo**. Os alunos nesta fase não necessitam uma regra ou uma fórmula específica, estão preparados para aceitar funções que envolvam algum tipo de transformação.
- **Objecto**. A este grau de compreensão os alunos vêem as funções como entidades em si próprias que podem sofrer transformação e sujeitas a operações.

Foi sobre estas três categorias que Cuoco (1994), Gray e Tall (1994) e DeMarois e Tall (1996 e 1999) construíram os seus trabalhos que atrás referenciámos na secção relativa à terminologia sobre funções e que utilizámos na investigação (cf. 2.2.2).

A Matemática Moderna dos anos 70 tentou que o conceito de função fosse aprendida por via da definição formal, contudo fracassou; e, por outro lado, o ensino do conceito de função através de exemplos – como se faz actualmente – pode levar a protótipos mentais que dão percepções erradas da ideia geral de função (Tall e Bakar, 1992). Estes protótipos mentais podem ser ideias do tipo, "as funções são equações", "todas as funções têm um gráfico", "as funções definidas por uma só equação são continuas" ou "$f(x+h)=f(x)+h$", e resultam de uma exemplificação deficiente proporcionada por professores ou livros de texto e, ainda, por simplificação de raciocínio. Segundo Akkoç e Tall (2002), *protótipos* são casos típicos que interferem com a construção correcta do conceito e recomendam a leitura de Makin e Ross (1999) para uma elucidação mais detalhada.

A pergunta paira:
Será que a forma como temos ensinado o conceito de função é a mais indicada para que, no fim do secundário, os alunos tenham construído uma imagem do conceito coerente e sólida?
DeMarois (1996) afirma que muitos estudantes de álgebra avançada foram bastante prejudicados pela sua experiência prévia com a Matemática durante o secundário, Álgebra incluída, e preconiza que esses estudantes podem necessitar que lhes sejam apresentadas outras experiências educativas que sejam marcadamente diferentes das experiências anteriores. Assim, este investigador indica o conceito de função como o elemento constante em toda a extensão de uma introdução à Álgebra completamente reformada.

Além do anterior, as dificuldades dos alunos radicam muitas das vezes em factores que lhes são externos. Por outras palavras, a deficiente construção da imagem do conceito de função em tantos alunos e a forma difícil como lidam e aplicam a definição do conceito de função, não podem ser imputados apenas às idiossincrasias dos alunos. Todo o trabalho do aluno com o conceito de função é influenciado pelo seu professor, pelo livro de texto adoptado ou pelas orientações programáticas emanadas pelo estado. Outro factor mais longínquo, mas com assinalável importância, são os produtos da investigação sobre o tema e a forma como influencia os factores anteriores.

A influência do professor
Na verdade o papel do professor no ensino do conceito de função é tão importante como no ensino de qualquer outro conceito matemático. Mas existem aspectos específicos da actuação do professor relativamente às funções. Por exemplo, os professores desempenham um papel primordial na transição de se considerar [o conceito de função] de um processo para a sua construção como um objecto: os professores, nas situações didácticas, verificam que todos os elementos que vão constituir a *imagem do conceito* e depois a *definição do conceito*, mantêm os seus papéis correctos (Tall e Vinner, 1981, p.152) ao longo da construção do conceito, da sua abstracção e generalização.

Muita da terminologia técnica da Matemática, tal como *termo*, *sequência*, *séries*, *conjunto*, além de outros, é usada no seu sentido coloquial em vez de ser no seu sentido matemático. É aqui que subjaz uma dificuldade dificilmente resolúvel, que é parte do processo da comunicação humana, tanto para o professor como para o aluno. Muitas vezes o professor consegue comunicar com o aluno e aperceber-se dos elementos de verdade do seu discurso. Mas poderemos estar seguros de que o que outro ser humano diz é o que nós pensamos que foi dito, ou que o outro disse aquilo que pretendia dizer?

(Tall e Bakar, 1992) Estes aspectos substanciam a dificuldade que Malik (1980) enunciou de que *os professores que se dedicam a ensinar o conceito de função enfrentam enormes dificuldades em comunicar este conceito abstracto na sala de aula.* Muitas vezes, a formação do conceito de função está, no professor, condicionada pela utilização do manual adoptado para os alunos, na forma como o conceito de função é apresentado nesses manuais (Jones, 2006) e comunicado aos alunos. E, assim, a quantidade de actividades [que o professor apresenta] disfarça inadvertidamente o significado do conceito de função com impressões que são diferentes do significado matemático que, ao contrário, pode acumular dificuldades em etapas posteriores do desenvolvimento do conceito de função (Tall e Bakar, 1992). Os manuais e os professores tendem a enviar aos alunos sinais diferentes no que se refere às funções e muitos estudantes, quando chegam à universidade, têm uma compreensão incompleta do que são as funções. O conceito de função é muitas vezes construído pelos alunos com base nos exemplos, apresentados pelo professor, com os quais melhor se familiarizaram, em vez de ter sido com as definições que lhes foram ensinadas (Jones, 2006).

A influência do manual adoptado

O livro de texto é, quase sempre, visto como uma *autoridade* pelos estudantes que o usam e a grande maioria dos professores usam o manual adoptado como fonte primária do seu trabalho. Os professores desenvolvem o seu trabalho directamente das actividades e dos exercícios contidos nos livros. Nestas condições, a forma como a informação é apresentada nestes livros reveste-se de vital importância para a forma como os alunos irão compreender os conceitos (Jones, 2006). A forma como os livros de texto reflectem determinados aspectos dos conceitos pode influenciar o que os alunos aprendem (o quê e como) se admitimos que proporcionam a maior parte do conteúdo matemático que os alunos devem aprender e, além disso, são uma das principais fontes de actividades e tarefas.

Garcia e Llinares (1996), num estudo que fizeram sobre livros de texto, puderam mostrar como ao longo dos anos (de 1974 a 1991) a conceptualização da noção de função se transferiu da perspectiva baseada na perspectiva da teoria de conjuntos (Dirichlet e Bourbaki) para uma noção de função como modelo de matematização de situações de covariação.

> Inicialmente os textos estudados […] adoptavam uma perspectiva "matemática", baseada na definição conjuntista de Dirichlet-Bourbaki. Utilizavam-se ideias como correspondência, aplicação, domínio, imagem única, etc.
>
> Posteriormente, nos textos analisados cuja data de publicação é mais recente […], o significado dado ao conceito de função está vinculado a uma relação entre quantidades de magnitude que variam. A ideia de covariação de quantidades articula esta nova apresentação. A noção de função é vista como um modelo que matematiza determinadas situações onde existe uma relação entre a variação das quantidades.
>
> (Garcia e Llinares, 1996, p. 110)

A evolução descrita por Garcia e Llinares em Espanha é semelhante ao que ocorreu em Portugal à mesma época. Hoje, a forma de introdução do conceito de função no 10º ano (15 anos) é, efectivamente, com base em situações de covariação entre quantidades. Por exemplo, *número de peças de fruta e o respectivo preço* ou a *relação entre espaço percorrido e o tempo empregue para o percorrer*.
Tal como Garcia e Llinares (1996) apontam no caso Espanhol, também nos manuais portugueses se adaptam as representações do conceito de função à forma de apresentar as tarefas, situações problemas ou situações da vida real. Assim, os livros de texto espanhóis apresentavam nos anos 70 o conceito de função através de diagramas de Venn, expressões algébricas ou como "máquina de input-output", em qualquer dos casos sempre numa perspectiva de *processo* e é a partir daquelas representações que se pode obter a representação gráfica. Deste modo, e de uma forma implícita, os manuais podem transmitir a ideia de que as funções são as suas expressões algébricas e o gráfico é visto como algo que deriva delas (Garcia e Llinares, 1996).
Com os anos a situação sofreu alterações, nos manuais mais recentes, ao evidenciar-se a ideia de covariação e de relações funcionais, a noção de função está vinculada à matematização da relação de quantidades que variam. Esta forma de introdução do conceito de função tem implicações nas tarefas propostas e nas representações de função que se utilizam: as situações podem ser descritas verbalmente ou, então, são os gráficos que descrevem a relação de dependência entre as quantidades de duas magnitudes (Garcia e Llinares, 1996).

Hoje em dia, a forma de introduzir o conceito de função nos livros de texto é variada.
Existem manuais em que se apresentam aos alunos gráficos antes de se introduzir o conceito de função. Nestes casos, o conceito de função é introduzido directamente dos gráficos e definido como a relação unívoca entre um objecto (eixo dos *xx*) e a sua imagem (eixo dos yy). É a partir desta situação que, posteriormente, vão sendo introduzidas as restantes representações do conceito de função.
Alguns professores professam a crença de que a melhor forma de aprender é pela via da descoberta. Acreditam que a melhor forma de tomar contacto com os conceitos é explorando-os mediante o seu auxílio até os alunos entenderem o conceito, em vez de lhes ser dado de forma imediata e não explorada. Alguns livros de texto partilham esta convicção, a primeira referência à palavra função pode aparecer após o tratamento de uma proporcionalidade materializada por uma equação e é, a partir daqui, que se introduz o conceito de função como sendo a relação entre duas quantidades que dependem uma da outra.
Outros manuais existem em que a introdução do conceito de função se faz de um modo directo. Primeiro introduzem a relação de dependência como conjuntos de pares ordenados, chamando ao conjunto de todas as primeiras coordenadas o domínio e ao conjunto de todas as segundas coordenadas se chama contradomínio. Assim, uma função é apresentada como um tipo especial de relação na qual cada elemento do domínio corresponde com exactamente um elemento do contradomínio. Depois, é com base nesta relação que se apresentam situações envolvendo gráficos, equações ou tabelas numéricas.
Existem livros que apresentam exemplos de funções por intermédio de várias das suas representações. Apresentam e tratam exemplos onde a função é definida por um gráfico, uma equação, situações de dependência caracterizadas verbalmente, tabelas numéricas e

definidas por ramos (mais que uma equação) e realçam a correspondência unívoca entre um elemento do domínio e um elemento do contradomínio. Esta abordagem pode ajudar a afastar algumas das concepções erróneas que por vezes os alunos adquirem, mas convém que este tipo de introdução evolua para a inclusão de pares ordenados e de agregar a ideia de função com a ideia de regra.
Outra forma de introduzir o conceito de função pode ser observada nos manuais em que é explicado que a compreensão da relação entre variáveis é, usualmente, crítico para se conseguir analisar situações geométricas, de outras ciências ou da vida real. Nestes casos, os manuais afirmam que estas relações são expressas por fórmulas onde uma das variáveis é função de outra. Esta perspectiva de abordagem do conceito de função dá bastante *espaço* à perspectiva processo através da visão das funções como "regras" e do uso de fórmulas e equações. Este tipo de manuais está mais vocacionado para os alunos mais velhos que se preparam para trabalhar com funções através, fundamentalmente, do cálculo, quando devem aprender a diferenciar e a integrar funções que são dadas pela sua representação simbólica.

O livro de texto adoptado na Escola Secundária D. Sancho II de Elvas é um manual dividido em três volumes, sendo o segundo dedicado ao tema das funções: Funções I, Matemática-A/10º Ano de Maria Augusta Ferreira Neves e Luís Guerreiro, PORTO EDITORA. A introdução ao estudo das funções faz-se com a seguinte situação:
"A Ana foi a um mercado para comprar um cesto regional de palhinha e algumas mangas. O cesto custa 2 euros e cada manga custa 0.5 euros.
Quanto pagou a Ana se comprou:
a) 1 manga? *b) 5 mangas*
c) 10 mangas *d) x mangas"*

E segue:

"Tem-se	$2+1\times0.5=2.5$	Custo do cesto e de uma manga.
	$2+5\times0.5=4.5$	Custo do cesto e de cinco mangas.
	$2+10\times0.5=7$	Custo do cesto e de dez mangas.
	$2+x\times0.5=2+0.5x$	Custo do cesto e de *x* mangas.

Considerando $y=2+0.5x$*, y representa o custo do cesto e de x mangas.*
$y=2+0.5x$ *é **o modelo matemático** que descreve a situação apresentada.*
*A variável y é **função** (depende) de x.*
Através da expressão $y=2+0.5x$*, conhecido x determina-se y.*
A variável x é a variável independente e a variável y é a variável dependente. "

Como se observa facilmente, o manual adoptado pela escola, que foi utilizado pela professora e alunos que observámos, enquadra-se nitidamente na última situação que descrevemos. De uma situação da vida real estabelece uma dependência funcional entre duas quantidades, determina uma regra definida por uma equação e estabelece-se a dependência entre as variáveis.
É a partir desta equação, $y=2+0.5x$, que os autores partem para as restantes representações da função. Apresentam uma tabela numérica e um gráfico cartesiano.
Nas páginas seguintes é apresentado um outro exemplo onde, através de uma tabela, se apresenta uma situação que relaciona o tempo com a distância percorrida por um carro.

A partir desta situação apresenta-se a função onde o tempo é a variável independente e o espaço percorrido é a variável dependente. A expressão $e = 60t$ é apresentada como uma função, e a função "é algo como uma máquina: onde entra um objecto, é transformado de acordo com uma regra, e sai a imagem desse objecto"

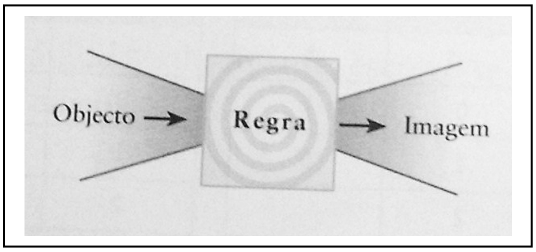


Figura 7: O conceito de função no manual adoptado

Seguidamente é definida uma função através de diagramas, ao primeiro conjunto é dada a designação de domínio e ao segundo a de contradomínio, diz-se o que é um objecto e o que é a respectiva imagem, além disso a correspondência unívoca é bem realçada. Todas as informações são ilustradas por imagens e por exemplos, uns resolvidos e outros por resolver.

No final, na página 17, os alunos são informados que todas as abordagens do conceito de função até ali apresentadas foram feitas de forma intuitiva e que a definição formal é

"Uma função *f* de A com valores em B (*f*: A→B) consiste em dois conjuntos, o domínio A, o conjunto de chegada B, e uma só regra que associa a cada elemento x (objecto) de A um e um só elemento *y=f(x)* (imagem) de B.

Simbolicamente:

$$f: A \to B$$
$$x \to y = f(x)$$ "

Como se pode observar, todas as representações foram utilizadas e, também, várias formas de definir o conceito de função.

Sem se querer fazer qualquer juízo de valor sobre a forma como este manual introduz, apresenta e define o conceito de função, há que ter em boa conta que "diferentes abordagens epistemológicas que conduzem ao significado de função ao longo da sua evolução histórica estão a ser vertidas nos livros de texto de matemática e nas programações de forma muito confusa. A complexidade das metáforas didácticas utilizadas tem sido uma preocupação central dos educadores matemáticos e uma questão em aberto na Investigação em Educação Matemática" (Dubinsky e Harel, 2002).

A influência da programação oficial

Vários estudos revelaram que a aprendizagem do conceito de função é uma tarefa muito complexa e que muitos alunos, por vezes dos mais capacitados, ao entrarem na universidade possuem uma compreensão débil deste conceito (por exemplo Breidenbach, Dubinsky, Hawks e Nichols, 1992; Jones, 2006). Este facto leva-nos a perceber que os padrões de raciocínio e de compreensão necessários para uma compreensão flexível e forte das funções são mais complexas que aquilo que normalmente é assumido nos currículos e [consequentemente] nas actividades lectivas (Breidenbach, Dubinsky, Hawks e Nichols, 1992; Carlson, 1998; Thompson, 1994b). As implicações resultantes deste estado coisas levam a que os alunos que pensam as funções apenas em termos de manipulação simbólica e de técnicas procedimentais sejam incapazes de compreender uma transformação mais geral de um conjunto de valores de entrada num conjunto de valores de saída; também estarão privados de uma estrutura conceptual para organizar as relações de funcionalidade, nas quais o valor da função (variável dependente) muda continuamente associada às contínuas mudanças da variável independente (Carlson, 1998; Monk, Nemirovsky, 1994; Thompson, 1994b), o que é fundamental para que, posteriormente, compreendam e representem a natureza inconstante de um vasto conjunto de situações funcionais e possam entender os conceitos mais avançados das matemáticas superiores (Thompson, 1994b). Por exemplo, o conceito de limite de uma função decorre directamente do conceito de função; o limite de uma função é parte central do cálculo e fundamental de tantos outros conceitos importantes que os alunos não poderão entender globalmente sem que dele tenham um sentido apurado. Se os alunos não entenderem o conceito de limite de uma função, como poderão entender conceitos como derivada ou integral? (Juter, 2005)

A Teoria de Conjuntos nos anos 60 e 70, no âmbito das Matemáticas Modernas, introduziu o conceito de função no ensino em termos de domínio, contradomínio e uma regra que relaciona cada elemento do primeiro conjunto com um único elemento do segundo conjunto. Esta noção mostrou-se difícil para a maioria dos alunos. O problema de um esquema curricular como este, baseado em princípios estruturantes tão gerais, foi que demonstrou não funcionar. Mesmo tendo sido apresentadas aos alunos as definições de função adequadas obtidas da teoria de conjuntos, eles não as utilizavam na prática.

> A concepção fundamental de função é aquela que assenta na relação entre magnitudes variáveis. Se esta concepção não for desenvolvida, representações como equações e gráficos perdem o seu sentido e isolam-se uma da outra …
> Introduzir as funções a alunos muito novos através da elaborada definição moderna é um erro didáctico – uma inversão anti-didáctica.
> (Sierpinska, 1988)

Alguns anos depois, nos anos 80, no Reino Unido, uma abordagem pragmática na forma de proporcionar as definições básicas conduziu os alunos a lembrarem-se, posteriormente, das experiências que efectivamente realizaram em sala de aula, e não da definição propriamente dita (Tall e Bakar, 1992). No trabalho de Akkoç e Tall (2005) é assumida a hipótese de que o que os alunos recordam relaciona-se com aquilo que eles realizaram e que se revelou útil, em vez daquilo que lhes foi dito para fazerem. Os alunos a quem foi primeiro apresentada a definição de função e que, posteriormente, estudaram alguns tipos específicos de funções, seja a função linear $y = mx + b$, lembrar-se-ão, provavelmente, de algumas das propriedades que estudaram. Por exemplo, como desenhar a função através de dois pontos dados, ou como encontrar o declive do gráfico

através dos dois pontos, em que ambos requerem propriedades específicas da função linear, mais do que do próprio conceito de função.
No entanto, a prática e a investigação, mostram que muito poucos alunos conseguem de forma coerente focar-se nas propriedades decorrentes da definição do conceito de função para os vários aspectos da função. Os estudos mostram que existe um leque de performance dos alunos nos diferentes aspectos das funções, uma minoria consegue atingir o núcleo do conceito de função enquanto a maioria apenas supera um pequeno conjunto de contextos desconexos (Akkoç e Tall, 2005). Segundo estes dois investigadores, isto revela uma incompatibilidade entre o currículo e as estruturas mentais dos alunos. Enquanto, os autores do currículo organizaram o curso de forma que o conceito de função seja um conceito fundamental e um princípio organizador, a maioria dos alunos não consegue centrar-se nas propriedades essenciais e estas não podem afirmar-se como princípio organizador. Em vez disso, muitos alunos centram-se nas propriedades individuais de cada representação e não conseguem relacioná-las umas com as outras.

Segundo Ponte (1990), "o papel curricular do conceito de função pode ser visto tendo em conta três aspectos essenciais: (a) a natureza mais algébrica ou mais funcional da abordagem, (b) a generalidade do conceito, e (c) a sua aplicação a problemas e situações da vida real e de outras ciências" o que vai influenciar de forma preponderante a forma de ensinar e de aprender este conceito, uma vez que as actividades serão diversas e, consequentemente, os aspectos e as representações a serem retidas pelos alunos sofrerão valorações diferentes. As consequências são evidentes e têm persistido ao longo dos anos. Enquanto os alunos percorrem o seu currículo escolar de matemática, são frequentemente confrontados com a simples manipulação de equações algébricas e com o cálculo de respostas para questões tipificadas; esta forte ênfase procedimental não tem sido efectiva na construção das concepções base do conceito de função – aquelas que permitem uma interpretação significativa e que usam as representações de função em novas situações de forma variada (Carlson e Oehrtman, 2005). Em Portugal, nos últimos anos, tem-se assistido a uma evolução que não passa desapercebida. Efectivamente, o tempo em que os alunos trabalhavam com o conceito de função apenas na faceta algébrica sendo as actividades quase exclusivamente matemáticas de manipulação algébrica, deu lugar a outro em que além das actividades anteriores se introduziram situações funcionais ligadas às outras ciências e a situações da vida real onde se verifica a relação covariante entre duas quantidades interdependentes. A Matemática que ensinamos aos alunos pretende proporcionar-lhes experiências de actividades matemáticas, em vez de os mergulhar nas profundezas formais do seu significado lógico (Tall e Bakar, 1992).

As duas perspectivas referidas de tratar o conceito de função não são antagónicas. Ponte (1990) aponta "duas formas de conceber o estudo da Álgebra Elementar: numa a prioridade é dada às equações e às expressões designatórias. Noutra, a prioridade é dada à noção de função e à sua representação gráfica." E acrescenta que "através de ambas se dá praticamente a mesma matéria. Mas a verdade é que se trata de caminhos muito distintos, o primeiro privilegia os aspectos simbólicos e formais e o segundo os aspectos intuitivos e relacionais." Uma e outra são fundamentais para o desenvolvimento do aluno no que respeita à Álgebra Elementar, apenas se têm que distinguir os melhores momentos para as explorar.

Nos anos 80 o ensino das funções era pobre, a importância que se dava à aplicação das funções às outras ciências e a situações da vida real era pouca e prevaleceu a ideia de que os alunos deviam desenvolver capacidades e competências no uso de algoritmos e de técnicas (Ponte, 1990). Hoje, esta forma de ensinar o conceito de função foi ultrapassada. As orientações metodológicas propostas pelo Ministério da Educação incluem a aplicação do conceito de função às outras ciências e a situações da vida real:

> O programa do ensino secundário enfatiza a importância de se resolverem problemas da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua resolução (pag. 8), considerando a Modelação Matemática como uma das *estratégias que, constituindo uma base de apoio que os alunos utilizam na sua actividade matemática independentemente do tema, atravessa o programa transversalmente* (pag. 5). Alunos que só resolvem exercícios e se treinam para exames têm dificuldade em fazer a relação entre o conhecimento adquirido e o conhecimento necessário para resolver um problema da realidade ou de outra disciplina. Em todos os níveis de escolaridade os alunos devem ter oportunidade de fazer discussões, realizar trabalho prático, fazer investigação, resolver problemas e aplicar a matemática em situações da vida real.
>
> (programa actual do 10º ano relativo ao tema Funções, p. 114)

Esta forma de encarar o conceito de função assume uma aplicação do conceito de função às outras ciências e a casos reais e, implicitamente, privilegia a ideia de duas quantidades que variam de forma funcional. Esta visão contrapõe-se à ideia de que as funções são as suas equações e que confunde a *função* com a *regra* (unívoca), tendo como consequência que o próprio currículo podia estar a transmitir a ideia de que os gráficos sem expressão algébrica não são funções (Garcia e Llinares, 1996).

Os projectos de desenvolvimento curricular recentes e as últimas investigações no âmbito educacional apontam o caminho para as futuras intervenções curriculares de forma a ajudar os alunos a desenvolverem uma concepção de função sólida; intervenções que promovam as "formas de pensar" sobre funções que auxiliem efectivamente os alunos a usarem as funções como uma ferramenta eficaz tanto na exploração matemática como na exploração científica (Carlson e Oehrtman, 2005).
A noção de função, uma vez introduzida, deverá passar a aparecer ciclicamente no currículo, tratada de modo a permitir um progressivo enriquecimento e aprofundamento do conceito (Ponte, 1990). Carlson e Oehrtman (2005) argumentam que deve ser dada uma maior ênfase no desenvolvimento das capacidades dos alunos para falar sobre funções como entidades que aceitam entradas (inputs) e produzem saídas (outputs), deve ser incluída uma orientação na programação uma orientação mais conceptual ao ensino da função inversa e na composição de funções, a inclusão de tarefas que requeiram julgamentos simultâneos sobre intervalos completos de valores de entrada ou de saída, desenvolver nos estudantes as capacidades para mentalmente percorrerem um intervalo de valores da variável independente enquanto imaginam as mudanças que isso provocará nos valores da função (intervalo de valores da variável dependente).

A influência da investigação específica

Thompson (1994a; citado por Tall, McGowen e DeMarois, 2000) sugere que uma forma apropriada de introduzir o conceito de função deve focar, não as suas representações, mas sim um contexto significativo que incorpore o conceito de função: "Concordo com Kaput que pode ser perverso focar nos gráficos, expressões, ou tabelas como representações de funções. Devemos, em vez disso, focá-las como representações de *algo* que, da perspectiva dos estudantes, é representável como aspectos de uma situação específica." (p. 39). Aceitando esta premissa, Tall, McGowen e DeMarois (2000) sugerem que o *algo*, em lugar de ser uma variedade de diferentes contextos de onde se espera que os alunos abstraiam os aspectos da função, pode incorporar uma imagem genérica que exibirá tantos aspectos importantes do conceito de função quanto o possível. Para que isto se possa verificar, estes investigadores propõem aquilo que Tall (1992) chamou *raiz cognitiva*, como sendo um conceito âncora que os alunos podem considerar de fácil compreensão e que, contudo, é a base onde uma teoria pode ser construída, mas também reformulada. Sendo que, essa raiz cognitiva proposta, é a noção de *máquina de funções* como *caixa de input-output*. Mas vejamos como se deve entender, segundo Tall, McGowen e DeMarois (2000), o que é uma *raiz cognitiva*.

Uma raiz cognitiva é um conceito que:

- É uma *unidade cognitiva*[1] significativa do núcleo de conhecimento do aluno ao início de uma sequência de aprendizagem.
- Permite um desenvolvimento inicial através de uma estratégia de expansão cognitiva em vez de uma reconstrução cognitiva significativa.
- Engloba a possibilidade de ter um significado de longo prazo no que respeita a desenvolvimentos posteriores.
- Possui robustez suficiente para permanecer útil à medida que se desenvolvem compreensões mais sofisticadas.

Dada a complexidade do conceito de função, estes investigadores encontram na *máquina de funções* como *caixa de input-output* uma raiz cognitiva que incorpora tanto a dualidade de *processo* como de *objecto* e, também, as múltiplas representações do conceito de função. Seria, portanto, através dela que se construiria o conceito de função, visto que todos os elementos a incorporar na imagem do conceito podem ser retirados desta representação.

Iaderosa e Malara (2001) reportam que em Itália o conceito de função é introduzido segundo uma abordagem de fenómenos físicos simples, as funções são vistas como correspondências funcionais – que podem ser representadas algebricamente – entre quantidades diferentes. Contudo, nos anos mais avançados o conceito de função é tratado como uma correspondência funcional arbitrária unívoca entre elementos de dois conjuntos. Por isso, como se vê, o estudo do conceito de função é feita de uma forma próxima à sua evolução histórica: primeiro abordando o conceito de uma forma tradicional (no sentido de Newton e Fermat) e, depois, tratando-o de forma mais moderna (no sentido de Bourbaki). Segundo estas investigadoras, a forma de introduzir o conceito, baseado na relação entre duas quantidades, pode trazer dificuldades para quem ensina e para quem aprende, sobre tudo se a relação entre quantidades é

[1] Unidade Cognitiva: é uma peça da estrutura cognitiva que pode ser tomada como foco de atenção de forma única.

apresentada graficamente. Em particular, o uso do gráfico de uma função, que é a origem do conceito de função, pode de facto constituir um obstáculo epistemológico para o entendimento do conceito no seu sentido mais moderno se não for feito com sabedoria. O que é verdadeiramente importante é que os estudantes possam distinguir entre o conceito matemático e as suas representações, de forma a puderem desenvolver um verdadeiro conhecimento do conteúdo. E, além do referido, é didacticamente importante introduzir o conceito de forma que promova uma visão flexível nos alunos, examinando todos os seus aspectos enquanto se lançam as bases para posteriores desenvolvimentos.

Utilizando os níveis de compreensão do conceito de função propostos por Dubinsky e Harel (1992), Melanie Jones (2006) propõe que o conceito seja ensinado aos alunos e desenvolvido com base nas representações que melhor se adequam a cada fase em que o aluno se encontre:

- Assim, enquanto o aluno compreende o conceito de função ao nível da **acção**, este conceito pode ser apresentado através de gráficos e de fórmulas. Isto é, através da faceta geométrica e da faceta simbólica. Os gráficos são, porventura, a mais reconhecida das representações do conceito de função, contudo, não é directamente relacionada com a ideia de função pelos alunos. Os gráficos, muitas vezes, são apresentados aos alunos alguns anos antes de tomarem contacto com o conceito de função, por isso os alunos tendem a separar esta representação do conceito. No entanto os gráficos mostram ser a forma mais adequada de estudar certos aspectos do conceito: os máximos, os mínimos e de crescimento ou decrescimento (Selden e Selden, 1992). Eisenberg (1992) acredita que a representação visual deve ser aquela a ser especialmente enfatizada, infelizmente os alunos debatem-se, muitas vezes, com as suas (in) capacidades de visualização. Para não falar em certas funções totalmente atípicas na sua representação gráfica, por exemplo a função de Dirichlet. A representação simbólica, fórmulas e equações, é uma forma importante de tratar o conceito de função, atendendo à definição proposta por Euler para função. Esta representação revela-se particularmente útil no pré cálculo e no cálculo, mas os alunos que apenas trabalham com esta representação mostram dificuldade em entender o conceito quando ele se apresenta na forma de pares ordenados obtidos de forma arbitrária (Selden e Selden, 1992).
- Já na fase de compreensão do conceito de função como sendo um **processo**, a apresentação mais comum recai na *máquina de funções*. Como se viu, esta técnica apresenta as funções como caixas ou como máquinas que aceitam uma entrada (input) e produzem uma saída (output). Neste processo de compreensão, os alunos não necessitam saber qual o conteúdo da caixa; em vez disso, a simples existência da caixa (máquina) é suficiente para os convencer que estão a trabalhar com funções. Enquanto alguns investigadores, como se viu, sugerem que "a máquina de funções proporciona um fundamento sólido e é uma raiz cognitiva para o desenvolvimento e compreensão do conceito de função" (Tall, McGowen e DeMarois, 2000), outros há que vêem esta representação como ineficaz para os alunos que não entendem como a caixa (máquina) processa os valores numéricos (Selden e Selden, 1992). A investigação mostra que a *máquina de funções* apresenta limitações que se revelarão a médio prazo. Os alunos que se apoiam em demasia nesta representação revelarão dificuldade em conectar esta representação aos gráficos e demais representações (McGowen, DeMarois e Tall, 2000) e, por ser uma abordagem simplista do conceito, não apresenta uma visão completa do

conceito de função (Jones, 2006). Por outro lado, a ideia de função como sendo uma correspondência entre dois conjuntos, semelhante à definição de Dirichlet, em que para qualquer elemento do primeiro conjunto corresponde um e um só elemento do segundo conjunto, força o aluno a abandonar a ideia de que são necessários algoritmos para definir funções. Deste modo, os alunos focalizam-se mais na ideia de mapear um conjunto noutro (Selden e Selden, 1992) e na transição para a ideia de par ordenado.

- A forma mais profunda de entender o conceito de função situa-se no nível **objecto**. Nesta última etapa, os alunos concebem as funções como entidades em si próprias que podem ser transformadas e com as quais se pode operar. A construção de um novo objecto ocorre a partir de um processo quando o aluno percebe esse processo no seu todo e amplitude, lidando com algo sobre o qual se pode agir, transformar, modificar, sem perder sua essência. Quando tal acontece, diz-se que o processo foi *encapsulado* num objecto (Dubinsky e McDonald, 2001). O conceito de função é melhor entendido se representado por um par ordenado. A definição de função através de pares ordenados, tal como foi introduzida por Bourbaki em 1939, é a matematicamente mais precisa no sentido em que encerra a essência do conceito de função. Esta representação descreve a função como sendo um conjunto de pares ordenados (x,y), possivelmente infinito, nos quais cada coordenada-x está pareada com apenas uma coordenada-y. A importância desta representação baseia-se na forma como pode descrever rigorosamente uma função descontínua, pares arbitrários e pode também estender o seu âmbito de forma a incluir funções onde domínio e contradomínio não são conjuntos numéricos. Além do mais, o conceito de conjunto faz surgir mais rapidamente a noção de função como objecto. Infelizmente muitos autores consideram esta representação demasiadamente abstracta para os alunos do ensino básico e secundário porque necessitariam uma formação mais sólida em termos de teoria de conjuntos. Mais precisamente, compreender a ideia de infinito. Acumulando a estas dificuldades, os investigadores sustêm que embora os alunos possam reproduzir a definição de função por meio de pares ordenados, eles não conseguem aplicá-la na prática e padronizam a sua própria compreensão intuitivamente (Selden e Selden, 1992). Por estas razões, existe uma desconexão entre esta definição e a concepção de função por parte dos adolescentes (Jones, 2006).

Num artigo sobre a formação da visão do conceito de função como um objecto, Sfard (1992) afirma que esta visão, chamada *concepção estrutural*, é bastante importante para os matemáticos no sentido em que torna os processos cognitivos eficientes. Sfard usa o termo *concepção operacional* para referir a visão do conceito de função como um processo, e argumenta que os alunos devem primeiro trabalhar o conceito na perspectiva operacional, ver a função como uma operação, e só posterior e naturalmente deve transitar para a compreensão estrutural do conceito.

A tecnologia deverá ter um papel fundamental no desenvolvimento do conceito de função de forma que a actividade matemática dos alunos se aprofunde e facilite a generalização, relacionando temas tão distintos como a Geometria, a Álgebra e a Estatística (Ponte, 1990).

Ponte (1990) citando Demana e Waits (1990), diz-nos que a tecnologia tem o potencial necessário para nos levar a mudar a maneira como trabalhamos e encorajar os alunos, através de representações gráficas geradas em calculadoras gráficas e computadores, a manipular algebricamente o conceito de função. Além disso, "a tecnologia pode desempenhar um importante papel educativo, mudando o foco do ensino dos processos mecânicos e repetitivos para a compreensão da Álgebra e do Cálculo infinitesimal como instrumentos que permitam a modelação de problemas" (Ponte, 1990) transferindo o conceito de função para situações da vida real ou de outras ciências. A criação deste tipo situações, o desenvolvimento de tarefas atractivas e onde a tecnologia possa ser bem utilizada, bem como a materialização das propostas emanadas da investigação, encaixa bem no contexto do manual escolar. "O papel desempenhado pelos manuais como mediadores na aplicação das orientações programáticas, a articulação do ensino, e o próprio processo de aprendizagem, exige incorporar paulatinamente na sua elaboração os novos conhecimentos que se vão gerando no campo da Educação Matemática" (Garcia e Llinares, 1996, p. 114).

Em síntese:
O conceito de função é uma ideia matemática extremamente complexa cujas ramificações mais amplas levaram séculos para serem explicitadas (Tall e Bakar, 1992). A literatura está repleta de exemplos onde se fracassou na compreensão de todas as complexidades do conceito de função (Dreyfus e Vinner, 1982; Vinner, 1983; Even, 1988; Markovits *et al*,1988; Barnes, 1988; Tall, 1990).
Em termos de evolução, nos últimos 30 anos, a conceptualização do conceito de função transfere-se da própria função – equações, gráficos, processo input-output – para situações de modelação e de covariação de quantidades e descrição de relações funcionais próprias de uma situação. Isto é, tal como Garcia e Llinares descrevem no caso espanhol, "enquanto […] [antes era] o objecto matemático função (desde uma perspectiva conjuntista) o que articulava e justificava as tarefas, […] a conceptualização que justifica o desenvolvimento do currículo adoptado transfere-se para a ideia de matematização de situações em que existe uma covariação; isto é, a descrição de relações funcionais numa situação" (1996, p. 113). Com esta evolução, os alunos deixaram de executar tarefas centradas apenas na definição de função, nas equações e suas características, para uma aplicação deste conceito a situações não apenas matemáticas, onde "se centra a atenção em tarefas de transferência entre as formas de representação (situação, expressão gráfica e, nalguns casos, a expressão algébrica)" (Garcia e Llinares, 1996, p. 113).
Um fórum de pesquisa sobre abstracção foi conduzido no âmbito dos trabalhos dedicados a este aspecto do ensino da matemática nas PME-26 (Gray, 2002) coordenado por Tommy Dreyfus e por Eddie Gray. Neste fórum foram apresentadas diferentes teorias mas os participantes chegaram à conclusão de que as diferentes teorias aplicadas aos mesmos dados mostram que elas tanto se podem complementar como contradizer umas às outras. Esses mesmos participantes concluíram que a educação matemática precisa de modelos adequados às necessidades específicas em vez de grandes teorias globais, decidindo continuar a discutir o assunto, comparando teorias e, se possível, unificar aquelas que sejam semelhantes de forma a diminuir o número de teorias aplicáveis.

3. Conhecimento Didáctico do Conteúdo

Para qualquer professor, a finalidade da sua actividade profissional é que os alunos concretizem as aprendizagens programadas. Mas a qualidade dessas aprendizagens depende de quem ensina e de quem aprende. Se é verdade que a bibliografia refere diferenças entre alunos mais capazes e alunos com mais dificuldades, também é verdade que os professores podem ser diferenciados pelas suas capacidades profissionais e, neste âmbito, já muito se escreveu sobre as diferenças entre professores experientes e professores principiantes, entre professores com mais ou com menos sucesso. Claramente, essas diferenças entre professores podem ser assacadas aos resultados que, de um modo geral, os seus alunos obtêm e isso está fortemente ligado ao seu saber profissional. Este saber profissional obriga a *um conhecimento pedagógico geral, relacionado com o ensino, com os seus princípios gerais, com a aprendizagem e com os alunos, assim como com o tempo académico de aprendizagem, o tempo de espera, o ensino em pequenos grupos, a gestão da turma, etc. Inclui, também, o conhecimento sobre técnicas didácticas, estruturas das turmas, planificação do ensino, teorias do desenvolvimento humano, processos de planificação curricular, avaliação, cultura social e influências do contexto no ensino, história e filosofia da educação, aspectos legais da educação, etc. Para além de conhecimento pedagógico, os professores têm que possuir conhecimento sobre as matérias que ensinam. [...] Quando o formador não possui conhecimentos adequados acerca da estrutura da disciplina que está a ensinar, pode representar o conteúdo aos seus alunos de forma errónea. O conhecimento que os formadores possuem do conteúdo a ensinar também influencia o quê e como o ensinam. O* ***Conhecimento Didáctico do Conteúdo*** (o realce é nosso) *aparece como um dos elementos centrais do saber do formador. Representa a combinação adequada entre o conhecimento da matéria a ensinar e o correspondente conhecimento pedagógico e didáctico necessário para o fazer* (Marcelo, 2009, p. 19).
Na realidade, o Conhecimento Didáctico do Conteúdo incide sobre as crenças, atitudes, ânimo e sentimentos dos professores com respeito à matéria que ensinam e como estes aspectos influenciam os conteúdos que se seleccionam e na maneira de os ensinar, nos temas preferidos e nos que os professores não gostam de ensinar, bem como no autoconceito relativo à capacidade para ensinar uma determinada disciplina (Acevedo, 2009).

3.1 Notas históricas sobre o Conhecimento Didáctico do Conteúdo

O conceito de Conhecimento Didáctico do Conteúdo (CDC) está amplamente tratado nas bibliografias específicas do conhecimento profissional do professor e, também, do seu desenvolvimento profissional. O interesse da comunidade de académicos por este conceito desenvolveu-se de forma mais notória a partir do trabalho seminal de Lee Shulman (1986), um investigador reconhecido pelos seus trabalhos no âmbito do ensino e na formação de professores. Na sua perspectiva, nos anos 80, o conteúdo das lições que os professores proporcionavam aos seus alunos estavam a ser preteridas em relação ao interesse dedicado aos aspectos puramente pedagógicos. Naqueles anos, a formação de professores proporcionava aos estudantes para professores capacidades e destrezas pedagógicas que se mostravam insuficientes na sua preparação nas disciplinas que iriam leccionar. De igual forma, também uma preparação exclusivamente dedicada aos conteúdos da disciplina a leccionar se mostrava insuficiente para preparar professores competentes. Na sua perspectiva, a chave para distinguir o conhecimento base para o ensino radica na intersecção entre o conhecimento do conteúdo a ensinar e o conhecimento sobre pedagogia (Shulman, 1986). O que Shulman propôs era centrar a atenção no estudo do pensamento do professor sobre o ensino dos conteúdos das disciplinas. Para isso, há que ter em conta que toda a actividade educativa tem como apoio uma série de crenças e teorias implícitas que formam parte do pensamento do professor e que orientam as suas ideias sobre o conhecimento, a construção da sua forma de ensinar e de aprender (Abell, 2007; Cochran-Smith e Lytle, 1990; Porlán e Rivero, 1998; citados por Acevedo, 2009).

De uma forma muito concisa, foi com base no conceito de Desenvolvimento Profissional e seus elementos iniciais que se assistiu, desde os anos 90 até hoje, a extensões e interpretações que constituem o que hoje é um grande repositório do conhecimento do professor. Mais especificamente, de uma das partes desse conhecimento e que hoje conhecemos como Conhecimento Didáctico do Conteúdo. Os investigadores que inicialmente propuseram o conceito de Conhecimento Didáctico do Conteúdo afirmam que ele tem uma importância acrescida no trabalho que desenvolvem, pois permitiu que as investigações se voltassem a centralizar nas matérias disciplinares. Desta forma, a prática educativa afasta-se das abordagens genéricas à formação de professores que tinha vindo a ser dominante neste âmbito desde os anos 70 (Gess-Newsome e Ledermam, 2001). A teoria que se construiu sobre o conceito de Conhecimento Didáctico do Conteúdo questiona a importância de se saber tudo sobre um assunto se não compreendermos como é que os alunos o aprendem ou a importância de sermos muito hábeis em estratégias educativas se essas estratégias não proporcionarem um saber disciplinar de qualidade. O que se necessita é possuir a capacidade de integrar as oportunidades que o professor tem de aprender que se centrem em formas específicas de saber e fazer, contextualizadas na disciplina a ensinar; ou, então, contextualizadas no Conhecimento Didáctico do Conteúdo. Felizmente, temos as melhores práticas de investigação que delineiam as melhores abordagens genéricas, contextos, estratégias, e conteúdo sobre desenvolvimento profissional (Von Frank, 2008).

Este conhecimento particular do professor foi originalmente designado em inglês por *Pedagogical Content Knowledge* mas, na literatura específica em espanhol, foi traduzido para *Conhecimento Didáctico do Conteúdo* e, na literatura em português, tanto aparece designado por *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo* como por *Conhecimento Didáctico do Conteúdo*. Sobre isto, veja-se o que nos diz Bolívar (2005):

"*Apoiei, por sugestão de Marcelo (1993), traduzir o conceito "Pedagogical Content Knowledge" por Conhecimento Didáctico do Conteúdo, dado que o sentido específico e pejorativo de "Didactics" no contexto anglo-saxão no nosso não existe, e a equivalência de "pedagogical" por "didáctico" estaria justificada"*. (p. 14)

O sentido pejorativo do termo "Didactics" de que fala Bolívar é bem visível na entrada do OXFORD, *Advanced Learners Dictionary*: **Que parece tratar o ouvinte, leitor, etc., como uma criança de escola**. Também se pode apreciar este sentido no CAMBRIDGE, *Advanced Learners Dictionary*: **Forma de ensinar fortemente desaprovada, especialmente quando é demasiado determinada ou ávida e muitas vezes obstinada e sem mostrar desejo de alteração; Intenção de ensinar Moral.** O termo "didáctico" também é apresentado como sinónimo de "pedante". Nestes sentidos, percebe-se a razão pela qual o termo "pedagogical" é normalmente usado nos países

anglo-saxões, quando por cá os métodos e técnicas de ensino são maioritariamente relacionados com o termo "didáctica".
Será por estes motivos que neste trabalho será usado o termo "didáctico" e não o termo "pedagógico".

Shulman definiu o Conhecimento Didáctico do Conteúdo (CDC) como sendo a interpretação e a transformação que o professor faz do conhecimento das matérias disciplinares num contexto facilitador das aprendizagens dos alunos. É um conhecimento que se apresenta como a capacidade de compreensão profunda das matérias de ensino, permitindo encontrar as maneiras mais adequadas de as apresentar aos alunos de modo a facilitar a aprendizagem. Este conhecimento compreende por isso, no seu entendimento, as formas mais úteis de representação das ideias, as analogias mais importantes, as ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações, numa palavra, a forma de representar e formular a matéria para a tornar compreensível para os alunos (Shulman, 1986, p. 9). É um conhecimento do professor que revela a uma forma especial de compreensão profissional, i.e. uma forma de conhecimento (profissional) prático do professor. Isto implica que o Conhecimento Didáctico do Conteúdo é algo que os professores principiantes dificilmente poderão aprender dos livros de texto, ou apenas com um curso intensivo. Para desenvolver o CDC, os professores necessitam explorar na prática as estratégias de ensino relativas aos temas que vão leccionar (De Jong, Van Driel e Verloop, 2005). Além disso, os jovens professores necessitam adquirir [na sala de aula] uma compreensão das concepções dos alunos e das suas dificuldades de aprendizagem no que respeita aos temas disciplinares (Lederman, Gess-Newsome, & Latz, 1994).

Segundo Shulman (1987), o conhecimento base do professor para o ensino deve incluir pelo menos sete categorias de conhecimentos diferentes:
1. conhecimento do conteúdo
2. conhecimento didáctico geral
3. conhecimento curricular
4. conhecimento didáctico do conteúdo
5. conhecimento das características, dos aspectos cognitivos, da motivação, etc. dos alunos
6. conhecimento dos contextos educativos
7. conhecimento das finalidades educativas, dos valores educativos e dos objectivos

Estes sete conhecimentos foram, mais tarde, redefinidos por Grossman (1990) – uma assistente de Shulman – em quatro grupos mais gerais:
1. conhecimento didáctico geral
2. conhecimento do conteúdo
3. conhecimento didáctico do conteúdo
4. conhecimento do contexto

O Conhecimento Didáctico do Conteúdo está profundamente ancorado no trabalho quotidiano do professor. No entanto não se opõe ao conhecimento teórico, já que engloba tanto a teoria aprendida pelo professor durante a sua formação inicial como das

experiências que se adquirem com o trabalho desenvolvido ao longo da carreira de professor. Este conhecimento teórico e prático desenvolve-se sob a influência de factores relacionados com as experiências prévias do professor e, além disso, pelo contexto onde o professor está inserido.
As acções do professor, enquanto ensina as matérias disciplinares, são determinadas em larga medida pelo desenvolvimento atingido pelo seu Conhecimento Didáctico do Conteúdo, fazendo disso uma componente fundamental da sua aprendizagem contínua. O Conhecimento Didáctico do Conteúdo é a ligação entre o conhecimento sobre a aprendizagem e o conhecimento sobre o ensino, é um conhecimento base sobre o qual se podem construir as competências do professor. Desta forma, Shulman (1987) assinalou que o processo docente propriamente dito inicia-se quando o professor começa uma planificação reflexiva da sua actividade docente, desde as finalidades até ao contexto educativo e, então, compreende profundamente o que deve ser aprendido pelos seus alunos. Seguidamente, reflecte como se deve ensinar (selecção e organização dos materiais a utilizar, assim como as analogias, as metáforas, os exemplos, demonstrações, explicações, etc.), tomando em consideração as melhores formas de representação do conteúdo e as características do raciocínio dos seus alunos, para apresentar um estilo de ensino, avaliação, reflexão e nova compreensão para o futuro; com o que iniciará um novo ciclo de reflexão (Acevedo, 2009). Assim, a forma natural como um professor conduz um processo de aprendizagem, a flexibilidade com que trata o conteúdo e o ajuste deste ao nível de conhecimento dos alunos, bem como a selecção do estilo mais adequado às contingências do ambiente, denotam os padrões de CDC de um professor experimentado (Shulman, 1987).

O Conhecimento Didáctico do Conteúdo é um conhecimento complexo e poliédrico, não só como conjunto de conhecimentos e destrezas, mas também pelas diversas interpretações que dele se fizeram (Loughran e Van Driel, 2008; citado por Acevedo, 2009). Desde o primeiro momento, o CDC foi objecto de discussão pela ambiguidade com que Shulman o apresentou no início, pois então não fez qualquer alusão ao modo como se poderia operacionalizar e, menos ainda, aos elementos que permitissem defini-lo (Grossman, 1990; Acevedo, 2009). Seguindo Acevedo (2009), Shulman na primeira vez que referiu o CDC distinguiu somente dois componentes básicos, os conhecimentos que um professor tem

- dos alunos como aprendizes;
- do ensino de temas concretos.

O primeiro inclui o conhecimento detalhado das ideias prévias dos alunos sobre um determinado tema, as dificuldades que surgem na construção de certos conteúdos e na sua aprendizagem, assim como o interesse e a motivação que podem esses conteúdos. Um bom conhecimento dos estudantes permite ao professor interpretar melhor as suas ideias e acções, de tal modo que poderá organizar o ensino com mais eficácia, focando as estratégias didácticas para melhores representações do conteúdo.
Por outro lado, o conhecimento suficientemente detalhado de um tema facilita ao professor antecipar os componentes e relações entre os conteúdos que podem apresentar mais dificuldades para a sua compreensão. Um bom conhecimento da disciplina que se lecciona significa saber que *a coisa é assim*, compreender *porque é que é* e saber *sob que circunstância é válido* o conhecimento correspondente: " *Isto será importante nas conseguintes decisões didácticas que considerem a ênfase curricular*" (Shulman, 1986,

p. 9). Não obstante, o conhecimento profundo de um tema será infrutífero se os pontos de vista dos alunos sobre os conteúdos desse tema não forem tidos em conta. Do mesmo modo, a relação entre o conhecimento significativo e a selecção de estratégias de ensino deve considerar as diferenças entre as diversas matérias que podem ser objecto de ensino e aprendizagem. De outra forma, cada disciplina tem uma dimensão didáctica que não está separada do seu conteúdo, pelo que resulta imprescindível alterar a atenção desde os enfoques mais genéricos para outros mais específicos da disciplina na formação de professores, o que supõe reivindicar a importância das didácticas específicas nesta formação (Acevedo, 2009, p. 25).

Como se viu, o CDC é um conhecimento que permite transformar a matéria a leccionar em representações compreensíveis para os alunos. Mas também é a componente dinâmica do conhecimento profissional que, para Blanco, Mellado e Ruiz (1995), se gera e evolui a partir dos próprios conhecimentos, crenças e atitudes que requerem um envolvimento pessoal, cuja evolução se produz mediante um processo dialéctico entre a teoria assimilada e a prática desenvolvida, todo isto num processo de reflexão-acção. Atenda-se aos termos empregues por Blanco, Mellado e Ruiz (1995), que são “ *se gera e evolui*” quando se referem a este conhecimento, não deixando a sensação que este conhecimento apenas se transmite e adquire aquando da formação inicial, a sua evolução é fundamental para uma boa prática e nunca será, portanto, um conhecimento estático e momentâneo.

O conhecimento do professor que se revela mais digno de interesse é aquele cujo estudo pode facilitar a compreensão de como um professor principiante que é sabedor de uma matéria se transforma, pouco a pouco, num *professor da matéria*. O interesse em estudar o CDC deve-se, sobre tudo, ao facto de envolver um conjunto de saberes que permite ao professor transferir para o ensino o conteúdo de um determinado tópico; isto é, fazer a transposição didáctica do conhecimento especializado de um tema ao conhecimento escolar objecto de ensino e aprendizagem (Chevalard, 1985; citado por Acevedo, 2009).

De uma imensidão destas interpretações, ampliações e construções que se construíram com base nos trabalhos iniciais de Shulman daremos conta apenas de uma parte: aqueles trabalhos que se evidenciaram pela sua importância ou que, pela sua focagem e recente publicação, se integram de algum modo no âmbito da investigação que se descreve nesta tese.

Segundo Friedrichsen (2009), Grossman (1990) reorganizou o modelo de Shulman de forma a enfatizar a interacção do conhecimento Didáctico do Conteúdo com (a) o conhecimento das matérias disciplinares, (b) o conhecimento da pedagogia geral e (c) o conhecimento do contexto. Dentro do conhecimento das matérias disciplinares Grossman incluiu o conhecimento do conteúdo, bem como as estruturas sintácticas e substantivas. Como parte do conhecimento da pedagogia geral incluiu o conhecimento dos alunos e das aprendizagens, da gestão da sala de aula, dos currículos e sua leccionação, e de outros. Por fim, Grossman definiu o conhecimento do contexto como sendo o conhecimento que o professor tem da comunidade, da área administrativa escolar, da escola e de estudantes específicos.

Van Driel, Verloop e De Vos (1998) compararam as conceptualizações do Conhecimento Didáctico do Conteúdo usadas por diferentes investigadores e

concluíram que não existe um modelo universalmente aceite, contudo todos esses investigadores coincidem em dois aspectos essenciais: a compreensão das dificuldades de aprendizagem específicas dos alunos e o conhecimento de representações dos tópicos disciplinares para superar estas dificuldades.
Estudos mais recentes sobre diferentes domínios do Conhecimento Didáctico do Conteúdo (e. g. orientações relativas ao ensino, entendimento sobre os conhecimentos dos alunos ou estratégias de ensino) em Matemática revelaram investigações muito interessantes em que se encontraram relações positivas entre o Conhecimento Didáctico do Conteúdo do professor e a melhoria dos resultados matemáticos alcançados pelos alunos (e.g. Brunner *et al.*, 2006; Hill, Rowan, e Ball, 2005; Peterson, Fennema, Carpenter, e Loef, 1989; Staub e Stern, 2002).

Em síntese, o conceito de Conhecimento Didáctico do Conteúdo, tomado isoladamente, e a forma como se liga com todos os outros conhecimentos do professor, tem sido objecto de um estudo aprofundado nos últimos 20 anos. As investigações, os estudos e os trabalhos produzidos sobre o tema assumem perspectivas muito diferentes, no entanto podemos encontrar um aspecto que é comum: o CDC ancora-se na prática docente e na reflexão que o próprio professor faz sobre essa prática. É por este motivo que os professores que conseguem obter bons resultados no ensino de uma determinada matéria específica conseguiram, muito provavelmente, desenvolver um CDC adequado a essa matéria. Por outras palavras, a noção de CDC inclui a ideia de que os professores com êxito no ensino do conteúdo de um determinado tema têm uma especial compreensão do conhecimento desse conteúdo e da didáctica necessária para o seu ensino (Acevedo, 2009).

3.1.1 Alguns modelos e conceptualizações:

Como se viu em Van Driel, Verloop e De Vos (1998) existem dois elementos que são centrais em qualquer conceptualização do Conhecimento Didáctico do Conteúdo, que são, o conhecimento das representações das matérias disciplinares, por um lado, e a compreensão das concepções específicas dos alunos e das suas dificuldades na aprendizagem, por outro. Os dois elementos são sempre referidos a uma determinada área de conteúdo. De facto os dois estão entrelaçados e devem ser usados de uma forma flexível: quantas mais representações e estratégias o professor tiver ao seu dispor dentro de um certo domínio, e quanto melhor ele entender os processos de aprendizagem dos alunos nesse mesmo domínio, mais eficaz será a sua prática lectiva no domínio considerado. Por outro lado, também parece existir concórdia sobre a natureza do CDC. Primeiro, como o CDC se refere a *tópicos em particular*, então deve ser compreendido separadamente da pedagogia, dos propósitos educacionais e das características dos alunos de uma forma geral. Segundo, como o CDC respeita *ao ensino* de determinados tópicos, pode acontecer que se diferencie consideravelmente do conhecimento da matéria disciplinar *per se*. Além do mais, todos os académicos sugerem que o CDC se desenvolve através de um processo integrativo enraizado na prática lectiva e que, de facto, o CDC orienta as acções do professor quando estes tratam a matéria disciplinar na sala de aula (Van Driel *et al.*, 2002). Segundo estes investigadores, no domínio do ensino das ciências, vários estudos debruçaram-se sobre o desenvolvimento do conhecimento do professor e relativamente ao aperfeiçoamento do CDC, por isso os resultados destes estudos são relevantes em vários domínios: no conhecimento da matéria disciplinar, na experiência lectiva relativa a tópicos específicos, conhecimentos das concepções dos estudantes e das suas dificuldades de aprendizagem, além da participação em workshops específicas.

Grossman (1990) conceptualizou o CDC com os seguintes componentes:

a) Concepções sobre os propósitos de ensinar as matérias disciplinares
b) Conhecimento sobre as concepções dos alunos
c) Conhecimento curricular
d) Conhecimento das estratégias de ensino

Os professores constroem o seu conhecimento para o ensino a partir de várias fontes e, por isso, Grossman (1990) identifica quatro grandes fontes de desenvolvimento do CDC de professores em formação:

I. Educação Disciplinar: constitui a base para o conhecimento da matéria disciplinar e, consequentemente, constitui a base para o conhecimento de representações (e.g., analogias e exemplos) características do ensino.
II. Observação de Aulas: pode promover o incremento do conhecimento que os professores têm das dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos.
III. Experiências Lectivas em Aula: podem promover nos professores um conhecimento de estratégias específicas de determinados tópicos, tais como demonstrações e investigações.
IV. Cursos Específicos e Workshops: durante a formação do professor estas actividades podem ter algum potencial de influência do CDC, seja por melhorarem tanto os conhecimentos do professor em determinadas representações, como o conhecimento sobre dificuldades de aprendizagem dos alunos.

Porém, tem havido muito pouca investigação sobre como o CDC evolui com o tempo, e o impacto relativo das quatro fontes referidas de evolução do CDC não está totalmente claro. Parece provável que as contribuições mais importantes ao desenvolvimento do CDC são atribuíveis à formação na disciplina (Sanders, Borko e Lockard, 1993) e às experiências docentes que se têm em sala de aula (Van Driel, De Jong e Verloop, 2002).

Em 1995, Blanco, Mellado e Ruiz descreveram o CDC com base na distinção de duas componentes diferentes mas, contudo, muito relacionadas entre si: a Componente Estática e a Componente Dinâmica.

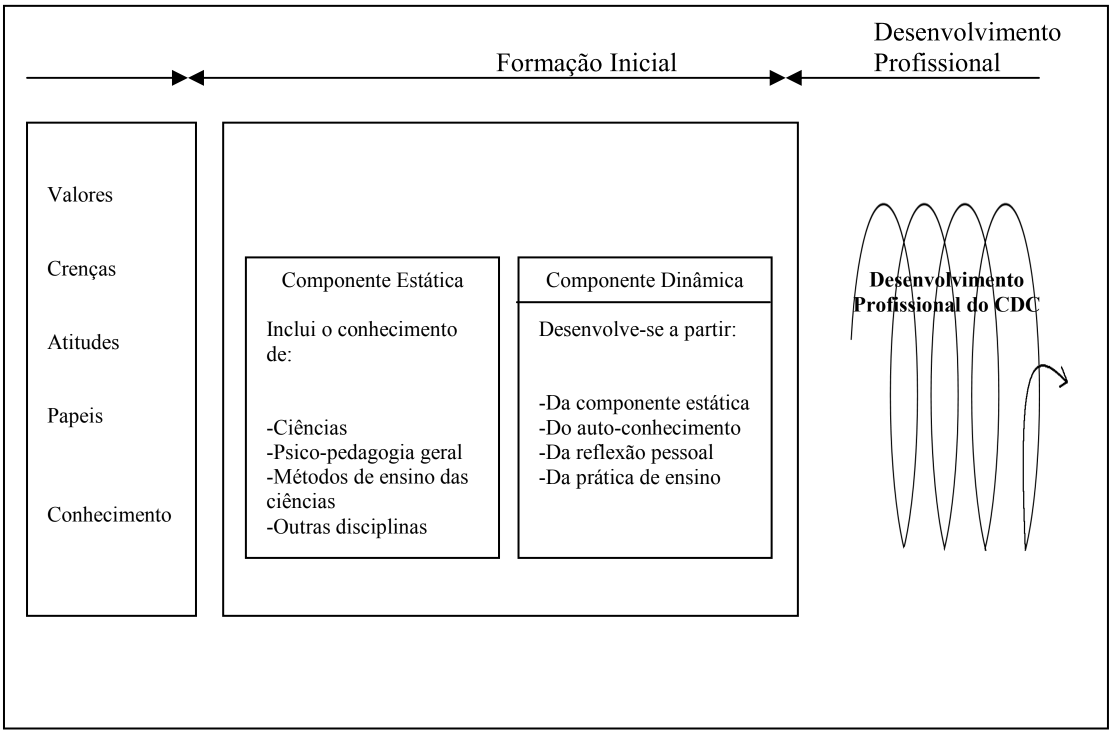


Figura 8: Modelo do CDC de Blanco, Mellado e Ruiz (1995)

Neste modelo, a componente estática inclui os aspectos em causa que são independentes do professor e do contexto em que ele se insere. São aspectos impessoais e podem ser encontrados, portanto, estudados e adquiridos, em materiais escritos ou áudio-visuais sem que seja necessário frequentar algum curso. Pode-se dizer que é o corpo teórico do conhecimento do professor. Assim, refere-se ao conhecimento dos conteúdos matemáticos, aos conhecimentos específicos sobre o ensino e aprendizagem da matemática e ao conhecimento geral de psico-pedagogia. O conhecimento estático é necessário aos estudantes para professores, mas é insuficiente para poderem aprender como ensinar.

A parte do conhecimento, à qual Blanco *et al.* (1995) chamaram a componente dinâmica, é gerada e evolui a partir dos conhecimentos pessoais, crenças e atitudes. Para que esta evolução se produza, é necessário um envolvimento pessoal do professor, e o seu desenvolvimento dá-se através de um processo dialéctico entre as teorias assimiladas e as experiências reais.

Aquilo que o professor lê não é exactamente aquilo que vai aplicar em aula. Muitas vezes os conteúdos e os processos matemáticos devem ser adaptados ao nível e às capacidades dos alunos. Esta capacidade de adaptação é influenciada pelas crenças e pelas concepções que o professor possui sobre a matemática e sobre o seu ensino-aprendizagem mas, sobre tudo, pelas experiências lectivas prévias e pelas reflexões que efectuou sobre as suas acções que levou a cabo. Este processo de se adaptar e de reflectir que se efectua difere de professor para professor e, provavelmente, os conteúdos adquiridos enquanto estudantes e leccionados como professores terão sido os mesmos. Esta dinâmica do CDC é possível enquanto a prática lectiva e a reflexão sobre e durante essa prática permitirem ao professor reconsiderar o seu conhecimento, modificá-lo ou reafirmá-lo, no todo ou em parte (Blanco, 2004).

Já no fim da década de 90, Gess-Newsome (1999) desenvolveu dois modelos teóricos para explicar a formação do Conhecimento Didáctico do Conteúdo. Estes dois modelos distinguem-se por um ser um modelo de cariz integrador, enquanto o segundo destaca-se por ser um modelo transformativo.
O primeiro considera o CDC como sendo o resultado da intersecção entre a didáctica, o conteúdo e o contexto:

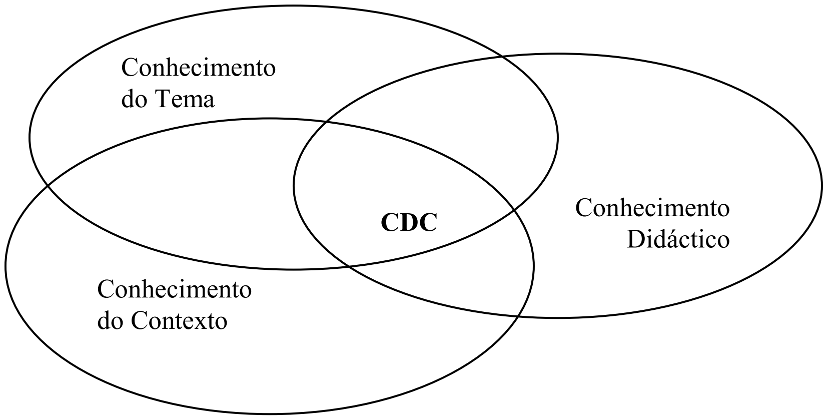


Figura 9: Modelo Integrador de Gess-Newsome (1999)

Pelo contrário, o segundo modelo contempla o CDC como o resultado de uma transformação do conhecimento didáctico, do conteúdo e do contexto.

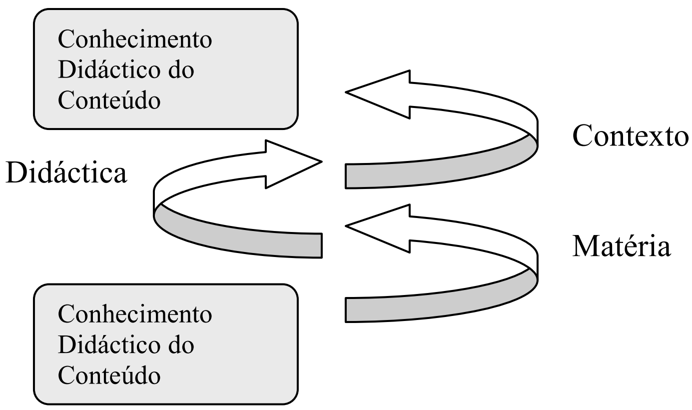


Figura 10: Modelo Transformativo de Gess-Newsome (1999)

Para Gess-Newsome (1999) estes dois modelos representam os extremos de um contínuo, em que o modelo integrador expressa um enquadramento onde os conhecimentos sobre o tema, a didáctica e o contexto podem desenvolver-se por separado para se integrarem depois na acção docente, enquanto o modelo transformativo não se ocupa tanto do desenvolvimento destes conhecimentos, mas como se transformam em CDC durante a prática docente, como sendo um conhecimento base para o ensino (Acevedo, 2009).

Magnusson, Krajcik e Borko (1999) propuseram um modelo na área das ciências da educação que apresenta cinco categorias que constituem o Conhecimento Didáctico do Conteúdo:

a) Orientações relacionadas com o ensino das ciências: conhecimento e crenças sobre os propósitos e metas do ensino das ciências num determinado nível de ensino. Uma orientação é "uma forma geral de ver ou conceptualizar o ensino das ciências".
b) Conhecimento dos currículos das disciplinas de ciências: conhecimento dos objectivos de aprendizagem, materiais didácticos, da sequenciação lectiva transversal a determinados tópicos (currículos horizontais), bem como o conhecimento dos currículos verticais.
c) Noção dos conhecimentos dos alunos das disciplinas de ciências: conhecimento do que os alunos sabem sobre um tópico, incluídas as falsas concepções mais comuns; requisitos para a aprendizagem de um tópico; como os estudantes aprendem melhor esse tópico; e áreas de dificuldades na aprendizagem dos alunos.
d) Conhecimento de estratégias educativas em ciências: conhecimento de abordagens específicas em ciências, representações e actividades específicas aos diversos tópicos.
e) Conhecimento da avaliação em disciplinas de ciências: conhecimento do *quê* e do *como* avaliar as aprendizagens dos alunos relacionadas com os objectivos planeados.

Na sua visão, o aspecto principal do CDC é a sua conceptualização como resultado de uma *transformação* do conhecimento proveniente de outros domínios. O CDC é obtido de três domínios: (a) o conhecimento das matérias disciplinares e suas crenças; (b) o conhecimento de pedagogia e suas crenças; e (c) o conhecimento e crenças sobre o contexto. O modelo que estes investigadores propõem é, assim, constituído pelos cinco conhecimento atrás referidos, resultantes da *transformação* descrita:

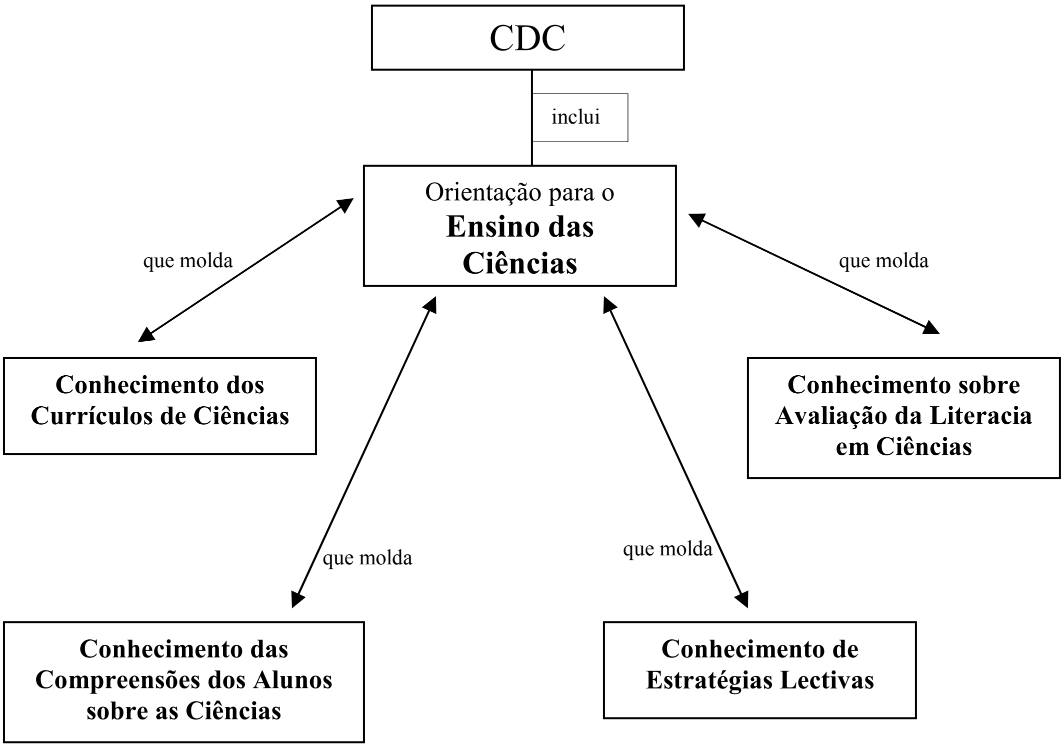


Figura 11: Modelo de Magnusson, Krajcik e Borko simplificado (1999)

Considerando que a maior parte dos trabalhos sobre o CDC dá pouca importância ao Conhecimento sobre Pedagogia, incluído o próprio trabalho de Shulman (1986, 1987) que limita a descrição deste conhecimento a um conjunto de estratégias e princípios gerais de gestão da aula, Morine-Dershimer e Kent chegaram a um modelo onde o Conhecimento de Pedagogia surge com um papel bastante importante; sobre tudo na forma como enriquece o CDC. Por isso mesmo, o modelo de Morine-Dershimer e Kent (1999) discute as fontes do conhecimento didáctico e do Conhecimento Didáctico do Conteúdo. Este modelo é apresentado segundo duas componentes distintas, (a) as relações entre as diversas facetas do conhecimento didáctico e (b) as relações recíprocas entre os diferentes tipos de conhecimento que formam o CDC. Note-se que estas duas perspectivas estão unidas pelo conhecimento didáctico que forma parte das relações do conhecimento didáctico e que também integra o CDC.

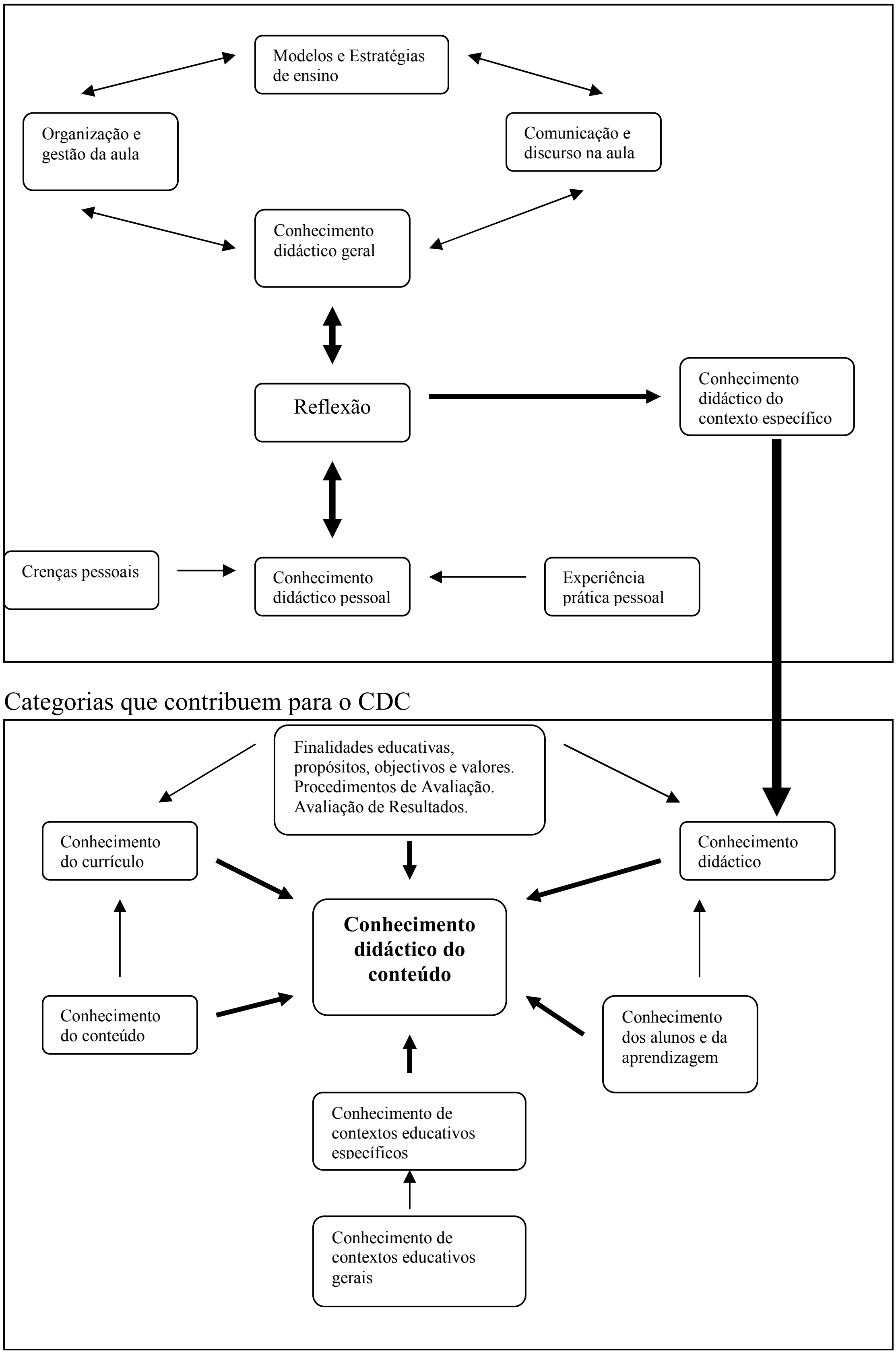


Figura 12: Facetas do Conhecimento Pedagógico de Morine-Dershimer e Kent (1999)

Segundo Acevedo (2009), o processo educativo é composto por um processo iterativo de ciclos de reflexão sobre a actividade docente. Pela sua natureza processual, o *Modelo Didáctico de Reflexão e Acção* requer processos de reflexão do professor sobre o conteúdo para o ensino que está em contínua reestruturação. A sua dinâmica vê-se enriquecida pelo contexto, pelas interacções sociais que o acto educativo obriga e pelos distintos momentos que integram a prática docente: apresentação do tema, transposição didáctica dos conteúdos, planificação, ensino, avaliação, revisão dos processos, entre outros aspectos. Este processo é ilustrado pelo esquema que Acevedo (2009) apresenta, proposto por Shulman (1987) e modificado por Salazar (2005):

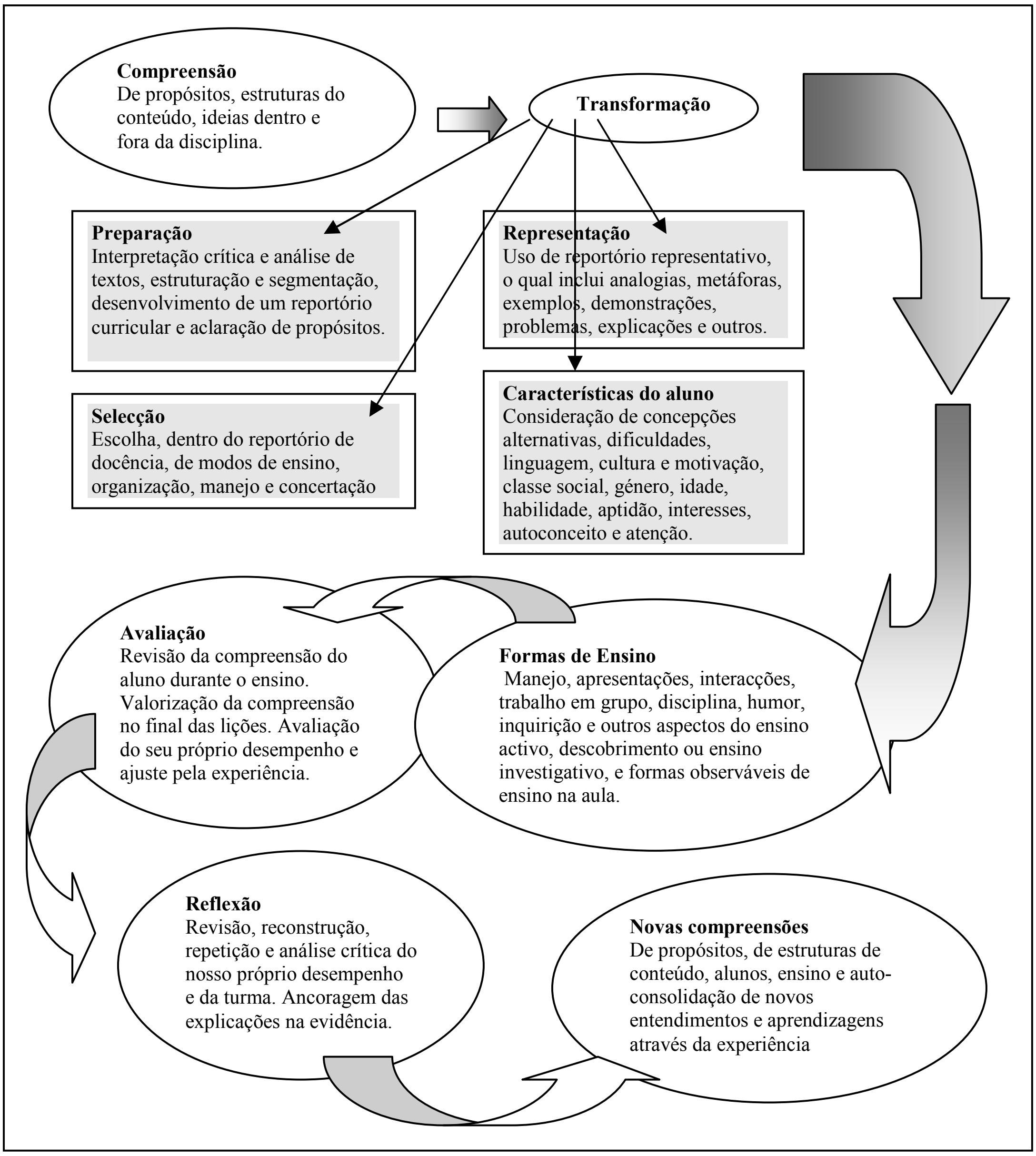


Figura 13: Modelo de CDC apresentado por Acevedo (2009)

As investigações que abordam tanto a qualidade do ensino como o conhecimento profissional do professor concordam que o Conhecimento Didáctico do Conteúdo dos professores de ciências é um conhecimento dinâmico e específico que é composto por três categorias centrais (Park e Oliver, 2008):

a) Conhecimento dos alunos e das suas falsas e pré concepções
b) Conhecimento de representações, ilustrações e estratégias de ensino das ciências
c) Conhecimento dos currículos, natureza e propósitos dos temas disciplinares

Estas três categorias são representadas por dois tipos diferentes de conhecimento (Park e Oliver, 2008; Tamir, 1988): CDC-na-acção e CDC-sobre-a-acção. O CDC na acção descreve os conhecimentos implícitos, de procedimento e técnicas (*o saber como…*); O CDC sobre a acção pode ser descrito como um conhecimento teórico/formal, explícito e declarativo (*saber que…*). Para que se possam integrar estes dois conhecimentos, as componentes reflexivas (reflecção-na-acção e reflexão-sobre-a-acção, Schön, 1983) do CDC dos professores de ciências são deveras importantes (Park e Oliver, 2008). A reflexão permite a análise e a avaliação do CDC-em-acção. Portanto, a reflecção é necessária para por à prova, corrigir e melhorar o CDC-em-acção. Conjuntamente, reflectir sobre o CDC-em-acção gera experiência profissional, que promove uma melhoria do CDC-sobre-a-acção do professor: " […] *o CDC apresenta os dois aspectos da conhecimento-na-acção e do conhecimento-sobre-a-acção. Estes dois aspectos não são mutuamente exclusivos, antes influenciam-se mutuamente através da reflexão, seja dentro ou fora da sala de aula. Como resultado, a reflecção-na-acção e a reflexão-sobre-a-acçãoproduzem um impacto sinergético no crescimento do CDC em termos de conhecimento-na-acção e de conhecimento-sobre-a-acção"* (Park e Oliver, 2008).

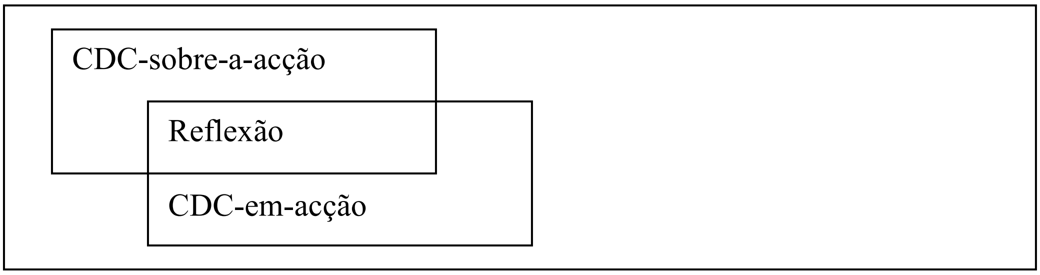
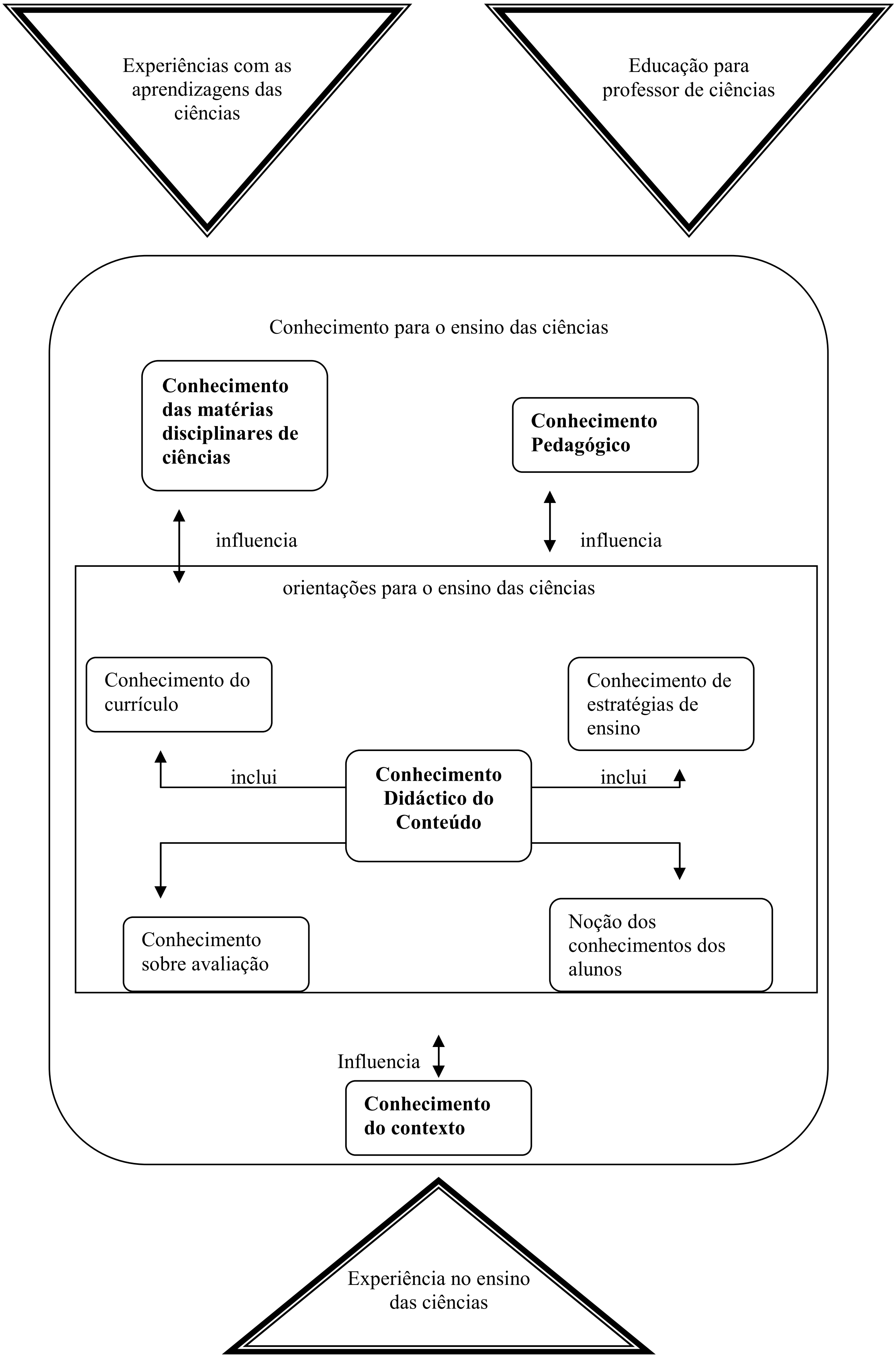


Figura 14: Modelo de CDC de Park e Oliver, 2008

Num estudo sobre as experiências prévias dos professores, na ausência de uma educação específica para o ensino, e o papel que estas experiências assumem no desenvolvimento do conhecimento do professor, Friedrichsen, Abell, Pareja, Brown, Lankford e Volkmann (2009) descobriram que as diferenças entre professores com dois anos de experiência e os professores sem qualquer experiência de ensino eram mínimas. Estas descobertas obrigaram estes investigadores a repensar um modelo de desenvolvimento do CDC que incluísse o Conhecimento de Pedagogia e orientações para o ensino. Esta necessidade de formulação de um novo modelo em que o papel do conhecimento pedagógico fosse mais preponderante surgiu pela constatação de que os professores sem experiência lectiva (ou quase nenhuma) encaravam o ensino como a transmissão de conteúdos e a aprendizagem como a memorização desses conteúdos. Este modelo de desenvolvimento do CDC visa um corte com a forma tradicional de ensinar e de aprender, utilizando-o como enquadramento teórico na programação de formação de professores.

Figura 15: Modelo de CDC de Friedrichsen e colegas (2009)



3.1.2 Alguns resultados obtidos das investigações sobre o CDC:

Os professores com um conhecimento diferenciado e integrado têm mais habilidade que aqueles cujo conhecimento é limitado e fragmentado para planear e apresentar uma aula que ajude os alunos a desenvolverem aprendizagens aprofundadas e integradas. Os professores mais competentes em ciências sabem melhor como planear e conduzir as experiências de aprendizagem, sob condições e restrições particulares, como ajudar diversos grupos de alunos a desenvolverem um conhecimento científico e a compreenderem as iniciativas científicas (Magnusson, Krajcik e Borko, 1999). A maior parte das diferenças entre os professores experientes e os professores principiantes é que os primeiros têm um conhecimento didáctico do conteúdo que os capacita para verem uma imagem mais ampla, e de diferentes perspectivas, e possuem flexibilidade suficiente para seleccionar um método de ensino que evidencie o tema que estejam a leccionar (Gudmunsdóttir e Shulman, 1987).
Aquilo que qualquer professor de ciências persegue é, de algum modo, ajudar os seus alunos a entenderem certo conhecimento de conteúdo em ciências. Ao fazerem isto, os professores fazem uso do seu CDC (Shulman, 1986; 1987). Enquanto o conceito de CDC é debatido na literatura dedicada, é do consenso geral que o desenvolvimento do CDC se efectua na sala de aula e com a prática diária (Van Driel, Verloop e De Vos, 1998), o que implica que tanto professores experientes como professores inexperientes que nunca tenham leccionado antes um tópico em particular terão um CDC pouco desenvolvido, ou mesmo inexistente, nesse conteúdo disciplinar específico. Por outro lado, os professores que obtêm sucesso, e cujo sucesso é reconhecido pelos seus pares, numa dada área disciplinar – isto é, aqueles cujo ensino daquela área de conteúdo promove uma aprendizagem efectiva dos seus alunos – têm provavelmente um CDC num alto nível de desenvolvimento nessa área de conteúdo (Mulhall, Berry e Loughran, 2003). Assim, podemos questionarmo-nos se será possível melhorar o CDC específico naquelas matérias disciplinares onde este conhecimento se encontre subdesenvolvido, usando os conhecimentos dos professores mais capacitados. Desta forma poderíamos evitar que todos os professores tivessem que "reinventar a roda" (Van Driel, Verloop e De Vos, 1998) cada vez que iniciam a leccionação de uma dada matéria.
A profusão de investigações, estudos e abordagens do Conhecimento Didáctico do Conteúdo, e de outras noções sobre o conhecimento do professor com ele relacionados, produziram um significativo volume de resultados. Como se poderá ver nas linhas que seguem, existe um vasto leque de campos de onde estes resultados provêm.

Van Driel e colegas (2002) analisaram o desenvolvimento do CDC de professores de Química em formação. Este estudo visou melhorar a compreensão da natureza do desenvolvimento do CDC entre os professores em formação. Nele concluiu-se que as experiências lectivas destes professores tiveram bastante impacto na sua formação: (a) as actividades e acontecimentos ocorridos durante as aulas afectaram o conhecimento dos professores em formação sobre algumas dificuldades específicas nas aprendizagens dos alunos; (b) o seu conhecimento sobre representações e estratégias de ensino beneficiaram das experiências decorrentes da prática em sala de aula. Este forte impacto da experiência lectiva é consistente com as descobertas de outros académicos (e.g. Grossman, 1990; Lederman, Gess-Newsome, e Latz, 1999). Também em linha com os resultados de outros investigadores, Van Driel e os seus colegas (2002) referem nas suas conclusões que, dado o CDC se vincular à habilidade para transformar a matéria disciplinar numa forma que seja acessível aos alunos, o seu desenvolvimento depende em larga medida do conhecimento dos conteúdos disciplinares dos professores em formação. Para além disso, também se deparou neste estudo que o conhecimento dos conteúdos disciplinares contém, muitas vezes, algumas deficiências e uma forma de atacar este problema passa por reconceptualizar os programas de formação dos professores de ciências, de forma que esses programas integrem cadeiras de conteúdo disciplinar, pedagogia e experiências de campo. Desta forma, através de tarefas específicas, os professores em formação poderão ficar mais cientes de algumas deficiências do seu conhecimento das matérias disciplinares.

Considerando a escassa investigação sobre como o Conhecimento Didáctico do Conteúdo em professores que iniciam a sua carreira, Jong, Van Driel e Verloop (2005) desenvolveram uma investigação com o propósito de estudar o CDC de doze professores de Química em formação, no contexto de uma pós formação incluída num programa de formação de professores. O assunto em estudo foi o uso de modelos de partículas no ensino da Química.
Dado que a literatura existente sobre o CDC ainda não proporcionou um enquadramento teórico baseado na investigação que seja completo e coerente, foram criadas as linhas de orientação retiradas da literatura disponível para orientarem a planificação de um módulo de formação que visa o desenvolvimento do CDC de professores em formação.
Com respeito ao CDC inicial dos doze professores sobre dificuldades nas aprendizagens dos alunos, as descobertas mostram que quase todos os professores em formação se lembram de ter experimentado dificuldades específicas na aprendizagem; apesar das lembranças serem entrecortadas e muito gerais, os professores parecem estar cientes dos problemas associados com a compreensão da relação entre fenómenos e entidades corpusculares. O uso do livro de texto foi a principal linha de orientação de aula de metade destes professores, isto é, estes professores mostraram a intenção de seguir as estratégias implícitas que eram apresentadas nos capítulos do livro de texto. Esta escolha de estratégias não surpreende, pois os professores inexperientes vêem nos manuais abundantes fontes de informação e que irão ter uma influência muito forte no ajustamento da sua actividade docente. A outra metade dos professores em formação também pretendeu usar o manual, mas mostraram a intenção de adaptar a forma de apresentação nele contida de forma a prevenir possíveis confusões entre os alunos. Os investigadores, no final da investigação, consideraram ser difícil fazer uma relação directa entre o CDC antes das aulas leccionadas pelos professores sobre o tópico escolhido e o CDC apresentado pelos mesmos professores após a leccionação dessas mesmas aulas. Ainda quanto ao desenvolvimento do CDC, pela análise dos dados, os investigadores puderam concluir que o crescimento deste conhecimento ocorreu de forma mais marcada nos seguintes aspectos. No que respeita aos assuntos que leccionaram, todos os professores em formação expressaram um conhecimento de dificuldades específicas da aprendizagem, que diferiam do seu conhecimento antes de leccionar. E, mais importante, embora as descrições das dificuldades de aprendizagem pudessem variar nos detalhes e na precisão, o conhecimento pós-lectivo foi normalmente diferente daquele que detinham antes de leccionar. Assim, de estas conclusões e de outras que não destacámos, sublinha-se a necessidade da prática lectiva e da respectiva reflexão como elementos chave no desenvolvimento do CDC.

Os trabalhos de Neubrand e Baumert (Baumert, Blum e Neubrand, 2004; Neubrand, 2006, 2008) estudaram o efeito que o Conhecimento Didáctico do Conteúdo tem nos resultados dos alunos. Porém os resultados dos seus estudos mostram que existe uma forte influência de um sólido Conhecimento do Conteúdo no desenvolvimento do Conhecimento Didáctico do Conteúdo; o contrário, definitivamente, não se verifica: o Conhecimento do Conteúdo, por si só, não determina bons resultados dos alunos, nem influencia o ambiente da sala de aula de forma a se obter um cenário matematicamente mais desafiante. Por outro lado, a activação cognitiva dos alunos em sala de aula depende, fundamentalmente, do nível de desenvolvimento do CDC alcançado pelo professor. Estes resultados estão em linha com as orientações apresentadas por Neubrand (2006) sobre a formação de professores, mais especificamente quanto aos diferentes níveis de educação dos professores de matemática:

- Os conhecimentos em psicologia e pedagogia permanecem esvaziados se não estiver relacionado com o tema disciplinar.
- A parte da educação matemática incluída na formação do professor não pode ser realizada como base em disciplinas metodológicas; em vez disso, necessita de reflexão sobre os aspectos característicos da matemática, seja no sentido epistemológico ou no que se refere ao pensamento dos alunos.
- As disciplinas de conteúdo matemático, elas próprias, devem transportar aquilo que é o pensamento matemático, como os matemáticos procedem e como a Matemática se liga às outras actividades do Homem. Isto é, como sendo um desafio cognitivo.

Em síntese, não há substituição do Conhecimento do Conteúdo pelo Conhecimento Didáctico do Conteúdo ou por estudos pedagógicos, nem vice-versa.

Para compreender até que ponto as experiências docentes prévias influem no desenvolvimento profissional dos professores, Friedrichsen e colegas (2009) realizaram um estudo com o objectivo de analisar o conhecimento obtido de experiências docentes anteriores à entrada para um programa de certificação de professores e compreender o papel da experiência docente no desenvolvimento do conhecimento do professor. Especificamente, os investigadores desejavam testar a noção de que os professores aprendem o que necessitam dentro da profissão; este teste baseia-se na comparação dos conhecimentos prévios de dois tipos de professores: aqueles que possuem experiência de ensino anterior à entrada para o programa de certificação e outros que não têm qualquer experiência como professores. Os resultados deste estudo indicam que os educadores de professores de ciências devem usar os conhecimentos sobre o CDC como enquadramento teórico nos seus cursos. Isto pode conduzir a uma partilha de expectativas relativamente ao desenvolvimento do conhecimento do professor e ajudar os estudantes para professores a reflectir sobre a forma de desenvolver o seu próprio conhecimento ao longo da carreira. Como conclusão ao problema inicial, o estudo desafia a ideia de que o que é importante é uma boa formação científica na disciplina que o futuro professor irá ensinar; a partir daí, o professor, autonomamente, poderá aprender o que quer que precise já no seio da profissão. Por outro lado, a diferença entre os dois grupos de professores, com e sem experiência, não se revelou evidente; eventualmente porque a experiência de dois dos professores era apenas de dois anos. Ainda assim, ficou estabelecido que a pouca ou nenhuma experiência dos informantes determinou um fraco CDC para o ensino da Biologia.

3.1.3 Medindo o Conhecimento Didáctico do Conteúdo:

Se se analisar a literatura específica sobre o conhecimento matemático para o ensino que um professor deve possuir, podemos ver que alguns investigadores que seguiram esta linha de investigação têm medido, usualmente, os conhecimentos dos professores usando variáveis de substituição, tais como os cursos frequentados, os graus académicos alcançados ou os resultados de testes de capacidades básicas. Esta forma contrasta vivamente com outro grupo de académicos dedicados à educação que iniciaram formas de conceptualização do conhecimento dos professores para o ensino de forma diferente, argumentando que o efeito do professor nos resultados dos alunos resulta da habilidade do professor para entender e usar as matérias disciplinares e também de executar as tarefas lectivas. De acordo com esta última perspectiva, o conhecimento matemático para ensinar vai para lá dos cursos a que se assistiu ou das capacidades básicas evidenciadas. Por exemplo, os professores de matemática não só precisam de calcular correctamente como também de necessitam saber usar diagramas e figuras para apresentar as representações dos conceitos matemáticos e os procedimentos aos alunos, para lhes proporcionar as explicações das diversas regras e procedimentos matemáticos e para analisar com eles soluções e resoluções de problemas (Hill, Rowan e Ball, 2005).

Nos últimos anos assistiu-se a um progressivo abandono de investigações sobre o conhecimento dos professores suportadas em estudos cujo objectivo é caracterizar e descrever o seu Conhecimento Didáctico do Conteúdo. Como consequência, começaram a surgir estudos que visam *medir* este conhecimento. O termo *medir* deve ser lido num sentido amplo – mais qualitativo que quantitativo – e os resultados que se obtêm são, normalmente, conseguidos por via de testes de escolha múltipla, observações, entrevistas e outros métodos de cariz qualitativo. Alguns destes estudos, no domínio da educação matemática, puderam apresentar resultados obtidos directamente de *medições* do Conhecimento Didáctico do Conteúdo (Hill, Schilling e Ball, 2004; Krauss *et al.*, 2008).

Com o propósito de averiguar *se* e *como* é que o conhecimento matemático para o ensino influencia a melhoria dos resultados dos alunos, Hill, Rowan e Ball (2005) estudaram o trabalho de vários professores e concluíram que existe uma relação significativa entre o trabalho do professor com os seus alunos e os resultados que estes conseguiram alcançar. Os resultados deste estudo basearam-se em medições efectuadas sobre o conhecimento matemático especializado e as capacidades evidenciadas nas actividades lectivas pelos professores. Além disto, o estudo abriu três linhas de investigação distintas que se relacionam com investigações sobre (a) o como os métodos de ensino e os materiais usados nas aulas influenciam a performance dos alunos; (b) as análises mais precisas sobre as distinções teóricas e empíricas do conhecimento matemático para o ensino aplicadas na prática lectiva, bem como analisar os seus efeitos (isolada e conjuntamente) nos resultados dos alunos; e (c) focalizando as investigações em *se* diferem e *como* diferem as práticas lectivas dos professores conhecedores dos professores não conhecedores da matemática para o ensino.
Todas estas investigações revelaram-se necessárias para um melhor esclarecimento do conhecimento do professor. Os professores não incrementam as aprendizagens e os conhecimentos dos alunos apenas por preencherem correctamente um teste de escolha

múltipla de forma semelhante que os professores deste estudo. Porém, o que os professores *conhecedores* fazem nas suas aulas – ou como o seu *conhecimento* afecta as sua prática lectiva – ainda está por situar e analisar. Será que o seu conhecimento matemático afecta as suas decisões? A sua planificação? Como trabalham com os alunos e como usam os livros de texto? Como lidam com as confusões e com as percepções dos alunos ou como explicam os conceitos? Analisar a prática dos professores *conhecedores* pode revelar novos aspectos do conhecimento matemático que *interessa* para o ensino: como as representações são apresentadas ou como os exemplos são seleccionados (Hill, Rowan e Ball, 2005).
Mais tarde Ball e colegas criaram um modelo teórico que dá rigor e expande as ideias originais contidas na noção de Conhecimento Didáctico do Conteúdo de Shulman em algo mais descritivo, no âmbito da disciplina de matemática. Descrito como um modelo que identifica os vários aspectos do conhecimento matemático para o ensino, este modelo está separado em duas categorias principais de conhecimentos, que são, por sua vez, ainda divididos: o conhecimento da matéria disciplinar e o conhecimento didáctico do conteúdo (Hill, Ball, e Schilling, 2008, p. 377).

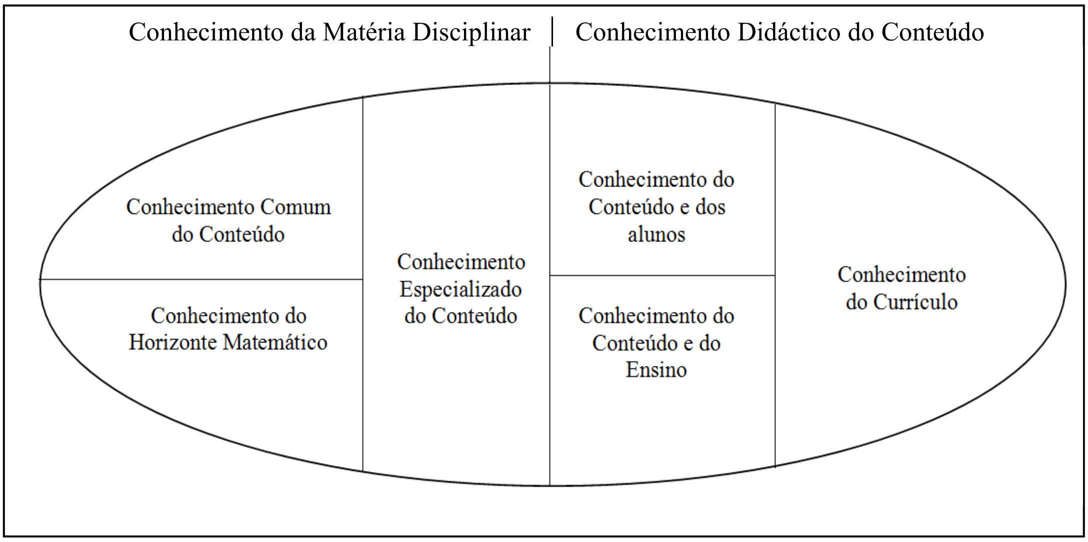


Figura 16: Modelo do *Conhecimento Matemático para o Ensino* de Ball et al, (2008)

O Conhecimento da Matéria Disciplinar divide-se em Conhecimento Comum do Conteúdo, em Conhecimento Especializado do Conteúdo e em Conhecimento do Horizonte Matemático:

I. Conhecimento Comum do Conteúdo: conhecimento que é utilizado no trabalho docente de uma forma que é comum à forma como é utilizado em tantas outras profissões e ocupações que também utilizam a Matemática.
II. Conhecimento Especializado do Conteúdo: conhecimento matemático que permite ao professor envolver-se em determinadas tarefas docentes, incluindo a forma rigorosa de representar as ideias matemáticas, proporcionar explicações matemáticas para regras comuns e outros procedimentos, e analisar e compreender métodos de resolução de problemas.

III. Conhecimento do Horizonte Matemático: conhecimento sobre Matemática tal como se relaciona com os temas a leccionar futuramente. É sabendo quais os temas de matemática que se aproximam no horizonte que os professores podem realizar, adequadamente, um trabalho de campo com os temas que leccionam no momento.

Neste momento convém precisar que estes três conhecimentos dependem apenas do conhecimento dos conteúdos matemáticos. Não é requerido qualquer conhecimento dos alunos ou do ensino para que se tenha adquirido conhecimento suficiente nas três categorias. Os autores (Hill, Ball, e Schilling, 2008), explicam que as categorias que integram o Conhecimento da Matéria Disciplinar estão intimamente associadas ao que no modelo de Shulman (1986) é o Conhecimento do Conteúdo; contudo, os autores argumentam que o Conhecimento Comum do Conteúdo está mais relacionado com o Conhecimento do Conteúdo de Shulman que o Conhecimento Especializado do Conteúdo.

A categoria relativa ao Conhecimento Didáctico do Conteúdo foi dividida em Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos, Conhecimento do Conteúdo e do Ensino e Conhecimento do Currículo:

I. Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos: conhecimento do conteúdo entrelaçado com o conhecimento de como os alunos pensam sobre, sabem ou aprendem um conteúdo em particular.

II. Conhecimento do Conteúdo e do Ensino: conhecimento da Matemática tal como é usada na planificação lectiva. Pode incluir sequencias de actividades para maior efectividade, ou o conhecimento sobre que ideias trabalhar, o que deixar para momentos posteriores, e quando interromper para esclarecimento de dúvidas.

III. Conhecimento do Currículo: conhecimento idêntico ao Conhecimento do Currículo descrito por Shulman (1986).

O modelo descrito foi utilizado para conceptualizar e medir o conhecimento que os professores eficazes têm sobre as ideias e pensamento matemático dos seus alunos (Hill, Ball, e Schilling, 2008). Os investigadores descrevem o esforço que empregaram para conceptualizar e desenvolver formas de medir o conhecimento do professor que combina o conhecimento do conteúdo com o dos estudantes, através da elaboração, condução e análise dos resultados de itens de escolha múltipla. Para isto, foi dado uma especial atenção a este conhecimento que integra aquele modelo acima descrito, um conhecimento que faz parte do Conhecimento Didáctico do Conteúdo e que foi definido como Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos. Este conhecimento é usado em tarefas docentes que envolvem uma atenção simultânea ao conteúdo específico e às particularidades dos alunos; por exemplo, como os alunos normalmente aprendem a somar fracções, bem como os erros e as falsas concepções que tipicamente surgem durante o processo.

No fim, o estudo permitiu estabelecer que os professores possuem um Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos. A forma como este conhecimento se revela prende-se com a familiarização que os professores revelam sobre as dificuldades dos alunos e da forma como eles pensam, sobre os erros comuns que os alunos revelam em determinados tópicos dos currículos matemáticos e sobre as concepções específicas às matérias disciplinares. Relativamente àqueles que se interessam por encontrar um conhecimento base para o ensino da matemática que possa orientar a formação de professores ou o conteúdo do desenvolvimento profissional, será um primeiro passo importante verificar que o conhecimento base para ensinar matemática é diferente do conhecimento puramente matemático ou puramente pedagógico. Além disso, o estudo mostra que medir o Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos não pode ser feito de forma directa e, também, que fica por estudar melhor se este conhecimento, tal como foi medido, se relaciona com a melhoria dos resultados dos alunos na aprendizagem da matemática; sendo que os resultados do estudo reforçam a ideia que os professores possuem técnicas, percepções e sapiências para lá daquelas que possuem outros adultos matematicamente bem formados. Contudo, a noção de *Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos*, como conhecimento, necessita ser melhor estudada e desenvolvida. Os professores sabem que os alunos cometem certos erros em áreas determinadas, ou que aqueles tópicos são mais difíceis de aprender ou que algumas representações costumam funcionar bem. Mas os professores também reflectem sobre as aprendizagens matemáticas dos alunos: eles vêem os alunos trabalhar, ouvem as respostas dos alunos e vêem-nos resolver problemas. Os professores devem desenredar os pensamentos e as acções dos alunos, usando o seu conhecimento sobre os tópicos e a sua percepção sobre os alunos.

Paralelamente aos estudos que pretendem, de alguma forma, medir o conhecimento do professor, podem-se encontrar estudos com vista à medição de CDC em matérias específicas. É o caso em que se integram dois âmbitos de estudo tão distintos como a natureza do CDC e o modo como mos professores tratam a Argumentação e Prova. Schwartz *et al.* (2008) e Corleis *et al.* (2008) apresentam resultados qualitativos de investigações sobre o conhecimento profissional no tema da demonstração, argumentação e da prova baseados em resultados de questionários de tipo aberto e em dados sobre as competências que professores em formação têm em áreas do conhecimento matemático e da didáctica da matemática. Os dois estudos são semelhantes, pois baseiam-se num estudo comparativo entre professores em formação entre dois países no caso de Corleis *et al.* (2008), e de três países no caso de Schevarz *et al.* (2008). Os resultados encontrados apontam no sentido de que estes professores, na sua maioria, são incapazes de produzir provas e demonstrações formais, mesmo quando os conteúdos em causa são aqueles que se ministram a alunos entre os 12 e os 15 anos. Em contraponto, a grande maioria apresentava conhecimentos de pedagogia, mais precisamente na reflexão sobre demonstração formal e pré-formal em ensino da matemática. Como conclusão, estes dois estudos mostram que mesmo possuindo os conhecimentos matemáticos tidos como necessários para ensinar e estando pedagogicamente familiarizados da forma como demonstrar, estes conhecimentos não proporcionam a preparação suficiente para ensinar no âmbito da argumentação, demonstração e da prova.

Também no campo da medida do CDC em matérias específicas, Lange, Kleikman e Moeller (2009) levaram a cabo uma investigação onde o escopo foi explorar *como* e *se* o Conhecimento Didáctico do Conteúdo de professores primários, em ciências, contribui para a obtenção de melhorias na compreensão de conceitos dos alunos nesta área. Para medir o Conhecimento Didáctico do Conteúdo dos professores primários foi experimentado um instrumento composto por itens de escolha múltipla e de resposta aberta. Como conclusão, os investigadores apontam uma clara relação entre o nível de desenvolvimento do CDC do professor e os ganhos de aprendizagem dos seus alunos, sugerindo por isso que o CDC do professor seja de abordagem obrigatória nos programas de formação inicial de professores. Isto é, melhorando o CDC dos professores melhoram-se, também, os conhecimentos e os resultados dos alunos nas disciplinas de ciências.

Riese e Reinhold (2009), constatando a inexistência de estudos empíricos que apresentassem resultados no campo da Educação em Ciências Experimentais, interessaram-se pelo Conhecimento Didáctico do Conteúdo que vários estudantes para professores de Física adquiriram durante a sua formação académica. Esse interesse resultou num estudo que produziu um modelo capaz de *medir* as competências profissionais dos estudantes para professores de forma a poderem identificar as competências consideradas necessárias ao cumprimento da sua formação. O modelo teórico permitiu a estes investigadores gerar um instrumento quantitativo que pode medir os diferentes aspectos da competência profissional de acordo com os princípios teóricos. Após diversas aplicações experimentais foi conseguida uma validação do instrumento e o passo seguinte será a sua introdução gradual em várias universidades.
O modelo teórico de tem a seguinte estrutura:

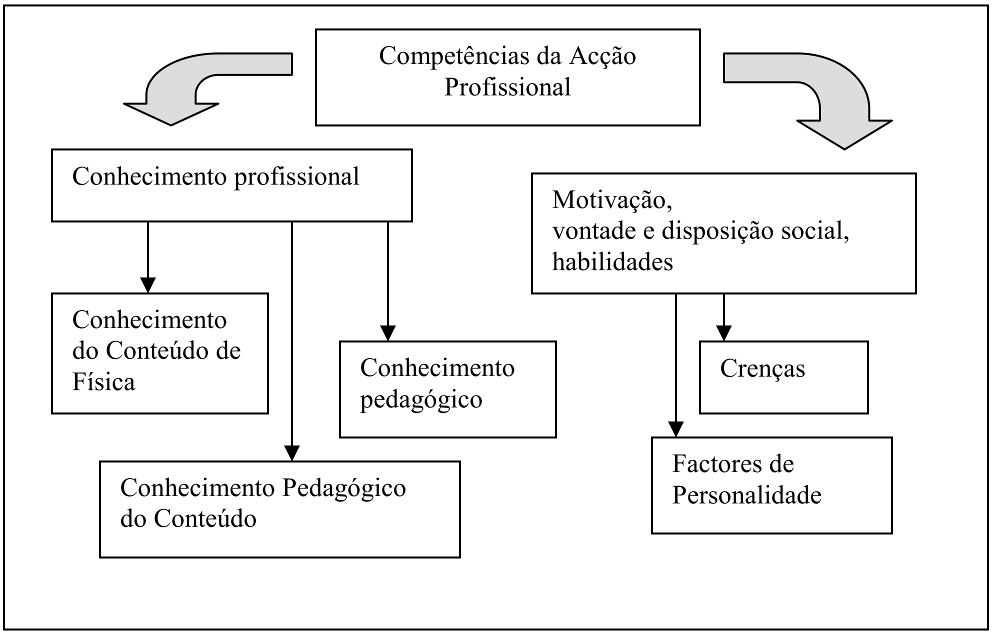


Figura 17: Modelo de competência profissional de Riese e Reinhold (2009)

3.1.4 O CDC Tecnológico:

É justo dizer que uma pessoa não pode ser cientista sem ser conhecedor dos computadores e outras tecnologias avançadas (McCrory, 2008). Mishra e Koehler (2006) propuseram um enquadramento conceptual a que chamaram Conhecimento Didáctico do Conteúdo Tecnológico. Construído sobre o conceito de CDC de Shulman (1986), Mishra e Koehler (2006) introduzem o conhecimento da tecnologia como um componente explícito do conhecimento do professor. O enquadramento teórico para o CDC-Tecnológico, segundo estes investigadores, capacita uma via teoricamente mais consistente de descrever, implementar, analisar e avaliar o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no ensino das ciências.

O conhecimento dos professores sobre tecnologia, ciência e pedagogia convive com o saber onde utilizar a tecnologia, que tecnologia usar e como ensinar utilizando-a. McCrory (2008) discute estes três aspectos na forma de resposta às três perguntas: Onde? Qual? e Como?

Onde *é que a tecnologia pode ajudar?*

O uso da tecnologia pode ser implementado nos tópicos do currículo mais complicados de leccionar para que se superem as dificuldades pedagógicas ou cognitivas ou, eventualmente, quando surgem tópicos do currículo onde a tecnologia se revele como elemento essencial da ciência a ser ensinada. Desta forma, a tecnologia utilizada pode perseguir dois usos: um uso pedagógico e outro cientifico. O uso pedagógico perseguirá objectivos relacionados com a rapidez e poupança de tempo em aula, explorar aspectos que apenas a tecnologia permite, incrementar o rigor, recolher/tratar/guardar dados, compartilhar informação a nível global e discuti-la com especialistas. O uso científico da tecnologia pode ser dividido em tecnologia que integra os tópicos científicos em estudo e tecnologia que auxilia o estudo da ciência. Isto é, tecnologia que *é parte* da ciência e tecnologia que *é instrumento* da ciência. Por isso, McCrory (2008) categoriza a tecnologia em (a) Tecnologia que não se relaciona com a ciência mas que é usada ao serviço da ciência (processadores de texto, folhas de cálculo, entre outras); (b) Tecnologia concebida para o ensino e aprendizagem da ciência (VirtualFrog, Cooties, BIOKids, Cabri Geometry I e II, entre outras); e Tecnologia concebida e usada para fazer ciência (microscópios, telescópios, sondas CBL, calculadora científica, entre outras).

Qual *a tecnologia disponível?*

O leque de possibilidades nas aulas de ciências é enorme. As possibilidades de hardware incluem dispositivos portáteis, computadores portáteis, calculadoras, sondas, etc. São tecnologias com ou sem fios, que podem suportar software educativo e que cada escola possui de forma muito diferenciada.

Como *pode a tecnologia ser integrada na sala de aula?*

Como qualquer recurso educativo, a tecnologia deve ser introduzida em aula com cuidado, principalmente se são recursos inovadores. Para evitar riscos de insucessos, este investigador propõe que se analisem as questões:

- Existe alguma coisa sobre calculadoras que seja necessário ensinar aos alunos antes de iniciar este projecto?
- Será útil deixá-los "brincar" durante algum tempo com os materiais antes de passarmos às coisas "sérias"?
- Quais são as possíveis ou previsíveis falhas do software ou do hardware? Que devo fazer caso aconteçam?

- Como devo organizar a sala de aula para esta actividade?
- Qual a natureza da actividade onde os meus alunos se vão envolver?
- O que posso imaginar que vai acontecer enquanto os meus alunos estão envolvidos nesta actividade?
- Quais são os aspectos principais que eu quero que os meus alunos aprendam com esta actividade?
- Como poderei saber se esta actividade foi bem sucedida?

Embora os professores tenham muita prática em lidar com experiências de ensino, quando lidamos com tecnologia, principalmente se for pela primeira vez, até os professores mais experientes se sentem professores principiantes.

Assim, pode-se perguntar qual o conhecimento que o professor deve adquirir para responder às questões acima. Em primeiro lugar, o professor deve conhecer a ciência que ensina; não apenas o que vai ensinar aos alunos, mas substancialmente mais que isso. Depois, deve ter um bom conhecimento dos seus alunos; o que eles consideram difícil de aprender, falsas concepções, as suas crenças, etc. Em terceiro lugar, terá que possuir um conhecimento geral de pedagogia; os professores necessitam saber como ensinar, enquadrar-se numa teoria pedagógica e aplicar as regras e técnicas específicas da disciplina que ensinam. Por último, o conhecimento das tecnologias. "Tecnologia" é um termo que descreve uma ampla gama de ferramentas e técnicas usadas com fins práticos. Derry (1999) descreve a diferença entre ciência e tecnologia da seguinte forma: "*A Ciência é uma forma de compreender o mundo… a Tecnologia, por outro lado, é uma forma de controlar o mundo, um conjunto de ferramentas que podemos usar para fazer com que as coisas sejam da forma que desejamos. Por isso Ciência e Tecnologia podem surgir, por vezes, separadas e desligadas… mas, tipicamente, Ciência e Tecnologia estão fortemente entrelaçadas. (p. 133-134)*" Nesta definição geral, a tecnologia inclui ferramentas e máquinas, mas também inclui métodos, técnicas e processos. E McCrory (2008) continua, afirmando que, segundo a definição, é difícil distinguir Conhecimento da Tecnologia de Conhecimento do Currículo e da Pedagogia, já que ambos são tipos de tecnologias. Para que não haja grandes confusões, costuma-se considerar tecnologias apenas as tecnologias digitais que fizeram a sua aparição nos últimos vinte anos, computadores, software, câmaras digitais, entre outras.

As características próprias do Conhecimento Didáctico do Conteúdo Tecnológico são, para McCrory (2008), essencial e fundamentalmente duas:

- O CDCT é local e específico. Específico, porque se relaciona com determinados conteúdos. Para conteúdos científicos diferentes aplicam-se tecnologias diferentes. E é local porque, para os mesmos conteúdos, escolas diferentes podem determinar tecnologias diferentes.
- O CDCT é um conhecimento prático que se desenvolve como resposta específica aos alunos e aos contextos.

O Conhecimento Didáctico do Conteúdo pode ser descrito segundo o diagrama:

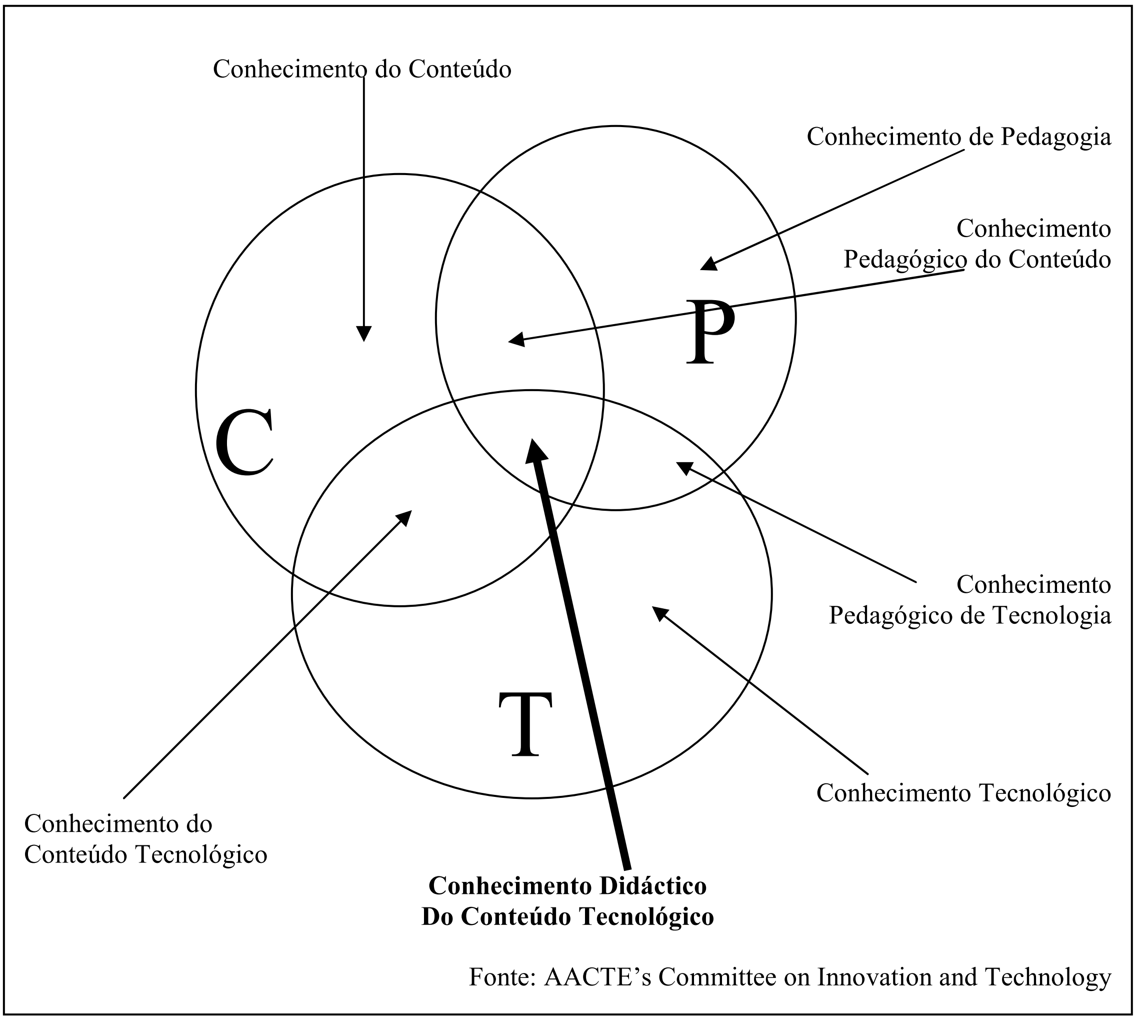


Figura 18: Modelo de McCrory (2008)

3.2 Elementos do Conhecimento Didáctico do Conteúdo específicos nesta investigação

O Conhecimento Didáctico do Conteúdo para ser estudado, descrito ou medido requer dois elementos fundamentais: o professor e o conteúdo. O professor é o elemento que detém e desenvolve este conhecimento, e o modo de transmitir o conteúdo é o objecto e a substância desse conhecimento. Na realidade, a essência do ensino é a transmissão pelo professor das matérias disciplinares aos alunos, através da aplicação desse conhecimento. As várias investigações sobre o CDC que foram referidas tiveram como objecto de estudo o conhecimento que o professor emprega para ensinar a sua disciplina. Por isso pudemos examinar outros estudos em que as disciplinas que os professores leccionavam eram tão diferentes como, Matemática, Física, Química ou Ciências Sociais. Ainda assim, na maioria das investigações, os tópicos que os professores ensinaram, enquanto informantes das investigações, eram sempre específicos da disciplina; por outras palavras, as matérias disciplinares leccionadas durante as várias investigações examinadas foram sempre tópicos disciplinares bem definidos e nunca áreas genéricas.

Na investigação descrita nesta tese estudou-se o CDC de uma professora enquanto ensinava o conceito de função, através dos exemplos que utilizou, a alunos de 16 anos. O uso do conceito de função como matéria a utilizar para estudar o conhecimento do professor não é uma ideia original (e.g. Stein, Baxter e Leinhardt, 1990; Norman, 1992; Even, 1993; Vidakovic, 1996; Llinares, 1996; Loyd e Wilson, 1998; Silverman e Thompson, 2005; Lucus, 2006; Figueiredo, 2005; Figueiredo, Blanco e Contreras, 2006). Por outro lado, o uso de exemplos para estudar o CDC de professores de matemática já é uma combinação mais difícil de encontrar (Figueiredo, 2005; Figueiredo, Blanco e Contreras, 2006; Chick e Harris, 2007; Chick, 2007).

A caracterização do conhecimento de professores através da exemplificação utilizada com base num sistema de categorias pode ser apreciado nos trabalhos de Figueiredo (2005); Figueiredo, Blanco e Contreras (2006); Chick e Harris (2007) e Chick (2007). Nestes estudos, são bastante diferentes os sistemas de categorias utilizados que pretendem enquadrar a forma como os professores transmitem a matéria disciplinar aos seus alunos e o desenvolvimento do Conhecimento Didáctico do Conteúdo apresentado pelos professores, bem como os tópicos matemáticos que serviram de base aos estudos.
No caso de Figueiredo (2005) e Figueiredo, Blanco e Contreras (2006), analisaram-se os exemplos de quatro professores em estágio pedagógico – professores que leccionaram pela primeira vez sob a orientação de um professor tutor da escola e dois tutores da Universidade de Évora – enquanto leccionaram o tema Funções a alunos de 15-16 anos com o objectivo de descrever o seu conhecimento didáctico do conteúdo à saída da sua formação universitária.
A categorização utilizada nos dois trabalhos baseou-se num esquema simples constituído por cinco categorias que distingue os exemplos pelo objectivo e consoante o patamar do processo de aquisição do conceito de função em que são apresentados:

Figura 19: O modelo de Figueiredo, Blanco e Contreras (2006)

As razões da construção deste sistema explicam-se de forma breve:
A 1ª Categoria será a Definição, porque o primeiro momento passa pela apresentação do conceito de função.
A 2ª Categoria será a Representação, porque após a apresentação do conceito de função vêm os primeiros contactos com as suas possíveis representações.

A 3ª Categoria será Características, no sentido de pormenorizações, porque as primeiras dúvidas irão surgir e para o seu esclarecimento torna-se necessário trabalhar os aspectos do conceito de função.
A 4ª Categoria será Aplicações Internas, porque o conceito de função se relaciona com outros conceitos matemáticos.
A 5ª Categoria será Aplicações Externas, porque a aplicação à vida real e a outras ciências é fundamental para uma compreensão global do conceito de função e para o seu ensino.
Sucintamente, cada uma das categorias pode ser descrita da seguinte forma:

Definição: Os exemplos considerados nesta categoria são aqueles que se apresentam aos alunos imediatamente após a definição do conceito, passando de uma situação geral que é a definição para situações concretas desse conceito. São pois os primeiros exemplos.

Representação de uma função: Uma vez introduzido o conceito, depois de os alunos terem com ele tomado um contacto inicial e se terem apercebido das suas características basilares surge um segundo momento com os exercícios típicos ou com as primeiras situações problemáticas do conceito em causa.

Características de uma função: Este tipo de exemplos surge após a fase exploratória do conceito, quando o aluno empreende e ataca a tarefa de aprofundar o conceito nas suas várias facetas descobrindo as suas particularidades. Construir uma estrutura ou um esquema conceptual é um processo composto de numerosas etapas consecutivas, cada uma delas com as suas dificuldades inerentes.

Aplicações internas: As aplicações internas são uma forma de exemplificação que aparece já nas fases de maior aprofundamento do conceito e do tipo de função em estudo. Estas aplicações podem incluir conteúdos ou conceitos leccionados anteriormente ou, então, relacionarem-se com outros que serão leccionados posteriormente.

Aplicações externas: Estes exemplos são aplicações à vida real e a outras ciências. O tipo de exemplos desta categoria é semelhante à categoria anterior apenas diferem na sua natureza. São exemplos que podem configurar exercícios ou problemas

A aplicação deste sistema de categorias proporcionou conclusões sobre os quatro professores em diversos âmbitos do conhecimento do professor:

- Relativas às especificidades dos exemplos
- Relativas ao papel dos exemplos no ensino/aprendizagem
- Relativas à existência de padrões ao nível do Conhecimento Didáctico do Conteúdo

Como resultado final da análise do CDC dos quatro professores, também foi possível extrair algumas sugestões a integrar nos programas de formação inicial de professores.

De forma diferente, Chick e Harris (2007) e Chick (2007) analisaram o conhecimento didáctico do conteúdo de professores mais experientes. Os tópicos matemáticos que serviram de apoio ao estudo foram as fracções e a razão entre dois naturais (Chick e Harris, 2007) e, em Chick (2007) as fracções, as probabilidades e áreas e perímetros. O sistema de categorias utilizado já havia sido utilizado em estudos anteriores, mas sem terem abordado os exemplos utilizados pelos professores em situação de aula. Chich, Baker, Pham e Cheng (2006) analisaram em aula o CDC sobre os números decimais de

vários professores com base em questionários e Baker e Chick (2006) analisaram o CDC de dois professores com quinze e vinte anos de experiência.
Todos estes estudos têm em comum o sistema de categorias utilizado. O sistema está dividido em três grandes áreas: (a) Claramente CDC: inclui aqueles aspectos que são mais claramente uma mistura entre conteúdo e pedagogia; (b) Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico: inclui aqueles aspectos relacionados directamente com o conteúdo; e (c) Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo: inclui aqueles aspectos relacionados directamente com a pedagogia (Chick, 2007):

Categorias do CPC	Evidentes quando o professor…

Claramente CPC

Estratégias de Ensino	Discute ou usa estratégias ou abordagens gerais ou específicas para ensinar uma técnica ou um conceito matemático.
Pensamento do Estudante	Discute ou estabelece com o estudante modos de pensar acerca de um conceito, ou reconhece níveis típicos de compreensão.
Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas	Discute ou refere-se às concepções alternativas do estudante.
Exigências Cognitivas de uma Tarefa	Identifica aspectos de uma tarefa que influenciam a sua complexidade.
Representações Detalhadas e Apropriadas Dos Conceitos	Descreve ou exibe formas de modelar ou ilustrar os conceitos (pode incluir materiais ou diagramas).
Explicações	Explica um tópico, conceito ou procedimento.
Conhecimento de Exemplos	Usa um.
Conhecimento de Recursos	Discute/usa os recursos disponíveis para auxiliar o ensino.
Conhecimento do Curriculum	Analisa a forma como os conteúdos integram o currículo.
Objectivo do Conhecimento do Conteúdo	Analisa as razões pelas quais um conteúdo é incluído no currículo ou como pode ser usado.

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental	Demonstra um conhecimento conceptual profundo e minucioso de aspectos identificados da matemática.
Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave	Identifica os componentes matemáticos críticos de um conceito que são fundamentais para a compreensão e aplicação desse conceito.
Estrutura Matemática e Conexões	Faz conexões entre conceitos e conteúdos, incluindo interdependência entre conceitos.
Conhecimento Procedimental	Apresenta habilidade para resolver problemas matemáticos (a compreensão conceptual não necessita ser evidenciada).
Métodos de Solucionar	Apresenta um método de solucionar um problema matemático.

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo

Objectivos da Aprendizagem	Descreve o objectivo da aprendizagem do aluno.
Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno	Discute ou usa estratégias de interacção com os alunos
Técnicas de Sala de Aula	Discute ou usa práticas gerais de sala de aula.

O sistema de categorias descrito permitiu a Chick (2007) e a Baker e Chick (2006) obter resultados através de questionários e subsequente entrevista, já que o número de professores a estudar era grande demais para poder assistir às aulas de todos. Os resultados apurados prendem-se com o desenvolvimento do CDC de catorze professores sem que, contudo, tenha havido uma intenção de o medir. No caso de Chick *et al.* (2006), o sistema de categorias permitiu caracterizar e, portanto, diferenciar os vários professores consoante o nível de conhecimento para ensinar os números decimais; fosse especificamente ou aplicados a situações da vida quotidiana dos alunos. Em Baker e Chick (2006) a caracterização e diferenciação foi feita entre dois professores do total de catorze (um com 15 anos de experiência e outro com 20), este sistema de categorias permitiu mostrar as diferenças entre os dois ao nível dos conhecimentos da matemática, dos conhecimentos para a ensinar e quais os objectivos do seu ensino.

No caso do estudo efectuado por Chick em 2007 e em Chick e Harris (2007), o sistema de categorias para caracterização do CDC foi aplicado em aula. Na realidade, os quatro estudos referidos fazem parte integrante de um estudo maior, mas enquanto os de 2006 apenas contemplam a informação recolhida por questionário e posteriores entrevistas, os de 2007 também contemplam a recolha e estudo dos exemplos utilizados em aula de alguns dos catorze professores; além destes, também foram contemplados os exemplos usados em aula por professores que participaram em projectos de investigação anteriores. Em Chick (2007) e em Chick e Harris (2007) pode-se ver como estas investigadoras estudaram o CDC considerando a forma como os professores exploram as potencialidades dos exemplos escolhidos e depois utilizados em aula. A intenção é examinar as *affordances* (oportunidades intrínsecas a um uso) (Gibson, 1977 citado por Chick, 2005) inerentes aos exemplos e a forma como os professores os apresentam com vista a transformá-los em objectos didácticos; esta análise proporciona uma compreensão do CDC dos professores e as necessidades que eles possam apresentar no intuito de desenvolver este conhecimento, particularmente no que respeita à escolha de exemplos (Chick, 2007). No final, o sistema de categorias permite enquadrar a forma como o CDC do professor influencia a escolha e tratamento dos exemplos em aula. Na maioria dos casos, Chick (2007) assegura que os professores estabeleceram a estrutura exemplificativa, bem como a importância específica de cada exemplo, antes de a implementar na aula. Este método é fortemente influenciado pelo CDC e pelas *affordances* que os professores pensaram que os exemplos podiam oferecer. Algumas vezes no entanto, os professores tiveram que reagir, em aula, às características do exemplo no momento; ainda assim, a capacidade para o fazer é afectada pelo seu CDC e pela capacidade de reconhecer nos exemplos as *affordances* requeridas. Por seu lado, em Chick e Harris (2007) pode ver-se como dois professores com pouca experiência apresentam algumas dificuldades em escolher de forma apropriada os exemplos destinados a ilustrar o conceito de razão e usá-los para mostrar de forma efectiva os princípios gerais. Do mesmo modo que em Chick (2007), Chick e Harris estabeleceram a importância da escolha e uso dos exemplos para melhor se caracterizar o CDC dos professores. Para isso, o sistema de categorias em causa, também neste estudo, enquadrou a forma de se explorarem as *affordances* dos exemplos e, conjuntamente com o CDC, como influenciam a planificação e o decurso das aulas. Assim, para que os exemplos sejam melhores ilustradores dos princípios matemáticos gerais, Chick e Harris (2007) propõem que os professores coloquem a si mesmos uma série de perguntas, tais como:

- Que conceito matemático pretendo eu exemplificar com este exemplo?
- O exemplo é claro? Ou existe algo que interfira na sua função?
- Posso melhorar o papel exemplificativo deste exemplo?
- Como posso implementar este exemplo na aula de forma que ele realce melhor o conceito a transmitir?

Como sugestão final, Chick (2007) aponta a necessidade de que as *affordances* e a importância do uso de exemplos sejam tratados tanto na formação inicial como no desenvolvimento profissional dos professores, o que é em tudo coincidente com as sugestões apontadas por Figueiredo (2005) e Figueiredo, Blanco e Contreras (2006).

4. Utilização de Exemplos

4.1 Notas históricas sobre a utilização de Exemplos na aula de Matemática

Durante os últimos 15 anos assistiu-se a uma alteração nos fundamentos e na direcção que a investigação educacional tomou; a investigação deslocou-se dos estudos puramente cognitivos, que consideram que a aprendizagem se desenvolve só na "cabeça" do aluno, em direcção ao reconhecimento de que os factores sociais influenciam as aprendizagens. Nesta linha, a actual tendência na investigação da prática do professor consiste em observá-lo no seu contexto social (Karaağaç 2005). Assim, o papel do professor torna-se, também, central em todo o processo de ensino e aprendizagem da matemática e é ao professor de matemática que cabe transmitir todo o tipo de conceitos, processos e teoremas matemáticos. Todos conhecemos as dificuldades que os alunos têm em apreender apenas através das definições, da transmissão de procedimentos e dos enunciados e demonstrações de teoremas. É aqui que os exemplos cumprem um papel essencial. Os alunos aprendem, principalmente, através dos exemplos. Para Bills *et al.* (2006), a principal razão para apresentar exemplos é que os alunos os vêm como genéricos e, até, os interiorizam como bitola que usarão como ferramenta para futuramente resolverem problemas daquele tipo. Muitas vezes o uso de exemplos reduz-se à mera prática de rotinas, deixando de lado uma aproximação mais investigadora em que os alunos experimentassem uma prática de matematização de situações que os guiassem na abstracção e na reconstrução de princípios gerais. Para estes autores, enquanto a investigação sobre o uso da modelação e de abordagens matemáticas autênticas parecem ser relativamente recentes, a verdade é que já existem alguns precedentes históricos.

O uso de exemplos no ensino e aprendizagem da Matemática pode ser encontrado em todos os períodos da história do homem desde a antiguidade (Bills *et al.* 2006).
Em termos históricos, apenas se encontrou um único trabalho sobre a utilização de exemplos, que foi, justamente, o trabalho que Liz Bills, Tommy Dreyfus, John Mason, Pessia Tsamir, Anne Watson e Orit Zaslavsky apresentaram em Praga na 30ª conferencia da International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME). Assim, as referências que existem sobre exemplificação na História da Matemática remontam aos primeiros registos nos papiros egípcios, nas placas babilónicas e, mais tarde, nas cópias perdidas de manuscritos chineses. Neles eram abordadas situações problemáticas, em contexto matemático, com as respectivas

soluções de forma a ilustrar certos procedimentos. Estes procedimentos, chamadas regras, são mais tarde designadas como algoritmos em textos medievais e da renascença onde se podiam ler comentários como "*Desta forma podes resolver problemas semelhantes*" ou "*Pelo mesmo método resolve todos os problemas semelhantes*". No século XVI os autores de textos matemáticos começaram a justificar a presença de exemplos nos seus textos, comentando explicitamente qual o papel dos exemplos para a aprendizagem dos alunos. Eram usadas frases como:

> Nós usámos uma variedade de exemplos para que possam perceber que o mesmo pode ser feito noutros casos e estareis aptos a experimentá-los com as três regras que seguem, ainda que tenhamos apresentado apenas dois exemplos …; que isto passe a ser um exemplo; desta forma se mostra um *modus operandi* em questões de proporção, particularmente, nestes casos.

Nos fins do século XIX e princípios do século XX, em alguns casos, os princípios pedagógicos tornaram-se mais explícitos, embora apenas para atrair os professores para as "novas" abordagens pedagógicas. Por exemplo, Mac Vicar em 1879 num livro de texto do Quebeque, afirmava que:

> Todo o exercício e explicação [exemplos] devem ser bem adaptados, e tão minuciosos e completos, que passando por eles os alunos não possam deixar de adquirir um conhecimento de princípios e de factos, e por receber essa disciplina mental, que os prepare adequadamente para o estudo das Matemáticas Avançadas.

Por outro lado, alguns autores dos séculos XVI e XVII misturam diferentes tipos de problemas para envolverem os alunos em certos problemas tipo; e, além destes, outros autores propõem vários exercícios que envolvem uma dada técnica para promover um sentido geral do tipo de exercícios ou, mais provavelmente, para que se centre a atenção na fluência da performance e para mostrar que uma área mais abrangente de problemas tipo podem ser resolvidos pelo mesmo método ou regra.
A construção de sequências de exemplos é uma questão central no uso educativo dos exemplos que influencia tanto nos aspectos indutivos como nos aspectos dedutivos da aprendizagem. Em 1962 Polya apresentou longas sequências de exercícios, construindo generalizações a partir de uma ideia simples. Um dos capítulos do livro "Mathematical Discovery" (Polya, 1981) termina propondo uma tarefa final: "Inventa alguns problemas que sejam semelhantes, porém diferentes, aos que foram propostos neste capítulo e que consigas resolver". No entanto, a ideia de que criando os nossos próprios exemplos pode ajudar na aprendizagem não é nova. Bills e colegas (2006) afirmam que em 1545, Cardano, convida o leitor a construir os seus próprios exemplos de exercícios e em 1632, Record, estabelece o seu ensino num diálogo em que ele constrói exemplos.

Ainda segundo Bills e seus colegas (2006), historicamente, houve duas abordagens principais ao uso de exemplos que se distinguiam no século XVIII pelos termos de *sintético* e *analítico*. A diferença assentava em se as regras gerais eram apresentadas depois ou antes dos exemplos. No início do século XIX, Warren Colburn instituiu nos Estados Unidos o método indutivo defendido por Johann Pestalozzi. Pestalozzi, no livro "*Como Gertrudes ensina as suas crianças: Uma tentativa para ajudar as mães a ensinar os seus próprios filhos e algumas considerações sobre o método*", de 1801, pode ler-se:

> O raciocínio usado na realização destes pequenos exemplos é precisamente o mesmo que se usa sobre os maiores. E quando alguém

> encontrar alguma dificuldade em resolver uma questão, superá-la-á mais rápida e mais efectivamente tomando um exemplo mais pequeno do mesmo género, observando como ele se resolve, em vez de se recorrer a uma regra.

Herberte Spencer, em 1878, desenvolveu as ideias que seguem, esperando que os alunos inferissem o geral pela apresentação cuidada de particularizações:

> Acompanhando o ensino-mecanizado, também o ensino com base em regras está a declinar. Primeiro as particularizações, e só depois as generalizações, é o novo método … que, embora "reverta o método usualmente seguido, que consiste em dar ao aluno a regra primeiro", está demonstrado pela experiência ser o acertado. O ensino baseado em regras está agora condenado a proporcionar um conhecimento meramente empírico – já que produz uma aparente compreensão sem a realidade. Facultar o produto final da questão sem as questões que a ele conduzem, resulta conjuntamente ser enervante e ineficiente. As verdades gerais para serem interiorizadas e de uso permanente devem ser merecidas… Enquanto a juventude ensinada mediante regras se sente perdida quando para lá das regras, a juventude instruída segundo princípios resolve casos novos tão prontamente como os anteriores.

Alfred Whitehead (1861-1947) resume esta abordagem como:

> Ver o que é geral no que é particular e o que é permanente no que é transitório é o objectivo do pensamento científico.

Polya afirmou:

> [fazendo matemática] … nós necessitamos adoptar uma atitude inductiva que requer uma pronta ascensão das observações para as generalizações, e uma pronta descensão das mais altas generalizações para as mais concretas observações.

Como se verá adiante, mais importante do que métodos indutivos ou dedutivos, primeiro o geral ou primeiro o particular, são as abordagens híbridas que se utilizem. Ambas as abordagens, dedutivas ou indutivas, são compatíveis com contribuições construtivas na aprendizagem e assentam na exemplificação: o ensino indutivo envolve o aluno na obtenção de generalizações sobre acções ou conceitos enquanto trabalha com uma variedade de exemplos (vendo a generalidade através de particularizações); o ensino dedutivo implica que o aluno esteja apto a produzir um sentido pessoal de uma definição ou de um princípio geral, adaptando esse sentido a um uso imediato ou futuro (vendo casos particulares naquilo que é geral). (Bills *et al.*, 2006).

Continuando a seguir esta investigadora e os seus colegas, os exemplos podem ser um estímulo útil ao desencadear da auto-explicação que leva à compreensão. Cardano reconhece que, por vezes, pode ser muito confuso estabelecer métodos gerais e sugere que os exemplos facilitam a explicação. Este sentimento é reflectido por uma grande variedade de autores de textos ao longo dos séculos e, também, por Richard Feynman em 1985:

> "Eu não consigo compreender nada em geral enquanto não mantiver na minha mente um exemplo específico e vê-lo funcionar."

Mais recentemente, nos anos setenta, Skemp (1971) escreveu sobre o papel dos exemplos no ensino e aprendizagem da matemática. O modelo básico de Skemp para a aprendizagem dos conceitos matemáticos era por abstracção a partir dos exemplos, o que significa que a escolha e apresentação dos exemplos aos alunos por parte do professor era crucial. Neste contexto, Skemp fala de ruído e do efeito nocivo que ele pode ter na construção conceptual. O ruído na exemplificação provém dos aspectos notórios dos exemplos (para o aluno) mas que são irrelevantes para o conceito e que podem desviar a atenção do aluno e levá-lo a falsas concepções ou generalizações erróneas. Para que o aluno possa distinguir entre o essencial e o acessório, Skemp salienta o papel dos não-exemplos, que devem chamar a atenção para os aspectos que determinam a razão pela qual o caso não é um exemplo. Assim, para Skemp, uma vez formado o conceito, este pode ir sendo enriquecido à medida que outros exemplos são adicionados e assimilados.

4.2 Definição de Exemplo. O uso de Exemplos

As teorias clássicas da psicologia da aprendizagem toma como um dos seus fundamentos a capacidade humana para distinguir, identificar igualdade e diferença, gostar e não gostar, e por isso agrupar, separar e classificar. A noção de classificação permite-nos ter a ideia de elementos de uma classe e, portanto, representantes das classes, ou exemplos. A questão da classificação é também uma via de reflexão sobre o particular e o geral. O "particular" descreve traços de um indivíduo que é membro de uma classe, enquanto que o "geral" descreve traços comuns a todos os membros. Uma afirmação descritiva de atributos de um membro particular de uma classe pode ser adaptada para descrever um traço "geral" análogo e comum a todos os membros da classe (Bills, 1996).

A formação do conceito pode ser obtida pela abstracção dos aspectos comuns quando tratamos com bastantes exemplos e não-exemplos (Skemp, 1971). Porém, Borasi (1984) mostra alguma inquietação quando considera esta interpretação de aprendizagem de novos conceitos num contexto de educação matemática. Ela aponta para as evidências psicológicas obtidas por Tall e Vinner (1981) que contrariam a noção de que os atributos irrelevantes dos exemplos dos quais o conceito foi abstraído serão esquecidos assim que o conceito se estabelecer. Efectivamente, Tall e Vinner encontraram alguns aspectos dos exemplos que foram apresentados durante o ensino do conceito que não eram atributos do conceito. De qualquer modo, contrariando aquela noção, após a abstracção do conceito, esses aspectos não essenciais ao conceito foram incorporados como parte da *imagem do conceito*. O termo *imagem do conceito* descreve toda a estrutura cognitiva que está associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais, as propriedades associadas e os processos e é construída ao longo dos anos através de experiências de todos os tipos, sofrendo alterações à medida que o indivíduo contacta com novos estímulos e amadurece (Tall e Vinner, 1981).
Por outro lado, Dreyfus (1991) fala da abstracção como sendo as relações entre objectos e não os objectos eles próprios, o que inclui, e expande, a ideia de que a abstracção se obtém pela alternância da atenção entre as semelhanças e as diferenças dos objectos em particular.
Harel e Tall (1991) tratam a abstracção como parte do processo de generalização e da construção do conceito e sugerem o uso de exemplos genéricos como forma de auxiliar os alunos a fazerem abstracções e a construírem conceitos em torno das definições

formais. A noção de exemplo genérico, que origina uma forma particular de exemplificação do professor, será tratada adiante.

Independentemente das formas e modelos que expliquem a generalização e abstracção de conceitos, da forma e do tempo de apresentação das definições, da adequação de processos à resolução dos problemas matemáticos e da demonstração e aplicação de teoremas, o recurso ao auxílio de exemplos é incontornável. No ensino e aprendizagem da Matemática já há muito tempo que se reconheceu o papel central do uso dos exemplos e é impossível concebermos esse ensino sem atender a exemplos específicos (Zazkis e Chernoff, 2008). Os exemplos oferecem uma visão sobre a natureza da Matemática através do seu uso em tarefas complexas para demonstrar métodos, no desenvolvimento de conceitos através do estabelecimento de relações e em explicações educativas e demonstrações de prova (Bills *et al.,* 2006) e a relação "é um exemplo de" é fundamental para a disciplina de matemática (Bills e Bills, 2005).

Mas a utilização de exemplos não é uma tarefa trivial do professor, não basta apresentar exemplos para que eles cumpram a sua função, isto porque os exemplos são escolhidos de entre um leque de possibilidades (Watson e Mason, 2005) e os professores necessitam aceitar que alguns exemplos são "melhores" que outros (Huckstep, Rowland e Thwaites, 2002). Os estudos relacionados com a aprendizagem de conceitos sugerem que os exemplos e os não-exemplos, quando são introduzidos de forma cuidadosa e ponderada, ajudam a distinguir os aspectos importantes dos menos importantes e a construir imagens de conceitos variadas e os espaços de exemplos (Zaslavsky, Harel e Manaster, 2006). Não importa se os exemplos se apresentam antes ou depois das definições, antes ou depois da sistematização de processos, antes ou depois da demonstração formal dos teoremas. Importa, sim, saber em todo o momento a função que queremos destinar ao exemplo que apresentamos: se uma particularização do que é geral; se a aplicação de um teorema; se a aquisição de fluência no cálculo ou no uso de procedimentos. E, mesmo assim, há que distinguir quem faz uso do exemplo, o professor ou o aluno. O professor para explicar (exemplos trabalhados pelo professor), o aluno para praticar (exemplos apresentados pelo professor, mas trabalhados pelos alunos) ou ambos. A clarificação de estes e outros pormenores, importantes no desenvolvimento da investigação que se levou a cabo, será feita na secção dedicada à metodologia da investigação.

O uso de exemplos é transversal a toda a Matemática, não apenas no ensino e aprendizagem desta disciplina, também os exemplos são parte integrante do pensamento matemático, particularmente no que respeita à conceptualização, generalização, abstracção, argumentação, e pensamento analógico (Zodik e Zaslavsky, 2008). Os raciocínios são instrumentos da matemática que se utilizam no seu ensino e que são utilizados na procura de resultados e na resolução de problemas matemáticos. Também neste âmbito os exemplos assumem um papel central, tanto no raciocínio lógico como no raciocínio analógico:

Raciocínio Lógico:

Exemplo1
Exemplo2
Exemplo3 $\longrightarrow$ TEORIA — Dedução $\longrightarrow$ Resposta 1
Exemplo4 Indução
Questão 1

Raciocínio Analógico:

Exemplo1
Exemplo2
Exemplo3 $\longrightarrow$ Resposta 1
Exemplo4
Analogia
Questão 1

Figura 20: Os raciocínios Lógico e Analógico

O uso dos exemplos desempenha um papel primordial nestes dois tipos de raciocínio.
No esquema referente ao Raciocínio Lógico, o papel dos exemplos 1, 2, 3 e 4 está ligado à indução da generalidade que se designa como "teoria". Quando se apresenta uma questão (questão 1) ao indivíduo este confronta-o com o caso geral contido na teoria, o enquadramento da questão na generalidade trata a questão como uma particularidade daquilo que é geral e, por dedução, produz a resposta à questão (resposta 1).
Os exemplos têm um papel diferente no Raciocínio Analógico. Quando se propõe uma questão (questão 1) a um indivíduo ele identifica-a como sendo idêntica a uma colecção de exemplos do mesmo tipo que tratou anteriormente, os exemplos 1, 2, 3 e 4. Por analogia, aplica-se à questão o mesmo raciocínio que se aplicou a todos os exemplos anteriores e obtém-se a resposta requerida (resposta1).

4.2.1 Definição de Exemplo

A exemplificação é um processo em que se toma algo específico para representar o que é geral. A matemática lida com resultados de natureza geral, muitos dos quais classificam propriedades dos seus objectos e das suas estruturas (Sangwin, 2002).

Para Watson e Mason (2002a), o termo exemplo é usado para cobrir uma extensão ampla de géneros matemáticos; incluídos exemplos de classes, exemplos que ilustram conceitos, exercícios resolvidos que mostram técnicas, exemplos de problemas e questões que podem ser resolvidas, exemplos de objectos apropriados que satisfazem determinadas condições, exemplos de formas de responder a perguntas, construção de prova, e outros mais. Por isso, aprender pode ser visto como o processo de generalização a partir de exemplos específicos: aprender envolve generalizar um processo que funciona para os exemplos dados, de forma a poder ser aplicado a exemplos com que ainda não tínhamos contactado anteriormente.

Do ponto de vista do aluno, mais que do ponto de vista das definições, Watson e Mason (2005, p. 3) indicam a que situações se referem os exemplos. Como aquilo que se apresenta aos alunos nas escolas e nos colégios pretende-se indicar alguma espécie de generalidade (conceitos, classes, técnicas, princípios, etc.), a palavra *exemplo* é usada um sentido deveras amplo que se entenda como algo a partir do qual os alunos possam generalizar:

- Ilustrações de conceitos e de princípios, tais como equações específicas que ilustram equações lineares ou duas fracções que descrevem a equivalência de fracções.
- Placeholders usados em vez de definições gerais ou teoremas, tal como usar uma imagem dinâmica de um ângulo cujo vértice se move em cima de uma circunferência para indicar que ângulos contidos no mesmo segmento de circunferência são geometricamente iguais.
- Questões resolvidas em manuais ou pelo professor como meio de exibir a forma de usar alguma técnica específica, e que são comummente chamados *exercícios resolvidos*.
- Questões a serem resolvidas pelos alunos, como forma de aprenderem a usar, aplicar e ganhar fluência numa técnica específica, e que são chamados *exercícios*.
- Representações de classes usados como matéria-prima para usar em raciocínios matemáticos indutivos, tais como números obtidos à custa de casos especiais de uma situação e depois examinada na procura de padrões.
- Situações contextuais específicas que podem ser tratadas como casos matematicamente motivantes.

De forma geral os exemplos devem ser vistos num dado contexto. Watson e Mason (2005, pp. 3 e 4) utilizam o termo *exemplificação* para descrever qualquer situação na qual alguma coisa específica é apresentada para representar uma classe com a qual o aluno deve familiarizar-se – um caso particular de uma situação geral. Por exemplo:

- Uma questão de um exame pode ser apresentada para representar o tipo de questões que os alunos terão que responder.
- Um objecto específico pode ser usado para indicar o que deve ser incluído e o que deve ser excluído por uma condição de uma definição em particular ou um teorema; por exemplo, um esboço de um rectângulo particular que acompanhe a definição de rectângulo num livro de texto.
- Um objecto específico pode ser usado para indicar o significado de uma condição particular de uma definição ou teorema evidenciando o seu papel na demonstração ou, então, mostrando como a demonstração falha na ausência dessa condição: por exemplo, usando $f(x)=|x|$ para indicar como a continuidade por si não é suficiente para assegurar que todos os valores de x admitem derivada finita.
- Um objecto específico pode ser proposto para indicar uma dimensão de variação induzida por uma generalização; [...].
- Um objecto pode ser usado para ilustrar uma estrutura complexa mas que é formado por objectos mais simples que são familiares ao aluno; por exemplo, a expressão $3(4+5)$ para introduzir a propriedade distributiva.

- Um diagrama genérico pode ser usado para indicar aquilo que permanece invariante enquanto algum outro aspecto varia; por exemplo, como sugerido antes, o desenho de um triângulo genérico (que não parece ser equilátero, isósceles ou recto) pode ser usado para ilustrar a coincidência das medianas.

Todas estas situações requerem que o aluno vislumbre o que é geral através do que é particular, que generalize, que sinta o particular como exemplar ao apreço de um termo técnico, teorema, demonstração, ou estrutura da demonstração, como tantas outras.

Zaslavsky e Lavie (2005) num estudo com os objectivos de explorar e caracterizar o uso que os professores fazem dos exemplos no ensino e, também, de identificar elementos que possam ser atribuídos às aprendizagens obtidas durante a sua prática no uso desses exemplos, definiram o conceito de *Exemplo Instrutivo*. Este termo é usado para indicar qualquer exemplo que seja apresentado pelo professor dentro de um contexto de ensino de um tópico em particular; os *exemplos instrutivos*, na sala de aula, são uma parte integrante do ensino da matemática que tem grande influência na aprendizagem dos alunos.

A palavra exemplo é usada no ensino da matemática numa ampla variedade de sentidos (Bills *et al.,* 2006).

Na literatura específica, muitos autores referem-se à exemplificação pelo seu âmbito de aplicação, pelos seus objectivos ou, então, caracterizando-a. Vejam-se os seguintes casos:

- Os exemplos na forma de resoluções de problemas são aspectos fundamentais em, virtualmente, qualquer explicação educativa (Leinhardt, 2001, citado em Bills *et al.,* 2006).
- Exemplos de todos os tipos são um dos principais mecanismos usados para ilustrar e para comunicar conceitos entre professores e alunos (e.g. Tall e Vinner, 1981; Brunner *et al.*, 2006; Peled e Zaslavsky, 1997 citados por Bills *et al.*, 2006).

Bills e colegas (2006) distinguem exemplos de conceitos e exemplos de procedimentos. Mais adiante voltaremos a esta distinção por ser importante em algum aspecto da metodologia desta investigação. Mas, relativamente a esta distinção, Sowder (1980) distingue estes dois tipos de exemplos atribuindo-lhes designações diferentes: *Ilustrações* são exemplos de procedimentos e *Exemplos* referem-se aos conceitos.

Posteriormente, Bills e colegas (2006) distinguem dentro das *Ilustrações* o caso dos *Exercícios Resolvidos*, que são exemplos em que o procedimento a ser trabalhado pelos alunos é apresentado, resolvidos na integra, pelo professor, pelo autor do manual ou pela programação.

Num estudo sobre o conhecimento base dos professores, Zaslavsky, Harel e Manaster (2006) utilizam o tratamento que os professores fazem dos exemplos para analisar a sua prática docente. Neste estudo, os exemplos são considerados como possíveis elementos de um conjunto de ferramentas eficazes para os alunos desenvolveram o seu pensamento e a sua compreensão das ideias matemáticas.

Para Zodik e Zaslavsky (2008) os exemplos são casos particulares de uma classe mais ampla, sobre os quais podemos pensar e generalizar.

Zazkis e Leikin (2008) usam o termo "exemplo" para designar uma circunstância, ilustração, caso ou elemento de uma ideia, objecto, processo ou classe matemática.

Para Tsamir, Tirosh e Levenson (2008), no âmbito dos princípios gerais da formação de conceitos, os casos de um conceito podem ser chamados de exemplos. Na Matemática estes exemplos são absolutos, determinados pelos cânones da correcção matemática. Tanto no geral como na Matemática, os exemplos têm um duplo papel na conceptualização de conceitos: os exemplos servem como blocos de construção na formação dos conceitos e, também, como resultados da aquisição e construção conceptual.

Como se pode deduzir de todas as definições de exemplo que se apresentaram, um *exemplo* não é um objecto que exista de forma independente, e o termo *exemplificação* não transmite qualquer conteúdo sem que haja uma contextualização do que se pretende exemplificar. E, como facilmente se constata, *aquilo* que se exemplifica pode ser qualquer uma de uma variedade de situações. A função $y=|x|$ não é por si própria um exemplo; é somente uma função. Poderá, no entanto, ser um exemplo de uma função par, ou de uma função contínua no conjunto dos reais. Se quisermos, também pode ser um não-exemplo de uma função irracional. Ou, por outro lado, pode ser considerado um contra-exemplo à afirmação "*Todas as funções contínuas em* $\mathbb{R}$ *são deriváveis em* $\mathbb{R}$".
Os casos que apresentámos podem ser incluídos no âmbito da exemplificação de conceitos que se obtêm por meio de uma definição. Todavia, se mudarmos de âmbito, podemos considerar o exemplo "*Determine as equações das rectas tangentes ao gráfico da função* $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$ *que sejam horizontais*" como um exemplo do processo de cálculo de rectas tangentes a uma linha. E, se considerarmos o exemplo "*Determine a medida da hipotenusa do triângulo rectângulo de catetos de medidas 3 e 4*", poderá ser tido como um exemplo de aplicação de um teorema.
Por fim, devemos ter em consideração que os exemplos não são exclusivos de um único âmbito, o exemplo apresentado acima é um exemplo de aplicação de um teorema mas também é um exemplo do processo de obtenção da medida da hipotenusa dadas as medidas dos catetos, ou também é um exemplo utilizado para dar fluência ao cálculo.
Os exemplos podem ser apresentados isoladamente ou em sequências. A sequência "*Verifique que, em cada caso, os triângulos definidos pelas medidas dos seus lados são triângulos rectângulos: 3, 4 e 5; 6, 8 e 10; 9, 12 e 15; 12, 16 e 20." pode ser uma forma de introduzir a forma de generalizar para a expressão dos triângulos pitagóricos da forma 3n, 4n e 5n, com n natural*".

Em conclusão, o termo exemplo pode ser utilizado num sem número de contextos e de sentidos e é, por isso, um termo ambíguo. Mais à frente, no capítulo referido à metodologia, daremos o sentido preciso ao termo "exemplo" no âmbito da investigação descrita neste trabalho.

4.2.2 O uso de Exemplos

Uma estratégia educativa que os professores usam para ajudar os alunos a encontrar significado na aprendizagem da matemática e que tem um papel central nessa aprendizagem é o uso de exemplos; exemplos que podem incluir ilustrações de conceitos e princípios, contextos que ilustram e motivam um tópico matemático em particular e uma determinada solução quando várias são possíveis (Muir, 2007). Os exemplos constituem um esquema comunicativo fundamental para as explicações e para o discurso matemático (Leinhardt citado por Bills *et al.*, 2006). A arte de explicar para ensinar é uma tarefa altamente exigente como descreve Leinhardt (citado por Bills *et al.*, 2006): "*As explicações consistem nas orquestrações de demonstrações, representações analógicas e exemplos.* […]. *A principal característica das explicações é a de usar exemplos bem adaptados, exemplos que estabeleçam mas limitem as generalizações, exemplos que são equilibrados com outros não-exemplos e contra-exemplos*". Assim sendo, o uso de exemplos para ilustrar e clarificar conceitos matemáticos é parte integrante de um ensino eficiente da matemática (Abdul-Rahman, 2006) e os exemplos têm um papel preponderante na aprendizagem, em particular constituem a base para as generalizações, para as abstracções e para o raciocínio analógico (Zaslavsky, Harel e Manaster, 2006) e, ao terem um papel central no desenvolvimento como no ensino da Matemática, os exemplos têm um lugar em muitas teorias da aprendizagem desta disciplina (Bills e Watson, 2008). No que respeita às abstracções e ao raciocínio analógico, os professores devem usar vários exemplos de modo a que o aluno se aperceba do sentido geral do que está a ser ensinado e, assim, será importante que se comparem todos eles para que se veja o que entre eles existe de comum, para que se possa encontrar a generalidade (Watson e Mason, 2002a).

Alguns autores categorizaram os exemplos de acordo com o uso para o qual estão vocacionados (Bills *et al.*, 2006). Os exemplos diferem na sua natureza e no seu objectivo, um exemplo de conceito (de número irracional) é totalmente diferente de um exemplo de processo (de determinar o menor denominador comum) (Zodik e Zaslavsky, 2008). Segundo Bills e Bills (2005) a referência aos exemplos pode ser ambígua, por isso separam os exemplos em exemplos de conceito (triângulos, inteiros divisíveis por 3) e exemplos de aplicação de um procedimento (encontrar a área de um triângulo, encontrar as raízes de um polinómio). Como se disse, uso de exemplos deve também incluir os não-exemplos e os contra-exemplos. Para Zodik e Zaslavsky (2008) os não-exemplos estão associados à conceptualização e às definições e têm a faculdade de realçar os aspectos críticos de um conceito. O seu papel é de providenciar algo de específico e familiar sobre o qual basear e explorar novas ideias e, também, de verificar a função das restrições ou condições com respeito a uma definição (Zazkis e Leikin, 2008). Mais especificamente, os não-exemplos servem para clarificar os limites e fronteiras dos conceitos (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson e Zaslavsky, 2006). Por outro lado, Tsamir, Tirosh e Levenson (2008) questionaram-se sobre a necessidade dos não-exemplos na formação dos conceitos, a par do importante papel que os exemplos desempenham, e a resposta a que chegaram aponta para a necessidade de os alunos apresentarem os seus não-exemplos, de forma que o professor possa concluir da correcta construção que eles fizeram dos conceitos. Neste âmbito, Tsamir, Tirosh e Levenson (2008) apontam para a divisão dos não-exemplos em dois tipos diferentes: não-exemplos intuitivos (aqueles não-exemplos que intuitivamente são aceites como

tais) e não-exemplos não intuitivos (aqueles não-exemplos que são muito parecidos aos exemplos válidos do conceito e que com eles podem ser confundidos). Assim, a correcta construção dos conceitos depende da distinção que os alunos devem fazer destes dois tipos de não-exemplos, apresentando uns e outros como resultado da sua construção e aquisição do conceito (Tsamir, Tirosh e Levenson, 2008).
Os contra-exemplos estão, por outro lado, associados a conjecturas e à sua prova ou refutação, como também, ao estabelecimento de contradições e à promoção de conflitos cognitivos. As situações de conflito por consciencialização da contradição serão tratadas em secção própria e o papel dos contra-exemplos em generalização, conjectura e prova é uma linha de investigação autónoma que não será tratada com profundidade neste enquadramento teórico. No entanto, a título de exemplo, decidimos referir um estudo de Lara Alcock (2004) porque utiliza os contra-exemplos (bem como os exemplos) como forma de ajuda na obtenção da prova de uma conjectura, ou a sua refutação. É bem sabido que, por vezes, os alunos tentam demonstrar conjecturas e propriedades de forma empírica, verificando um certo número de exemplos com vista a demonstrar a sua validade, em contraposição à procura de uma demonstração formal. Qualquer professor sabe que deve avisar os seus alunos que a utilização de exemplos para provar a validade de uma generalidade é uma forma de demonstração inapropriada. No entanto, os matemáticos sabem bem que os exemplos podem ajudar consideravelmente na construção da prova e na avaliação do andamento deste processo e, na sala de aula, por exemplo, as sequências de exemplos podem indicar aos alunos a melhor forma de se obter a forma de demonstrar a validade de uma generalização. Por outro lado, o papel do contra-exemplo é definitivo na refutação de falsas generalizações ou falsas conjecturas. No estudo levado a cabo por Alcock (2008) foram identificados três formas de usar os exemplos e os contra-exemplos no raciocínio matemático, e que os alunos parecem não utilizar: (1) compreender uma afirmação, (2) gerar um argumento e (3) verificar um argumento. Existem pelo menos duas razões pelas quais os alunos não utilizam os exemplos de um modo eficaz na construção e avaliação da prova: (a) existe uma diferença entre os estudantes de matemática e os seus professores que é a bastante maior experiência que os professores têm no acesso aos exemplos e (b) os estudantes não estão habituados a pensar nos exemplos aos quais a afirmação se aplica, em vez de pensarem na matemática como uma iniciativa processual na qual as afirmações algébricas são planeadas e tratadas de acordo com certas regras ou formas convencionais (Alcock, 2008). A investigadora conclui que, em qualquer dos casos, que aqueles que estudam matemática devem melhorar o seu conhecimento do papel e da forma de usar exemplos e contra-exemplos de forma eficaz, os exemplos como auxílio na procura de validações correctas de conjecturas verdadeiras e os contra-exemplos na refutação daquelas que forem falsas. Em termos gerais, exemplos, não-exemplos e contra-exemplos, servem para definir distinções e para aprofundar a compreensão dos conceitos matemáticos, obter generalizações e entender conjecturas.
Em resumo, a investigadora alerta os professores sobre vários aspectos de uma deficiente utilização dos exemplos, de forma que os alunos não proponham exemplos no lugar de demonstrações válidas e que compreendam o papel absoluto dos contra-exemplos.

No que respeita ao uso de exemplos propriamente ditos, Rowland, Thwaites e Huckstep (2003b) e Rowland (2008), dividem os exemplos em dois tipos:

1) Exemplo Indutivo. Proporciona (ou motiva os alunos a proporcionar) exemplo de algo. O termo "algo" é geral na tipologia (uma linha de simetria, a soma de dois impares ser par); os exemplos são casos particulares de uma generalidade. O uso de exemplos para materializar conceitos abstractos e de procedimentos é de uso comum na prática pedagógica.
   Assim, podemos ensinar um procedimento (em geral) apresentando uma execução (particular) desse procedimento. Por exemplo, determinar a medida do comprimento da hipotenusa conhecendo as medidas dos comprimentos dos catetos, num triângulo rectângulo dado.
   No caso dos conceitos, o papel dos exemplos é provocar ou facilitar a abstracção. Uma vez que um conjunto de exemplos é unificado pela formação do conceito, os exemplos subsequentes podem ser assimilados pelo conceito. Por isso, a escolha que o professor faz dos exemplos com o propósito de abstrair reflectem a sua percepção da natureza do conceito e a categoria de coisas que ele inclui.
2) Exercícios. Não são exemplos indutivos mas sim ilustrativos e orientados para a prática. Neste ponto, os autores sublinham que os exercícios são exemplos, seleccionados de uma classe de possíveis exemplos semelhantes. No caso da subtracção de números com dois dígitos, podemos escolher qualquer um dos 4000 possíveis. Neste tipo de exemplos os alunos executam vários semelhantes com o objectivo de memorizar o género de exercício por repetição, mais que desenvolver fluência a partir deles.

A selecção destes exemplos pelos professores não é trivial nem arbitrária. O argumento de que os exemplos devem ser progressivos e graduais é bem entendido, de forma que os alunos sejam bem sucedidos com os exemplos de rotinas antes de experimentarem outros exemplos mais desafiantes. No entanto, considerando os dois tipos de exemplos referidos, estes autores sugerem que os exemplos proporcionados aos alunos devem ser o resultado de um processo de escolha bem reflectido, uma selecção deliberada e informada das opções disponíveis, em que umas se revelarão "melhores" que outras (Rowland, Thwaites e Huckstep, 2003b); Rowland, 2008).
Os chamados *Exercícios* também são vistos como exemplos. São exemplos ilustrativos e orientados para a prática, normalmente aplicam-se à mecanização de procedimentos e de rotinas visto que estão mais inseridos em situações de repetição e que visam uma fluência posterior dessas rotinas e procedimentos (Rowland e Zaslavsky, 2005). Quando o professor repetidamente mostra como efectuar estes exercícios práticos, o mecanismo de aprendizagem que é estimulado pode partilhar algumas das características dos chamados *Exercícios Resolvidos* (Bills *et al.,* 2006).

Os exemplos têm um papel fundamental na generalização e na abstracção de conceitos, e a escolha que se possa apresentar aos alunos influenciará de forma crucial a forma deles generalizarem. Zazkis, Liljedahl e Chernoff (2008) descrevem os aspectos específicos que orientam os alunos até à generalização dos conceitos. O veículo utilizado para este estudo foi a utilização de grandes números ou de pequenos números, especificamente através da variação que se obtém quando se passa dos grandes para os pequenos ou vice-versa e do enriquecimento dos espaços de exemplos dos alunos. O papel dos contra-exemplos também foi contemplado no estudo, mais precisamente na função que possam ter na refutação das generalizações erróneas que os alunos possam

considerar. Todas estas vertentes são plasmadas no cuidado que os professores devem ter na escolha que se faz dos exemplos, dessa escolha poderão resultar *boas* ou *más* generalizações ou, então, impedir qualquer tipo de generalização. Um exemplo que Zazkis, Liljedahl e Chernoff (2008) apresentam de como os alunos podem generalizar, passando de pequenos para grandes números apoiados num padrão, é a seguinte tarefa:
"Considere a seguinte regra:

$P_1 = 2 \times 3$

$P_2 = 3 \times 4$

$P_3 = 4 \times 5$, e assim sucessivamente.

Como é P_{100}? Como é P_n?"

Por outro lado, a utilização de pequenos números permite ao aluno, segundo os autores, aperceber-se melhor das estruturas dos conceitos. Muitas vezes, a utilização de grandes números esconde as particularidades do conceito que se pretendem evidenciar nos exemplos que se apresentam. Por exemplo, é mais fácil tratar o conceito de *diferença de quadrados* apresentando quadrados como 4, 9, 16 ou 25, do que grandes quadrados perfeitos já que estes são mais dificilmente identificáveis para o aluno. Contudo, o uso de números pequenos pode levar a falsas generalizações como, por exemplo, que os números primos são números pequenos; esta generalização é suportada por um grande número de manuais que sempre apresentam como exemplo de primos aqueles com apenas um dígito. Os perigos do uso de números inteiros pequenos também são apontados em Figueiredo (2005) como resultado do estudo efectuado à exemplificação de quatro estudantes para professores.

Sendo os exemplos fundamentais na generalização, e que as generalizações se obtêm em grande medida à custa de exemplos, não há respostas definitivas sobre quantos exemplos são necessários para que se possa formar uma generalização. Poucos exemplos podem criar coincidências conducentes a falsas generalizações (Zazkis, Liljedahl e Chernoff, 2008). Assim, algum cuidado é necessário pois nem todos os conjuntos de exemplos que apresentamos aos nossos alunos são suficientes para conduzirem a generalizações bem sucedidas. Zazkis, Liljedahl e Chernoff (2008) acreditam que a imagem do conceito (Tall e Vinner, 1981) é influenciada pelos exemplos que apresentamos aos alunos, por isso consideram razoável que se aborde a reconstrução das imagens dos conceitos através da elaboração de conjuntos de exemplos mais ricos; i.e. ampliar os espaços de exemplos dos alunos (cf. 4.3) até que as generalizações possam ser obtidas. Em síntese, para Zazkis, Liljedahl e Chernoff (2008) os exemplos e a generalização estão intimamente relacionados; as generalizações são suportadas pelo enriquecimento dos espaços de exemplos individuais através do uso da variação (cf. 4.4) incluída num conjunto suficiente de exemplos (bem escolhido) que envolva os grandes números de forma conveniente e, também, algum simbolismo algébrico. Os pequenos números deverão servir de base a um conjunto de exemplos onde se apresente de forma clara a estrutura do conceito e, quando apropriados, permitem consolidar as generalizações bem sucedidas e refutar as falsas.

Os exemplos (Exemplos-Exercícios) podem também ser usados como forma de avaliar a compreensão e a performance dos alunos em sentido lato. O modo mais convencional seria apresentar aos alunos exemplos de problemas ou de objectos matemáticos e pedir-lhes que sigam determinadas instruções (e. g. *resolve o problema, compara estes* *objectos, etc.*). Desta forma, o professor assume que estes exemplos são casos de uma classe mais geral de problemas e de objectos, e consideraria a performance dos alunos com estes exemplos como sendo uma representação do seu conhecimento (Bills *et al.,* 2006).

A qualidade dos exemplos que utilizamos deve, claramente, observar critérios de qualidade. Zazkis e Lavie (2005) indicam as características inerentes a qualquer *exemplo instrutivo*. Considera-se um bom exemplo instrutivo um exemplo que transmite ao público-alvo a essência daquilo que se pretende exemplificar ou explicar. Deverá mostrar o caso geral, permitindo que se veja o geral através do que é particular (citando Mason e Pimm, 1984) e cuja natureza seja elucidativa (citando Peled e Zaslavsky, 1997). Há que considerar outros dois aspectos de um bom exemplo (ou sequência de exemplos), um é até que ponto ele permite generalizar e o outro refere-se à utilidade em clarificar e resolver as subtilezas matemáticas. Por fim, Zazkis e Lavie (2005) apontam como útil que os exemplos possuam a capacidade de serem transparentes àquilo que o professor ensina; as características principais dos exemplos transparentes constituem um assunto que se tratará adiante em secção específica (cf. 4.5). Como a extensão da utilidade e transparência de um exemplo é claramente subjectivo, então o papel do professor é oferecer oportunidades de ensino que envolvam uma grande variedade de *bons exemplos* dirigidos às diversas necessidades e características dos alunos (Zazkis e Lavie, 2005).
Ainda no que respeita aos cuidados no uso de exemplos, atenda-se que o uso inadequado de exemplos pode levar à construção de uma compreensão do conceito que não era aquela pretendida pelo professor (Huckstep, Rowland e Thwaites 2002), o que leva a que o acto de exemplificar seja um processo complexo e que requer cuidados específicos nos vários aspectos que o compõem.

4.2.3. Uso de exemplos na Investigação

O uso dos exemplos não se restringe à actividade lectiva e à promoção do ensino e aprendizagem da Matemática; o uso de exemplos também tem o seu lugar na investigação matemática. De certa forma, vários investigadores usam exemplos cuidadosamente seleccionados para analisar os esquemas mentais dos alunos (Dreyfus e Tsamir, Peled e Awawdy-Shabary, citados em Bills, 2006) e muitos usam-nos para estudar o conhecimento e a prática dos professores.

Na perspectiva da investigação em educação matemática, ela interessa-se com o papel dos exemplos, com as escolhas incluídas nas planificações, com a investigação sobre a aprendizagem, o papel dos estudos de caso (considerados como exemplos de pesquisa) e com a construção de teoria em educação matemática (Bills *et al.,* 2006). A escolha dos exemplos, e a sua sequenciação, é crucial na actividade lectiva. Os exemplos podem ser escolhidos por se apresentarem numa representação específica e sequenciados do fácil para o difícil para desencadear o raciocínio analógico, ou do difícil para o fácil para desencadear um conflito cognitivo (Tsamir, 2003). Por consequência, a investigação sobre a aprendizagem da matemática está, também, necessariamente baseada nos exemplos e a escolha dos exemplos matemáticos pode influenciar os resultados de uma investigação. Os investigadores podem contrabalançar essa influência estando conscientes dela, tendo-a em conta quando retirarem conclusões, e mantendo investigações paralelas usando conjuntos de exemplos diferentes (Bills *et al.,* 2006).

Peter Huckstep, Tim Rowland e Anne Thwaites (2003a) publicam um trabalho com os resultados, ainda pouco trabalhados, de um estudo que fizeram com um grupo de estudantes para professores primários. O foco deste estudo realça as formas como pode ser observado o conhecimento didáctico do conteúdo destes estudantes durante o período em que dão as suas aulas no período de tutoria. A observação das aulas dos estudantes para professores permitiu definir 18 categorias iniciais e concluir que, relativamente apenas ao conhecimento do conteúdo matemático e ao conhecimento didáctico do conteúdo, o estudo fez bastante luz sobre a ligação entre os conhecimentos de matemática e as competências para ensinar matemática. A relação directa entre o conhecimento matemático e as competências para ensinar matemática não pode ser estabelecida de forma clara e inequívoca, mas deixou claro que a investigação no terreno pode ser bastante eficaz no que se refere ao trabalho que se faz com estudantes para professores no período de formação prática.

Ainda nesse ano, Rowland, Huckstep e Thwaites (2003b) apresentam um enquadramento teórico que permite identificar e estudar o conhecimento do conteúdo matemático para professores primários enquanto ensinam; isto é, um modelo que divide o conhecimento do professor em quatro elementos. O modelo que apresentam divide o conhecimento do conteúdo matemático em quatro elementos bem distintos e, por isso, lhes chama o *quarteto do conhecimento* (Rowland, Huckstep e Thwaites, 2003b). Além disso, depois de apresentado o modelo, aplicam esse modelo à análise da prática de uma professora primária e afirmam que a existência deste *quarteto* permite potenciar e favorecer o incremento da atenção que damos à análise dos aspectos vinculados ao seu conhecimento do conteúdo matemático. Assim, para estes investigadores, após observarem até à exaustão todas as características do conhecimento do conteúdo apresentadas por diversos professores em formação nas suas aulas, o conhecimento posto em campo pode ser agrupado em quatro grandes domínios ou dimensões. A esses domínios designaram-nos por

- Fundação
- Transformação
- Ligação
- Contingência

e que constituem o *quarteto*. Toda a investigação efectuada sugere que o *quarteto* abrange, como instrumento, todas as formas como o conhecimento sobre ensino da matemática é utilizado numa aula e como isso se materializa na escolha dos exemplos. A descrição do instrumento está mais aprofundada na secção relativa à escolha de exemplos por parte do professor (cf. 4.6).

Após a aplicação do *Quarteto do Conhecimento*, este revelou-se adequado como enquadramento conceptual para análise do conhecimento do conteúdo matemático entre os estudantes para professores e os seus tutores. A aplicação deste modelo desviou a atenção que se costuma dar aos aspectos organizacionais da aula para os aspectos relativos ao conhecimento da matemática, nos momentos em que, conjuntamente, estudantes para professores e os seus tutores analisam as aulas dadas pelos primeiros.

Do estudo que fizeram com os estudantes para professores primários atrás mencionados, uma das 18 categorias que Rowland, Thwaites e Huckstep (2003b) realçaram foi a Escolha de Exemplos. Neste estudo, a escolha de exemplos melhor estudada foi a relativa a um conjunto de exemplos apresentados pelos estudantes para professores. Neste conjunto, a regra foi de que a maioria das vezes a escolha se mostrou desadequada. Assim, o estudo que realizaram confirmou que os estudantes para professores necessitam de um acompanhamento muito próximo, em termos de ajuda e orientação, no que se refere à consideração dos diferentes papeis que os exemplos desempenham no ensino da matemática. A medida em que os estudantes para professores escolhem acertadamente os exemplos, ou não, parece ser um indicador significativo do seu conhecimento do conteúdo matemático para ensinar.
As más escolhas de exemplos, aquelas que se mostram menos felizes e podem constituir verdadeiras ciladas, foram divididas em três categorias (Rowland, Thwaites e Huckstep, 2003a):

- Exemplos que *obscurecem o papel das variáveis* que integram.
- Exemplos em que a *utilização de outro exemplo* seria mais sensato.
- Exemplos *gerados ao acaso*.

A primeira categoria inclui aqueles exemplos que confundem os alunos ou os induzem em erro. A segunda inclui exemplos que não são adequados, que se revelam menos apropriados para o fim em vista ou que há, claramente, outros exemplos que possuem características mais ajustadas à situação. Por fim, a terceira categoria inclui aqueles exemplos que são apresentados aos alunos na crença de que *este exemplo é tão bom como qualquer outro*, não tendo a noção da dificuldade, adequabilidade ou interesse.
Para estes três investigadores (Rowland, Thwaites e Huckstep, 2003b), o estudo mostrou que, para além de confirmar a importância pedagógica dos exemplos, a escolha dos exemplos refina e torna mais clara a análise das práticas dos estudantes para professores. Enquanto no início do estudo se afirmava apenas a importância de se escolherem os exemplos com cuidado, agora afirma-se a capacidade para analisar descritivamente o lugar dos exemplos no ensino e aprendizagem da matemática, e a mostrar exemplos disso, focando a atenção no conhecimento do conteúdo matemático nas suas duas vertentes, o conhecimento da matéria disciplinar e o conhecimento didáctico do conteúdo.
Em síntese, com este estudo, fica mais claro e mais fácil analisar e comentar o trabalho dos estudantes para professores, com base no que eles fizeram ou omitiram, no exigente ambiente de práticas tutoradas. Os três investigadores deixam bem claro que o *Quarteto do Conhecimento* constitui uma ferramenta que deve apoiar o desenvolvimento profissional do professor, com uma focagem fina e estruturada sobre o impacto que os conhecimentos da matéria disciplinar e pedagógico do conteúdo têm sobre a sua docência (Rowland, Thwaites e Huckstep, 2004).

No trabalho apresentados por Zaslavsky, Harel e Manaster (2006) sobre a prática dos professores, são os exemplos, a sua escolha e tratamento que permitiu aos investigadores analisar a relação que existe entre o conhecimento base que o professor deve utilizar nas suas aulas para elaborar exemplos educativos e o conhecimento que se reflecte através do uso desses exemplos. Neste estudo, as lições de uma professora inexperiente foram divididas em segmentos de acordo com o seu objectivo e ideia central, nos quais os exemplos usados foram identificados e caracterizados segundo

diversos constructos; por exemplo, a escolha específica do exemplo, a sequência, variação e amplitude entre os casos específicos, o tipo de exemplos usados, o propósito dos exemplos que se apresentam e até que ponto os exemplos ou sequências de exemplos podem sustentar o desenvolvimento da ideia matemática.
No final do estudo, a caracterização da escolha e tratamento dos exemplos revelou-se um instrumento bastante adequado e útil para se poder entender o conhecimento base da professora em termos da complexidade e da riqueza que transporta. Através do tratamento de exemplos foi possível reunir vários aspectos significativos do seu conhecimento matemático e pedagógico do conteúdo.

Um outro artigo sobre a forma de gerar exemplos, bem como essa actividade pode reflectir o conhecimento e a compreensão da matemática, foi produzido por Rina Zazkis e Roza Leikin em 2007. O objectivo do artigo é mostrar como os exemplos podem constituir uma boa ferramenta de investigação que proporciona uma "janela" para a observação das mentes dos alunos. Para alcançar este objectivo, as autoras socorrem-se de um enquadramento teórico sobre exemplos, a sua geração e as colecções de exemplos que os alunos interiorizam e utilizam, digamos assim, como uma "despensa". Este repositório pessoal de exemplos onde o aluno vai encontrar os exemplos que o ajudem em determinada situação, sendo alguns exemplos mais acessíveis que outros, chama-se espaço pessoal de exemplos (Watson e Mason, 2005) e esta noção constitui a secção que é tratada seguidamente (cf. 4.3).
Na investigação que serve de base ao artigo foi dado realce ao papel que os exemplos assumem consoante estes são apresentados por professores enquanto ensinam ou, então, quando são utilizados pelos alunos na sua aprendizagem. Contudo, para este artigo em especial, o foco dado aos exemplos evidencia o que as próprias investigadoras puderam descobrir com os exemplos apresentados, dado que os exemplos por elas observados foram gerados pelos participantes na investigação, fossem eles alunos, estudantes para professores ou professores no activo.
Enquadrada pela moldura teórica referida, os exemplos estudados puderam reflectir as concepções sobre objectos matemáticos envolvidos em determinado exemplo quando este é pedido sobre condições impostas, sobre o reportório de ferramentas pedagógicas e sobre as dificuldades e as falsas percepções dos intervenientes.
As conclusões do artigo (Zazkis e Leikin, 2007) integram-se no lema "aprender matemática quer dizer, entre outras coisas, familiarizar-se com espaços de exemplos" e apontam no sentido que, com o enquadramento referido, se pode analisar como os alunos compreendem e conhecem os conteúdos matemáticos. No entanto, avisam que esta moldura não está completa nem abrange qualquer tarefa de exemplificação ou de aprendizagem, mas que pode constituir uma base de futuros trabalhos.

Na mesma linha do artigo anterior está aquele que Orit Zaslavsky (2008) escreve sobre o conhecimento do professor, tendo como base a escolha e produção de exemplos de ensino que se revelem úteis. No artigo, esta investigadora caracteriza o conhecimento do professor como sendo um conhecimento muito sofisticado, já que envolve a selecção e construção de exemplos úteis que serão utilizados nas aulas de matemática, além de ser um conhecimento muito sólido sobre a matemática e profundo das teorias pedagógicas. No que se refere à escolha de exemplos, a autora considera que a escolha de exemplos é para o professor um desafio carregado de responsabilidade e requer bastante reflexão sobre todos os aspectos que competem entre si, já que a escolha e uso específico dos exemplos pode promover ou dificultar as aprendizagens. Segundo Zaslavsky (2008), a exemplificação pode ser vista como o núcleo de conhecimento necessário para ensinar e também como uma força que orienta a evolução do conhecimento do professor. No fundo, constrói e melhora o conhecimento do professor sobre pedagogia, matemática e sobre a epistemologia do aluno.

Sobre a produção de exemplos, são destacadas três perspectivas. De uma perspectiva matemática, o exemplo deve satisfazer determinadas condições que dependem do conceito ou do princípio que pretende ilustrar; de uma perspectiva pedagógica, o exemplo deve ser apresentado de forma que transmita a sua "mensagem"; e da perspectiva epistemológica, o professor deve estar atento ao que os alunos realmente "vêem" naquele exemplo (citando Mason e Pimm, 1984) e o perigo que, através dele, os alunos possam sobre-generalizar ou sub-generalizar.

Depois de analisar um caso em concreto, as considerações finais que são apresentadas prendem-se com a complexidade que envolve a escolha e produção de contra-exemplos úteis para rejeitar uma afirmação falsa. As mesmas considerações podem ser aplicadas a outros tipos de exemplos. Além do mais, através do caso apresentado no artigo, a investigadora considera ter sido tornada clara a interacção que se estabelece entre o conhecimentos matemático e o conhecimento pedagógico do professor e deixa uma nota sobre a necessidade de se dar especial atenção às carências dos alunos, num contexto de exemplificação.

Como corolário sobre o conhecimento que o professor põe em campo quando escolhe, produz e usa os exemplos, Zaslavsky (2008) chama a atenção para um ponto importante: como preparar os professores de modo que possam alcançar uma " literacia sobre exemplificação" e que possam estar aptos a responder às exigências que apresentam a produção ou a escolha exemplos de ensino.

4.3 Espaços de Exemplos

Existe um fenómeno que todos nós experimentamos no dia-a-dia, sejamos professores, alunos ou matemáticos, que é o surgimento mental de exemplos de imagens, de expressões ou de processos, quando ouvimos referir (ou referimos nós próprios) um determinado tópico matemático. Se o tema referido for a função quadrática, logo nos surgem imagens mentais de parábolas, ou expressões de funções como $y = 2x^2 - 10$, eventualmente uma expressão mais geral $f(x) = ax^2 + bx + c$. Menos provavelmente nos surgirá a expressão $f(x) = (x-a)(x-b)$, por que não possui um termo em x^2. E a expressão $h(x) = \int xdx$ talvez não surja a muita gente. Todos nós temos, por assim dizer, uma "fonte" de onde nos surgem os nossos exemplos ou onde os vamos "procurar"; também sabemos que, para um dado tema matemático, existem exemplos que surgem espontaneamente, enquanto que para outros temas os exemplos não surgem com tanta facilidade. Por isso podemos dizer que existe um local mental de onde os exemplos surgem. Este local mental começou a ser designado por *espaço de exemplos*.

A descrição do termo *espaço de exemplos* pode ser lido num trabalho de Rissland-Michener (1978), como sendo um espaço canónico ou universal no mundo da matemática.

Mais tarde, Zaslavsky e Peled (1996), num trabalho em que pretendiam explicar as dificuldades sentidas pelos professores para gerarem contra-exemplos, referiam-se ao *espaço de exemplos* como sendo a colecção de exemplos matemáticos a que alguém acede em determinadas situações.
A última descrição de espaço de exemplos que encontrámos diz-nos que *espaço de exemplos* é a experiência que se tem ao ocorrer-nos uma ou mais classes de objectos matemáticos unidos por métodos de construção e associações. Pode existir uma estrutura interna na forma como se ligam os objectos ou como se ligam as classes, e podem existir elos associativos com conceitos, teoremas e procedimentos (Goldenberg e Mason, 2008).

A noção de espaço de exemplos foi transferida para o âmbito dos alunos por Anne Watson e John Mason após observarem que frequentemente os alunos apenas têm presente uma colecção muito limitada de exemplos [sobre um dado assunto ou conceito]. Esta noção é normalmente perspectivada do lado do aluno quando se fala em ensino e aprendizagem. Em termos muito simples, a noção de espaço de exemplos pode ser considerado da seguinte forma: "… os exemplos produzidos pelos alunos surgem de um pequeno conjunto de ideias que simplesmente aparecem como resposta a determinadas tarefas em determinadas situações. Nós chamamos a estes conjuntos *espaços de exemplos*" (Watson e Mason, 2005, p. ix). Porém, normalmente, os exemplos não existem de forma isolada; antes, são percebidos como casos particulares de uma classe de potenciais exemplos. Como tais, todos eles constituem um *espaço de exemplos*. Estes dois investigadores (Watson e Mason, 2002a e 2005; Mason e Watson, 2005) promoveram o uso alargado do termo *espaço de exemplos* e desenvolveram técnicas para dirigirem os alunos à consciencialização dos seus espaços de exemplos, para os enriquecer aos quais necessitarão aceder no futuro. Em termos do que eles têm observado, a experiência dos alunos utiliza um espaço de exemplos ao qual acedem como resposta a situações, desafios e a tendências [matemáticas]. Os espaços de exemplos não são meras listas, eles têm idiossincrasias e estruturas internas e é através destas estruturas que os exemplos são produzidos. Nos espaços de exemplos, os seus conteúdos e estruturas vinculam-se ao indivíduo, à situação e não existem independentemente desse indivíduo nem das tarefas que determinam a situação (Watson e Mason, 2005, p. 51). Entre vários tipos de espaços de exemplos, distinguem-se entre (Watson e Mason, 2005, p. 76):

1. *Espaços de exemplos pessoais* (individual) *e situados* (local), desencadeados por uma tarefa, pista e envolvente, bem como por uma experiência recente;
2. *Espaços de exemplos pessoais em potência*, de onde um espaço local é retirado, consistindo nas experiências pessoais de cada um (ainda que não lembradas ou recordadas), e pode não estar estruturada de forma a permitir um acesso fácil;
3. *Espaços de exemplos convencionais*, que é um espaço tal e qual é compreendido pelos matemáticos e vem apresentado nos livros de texto, nos quais o professor pretende induzir os seus alunos.

Zazkis e Chernoff (2008) sugerem que os *espaços de exemplos convencionais*, tal como são apresentados nos livros de texto e nas práticas lectivas, não são representativos do que é entendido pelos especialistas e podem limitar o desenvolvimento dos *espaços de exemplos pessoais* dos estudantes.

O que ocorre na mente de cada aluno quando trabalha com um conceito familiar, ou quando lhe são pedidos exemplos sobre algum objecto matemático, relaciona-se com uma imagem central ou com uma imagem dominante sobre o tópico (que pode ser um exemplo representativo de toda a classe), mas que pode também ser influenciada pelas experiências prévias, preferências, interpretações sobre o que se pretende e pelo que é valorizado (Watson e Mason 2002a). Este conjunto de "coisas" pessoais relacionadas com um conceito constitui um conjunto a que se chama *Espaço Pessoal de Exemplos*. O *Espaço Pessoal de Exemplos* é uma construção própria do indivíduo sobre um determinado tema que tem ligações internas entre os exemplos que o constituem e, também, ligações externas com outros espaços de exemplos.

O conceito de *Espaço de Exemplos* tem sido alvo de atenção e, em poucos anos, tem-se desenvolvido e tornado mais preciso nos seus contornos. No que respeita ao casos dos alunos, um espaço de exemplos é a colecção de exemplos de um conceito ou técnica aos quais o aluno tem acesso em qualquer momento, incluindo a riqueza das interconexões entre esses exemplos que têm uma papel da maior importância sobre o sentido que os alunos podem obter das tarefas que lhes são propostas, das actividades em que se envolvem e como idealizam o que o livro diz ou o professor faz (Bills *et al.* 2006).

Também para Bills e colegas (2006), os espaços de exemplos não são apenas listas de exemplos, surgem com uma estrutura muito própria em termos de como os elementos das classes dentro dos espaços estão inter-relacionados. Os espaços de exemplos podem ser ampliados procurando novos exemplos que sejam especiais e bem enquadrados. Estes exemplos devem constituir possibilidades de acesso a novas classes de exemplos, através de novas restrições aos exemplos, centrando-se numa característica particular, modificando uma particularidade fechada para uma aberta, ou vislumbrando a infinitude de uma classe que está representada por uma particularização.

Pelo que referimos, podemos resumir a noção de espaço de exemplos pelas suas características: (1) os espaços de exemplos são dinâmicos, i.e., mudam e desenvolvem-se; (2) têm uma estrutura interna própria; (3) essa estrutura é pessoal e depende da situação. Metaforicamente, Watson e Mason (2005) consideram os espaços pessoais de exemplos como sendo *despensas*. Os exemplos são arrumados e acedidos como se fossem artigos que guardamos nas prateleiras da despensa; alguns estão na frente e usamos muitas vezes, enquanto outros estão nas filas de trás, porque não utilizamos tanto, e que temos mais dificuldade em aceder. Assim, procurar um exemplo é comparado a encontrar na *despensa* um elemento necessário a um objectivo. Com esta metáfora salienta-se o facto de que ao procurar-se um objecto se vai, simultaneamente, reorganizando e re-categorizando os outros elementos da *despensa*.

Watson e Mason (2002a) consideram que aprender consiste em aumentar e adaptar, naquele tema, os espaços pessoais de exemplos, por parte dos alunos; ensinar envolve a apresentação, por parte do professor, de situações nas quais aquilo possa acontecer. Para os autores, muitas das abordagens de ensino que observaram poderiam ser descritas como a disponibilização de oportunidades para ampliar os espaços de exemplos pessoais. Estes espaços de exemplos, localizados no espaço, no tempo, na pessoa e nas experiências, proporcionam pontos de partida para o trabalho dos alunos. Mesmo quando abordam tópicos novos, já existem ligações com conhecimentos prévios que consciencializam imagens e exemplos.

Mais tarde, Watson e Mason (2005) apresentam o conceito de *Espaços Pessoais de Exemplos* como sendo uma ferramenta que tanto professores como alunos recorrem para se tornarem mais cientes das potencialidades e limitações do uso de exemplos. Estes dois investigadores apresentam no seu livro dois princípios:

- Aprender matemática consiste em explorar, reorganizar, ganhar fluência e ampliar os nossos espaços de exemplos, bem como as ligações entre e dentro deles.
- A vivência de extensão dos nossos espaços de exemplos (se guiada com sensibilidade) contribui para flexibilizar o pensamento e potencia a análise e interiorização de novos conceitos.

Em educação matemática observa-se um incremento considerável de trabalhos de investigação sobre a *Geração de Exemplos pelos Alunos* (Watson e Mason 2002). Ao gerarem exemplos por si próprios os alunos ampliam o seu espaço de exemplos, reorganizam esse espaço, criam mais ligações entre os elementos do espaço e facilitam as ligações externas a espaços de exemplos de outros conceitos. Watson e Shipman (2008) mostram como com conteúdos adequados, na sala de aula, é possível explorar actividades e levar os alunos ao encontro dos aspectos principais de um dado conceito. Os espaços de exemplos podem ser ampliados com base em actividades exploratórias bem como através de tarefas de construção directas (Goldenberg e Mason, 2008). A forma de gerar exemplos próprios, e a ampliação dos espaços de exemplos pessoais, está intimamente ligado ao que posteriormente apresentaremos como a situação de "Dê um exemplo de … com restrições" (cf. 4.7.8).

Os espaços de exemplos devem estar bem delimitados para que o aluno "defina" bem o conceito, por isso, o professor deve apresentar ao aluno alguns não-exemplos. O papel do não-exemplo consiste em limitar o conceito, apresentar ao aluno o limite até onde o conceito abrange. A noção deste tipo de exemplo tem a sua génese em dois tipos de exemplos propostos por Askew e Wiliam (1995): *only just example* e *very nearly example*. Em português seriam, *exemplo mesmo à justa* e *exemplo muito próximo*. A designação é muito expressiva quanto às naturezas destes exemplos. Um exemplo é um exemplo *mesmo à justa* se uma simples alteração no exemplo faz com que ele se transforme num não-exemplo; por outro lado, um *muito próximo* [de ser] exemplo necessita apenas de um pequeno ajuste de forma a tornar-se um exemplo. A essência desta afirmação recai na noção de que quanto mais aproximado do exemplo for o não-exemplo mais rigorosa é a delimitação do conceito pelo espaço de exemplos. Mason e Watson (2001) sugerem que um conceito matemático nem sempre apresenta limites de significado bem definidos que devem estar bem explícitos nas definições, através de certas condições e propriedades declaradas. Porém, a opinião de que as ideias matemáticas possuem "orlas" que merecem ser exploradas, é uma concepção bastante forte.

Nesta linha, as investigações de Anne Watson e de John Mason levaram-nos ao termo *Boundary Example* (Mason e Watson, 2001), que, traduzindo livremente, será *Exemplo Fronteira* ou *Exemplo Delimitante*. O termo "*fronteira*" é usado pelos dois investigadores por considerarem que a experiência dos alunos com os exemplos se traduz num espaço: famílias de objectos relacionados entre si que colectivamente satisfazem uma situação particular e respondem a uma determinada questão ou, então, aceitam a mesma designação. Mason e Watson (2001) preferem a noção de *Exemplo*

Delimitante para se referirem ao exemplo que explora as "orlas" do conceito, i.e. que explora os limites do conceito, e que torna clara a distinção entre ter ou não ter uma determinada propriedade. Se apenas proporcionarmos aos alunos exemplos *bem comportados*, ou exemplos que tenham aspectos adicionais irrelevantes, então a razão de existirem condições e conclusões de um teorema bem escritas e muito claras ou definições cuidadosamente construídas, pode passar despercebida aos alunos. Além disso, os alunos podem desenvolver a ideia de que podem existir casos ambíguos ou inconclusivos; o que, em matemática, não acontece.

Para ilustrar a noção de *Exemplo Delimitante* Watson e Mason (2002a) apresentam o seguinte caso:

> "Geralmente uma recta é dada pela equação $y = ax + b$, por isso as rectas da forma $x = a$ são muitas vezes excluídas das actividades dos alunos porque não respeita o caso geral; consequentemente os professores terão que introduzir esta equação de forma deliberada como sendo também uma recta. Chama-se a $x = a$ um *exemplo delimitante* para rectas da forma $y = ax + b$."

Como vimos, estes espaços de exemplos parecem agrupar-se em torno de uma imagem central dominante. Esta imagem central pode variar de pessoa para pessoa. Por exemplo, para o conceito de função contínua mas não diferenciável em todo o domínio é frequente que os alunos universitários apresentem a função $f(x) = |x|$, contudo, se quisermos outros exemplos, esses alunos necessitam de várias pistas para o poderem fazer (Watson e Mason, 2002a). Segundo os autores, relativamente ao conceito de espaço de exemplos, os exemplos que vão sendo apresentados surgem a partir da função $f(x) = |x|$, por isso esta função é a imagem central do espaço de exemplos associado ao conceito de função contínua não diferenciável em todo o domínio.

Os exemplos podem ser vistos como um instrumento muito útil que fazem a ligação entre os alunos e os conceitos matemáticos, os teoremas e todo o tipo de procedimentos, técnicas e rotinas matemáticas. No papel de apresentador dos exemplos mais adequados aos alunos, o professor desenvolve, ele próprio, os seus espaços de exemplos ao longo da sua carreira. Evidentemente, estes espaços de exemplos do professor partilham as mesmas características que os espaços de exemplos dos alunos – são pessoais e dependentes das situações – e os professores quando constroem exemplos, quer sejam planeados ou por força das circunstâncias, revelam bastante sobre o seu espaço de exemplos relativo à situação e, no fundo, o escopo da sua percepção e para onde está focada a sua atenção (Goldenberg e Mason, 2008; Rowland, 2008; Zazkis e Leikin, 2008). Por isso pode ser útil distinguir um espaço de exemplos próprio do professor, um *espaço de exemplos lectivo* (Goldenberg e Mason, 2008), que é um espaço de exemplos a que o professor acede quando ensina um determinado tópico.

Em síntese, ensinar e aprender matemática baseia-se na criação e ampliação dos espaços pessoais de exemplos nos quais os alunos e os professores trabalham as suas estruturas e ligações. Adquirir competências matemáticas consiste em desenvolver espaços de exemplos complexos, inter-relacionados mas, no fundo, compreensíveis ao aluno. Os espaços de exemplos, tal como são descritos em cima, são componentes incontornáveis da experiência dos alunos. Aprender mais sobre um determinado tópico consiste em aceder a exemplos mais avançados ou, então, construções mais avançadas para esses exemplos, bem como aumentar as ligações, ou os desencadeantes, que permitem os acessos ao espaço de exemplos; ensinar eficientemente inclui o uso de tarefas e interacções através das quais os alunos melhoram os acessos aos exemplos, a métodos de construção de exemplos e, claro está, aos aspectos matematicamente relevantes dos diferentes exemplos (Goldenberg e Mason, 2008).

4.4 Sequências de Exemplos e Variação

Muitos dos estudos que tratam o uso de sequências de exemplos sugerem que uma sequência específica de exemplos tem influência na aprendizagem. Em particular, recomenda-se a combinação de conjuntos de exemplos e de não-exemplos no seio das sequências de exemplos, de modo a focar a atenção dos alunos nos aspectos críticos dos exemplos que são relevantes (Bills *et al.*, 2006) e, especificamente, o professor pode usar uma sequência de exemplos para ajudar os alunos a encontrarem um padrão subjacente a um fenómeno matemático (Zaslavsky, Harel e Manaster, 2006). Existe o argumento de que os exemplos devem ser apresentados de forma gradual, para que os alunos obtenham algum sucesso em exemplos de rotina antes de experimentarem outros mais difíceis (Bills *et al.*, 2006). Contudo, deve ser considerado que a sequenciação de exemplos "fáceis" para exemplos mais "difíceis" nem sempre é efectivo (Tsamir, 2003). Assim, as sequências de exercícios vocacionados para melhorar a fluência de rotinas e procedimentos são, provavelmente, estruturados de forma diferente que aquelas destinadas a promover ou provocar generalizações (Watson e Mason, 2006). A uma conclusão semelhante chegou Sangwin (2006) num estudo que fez sobre o tratamento da função quadrática em vários livros de texto desde o século XIX até aos dias de hoje; naqueles livros de texto o propósito do uso de sequências de exemplos pode não ser muito claro, pode até parecer que mistura situações, mas algumas sequências destinam-se mais claramente a trabalhar o conceito enquanto outras trabalham rotinas e fluência no cálculo. Christopher Sangwin aponta, neste estudo, questões importantes sobre o uso de sequências de questões, principalmente que as sequências devem ser coerentes na sua estrutura interna e que devem conter questões variadas e não repetitivas que conduzam o aluno a um propósito. Como atrás se disse, conducentes à fluência no cálculo, à conceptualização e às generalizações. O resultado mais interessante no âmbito do uso de sequências de exemplos é que estes objectivos podem ser descortinados nos livros de texto que consultou e que essa era uma preocupação dos seus autores. Por isso, uma das conclusões a que chega, refere que os professores devem ser cuidadosos no uso diário que fizerem das sequências que extraem dos livros de texto para não destruir a frágil estrutura da sequência. Isto pode acontecer se usarem somente as questões pares da sequência ou apenas as questões da coluna do lado direito, por exemplo.

Os conjuntos de exemplos que são apresentados aos alunos, ou que são propostos aos alunos para que os trabalhem, com o objectivo de provocar generalizações devem ter uma característica que promova essa mesma generalização. Mason (2003), num trabalho sobre a estrutura da atenção, refere-se aos trabalhos de Ference Marton e colegas sobre a noção de *Variação*. Marton e Booth (1997) deram início a uma nova perspectiva no contexto do ensino da matemática baseado no princípio de que "aprender consiste em fazer novas distinções; simultaneamente, *discernir algo de*, e *relacioná-lo com*, um contexto". Por outras palavras, aprender a distinguir pormenores que antes não

podíamos discernir. Por exemplo, conseguir observar o período de uma dízima infinita periódica onde antes apenas víamos uma cadeia de algarismos.
Mas fazer distinções, discernir novos pormenores é apenas o início. Apenas se podem discernir pormenores se existir uma mudança, e somente haverá mudança se existir algo que, na nossa percepção, se mantenha (relativamente) invariante. É por esta razão que o tema *invariância no centro da mudança* é tão importante em toda a matemática (Mason, 2003; Mason e Johnston-Wilder, 2006; Mason, 2008).
O trabalho de Ference Marton (e. g. Marton e Booth, 1997) assenta nos resultados de uma pesquisa que durou 25 anos e que culminou numa teoria geral sobre *Aprendizagem e Conhecimento* chamada Teoria da Variação. Esta teoria faz a asserção de que "*Se um aspecto de um fenómeno ou evento varia enquanto outro ou outros se mantêm inalterados, o aspecto variante será discernido*", a parte do conteúdo que varia é chamada a *Dimensão* da variação. Dito outra forma, para Marton e seus colegas a variação está no centro desta perspectiva pedagógica que se apoia neste aspecto essencial: aquilo que pode ser alterado, que pode variar, sem modificar o sentido de invariância ou de estrutura chama-se *Dimensão* da variação. Realce-se que se apenas um aspecto em particular for apresentado como uma dimensão de variação, e se a variação for comedida, possivelmente essa variação será melhor notada pois será evidenciada por um pano de fundo constituído pela relativa invariância de outros aspectos. Se tudo estiver a variar nada será discernido (Watson e Mason, 2006).
A partir dos estudos de Marton e colegas, Watson e Mason no tema sobre os Espaços Pessoais de Exemplos desenvolveram dois conceitos relacionados com a *Variação* e que estão intimamente ligados. Aquilo a que Marton chamou *Dimensão* dentro de uma determinada estrutura, Mason e Watson chamaram *Dimensão de Variação Possível* (Mason e Watson, 2005; Watson e Mason, 2005) e estabeleceram que nessa dimensão (aspecto da estrutura que pode ser modificado sem alterar o sentido do todo) se pode reconhecer uma *Amplitude de Mudança Permitida*. As *Amplitudes de Mudança Permitidas* devem evidenciar quais os constrangimentos na natureza e na extensão da mudança que são permitidos. Nos estudos sobre espaços de exemplos estes autores também verificaram que uma determinada estrutura poderia suportar várias destas *Dimensões de Variação Possíveis* e que cada uma delas teria associada a sua própria *Amplitude de Mudança Permitida*. A forma de explorar as *Amplitudes de Mudança Permitida* consiste em propor ao aluno que apresente um exemplo que pense que outras pessoas não se lembrariam e, por vezes, quando se propõe ao aluno uma tarefa do tipo *Dê exemplo de ... e mais outro ... e ainda outro* pode descobrir-se uma outra *Dimensão de Variação Possível* que ainda não tivesse sido notada.

Marton, Runesson e Tsui distinguem entre simultaneidade diacrónica e simultaneidade sincrónica. Simultaneidade diacrónica é a experiência simultânea de diferentes casos ao mesmo tempo e a simultaneidade sincrónica é a experiência de aspectos coexistentes diferentes da mesma coisa ao mesmo tempo. As duas situações podem ocorrer no contexto de uma sala de aula. Para além disso, no contexto de aula os alunos e o professor podem discernir coisas diferentes. Não há nenhuma garantia de que os alunos aprendam a quilo que o professor pretendia com aquela aula, mas o que os professores podem fazer é criar a possibilidade de os alunos aprendam as coisas de alguma forma. Desta perspectiva é interessante estudar quais os aspectos sobre os quais os professores se estão a centrar, que é uma parte de tudo o que é possível que os alunos aprendam.

Para perceber o que é e o que não é possível aprender numa situação específica, nós necessitamos dar atenção àquilo que varia e o que é invariante ou constante (Marton, Runesson e Tsui, 2004). Marton *et al.* afirmam que a variação, em geral, não activa melhores possibilidades de aprender, mas a variação pode possibilitar nos alunos a experiência de aspectos que são fundamentais para uma aprendizagem em particular:

> "É necessário prestar muita atenção ao que varia e ao que é invariante numa situação de aprendizagem, de modo a compreender o que é possível aprender naquela situação e aquilo que não é." (p. 16)

Runesson e Mok (2004) dão exemplo das características fundamentais de um quadrado: a medida dos ângulos, o número de lados e as relações entre todos. As características fundamentais variam com os objectos de aprendizagem e devem ser discernidas para cada um deles. As características fundamentais também variam entre grupos diferentes de sujeitos. Aprender a compreender e a manejar um objecto de aprendizagem em particular obriga a que as suas características principais sejam discernidas (principais com respeito a certo objectivo) e a centrar-se nelas simultaneamente. As características devem ser experimentadas como dimensões de variação. Isto quer dizer que há diferentes valores que podem variar dentro de uma dimensão de variação.

Al-Murami apresenta como exemplo do que se expôs a equação $x+1=7$. Esta equação apresenta vários componentes que podem variar, a variável ($y+1=7$), o aditivo ($x+2=7$), a soma ($x+1=8$), a operação ($x-1=7$), a ordem ($1+x=7$), a posição relativa ao sinal de igual ($7=x+1$) e o coeficiente da variável ($2x+1=7$) (Al-Murami, 2006).

Os conceitos de Dimensão de Variação Possível e Amplitude de Mudança Permitida estão relacionados com a variação e são perfeitamente transponíveis para o ensino e aprendizagem do conceito de função. Deste ponto em diante não trataremos a *Variação* e as *Dimensões de Variação Possíveis* relativamente a uma qualquer outra estrutura matemática, mas somente ao conceito de função e aos sub-conceitos presentes na investigação.

Mostramos mais dois exemplos do que constituem *Dimensões de Variação Possíveis,* e as *Amplitudes de Mudança Permitidas* que lhe estão associadas, apresentados pelo professor ao aluno, com uma diferença entre os dois. São desafios do tipo *O que é diferente e o que é semelhante acerca de…?* e *O que é que muda e o que não muda em…?*(Watson e Mason, 2004). No primeiro exemplo existe variação mas pretende-se que o aluno se aperceba do aspecto que não varia. No segundo exemplo pretende-se que o aluno se aperceba do aspecto que variou quando houve outros aspectos que se mantiveram constantes

Exemplo 1:
Considere a seguinte sequência de números: 1, 4, 9,16, 25, 36, …
Indique o que todos eles têm em comum.

Exemplo 2:

Considere as seguintes funções: $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$ e $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$

Indique as assimptotas verticais de cada uma.

No primeiro exemplo a característica que não varia é o facto de cada um dos números ser um quadrado de um número natural. Este exemplo só possui uma *dimensão de variação possível* e, nessa dimensão, a *amplitude de mudança permitida* é todo o conjunto dos números naturais.

No segundo exemplo a característica que não varia é o aspecto da função, todas elas são do tipo $f(x)=\dfrac{1}{x^2+a}$, e o que varia é o valor da parcela *a*. Neste exemplo podemos definir três *dimensões de variação possíveis*, quando a função admite nenhuma assimptota, duas assimptotas ou uma assimptota. Na primeira dimensão a *amplitude de mudança permitida* é o conjunto dos números reais positivos, na segunda dimensão a *amplitude de mudança permitida* é o conjunto dos números reais negativos e a terceira dimensão a *amplitude de mudança permitida* é só o zero.

As noções de Dimensão de Variação Possível e Amplitude de Mudança Permitida são úteis para o professor na medida em que evidenciam a importância de tornar explicitamente claro aos alunos quais as características de um objecto que o tornam um exemplo: i.e., que características são estruturais, e que características podem ser mudadas e de que forma (Goldenberg e Mason, 2008).

Veja-se, também, o exemplo apresentado por Figueiredo, Contreras e Blanco (2009) para o caso de um exemplo proposto ao aluno para que seja trabalhado por ele. Este exemplo é o que usualmente se chama de questão de escolha múltipla e que pode figurar num teste de avaliação ou em situação de aula. No caso de ser uma questão de um teste pretende-se que o aluno indique qual das opções está correcta; no caso de ser trabalhado em aula, o objectivo é que o aluno compreenda (ou explique) quais e porque razão três opções são falsas e qual é a correcta e, também, as razões de o ser.

"Considere os gráficos das funções ***f*** e ***g***, respectivamente fig. 21 e fig. 22

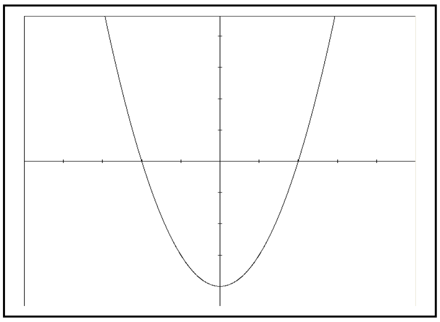


Figura 21

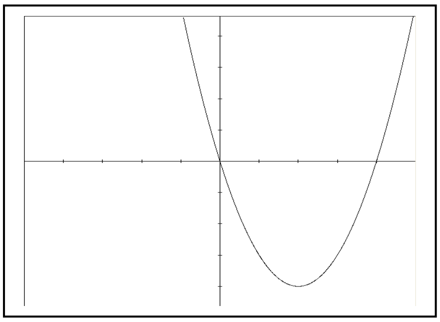


Figura 22

Se a função ***h*** se define por $h = \dfrac{f}{g}$, podemos afirmar que:

A ***h*** admite as raízes x=0 e x=4

B ***h*** tem sinal positivo em]-2; 0[

C o domínio de ***h*** é o conjunto $\mathbb{R}\backslash\{0;4\}$

D o $\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$ "

Neste exemplo cada uma das opções constitui uma *Dimensão de Variação Possível*, o número de raízes de uma função quociente, o sinal de uma função quociente, o domínio de uma função quociente e o limite de uma função quociente na vizinhança de uma assimptota.

Aprender, tal como Watson e Mason (2005) sugerem, passa por aumentar a consciência que temos sobre as Dimensões de Variação Possíveis associadas a tarefas, técnicas, procedimentos, conceitos e contextos e, também, sobre as Amplitudes de Mudança Permitidas em cada uma das dimensões. Este aspecto associa-se, como vimos em Watson e Mason (2002a), a que aprender consiste em ampliar os nossos espaços de exemplos e, também, em generalizar processos que nos permitam resolver situações novas à custa de situações que anteriormente nos serviram de exemplo. Assim, quanto mais ampla for a extensão dos exemplos apresentados, maior é a possibilidade de generalização e de ligações a serem realizadas, por isso a extensão do conjunto de exemplos conhecidos é determinante na construção da construção conceptual.
No entanto é necessário questionarmo-nos sobre o que é que um exercício ou uma sequência de exercícios proporciona ao aluno. Se, numa colecção de exemplos, demasiadas dimensões variarem simultaneamente e se as mudanças que se apresentam não forem sistemáticas, é possível que o aluno negligencie as dimensões de variação possíveis no esforço de resolver cada uma das situações, uma após a outra. As aprendizagens acontecem quando acontecem coisas que não são vulgares, porque agitam as expectativas dos alunos e porque providenciam diferenças quase-simultâneas para serem distinguidas (Marton, Runesson e Tsui, 2004, citados em Watson e Mason, 2004).

Neste momento é fundamental ligar o que foi exposto sobre os Espaços Próprios de Exemplos e a Variação. Não basta apenas apresentar conjuntos ou sequências de exemplos se o nosso objectivo é que os alunos façam generalizações. O uso de vários exemplos por parte do professor permite ao aluno aperceber-se do sentido geral dos conteúdos que estão a ser leccionados e, também, pela comparação dos exemplos, generalizar através do que eles apresentam em comum (Watson e Mason, 2002). Ampliar os espaços de exemplos dos alunos deverá ser feito à luz da variação e de todas as dimensões que os conceitos admitam. Em termos de exemplificação, para que se possa obter uma variação eficaz, os exemplos apresentados aos alunos ou por eles trabalhados devem evidenciar as dimensões de variação possíveis, devem ser diferentes em determinado aspecto sem, contudo, deixarem de ser exemplos do conceito em estudo. Desenvolver práticas reflexivas entre os alunos requer mais que apresentar-lhes tarefas rotineiras para completarem. Para isso, salvo os casos de exemplos bem desenhados, não é normalmente suficiente existirem diferenças subtis dispersas nos conjuntos de exercícios à espera de serem notadas; para que seja possível que os alunos *se afastem* do conjunto de exemplos que trabalharam e o possam olhar como um todo para discernirem as semelhanças e para as compararem, para se consciencializarem de certos aspectos como sendo dimensões de variação e as expressarem como generalidades, para expressarem algoritmos e métodos pelas suas próprias palavras, é geralmente necessário solicitar especificamente que o façam (Watson e Mason 2004).

Todos os professores usam naturalmente a *Variação*, seja deliberadamente ou acidentalmente (Al-Murami 2006). Em 2006 Thabit Al-Murami publicou os resultados de uma investigação de 18 meses sobre a utilização sistemática da Teoria da Variação. Utilizou dois grupos de alunos, um onde os seus professores foram instruídos na utilização da variação na leccionação de conteúdos de Álgebra e outro de controlo. Os professores do primeiro grupo foram sujeitos a uma intervenção estruturada para aumentar a sua percepção e conhecimento do uso deliberado e sistemático da variação para que pudessem ser medidos os seus efeitos. Os estudantes dos dois grupos responderam aos mesmos testes nacionais as relações entre as suas performances e as observações de sala de aula levaram a duas conclusões gerais.
A) Os professores sujeitos à intervenção trabalharam os conteúdos de forma diferente. Além do mais, verificou-se um incremento do conhecimento sobre variação pelo incremento da sistematização do seu modo de ensinar. A sistematização parece explicar nos professores sujeitos à intervenção as regularidades relevantes no tratamento dos conteúdos.
B) Os alunos envolvidos no programa de intervenção obtiveram melhor rendimento do que os alunos que não integraram o programa de intervenção. O estudo longitudinal mostrou que a relação entre o incremento do conhecimento sobre variação e a compreensão de conteúdos perdurou para além dos 18 meses de duração do programa.
Os resultados deste estudo foram validados por diferentes testes estatísticos.

Em síntese, controlando As Dimensões de Variação Possíveis, e as respectivas Amplitudes de Mudança Permitida, é uma forma de desenhar exercícios eficientes que encorajam os alunos a envolverem-se na estrutura matemática e, além disso, a análise das Dimensões de Variação Possíveis podem indicar as potencialidades e as debilidades

dos exercícios dentro de determinadas situações em particular (Watson e Mason 2004, 2006).
A variação e mudança, controladas nas diferentes dimensões, podem ajudar a estruturar o sentido que os alunos dão à matemática. O trabalho de Watson e Mason sobre exercícios que dão um papel preponderante à variação e à mudança (2006) apontam as principais directivas com vista a produzir sequências de exemplos que têm como base a percepção que os alunos têm dos objectos matemáticos:

- Análise dos conceitos nos cânones convencionais que esperamos que os alunos vão encontrar.
- Identificação das regularidades nos exemplos convencionais do conceito em causa (e as técnicas, imagens, linguagens e contextos que com ele se relacionem) que possam ajudar os alunos a (re)construir generalidades associadas ao conceito. Também um algoritmo pode ser visto como uma generalidade.
- Identificação da(s) variação(ções) que exemplifica(m) estas generalidades; decidir que dimensões devem variar e como fazê-las variar.
- Elaborar exercícios que proporcionem oportunidades de micro-modelação (trabalho dos alunos com exercícios onde a variação é controlada cuidadosamente), pela apresentação de variação controlada, de modo que os alunos possam observar regularidades e diferenças, desenvolver expectativas, fazer comparações, serem surpreendidos, testarem, adaptar e confirmar as suas conjecturas dentro do exercício.
- Apresentar sequências de micro-modelação, baseadas em sequências de hipotéticas respostas à variação, que proporcionem transferências entre focagens na mudança, entre ligações e entre propriedades.

4.5 Transparência de um Exemplo a uma noção matemática

A noção de transparência está fortemente ligada à representação que se utiliza para um qualquer conceito. Em 1987, Lesh, Behr e Post (citados por Zazkis e Gadowsky, 2001) designaram os sistemas representativos como sendo, ou *Transparentes* ou *Opacos*. Uma representação *Transparente* é aquela que não tem nem mais nem menos significado que a ideia ou estrutura que representa. Uma representação *Opaca* enfatiza uns aspectos da ideia ou estrutura e atenua outros.
Tomando emprestada esta ideia, Rina Zazkis e Karen Gadowsky (2001) afirmam que todas as representações de números naturais são opacas, contudo cada uma delas tem aspectos transparentes. Para esclarecer esta afirmação são apresentadas várias representações do mesmo número 46656. Assim, 216^2 é transparente à ideia de que 46656 é um quadrado perfeito: 36^3 mostra que 46656 é um cubo perfeito; 3x15552 conclui que 466656 é múltiplo de 3 e de 15552; por último a representação 5x7x31x43+1 indica-nos que 466656 quando dividido por 5, 7, 31 ou 43 tem resto 1.
Para Zazkis e Gadowsky (2001), no caso dos números, asseguram que muitas das definições dos vários tipos de conjuntos se referem à sua representação. A representação de um número específico pode ser alargada a conjuntos de números que têm em comum uma mesma propriedade que se pode exprimir em termos algébricos. A decisão de se um número pertence ou não a um dado conjunto baseia-se se ele pode ou não ser representado na forma dada. Por exemplo, *"Um número racional é um número que pode ser representado na forma **a/b**, onde **a** e **b** são números inteiros e **b** é diferente de zero."* ou "*Um número par é um número que pode ser representado por **2k** em que **k** é*

um número inteiro" ou "*17k +3 é uma representação transparente de números que divididos por 17 apresentam resto igual a 3*" (Zazkis e Liljedahl, 2004).

A noção de representação transparente pode ser ainda mais ampliado. Zaslavsky e Lavie (2005) apontam aspectos transparentes de representações de funções, no caso de funções quadráticas representadas pelas suas equações. Considerem-se os seguintes exemplos de funções quadráticas (Zaslavsky e Lavie, 2005):

$$y=(x+1)(x-3) \qquad y=(x-1)^2-4 \qquad y=x^2-2x-3$$

Com algum cálculo elementar facilmente se deduz que são três equações da mesma função quadrática. Porém, cada uma delas é mais transparente a determinado aspecto e mais opaco a outros. Assim, a primeira equação é transparente às raízes da função, enquanto a segunda é transparente às coordenadas do vértice da parábola que a função define e, por fim, a terceira é transparente à intersecção da parábola com o eixo dos *yy*.
Mas a possibilidade de que esta transparência seja evidente para os alunos requer, por parte do professor, alguma orientação de forma que eles possam ler ou interpretar as expressões. Por isso, o papel que os exemplos jogam nessa orientação é preponderante. Será com os exemplos, ou com as sequências deles, que os alunos poderão aperceber-se do que varia e do que não varia, orientando a sua atenção para as generalizações que se pretende sejam alcançadas.

Como se vê a noção de *transparência* é bastante versátil na sua aplicabilidade. Zazkis e Gadowsky (2001) citam Mason para recordar que cada representação atrai a nossa atenção para diferentes propriedades do número. Pelo que se apontou atrás podemos afirmar que cada representação atrai a nossa atenção para diferentes propriedades do número, do conjunto de números ou do conceito matemático.
Aliás, a noção de transparência pode ir mais longe. Zodik e Zaslavsky (2004), numa investigação que envolvia a análise de aulas dadas por engenheiros de alta tecnologia com uma formação matemática muito sólida, mas sem qualquer formação pedagógica, concluíram que o ambiente de resolução de problemas proporcionado pelos engenheiros era bastante produtivo. A razão pela qual eles conseguiam que os seus alunos evoluíssem na resolução de problemas era de que conseguiam que ***o raciocínio utilizado era apresentado de forma transparente***. Isto é, as resoluções dos problemas próprias dos engenheiros/professores eram apresentadas aos alunos de forma que fossem visíveis os avanços e recuos, as barreiras de cada passo, os sucessos e os insucessos e não apenas uma resolução final e acabada.
Outro exemplo da presença de aspectos transparentes e opacos no raciocínio pode ser apreciado no estudo de Inglis e Simpson (2008). Os dois investigadores estudaram a forma como um grupo de estudantes de matemática avançada e outro de estudantes do ensino superior em artes obtêm inferências válidas através da utilização da regra da conversão. Para um determinado caso, a que chamam o *efeito da premissa afirmativa*, os autores apresentam dois exemplos equivalentes, apenas diferem por uma premissa ser afirmativa e a outra negativa, onde cabe a cada elemento dos dois grupos de estudantes validar ou não as duas conclusões:

Regra 1: Se a letra é H então o número é 1 Premissa 1: O número é 8 Conclusão 1: A letra não é H	Regra 2: Se a letra é H então o número é 1 Premissa 2: O número não é 1 Conclusão 2: A letra não é H

Relativamente à representação da regra de conversão $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, a representação “8” é opaca relativamente ao conceito “não q”, em contraste a representação “não é 1” é uma representação transparente ao conceito “não q”. Os resultados obtidos indicam que os estudantes de matemática não sentiram dificuldade em validar a conclusão 2 e os estudantes de artes apresentaram bastantes dificuldades em a validar. O que mostra que a opacidade da representação “8” relativamente ao conceito “não q” só não afectou os estudantes de matemática avançada.

Apenas no âmbito da educação matemática, e particularmente no que respeita à apresentação de exemplos, o conceito de transparência aparece em outros trabalhos.
Para Bills e colegas (2006) os atributos que tornam um exemplo útil devem incluir a *transparência* e a *generalisabilidade*. Isto é,

- Transparência: conseguir de forma relativamente fácil que a atenção da audiência seja direccionada para as características que tornam o exemplo exemplar.
- Generalisabilidade: é o âmbito de generalização proporcionado pelo exemplo ou sequência de exemplos, em termos do que é necessário para ser um exemplo e que é arbitrário e modificável.

Obviamente, o quanto um exemplo é transparente ou útil é subjectivo. Por conseguinte, cabe ao professor apresentar oportunidades de aprendizagem que envolvam uma grande variedade de exemplos úteis direccionados às necessidades e características dos alunos.
Seguindo Bills e colegas (2006), o professor pode escolher apenas uma das representações $y=(x+1)(x-3)$, $y=(x-1)^2-4$, $y=x^2-2x-3$, para trabalhar com os seus alunos, mas pode usar as três representações para mostrar que, com algumas operações algébricas, umas levam às outras e, desta forma, tratar a noção de equivalência entre expressões diferentes.

O trabalho de Zazkis e Gadowsky (2001) estuda a forma como as características transparentes e opacas influenciam a compreensão dos números naturais por parte dos alunos. Os aspectos transparentes das várias representações dos números naturais nem sempre ajudam na compreensão das várias propriedades dos números, o estudo mostra que algumas das transparências das representações de números naturais podem transformar-se em verdadeiras armadilhas à boa aprendizagem.
Noutra investigação, Rina Zazkis e Natasa Sirotic (2004), discute-se como estudantes para professores compreendem a noção de número irracional tendo em conta como as diferentes representações influenciavam as suas respostas. Neste estudo também a perspectiva teórica usada distinguia aspectos transparentes e aspectos opacos das várias representações destes números e, nos resultados, pôde-se apreciar como os estudantes para professores não confiavam na transparência das representações dos irracionais que lhes foram apresentadas. O interessante deste estudo é que os estudantes se apoiavam mais na calculadora e na representação decimal do que na forma *a/b* para decidir sobre a racionalidade ou irracionalidade de um número, o que levou as duas investigadoras a concluir que os estudantes para professores ou não reconheciam os aspectos transparentes de uma dada representação do número ou não os tinham em consideração.

Para contrariar esta tendência, Zazkis e Liljedahl (2004) propõem que estes estudantes para professores se envolvam em tarefas com grandes números. Por grandes números devem entender-se todos aqueles números que não podem ser trabalhados com competências no cálculo nem com a máquina de calcular. Considerando que *não existe uma representação transparente para os números primos*, uma tarefa com um grande número seria, por exemplo, pedir aos estudantes que determinassem se 151^{157} é um número primo. Neste trabalho (Zazkis e Liljedahl, 2004) afirmam que as dificuldades sentidas por estudantes para professores em trabalhar com números primos assentam na referida ausência de representações transparentes para os números primos.

Com base na pergunta "*O que têm em comum os números irracionais e os números primos?*" Rina Zazkis (2005) desenvolve um estudo sobre como as representações opacas criam obstáculos à compreensão dos números irracionais e dos números primos por estudantes para professores.

A resposta à pergunta assenta na analogia existente entre os dois tipos de números, no sentido de que ambos não possuem representações transparentes; os números irracionais não podem ser expressos por um quociente e os primos não podem ser representados por um produto.

A verdade é que Zazkis (2005) apresenta uma representação de número irracional que é transparente à sua irracionalidade. O exemplo desta situação que ela apresenta é uma representação decimal em que a dízima não é repetitiva: 0,01001000100001000001…. Contudo não existe uma representação transparente *finita* de um número irracional. Note-se que para o caso de um número primo não existe *qualquer* representação transparente à sua condição de número primo, seja finita ou infinita. Zazkis (2005) chama a atenção de que quando nos queremos referir a um número primo o representamos por *p*, e esta representação é *opaca* em todos os sentidos. Isto é, não existe representação transparente para a primalidade como existe para a paridade, *2n*; para a imparidade, *2n+1*; ou para a racionalidade *a/b*.

Neste artigo (Zazkis, 2005) pode-se observar como a transparência pode ser usada como ferramenta de ensino. Utilizando a notação *a/b* pode-se explicar facilmente a razão pela qual a multiplicação e a adição são operações fechadas no conjunto dos números racionais. Operando racionais utilizando esta representação, pela multiplicação e pela adição, ainda se obtêm produtos e somas representadas na mesma forma *a/b*. A partir de aqui, a autora chama a atenção para os perigos descritos para os racionais, pois eles podem-se repetir quando se passa para os irracionais e para os primos. Os exemplos apresentados para justificar e generalizar operações fechadas com os racionais podem conduzir a generalizações erróneas quando se trabalha com outros números. Muitos alunos pensam que o produto de dois irracionais também é um número irracional e que o produto de dois primos ainda é um número primo. Isto é justificado pelo facto de, precisamente, não existirem representações transparentes (finitas no caso dos irracionais) onde se possam manter as características de irracionalidade ou de primalidade. A existência de representações transparentes para uma característica determinada é que ajuda os alunos a abstrair e a generalizar essa característica (Zazkis, 2005).

Em termos de ensino dos números irracionais e primos, Zazkis (2005) assume que a ausência de representações transparentes aumenta a importância dos exemplos apresentados aos alunos para a construção de conceitos relacionados com os números primos e irracionais e, para além disso, acredita que aumentando a variedade de exemplos apresentados aos alunos pode ajudá-los nas suas construções mentais.

Considerando o que foi dito, reveste-se de uma importância crucial que os professores tenham em muita atenção as estruturas de representações de conceitos que utilizam, de forma que os alunos possam ver nas representações que se lhes apresentam aquilo que os seus professores vêem e que constatem aquilo que é transparente. Para isso fica a sugestão de Rina Zazkis (2005), podemos começar por pedir aos alunos para *olharem* e, depois, para *olharem outra vez* (o itálico é nosso). Esta insistência na forma de olhar, para que o aluno veja aquilo que o professor pretende que seja visto, já é referida por Mason e Pimm (1984) quando apresentam a ideia de *exemplo genérico* (cf. 4.7.3) – um exemplo específico que transmite um caso geral – e constatam que por vezes os alunos não vêem no exemplo aquilo que o professor pretende que eles vejam.
Orit Zaslavsky reformula o *exemplo genérico* de Mason e Pimm (1984) por um exemplo *transparente* a um caso geral. Neste trabalho (Zaslavsky, 2005), são discriminadas muitas outras situações referidas à transparência: *contra-exemplos transparentes* que além de rejeitarem uma afirmação *transmitem* a razão porque refutam a afirmação; *raciocínios transparentes na resolução de problemas*, que já se referiram atrás; *algoritmos transparentes*, tal como o algoritmo longo da divisão que é transparente à periodicidade; *definições transparentes*, em que o definido é descrito pelo seu todo e não pelas propriedades de algumas das suas partes; *aspectos transparentes*, relacionados com os mais variados objectos e conceitos matemáticos.

O uso da noção de transparência pode ser combinado com outras noções ligadas à exemplificação. Figueiredo, Contreras e Blanco (2009) combinaram os conceitos de transparência e de variação e aplicaram-nos às questões de escolha múltipla, criando assim um exemplo muito particular que designaram como *exemplo transparente multivariado*. Este conceito é simples de descrever, a questão de escolha múltipla proporciona nas várias hipóteses de resposta (os distractores) a possibilidade de utilizar em cada uma delas uma dimensão de variação possível do conceito que se apresenta no início da questão (o tronco). Cada distractor explora uma dimensão e, também, a respectiva amplitude de mudança permitida, estando todas as dimensões relacionadas com a representação transparente ao conceito que se apresentou no tronco. Além das noções de transparência e de variação, este tipo de questões de escolha múltipla também pode incluir casos de não-exemplo e de contra-exemplo que, normalmente, determina a rejeição de um distractor que se apresenta credível.
Embora as questões de escolha múltipla sejam usualmente apresentadas aos alunos em situação de teste ou exame, os autores sugerem que o *exemplo transparente multivariado* seja usado em situação de ensino como forma de adquirir e aprofundar os conceitos matemáticos e, ainda, delimitá-los através de não-exemplos, explorar as dimensões de variação e ampliar os espaços de exemplos dos alunos.

Em suma, no ensino e aprendizagem das ideias matemáticas, objectos matemáticos, processos matemáticos devemos ter presente que "*Capitalizar as potencialidades de uma dada representação é uma componente importante para a compreensão das ideias matemáticas*" (Lesh, Behr e Post citados por Zazkis e Gadowsky, 2001). Na actividade do professor, a transparência de determinadas representações a certos aspectos dos conceitos deve ser algo a ter em boa conta. Para Zazkis e Gadowsky (2001) uma escolha cuidadosa de actividades pedagógicas podem ajudar os alunos a identificar aspectos transparentes das representações dos números. Como vimos, a transparência e a opacidade das representações pode ser facilmente transportada dos números para o conceito de função.

4.6 Escolha de Exemplos pelo professor

Usar exemplos para ensinar os nossos alunos é algo que fazemos quotidianamente sem que isso se revista de uma complexidade notável. O uso de exemplos está tão incutido nos actuais padrões do ensino da matemática que aquilo que se possa escrever sobre a importância do uso de exemplos pode parecer banal. Contudo, na mesma medida que fazer uso de exemplos possa ser trivial e vulgar, escolher exemplos e sequências de exemplos adequados aos nossos propósitos já é uma tarefa que pode envolver alguma problemática (Asghari, 2007). Assim sendo, o uso de exemplos nas aulas de matemática é essencial embora seja uma área complexa. Envolve a escolha cuidadosa de exemplos muito específicos que facilitem a orientação da atenção dos alunos de modo apropriado, bem como para explicar e induzir generalizações (Bills *et al.,* 2006). Ball e colegas (2005) consideram que um importante aspecto do conhecimento profissional do professor envolve a escolha de exemplos. Estes investigadores, no âmbito do ensino da matemática no ensino primário, debruçaram-se sobre o papel e a importância estratégica dos algarismos que são incluídos nos exemplos de diferença entre dois números no que respeita ao conhecimento do professor sobre os temas e tópicos que ensina.

A investigação sobre a escolha de exemplos por parte do professor é deveras escassa (Bills *et al.,* 2006). Todavia, a dificuldade que possa haver em encontrar bibliografia sobre o assunto não lhe retira importância e o professor comum sabe que a escolha dos exemplos que faz no dia-a-dia não é aleatória, antes, assenta em critérios pessoais. Embora possa parecer que numa dada classe não há um exemplo que seja mais adequado que outro, a nossa experiência diz-nos o contrário: há exemplos que, em dadas circunstâncias, funcionam melhor que outros, i.e. existem exemplos bons e exemplos maus (Lakoff, 1987). As decisões que os professores tomam na escolha de *particulares para ilustrar o que é geral* são aspectos importantes da sua função pedagógica, ao usarem os exemplos para ilustrarem procedimentos e para exemplificarem conceitos (Bills e Bills, 2005), bem como para mostrar como se aplicam teoremas, princípios e técnicas e para auxiliar os alunos a consolidar a sua compreensão da matemática

A escolha de exemplos pode ser guiada pelo sentido atribuído pelo professor ao papel que o exemplo desempenha no desenvolvimento do conceito; as escolhas serão provavelmente diferentes se o exemplo é visto como um elemento de um conjunto de exemplos destinados à abstracção do conceito, ou como um exemplo paradigmático que contém a essência do conceito. Mas essa escolha também poderá ser influenciada pela própria compreensão que o professor tem do conceito (Bills e Bills, 2005). Em particular, as escolhas de sequências de exemplos que integram o uso de não-exemplos para estabelecer o alcance e limites do conceito reflectem, provavelmente, que o professor está familiarizado e compreende as *dimensões de variação* do conceito (Marton e Boot, 1997) e, no que respeita ao conhecimento do professor, a escolha de exemplos está intimamente ligada à forma como se dão evidências do conhecimento do conteúdo no ensino da matemática (Rowland *et al.,* 2003c).

A escolha de exemplos é diferenciada segundo a experiência dos professores. Seleccionar exemplos apropriados é uma tarefa exigente para o professor e, nesse processo de selecção, o conhecimento do conteúdo bem como o conhecimento didáctico do conteúdo são factores determinantes (Muir, 2007). A deficiente escolha de exemplos por professores inexperientes é bem documentada por Rowland *et al.* (2003a; 2003b; 2003c; 2005) e Rowland (2008) quando estudam as evidências sobre o conhecimento do conteúdo apresentadas por estudantes para professores acerca de tópicos do ensino primário. Já referido anteriormente (cf. 4.2.2), Rowland, Thwaites e Huckstep (2003a) identificam três tipos de escolhas deficientes de exemplos de estudantes para professores: escolhas de casos que *obscurecem o papel das variáveis* (por exemplo, num sistema de coordenadas cartesianas escolher um ponto com as mesmas coordenadas); escolha de números para ilustrar um determinado procedimento aritmético quando *outro procedimento que seria mais sensato* de utilizar para os números seleccionados (por exemplo, usar 49x4 para ilustrar uma multiplicação convencional); e exemplos *gerados ao acaso* quando escolhas cuidadosas de exemplos se impunham.

Num âmbito totalmente diferente, Karem Karağaç (2005) estudou a escolha de exemplos de professores experientes de duas escolas turcas contextualizando esta escolha em termos sociais, pois uma das escolas era uma escola pública e a outra era uma escola privada.
Muitos alunos de idades compreendidas entre os 17 e os 18 anos aprendem matemática em dois tipos de escolas, frequentam a escola pública durante a semana e aos fins-de-semana frequentam escolas privadas. A razão de frequentarem escolas no fim-de-semana está ligada à vontade de esses alunos pretenderem entrar para a universidade e, para isso, devem submeterem-se a um exame nacional. Ora, o seu objectivo na frequência das escolas privadas é prepararem-se para o exame, já que o ensino que se ministra nestas escolas está vocacionado para uma preparação específica para este exame.
Nesta investigação de Karağaç (2005) chegou-se à conclusão de que as escolhas dos exemplos dos professores das duas instituições é bastante diferente. Para poder explicar a diferença na escolha dos exemplos o investigador definiu dois tipos de exemplos, os *Exemplos Passivos* e os *Exemplos Activos* (cf. 4.7.7). De uma forma geral, os exemplos passivos são aqueles que exemplificam o conceito ou o procedimento previamente apresentado; os exemplos activos são aqueles em que se pede aos alunos que ajam, que resolvam uma situação apresentada pelo professor e que está dependente de conhecimentos prévios, visando introduzir um novo conceito ou procedimento. Os exemplos activos *apresentam* os conceitos e os exemplos passivos ajudam na sua abstracção.
Na escolha dos exemplos, e também no seu uso, a diferença entre os professores das duas escolas é bem visível nos aspectos que privilegiam e nos objectivos perseguidos pela prática com os alunos. Assim, as escolas públicas o aspecto que privilegiam são *valores epistemológicos* e o objectivo do estudo é *saber que*; por outro lado, o aspecto privilegiado pela escola privada são os *valores pragmáticos* e o objectivo que

perseguem é o *saber como*. Estas diferenças são explicadas pelos esquemas de exemplificação apresentados por cada tipo de escola:

Escola pública: *Informação Teórica → Exemplos Passivos → Exemplos Activos*
Escola privada: *Exemplos Activos → Exemplos Passivos → Informação Teórica*

Os professores das escolas públicas usam alguns exemplos passivos que ajudam os alunos a *compreender* o conceito ou o procedimento, só depois aplicam aquilo que os alunos aprenderam com os exemplos activos. Os professores das escolas privadas pretendem que os alunos adquiram as matérias que eles ensinam e que os alunos *façam* matemática, primeiro apresentam os exemplos activos e só depois são enquadrados no conceito ou procedimento em questão.

Um outro estudo sobre escolha de exemplos é aquele que Chris Bills e Liz Bills (2005) fizeram quando compararam a escolha de exemplos que foi feita por estudantes para professores e as escolhas de exemplos dos seus professores tutores. No fundo, este estudo compara as escolhas de exemplos entre doze professores experientes e catorze professores inexperientes.

Toda a informação foi recolhida pela observação da tarefa que os investigadores propuseram: escolher exemplos com o objectivo de introduzir aos alunos um conteúdo novo. A tarefa proposta consistiu em gerar de *exemplos genéricos* (aqueles que sendo particulares devem ilustrar o geral) pelos professores, no caso particular, escolher um primeiro exemplo para introduzir um determinado conceito. Cada elemento dos grupos escreveu ou desenhou o seu exemplo e, posteriormente, todos os exemplos foram analisados em grande grupo. Os conteúdos sobre os quais os participantes exemplificaram foram a Área de um Triângulo, a Adição de Fracções e Resolução de Equações Lineares.

Os resultados a que chegaram os investigadores foi que os professores mais experientes não apresentaram nenhum exemplo que pudesse ser classificado de Exemplo Genérico, de Exemplo Paradigmático ou que fosse um exemplo particular que de alguma forma representasse a generalidade, como tinha sido proposto no início da actividade. O que se verificou foi que os professores experientes aconselharam os estudantes para professores a não complicar, o lema foi: "Keeping things simple", isto é, manter as coisas simples. O intuito final destes professores foi utilizar exemplos muito simples de forma a construir um raciocínio a respeito do argumento e evitar situações de confusão que, dada a sua experiência, podem predizer; a escolha dos exemplos não foi direccionada para a abstracção ou para a construção da imagem do conceito.

Em conclusão, a mensagem que os professores tutores, os mais experientes, transmitiram aos estudantes e aos investigadores pode ser traduzida da seguinte forma: usar exemplos simples de modo a proporcionar aos alunos um processo directo e sem rodeios que possam ser por eles seguidos sem causar problemas. Os exemplos escolhidos pelos estudantes para professores, os menos experientes, podem não preparar os alunos para trabalhar com amplitudes de mudança que irão encontrar em situações posteriores. As finalidades mais complexas por detrás das escolhas de exemplos dos professores mais experientes, tais como a abstracção e a generalização, diluem-se com facilidade na indicação que dão aos estudantes para professores em "manter o assunto simples".

Numa investigação, também sobre a escolha de exemplos de professores, Tracey Muir (2007) foca duas questões em particular:

- Qual é a natureza dos exemplos escolhidos pelos professores?
- Até que ponto os exemplos apresentados são úteis à estruturação da compreensão dos alunos?

Para isso, foram gravadas as aulas de um conjunto de professores e observada a escolha de exemplos de cada professor. A efectividade de cada um dos exemplos foi analisada à luz da sua *transparência* e *utilidade* (Bills *et al.* 2006) e a perspectiva teórica incluiu o *construtivismo,* o *conhecimento do professor* e a *escolha de exemplos*. Os tópicos incluídos no estudo foram resolução de problemas, cálculo de percentagens, uso de dinheiro e decimais.
Os resultados do estudo prendem-se, fundamentalmente, com a relação entre o conhecimento do professor e a efectividade do exemplo escolhido, mas realça que professores com um sólido conhecimento do conteúdo e do conhecimento didáctico do conteúdo podem fazer escolhas de exemplos que **não** conduzem os alunos a uma estruturação rigorosa da ideia matemática. Isto é, os professores devem considerar cuidadosamente os exemplos que escolhem para evitarem a possibilidade de que os alunos formem concepções alternativas sobre os conceitos matemáticos.

Sobre exemplos visuais em geometria, Iris Zodik e Orit Zaslavsky (2007a) levaram a cabo um estudo em que o objectivo era caracterizar a escolha e uso destes exemplos de um grupo de professores nas suas aulas de matemática. O estudo foi elaborado sobre cinquenta e quatro aulas gravadas dadas por cinco professores e pode descrever a prática deste professores de uma forma bastante rigorosa no que respeita à escolha e uso dos exemplos visuais em geometria.
Os resultados encontrados apontam para a complexidade das considerações e dilemas que subjazem à escolha de exemplos em geometria. Estes resultados revelam algumas conexões entre a escolha dos exemplos e a compreensão dos alunos relativamente ao conteúdo em questão. Estas três ligações podem ser traduzidas pelas três perguntas

- Os esquemas gráficos devem ser ou não rigorosos e precisos?
- Os esquemas gráficos devem ocultar aquilo que deve ser provado?
- Os esquemas gráficos enganosos devem ser evitados?

As conclusões a que as duas investigadoras chegam são de que os problemas geométricos podem ser apresentados aos alunos acompanhados ou não de esquemas gráficos. O estudo aponta para o facto de os professores fazerem considerações muito complexas na escolha do diagrama apropriado que deve acompanhar o problema. Algumas escolhas levam ao uso de diagramas que se revelam úteis ao aluno, no sentido de reduzirem consideravelmente a exigência cognitiva. No entanto, pode acontecer que o efeito seja o contrário e o diagrama aumente o nível de dificuldade. No final, concluem que a escolha dos exemplos visuais em geometria assenta nas especificidades do problema e não nas particularidades do exemplo visual a ser utilizado; algumas escolhas de exemplos visuais são feitas antes da apresentação do problema enquanto outras são espontâneas e respondem às interacções com os alunos.
Qualquer que seja a escolha do professor existe sempre o perigo de transmitir alguma mensagem contraditória aos alunos: por um lado, os esquemas visuais são apresentados com o objectivo de transmitir informação útil à resolução do problema; por outro lado,

os alunos são ensinados a ignorar alguns pormenores e a não confiar em tudo o que vêem nos esquemas gráficos.
Como se pode constatar é difícil estipular onde está o ponto de equilíbrio. São estas as razões que, no entender de Zodik e Zaslavsky (2007a), a escolha de exemplos é um aspecto muito importante no conhecimento do professor e deve figurar nos programas da formação de professores. Aumentar a consciência dos professores sobre a variedade de escolhas possível e as suas implicações nas aprendizagens dos alunos é uma questão fundamental.

No âmbito da análise e caracterização da escolha de exemplos pelo professor, Zodik e Zaslavsky (2007b) focaram a sua atenção em duas das dimensões da escolha de exemplos pelo professor e relataram a forma como as duas dimensões se manifestam na sala de aula quando o professor exerce a sua actividade. Estas duas vertentes da prática do professor, na sua necessidade de escolher exemplos, referem-se (1) à análise da natureza dos exemplos pré-planeados e dos exemplos construídos espontaneamente e (2) à identificação de três situações principais que envolvem a construção de exemplos espontâneos. Relativamente ao conhecimento do professor, as autoras evidenciam a relação que existe entre o conhecimento de base do professor que lhe permite construir ou escolher bons exemplos de ensino e o conhecimento que o professor reflecte através do uso que faz dos exemplos. Além disso, afirmam que o tratamento dos exemplos assenta de forma acentuada em três tipos de conhecimento: o conhecimento do conteúdo matemático, o conhecimento didáctico do conteúdo relacionado com a exemplificação e o conhecimento da epistemologia do estudante. Lembrando que muito do conhecimento do professor se adquire com a prática, as autoras deste estudo marcaram como objectivos

- conhecer alguns aspectos específicos do conhecimento do professor que possa ser usado como base de um projecto profissional de desenvolvimento de actividades que facilite a construção sistemática de conhecimento
- caracterizar a escolha e uso dos exemplos na aula de matemática (objectivo principal)

As autoras observaram aleatoriamente as aulas de cinco professores experientes e escolheram cuidadosamente aquelas observações onde os melhores casos estavam incluídos. Entenda-se por "melhores casos" as situações da aula que os professores consideraram ilustrativos de uma particular boa maneira de usar os exemplos. Destas observações foram determinadas várias categorias mas, como referimos antes, Zodik e Zaslavsky (2007b) apenas referem duas: 1. O grau de planeamento antecipado do exemplo e 2. O tipo de entidade matemática que o exemplo pretende ilustrar.
Os resultados encontrados em cada uma das categorias podem ser sintetizados consoante essas duas categorias.

1. Grau de planeamento dos exemplos do professor:

Os exemplos que os professores apresentam aos seus alunos podem ser **pré-planeados** antecipadamente ou podem ter que ser construídos durante a prática, num impulso **espontâneo**, como resposta a algum tipo de exigência. Evidentemente a exemplificação não varia apenas entre estes dois tipos, pode acontecer que um exemplo que tenha sido planeado antecipadamente necessite ser **modificado** de forma a responder a uma situação da aula que o requeira. A forma como os professores resolvem a necessidade de construir ou modificar no momento um exemplo é particularmente interessante, pois indica a associação imediata que eles têm relativamente ao corpo de conhecimento que é relevante no que concerne aos exemplos. Este artigo realça que os exemplos apresentados de forma espontânea proporcionam uma compreensão dos processos subjacentes aos processos de os gerar, enquanto os exemplos pré-planeados funcionam mais como produtos finais do pensamento do professor.

2. O que é exemplificado:

As constatações que Zodik e Zaslavsky (2007b) apontam para três entidades matemáticas principais a que os professores atendem ao longo do seu tratamento dos exemplos. A prática mais comum tem que ver com os exemplos repetitivos de como executar vários **procedimentos**, por exemplo, resolver equações lineares ou de 2º grau. Estes alegados exemplos são na realidade exercícios práticos, sendo muito raramente referidos por professores e livros de texto como sendo verdadeiros exemplos. A forma identificada de usar os exemplos que consideraram mais interessante foi no contexto de aprendizagem de **conceitos**, onde alguns professores estavam conscientes da necessidade de apresentarem não apenas os exemplos mas também alguns não-exemplos do conceito apresentado. Como complemento aos conceitos, os professores têm que lidar muitas vezes com **teoremas**, sobretudo em aulas de geometria. Neste plano, é necessário apresentar exemplos que verificam as condições do teorema, para se poder inferir a sua conclusão. Porém, frequentemente, é necessário que o professor apresente contra-exemplos de forma espontânea quando os alunos apresentam conjecturas falsas. Esta capacidade de apresentar contra-exemplos espontaneamente requer do professor um conhecimento do conteúdo muito sólido. Em todas as aulas que foram observadas as autoras salientam o facto de que todos os contra-exemplos foram apresentados espontaneamente e nunca surgiu um contra-exemplo que tivesse sido planeado e deliberadamente introduzido na lição.

Como conclusão, Zodik e Zaslavsky (2007b) consideram importante que tanto na formação inicial de professores como na formação permanente se introduza oportunidades de aprendizagem de forma a proporcionar conhecimentos práticos e teóricos sobre o uso de exemplos de ensino. Os professores devem viver experiências que os obriguem a exemplificar de forma espontânea e, posteriormente, reflectir sobre elas, como meio de aprofundar a sua compreensão da matemática e de ampliar os seus espaços de exemplos.

A escolha de exemplos em estudantes para professores, no que se refere às implicações que essas escolhas têm na aprendizagem dos alunos, também foi alvo de estudo (Rowland, Thwaites e Huckstep, 2003a, 2003b, 2005; Rowland, Huckstep e Thwaites, 2003c, 2003d; Rowland 2008). Os resultados dos estudos efectuados salientam, confirmando as informações contidas na bibliografia, a importância do papel que os exemplos desempenham a todos os níveis da didáctica da matemática e como os exemplos são tão frequentemente apresentados aos alunos do ensino elementar. No que respeita aos professores inexperientes, as evidências das investigações apontam para a necessidade de orientação e ajuda específicas destes professores quanto à apreciação dos diferentes papeis que os exemplos desempenham no ensino e aprendizagem da Matemática, pois existem diversos tipos de *armadilhas* em que estes professores podem *cair* quando escolhem ou criam os exemplos a apresentar aos seus alunos. Contudo, estes estudos clarificam e refinam o papel da escolha e uso dos exemplos no âmbito do

ensino da matemática no que se refere às práticas lectivas dos professores inexperientes (Rowland 2008).
Relativamente à escolha de exemplos, enquanto os estudos anteriores preconizavam somente o cuidado que se deveria contemplar no momento da escolha dos exemplos, com os últimos estudos efectuados por Rowland (2008) podem agora ser melhor analisadas as escolhas de exemplos no ensino da matemática à luz da identificação de elementos de uma categorização específica. Esta categorização é composta por quatro categorias principais: *Fundação*, *Transformação*, *Conexão* e *Contingência*. Os aspectos da escolha de exemplos pelo professor são observados segundo quatro factores presentes em cada uma das categorias e que servem para matizar as observações e a respectiva inclusão nas categorias, as *variáveis*, a *sequenciação*, as *representações* e os *objectivos de aprendizagem*.
A categorização é denominada como "O Quarteto do Conhecimento" (Rowland, Huckstep e Thwaites, 2003d) e é apresentada, sucintamente, da seguinte forma:

- ***Fundação***. A primeira categoria consiste nos conhecimentos, crenças e concepções adquiridas na sua escolaridade e na sua preparação (intencional, ou não) para a sua actuação na sala de aula. Estes conhecimentos e crenças condicionam as escolhas pedagógicas e estratégias de forma primordial. Os elementos chave deste suporte teórico são: conhecimento e compreensão da matemática *per se* e conhecimento de excertos significativos da literatura e do pensamento que tenha resultado de uma procura sistemática sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. Os componentes sobre crenças vinculam-se com as convicções próprias e os valores adquiridos pelos estudantes para professores. Estas crenças referem-se, tipicamente, às diferentes correntes filosóficas em relação à natureza do conhecimento matemático, os objectivos da educação matemática, e as condições sob as quais os alunos aprendem melhor a matemática.
- ***Transformação***. A segunda categoria inclui o conhecimento-em-acção demonstrada tanto na planificação das actividades lectivas como na própria prática docente. No âmago desta categoria está na observação de Shulman de que o conhecimento base para o ensino é distinguido por "… a capacidade do professor para transformar o conhecimento do conteúdo que possui para formas pedagogicamente eficazes." (1987, p. 15). Tal como Shulman indica, a apresentação das ideias aos alunos implica a re-apresentação na forma de analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações, por parte dos alunos (Shulman, 1986, p. 9). Esta categoria distingue comportamentos que são orientados para o aluno (ou grupo de alunos) após deliberação e juízo. De particular importância é a escolha e uso dos exemplos apresentados aos alunos por parte dos estudantes para professores, para promover formação dos conceitos, a aquisição da linguagem e para demonstrar procedimentos aos alunos.
- ***Conexão***. Esta categoria une as decisões que são tomadas e as escolhas que são feitas relativamente às matérias mais ou menos distintas dos conteúdos matemáticos. Refere-se à *coerência* da planificação ou do ensino apresentado ao longo de um episódio, aula ou sequência de aulas. A concepção de coerência inclui a *sequenciação* de tópicos lectivos dentro e entre aulas, incluindo a ordenação de tarefas e exercícios que reflectem as decisões e escolhas que

envolvem tanto o conhecimento de das ligações estruturais no seio da Matemática, como a consciência das relativas exigências cognitivas dos diferentes tópicos e tarefas.

- ***Contingência***. A categoria final refere-se aos acontecimentos dentro da sala de aula que não são possíveis de prever ou de planear. É a habilidade que, em linguagem corrente, se costuma designar como "jogo de cintura". Em particular, a brevidade em *responder às intervenções dos alunos* e a consequente preparação, se apropriada, para *inflectir da planificação* que se preparou para aquela aula.

Os estudos destes investigadores (Rowland, Huckstep e Thwaites, 2003d) sugerem que *o quarteto* é uma ferramenta para análise das formas como o conhecimento do conteúdo é posto em prática pelos professores.

Como se pode constatar pelo exposto, quando correcta, a escolha e apresentação de exemplos por parte do professor é uma tarefa intrinsecamente exigente. Escolher e apresentar exemplos, independentemente do objectivo, pode ser dificultada por diversos factores. Alguns destes factores foram identificados por Zaslavsky e Peled (1996) quando propuseram a um grupo de 67 professores e de 36 estudantes para professores que apresentassem um contra-exemplo à afirmação falsa "Qualquer operação (binária) que é comutativa também é associativa". É óbvio que um contra-exemplo desta afirmação terá que ser um exemplo de uma operação binária que sendo comutativa não seja associativa. Através dos exemplos que todos os participantes apresentaram (ou não) as duas investigadoras puderam analisar alguns factores que consideraram inibidores no processo de geração de exemplos. Os resultados obtidos consolidam a impressão de que a imagem do conceito de operação binária detida pelos professores e estudantes para professores é, de alguma forma, incipiente. Existiu uma percentagem muito grande de participantes que não conseguiram encontrar uma operação comutativa e não associativa; isto não deve ser visto como uma surpresa dado que após uma primeira apresentação de operações mais avançadas, a compreensão dirigida à integração num só conceito bem compreendido é deixado, usualmente, a cargo do indivíduo. Tirosh, Hadass e Movshovitz-Hadar (1991, citado por Zaslavsky e Peled, 1996) afirmam que a experiência extensiva com casos especiais, que temos durante os anos do ensino básico, é a responsável pelas crenças de que as operações binárias ou são comutativas e também associativas ou, então, são não comutativas e também não associativas. Esta tarefa, tal como outras em que se exija a construção de exemplos, pode ser considerada a resolução de um problema, já que para o superar diferentes indivíduos empregam diferentes estratégias, optando por considerar conjuntos de números especiais ou usando combinações de duas operações simples. Quanto aos factores que possam inibir a criação de exemplos, as investigadoras destacam as experiências prévias onde algum trabalho de consolidação de aprendizagens básicas foi descurado. Relativamente às aprendizagens básicas, se adultos que já completaram ciclos avançados em matemática sentem estas dificuldades, então é de supor que as crianças que estejam neste momento a frequentar os ciclos básicos ainda sintam mais dificuldades. Efectivamente os primeiros ciclos de ensino não facultaram a integração de peças dispersas de conhecimento num único conceito completo. A lição a retirar deste factor inibidor da produção de exemplos é que a integração dos conhecimentos relativos a um conceito deve ser feita explicitamente pelos professores e não deve ser deixada inteiramente ao cuidado do indivíduo. Uma conclusão final deste estudo é de que no decurso da profissão os professores no activo puderam desenvolver concepções mais profundas da noção de operação binária e das propriedades comutativa e associativa que se relacionam com esta operação. O acto de ensinar, uma tarefa em que constantemente se requer a apresentação de exemplos, alguns criados no momento de forma não esperada, parece ter afectado a vontade de todos os professores em correr riscos e a sua fluência na produção de exemplos (Zaslavsky e Peled, 1996).

4.7 Os vários tipos de Exemplos presentes na bibliografia específica

Na bibliografia dedicada à investigação do ensino da matemática aparecem inúmeras referências ao uso de exemplos, à exemplificação e aos tipos de exemplos que os professores, no seu trabalho diário, utilizam para ensinar matemática aos seus alunos.

4.7.1 O Sistema de Categorias de Rissland-Michener

Um dos primeiros trabalhos, que não é dedicado exclusivamente à exemplificação, onde se pode encontrar uma classificação de exemplos quanto ao uso e função é um trabalho de Edwina Rissland-Michener (1978). Nele é dada uma *visão* sobre o que é saber e compreender matemática: "Quando um matemático diz que compreende uma teoria é porque possui mais que o conhecimento de teoremas e demonstrações, ele conhece heurísticas, exemplos e, sobretudo, como estão relacionados."

Esta v*isão* do entendimento da matemática envolve três categorias para os objectos matemáticos, são elas: os *resultados*, os *conceitos* e os *exemplos*.

Neste enquadramento teórico evidenciaremos, logicamente, o papel dos exemplos dentro desta visão da compreensão da matemática. Rissland entende que os exemplos podem ser relacionados de forma construtiva, isto é, o exemplo A é utilizado para construir o exemplo B. Esta afirmação, por si, deixa antever uma relação de ordem, que existem exemplos anteriores a outros, exemplos que podem ser utilizados como pré-requisitos de outros mas que, por sua vez, necessitam de uns anteriores para poderem ser construídos. Esta relação de ordem também é referida para os conceitos, aliás todo o trabalho assenta nesta forma de entendimento, nas palavras de Rissland "predecessores" e "antecessores", de A passamos a B. Em que A e B podem ser resultados, conceitos ou exemplos.

Dentro da categoria dos Exemplos Rissland distingue quatro classes epistemológicas.

Exemplos Iniciais: na primeira abordagem de uma qualquer teoria existem exemplos que sobressaem fácil e imediatamente, são estes que nos permitem iniciar o estudo de um novo tema e que se utilizam para as primeiras definições e resultados dando, assim, ocasião a que surjam as primeiras intuições úteis.

Exemplos de Referência: são aqueles exemplos aos quais nos referimos repetidamente. São básicos e largamente aplicáveis e proporcionam um marco de referência a partir do qual muitos resultados e conceitos estão ligados uns aos outros. Usam-se também para verificar a compreensão de conceitos, resultados ou processos.

Exemplos Modelo: são exemplos paradigmáticos e genéricos. Eles sugerem e sistematizam expectativas e assumpções automáticas sobre resultados e conceitos. São os exemplos que nos indicam casos gerais. Dada a sua natureza genérica os Exemplos Modelo estão frequente e intimamente ligados aos argumentos *sem perda de generalidade.*

Contra-exemplos: estes exemplos são familiares a todos por se utilizarem para demonstrar que um determinado argumento é falso. Utilizam-se para revelar melhor as diferenças entre conceitos.
Na conclusão, mais uma vez, a presença da exemplificação é constatada. Quando se apontam os ingredientes fundamentais para a compreensão do conhecimento matemático vem, no segundo item, Estratégia geral ou controlo do conhecimento: saber como restringir a situação sob consideração para o caso particular de um exemplo, eventualmente um exemplo de referência; em particular, restringir a situação em consideração a um exemplo de reconhecida generalidade, tal como um exemplo modelo, analisando a forma como as coisas funcionam, para depois poder retroceder; saber como *divertir-se* com os exemplos quando as ideias não surgem; tentar perturbar afirmações e disposições (com contra-exemplos).
Em suma para se poder conseguir uma compreensão profunda têm que ser estabelecidas muitas ligações e de muitos géneros entre todos os elementos descritos das categorias consideradas.

4.7.2 A Exemplificação na Perspectiva de Randall Charles

Um dos primeiros estudos sobre exemplificação que encontrámos é sobre a exemplificação de conceitos em Geometria de Randall Charles. Nesse estudo, Charles (1980) começa por referir estudos em psicologia e em educação matemática que afirmam a existência de actos de ensino que potenciam a aquisição de conceitos matemáticos. Entre estes actos de ensino que podem influenciar a aprendizagem de conceitos, dois têm sido o alvo de numerosos estudos: os actos de exemplificação e os actos de caracterização.

- Acto de exemplificação: é a apresentação de um exemplo ou de um não-exemplo de um conceito. Estes actos têm o propósito de ilustrar os atributos relevantes e não relevantes de um conceito.
- Acto de caracterização: é uma afirmação sobre um atributo relevante ou irrelevante de um conceito. Estes actos têm o propósito de dirigir a atenção para os atributos do conceito.

O estudo que este artigo de Charles descreve persegue três objectivos:

1. Determinar se estudantes para professores primários podem ser treinados para usar actos de exemplificação e de caracterização no ensino dos conceitos geométricos de simetria bilateral e rotacional.
2. Determinar se os estudantes para professores sujeitos a treino no uso de actos de exemplificação e caracterização conseguem melhores resultados que os professores que não receberam este tipo de treino.
3. Determinar até onde o número de actos de exemplificação e de caracterização usados na leccionação, bem como a clareza das apresentações, estão relacionados com os resultados dos alunos.

Aquilo que torna o artigo interessante é que Charles chama a atenção para o conflito que existe no valor dos não-exemplos. Toda a bibliografia atesta a bondade do uso dos exemplos mas, relativamente aos não-exemplos, o autor apresenta várias referências que suportam a utilidade do seu uso, mas também da indiferença do seu uso ou, ainda, que desaconselham totalmente esse uso. A explicação dada por Charles, com variadas referências, é que os vários resultados sobre o valor do uso de não-exemplos podem ser

conflituosos entre si, e o facto de nesses estudos não ter sido controlado o número de actos de exemplificação.
Charles afirma que uma cuidadosa selecção de séries de exemplos ilustra os atributos de um conceito. Contudo, deixa bem claro que se os exemplos e os não-exemplos forem simplesmente apresentados aos alunos, então vão ter que ser os alunos a fazer todo o trabalho de inferência sobre os atributos do conceito. Neste ponto, o papel dos actos de caracterização pode ser importante, basta eles acompanharem a apresentação dos exemplos que facilitarão a aquisição do conceito.
Na década de oitenta, a originalidade que estudantes para professores podem mostrar é a inclusão, em aulas assistidas, de um certo número de ocorrências de actos de exemplificação e de caracterização, porque fazer mais do que isso implica ter que diminuir a ocorrência de uma série de variáveis, o que pode condicionar a efectividade da lição. De entre essas variáveis Charles destaca a clareza da exposição como sendo significativa na performance do professor e nos resultados dos alunos.
Como resumo da metodologia seguida, podemos referir que Charles seleccionou 18 estudantes para professores como informantes deste estudo. Nove deles foram instruídos no uso de actos de exemplificação e de caracterização e os outros nove foram utilizados como grupo de controlo. Foram seleccionados 72 crianças que foram distribuídas pelos dois grupos de estudantes para professores. Estes alunos foram sujeitos a testes antes e depois de terem tido aulas com os estudantes para professores.
Todas as aulas dos estudantes para professores foram gravadas, tendo sido feito o registo relativo às variáveis em estudo. Como forma de validação, os resultados de alunos e de estudantes para professores foram sujeitos a testes estatísticos.
Resultados e conclusões do estudo de Charles (1980):
Com base na análise dos dados, a primeira conclusão indica que os procedimentos utilizados no estudo constituem um método viável para o treino de estudantes para professores no uso de actos de exemplificação e caracterização no ensino de conceitos matemáticos.
Embora o treino dado encorajasse para um uso equilibrado de exemplos e não-exemplos, o facto é que o uso de não-exemplos foi menor. Como segunda conclusão, ficou a percepção de que os estudantes não valorizaram tanto o uso deste tipo de exemplificação.
Os resultados do estudo mostraram que o uso de actos de exemplificação melhorou a aquisição dos conceitos de simetria bilateral e de simetria rotacional por parte dos alunos. Estes resultados não podem ser, evidentemente, generalizáveis a outros conceitos.
Por regressão linear fica a extrapolação de que o uso predominante de não-exemplos facilita a aquisição do conceito de simetria bilateral, ao passo que o uso frequente de exemplos facilita a aquisição do conceito de simetria rotacional. Por isso, este estudo tanto apoia as conclusões dos autores que defendem o uso de não-exemplos como aqueles que não o recomendam. O que Charles afirma como conclusão final é que a exemplificação por meio de não-exemplos não facilita, necessariamente, a aquisição de todo e qualquer conceito.Com o apoio de outros estudos fica a conjectura de que o uso de exemplos é adequado ao estudo de conceitos fáceis e a inclusão de não-exemplos recomenda-se quando o conceito apresenta características mais difíceis de adquirir.
A influência da clareza da exposição apresentada pelos estudantes para professores não ficou demonstrada neste estudo, o que não é consistente com outros estudos.

Pelas limitações do estudo de Charles, fica reforçado que o treino no uso de actos de exemplificação é efectivo, pelo menos, para estudantes para professores. Para professores com mais experiência e com outro tipo de conceitos, fica a sugestão para estudos posteriores.

4.7.3 Exemplos Genéricos

A ideia de que existe um exemplo que de alguma forma seja visto como representante de uma generalidade foi aceite por alguns autores, que frequentemente o designaram como "Exemplo Genérico" (Bills, 1996). Mason e Pimm publicaram um artigo (1984) cuja finalidade é explorar os significados de "genérico" e de "generalidade" na forma como se encontram na linguagem quotidiana e, também, como estes termos se apresentam aos estudantes de matemática.

Este artigo tenta mostrar algumas das dificuldades inerentes às expressões matemáticas de generalidade e as suas relações com o particular.

1. A generalidade na linguagem natural:

   Aqui os autores apontam as situações quotidianas em que uma marca particular passa a designar uma classe de artigos. Em Portugal é comum utilizar a palavra "kispo" para designar todos os géneros de casacos impermeáveis, "Black & Decker" para designar berbequim e "Cola-Cao" ou "Nesquick" para chocolate solúvel.

   Assim, quando falamos no número par 2n, podemos estar a utilizar toda a generalidade da classe dos números pares ou podemos estar a utilizar um número par em particular; embora não utilizemos um número par específico, como o 2 ou o 34.

2. Em Álgebra elementar.

   Podemos utilizar "2/3" não apenas como esta fracção específica mas, além disso, para designar todos os racionais que lhe são equivalentes. Uma confusão similar é a propensão que os matemáticos têm em incluir uma colecção de objectos (neste caso as fracções) numa colecção maior, e assumirem que toda a gente percebe o que eles pretendem designar ou referir-se.

Sobre a confusão que 2n possa induzir, Mason e Pimm explicam: 2n é um número par particular, mas não é específico. É particular porque é um número par, mas não específico porque não o é como o 2 ou o 42. Aqui parece existir uma percepção dual invocada pelo uso da simbologia 2n, e são nestas alterações da percepção (particular/específico) que podem recair no âmago de algumas das dificuldades algébricas.

Assim, o símbolo 2n pode ser uma designação de um número mas não ser, ele próprio, um número. Em vez de sermos estritos e dizermos que 2n é um número que nunca aparece numa lista de números pares, poderemos experimentar a ideia de que 2n é o nome de um (indeterminado) número par. Mas 2n não sendo um par pode ser considerado um molde de números pares ou, então, uma forma de que alguém aceda a esta lista.

Como extensões posteriores à situação apresentada, considere-se o caso dos Exemplos Genéricos.

Os autores focam o caso dos contra-exemplos. Estes exemplos são vistos como uma generalidade pelos professores mas, para os alunos, o seu papel não é visto dessa mesma forma. Os autores sugerem que os alunos, frequentemente, se mostram incertos tanto do papel como da natureza do contra-exemplo. Não é apenas uma particularidade,

mas também uma generalidade. Mas, no essencial, os alunos não têm bem claro a afirmação genérica que o contra-exemplo contraria.
Se os exemplos são sempre exemplos *de* algo e os contra-exemplos são *contra* algo, como podem os alunos dar-se conta do "algo" que se pretende exemplificar?
Quando um professor exemplifica no quadro uma teoria ou um procedimento, ele vê a generalidade que esse exemplo incorpora, podendo muito bem nem pensar em indicar o alcance desse exemplo, nem em realçar os pormenores que necessitam ser realçados de forma a que se possa notar a exemplaridade. Contudo, os alunos são muito menos experientes, e a observação dos casos particulares da situação em estudo (e podem nem estar conscientes de outros) pode absorver toda a sua atenção. Os alunos podem apenas ver o particular (que para eles pode ser bastante geral. i.e., não trabalhado) e, como resultado, tentam apenas aprender o exemplo que lhes foi apresentado.
Definição: Um *exemplo genérico* é efectivamente um exemplo, mas é aquele que é apresentado de modo a cumprir a função pretendida: que transporte a generalidade.
Este transporte é alcançado quando o exemplo salienta uns aspectos principais e ignora outros, visando estruturar a percepção de todos os aspectos. Diferentes maneiras de entender levam a diferentes formas de conhecer. Infelizmente, é quase impossível saber se alguém salienta ou ignora da mesma forma que nós.
Questões que se levantam:

- (principal) Porque oferecemos exemplos aos alunos nas aulas, e o que devem fazer os alunos deles?
- Se os exemplos são sempre exemplos ***de*** algo, como podem os alunos aperceberem-se daquilo que os exemplos estão, supostamente, a exemplificar?

Harel e Tall (1991) realçam o papel dos exemplos genéricos como meio de generalização utilizado pelos estudantes. Os autores apresentam a noção de "abstracção genérica" como sendo o processo de formação de um novo conceito pela apreciação de um único exemplo paradigmático ou canónico e sugerem três princípios de selecção de exemplos genéricos eficazes:

- Principio da *entificação*[2]. Afirma que as novas propriedades dos objectos devem ser abstraídas de contextos familiares.
- Princípio da *necessidade*. Afirma que os estudantes devem ser capazes de ver a razão para a abstracção que se espera que eles façam.
- Princípio do *paralelismo*. Afirma que o exemplo genérico deve ser trabalhado de forma a poder ser simulado mais tarde num caso geral.

Este terceiro princípio talvez ignore o facto de que é o tratamento do exemplo por parte do estudante que é crucial e, dessa forma, as propriedades "irrelevantes" do exemplo podem continuar a fazer parte da sua imagem do conceito (Bills, 1996).

Uma das funções que o exemplo genérico pode assumir é na demonstração de propriedades ou conjecturas. Balacheff (1988) usa a noção de exemplo genérico no contexto das demonstrações escritas dos estudantes. Uma das suas quatro categorias de constituição de prova, a terceira categoria, é designada por *exemplo genérico* e caracteriza-se como sendo um exemplo que envolve a explicitação das razões de verdade de uma asserção. As razões da inclusão de um exemplo nesta categoria são

[2] Do Inglês *Entification*, acção de dar existência objectiva a algo.

evidenciadas por operações ou transformações que ele inclui, é um exemplo que não figura na categoria por direito próprio, mas por ser representativo das características da classe. Mais, Balacheff (1988) sugere que este tipo de "demonstração" (não é uma demonstração formal) é um dos passos do percurso da "análise experimental" formal.

Bills (1996) apresenta uma visão diferente do que é um exemplo genérico. Para que se perceba o que é um exemplo genérico (no sentido dado por Bills) é necessário compreender as duas formas de generalização que ela apresenta: Generalização Empírica ou Indutiva e Generalização Genérica.
Para que se entendam as duas formas de generalizar descritas por Bills (1996) considerem-se as seguintes situações (não são as que Bills apresenta no seu trabalho):
Primeira situação:
Apresentam-se aos alunos diversas sequências numéricas e pede-se que eles encontrem a expressão algébricas do tipo $an+b$ que as definam, com *n* natural e de parâmetros *a* e *b*. Por exemplo: (a) 2, 4, 6, 8, 10, … (b) 12, 22, 32, 42, 52, … (c) -5, -10, -15, -20, -25, …
Diz-nos a experiência que depois de os alunos resolverem dois ou três exemplos semelhantes aos dados, eles relacionam o parâmetro *a* com a diferença entre os sucessivos termos das sequências, 2 no primeiro caso, 10 no segundo e -5 no terceiro, e que o valor de *b* pode ser obtido com o primeiro parâmetro, com o primeiro termo e com $n=1$.
Segunda situação:
Apresenta-se aos alunos a Progressão Aritmética definida por recorrência $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2} \end{cases}$
e pede-se que os alunos apresentem a expressão do termo geral da Progressão.
Nesta situação, o natural é que se calculem quatro ou cinco termos

$$a_1 = 3 \qquad a_2 = 3+\frac{1}{2} \qquad a_3 = 3+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \qquad a_4 = 3+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

Que são equivalentes a

$$a_1 = 3 \qquad a_2 = 3+1\left(\frac{1}{2}\right) \qquad a_3 = 3+2\left(\frac{1}{2}\right) \qquad a_4 = 3+3\left(\frac{1}{2}\right)$$

e, a partir deles, constrói-se o termo geral $a_n = 3+(n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

É possível que se o professor chamar a atenção para a estrutura da resolução do problema, sendo o 3 é o primeiro termo e ½ é a razão da progressão, possa sem dificuldade levar os alunos ao termo geral de *qualquer* Progressão Aritmética, em que o primeiro termo e a razão sejam dados.
Estas duas situações ilustram os dois tipos de generalização apresentada por Bills. Na primeira, a generalização é feita com base em **vários exemplos idênticos** e cuja característica a generalizar é semelhante em todos eles. Na segunda situação, a generalização pôde ser obtida por intermédio de um único exemplo. Assim, a *Generalização Empírica* ou *Indutiva* é uma generalização a partir de vários casos e a *Generalização Genérica* é uma generalização mediante um único caso. É a este último

caso que Bills (1996) chama *exemplo genérico*. Para a autora, a essência do exemplo genérico é que *apenas um é requerido*.
Como conclusão, Bills diferencia o tipo de generalização no número de exemplos empregues, contudo ressalva que a diferença pode não ser feita de forma rígida e que as distinções são bastante mais fáceis de determinar na teoria que na prática.

Posteriormente, Bills (1999) acrescenta alguma teoria ao seu trabalho de 1996. Em Bills (1999), a investigadora elabora sobre os perigos da generalização a partir de casos, i.e., na generalização indutiva e na generalização genérica. Principalmente se a generalização for feita a partir de um único caso. Bills, como ilustração, apresenta o caso de um aluno que, quando a professora tratava o caso da equação da circunferência e passou da equação $\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=2$ para $(x-3)^2+(y-5)^2=4$, afirmou que 3 e 5 eram a abcissa e a ordenada do centro e 4 era a medida do diâmetro. De facto a escolha do exemplo por parte da professora não foi feliz, pois escolheu como medida do raio o valor 2 que tem como quadrado e dobro o mesmo valor 4. Por isso, o aluno pôde generalizar para o diâmetro (o dobro do raio) e não para o quadrado do raio. Por outras palavras, o aluno focou a sua atenção num *padrão numérico* e não numa *relação estrutural*.
O erro do aluno permitiu a Bills estabelecer a dualidade entre os dois pontos de focagem da atenção e abriu duas perspectivas diferentes. A partir dos termos “empírico” e “estrutural” Bills (1999) distingue *generalização empírica* e *generalização estrutural,* aquela que é obtida por meio dos valores numéricos dos vários casos e esta que se obtém por intermédio da estrutura, do procedimento ou dos significados subjacentes. Assim, por vezes, um único exemplo que evidencie a estrutura, procedimento ou significado pode conseguir que o aluno generalize. Desta forma, pode-se ligar o *exemplo genérico* à estrutura que se pretende trabalhar. Bills altera, assim, o que anteriormente chamou *generalização genérica* para uma noção mais geral, a *generalização estrutural*.

Rowland (1998) também nos dá uma outra perspectiva do uso de exemplos genéricos como meio de prova. O uso de exemplos suficientemente gerais para demonstrar uma afirmação ainda é vista como uma forma inferior de prova, contudo pode ser bastante mais esclarecedor que uma demonstração formal. Rowland (1998) apresenta uma história de Gauss, conhecida de todos, que nos conta que ele quando criança surpreendeu o professor da aldeia quando calculou de forma muito rápida a soma dos 100 primeiros números inteiros. Enquanto as outras crianças procediam a uma trabalhosa soma em coluna, Gauss somou 1 com 100, 2 com 99, 3 com 98, e assim sucessivamente. Finalmente multiplicou com muita facilidade 50 por 101. A *força* desta história é que permite ao aluno que a oiça encontrar com facilidade a soma dos 200 primeiros inteiros e, por este método de Gauss, demonstrar por um exemplo genérico que a soma dos *2k* primeiros inteiros positivos é dada pela expressão *k(2k+1).* Assim, ninguém que siga o método de Gauss para o caso de *k=50* pode, de alguma maneira, duvidar do caso geral.
Como se disse, o exemplo genérico envolve a explicitação das razões pelas quais uma asserção é verdadeira (Balacheff, 1988). Deste modo, podemos usar um exemplo genérico para apresentar um caso que confirma uma proposição e também para

proporcionar uma intuição do *porquê* essa proposição é verdadeira com base nesse caso particular (Rowland, 1998).
Em conclusão, Rowland (1998) afirma que o uso destes exemplos genéricos podem ser didacticamente mais úteis que as demonstrações formais e, por isso, que se deve dar mais atenção à utilização de exemplos genéricos no que respeita à formação de professores de matemática. Porém, a utilização de exemplos genéricos não é, segundo Hazzan (1994), isenta de perigos. Esta autora chama atenção sobre a sobrevalorização dos exemplos genéricos num estudo que efectuou sobre a compreensão de um grupo de estudantes universitários sobre a teoria dos grupos e verificou que para muitos deles a solução da equação $x = x^{-1}$ só tem uma solução, que é o elemento neutro. Também MacHale (1980) lamenta o facto que, para a maioria dos livros de texto, o exemplo que sempre se dá de uma função continua mas não diferenciável em $\mathbb{R}$ seja $f(x) = |x|$, o que provoca que para muitos estudantes esta seja a única função que verifica em simultâneo estas duas características.

Um conceito próximo ao de exemplo genérico é o *exemplo paradigmático* de Bills e Bills (2005). O âmbito deste exemplo situa-se na escolha de exemplos por parte do professor, considerando que esta escolha é guiada pela concepção que o professor tem do papel que o exemplo desempenha na actividade lectiva. Provavelmente as escolhas dos professores serão diferentes se o exemplo for visto como um elemento de um conjunto de exemplos de onde se pretende abstrair o conceito, sendo por isso um *exemplo paradigmático* que deve conter a essência do conceito. Em particular, tanto o uso de exemplos que considerem as ideias de *ruído* como o de não-exemplos que se referem aos *limites do conceito* reflectem, provavelmente, a *compreensão de* e a *familiarização com* as dimensões de variação de Marton e Booth.

4.7.4 Exemplos Resolvidos

Os exemplos resolvidos têm sido usados no ensino da matemática desde os mais antigos registos históricos, no mínimo.
A aprendizagem através de exercícios resolvidos, num âmbito de educação matemática, tem a sua referência mais comum em Zhu e Simon (1987). Segundo estes dois autores, um exercício resolvido consiste na solução explícita de exercícios apresentada por um professor ou por um livro de texto. Estes exemplos devem apresentar o uso de técnicas específicas que, por seu lado, serão imitadas pelos alunos (ou com ligeiras modificações) quando estiverem na presença de exercícios semelhantes. A autoridade que os apresenta são os manuais ou o professor e quem deles aprende são os alunos. As etapas da solução do exercício podem vir acompanhadas de algum comentário por parte do autor do manual ou do professor (Renkl, 2002).
De forma que estes exemplos se tornem úteis, os alunos devem vê-los como exemplificativos de alguma coisa. Se a "coisa" que exemplificam for "o mistério da Matemática", "a impossibilidade de eu fazer sozinho algo semelhante" ou "o ridículo de tudo isto", então os alunos provavelmente não farão qualquer progresso matemático. Se, por outro lado, a "coisa" que exemplificam for uma classe de problemas ou a colecção de técnicas e formas de pensar, então, pelo menos, os exemplos resolvidos atingiram os seus propósitos (Mason, 2002).
Os estudos sobre exemplos resolvidos referem a contribuição que as colecções de exemplos resolvidos têm nas aprendizagens das pessoas, quando apresentam formatos

variados. O facto de os livros de texto, através dos tempos, incluírem exemplos resolvidos, e somente em alguns períodos terem tentado começar por regras gerais antes de ilustrarem o seu uso em particular, sugere que na grande maioria das gerações os professores tiveram consciência das dificuldades de se partir do geral para o particular (Mason, 2002). Na opinião de Zodik e Zaslavsky (2008) é através destes exemplos que é possível apreciar as estruturas profundas [das ideias matemáticas] em vez dos seus aspectos superficiais.

No âmbito do uso de exemplos resolvidos Carrol e Renkl são dois investigadores que também se destacam. De todos os trabalhos de Carrol sobre o uso deste tipo de exemplos destacamos dois – Carrol, 1992 e Carrol, 1994 – onde se aprecia o seu papel na aprendizagem do aluno e, também, todas as suas vantagens do seu uso.
A publicação de 1992 surge da aplicação dos resultados de uma investigação de laboratório à sala de aula. É uma aplicação das hipóteses de Sweller na sala de aula do autor. A hipótese de Sweller (1988) pressupõe que um maior uso de exemplos resolvidos no ensino da matemática e das ciências deve facilitar a aprendizagem, pela razão de que reduz a carga cognitiva e liberta a atenção para a prática enquanto esta decorre.
Os bons exemplos resolvidos apresentam características de problemas na fase inicial e ilustram os subsequentes actos correctos. Isto é, apresentam a informação necessária à construção de esquemas cognitivos. Em contraste, o formato da prática lectiva convencional e a resolução de problemas podem interferir com a aprendizagem porque a atenção é repartida pela situação inicial, pela situação final e pelas situações intermédias. Assim sendo, o desenvolvimento de esquemas cognitivos é retardado.
Para apoiar estas afirmações Sweller e os seus colegas (Sweller e Cooper, 1985; Sweller, 1989; Chandler e Sweller, 1991) concluíram que os alunos que utilizaram exemplos resolvidos despenderam menos tempo a praticar e cometeram menos erros em testes posteriores do que os estudantes que foram sujeitos a praticas lectivas convencionais.
Razões pelas quais o uso de exemplos resolvidos se mostra mais eficiente:

1. Os exemplos resolvidos incrementam o empenho mental por parte do aluno. Menos tempo necessita ser dispendido na exposição e demonstração de procedimentos e, portanto, disponibiliza mais tempo para a resolução de problemas.
2. Durante a prática lectiva convencional, apenas é apresentado um número limitado de exemplos, provocando induções falsas e construindo procedimentos incorrectos. Exemplos explícitos podem ajudar a restringir o aparecimento de erros durante o tempo da actividade prática, que é quando a grande parte do entendimento matemático do aluno é construído.
3. Muitos alunos não têm ninguém em casa para os ajudar na matemática do ensino secundário. No momento em que começam a trabalhar em casa já a sua aprendizagem se deteriorou, deixando os alunos que já possuem lacunas no seu conhecimento matemático incapazes de resolver os seus trabalhos de casa. Os exemplos resolvidos cumprem uma função de extensão do professor, fornecendo apoio em casa e durante a prática.

Como considerações finais deste estudo (Carrol, 1992) destacamos que ele suporta a sugestão de que o incremento do uso de exemplos resolvidos pode ser útil para o ensino da matemática. Os alunos que foram sujeitos ao uso de exemplos resolvidos resolveram tão bem, ou por vezes melhor, as fichas de trabalho durante a aula e em trabalho de casa do que os que foram sujeitos a uma leccionação convencional, na prática e nos testes posteriores. Os alunos que trabalharam com exemplos resolvidos requereram menos apoio e contacto directo, passaram menos tempo a praticar e sentiram-se motivados pelos exemplos. Não é intenção do autor atestar que este método deve ser o principal método de trabalho na sala de matemática. Tanto os métodos convencionais como as ideias construtivistas são dois modelos para o ensino e aprendizagem da matemática; o uso frequente de exemplos resolvidos para auto aprendizagem e apoio ao aluno será um terceiro.

Os alunos têm diferentes desempenhos e conteúdos diferentes exigem meios de apresentação diferentes ou, então, mais variados.

Nos debates sobre ensino e aprendizagem da matemática, são muitas vezes esquecidas quais as competências nos procedimentos que frequentemente antecedem o conhecimento conceptual e a compreensão mais profunda. Os argumentos entre ensino expositivo e as ideias construtivistas costumam ignorar que ambos são componentes de uma sã actividade lectiva. Incrementar o uso de exemplos resolvidos como instrumento do processo de ensino e aprendizagem na sala de aula é somente um instrumento de reforço na apresentação dos conceitos e das técnicas, juntando também algum apoio ao esforço dos alunos no sentido de dar significado ao trabalho matemático.

O segundo trabalho de Carrol (1994) sobre o uso de exemplos resolvidos é uma continuação do que descrevemos. Contudo é mais completo e exaustivo, o número de citações é maior, o enquadramento teórico é mais completo e a redacção é mais clara e compreensível.

O enquadramento teórico alude aos trabalhos laboratoriais nos quais baseou as suas próprias experiências. São elas:

- Sweller (1988 e 1989): Relativamente a Competências Matemáticas. São trabalhos onde se sustenta que a resolução de problemas não se deve a grandes habilidades, mas sim a um conjunto de esquemas ou conhecimento altamente automatizado e interligado. São estruturas cognitivas que ajudam o resolutor de problemas a categorizar a situação de acordo com os traços relevantes e com os esquemas que indicam uma solução apropriada para aquele tipo de problema. Sweller põe a hipótese de que esta especialização em álgebra se possa caracterizar pelo conhecimento baseado em esquemas deste domínio [matemático] específico e também numa automatização assente em procedimentos.
- Sweller e Cooper (1985) questionam a dicotomia entre a compreensão conceptual e o uso de procedimentos mecanizados. Sob boas condições de aprendizagem e na aplicação de conhecimentos, compreensão e destreza estão altamente relacionados e valorizam-se mutuamente.
- Teoria da Carga Cognitiva (*Cognitive Load*; Chandler e Sweller, 1991): Por hipótese, o formato das práticas convencionais usadas em muitas salas de aula, nas quais a exposição com alguns exemplos é seguida de uma resolução de exercícios em massa, interfere com a aprendizagem por causa da pesada dependência na resolução de problemas. Os estudantes têm que se preocupar com muitas coisas – no objectivo e no desenrolar do processo de o atingir –

> deixando pouca capacidade cognitiva para a aprendizagem. Em contraste, o uso de exercícios resolvidos deixa livre grande capacidade cognitiva para uma aprendizagem mais rápida. Esta amplitude (alcance) de exercícios apresenta várias categorias de problemas no seu estado inicial e apresentam todos os passos da resolução explicados para aquele tipo de problema: toda a informação que deve ser codificado no esquema a utilizar.

Em laboratório, Sweller e seus colaboradores, estudaram o efeito dos exercícios resolvidos na aprendizagem da álgebra e outros temas de matemática mais avançada, descobrindo que os estudantes a quem tinham apresentado um grande número de exercícios resolvidos tinham aprendido tão bem ou melhor que aqueles estudantes a quem tinha sido apresentada uma exposição tradicional, alguns exemplos seguidos de prática convencional. No mesmo sentido Zhu e Simon (1987), replicando o estudo na China, reportaram que os alunos chineses não só tinham aprendido com os exercícios resolvidos como também tinham adquirido uma compreensão apreciavelmente profunda.

Além dos motivos apresentados pela teoria da carga cognitiva, há outros que também preconizam o uso de exercícios resolvidos. Inicialmente, porque encorajam uma participação mental activa por parte do aluno, transferindo para ele parte da responsabilidade de aprender. Contudo, apesar das indicações do NCTM (1989) em sentido contrário, ainda se ensina em muitas escolas na base do padrão "Profesor-expõe/aluno-pratica" onde os alunos, tipicamente, vêem o professor como a única fonte de ensino e assistência.

Para Carroll (1994) devem ser usados um grande número destes exercícios para que os alunos consigam uma correcta abstracção dos aspectos relevantes e das soluções, especialmente nos alunos com menos capacidades. Finalmente, alguns alunos relataram que não tinham ninguém em casa que os assistisse com os exercícios de álgebra, especialmente aqueles cujos pais nunca estudaram álgebra. Para estes alunos, um trabalho de casa que inclua exercícios resolvidos pode providenciar um apoio para os alunos estudarem autonomamente.

As conclusões, retiradas destas duas experiências relatadas no artigo (Carrol, 1994), sustentam os resultados de pesquisas anteriores sobre o papel dos exemplos resolvidos no ensino da matemática: estudantes a quem foram proporcionados exemplos resolvidos necessitaram menos tempo para a aquisição dos conceitos, menos apoio directo, cometeram menos erros e menos tipos de erros enquanto praticaram com exercícios novos. Os exercícios resolvidos mostraram-se muito apropriados para alunos com capacidades de aprendizagem menores, incluindo estudantes com um historial de sistemático fracasso em matemática e em estudantes referenciados como apresentando desordens na aprendizagem. Ao usar um exemplo resolvido para solucionar uma dificuldade que o acompanhe, o aluno pode estar a aprender a olhar para além dos aspectos superficiais do problema até às semelhanças estruturais subjacentes, um processo que facilita a construção de um esquema base adequado e que pode ser transferido para outras situações (Carrol 1992). O facto de o problema estar emparelhado com o exemplo resolvido pode ter ajudado o aluno, dando pistas na procura de semelhanças subjacentes e torná-lo apto a reconhecer essas semelhanças. Os exemplos resolvidos previnem a prática de soluções incorrectas e a aprendizagem de associações incorrectas. As experiências relatadas sugerem que o uso mais extensivo de exemplos resolvidos na sala de aula facilita a aprendizagem de certos conteúdos. No início, o uso de exemplos resolvidos pode revelar-se difícil mas depois, com a prática, torna-se mais fácil. Todavia, é esta uma actividade que desenvolve o que se pode desenvolver? Isto é, os estudantes podem ir necessitando menos exemplos destes à medida que se especializam num dado conteúdo? Ou será que esta continua a ser uma diferença entre os estudantes com mais capacidades e estudantes com mais carências?

Renkl (2002) e Renkl e colegas (Atkinson, Derry, Renkl e Wortham, 2000; Hilbert, Schworm e Renkl, 2004) também se dedicaram a investigar o uso de exemplos resolvidos.

Em Atkinson, Derry, Renkl e Wortham (2000) referem-se os exemplos resolvidos como sendo instrumentos que proporcionam uma solução, dada por um especialista, a um problema para que os alunos a possam estudar e aprender com ela. Por intermédio da investigação bibliográfica e com a participação de professores, o estudo teve como objectivo encontrar princípios que orientem os professores na construção de bons exemplos resolvidos. Neste artigo é afirmado que os exemplos resolvidos têm um papel muito importante nos *períodos iniciais* da aquisição das capacidades cognitivas e destinam-se a dar fluência e rapidez no cálculo e resolução de problemas. Numa primeira fase, os alunos resolvem os problemas com base num raciocínio analógico; na segunda fase conseguem desenvolver algumas regras mais abstractas e adquirem uma linguagem que os guia no processo de resolução do problema; por último, a resolução de problemas, daquele tipo, é feita sem sobressaltos e de forma rápida. Estas três etapas explicam como os alunos adquirem as habilidades cognitivas próprias à resolução de problemas, e como os exemplos resolvidos são preponderantes nesse processo.

Assumindo o enquadramento teórico apresentado, estes investigadores encontraram os principais aspectos que determinam a boa construção de exemplos resolvidos. Existem aspectos inerentes ao próprio exemplo resolvido e aspectos referidos ao conjunto de exemplos resolvidos que devem ser considerados; os primeiros foram designados como *Aspectos Intra-Exemplos* e os segundos como *Aspectos Inter-Exemplos*. Cada categoria de aspectos inclui os seus sub-aspectos, como pode ser lido na tabela:

ASPECTOS INTRA-EXEMPLOS	**ASPECTOS INTER-EXEMPLOS: DELINEAMENTO DA LIÇÃO**
Incluir texto e diagramas	Incluir múltiplos exemplos
Incluir informação visual	Variar o tipo de problema em cada lição
Incluir Passos e objectivos parciais	Variar a forma de apresentação de problemas do mesmo tipo
	Apresentar aos alunos pares de Exemplo resolvido e exemplo para resolver
Atkinson, Derry, Renkl e Wortham (2000)	

Figura 23: Aspectos inerentes aos exemplos resolvidos

Em síntese:

- Cada exemplo deve incluir o máximo de informação, integrando todas as fontes de informação e apresentadas cuidadosamente, de forma que o aluno não necessite de procurar a informação relevante, pois desse modo seria sobrecarregado cognitivamente.

- Devem ser apresentados aos alunos séries de exemplos em que se variem tanto o tipo de problema como a forma de os apresentar, dentro do mesmo tipo. Os exemplos devem ser apresentados em pares, um resolvido com outro não resolvido para praticar; devem evitar-se séries de exemplos resolvidos seguidos de séries de exemplos por resolver, com vista à prática.

Para Renkl (2002) um exemplo resolvido consiste na formulação de um problema, fases da resolução e a própria solução. Este tipo de exemplo, como se referiu, revela-se apropriado quando se inicia a aquisição de capacidades cognitivas na resolução de problemas (Atkinson, Derry, Renkl e Wortham, 2000; Renkl, 2002), pelo menos quando os alunos assumem o papel activo de se explicarem a eles próprios cada um dos passos da resolução (Renkl, 2002). A principal característica do exemplo resolvido é que se destina a uma aprendizagem solitária, o aluno aprende pelo trabalho que desenvolve sobre cada um dos exemplos que lhe são propostos. Assim, é necessário atender a vários pormenores quando se integram as explicações do professor num tipo de ensino auto-explicativo. Renkle (2002) levou a cabo uma investigação sobre a auto-aprendizagem com 28 estudantes para professores que introduziram explicações do professor na sua prática e um grupo de controlo de 20 estudantes para professores onde estes não proporcionaram explicações aos alunos.
Todos os alunos que participaram na investigação que Renkl (2002) implementou foram encorajados a explicarem-se a si próprios a razão que subjazia a cada passagem das resoluções dos problemas apresentados e, no final, foi conseguido que os alunos, tanto do grupo de estudo como do grupo de controlo, conseguissem adquirir capacidades cognitivas na resolução dos problemas que foram sendo apresentados alongo do estudo. Contudo, no grupo de estudo, as auto-explicações foram integradas com explicações dos respectivos [estudantes para] professores. Neste grupo, e sob certas condições, verificou-se que as aprendizagens dos alunos se revelaram mais efectivas. As condições referidas vinculam-se aos princípios enunciados (Renkl, 2002) para uma maior efectividade da conjugação de auto-explicação com a explicação do professor. Nas conclusões, Renkl (2002) afirma que a introdução de explicações por parte do professor, quando o ensino assenta na utilização de exemplos resolvidos, não é um problema trivial, por isso as explicações do professor devem estar estruturadas de acordo com os princípios enunciados de forma a produzirem efeitos positivos.

A aprendizagem da matemática com base exclusivamente em exercícios resolvidos não está isento de reparos: proporcionar exemplos resolvidos sem outras explicações ou outros suportes conceptuais é, usualmente, insuficiente (Renkl, 2002; Bills *et al.*, 2006). Os alunos frequentemente tomam estes exemplos como padrões restritos que não lhes parecem apropriados para resolver problemas que requerem algum desvio da solução apresentada nos exemplos resolvidos (Reed *et al.*, 1985 e Chi *et al.*, 1989). Watson e Mason (2002a, 2002b) sugerem que os exemplos resolvidos podem inclusive inibir as capacidades do aluno para generalizar para lá do reconhecimento do modelo sintáctico. Uma explicação deste fenómeno foi dado por Reimann e Schult (1996), baseados em literatura sobre inteligência artificial. Eles afirmam que a informação apreendida e a atenção dirigida através de exemplos resolvidos é quase sempre sobre os passos de resolução, o que limita os processos de modificação e emparelhamento. Além disso, Reimann e Schult (*ibid*) declaram que é importante especificar num exemplo resolvido os passos tomados e as razões para os tomar, isto é, para onde dirigir a atenção. Tudo isto é consistente com as descobertas de Chi e colegas (1986) e do próprio Renkl (2002) que enfatizam a importância das auto-explicações do aluno relativamente ao exemplo resolvido e, também, de Eley e Camerom (1993) que descobriram que os alunos consideravam melhores as explicações que incluíam um elemento que desencadeasse cada um dos passos. Os exemplos resolvidos podem melhorar a aprendizagem dos alunos e, em particular, as suas capacidades de resolver problemas, mas apenas se forem usados de forma a encorajarem o raciocínio e a justificação matemáticas (Bills *et al.*, 2006).

4.7.5 Contra-exemplos

Como sabemos, os contra-exemplos têm uma função fundamental em matemática. Por si só, são exemplos capazes de refutar uma afirmação falsa. Neste sentido, em termos lógicos, todos os contra-exemplos têm o mesmo estatuto. Mas o que acontece em termos de lógica pura não é idêntico ao que acontece numa perspectiva pedagógica, alguns contra-exemplos são mais explícitos que outros às razões pelas quais refutam a afirmação falsa e, ainda, outros há que elucidam sobre a afirmação e facultam meios de a refutar (Peled e Zaslavsky, 1997). Num contexto matemático, existe pouca diferença entre um exemplo e um contra-exemplo: tudo depende de onde a nossa atenção está fixada e do que estamos a tratar. Deste modo, um exemplo de um conceito ou de um teorema é um contra-exemplo de uma interpretação inapropriada da definição do conceito ou do teorema; um contra-exemplo a uma interpretação de uma definição ou de um teorema ilustra o seu papel e a sua importância, mas também pode apresentar um exemplo para uma definição alterada ou afirmação (Goldenberg e Mason, 2008). Além do mais, a exemplaridade ou contra-examplaridade de um exemplo não depende do próprio exemplo mas sim do contexto em que é utilizado; isto é, o objecto matemático que é apresentado porque apresenta determinadas características e que verifica determinadas condições pode ser um contra-exemplo de uma afirmação, exactamente porque não verifica determinadas restrições ou condições. Qualquer exemplo é contra-exemplo de *alguma coisa* (Gelbaum e Olmsted, 1964). Por exemplo, a função $f(x)=|x|$ é exemplo de uma função continua no conjunto dos números reais e é um contra-exemplo à afirmação de que todas as funções contínuas em $\mathbb{R}$ também são deriváveis em todos os pontos desse conjunto (e.g. Goldenberg e Mason, 2008).

Quando um professor apresenta um contra-exemplo, pode pensar que os alunos o vão perceber como uma classe de contra-exemplos, que é um exemplo entre outros semelhantes com a mesma função, um elemento que ainda que particular refuta uma generalidade. Todavia, para o aluno, este contra-exemplo pode ser visto como um elemento patológico da afirmação e que ele é verdadeiro para muitos casos excepto aquele (Peled e Zaslavsky, 1997). Esta forma de entender o contra-exemplo é contrária à forma como o aluno entende a função do exemplo genérico, quando o professor apresenta este exemplo com uma função de generalidade e o aluno o encara somente como um exemplo mais (Mason e Pimm, 1984).

O contra-exemplo deve apresentar um potencial elucidativo de forma a facilitar a aprendizagem. Os contra-exemplos devem possuir duas características, a de apresentar de forma esclarecedora a razão pela qual a afirmação é falsa e também deve juntar algum modo de se ver a forma de se encontrarem classes de contra-exemplos adicionais.

Isto é, a forma de se gerarem outros contra-exemplos (Peled e Zaslavsky, 1997). Saber gerar toda uma classe de contra-exemplos obriga o aluno a entender a generalidade que subjaz à afirmação e aos aspectos que a caracterizam.
Peled e Zaslavsky (1997) distinguem três tipos de contra-exemplos, que normalmente são apresentados pelos professores de matemática, de acordo com o seu poder explicativo: *exemplos específicos, semi-gerais e gerais*. Estas duas investigadoras afirmam que os (contra) exemplos específicos são aqueles que cumprem a sua função enquanto exemplos que contrariam a afirmação, contudo não dão pistas sobre o processo inerente à construção de outros contra-exemplos similares. Os semi-gerais são os contra-exemplos que apresentam uma ideia sobre o processo de gerar outros contra-exemplos semelhantes ou relacionados. Por fim, os gerais explicam e proporcionam uma observação intuitiva das razões pelas quais uma conjectura específica não é verdadeira e estratégias para se produzirem mais contra-exemplos.
Considere-se a seguinte conjectura: Dois rectângulos com a mesma diagonal são congruentes. O diagrama que segue (retirado de Peled e Zaslavsky, 1997) deve ser considerado um contra-exemplo geral porque transmite uma explicação da razão pela qual a conjectura é falsa sem recorrer a uma situação em particular.

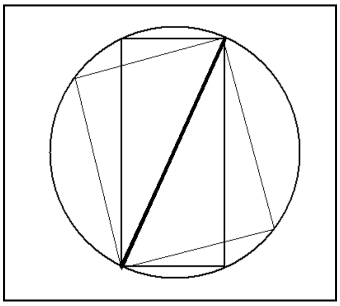


Figura 24: Rectângulos com a mesma diagonal e que não são congruentes

Além disso, podemos constatar que, tal como o exemplo sugere, existem infinitos rectângulos diferentes com a mesma diagonal. Por outras palavras, este contra-exemplo apresenta o processo que, sendo genérico, é decisivo e envolve toda a situação.

Como dissemos em cima, o uso quotidiano de contra-exemplos pode gerar dificuldades nos alunos na compreensão do seu papel. Por outras palavras, o carácter refutatório e definitivo do contra-exemplo pode não ser totalmente compreendido pelos alunos (Peled e Zaslavsky, 1997; Zaslavsky e Ron, 1998). Mais: este tipo de dificuldades não é apenas exclusivo dos alunos, por vezes também estudantes para professores e professores apresentam contra-exemplos incorrectos para as afirmações e conjecturas matemáticas falsas que tenham que refutar (Zaslavsky e Peled, 1996). Este tipo de dificuldades mereceu atenção específica e uma investigação que se debruçou exclusivamente sobre este assunto (Zaslavsky e Ron, 1998), onde o ponto de partida foi a pouca atenção que se tem dado à forma de promover nos alunos o uso e a compreensão dos contra-exemplos e o papel especial que desempenham em refutar afirmações e conjecturas falsas em matemática.
A investigação desenvolvida por Zaslavsky e Ron (1998) apresenta quatro questões:

1. Em que medida os alunos compreendem o papel especial que os contra-exemplos têm na refutação de argumentos falsos?

2. Em que medida os alunos tentam, pela sua própria iniciativa, encontrar contra-exemplos para argumentos matemáticos falsos que lhes sejam apresentados?
3. Em que medida os alunos conseguem encontrar contra-exemplos válidos para argumentos matemáticos falsos?
4. Que dificuldades é que os alunos encontram quando têm que refutar falsos argumentos matemáticos?

Os alunos foram sujeitos a um de dois questionários, ou sobre álgebra ou sobre geometria, em que cada questionário obedecia a uma estrutura complexa onde se misturavam afirmações falsas e afirmações verdadeiras. Algumas das afirmações falsas poderiam ser refutadas com algum dos vários contra-exemplos apresentados, pedia-se aos alunos que avaliassem a veracidade de algumas afirmações e, para as que fossem falsas, deveriam apresentar um contra-exemplo da lista que as refutasse. Ao todo havia quatro contra-exemplos que poderiam ser confrontados com quatro afirmações falsas. As respostas a estas quatro afirmações falsas são apresentadas no seguinte quadro:

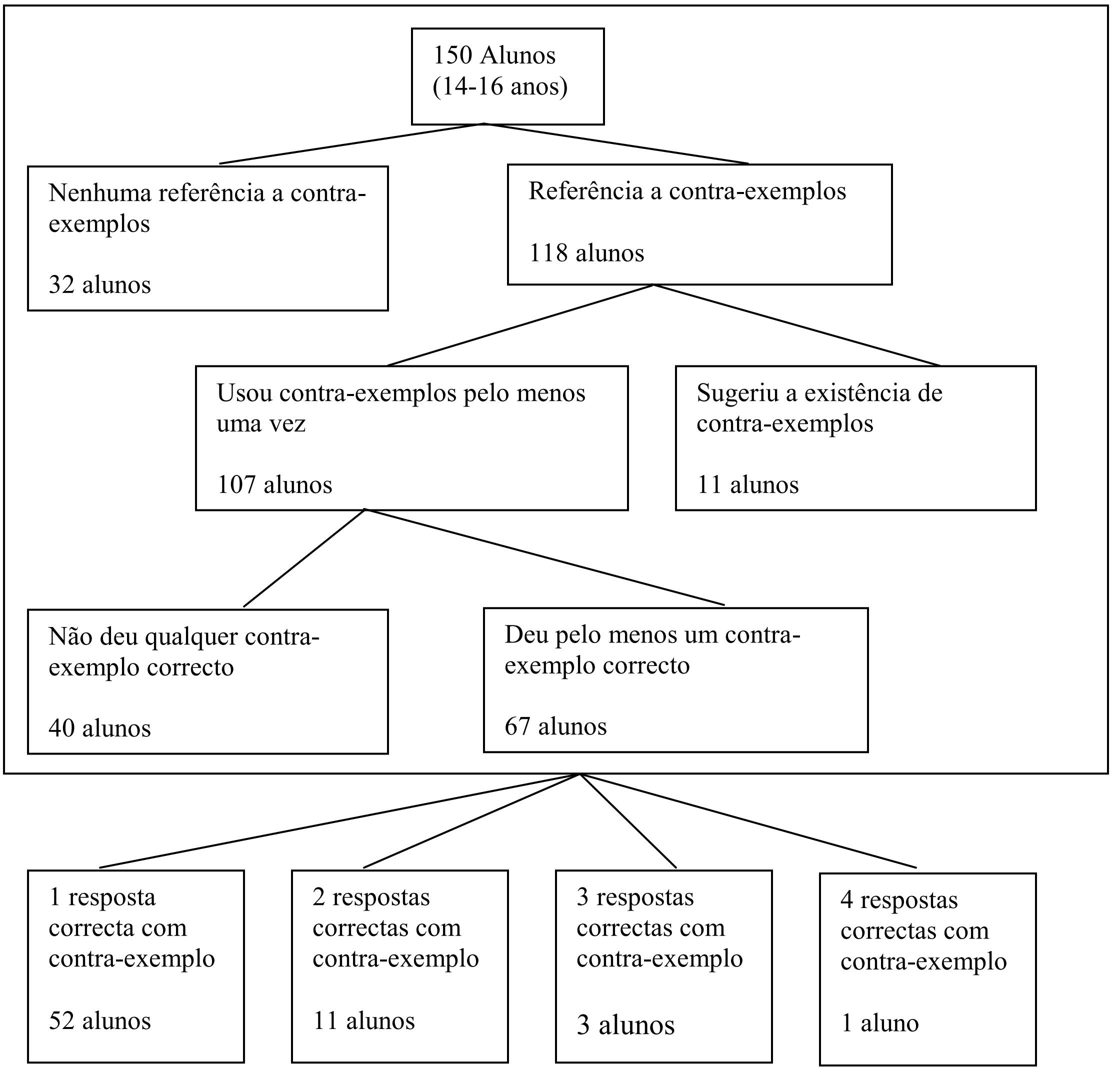


Figura 25: Resultados da aplicação do questionário (Zaslavsky e Ron, 1998)

Da análise dos 150 questionários as investigadoras (Zaslavsky e Ron, 1998) puderam concluir que a compreensão que os alunos fazem dos contra-exemplos é muito influenciada por toda a sua experiência com exemplos. Como um contra-exemplo é suficiente para retirar conclusões definitivas e os exemplos não apresentam esta suficiência, não admira que os alunos pensem frequentemente que um contra-exemplo é somente uma excepção e que não refuta, realmente, a afirmação em questão.
Outro aspecto sobre a compreensão do papel e do uso dos contra-exemplos prende-se com as condições que o contra-exemplo deve satisfazer. Muitos alunos que estão cientes do papel e do estatuto dos contra-exemplos não conseguem apresentar contra-exemplos correctos; quando tentam fazê-lo, ou apresentam um exemplo que não satisfaz as condições necessárias de forma a ser qualificável como contra-exemplo ou, então, apresenta um exemplo impossível, i.e., que não existe (Zaslavsky e Ron, 1998).
Pelo que atrás foi escrito, pode-se inferir que os professores deveriam ser encorajados a utilizar e explorar conjuntos de contra-exemplos que proporcionem oportunidades didacticamente úteis aos seus alunos, e não utilizá-los apenas de forma pontual (Peled e Zaslavsky, 1997).

Um outro papel dos contra-exemplos situa-se ao nível da argumentação. Os contra-exemplos, atendendo ao seu potencial de convencimento, podem servir para que os professores confrontem alguma deriva matematicamente incorrecta dos alunos (Zazkis e Chernoff, 2008). Considerando os erros e falsas concepções que os alunos muitas vezes apresentam, os contra-exemplos têm uma acção importante na obtenção de conflitos cognitivos, tal como já foi reconhecido e discutido (Klymchuk, 2001; Peled e Zaslavsky, 1997; Zaslavsky e Ron, 1998) e, também, na mudança conceptual.
O uso dos contra-exemplos situa-se ao nível do reajustamento das percepções e das crenças dos alunos sobre a natureza dos objectos matemáticos (Zazkis e Chernoff, 2008). No entanto, o uso dos contra-exemplos, depois de criar o conflito cognitivo, pode não ser suficiente para o resolver, quando essa resolução é o objectivo de todo o ensino; como professores, devemos procurar (contra) exemplos estratégicos que contribuam não só para criar conflitos cognitivos mas também as formas de os resolver (Zazkis e Chernoff, 2008). Estes exemplos estratégicos são designados por *Pivotal Examples* (Zazkis e Chernoff, 2006, 2008; Chernoff, 2006). O termo em inglês *pivot* tem relação com o termo português *fulcro*, por isso adoptamos em português a denominação de *Exemplos Fulcrais* para estes exemplos estratégicos referidos pelos autores.

4.7.6 Exemplos Fulcrais e Exemplos Ponte. Resolução de conflitos cognitivos

Quando um contra-exemplo provoca um conflito cognitivo em algum aluno, nem sempre promove a resolução desse conflito (Zazkis e Chernoff, 2008). Por outras palavras, quando o aluno é posto numa situação em que algumas das suas formas de interpretar ideias ou tópicos matemáticos são postas em causa, ele frequentemente não vê a importância (ou a necessidade) de se empenhar num processo que vise modificar as suas concepções e resolver a contradição que está a experimentar (Stylianides e Stylianides, 2008). Um *conflito cognitivo* é uma situação análoga àquela que foi designada como desequilíbrio por Piaget, referida a uma situação pedagógica e a um desenvolvimento cognitivo do aluno, com vista a melhorar as aprendizagens. O conflito cognitivo é invocado quando o aluno é confrontado com a incoerência ou contradição

das suas próprias ideias (Zazkis e Chernoff, 2008). A existência de ideias inconsistentes não é por si um conflito cognitivo, a presença de ideias contraditórias pode criar um *conflito potencial*, contudo a evolução só determina o conflito cognitivo quando a contradição se torna explicita para o aluno. A relação entre a contradição e o conflito cognitivo não é directa, em algumas situações o aluno ignora a contradição e noutras reconhece a contradição mas age de forma inconsistente (Sela, 2008).
Em muitos estudos o conflito cognitivo é considerado uma ferramenta de ensino (Movshovitz-Hadar, 1993; Dreyfus *et al.*, 1990; Behr & Harel, 1990; Swan, 1983). Porém, outros investigadores chamam a atenção para alguns aspectos negativos de se estar em conflito cognitivo. Existe a possibilidade dessa situação intensa e frágil para o aluno possa inibir a aprendizagem, em especial naqueles alunos com menos capacidades (e.g. Lewis e Dehler, 2000).
Por outro lado, chamamos *mudança conceptual* ao termo que se usa para caracterizar "um tipo de aprendizagem que se obtém quando a nova informação a ser aprendida entra em conflito com as ideias e conhecimentos prévios do aluno, usualmente adquiridos com base na experiência quotidiana" (Vosniadou e Verschaffel, 2004, p. 445). Porém a informação não tem que ser nova, tem é que ser compreendida de novo ou vista de uma nova maneira; as experiências e os conhecimentos podem ter sido obtidos pelos alunos em anteriores situações, mais que em trabalho quotidiano (Zazkis e Chernoff, 2008).
Descrevendo todo o processo: a criação de uma situação conflituosa e a sua resolução permitem ao aluno problematizar todo o seu pensamento e é através do conflito que ele desenvolve os seus próprios significados ou, pelo menos, tenta rectificar o conflito. Este tipo de abordagem está descrito para a aprendizagem de diversos conteúdos, tal como a divisão (Tirosh e Graeber, 1990), amostragem e probabilidade na estatística (Watson, 2002), o conceito de limite (Tall, 1977) e o conceito de infinito (Tsamir e Tirosh, 1999).
O processo de resolução de um conflito cognitivo apresenta características próprias e essas categorias determinam tipos de resoluções de conflitos. Por exemplo, o estudo de Sela (2008) realça as diferenças entre dois tipos de processos de resolução de conflitos cognitivos, dependendo do tipo de conhecimento que é "activado" pela tarefa apresentada e pelo tipo de contradição envolvida. Nesse estudo, as contradições são divididas em *Desafio ao Conhecimento Intuitivo* e *Desafio ao Conhecimento Processual* e dão origem a processos de resolução com características diversas, onde se destaca a diferente dificuldade de superação de uma e de outra.

Fruto das suas experiências prévias, a existência de ideias contraditórias pode verificar-se sem que alguma vez se venha a criar qualquer conflito. Como foi dito atrás, ideias conflituantes podem coexistir sem que isso possa declarar um conflito explícito, contudo existe uma situação potencialmente conflituosa. Se for o caso, a apresentação de um contra-exemplo pode desencadear o conflito, confrontando o aluno com a contradição proveniente das suas experiências prévias. Quando este facto ocorre, pode dar-se o caso de o aluno não perceber a contradição e incongruência das suas ideias e tratar o contra-exemplo como uma excepção àquilo que acredita (Zazkis e Chernoff, 2008; Stylianides e Stylianides, 2008), mantendo inalterada a sua concepção. É nestes casos que são necessários os contra-exemplos estratégicos que promovam uma viragem na concepção do aluno e promova uma nova aprendizagem, o uso de Exemplos Fulcrais.

Um exemplo é *fulcral* para um aluno se criar um ponto de *viragem* na percepção cognitiva do aluno na sua forma de abordar a resolução de problemas; estes exemplos podem somente introduzir um conflito ou podem resolvê-lo (Zazkis e Chernoff, 2008). Por outras palavras, os exemplos fulcrais são exemplos que podem ajudar os alunos a conseguir aquilo a que se chama mudança conceptual (Tirosh e Tsamir, 2004; Vosniadou e Verschaffel, 2004).

Insistimos: a apresentação de um contra-exemplo que exponha um aluno às suas contradições, que provoque um conflito cognitivo, não resolve por si esse conflito. Por isso é necessário que se proceda a essa resolução. Como vimos, o exemplo causador do conflito denomina-se Exemplo Fulcral, mas se esse exemplo além de provocar o conflito também ajudar o aluno a resolve-lo, então toma o nome de *exemplo fulcral-ponte*, ou simplesmente Exemplo Ponte (Zazkis e Chernoff, 2008). O exemplo toma esta designação no sentido em que serve de ponte entre a concepção inicial (ingénua, incorrecta ou incompleta) e a nova concepção matemática, apropriada e correcta. Neste momento é conveniente notar que enquanto o contra-exemplo é uma noção matemática, Exemplo Fulcral é uma noção pedagógica. Esta distinção proporciona uma ferramenta teórica para explicar porque é que alguns contra-exemplos que se apresentam aos alunos com a intenção de criar um conflito cognitivo são afastados pelos estudantes e tratados como excepções (Stylianides e Stylianides, 2008). Todavia, quer um exemplo constitua um Exemplo Fulcral ou um Exemplo Ponte para o aluno, tal facto não pode ser determinado, apenas antecipado, antes da implementação, e o contra-exemplo só pode ser reconhecido como fulcral ou ponte após ter sido aplicado numa situação de ensino (Zazkis e Chernoff, 2008).

O conceito de Exemplo Fulcral está ligado ao conceito de Exemplo Genérico (Mason e Pimm, 1984), no sentido em que sendo um exemplo em particular transporta em si uma generalidade e, ainda, transfere a atenção dos aspectos particulares do exemplo para o papel que o exemplo desempenha para o aluno. De uma perspectiva pedagógica, para Zazkis e Chernoff (2008), "o Exemplo Genérico – exemplo que representa o caso geral mas na tentativa de ignorar as especificidades do próprio exemplo – é útil como ferramenta para nos movermos do específico para o geral quando se provam conjecturas ou se descrevem relações. De forma semelhante, a nossa noção de Exemplo Ponte é uma ferramenta para evoluirmos de concepções pessoais (inocentes ou incompletas) para concepções convencionais (matematicamente apropriadas)".

Zazkis e Chernoff (2008), para ilustrar as noções de Exemplo Fulcral e de Exemplo Ponte apresentam um caso de uma estudante para professora que, sobre números primos, tinha a (falsa) concepção de que o produto de dois números primos ainda é um número primo.
A tarefa inicial apresentada a Selina (nome da estudante) consistia na simplificação da fracção $\frac{13\times 17}{19\times 23}$. Esta tarefa tornou-se difícil para Selina porque, na fracção equivalente $\frac{221}{437}$, não conseguiu encontrar nenhum divisor comum a 221 e a 437 e concluiu que estes dois números são primos. Esta conclusão baseou-se em que os dois números não

são divisíveis por 2,3,5 ou 7. Por fim, justifica que realmente os números 221 e 437 são primos por serem o produto de dois números primos.
A esta afirmação o entrevistador perguntou se o número 15 é um número primo. A resposta negativa de Selina foi imediata e o entrevistador perguntou porque razão 15 não é um primo se é obtido pela multiplicação de dois números primos, 3 e 5. Este exemplo provoca um conflito em Selina que não consegue explicar porque razão considera 221 e 437 primos, respectivamente 13×17 e 19×23, e 15 como já não sendo primo.
O exemplo 15, como sendo o produto dos números primos 3 e 5, constituiu um Exemplo Fulcral. Este exemplo estabelece o conflito cognitivo e, além do mais, o conflito é invocado pela própria Selina que se declara incapaz de justificar a sua afirmação. Pensar que o produto de dois primos é um primo causa-lhe agora confusão já que reconhece que o contra-exemplo do entrevistador é suficiente para contrariar a sua afirmação.
Depois o entrevistador pergunta a Selina qual a sua opinião sobre o número 77. Selina responde que não é primo porque é divisível por 7. O entrevistador retorna ao exemplo 221 e Selina já não o considera primo porque é constituído por um produto de dois factores diferentes de 1. De repente Selina afirma "-Mas isto muda tudo!" que afinal a afirmação de que o produto de dois primos ainda é um primo não pode ser verdadeira, já que percebeu que um número resultante de um produto de factores diferentes de 1 não pode ser primo.
O exemplo 77 é um Exemplo Fulcral porque também é um contra-exemplo que manteve o conflito cognitivo. Repare-se que o exemplo 15 foi rejeitado como primo por ser divisível por 3 e que por isso tem, para Selina, uma estrutura diferente de 221 o qual não é divisível por 2, 3 ou 5. O número 77 é um exemplo entre 15 e 221, mas estruturalmente mais próximo de 221 porque é divisível por 11 (longe de 2,3 ou 5) mas também por 7 que faz parte dos divisores que normalmente se utilizam (2,3,5 ou 7). Este último exemplo, 77, provocou em Selina a constatação de que um produto de factores diferentes de 1 não pode originar um primo. Assim, 77, porque provocou a resolução do conflito e fez a ligação entre a concepção alternativa e a concepção adequada e matematicamente correcta, é considerado um *exemplo fulcral-ponte* ou, simplesmente, Exemplo Ponte. Este episódio também realça o que já afirmámos anteriormente, a primeira reacção de Selina foi de tratar os primeiros exemplos apresentados pelo entrevistador mais como excepções, em vez de os ver como contra-exemplos.

Este exemplo serviu como Exemplo Ponte para Selina, mas fê-lo **nesta situação** em particular. Os conflitos cognitivos não podem ser pré-planeados, os (contra) exemplos que têm determinado papel para um determinado aluno podem não ter exactamente a mesma função para outro. Por isso, o exemplo não é fulcral ou ponte por si, mas sim por ter funcionado dessa forma com determinado aluno numa situação de ensino em particular. Como Mason (2006) deixou claro, a exemplaridade não reside no exemplo mas sim na forma como o exemplo é usado e percebido. Os contra-exemplos que provocam conflitos cognitivos, ao refutar uma falsa asserção de um aluno, podem não ser tão efectivos para um dado objectivo pedagógico ou para ajudar um aluno a resolver o próprio conflito que o contra-exemplo provocou. A consciência que os professores possuem dos diferentes valores de persuasão que os vários contra-exemplos transportam põe em evidência a necessidade de se escolherem exemplos estratégicos que sirvam como Exemplos Fulcrais direccionados para as falsas concepções dos alunos.

Por outro lado, Zazkis e Chernoff (2008) sugerem que os Espaços de Exemplos, tal como são apresentados nos livros de texto e em praticas lectivas comuns, não são representativos daquilo que é a compreensão dos especialistas e, por isso, podem limitar o desenvolvimento dos Espaços de Exemplos Pessoais (Watson e Mason, 2005) dos alunos. Por outras palavras, os exemplos apresentados nos livros de texto e nas aulas comuns centram-se, na maioria das vezes, em *pequenas* fracções ou em números decompostos em primos *pequenos*, estas escolhas de exemplos limitam os alunos nas generalizações pretendidas.
Esta ideia é coerente com os resultados obtidos em Figueiredo (2005) e Figueiredo, Blanco e Contreras (2006, 2007) onde se investigou a exemplificação de quatro professores estagiários sobre o conceito de função. Naquela investigação ficou claro que nos exemplos utilizados por professores estagiários abundavam os números e os coeficientes *pequenos*, valores que normalmente variavam entre -5 e 5. Este facto foi observável tanto nos exemplos planeados (retirados de livros de texto) como nos exemplos espontâneos que estes professores apresentaram aos seus alunos. Nas conclusões apresentadas (Figueiredo, 2005; Figueiredo *et al.*, 2006, 2007), este facto foi salientado e, nas sugestões no âmbito da formação inicial de professores, aludia-se ao perigo deste tipo de exemplificação e às implicações que teriam nas aprendizagens dos alunos.

A ligação da noção de Exemplo Fulcral à noção Espaço de Exemplos dos alunos estabelece que este tipo de exemplificação, por contra-exemplo com o fim de provocar o conflito cognitivo, está dependente do aluno e da situação de ensino criada. Isto é, como se disse, o contra-exemplo que funcionou como Exemplo Fulcral ou como Ponte para um aluno em determinada situação pode não ser útil para outro aluno numa situação pedagogicamente diferente. O objectivo do trabalho de Zazkis e Chernoff (2008) é aumentar no leitor a sensibilidade e a consciência para o facto de que exemplos matematicamente semelhantes não são, forçosamente, pedagogicamente idênticos.
Por outro lado, o conceito de Exemplo Fulcral e do Exemplo Ponte (Zazkis e Chernoff, 2008) é um acréscimo teórico ao estudo do uso e papel dos exemplos e contra-exemplos no ensino e aprendizagem da matemática, bem como uma forma mais de criar e resolver conflitos cognitivos.
Como base a futuras investigações, Zazkis e Chernoff (2008) apresentam três questões a serem respondidas:

1. Pode a consciência dos professores sobre conflitos potenciais guiar a escolha de exemplos estratégicos?
2. Em que medida os conceitos de Exemplo Fulcral e de Exemplo Ponte são úteis para invocar e resolver conflitos cognitivos?
3. Serão os Espaços de Exemplos afectados após a resolução de um conflito cognitivo?

Como já se referiu, podemos distinguir entre a noção matemática de contra-exemplo e a noção pedagógica de contra-exemplo, porém esta distinção não nos esclarece sob que condições um contra-exemplo apresenta um elevado potencial para se tornar um exemplo fulcral para os alunos. Perceber essas condições irá ter implicações na criação de situações de ensino que apontam para o uso de contra-exemplos fulcrais que consigam estabelecer conflitos cognitivos que possam suportar progressos específicos no desenvolvimento do conhecimento dos alunos (Stylianides e Stylianides, 2008). São duas condições com este fim que Stylianides e Stylianides (2008) explicam com detalhe:

- A relação entre Contra-Exemplos Fulcrais e Espaço de Exemplos. De acordo com Zazkis e Chernoff (2008), um contra-exemplo que se converte em Exemplo Fulcral para um estudante frequentemente cai (1) fora do Espaço de Exemplos facilmente acessível e imediatamente disponível do estudante num dado momento, i.e., fora do Espaço de Exemplos Pessoal (Watson e Mason, 2005) e (2) dentro de um Espaço de Exemplos que se inclui dentro da capacidade do aluno de o compreender num dado momento (possivelmente com o apoio do professor), i.e., dentro do Potencial Espaço de Exemplos Pessoal (Watson e Mason, 2005). O Contra-Exemplo Fulcral tem a potencialidade de expandir os limites do Espaço de Exemplos Pessoal do aluno de forma a incluir um espaço que até aí fazia parte do seu Potencial Espaço de Exemplos.
- A relação entre Contra-Exemplos Fulcrais e os Pilares de Consciência Conceptual. Relaciona-se com a capacidade de criar situações de ensino que permitam aos alunos incrementar a sua "consciência" (Mason, 1998) da natureza do seu Espaço de Exemplos Pessoais para Validação (inclui os exemplos que constituem prova na óptica do aluno) tanto antes como depois da implementação do contra-exemplo. De forma a criar situações de ensino que incrementem a consciência do aluno (tanto potencial como explicita (Mason, 1998) dos seus Espaços de Exemplos Pessoais para Validação, propõe-se a incorporação de colecções de sequências de ensino daquilo a que se chama *Pilares de Consciência Conceptual*. Os *Pilares de Consciência Conceptual* é um constructo que descreve a actividade lectiva que se propõe dirigir a "atenção" (Mason, 1998) do aluno para a sua própria compreensão das concepções dos tópicos ou das ideias matemáticas específicas. Estes pilares podem ser de carácter individual ou social. Um exemplo de um Pilar de Consciência Conceptual ao nível individual consiste em pedir ao aluno para reflectir sobre uma questão específica relacionada com um determinado tópico ou ideia, tal como: "Existe um certo número de exemplos que precises de verificar para que possas validar uma generalização matemática?" esta questão pode servir para dirigir a atenção dos alunos para as suas concepções sobre o que é considerada evidência suficiente para validar uma generalização em matemática. Esta questão pode ser colocada a um grupo, funcionando deste modo um exemplo de um Pilar de Consciência Conceptual ao nível social.

Individualmente ou em grupo, a apresentação de um contra-exemplo visa provocar um conflito cognitivo e, como se viu, a invocação de um conflito e a subsequente resolução constituem uma ferramenta muito eficaz para promover reajustamentos nas aprendizagens e nos conhecimentos dos alunos (Tirosh e Tsamir, 2004; Vosniadou e Verschaffel, 2004; Sela e Zaslavsky, 2007; Zazkis e Chernoff, 2008; Stylianides e Stylianides, 2008). A capacidade de provocar um conflito cognitivo pela apresentação de contra-exemplos não é exclusiva do professor; muitas vezes, na interacção entre alunos do mesmo grupo, podem surgir situações capazes de gerar conflitos cognitivos (Sela e Zaslavsky, 2007). Sela e Zaslavsky (2007) questionaram se a resolução desses conflitos era diferente consoante os grupos continham dois ou quatro alunos, se o número de alunos é factor inibidor ou facilitador das resoluções dos conflitos. A investigação que desenvolveram **não foca** os conceitos de Exemplo Fulcral e Exemplo Ponte, contudo a descrição metodológica apresenta as tarefas, as razões porque os conflitos surgem e a forma como os alunos os superaram (ou não). Como metodologia, foram apresentados exemplos resolvidos aos alunos, mas a resolução baseava-se no processo erróneo que usualmente os alunos utilizam para resolver aquela situação. Depois apresentavam uma resolução correcta, porém baseada num processo desconhecido dos alunos mas cujo processo podia ser por eles compreendido. O conflito instala-se e é invocado quando as duas resoluções parecem ambas correctas e, paradoxalmente, apresentam soluções diferentes.

É possível olhar para os exemplos apresentados pelas investigadoras àqueles alunos e ver porque razão as situações de *conflito potencial* se transformam em situações de conflito cognitivo (Zazkis e Chernoff, 2008), isto é, como os segundos exemplos apresentados funcionaram como exemplo fulcral para alguns alunos, muitas vezes por influência das argumentações de algum elemento do grupo. Das conclusões a que chegaram, interessa-nos uma em particular: nos dois tipos de grupos, de dois ou de quatro alunos, o trabalho com os exemplos apresentados acabava assim que um dos elementos reconhecia que a concepção que possuía previamente ao exemplo não era adequada e que já tinha percebido a razão desse equívoco. Isto é, a situação de conflito gerada pelo segundo exemplo e pelo trabalho dos alunos foi invocada por todos os elementos do grupo (seja de dois ou quatro elementos), pelo que podemos concluir que este exemplo funcionou como exemplo fulcral. Pela conclusão das investigadoras, podemos também inferir que o segundo exemplo funcionou como exemplo ponte para o aluno que primeiro resolveu o conflito, mas não para os restantes alunos. Esta conclusão, por outro lado, reforça as reivindicações de que a vivência de um conflito cognitivo não é suficiente para que exista uma mudança conceptual, uma reorganização do conhecimento.

4.7.7 Exemplos Passivos e Exemplos Activos

Karem Karağaç, num trabalho sobre o tipo de exemplificação utilizada por professores de duas escolas da Turquia, aponta dois tipos de exemplos: *Exemplos Passivos* e *Exemplos Activos* (cf. 4.6).

Os ***Exemplos Passivos*** são exemplos típicos de categorias mais amplas, não pretendem qualquer tomada de acção dos alunos. A sua intenção é exemplificar o conceito ou o procedimento apresentado anteriormente. Os *Exemplos Passivos*, neste âmbito, são parte das explicações do professor. São o caso de

- *Exemplo Passivo de Conceito*: o professor mostra que $f(x)=3$ é um exemplo do conceito de *função constante.*
- *Exemplo Passivo de Procedimento*: o professor mostra como encontrar a função inversa de $f(x)=x-1$, depois afirma que $x+1$ é o inverso da dela.

Os *Exemplos Activos* são aqueles que apelam a que a audiência tome algum tipo de acção, mais precisamente que resolva o exemplo. Os Exemplos Activos requerem que o professor ou os alunos usem vários conhecimentos matemáticos adquiridos

anteriormente. Estes exercícios podem ser olhados como exercícios, no sentido de que o seu uso pode constituir uma forma de praticar conhecimentos prévios.
A maior diferença entre estes dois tipos de exemplos é que os *Exemplos Activos* não proporcionam um entendimento matemático inicial das ideias envolvidas. Porém, os exemplos Passivos ajudam os estudantes a compreender a informação matemática abstracta.

4.7.8 Dê exemplo de … (com restrições)

Se propusermos a uma turma de alunos, onde foi leccionado o conceito de função afim $f(x)=ax+b$, a tarefa

Verifique se o par $(2,-5)$ é solução da função $f(x)=-3x-7$.

seguramente, todos os alunos se dedicarão a cumprir a tarefa proposta sem qualquer dúvida quanto ao seu objectivo e, também sem qualquer incerteza, saberão quando é que a tarefa pode ser dada por concluída.
Contudo, se a tarefa proposta àqueles mesmos alunos for

Dê exemplo de uma função afim que admita como solução o par $(2,-5)$.

talvez se instale alguma confusão entre os alunos. Com algum grau de certeza, existirá algum aluno que encontre esta tarefa *estranha*, ou que dirá que o exercício está *ao contrário*. A tarefa parece estar ao contrário das usuais e mais familiares porque normalmente aos alunos lhes é pedido algo da natureza da primeira tarefa; neste sentido, os papéis usuais do que é *pedido* e do que é *dado* estão invertidos na segunda tarefa (Hazzan e Zazkis, 1997, 1999). O certo, é que este tipo de actividade, onde se invertem a ordem das coisas, não é a *usual.* Este tipo de actividade contraria a prática comum em que é adquirido que os exemplos, tais como questões e problemas, são apresentados aos estudantes (Watson e Mason, 2005; Abdul-Rahman, 2006) e não é usual ser proposta pelos professores e, consequentemente, não é usual ser realizada por alunos. O *normal* é que seja o professor a produzir os exemplos e os alunos a dar-lhes sentido, as excepções a este padrão são obtidas nos momentos de avaliação ou de motivação (Watson e Mason, 2002b). Mas será que é desejável que sejam sempre os professores a apresentar os exemplos aos alunos? Não será, porventura, melhor pedir aos alunos que apresentem os seus próprios exemplos e não-exemplos? Serão eles capazes de o fazer? Dada uma conjectura falsa, serão os alunos capazes de apresentar contra-exemplos? (Selden e Selden, 1998)
Com efeito, seguir os exemplos de outros e construir os próprios exemplos pode ser comparado à diferença entre "conhecimento-ouvido" e "conhecimento-construido" (Bereiter e Scardamalia, 1987); se o aluno consegue produzir um exemplo estruturalmente diferente daquele que lhe foi apresentado, muito provavelmente, além da generalização, produz-se uma transformação do conhecimento (Watson e Mason,

2002b). Além disso, a actividade de construção de exemplos é um bom instrumento de avaliação das aprendizagens dos alunos, em termos da revelação de pontos fortes e debilidades (Bratina, 1986).
Diz-nos a experiência que se o professor insistir que esta tarefa seja realizada pelos alunos, ele poderá seguramente notar a incomodidade com que os alunos a realizarão. A razão pela qual este tipo de tarefas não é, geralmente, do agrado dos alunos baseia-se no facto de que a solução ao problema não seja única. Pelo contrário, este tipo de problema admite infinitas soluções.
Aquilo que intuição e a experiência nos dizem é confirmado pela investigação de Hazzan e Zazkis (1997, 1999). As duas investigadoras puderam comprovar que este tipo de actividade, "Dê um exemplo de…" é mais difícil para os alunos. Embora a grande maioria dos alunos conseguisse realizar aquilo que era pedido, este tipo de actividade tomava mais tempo e cálculo aos alunos comparado com as actividades usuais, bem como alguma falta de confiança nos resultados apresentados.
Segundo Hazzan e Zazkis (1997), que torna este tipo de tarefa diferente daquelas que normalmente são apresentadas aos alunos são três aspectos:

- Inverte o que tradicionalmente é dado e o que é pedido.
- Este tipo de problema convida à exploração das propriedades das noções matemáticas.
- Têm muitas mais, infinitas, soluções.

No fundo, estes exemplos são objectos matemáticos criados por alunos que são exemplos de uma dada classe de objectos (Sinclair, Watson e Zazkis, 2004) porque partilham das propriedades expressas na tarefa.

No que respeita à investigação sobre o ensino e aprendizagem da matemática, a inversão de tarefas não é recente e tem-se mostrado uma técnica de investigação útil. Por exemplo, Ball (1990) pediu aos alunos que dessem um exemplo de uma situação problema que pudesse ser resolvida usando um dado exercício de divisão. Também Simon (1993) pediu a alunos que criassem um problema que pudesse ser resolvido com uma divisão, incluindo divisões com fracções. No entanto, para Hazzan e Zazkis (1997), esta forma de apresentar uma actividade matemática não deve ser vista como uma técnica de investigação do ensino e aprendizagem da matemática, mas como parte integrante do ensino e da aprendizagem da matemática. Muitas vezes, enquanto os professores tratam de aspectos gerais dos conceitos, os alunos podem construir raciocínios específicos que são veiculados apenas por aqueles exemplos em particular, excepto se forem tomadas medidas específicas para chamar a atenção dos alunos para aquilo que deve ser aprendido; fazer com que os alunos dêem exemplos pode revelar aquilo a que os alunos estão a dar atenção e, deste modo, o que eles consideram importante (Abdul-Rahman, 2006).

Na essência deste tipo de actividade está a criação de um objecto matemático que respeita determinadas propriedades. Os alunos exibem e reconhecem a dificuldade emocional para lidar com os graus de liberdade que as situações de inversão apresentam. Os alunos sentem muitas incertezas quando postos em situação de ter que tomar decisões, muitas vezes preferem desistir e evitar fazer escolhas quando não existe uma forma única de proceder (Hazzan e Zazkis, 1997; 1999).

A construção de um objecto que verifica as propriedades apresentadas é também um bom recurso didáctico. Este processo de construção ajuda o aluno na elaboração mental de noções matemáticas relevantes num nível mais alto de abstracção. Isto acontece porque, no processo de construção dos objectos, os alunos devem tratar com os conceitos através das suas propriedades e não por procederem a vários cálculos, que até poderiam ser executados sem a compreensão da essência do conceito em estudo (Hazzan e Zazkis, 1997; 1999). É por isso que as autoras afirmam que as actividades do tipo "*Dê um exemplo de…*" deveriam ser implementadas nos diferentes níveis de ensino e nos diversos conteúdos matemáticos porque, para além de promover a construção de conceitos pelas suas propriedades, também fomentam a participação activa dos alunos nas aulas e cria uma atmosfera mais criativa na sala de aula.
A apresentação de exemplos por parte dos alunos pode ser um bom instrumento de avaliação da sua capacidade de generalização em determinada fase da sua formação matemática. De outra perspectiva, se um aluno conseguir generalizar um qualquer processo, em termos de raciocínio algébrico, então ele poderá exemplificar de forma correcta sobre o objecto matemático que generalizou. Houssart e Evens (2005) estudaram a capacidade de generalizar, através da apresentação posterior de exemplos, de 364 alunos de onze anos. A apresentação de exemplos constitui uma evidência da capacidade destes alunos raciocinarem algebricamente logo nos primeiros anos da sua formação. A questão apresentada a estes alunos de onze anos estava inserida num contexto dos resultados apresentados por dois piões (rapas) de seis faces numeradas. Pela apresentação dos rapas, com as respectivas numerações das faces, é perguntado aos alunos se a soma dos dois resultados é sempre par, a resposta de SIM ou NÃO deveria ser justificada por um pequeno texto. Seguidamente são apresentados dois rapas em branco, pedindo-se aos alunos que numerassem as faces dos dois rapas de forma que, após rodados, a soma dos dois resultados fosse sempre impar. O objectivo da tarefa foi avaliar se os alunos cuja resposta à primeira pergunta tivesse sido correcta – tivessem generalizado o resultado da soma em termos de soma de pares e impares – podiam exemplificar correctamente com base na restrição "a soma ser sempre impar". Os resultados a que chegaram confirmam resultados dados por outros trabalhos anteriores:

- Os alunos têm mais dificuldade em generalizar e apresentam exemplos com mais facilidade. Esta afirmação é suportada pela existência de um número significativo de alunos que não podendo generalizar puderam encontrar uma numeração correcta para os dois rapas de modo a verificar a restrição, mostrando que entenderam a situação.
- A construção de exemplos correctos evidencia a correcta generalização da situação apresentada. A grande maioria dos alunos que justificaram a primeira resposta de forma correcta puderam apresentar numerações correctas dos dois rapas de modo a verificar a restrição.

As potencialidades de tarefas do género "*Dê um exemplo de…*" não se limitam apenas ao conceito que se estude no momento, no sentido em que o aluno aprofunda o conceito através das suas propriedades. Isto é, enquanto o aluno se ocupa em gerar exemplos característicos de um determinado conceito e que satisfazem certas propriedades, ele constrói noções mais gerais na sua mente; quando o aluno gera um exemplo sob determinada restrição, uma construção mental paralela é criada na sua mente (Hazzan e Zazkis, 1999). Para além disso, quando o aluno constrói um exemplo de um determinado conceito que satisfaz as restrições impostas, também constrói uma *ligação* entre dois (ou mais) conceitos. Além das ligações entre conceitos, também se produzem ligações entre os exemplos e a definição formal, ajudando os alunos a terem uma melhor ideia sobre que objectos pertencem a um dado conjunto (Alcock e Simpson, 2002). Os conceitos podem ser estruturas matemáticas como números, funções, conjuntos, etc. ou propriedades matemáticas como divisibilidade, simetria ou equivalência (Hazzan e Zazkis, 1999). São estas ligações que formam um objecto matemático mais complexo a que habitualmente se chama *um esquema* (e.g. Skemp, 1971). Para Dubinsky (1991), um esquema é uma colecção mais ou menos coerente de objectos e processos e, para Hazzan e Zazkis (1999), um esquema é composto por conceitos que podem ser objectos ou processos e as ligações entre eles.

Assim, quando se propõe a um aluno que crie exemplos que satisfaçam as restrições apresentadas, estamos a obrigar o aluno a descrever o objecto que criou pelas suas propriedades e isto pode ajudá-lo na construção mental de conexões que liguem os conceitos matemáticos relevantes (Hazzan e Zazkis, 1999). Ou, então, pedindo ao aluno que dando alguns exemplos expresse as suas dúvidas e que ilustre o que aprendeu, permite esperar que se obtenha resultados positivos ao nível cognitivo (Watson e Mason, 2002b).

No entanto, as actividades baseadas na criação de exemplos pelos alunos não se prestam somente ao aprofundamento dos conceitos, ou estabelecimento de ligações e construção de estruturas e esquemas matemáticos. Propondo aos alunos que dêem exemplos de algo pode ser uma boa forma de introduzir novos conceitos nas aulas de matemática (Watson e Mason, 2005), embora com certas cautelas (Watson e Shipman, 2008). Tomando os estudos neste âmbito de Watson e Shipman (2008), pedir aos alunos que dêem exemplos de conceitos dos quais não tenham conhecimento pode parecer inútil, a menos que seja possível adaptar os conhecimentos prévios de forma a encaixarem em novas restrições. Assim, sem recurso a processos indutivos com exemplos para aprender os conceitos subjacentes, foi possível demonstrar que à custa da reflexão sobre resultados e sobre a estrutura interna dos exemplos, em situações matemáticas novas, os alunos aprenderam algumas ideias totalmente novas (Watson e Shipman, 2008).

Colocar, deliberadamente, os alunos a gerar exemplos é uma ferramenta particularmente eficiente no ensino, mas, enquanto algumas das possibilidades que oferece são aplicadas por muitos professores, a totalidade das suas potencialidades raramente são exploradas. Para que se possa extrair mais desta técnica de ensino, Watson e Mason (2002b) propõem as condições que se requerem para procurar e construir exemplos. Um trabalho detalhado, cuidadoso e criativo pode ajudar a estabelecer estas condições; cada tipo de tarefa que se descreve é uma observação/experiência que o aluno deve fazer:

Observar sobre a estrutura	Através da execução e reversão os processos: “fazer e desfazer”. Através da exemplificação com restrições nas variáveis. Através de afirmações matemáticas.
Observar e estender a Amplitude de Variação	Vendo exemplos gerados por outros alunos. Através do uso e desenvolvimento das representações. Através da proposta de novas restrições. Construindo diferentes questões que admitam a mesma resposta e diferentes respostas para a mesma pergunta.

Observar a generalidade	Através da percepção dos padrões nos exemplos produzidos. Através da produção de exemplos particular-peculiar-geral[3]. Testando uma série de exemplos.
Observar as restrições e o significado das convenções	Comparar as nossas criações matemáticas com os métodos convencionais. Comparar as criações dos alunos. Através das sugestões que possam ser úteis quando confrontados com a tarefa de gerar exemplos de um tipo específico. Pedindo que ilustrem novos conceitos.
Ampliar os Espaços de Exemplos explorar as suas fronteiras	Exemplificando o que é e o que não é, o que pode e o que não pode. Através da verificação de certas condições e da não verificação de outras. Pedindo que exemplifiquem o que não pode ser conseguido mediante certas condições.
	Watson e Mason, 2002b

Figura 26: Condições que melhoram o processo de apresentação de exemplos

Produzir exemplos requer que se produza algum género de generalização, nem que mais não seja uma generalização de formato. Por isso, o acto de exemplificar é um acto de cognição, muitas vezes com uma componente afectiva positiva (Watson e Mason, 2002b). Exemplificar, do ponto de vista dos alunos, é actuar e não apenas ouvir; é aventurar-se numa actividade exigente em vez de se participar passivamente. Criar condições propícias a que os alunos criem os seus próprios exemplos de todos os géneros leva-os a aprender activamente, a tomar a iniciativa, tomar decisões e actuar sobre as suas ideias em vez de serem passivos (Watson e Mason, 2002b). Não se pretende que os alunos tenham somente a habilidade de criarem exemplos, pretende-se que os alunos tenham a propensão a fazê-lo (Selden e Selden, 1998).

A actividade do género "*Dê um exemplo de… e outro… e ainda outro…*" liga-se de forma muito estreia com outros conceitos já tratados. Sinclair, Watson e Zazkis (2004) juntaram um grupo de professores e de estudantes para professores e propuseram-lhes várias actividades deste tipo. Algumas actividades foram trabalhadas em grupo enquanto outras o foram individualmente, porém os resultados foram sempre discutidos em grande grupo. A intenção deste encontro foi o de explorar as potencialidades, propósitos e implicações pedagógicas de pedir aos alunos que construam os seus próprios exemplos. Os resultados obtidos vinculam-se com áreas tão diferentes como Espaço Pessoal de Exemplos, tipos de exemplos, construção de exemplos pelas suas propriedades, exploração de Dimensões de Variação, Exemplos e Não-Exemplos na construção de conceitos, Contra-Exemplos e Conjectura, Generalização e produção Prova, delimitação de conceitos, aprendizagem pela auto-descoberta, entre outras. Todas as tarefas desafiaram os participantes a gerar exemplos sobre determinadas condições e, com base nos resultados e na discussão subsequente, obtiveram-se pistas no âmbito de Exemplos Gerados pelos Alunos, em língua inglesa "Learner-Generated Examples" (LGEs). A título de exemplo, apresentamos o caso da primeira tarefa

[3] Exemplo particular: Indique um número que dividido por 7 tenha resto 1; Exemplo particular-peculiar: Indique um número que dividido por 7 tenha resto 1 e que esteja compreendido entre 20 e 30; Exemplo particular-peculiar-geral: Indique a forma geral dos números que divididos por 7 tenham resto 1

(Sinclair, Watson e Zazkis, 2004), "A cada participante foi pedido que dissesse o seu nome e desse exemplo de um número entre 99 e 100. Seguidamente foi proposto que se discutisse em pequenos grupos a forma como cada um tinha escolhido o seu número". Esta actividade é do tipo "*Dê exemplo de…*" e, com ela, os promotores do encontro pretenderam introduzir os participantes nos trabalhos do grande grupo e de imediato encontraram aspectos interessantes ao nível social, pedagógico e matemático. No final da tarefa puderam inferir que: (1) Os participantes seleccionaram os exemplos de um espaço de exemplos pessoal, específico para a tarefa, sendo essa selecção muito influenciada pela situação e pelas expectativas, bem como pelos seus conhecimentos previamente adquiridos; muito provavelmente este espaço de exemplos é um subconjunto do seu conhecimento. (2) Um "bom" exemplo tem que ser um exemplo de algo. É largamente aceite que a Matemática é aprendida pelo envolvimento em actividades matemáticas que apelam à construção de significados que são transmitidos, tanto nas aulas como nos manuais, por práticas convencionais (Sinclair, Watson e Zazkis, 2004). Pelo que podemos apreciar dos resultados deste encontro, não existe melhor envolvimento por parte dos estudantes em práticas construtoras de significados que aquelas em que são os próprios alunos a protagonizarem essa construção.

As potencialidades deste instrumento pedagógico não são exclusivas do ensino pré-universitário. Meehan (2007) descreve como a actividade de criação de exemplos foi benéfica para os seus alunos da disciplina de Introdução à Análise. Nesta disciplina a autora, que também era a responsável pela sua leccionação, pediu aos seus alunos que mantivessem um portefólio onde colocariam os exemplos provindos das tarefas propostas pela autora. Segundo Meehan, a manutenção de um portefólio foi uma forma familiar de introduzir uma actividade nova. Os alunos estavam familiarizados com este tipo de trabalho quotidiano e, com ele, introduziram-se na nova actividade que consistiu em realizar actividades do tipo "*Dê exemplo de…* (com restrições)" baseadas na técnica de encontrar exemplos delimitantes (Watson e Mason, 2001, 2005). Esta técnica consiste em pedir aos estudantes um exemplo do conceito A e, depois, um exemplo do conceito A que satisfaz a condição C1. A seguir, que dê um exemplo do conceito A, que satisfaça a condição C1 e que também satisfaça uma condição adicional C2. E assim sucessivamente, caso se deseje. Meehan propôs semanalmente este tipo de tarefa aos alunos, os exemplos criados eram introduzidos nos respectivos portefólios e, no final do trimestre, avaliados pela docente. A investigadora é clara na sua opinião positiva e enumera as vantagens que encontrou ao propor aos estudantes que gerassem os seus próprios exemplos. Este tipo de actividade permite a validação do trabalho do estudante, sendo que este é um aspecto chave, especialmente quando a questão permite múltiplas respostas correctas para os exemplos pedidos e se são os estudantes a corrigir o trabalho uns dos outros em pequenos grupos. Isto permite detectar erros nos seus raciocínios e promove o debate sobre os conceitos. Por outro lado, a manutenção de um portefólio com os exemplos que resultaram das actividades empenha os estudantes naquelas que são consideradas as boas práticas matemáticas e permite, também, que o professor o acompanhe durante o trimestre. Finalmente, o estudo (Meehan, 2007) deixa antever que se os estudantes universitários forem encorajados na construção de exemplos em todas as disciplinas de matemática avançada, então talvez venham a adoptar naturalmente a construção de exemplos como a melhor forma de fazer matemática.

Quando se pede aos alunos que construam os seus próprios exemplos, eles experimentam a vivência da descoberta, da construção ou junção de um espaço de objectos juntamente com as suas ligações, de forma a conseguirem novos significados e compreensões. Dahlberg e Houseman (1997) puderam constatar que os estudantes que empregaram estratégias de aprendizagens baseadas na construção de exemplos logo após a introdução de um conceito foram mais efectivos em alcançar a compreensão desse conceito que os estudantes que inicialmente empregaram outras estratégias de aprendizagem, seja a reformulação da definição, memorização ou decomposição e síntese.
Sendo a actividade de geração de exemplos maioritariamente executada pelos alunos, o papel do professor é determinante. É ao professor que cabe indicar quais os exemplos apresentar, com que restrições e verificando que propriedades; ao propor este tipo de actividades é, no fundo, o professor que determina que exemplos estarão a ser criados e de que conceito. Os espaços de objectos matemáticos proporcionados por manuais e pelos professores podem ser um bom ponto de partida para posteriores alargamentos. Tal como em qualquer tipo de aprendizagem, o aluno parte daquilo que já é conhecido, um conjunto próprio daquilo que é relevante. Por outras palavras, através da criação de exemplos com base em actividades "*Dê Exemplo de…*" os alunos consciencializam-se das Dimensões de Variação Possíveis e das respectivas Amplitudes de Mudança Permitidas, com as quais podem ampliar os seus Espaços de Exemplos (Bills *et al.*, 2006).

Toda a bibliografia referida até este ponto pressupõe a separação nítida entre *gerar exemplos* e *verificar exemplos*. Por outras palavras, uma coisa é ser o aluno a *gerar* os seus próprios exemplos de uma definição em estudo, outra coisa é o aluno *verificar que* (ou, *verificar se*) um exemplo que lhe é apresentado é exemplo da definição em estudo. No fundo, são duas visões que quase se opõem. A segunda é vista como a tradicional, o professor apresenta a definição do conceito e alguns exemplos e não-exemplos e, de seguida, apresenta outros tantos para que os alunos os trabalhem; verifiquem que são (ou se são) exemplos do conceito em estudo, verificando se estão conformes às propriedades apresentadas na definição. A primeira é a *nova* forma de trabalhar os conceitos em estudo e cujas virtudes se apresentaram nas linhas anteriores.
A total separação destas duas formas de tratar conceitos, gerar *versus* verificar, é posta em causa por Asghari (2007). Mediante uma relação de equivalência, plasmada num jogo, designado por "A tarefa do Ditador Maluco", que obriga à observância de duas condições para se poder formar um plano de visita a dez cidades, cada plano que verifique as duas condições é considerado um exemplo correcto.
Através da geração dos exemplos e da observação desse processo, o investigador argumenta que, no que respeita à *geração* de exemplos, a sua separação da *verificação* de exemplos radica nas *concepções* (sobre o conceito subjacente) do aluno e na forma que ele aborda a geração de exemplos e não tanto da vontade do professor. Participaram no estudo mais de vinte estudantes das mais variadas proveniências académicas e consideraram o jogo muito complicado porque não era fácil construir um plano de visita que verificasse as duas condições. O principal resultado obtido nesta investigação é a constatação de que os estudantes enquanto arquitectavam um possível plano – gerar um exemplo – iam fazendo sucessivas verificações do plano às duas condições impostas. A esta ligação que, segundo Asghari (2007), tem permanecido ignorada foi chamada "O

Elo Perdido". O que o investigador observou é que o processo de construção dos exemplos depende da interpretação das duas condições do jogo e da abordagem ao problema escolhida pelo estudante; o sentimento de dificuldade determina a frequência das sucessivas verificações. Para ele, estas observações inserem-se naquilo que Marton e Booth chamaram *o caminho da aprendizagem*: "A aprendizagem provém de um todo indiferenciado e vago em direcção a uma estrutura diferenciada e integrada de partes ordenadas… quanto mais este princípio se aplica a um dado indivíduo, melhor sucedida será a aprendizagem que ocorre" (Marton e Booth, 1997, p. 138). Contudo, não se pode dizer que os aspectos que foram diferenciados e integrados quando se desempenha uma dada tarefa possam ser transportados para outra. O seu uso é específico. No caso estudado por Asghari (2007), isto quer dizer que existem certas interconexões entre *o que* o estudante conceptualiza e *como* ele gera os exemplos. Nesta mesma linha, existem certas interconexões entre o *que* o estudante conceptualiza e *como* ele verifica o status do objecto para que possa ser considerado exemplo. Isto sugere que *gerar* relaciona o *como* com o *quê*, e que *verificar* relaciona o *quê* com o *como*. Aquilo que se experimenta num processo não é necessariamente idêntico ao que se experimenta com o outro, eles variam em certos aspectos; no conjunto manifestam a variação nas experiências do estudante com o conceito envolvido. Reconciliando os vários aspectos desta variedade pode resultar numa reconciliação entre *gerar* e *verificar* e, consequentemente, deixaria de existir a necessidade de verificar depois de gerar. No entanto, isto não que dizer que deixem de ser necessárias as actividades de *verificar*. De facto, necessitamos delas lado a lado com as actividades de *gerar*, já que é enquanto atacamos diferentes tarefas que os diferentes aspectos dos conceitos podem ser diferenciados e integrados. É desta forma que os estudantes podem encontrar o elo perdido entre Gerar e Verificar exemplos.

No âmbito da construção de exemplos, Mason e Watson (2001) introduzem a seguinte conjectura:

> "Se não formos capazes de criar *exemplos delimitantes* (Mason e Watson, 2001) para um teorema ou uma técnica, então não seremos capazes de os compreender ou valorizar."

Neste sentido, Mason e Watson não reivindicam que a construção de exemplos constitui a compreensão do conceito ou técnica, mas que faz uma contribuição muito útil no alcance da competência e familiarização com o assunto.

Para distinguir o que é "*dar exemplos… (com restrições)*" e construir *exemplos delimitantes* Mason e Watson (2001) propõem a seguinte tarefa:

1. Esboce o gráfico de uma função real de variável real com domínio [0,1] e contradomínio [0,1].
2. Esboce o gráfico de uma função real de variável real com domínio [0,1], com contradomínio [0,1] e que seja contínua.
3. Esboce o gráfico de uma função real de variável real com domínio [0,1], com contradomínio [0,1], que seja contínua e que tenha um máximo num dos extremos do domínio.
4. Esboce o gráfico de uma função real de variável real com domínio [0,1], com contradomínio [0,1], que seja contínua, que tenha um máximo num dos extremos do domínio e um mínimo no outro extremo.
5. Esboce o gráfico de uma função real de variável real com domínio [0,1], com contradomínio [0,1], que seja contínua, que tenha um máximo

> num dos extremos do domínio, um mínimo no outro extremo e que possua máximo e mínimo locais no interior do domínio.

Esta tarefa é um caso de construção de exemplos com restrições. Mas, se quisermos uma tarefa que pretenda que o aluno construa exemplos delimitantes, proponha-se o seguinte:

> Realiza a tarefa outra vez, desde o início da lista, tendo em consideração que cada exemplo não pode satisfazer a restrição que se adiciona no ponto seguinte.

Assim, o primeiro exemplo teria que ser o esboço de uma função descontínua, a última Teria máximo e mínimo nos extremos do domínio mas não poderia ter máximo e mínimos locais no interior do domínio.
Um dos efeitos que este tipo de tarefa tem nos alunos (e professor) é de torná-los conscientes de que se usa em excesso o *exemplo genérico* quando fala em determinado tópico. A palavra "exemplo" pode ser usada no sentido de "um exemplo especial" ou de "um exemplo óbvio", assim, pode-se pedir aos alunos que apresentem um exemplo particular e, depois, um exemplo peculiar (um exemplo que mais ninguém na sala se lembrasse de apresentar), e por fim, um exemplo geral. Pela construção de exemplos delimitantes os alunos são forçados a ampliar os seus espaços de exemplos se quiserem completar a tarefa proposta. Portanto, um dos efeitos é de tornar o aluno mais consciente da variedade de possibilidades de escolha quando ele selecciona o exemplo, e isto é precursor da possibilidade do aluno expressar a generalidade.

O sucesso conseguido na relação com a Matemática, especialmente nos níveis universitários e pós-universitários, parece estar associado com a facilidade em gerar exemplos e contra-exemplos. Qual é a melhor forma de desenvolver esta habilidade? Por tudo o que foi dito acima, sugere-se que a actividade "*Dê um exemplo de…*" seja proposta aos alunos de todos os níveis de ensino. Presumindo as dificuldades epistemológicas inerentes a encontrarmos exemplos por nós próprios, estarão os professores, na tentativa bem intencionada de ajudar os alunos a entender as definições dos novos conceitos, a estorvá-los? A refrear o seu desenvolvimento pela apresentação de exemplos pré tratados pelos professores?

4.8 Relações entre a exemplificação e o conhecimento do professor

O conhecimento que o professor de matemática utiliza para ensinar matemática é diferente do conhecimento estritamente matemático (e.g. Risseland-Michener, 1978; Shulman, 1986). Nos trabalhos mencionados em quase todos os itens anteriores pôde-se apreciar, de alguma forma, as relações que sempre existem entre os exemplos que o professor escolhe para ensinar determinado conceito e o conhecimento matemático que ele próprio tem desse conceito, bem como, do conhecimento de como o ensinar. Embora nas secções anteriores se incluam trabalhos e estudos onde a relação entre a exemplificação do professor e o seu conhecimento seja implícita, por questões de sua estrutura, os resultados que resultam dos trabalhos e estudos possuem características determinantes que os incluem naquelas secções, **4.2.3 O Uso de Exemplos em Investigação** e **4.6 Escolha de Exemplos pelo Professor**. Referimo-nos, por exemplo:

- Huckstep, Rowland, e Thwaites (2003): "Observing subject knowledge in primary mathematics teaching"
- Rowland, Huckstep e Thwaites (2003b): "The knowledge quartet"

- Rowland, Thwaites, and Huckstep (2003b): “Elementary Teachers’ Mathematics Content Knowledge and Choice of Examples”
- Rowland, Huckstep, and Thwaites (2004): “Reflecting on prospective elementary teachers’ mathematics content knowledge: the case of Laura”
- Zaslavsky, Harel e Manaster (2006): “A Teacher’s treatment of examples as reflection of her knowledge-base”
- Zodik e Zaslavsky (2007b): “Exemplification in the mathematics classroom: what is it like and what does it imply?”
- Figueiredo, Blanco e Contreras (2007): “La ejemplificación del concepto de función en estudiantes para profesores de Matemáticas en Secundaria”
- Zaslavsky (2008): “What knowledge is involved in choosing and generating useful instructional examples?”

A forma como o professor transmite a informação matemática aos seus alunos assenta em grande medida na exemplificação que ele emprega. De qualquer modo, a exemplificação que o professor utiliza depende basicamente do seu conhecimento como professor e do grau de refinamento que o professor conseguiu alcançar nos anos de carreira que somou. O grau de refinamento do seu conhecimento enquanto professor permite, conscientemente ou não, adequar um exemplo a uma situação, preferir este exemplo ou evitar aquele outro e apresentar uma sequência de exemplos por uma determinada ordem. A forma como o professor utiliza os exemplos é um processo complexo e envolve (pelo menos) tantos aspectos como os que apresentamos neste capítulo. A qualidade da exemplificação depende de todos eles. Se atendermos às palavras de Skemp (1971), toda a informação irrelevante transportada por um exemplo pode ser vista como *ruído*, e quanto mais ruído existir maior é a dificuldade em construir um conceito. Por isso, quando o professor apresenta um exemplo que na sua perspectiva ilustra determinada informação matemática, o aluno pode prestar mais atenção a aspectos que são irrelevantes e, com isso, ver-se impedido de apreciar aquilo que o professor considera essencial. Como afirmam Mason e Pimm (1984), é a capacidade de apreciar o que é geral através do que é particular que reside a essência da exemplificação. É através da variação, como vimos, que o professor pode estruturar o sentido da coisa matemática, sejam conceitos, procedimentos ou uso de teoremas. O professor, através dos exemplos que apresenta, expõe a estrutura matemática através das variações sobre alguns aspectos enquanto mantém outras invariáveis. Dessa forma, os alunos são levados a perceber a estrutura e, consequentemente, a generalizarem (Watson e Mason, 2006). A utilização de exemplos transparentes ajuda a tornar efectiva a separação entre o que é relevante e o que não é, ajuda a *forçar* os alunos a trabalharem apenas os aspectos explícitos da exemplificação do professor e, portanto, ajuda a diminuir o ruído daquilo que não é importante.
Todas estas coisas são apropriadas quando se pensa a exemplificação como meio de evidenciar o que é importante, o que é relevante e os aspectos a considerar. Por tudo o que se referiu, é natural que se considerem as três vertentes do conhecimento do professor que estão fortemente relacionadas com a exemplificação matemática que o professor proporciona aos seus alunos: o conhecimento do conteúdo matemático, o conhecimento do aluno e o conhecimento didáctico do conteúdo (Shulman, 1986). Para Zodik e Zaslavsky (2008), a qualidade do conhecimento do conteúdo matemático afecta o que é ensinado e como é ensinado. No que respeita à exemplificação, o aspecto

matemático do exemplo está ligado à verificação de certas condições matemáticas que dependem do conceito ou do princípio que se pretende ilustrar. O conhecimento dos alunos vincula-se à compreensão que o professor tem de como os alunos conseguem aprender e como os seus conhecimentos prévios afectam a construção de novos conhecimentos. Também se relaciona com a sensibilidade que o professor tem sobre as debilidades e com as potencialidades nas aprendizagens dos seus alunos e, no que se refere à exemplificação, com a consciência das consequências das *sub* e *sobre* generalizações que os alunos possam fazer dos exemplos apresentados. A isto, junte-se a tendência que os alunos possam ter para se fixarem nos aspectos irrelevantes do exemplo em vez de atenderem aos seus aspectos fundamentais. O conhecimento didáctico do conteúdo liga-se com a transformação da matemática em meios pelos quais a aprendizagem pode ser facilitada; isto inclui *formas de representação e formulação do assunto que o torne compreensível aos outros* (Shulman, 1986). Na verdade, os exemplos são inseparáveis das suas representações e, realmente, eles existem para ajudar a que matemática seja compreensível para os alunos." (Zodik e Zaslavsky, 2008, p. 167).
Mason e Spence (1999) apontam um aspecto do conhecimento do professor ao qual chamaram *saber actuar no momento*. Este aspecto do conhecimento relaciona-se com as formas criativas como o professor responde às situações de aula no momento em que ocorrem (por vezes inesperadas) que requerem uma acção imediata por parte do professor, formas que se apoiam na crescente consciência do acto de ensinar e na constante reflexão. A resposta imediata às solicitações dos alunos é um aspecto do trabalho do professor que se consegue com a prática e que apela ao trabalho colaborativo entre professores e, no que respeita à exemplificação, é a diferença entre o ter e o não ter um exemplo adequado que possa ser apresentado aos alunos de forma pronta e espontânea que constitui o cerne da relação entre o conhecimento do professor e a exemplificação matemática.

Nesta secção, incluímos os trabalhos de investigação e os respectivos resultados cujas características estejam marcadamente vinculadas à relação entre a exemplificação e o conhecimento do professor. Essa relação pode ser entendida como o processo de materialização do conhecimento do professor. A exemplificação encerra os vários conhecimentos do professor, principalmente o conhecimento do conteúdo matemático e o conhecimento didáctico do conteúdo, e é por isso que os estudos que relacionam o conhecimento do professor com a exemplificação por ele usada se centram na escolha e uso dos exemplos.

Ball e colegas (2005) consideram a utilização de exemplos um importante aspecto do conhecimento profissional do professor. Estes investigadores debruçaram-se sobre a importância estratégica dos algarismos que são incluídos no ensino da diferença entre dois números para construírem a sua teoria do conhecimento matemático para o ensino. Estes autores assumem que a deficiente compreensão da natureza especializada e aplicada do *conhecimento matemático para o ensino* continua a frustrar os bem intencionados esforços para melhorar a qualidade da preparação profissional dos professores. Porém, os estudos mais recentes proporcionaram uma nova forma de olhar esta problemática. Estes estudos revelaram duas coisas: (1) as exigências do ensino da matemática são significativas e (2) o estudo do *conhecimento matemático para o ensino* beneficia bastante dos estudos concomitantes sobre a tarefa de ensinar. Pelas análises que efectuaram sobre a prática docente, os autores definiram um enquadramento teórico baseado na prática do conhecimento matemático para o ensino. A teoria assenta em quatro domínios (Ball, Bass, Sleep e Thames, 2005):

i. Conhecimento Comum do Conteúdo. É o conhecimento matemático que se tem do currículo escolar, pode ser idêntico ao conhecimento que qualquer adulto possa ter sobre o mesmo assunto e é um conhecimento ao nível do *como se faz*.
ii. Conhecimento Especializado do Conteúdo. É um conhecimento matemático que os professores usam no ensino e que está para lá do próprio conhecimento do currículo. É um conhecimento matemático que não envolve o conhecimento da pedagogia e dos alunos, envolve apenas o conhecimento especificamente necessário para exercer a tarefa de ensinar e é um conhecimento ao nível do *porquê se faz dessa maneira*.
iii. Conhecimento dos Estudantes e do Conteúdo. Radica na intersecção do conhecimento sobre os alunos e sobre a matemática e envolve o conhecimento das preferências e das dificuldades dos alunos em determinados temas e tópicos matemáticos, das concepções e das concepções erróneas, do que os alunos consideram interessante ou desafiante e aquilo que os alunos normalmente fazem em determinadas tarefas matemáticas.
iv. Conhecimento do Ensino e do Conteúdo. Contém o conhecimento sobre a sequenciação para ensinar um tópico matemático em particular, sobre as vantagens e desvantagens das representações usadas para ensinar uma ideia matemática específica e sobre quais os exemplos úteis que melhor realçam as questões matemáticas importantes.

A importância que os exemplos têm nesta teoria do *conhecimento matemático para o ensino* pode ser avaliada pela forma como ela vem descrita e pelo destaque que lhes é dado. Para descrever cada um dos quatro domínios Ball e os seus colegas recorrem a exemplos de subtracções e multiplicações entre números. Por exemplo, com um caso de multiplicação pode-se distinguir os vários conhecimentos envolvidos:

- Calcular o produto entre dois números com vários dígitos.
- Analisar os erros de cálculo que a operação possa apresentar.
- Identificar o raciocínio do estudante que provavelmente provocou o erro.
- Reconhecer quais os exemplos que melhor ilustram os principais aspectos do algoritmo relativos às casas decimais.

Huntley (2008) examina as relações decisivas entre o conhecimento do conteúdo matemático e o uso que faz dos exemplos no processo de ensino e aprendizagem; sejam os exemplos gerados pelo próprio professor ou sejam gerados pelos alunos, na sala de aula. O estudo foi feito ao nível do conhecimento do conteúdo matemático em professores primários em estágio (práticas) e em como este conhecimento influenciou as suas escolhas de exemplos. Os resultados a que Huntley chegou prendem-se com algumas evidências de que a consciência das questões teóricas é fraca, o conhecimento do conteúdo foi a causa da ansiedade apresentada e que o processo de selecção dos exemplos para o ensino e aprendizagem da matemática foi predominantemente aleatório em vez de pedagogicamente planeado.

Na generalidade dos estudos referidos para estudar o conhecimento dos professores pode-se verificar que a primazia é dada aos objectos matemáticos por eles apresentados e que se enquadram num tópico matemático determinado. Normalmente o que determina o âmbito dos exemplos a apresentar é uma definição de um conceito. Porém, Zazkis e Leikin (2008), para estudar a forma como os estudantes para professores de um grupo compreendem o conceito geométrico de quadrado, analisaram as definições de quadrado que cada participante apresentou. Por outras palavras, em vez de se pedir aos participantes que apresentassem objectos matemáticos obtidos de uma definição, pediu-se aos participantes que dessem exemplos da definição do objecto apresentado. No estudo que Zazkis e Leikin (2008) efectuaram teve como objectivo observar como o conceito de quadrado é compreendido por todos os participantes; para as duas investigadoras os exemplos de definição que são sugeridos pelos estudantes para professores espelham a sua compreensão dos conceitos matemáticos, as concepções que sobre eles têm, qual o seu repertório pedagógico, as suas dificuldades e as suas inadequações de percepção matemática. A cada participante foi proposta a mesma tarefa: "Dê o maior número possível de exemplos de definições de quadrado" e, sobre cada definição apresentada, estudaram-se diversas características. Verificou-se se as definições eram correctas na sua estrutura lógica, observou-se a variedade de contextos de onde as definições foram extraídas e atendeu-se à generalidade transportada por cada uma das definições. As conclusões específicas deste estudo (Zazkis e Leikin, 2008) podem ser incluídas em vários campos: proporciona mais informação sobre como os estudantes para professores vêem e entendem o conceito de quadrado e o conceito meta-matemático de definição; mostra como os exemplos gerados pelos participantes pode servir como lentes na observação das suas compreensões dos conceitos; e por fim, examina e propicia ferramentas que refinam o enquadramento teórico desenhado para analisar exemplos e espaços de exemplos. Por outro lado, os estudantes para professores, quando confrontados com diversas definições do mesmo conceito, tendiam a olhá-las de um ponto de vista pedagógico e não matemático; a questão "Que exemplos da listagem são definições válidas de quadrado?" era frequentemente respondida com argumentos implícitos a uma pergunta do tipo "Quais das seguintes definições de quadrado usaria eu com os meus alunos?". A conclusão final aponta no sentido de que, se o conhecimento do professor é um pré-requisito para o sucesso dos estudantes, a exemplificação de definições de um dado conceito constitui uma actividade valiosa, tanto pedagógica como matemática, na promoção de uma compreensão conceptual mais profunda da Matemática em geral, e da natureza e do papel das definições em particular.

Zodik e Zaslavsky (2008) aprofundaram a relação entre o conhecimento do professor e a exemplificação mediante a análise da exemplificação dos professores em duas vertentes bem delimitadas: a exemplificação planeada *versus* a exemplificação espontânea e, nos dois casos, o conhecimento que é subjacente à escolha de exemplos.
Uma das facetas importantes do trabalho do professor relaciona-se com a tomada de decisão; parte do trabalho pode ser feito antecipadamente com um planeamento cuidadoso enquanto outro tem que ser feito em tempo real "pelo seu próprio pé" em resposta às situações de aula que, frequentemente ocorrem de forma inesperada. Uma grande parte dessas decisões espontâneas envolve a escolha de exemplos como resposta às interacções da sala de aula. Este tipo de actuação momentânea também pode ser analisada em termos da flexibilidade do professor na resolução de situações específicas.

Neste estudo, as investigadoras usaram a exemplificação planeada e a exemplificação espontânea para, através dos exemplos escolhidos, poderem examinar as considerações subjacentes às relações entre o conhecimento do professor e a exemplificação apresentada e exporem, deste modo, o conhecimento-na-acção e a facilidade de acesso aos espaços de exemplos dos professores. Através deste estudo, fica claro o interesse que as autoras também compartem sobre a articulação do conhecimento matemático necessário para o ensino, simultaneamente com o aumento do interesse que se tem vindo a observar relativamente ao papel multifacetado e decisivo que os exemplos têm no ensino e aprendizagem da matemática (Zazkis e Chernoff, 2008; Zaslavsky e Zodik, 2007; Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson e Zaslavsky, 2006; Watson e Mason, 2005). Assim, este estudo foca os aspectos do conhecimento e da prática do professor e como se relacionam com o conhecimento e uso dos exemplos no ensino da matemática.
Das várias conclusões que este estudo aponta, referiremos aquelas que se vinculam à relação entre o conhecimento do professor e a sua exemplificação; as conclusões relativas à escolha de exemplos são idênticas às apontadas em Zodik e Zaslavsky (2007b). Deixando bem claro que os professores envolvidos no estudo nunca tiveram qualquer tipo de formação referente à exemplificação em ensino da matemática, as autoras do estudo concluem que as principais articulações sobre como os exemplos foram escolhidos pelos professores para as suas aulas apontam para uma aprendizagem rigorosa que ocorre durante a prática. Os espaços de exemplos pessoais dos professores representam um elemento chave na exemplificação espontânea, as investigadoras referem dois tipos de espaços de exemplos: os espaços de exemplos facilmente acessíveis, de onde se retiram os exemplos que se tornaram imediatos e automáticos, e os espaços de exemplos de acesso mais remoto, que se torna acessível através do pensamento analítico e auto-monitorização. Os exemplos contidos nestes espaços parecem ter agregados uma etiqueta. Estas etiquetas referem a classe de casos que o exemplo representa e em que condições o seu uso é adequado e útil. Ao longo da carreira o professor amplia estes espaços de exemplos ou, então, acrescenta etiquetas aos exemplos já existentes, deste modo um mesmo exemplo pode ser utilizado em diferentes situações. Outra conclusão aponta para o facto de que a forma de exemplificar dos professores pode constituir material de estudo e reflexão como modo de proporcionar oportunidades de aprendizagem de um conhecimento teórico e prático de como tratar e usar exemplos de ensino, num ambiente de trabalho colaborativo.
No final do artigo que relata o estudo são apresentas as conclusões finais. Nelas se deixa clara a necessidade de continuar a estudar a relação que existe entre o conhecimento do professor e a exemplificação que utiliza, mediante a análise da escolha dos exemplos que se fazem, bem como a de estudar em maior profundidade o mecanismo de ampliação de exemplos e como os exemplos são codificados nos espaços de exemplos dos professores.

Num estudo sobre a forma como quatro professores estagiários ensinaram o conceito de função a alunos entre os 15 e os 17 anos (10º e 11º anos de escolaridade), Figueiredo, Blanco e Contreras (2007) utilizaram um sistema de categorias muito simples e que se baseou em quatro etapas de aquisição de conceitos. Naquele estudo considerou-se que a aquisição dos conceitos matemáticos pode ser feito em cinco etapas:

1. Contacto Inicial [com o conceito]
2. Primeiras manipulações

3. Dúvidas nos seus contornos
4. Relações com outros conceitos matemáticos existentes
5. Aplicações do conceito à vida real [e outras ciências]

Estas cinco etapas foram retiradas da forma como muitos professores, em geral, desenvolvem o processo de ensino dos conceitos matemáticos e, em particular, também os quatro professores estagiários. Primeiro apresentaram o conceito, depois propuseram aos alunos algumas situações para eles trabalharem, esta fase desencadeia dificuldades aos alunos que, noutra fase, os professores sanaram. Seguidamente, é usual que os conceitos sejam relacionados com outros conceitos matemáticos previamente trabalhados e, finalmente, o conceito matemático foi aplicado a situações provenientes de outras ciências ou da vida real.

O sistema de categorias que permite classificar os exemplos que os professores estagiários utilizaram para leccionar o conceito de função é constituído por cinco categorias:

I. Definição
II. Representação
III. Características
IV. Aplicações Internas
V. Aplicações Externas

Cada categoria pretende enquadrar os exemplos utilizados quanto ao uso e quanto ao objectivo desse uso.

Assim, de uma forma sucinta, a primeira categoria inclui todos os exemplos que se destinaram a ilustrar o conceito imediatamente após a definição. Eventualmente, os exemplos foram apresentados antes da *definição do conceito*, de modo a serem os alunos a apresentar a definição para "aquilo" que havia de comum entre todos eles. Estes exemplos serão, portanto, as particularizações da generalidade proporcionada pela definição.

Os exemplos a serem enquadrados pela segunda categoria são aqueles com que os alunos trabalham de forma autónoma imediatamente após a introdução do conceito. Destinam-se ao início da construção da *imagem do conceito* ao desencadearem as primeiras dificuldades e dúvidas e a familiarizarem-se com as várias representações do conceito de função.

A terceira característica abarcará os exemplos gradualmente mais exigentes que ajudam o aluno a aprofundar o conceito e a construir a sua imagem. Este processo conta com o auxilio do professor, na medida em que vai esclarecendo as dúvidas que surjam e ajudando a superar as dificuldades que surjam. Têm como objectivo a construção de uma imagem do conceito correcta e sólida.

A relação entre o conceito de função e os conceitos matemáticos prévios é fundamental para os alunos. É uma forma de exemplificação que aparece quando os alunos já atingiram um certo grau de aprofundamento do conceito de função, inclui conteúdos ou conceitos que foram leccionados anteriormente ou pode preparar a introdução de um conteúdo posterior. São exemplos que exigem uma estrutura do conceito mais complexa, exigindo a interpretação e o tratamento de situações problema.

A última categoria está reservada aos exemplos em que o conceito de função está aplicado a situações problema no âmbito das outras ciências ou, então, problemas da vida real. São exemplos que configuram situações novas e exigem uma imagem do conceito bastante bem estruturada, particularmente no que respeita às ligações entre as

diversas facetas em que o conceito de função pode ser trabalhado. São exemplos de fim de trajecto, cognitivamente exigentes, sendo o alto grau de exigência o que os distingue dos exemplos da mesma natureza mas que são incluídos nas outras categorias. Não estamos perante exemplos simples, antes perante exemplos que exigem muita flexibilidade e aprofundamento do conceito de função quando se utilizam as várias representações.
Os resultados e conclusões obtidos caracterizam o conhecimento dos professores estagiários segundo vários aspectos. Ao nível da exemplificação propriamente dita; a forma, a quantidade e objectivo com que utilizaram os exemplos das diferentes categorias; relativamente às especificidades dos exemplos e ao papel que eles desempenham no ensino e aprendizagem do conceito de função. Um aspecto importante que este estudo destacou prende-se com os padrões comuns que puderam ser observados em cada um dos quatro estagiários no que se refere ao seu *conhecimento didáctico do conteúdo*. Estes padrões comuns foram distinguidos conforme estavam vinculados a aspectos de aprendizagem ou vinculados a aspectos de ensino.

III METODOLOGIA

1. Introdução

Seguidamente explica-se o interesse da investigação e definem-se os seus objectivos. Este capítulo irá também descrever o processo de investigação que se implementou de forma a alcançar os objectivos estipulados.
Considerando que o estudo, de uma forma geral, focaliza o modo como uma professora escolhe e usa os exemplos e relaciona estes dois aspectos com o seu conhecimento didáctico do conteúdo, cabe explicar a forma como foi obtida a informação e que instrumentos se utilizaram para a tratar e a analisar.
O trabalho tem as características de um estudo tanto exploratório como descritivo e recolheu, simultaneamente, elementos teóricos e resultados de outros estudos que se encontram dispersos na bibliografia, aplicando-os de forma integrada a um caso em concreto.

2. Objectivos da investigação

Neste trabalho pretende-se estudar e analisar os processos de ensino e aprendizagem dos alunos com idades compreendidas entre os 15 e os 16 anos, fixando-nos nos exemplos empregues pelo professor como ponte entre a definição dos conceitos relacionados com as funções e o aprofundamento dos conhecimentos dos alunos sobre este tema.

Por outro lado, sendo o exemplo um instrumento básico do professor, também gostaríamos de explorar este meio de comunicação entre professor e aluno como forma de ajudar o segundo a generalizar conceitos com base no que é particular. É o exemplo que permite ao professor transmitir os conceitos ao aluno. Já se referiu antes que, de um modo geral, é bem aceite que os alunos aprendem mais contactando com os exemplos que, propriamente, com a apresentação das definições formais; aliás, é através dos exemplos que as definições dos conceitos se concretizam e têm algum significado (Watson e Mason, 2002a). Na verdade, o que se aprende numa aula de matemática são conceitos abstractos e gerais e que o aluno deve saber utilizar. Segundo Tall e Vinner (1981), adquirir um conceito significa construir um esquema conceptual desse mesmo conceito e, para explicar este processo, introduzem dois termos que definiram como sendo *a definição do conceito* e *a imagem do conceito*. Desta forma, os exemplos permitem-nos ir construindo a imagem do conceito (Vinner, 1991) ou adquirir o esquema conceptual relacionado com esse conceito (Azcárate, 1995; 1997).

O conhecimento didáctico que o professor tem dos conteúdos que ensina influencia a escolha de exemplos e, por isso, podemos esperar que observando a escolha de exemplos que ele faz nos seja revelada alguma evidência desse conhecimento (Figueiredo, 2005; Chick, 2007; Chick e Harris, 2007).

Para atingir os objectivos a que nos propomos, optou-se por uma metodologia qualitativa configurada num estudo de caso. Tendo em conta a posição de vários autores, como por exemplo Yin (2003) ou Stake (2000), o estudo de caso como forma de pesquisa é visto como uma metodologia, ou como a escolha de um objecto de estudo, determinada pelo interesse em casos individuais. Este tipo de pesquisa tem como objectivo a investigação de um caso bem definido e totalmente delimitado no tempo, no lugar e no contexto, para que se possa realizar uma obtenção circunstanciada de informação. O estudo de caso levado a cabo tem como figura central uma professora que se disponibilizou para ser alvo do nosso estudo.

Assim, pelas razões apresentadas, pelo interesse suscitado e com a metodologia escolhida, este estudo propõe-se alcançar os seguintes objectivos:

- Fazer uma revisão das investigações existentes sobre a exemplificação que os professores aplicam nas suas aulas.
- Descrever a natureza dos exemplos em função do seu papel na aprendizagem do conceito de função.
- Estudar aspectos do Conhecimento Didáctico do Conteúdo através dos exemplos.
- Avaliar as potencialidades da exemplificação do professor na caracterização do seu conhecimento profissional.
- Obter um instrumento de análise da criação, escolha e uso dos exemplos pelo professor.
- Estruturar um perfil do professor baseado na sua exemplificação.
- Apresentar sugestões concretas para a formação contínua de professores.

3. O plano da investigação

A professora que se prontificou a participar neste trabalho lecciona na Escola Secundária de D. Sancho II em Elvas, Portugal. As aulas a que nos permitiu assistir e gravar são do 10º ano de escolaridade do Ensino Secundário, que neste país corresponde a alunos que iniciam o ano com 15 anos e o terminam com 16. Todas as aulas foram gravadas na mesma turma e pedimos autorização aos encarregados de educação de todos os alunos que integram a turma para que pudessem ser gravadas as aulas e as suas eventuais intervenções. Todos os encarregados de educação responderam afirmativamente.

Os nomes dos alunos que figuram nas transcrições não correspondem aos nomes verdadeiros desses alunos. Ao contrário, professora preferiu ser designada pelo seu verdadeiro nome. A caracterização da professora Esmeralda é feita mais à frente, no Capítulo V, Apresentação dos Resultados.

Como já foi referido, o estudo toma a forma de um estudo de caso com o qual se pretende descrever a forma como uma professora usa os exemplos e, através deles, descrever todo um conhecimento que é mobilizado para ensinar o conceito de função. Esta relação entre a escolha e uso dos exemplos e o conhecimento da professora estabelece um balizamento que orienta o desenho do estudo e a metodologia implementada.
Este tipo de pesquisa tem uma metodologia e enquadramento teórico que já amadureceu bastante ao longo das últimas décadas. Nas linhas que seguem justificaremos as opções metodológicas e teóricas que enquadraram o estudo.

A presente investigação identifica-se com o Estudo de Caso, pois é uma pesquisa empírica que pretende, por um lado, investigar um fenómeno complexo, actual e de características únicas que se desenrola numa conjuntura real e, por outro, analisá-lo e descrevê-lo em profundidade, em contexto e de um modo holístico, com base nos resultados obtidos. Para que o estudo do caso fosse feito de forma correcta, a recolha dos dados foi feita no terreno, que, no âmbito do conhecimento do professor, significou que tivemos que nos deslocar à sala de aula da professora Esmeralda (Yin, 2003).
Para Yin (2003), um estudo de caso investiga um fenómeno contemporâneo dentro do seu contexto da vida real, especialmente quando os limites entre o fenómeno e o contexto não estão claramente definidos, e deve ser usado quando as perguntas “Como?” e “Porquê?” são colocadas relativamente a um conjunto de eventos contemporâneos sobre os quais o investigador tem pouco ou nenhum controlo.
A análise destes aspectos, relativos à nossa investigação, clarifica a indicação de se escolher uma metodologia de estudo de caso. Na verdade, o objectivo do estudo centra-se na descrição do conhecimento de uma professora e das decisões que toma para exemplificar o conceito de função. Por outro lado, o estudo incidiu em acontecimentos que foram sendo observados e recolhidos à medida que se desenvolvia o projecto.

Yin (2003) distingue objectivamente casos de estudo de abordagem qualitativa e de abordagem quantitativa. A diferença na abordagem radica na natureza dos dados e dos instrumentos utilizados para os recolher e analisar. Assim, desenvolveu-se uma investigação baseada numa abordagem qualitativa, tendo em conta a informação recolhida, os instrumentos utilizados e os objectivos perseguidos.
Em particular, este estudo de caso configura um estudo naturalístico, ou que dá prioridade à abordagem qualitativa da pesquisa, porque as características consideradas fundamentais são a interpretação dos dados feita no contexto; a busca constante de novas indagações e respostas; a retratação completa e profunda da realidade; o uso de várias fontes de informação; e a possibilidade de transmissibilidade (Firestone, 1990; Stake, 1994).

A informação recolhida proveio de três fontes: uma entrevista, a gravação de doze aulas e todas as questões sobre o tema Funções que Esmeralda propôs aos seus alunos nos testes de avaliação. Estas três fontes inserem-se nos seis tipos de fontes identificadas por Yin (2003) e Stake (1995): 1-Documentos (**os testes de avaliação**); 2-Registos de arquivo; 3-**Entrevistas**; 4-Observações directas (**as videogravações**); 5-Observações participadas; 6-Recolha de material físico. Por um lado, a entrevista proporciona dados sobre o *conhecimento declarativo* da professora e, por outro, as aulas juntam informação sobre o *conhecimento implícito* (Wamba, 2001). Os itens de avaliação utilizados nos testes traduzem o conhecimento sobre os objectivos a atingir pelos alunos e que se relacionam com a programação oficial. A utilização de três fontes diferentes irá permitir a confrontação de informação variada e, com isso, precaver a questão da confirmabilidade do estudo que se desenvolveu (Lincoln e Guba, 1991), através de triangulação de fontes (Goetz e LeCompte, 1988; Ericsson, 1992; Yin, 2003) fundamental para a credibilidade da investigação qualitativa (Schoenfeld, 1994; Denzin e Lincoln, 1994). Isto é, uma vez que as investigações qualitativas não assumem que a realidade é única e objectiva, deve falar-se de credibilidade. Este termo refere-se "à compatibilidade entre as realidades construídas que existem na mente dos informantes e as que lhe são atribuídas pelo investigador." (Erlandson et al., 1993, p. 30).

Uma das formas de análise dos dados recomendada num estudo como o que se levou a cabo consiste na criação de categorias e a consequente aplicação às unidades de análise (Stake, 1995; Yin, 2003). Nesta linha, foram utilizados dois sistemas de categorias: um que foi desenvolvido com base num já existente e que se aplicou na categorização dos exemplos quanto ao objectivo da sua utilização, o 1º instrumento de análise; um segundo sistema de categorias que foi aplicado foi obtido na bibliografia específica e visa a descrição do Conhecimento Didáctico do Conteúdo da professora Esmeralda, o 2º instrumento de análise. No processo de análise foi dada, maioritariamente, a primazia à interpretação directa dos factos, às afirmações obtidas na entrevista, às questões propostas nos testes de avaliação e às escolhas e o uso que foi feito dos exemplos na sala de aula, em detrimento da interpretação das possibilidades quantitativas que os dados pudessem oferecer (Eisner e Peshkin, 1990). Todavia, nos casos em que o aspecto qualitativo fosse significativo, não deixámos de dar a esse facto a importância devida.

Apesar do papel central que os exemplos ocupam no ensino e na aprendizagem da Matemática, existe um pequeno número de estudos sobre a escolha e o uso que o professor faz dos exemplos (Zaslavsky, 2010). Está desde o início estabelecido que o estudo que desenvolvemos é, exactamente, sobre a escolha e uso dos exemplos e, paralelamente, qual o conhecimento do professor que lhes subjaz. Logo, se os exemplos são centrais neste trabalho, devemos começar por dar um sentido preciso ao termo "exemplo" e que usaremos em diante.
Recolhida toda a informação, foi necessário procurar os exemplos que foram escolhidos e utilizados pela professora. A definição de exemplo que adoptámos permitiu identificar e isolar o objecto de estudo nas muitas situações de ensino que pudemos registar. Mas, assumindo que os exemplos devem ser sempre analisados em contexto (Zaslavsky, 2010), tornou-se necessário precisar os muitos e variados *contextos*, localizáveis na acção e no tempo, onde os exemplos estão inseridos. Surge, assim, a necessidade de também dar sentido a outra noção fundamental do estudo: o Episódio.
Pelo exposto se entende a importância do sentido dos termos "exemplo" e "episódio" e, consequentemente, as implicações que esses sentidos tiveram nas directivas

metodológicas. Para além do mais, também são razões que explicam a inclusão das definições dos termos “exemplo” e “episódio” neste capítulo dedicado à metodologia e não no capítulo anterior, onde se apresenta todo o enquadramento teórico.

Definindo com exactidão o que é um exemplo e o que é um episódio ficaram bem definidos os materiais que iriam ser analisados, restava encontrar os instrumentos apropriados à sua análise; utilizámos os dois instrumentos já referenciados com esse fim. O primeiro instrumento de análise destinou-se a ser aplicado aos próprios exemplos, enquanto que o segundo instrumento de análise visou caracterizar o conhecimento do professor que determinou a escolha e uso dos exemplos. Os produtos resultantes destes dois instrumentos foram, necessariamente, distintos na natureza, contudo puderam complementar-se quando os contextualizámos nas situações de exemplificação já descritas na bibliografia e apresentadas no capítulo anterior.

O plano da investigação pode ser descrito através do esquema seguinte:

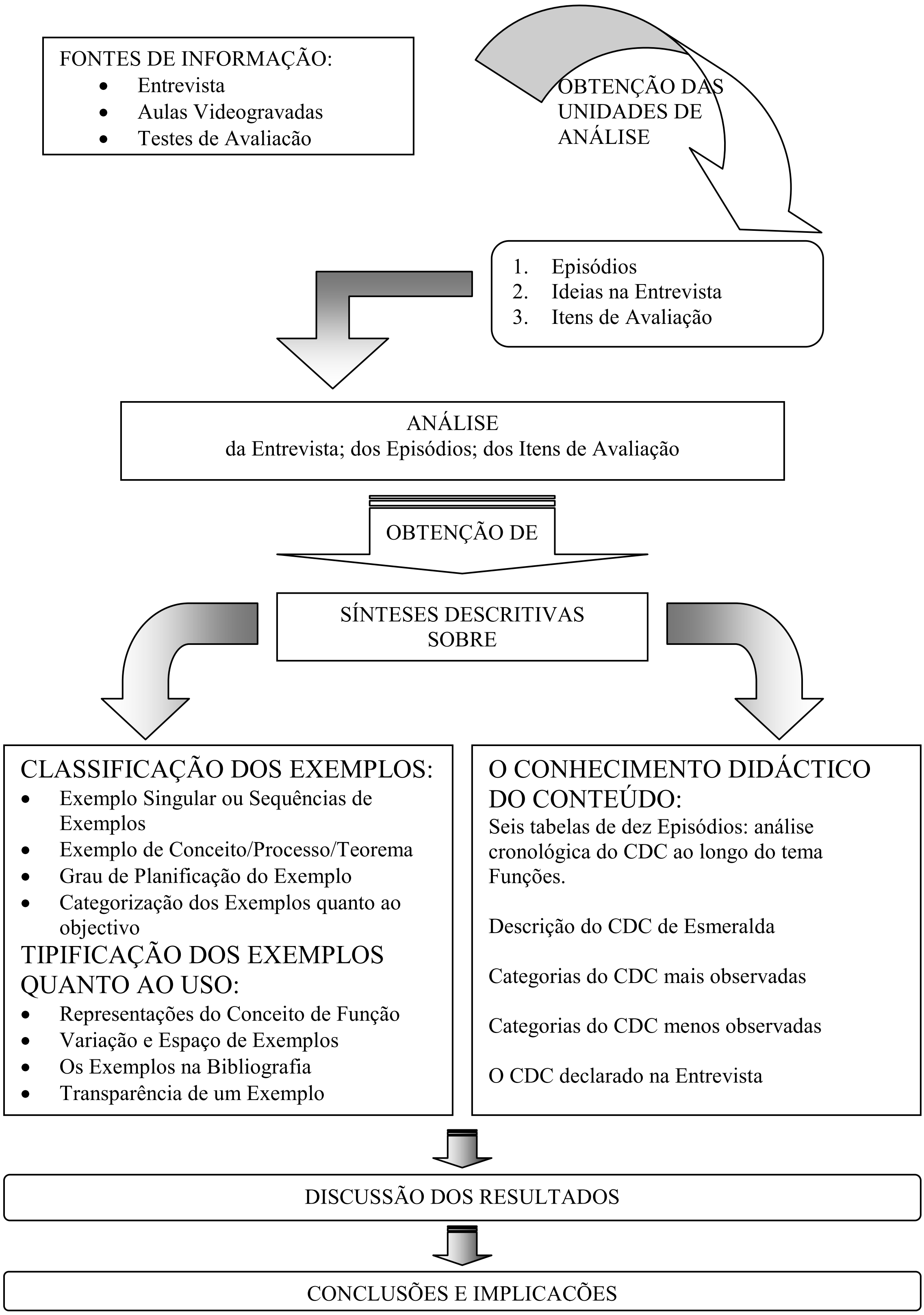


Figura 27: Plano da Investigação

4. Definição de *Exemplo* na investigação

Segundo o Dicionário da Língua Portuguesa, 7ª edição, da Porto Editora, exemplo é:

> "*s. m. tudo o que pode ou deve servir para modelo ou para ser imitado; abonação; palavra ou facto que serve para concretizar a verdade de uma regra ou afirmação; narrativa curta e cheia de prodígios, inculcada como verídica, e que se apresenta com reforço numa tese a demonstrar; [...]* Do latim *exemplu-, «id»*"

Daquilo que este dicionário nos diz, retirem-se os sentidos:

- Modelo
- Algo a imitar
- Concretização de uma regra (definição)
- Concretização de uma afirmação

Qualquer um destes quatro sentidos é identificável numa sala de aula de ciências. Em particular, de uma aula de matemática. Contudo, existem mais sentidos numa aula de matemática para o termo "exemplo".

O *domínio comum* de professores e alunos tem como imagem de

- **Exemplo** a situação de ensino/aprendizagem em que o professor "mostra" aos alunos uma MATERIALIZAÇÃO de um conceito, um processo IDÊNTICO ao que os alunos irão utilizar seguidamente ou, por fim, a aplicação de um teorema a uma situação IDÊNTICA às que os alunos encontrarão, também, seguidamente.
  Estas três situações são o que na **categorização** do 1º instrumento corresponde às **subcategorias** de *conceito*, de *processo* e de *teorema*.
- **Exercício** a situação de ensino/aprendizagem em que o professor propõe aos alunos uma actividade que pode envolver um CONCEITO, a utilização de um PROCESSO ou a aplicação de um TEOREMA a uma situação em particular. O exercício pode, nestes três domínios, assumir contornos de problema matemático.

Nesta investigação não cabe distinguir exercícios de problemas, distinguir tipos de exercícios ou distinguir tipos de problemas. Eventualmente poderemos utilizar estas designações, no sentido que é comummente aceite para clarificar o discurso, mas o objectivo seria utilizar o menos possível termos conotados com sentidos quotidianos ou muito restritos.
Nesta investigação utilizar-se-á, fundamentalmente, o termo "exemplo" e o seu sentido será muito amplo e incluirá os termos que usualmente se utilizam, tais como "exemplo", "exercício", "questão" ou "problema". Contudo, houve a necessidade de separar duas situações neste estudo que, sendo exemplos, são diferentes. Por isso, sem utilizar designações de "exemplo" ou "exercício", distinguem-se as duas situações:

- *Exemplo Tratado pelo Professor*: Exemplo apresentado e tratado pelo professor

- *Exemplo Tratado pelo Aluno*: Exemplo proposto pelo professor mas tratado pelo aluno

Considere-se a situação:

Verificar se é *injectiva* a função definida por $f(x) = 3x^3 - x$.

A situação é sempre um exemplo do conceito de *injectividade*, mas se for apresentada e tratada pelo professor é um ***exemplo tratado pelo professor***, mas se o professor o propuser aos alunos como tarefa a ser por eles realizada, já será um ***exemplo tratado pelo aluno***.

Neste sentido, são situações didácticas sempre designadas por exemplos **apresentados** ou, então, **propostos** pelo professor. Assim, a exemplificação é do professor, o uso do exemplo, selecção do exemplo e objectivos do uso do exemplo são sempre da responsabilidade do professor.

Devemos deixar bem clara esta responsabilidade da escolha do exemplo por parte do professor porque existe uma situação em que a exemplificação está a cargo do aluno. Assim, se o professor propõe a um aluno que dê um exemplo de uma função injectiva, o aluno pode responder:

$f(x) = 3x^3$

Sobre este exemplo não existiu escolha por parte do professor, apenas da actividade a desenvolver pelo aluno. Até pode acontecer que o *exemplo* dado pelo aluno não esteja correcto, não sendo sequer um exemplo de função injectiva. Ainda assim, embora seja uma actividade sobre exemplos dentro do processo de ensino/aprendizagem, o exemplo apresentado não proveio do professor. Como vimos na fundamentação teórica, esta actividade que o professor propõe ao aluno, e que ele deve desenvolver, designa-se por "*Dê exemplo de ...* (com restrições)".

Situemo-nos na unidade didáctica que envolve o conceito de Função Injectiva. O professor define função injectiva e apresenta 4 ou 5 funções que verificam a definição. Estas particularizações são exemplos apresentados pelo professor (situação 1). Seguidamente, para verificar se os alunos entenderam, propõe que algum dos alunos apresente exemplos de funções que sejam injectivas (situação 2). Por fim, entrega aos alunos uma ficha de trabalho onde se tratam questões que envolvem o conceito de função injectiva (situação 3).

Como facilmente se percebe, as situações 1 e 3 são escolhas do professor. A situação 1 configura alguns (sequência de) exemplos tratados pelo professor e a situação 3 configura alguns (sequência de) de exemplos tratados pelo aluno.
A situação 2 configura a situação de "*Dê exemplo de ...* (com restrições)", portanto é uma proposta do professor à qual os alunos respondem com a apresentação de exemplos, também por eles trabalhados.

Respeitando tudo o que foi descrito, podemos então propor uma definição de exemplo. Como se disse, esta definição terá um sentido bastante amplo.

Definição:

Exemplo: É um elemento de uma colecção de objectos (entes) que é utilizado numa determinada situação de ensino/aprendizagem porque evidencia determinada, ou determinadas, características.

O exemplo pode revestir-se de diferentes naturezas.
O que determina que um elemento de uma colecção seja utilizado como um exemplo não são as características (todas) que esse elemento possui, mas sim as características que em determinado momento são evidenciadas.

- No caso dos ***conceitos*** ou das ***definições***, há objectos da Geometria que numa dada situação podem ser utilizados por, entre outras características, serem quadriláteros. Mas, em outras situações, esses mesmos objectos podem ser invocados por evidenciarem características próprias de quadrados ou rectângulos. A exemplificação não é, portanto, criar objectos, mas sim, a indicação de objectos que evidenciam determinadas características.

Uma definição gera exemplos ou, se quisermos, colecções deles. Mas, se convier, de uma colecção de definições podemos escolher uma delas como exemplo. Suponhamos que queremos explicar o que é um quantificador universal, podemos utilizar uma definição que evidencie o papel deste quantificador de forma que o aluno perceba o que é e para que serve. Neste caso a própria definição pode constituir um exemplo.

- No caso dos ***algoritmos*** ou dos ***processos*** (inclui procedimentos e métodos), podemos escolher um caso para evidenciar determinado aspecto ou mesmo usá-lo para ilustrar um tipo de cálculo. Ou, então, de uma colecção de exercícios podemos escolher um para mostrar a utilização do algoritmo/processo que se aplica e que queremos ensinar.
- No caso dos ***teoremas***, podemos escolher situações ou figuras geométricas que sejam adequados à utilização de determinado teorema.

Com a definição apresentada podemos caracterizar melhor as duas situações apresentadas antes:

- *Exemplo tratado pelo professor*: exemplo apresentado e tratado pelo professor. Caso de **CONCEITO** ou de **PROCESSO.**
  O professor apresenta exemplos que verificam determinadas condições ou que apresentam determinadas características.
- *Exemplo tratado pelo aluno*: Exemplo apresentado pelo professor mas tratado pelo aluno. Caso do **CONCEITO** ou do **PROCESSO.**
  O professor propõe um exemplo e pede aos alunos que verifiquem determinadas condições ou determinem determinadas características.

O ***exemplo resolvido*** é um exemplo (usualmente de processo) tratado (ou apresentado acabado) pelo professor que exibe os passos a dar, as respectivas justificações e que devem ser seguidos pelos alunos para completar uma tarefa idêntica à do exemplo resolvido. Pode ser o primeiro exemplo de uma sequência de vários.

Nesta investigação, a análise que se faz da escolha e do uso dos exemplos pelo professor não é por serem “exemplos”, “exercícios” ou “problemas”, mas sim por serem exemplos no sentido aqui definido e que se enquadram nas categorias do 1º instrumento de análise construído para esta investigação.

Considerando a definição de exemplo que se propõe e a exemplificação que o professor apresenta na sua actividade docente, o processo de ensino-aprendizagem pode ser observado segundo dois pontos de vista:

- Do ponto de vista do aluno:
  Aprender consistirá, deste ponto de vista, em reconhecer novas colecções de elementos, ou conseguir apontar características novas dos elementos de uma colecção anteriormente conhecida.
  Este ponto de vista não é incompatível com a perspectiva de Mason e Watson (e.g. 2005), em que eles afirmam que aprender é ampliar os nossos espaços de exemplos anteriormente construídos, adicionando-lhes novos exemplos
- Do ponto de vista do professor:
  O desenvolvimento do conhecimento do professor, no que respeita à escolha e utilização dos exemplos, consistira em descobrir características didácticas novas nos exemplos e, também, em encontrar contextos educativos em que o uso dessas características possam promover melhores situações de ensino.

5. Recolha da informação

A recolha de informação foi obtida através da videogravação das aulas de 10º ano que a professora leccionou na Escola Secundária D. Sancho II de Elvas, em Portugal.
Os alunos da turma têm a idade normal para alunos de 10º ano de escolaridade, isto é, 15-16 anos, e constituem uma turma que pode ser considerada *normal* em termos socioeconómicos e educativos da cidade de Elvas. Todos os alunos apresentaram autorização dos respectivos encarregados de educação para que aulas fossem registadas em suporte de vídeo. As vantagens de se registarem as aulas em suporte de vídeo e áudio são sobejamente conhecidas e profusamente tratadas na bibliografia sobre educação.

Além das gravações que se efectuaram das aulas, também se procedeu a uma entrevista com o objectivo de enquadrar a professora em quatro âmbitos.

O processo de exemplificação tem como objectivo ensinar os alunos e que eles aprendam. No caso, o conceito de função. Mas a avaliação também inclui exemplos, que tomados isoladamente não se podem distinguir se se destinam às aulas ou à avaliação. Por isso, também recolhemos todos os exemplos que Esmeralda incluiu nos testes de avaliação que se relacionavam com o tema das funções.

As aulas foram gravadas entre 12 de Janeiro e 13 de Abril que foi, sensivelmente, o período de tempo que Esmeralda demorou a leccionar o tema das Funções. Apenas se gravou uma aula em cada semana (cada semana tem três aulas de 90 minutos) e por isso ficou muita informação por recolher. Todavia, para que se pudesse colmatar alguma dificuldade que surgisse (e surgiu) foi pedido a duas das alunas da turma que disponibilizassem os cadernos diários para que pudéssemos fotocopiar todas as aulas da Unidade Didáctica das Funções. Estes cadernos diários permitiram completar algumas das sequências de exemplos e verificar quais os tópicos que haviam sido leccionados antes de determinado episódio em concreto. A entrevista foi realizada em 5 de Janeiro de 2007 e os testes que incluíram questões sobre funções realizaram-se a 9 de Fevereiro, 20 de Março e 29 de Maio de 2007.

5.1 A entrevista

Para se poderem explorar as concepções da professora Esmeralda sobre a forma de ensinar o tema Funções e, simultaneamente, a sua intuição sobre a escolha e o uso de exemplos que se integrassem em situações características descritas na bibliografia sobre exemplificação, propusemos algumas questões sob a forma de uma entrevista semi-estruturada. Esta é uma das formas mais utilizadas para recolher dados nas investigações de carácter etnográfico ou interpretativo quando se pretende conhecer melhor o pensamento do informante (Mellado, 1994).

A entrevista é um procedimento que permite aceder, com maior sistematização e aprofundamento que outros, às perspectivas e interpretações próprias dos sujeitos sobre a problemática em questão (Rivero, 1996, citado por Wamba, 2001) obtendo informação directa sobre as variáveis da investigação.

Para a efectivação da entrevista, seguimos algumas das recomendações resumidas por Wamba (2001): não usar perguntas que induzam a resposta; usar, preferentemente, perguntas abertas e não dicotómicas; não falar mais que a entrevistada e evitar que o investigador expresse as suas opiniões; inserir o entrevistado no âmbito da investigação; dar indicações sobre as mudanças de assunto; começar com perguntas simples e gerais para depois se centrar nas mais complexas; promover um ambiente informal e procurar que se transforme numa conversa reflexiva, evitando que se transforme numa sucessão rígida de perguntas e respostas.

A entrevista obedeceu ao seguinte guião:

1. Descreve a forma como utilizas os exemplos nas tuas aulas.
2. Conheces outras formas de utilização dos exemplos que não tenhas referido?
3. Quais são os objectivos da TUA utilização de exemplos?
4. Ponderas as razões porque escolhes determinado exemplo e não outro?
5. Quando se apresenta uma série de exercícios/problemas, comenta a frase do aluno: “Professor pode resolver o primeiro para nós vermos como é que se faz?”.
6. Considerando os processos “Exemplificar antes de definir” e “Definir antes de exemplificar”. Há algum que te pareça mais apropriado?
7. Comenta: existem exercícios/problemas que achamos “especiais” ou “representativos” por serem mais indicados para os alunos perceberem melhor um conteúdo em questão.
8. Que características têm ou, então, em que diferem dos “outros” (dos que não são especiais)?
9. Que interesse pode ter uma sequência de exercícios/problemas sobre o mesmo tema?
10. Como trabalhas os conteúdos programáticos com os alunos: utilizando sequências do manual ou fichas elaboradas por ti? Se utilizas os dois, em que situações utilizas um caso ou outro?
11. O que te preocupa mais quando escolhes/elaboras uma sequência de exercícios/problemas sobre um tema?
12. Que preocupações achas que o autor do manual teve ao elaborar uma sequencia de exercício/problemas?
13. O que é importante no tema “Funções”?

14. Que deve evidenciar um aluno (10º ou 11º) para que tu aches que ele sabe funções?
15. Existe uma maneira adequada de ensinar as funções?

A forma de analisar a informação contida na entrevista foi diferente das análises efectuadas às aulas que se gravaram. Enquanto na entrevista se procuram indícios sobre a exemplificação do conceito de função, nas aulas foram os próprios exemplos que foram analisados. A entrevista pretendeu promover alguma reflexão da professora sobre vários aspectos, alguns dos quais muito pouco sondados por ela própria até àquele momento. Os âmbitos a explorar com a professora Esmeralda foram os seguintes:

- As questões de 1. a 5. são gerais e pretendem apenas evidenciar os aspectos intuitivos, imediatos e não reflectidos (logo muito importantes) sobre o uso de exemplos. Verificar se existe alguma forma de utilização de exemplos como *materialização de objectos matemáticos criados por definições*, como *ilustração de processos ou algoritmos*, como forma de *verificação de aprendizagens*.
- Da questão 6. à questão 8. pretende-se explorar a forma de utilização dos exemplos na introdução de conceitos. Processo *indutivo* ou *dedutivo*.
- As questões 9. e 10. exploram a existência da noção implícita de *transparência* dos exemplos.
- As 11. ; 12. ; 13. e 14. avaliam o uso das várias *dimensões de variação possível* dos exemplos e respectivas *amplitudes de mudança permissíveis*, e não apenas o nível de dificuldade crescente. A importância do manual é avaliada na questão 12. As últimas pretendem explorar concepções específicas sobre ensino das Funções.

5.2 As aulas

De todas as aulas que foram assistidas e gravadas registaram-se notas de campo. Estas notas permitiram que certos pormenores do uso dos exemplos, os mais subtis, que pudessem passar desapercebidos nos registos electrónicos pudessem ser realçados nas análises posteriores. De qualquer modo as notas de campo não são, de todo, suficientes. Ao contrário da observação em tempo real, que requer que se esteja consciente de inúmeros aspectos didácticos e simultaneamente a registá-los, analisar um vídeo proporciona a possibilidade de estreitar a atenção a determinados aspectos, actividades ou alunos (Nicol e Crespo, 2004) além de se poder rever as vezes necessárias. Estas duas vantagens são bem vindas quando se pretende entender e relacionar a aula com as planificações de aula e de unidade (Climent e Carrillo, 2007). Por isso, nos dias de hoje não faz sentido prescindir do uso da tecnologia audiovisual e todas as aulas foram gravadas em cassete de vídeo e digitalizadas posteriormente.

As aulas foram gravadas por uma câmara de vídeo colocada na parte de trás da sala. A câmara, posicionada estaticamente, gravou a totalidade dos cerca de 90 minutos de cada aula focando o quadro e bastante espaço à sua volta, o que permitiu registar toda a actuação da professora quando esta explicava a matéria. Desta forma, pôde ser registado em audiovisual tudo o que foi escrito no quadro, fossem os exemplos tratados pela professora ou fossem os exemplos que algum aluno tenha ido tratar ao quadro e, também, a actividade geral da aula por se ter usado uma distância focal baixa no zoom da câmara. Ainda assim, o que não foi registado no enquadramento da câmara foi registado no suporte áudio da câmara e num gravador de som colocado na secretária da professora ou, quando possível, transportado pela própria professora. Os dois aparelhos, pela sua qualidade e colocação, puderam captar a totalidade da componente sonora das aulas, se por ventura acção a registar em áudio estava longe de um dos aparelhos estaria, em princípio, mais perto do outro.

Embora tivessem sido gravadas 12 aulas, tivemos acesso a todos os exemplos que a professora utilizou e indicou para trabalho individual, durante toda a unidade didáctica dedicada às funções, através dos cadernos diários que duas alunas tiveram a gentileza de ceder para que fotocopiássemos todas as aulas deste período. A posse de todos os exemplos tratados em aula compensou a impossibilidade de deslocação ao campo, proporcionando muito material acessório que, em algum momento, se mostrou fundamental para se poderem completar episódios com informação em falta.

As aulas não foram integralmente transcritas. O que se transcreveu foram as fracções das aulas que incluíam o tratamento de um exemplo ou, então, de uma sequência de exemplos. Foram estas fracções, que constituem a grande fatia das aulas e às quais chamamos "Episódios" (ver abaixo, em 6.), que foram submetidas a análise.

5.3 Os testes de avaliação

A avaliação das aprendizagens é um aspecto importante no trabalho de qualquer professor, sendo que, no caso da matemática, a avaliação das aprendizagens pode ser feita com base em situações próximas daquelas que foram trabalhadas em aula. Assim, faz sentido que se aborde, ainda que superficialmente, os exemplos que Esmeralda apresentou aos seus alunos nos testes de avaliação.
Nesta linha, pedimos à professora que nos informasse dos aspectos que estiveram por detrás da escolha daqueles exemplos em particular. Os aspectos que gostaríamos de ver elucidados são diferentes consoante as questões são de escolha múltipla ou de resposta aberta. Foram pedidos à professora os seguintes elementos:

- Questões de escolha múltipla. Para cada questão,
    1. Indica a fonte.
    2. A que apela, ou faz referência, cada uma das opções tendo em conta o enunciado dessa questão.
    3. Das opções que são incorrectas, indica porque motivo pode ser aceitável (apelativo) para o aluno.
    4. A questão está incluída num âmbito de objectivo mínimo ou mais complexo? Qual é esse objectivo?
    5. Razão da escolha dessa questão (em particular) e não outra.
- Questões de resposta aberta. Para cada questão/item
    1. Indica a fonte.
    2. Razão da escolha dessa questão (em particular) e não outra.
    3. A questão está incluída num âmbito de objectivo mínimo ou mais complexo? Qual é esse objectivo?
    4. Porque razão, dado o objectivo indicado em 3., escolheste o aspecto gráfico/analítico/numérico?

Com base nas suas respostas procurou-se estabelecer um paralelo entre os exemplos utilizados em aula e os exemplos utilizados em avaliação.

A forma de analisar a informação contida nos testes de avaliação está mais próxima da forma que foi utilizada para analisar os episódios do que daquela que foi utilizada para analisar a entrevista. Isto porque, os testes apresentam exemplos em concreto, enquanto que na entrevista apenas pudemos inquirir sobre a sua utilização em aula.

6. Definição de episódio na investigação

Para podermos analisar a maneira como a professora Esmeralda utiliza os exemplos nas suas aulas foi necessário observar cada exemplo individualmente. Só desta forma pudemos identificar a maneira como utilizou cada exemplo e com que objectivo. Assim, a necessidade de observarmos o uso que a professora deu a um exemplo após a sua escolha, para observarmos como os alunos trataram um exemplo que a professora lhes apresentou ou para podermos analisar como entre todos exploraram um dado exemplo, foi necessário isolar cada um dos exemplos contidos nas aulas que registámos em vídeo. Desta forma, as aulas de Esmeralda foram seccionadas em segmentos temporais e cada segmento inclui todo o tratamento de um exemplo; seja ele tratado pela professora, pelos alunos ou por todos em conjunto. Podemos, portanto, estabelecer que cada segmento temporal foi determinado por cada exemplo proposto por Esmeralda. No caso em que foram tratados pelos alunos vários exemplos semelhantes, com a mesma natureza e com o mesmo objectivo, então o segmento temporal inclui uma sequência de exemplos.

"Leinhardt (1989) e Stodolsky (1988), consideram que as aulas dos professores não são homogéneas relativamente às actividades dos alunos e do professor, mas estão segmentadas em partes discerníveis (segmentos), tais como *Correcção do Trabalho de Casa, Apresentação* e *Prática Acompanhada*. Estas divisões são reconhecidas tanto por alunos como por professores. Além disso, as divisões visam diferentes e importantes funções e cada segmento requer acções de diferentes tipos do professor e dos estudantes (Leinhardt, 1989, p.54)" (Escudero e Sánchez, 2007a, p. 88).

Escudero e Sánchez (2007a; 2007b) utilizaram o enquadramento teórico apresentado por Leinhardt (1989), baseado na divisão das aulas em segmentos, para estruturarem as aulas dos professores e com o fim de identificarem aspectos do conhecimento da matéria disciplinar e do conhecimento didáctico do conteúdo que eles integraram nas decisões que tomaram aquando da apresentação de um dado conteúdo aos seus alunos.
Também Gavilán, García e Llinares (2007a, 2007b) utilizaram a segmentação de aulas para poderem analisar a prática dos professores. Gavilán, García e Llinares (2007a) definem *segmento de ensino* como sendo um intervalo temporal da aula caracterizado pela modelação de um mecanismo de construção pelo professor.

Contudo, nas transcrições destes segmentos de ensino obtidos das aulas de Esmeralda optámos por lhes chamar *Episódios*. Na língua portuguesa o nome que se dá a uma parte de uma acção é, usualmente, o de *episódio*. Além disso, devemos considerar como um episódio a utilização de um exemplo (ou sequência deles) por isolado, enquanto que em Escudero e Sánchez (2007b) nos pareceu que o sentido de *segmento* é um espaço temporal um pouco mais abrangente. Estas autoras referem que identificaram várias acções diferentes nos *Segmentos de Apresentação:* "utilização de exemplo/problema para alcançar uma definição, uma propriedade, um teorema, com a constante

intervenção do professor; explicações para alcançar uma definição ou uma propriedade, com a intervenção mínima dos alunos, entre outras." (2007b, p. 318). O sentido dado a *Episódio* contempla apenas o uso de exemplos, mesmo que só um sirva para explicar algum aspecto do assunto em questão. Por outro lado, os *Episódios* não contemplam as explicações do professor que não se baseiam num exemplo específico, como é dado a entender pela descrição de *Segmento* apresentado pelas autoras. Se para elas a correcção do trabalho de casa constitui um *Segmento*, neste estudo seriam tantos os *Episódios* quantos os exemplos contidos nesse trabalho de casa.
Este sentido dado ao termo *Episódio* está mais próximo do sentido referido por Climent e Carrillo (2007) ao citarem (Andrews, Carrillo e Climent, 2005, p. 133): "Entendemos por episódio um fragmento da lição em que a intenção didáctica ou relativa à gestão do professor é constante" (p. 27). No caso desta investigação, a intenção constante da professora será a utilização de um exemplo ou de uma sequência de exemplos com vista a alcançar determinado objectivo.

Considerando o sentido mais restrito que demos ao termo *Episódio*, será este o termo e o sentido que se utilizará em diante.
Assim, por *Episódio*, consideraremos a parte da aula de Esmeralda onde ela ou os alunos tenham tratado um exemplo ou uma sequência deles, tendo esta parte da aula um início, um fim e um propósito bem definidos.

7. Os Instrumentos utilizados

Concluída a recolha de toda a informação, o passo seguinte é a análise de todo o material. Para isso, torna-se necessária a utilização de instrumentos que se adaptem à informação recolhida e que permitam obter resultados conducentes aos objectivos da investigação. Tais instrumentos não foram construídos de raiz, a instrumentos já existentes foram-lhes adaptadas determinadas características e acrescentados elementos que os habilitassem à função requerida:

- Classificar os exemplos utilizados quanto ao objectivo
- Descrever o Conhecimento Didáctico do Conteúdo da professora Esmeralda

Com esta finalidade, foram selecionados dois instrumentos de análise possuindo as funções identificadas:

- o Um Sistema de Categorias que permite distinguir e classificar os Exemplos quanto ao objectivo, no ensino das funções.
- o Um Sistema de Categorias que permite entender o Conhecimento Didáctico do Conteúdo de Esmeralda.

Estes dois instrumentos adaptados foram utilizados nas unidades de análise já descritas, os episódios e, também na entrevista e testes de avaliação. A sua aplicação a cada episódio permitiu identificar, naquele episódio, três perspectivas:

I. o objectivo do uso do exemplo,
II. os conhecimentos que Esmeralda mobilizou
III. as principais características do exemplo à luz da bibliografia específica sobre exemplificação.

No final, toda a informação obtida da análise dos 60 episódios foi sintetizada numa descrição do conhecimento da professora Esmeralda sobre o ensino do conceito de função a alunos de 15-16 anos, segundo as três perspectivas identificadas.

7.1 Elaboração do Instrumento para a classificação dos Exemplos utilizados por Esmeralda quanto ao objectivo

O sistema de categorias para a classificação de exemplos quanto ao objectivo tem como base um sistema já usado anteriormente, ao qual se procedeu a algumas modificações.
O sistema de categorias do qual se partiu foi criado em Figueiredo (2005), uma investigação que estudou o conhecimento de quatro professores em formação enquanto ensinaram o conceito de função, onde se observou o conhecimento que estes quatro professores detinham sobre como ensinar o conceito de função no fim da formação universitária.

Este sistema é constituído por cinco categorias. Como o sistema modificado obtido e que se utilizou nesta investigação inclui todas as categorias do sistema inicial, apenas indicamos as designações daquelas categorias iniciais já que a descrição das novas categorias será apresentada depois das justificações que sustentam os ajustamentos operados. As designações vêm acompanhadas de uma pequena justificação da sua escolha.

> A 1ª Categoria será a **Definição/Apresentação**, porque o primeiro momento passa pela apresentação da função aos alunos.
> A 2ª Categoria será a **Abordagem Inicial Autónoma**, porque após a apresentação do conceito da função vêm os primeiros contactos autónomos dos alunos com as suas possíveis representações.
> A 3ª Categoria será **Esclarecimento e Aprofundamento**, no sentido de pormenorizações, porque as primeiras dúvidas surgem e o seu esclarecimento torna-se necessário trabalhando os pormenores da função com vista ao aprofundamento do conceito.
> A 4ª Categoria será **Aplicação Interna**, porque o conceito de função se relaciona com outros conceitos matemáticos.
> A 5ª Categoria será **Aplicação Externa**, porque a aplicação à vida real e a outras ciências é fundamental para uma compreensão global do conceito de função e para o seu ensino.

Figueiredo (2005)

Quando se utilizaram as categorias na análise do conhecimento didáctico do conteúdo de quatro professores inexperientes (Figueiredo, 2005), ficou sempre a sensação de que o sistema de categorias poderia ser melhorado. O sistema utilizado em 2005 serviu os propósitos daquele estudo mas, no actual, atendendo aos objectivos apresentados, revelou-se incompleto. Particularmente, ao nível do aprofundamento da análise que se vai realizar da escolha de exemplos feita por uma professora com experiência e o uso que deles fez.
Existem dois aspectos relativos à exemplificação que foram incorporados ao sistema de categorias inicial:

- Diferenciação dos objectos matemáticos exemplificados
- O grau de planeamento do exemplo

Independentemente do grau de planeamento dos exemplos, discriminado por Zodik e Zaslavsky (2007b), podemos precisar algumas diferenças entre exemplos de uma mesma categoria, daquelas que foram criadas por Figueiredo (2005). Estas diferenças, entre exemplos da mesma categoria, são mais apreciáveis nas três primeiras categorias. Assim, o objecto da exemplificação pode diferenciar-se quanto ao objecto matemático por três casos: **Exemplificação de um Conceito**, **Exemplificação de um Processo/Técnica** e **Exemplificação de um Teorema**. Zodik e Zaslavsky não foram as primeiras as distinguir os exemplos quanto ao objecto matemático. Esta importante distinção pedagógica já tinha sido identificada por Bills et al. (2006), que afirmaram que essa distinção pode ser feita entre exemplos de um conceito (triângulos, inteiros divisíveis por 3, polinómios, etc.) e exemplos de aplicação de um processo (encontrar a área de um triângulo, verificar se um inteiro é divisível por 3, determinar as raízes de um polinómio, etc.); e, antes ainda, por Bills e Bills (2005) e Karaağaç (2005).
Por outro lado, como se referiu, Zodik e Zaslavsky (2007b) distinguem o **grau de planeamento** de um exemplo, que pode dividir-se em três casos: **Exemplo Planeado, Exemplo Espontâneo e Exemplo Modificado** (Zodik e Zaslavsky, 2007b). O Exemplo Modificado é um misto dos dois primeiros, começa por ser um Exemplo Planeado mas, por não estar a servir adequadamente o propósito estabelecido, tem que se modificar de forma espontânea como resposta à insuficiência, adaptando-se assim aos objectivos pretendidos. A exemplificação espontânea pode surgir em qualquer das três primeiras categorias. Contudo, visto que podem surgir como **(i) resposta a uma pergunta do aluno** ou **(ii) por o exemplo planeado estar a apresentar certas limitações ou insuficiências**, os exemplos espontâneos são mais propícios a fazerem a sua aparição na 3ª categoria quando se estão a precisar os contornos do exemplo. Nestes casos pode ser usual que o exemplo surja na forma de um contra-exemplo ou de um não-exemplo.

GRAU DE PLANEAMENTO DO EXEMPLO		
Exemplo Planeado	Exemplo Modificado	Exemplo Espontâneo

A eficácia na apresentação de exemplos espontâneos é, só por si, reveladora de um sólido conhecimento tanto do conteúdo matemático como da didáctica e dá indicações dos processos subjacentes à criação desses exemplos. Paralelamente, os exemplos planeados podem ser considerados como um produto final do pensamento do professor.

Na realidade, as 4ª e 5ª Categorias, as aplicações internas e externas, não poderiam ser objecto destas divisões porque, intrinsecamente, são situações que devem ser bem planeadas e não configuram situações de rotina nem se destinam tanto à generalização/abstracção.

Por tudo o que se referiu anteriormente, devemos alargar o nosso estudo dentro do âmbito da exemplificação do Conceito de Função. As categorias e subcategorias não se referem apenas ao Conceito de Função (quadrática, polinomial, afim), vinculam-se também aos processos (regra de Ruffini, factorização, equações e inequações de grau superior ao 2º) e teoremas (teorema do resto, teorema fundamental da álgebra, teorema de Pitágoras) que envolvam o conceito de função no âmbito do Capítulo das Funções do

Programa do 10º ano do Ensino Secundário em Portugal. Este alargamento aos processos e teoremas verifica-se, primordialmente, nas duas primeiras categorias já que a aquisição de *rotinas* na utilização de procedimentos e teoremas se conseguem pela utilização de exemplos dessas categorias.

Existe uma dificuldade muito grande em criar um sistema de categorias e utilizá-lo de forma isolada. As categorias utilizadas em Figueiredo (2005) não são estanques e, nesse caso, poderemos classificar melhor o exemplo quanto ao objectivo, analisar a escolha do exemplo e o uso que dele foi feito se se sobrepuserem mais que uma tipificação sobre o uso de exemplos. Paralelamente às categorias apresentadas, existem casos específicos da bibliografia que podem ser tratados simultaneamente. A inclusão de exemplos nas categorias não impede que eles possam ser tratados, simultaneamente, com outras tipificações. Isto é, se apresentarem as particularidades com que as outras tipificações os individualizam.
Por isso, devemos ter em atenção:

- O uso das sequências de exemplos. São grupos de exercícios com características comuns ou que visam o mesmo objectivo. Podem servir para rotinar procedimentos, para ilustrar várias dimensões num mesmo conceito ou para generalizar (Sangwin, 2004). O seu uso pode ser mais indicado nas primeiras três categorias mas, talvez, mais apropriadas à introdução/abstracção do conceito e à rotina de procedimentos/técnicas, respectivamente 1ª e 2ª categorias. Por isso, poderemos agrupar uma sequência de exemplos como um todo e inseri-la na categoria correspondente.
- O uso de não-exemplos e de contra-exemplos são mais específicos da 3ª categoria. Segundo a bibliografia, quando planeados, o surgimento de contra-exemplos não é frequente, o seu surgimento é mais espontâneo, ainda que o surgimento planeado de não-exemplos seja mais frequente (Figueiredo, 2005; Zodik e Zaslavsky, 2007).
- Outras categorizações de exemplos tais como, Exemplos Delimitantes (Watson e Mason, 2001, 2005), os Exemplos Genéricos (Michener, 1978; Mason e Pimm, 1984; Bills, 1996), Exemplos Paradigmáticos (Sierpinska, 1994), Exemplos Instrutivos (Zaslavsky e Lavie, 2005) e os Exemplos Fulcral/Ponte (Zazkis e Chernoff, 2008), entre outros, encaixam tanto na 2ª como na 3ª categorias onde se clarificam e alargam os contornos do conceito.

A transformação do sistema de categorias, desde o sistema inicial até ao actual, que se verificou e que deu forma ao sistema utilizado nesta investigação baseou-se, portanto, na alternância entre as interrogações e as comparações apontadas na Grounded Theory (Strauss e Corbin, 1990). O sistema de categorias pretende enquadrar o conceito de "exemplificação", por isso são feitas perguntas como, "O que é a exemplificação?", "O que são Exemplos?", "Para que servem os Exemplos" ou "Que objectivos perseguem?". Estas perguntas permitiram encontrar relações de semelhança (ao compararem-se os exemplos uns com os outros) que determinaram os grupos a considerar e a respectiva construção das categorias em abstracto. Este processo de perguntar e responder, perguntar e comparar, permitiu identificar as semelhanças que, ao serem identificadas, formaram uma categoria conceptual. Este processo permitiu manter as categorias existentes no sistema de Figueiredo (2005) e identificar nelas o que estava omisso. O processo de conceptualização foi mais complexo que a designação do conceito inerente à categoria. A identificação de cada categoria exigiu a sua especificação, isto é, exigiu que fossem definidas as suas características no contexto do estudo da exemplificação. Assim, é importante clarificar o significado que cada categoria assume neste estudo e, principalmente, diferenciá-lo dos significados que usualmente estão associados ao nome de cada categoria (Strauss e Corbin, 1990).

O sistema de categorias que irá caracterizar quanto ao objectivo os exemplos utilizados por Esmeralda para ensinar o conceito de função fica, portanto, assim definido:

1. *Definição/Apresentação*

Os exemplos considerados nesta categoria são aqueles que se apresentam aos alunos imediatamente após a definição do conceito, apresentação do procedimento ou enunciado do teorema, passando de uma situação geral que é a definição, apresentação ou enunciado, para situações concretas desse conceito, procedimento ou do teorema. São pois os primeiros exemplos. Contudo, em alternativa, se for essa a escolha do professor na introdução de um conceito, estes primeiros exemplos podem surgir antes de se apresentar a definição desse conceito. Isto é, em primeiro lugar o professor apresenta uma série de exemplos que evidenciam características comuns; posteriormente, com base nessas características, a definição do conceito surge naturalmente escrita pelos alunos. Ao invés, esta alternativa configura uma transição do particular para o geral, de situações concretas do conceito, os primeiros exemplos, para uma outra situação de carácter mais abrangente e genérica, a definição desse conceito.

A origem dos exemplos de conceitos, de procedimento ou de teorema assenta fundamentalmente na planificação que o professor fez antes da leccionação do conceito, sendo escolhidos segundo os critérios pessoais do professor e a forma como são apresentados é feita no seguimento da planificação e da estratégia adoptadas.

De acordo com planificação e estratégia referidas, os exemplos podem apresentar qualquer das suas facetas: gráfica, numérica, algébrica, etc. A faceta em que o exemplo se baseará será aquela que melhor servir as intenções do professor e os objectivos propostos, por isso pode ser um exemplo puramente matemático ou configurar uma situação da vida real, mas terá que ser sempre uma situação de apresentação que envolva o conceito.

Assim, estes exemplos inicialmente propostos pelo professor e trabalhados com os alunos visam apenas um contacto inicial com o conceito. Este contacto pode ser individual ou em grupo dependendo, mais uma vez, da estratégia adoptada pelo professor.

Convém neste ponto realçar que estes exemplos muito simples, como se disse, se destinam a apresentar o conceito, seja o de função no seu aspecto inicial, seja de algum tipo de função cujo estudo se produza no 10º ano.

Com estes exemplos pretende-se apenas mostrar ou sugerir aspectos gerais e fundamentais do conceito. Como referimos atrás, são exemplos que pelos seus traços comuns se destinam a realçar aquilo que caracteriza o conceito na sua base, isto é, os fundamentos para a construção desse conceito.

Por serem conceitos que, na maioria das vezes, são apresentados pela primeira vez e porque nesta fase de apresentação do conceito se pode esperar o surgimento de situações falsamente abrangidas pela definição, esta categoria também inclui os contra-exemplos básicos, necessários à exclusão desses exemplos que, por semelhança ou pela existência de conceitos prévios, possam induzir falsas características ou conduzir a erros na construção do conceito.

2. *Abordagem Inicial Autónoma*

Uma vez introduzido o conceito, apresentado o procedimento ou enunciado o teorema, depois de os alunos terem com ele tomado um contacto inicial e se terem apercebido das suas características basilares surge um segundo momento com os exercícios típicos de aplicação do procedimento ou com as primeiras situações problemáticas que envolvam o conceito ou o teorema. Quer os exercícios quer as situações problemáticas surgem de preferência quando o aluno já se situou no conceito a aprofundar ou, por seu lado, no procedimento ou teorema a utilizar. Isto é, após a fase de apresentação os exemplos são escolhidos com base em critérios pessoais e de acordo com as preferências do professor.

Uma das diferenças entre estes exemplos e os da categoria anterior prende-se com o facto de que a autonomia do aluno em relação ao exemplo deverá se maior, o papel do professor deverá ser menos participante de forma a promover um maior envolvimento do aluno com o exercício ou com problema.

O surgimento destes exemplos dá-se independentemente das tendências didácticas do professor, pode dar-se por via de uma actividade prática, de alguns problemas de baixo grau de complexidade propostos pelo professor ou, simplesmente através de uma ficha de trabalho no sentido tradicional.

São exemplos que ilustram as diversas formas de representar os vários tipos de função em estudo ou de utilizar procedimentos e teoremas no âmbito da programação do 10º ano. Seguindo esta programação atentamente, podemos verificar que pelas funções tratadas poderão ser fundamentalmente exemplos simbólicos, algébricos ou gráficos e não se esperam, portanto, grande frequência no aparecimento de exemplos de tipo coloquial ou de tabelas numéricas, embora estas duas últimas facetas não se possam excluir totalmente. Podemos mesmo assegurar que desse seguimento atento dos programas pode notar-se que existem temas em que as primeiras abordagens são especificamente com base nestas duas facetas não deixando, no entanto, de ser abordagens transitórias.

Com o aluno plenamente envolvido neste tipo de exemplos, manuseando-os, superando as dificuldades que estes exemplos apresentem, pretende-se alargar as formas possíveis do aluno abordar o conceito, utilizar procedimentos ou utilizar teoremas. Com uma colecção/sequência adequada destes exemplos o professor que os propõe pretende trabalhar de forma específica as diversas facetas do conceito em estudo, os exemplos permitem ao aluno aperceber-se das diferentes aproximações e das diferentes perspectivas relativamente a uma mesma relação entre duas quantidades, isto é, aperceber-se da característica fundamental do conceito de função. No caso da utilização de procedimentos ou teoremas pretende-se rotinar o aluno para que o procedimento ou o teorema não seja em si uma dificuldade e possa ser utilizado como ferramenta num âmbito mais alargado.

Com estes exemplos, com as primeiras dificuldades decorrentes do incremento de autonomia do aluno e com o início da construção do esquema conceptual pretende-se que o aluno, em situações concretas, enfrente as primeiras perguntas, as primeiras dúvidas relativamente a procedimentos e solicite esclarecimentos surgidos neste primeiro contacto com a função em causa. Estes exemplos promovem já uma atitude mais inquiridora por parte do aluno, motiva a sua curiosidade com a vantagem de serem situações facilmente manipuláveis.

3. *Esclarecimento e Aprofundamento*

Este tipo de exemplos surge após a fase exploratória do conceito, quando o aluno empreende e ataca a tarefa de aprofundar o conceito nas suas várias facetas descobrindo as suas particularidades. Construir uma estrutura ou um esquema conceptual é um processo composto de numerosas etapas consecutivas, cada uma delas com as suas dificuldades inerentes. Nesse processo as dificuldades requerem exemplos como forma de serem superadas, isto é, como esclarecimento às dúvidas do aluno ou como forma de resolver situações de confusão.

No desenrolar da relação de aprendizagem que se estabelece entre o aluno e o conceito os exemplos desta categoria são resposta àquelas situações de dificuldade cujo aparecimento é esperado por qualquer professor. Não há temas que sejam leccionados sem provocar algum sobressalto a algum aluno em alguma altura, logo essas dificuldades são esperadas, o que se sabe é que essas dificuldades são de localização temporal indeterminada e contornos imprecisos. Os professores com mais experiência podem ter uma facilidade acrescida em prever o aparecimento dessas situações em comparação com aqueles que iniciaram a leccionação há menos tempo. Os exemplos dedicados às situações de dúvida ou confusão podem apresentar-se antes de estas situações surgirem, mas essa apresentação, qualidade e profusão dependem da capacidade de previsão, experiência e originalidade do professor.

Dependendo da característica do conceito os exemplos relativos às características de uma função são apresentados tanto de forma oral como escrita mas baseiam-se, fundamentalmente, numa interacção imprevisível entre professor e aluno e, por isso, são exemplos menos planeados e mais espontâneos. É natural que certas facetas sejam melhor exemplificadas na forma oral, outras de forma escrita, cabe ao professor escolher a forma que melhor se adequar à característica do conceito que se pretende realçar, destacar ou explicitar. Assim, depois de escolhidos ou elaborados os exemplos eles podem apresentar um aspecto formal ou, então, apresentar-se sob a forma de analogia, metáfora, colecção de exemplos, cadeia lógica, etc.

Como já se deixou antever, são exemplos que, ***se bem escolhidos***, pretendem por um lado esclarecer, clarificar e alargar as características do conceito e, por outro, eliminar dúvidas e a obviar situações de confusão. Os exemplos desta categoria destacam-se pela importância que assumem no processo de construção da estrutura do conceito, se quisermos, na construção da imagem desse conceito. Estes exemplos realçam pormenores e assentam nas características específicas do conceito da função em estudo, promovendo a construção correcta e rigorosa da sua estrutura, visando concluir, generalizar e sistematizar no final de cada etapa.

Como finalidade, estes exemplos perseguem a correcta construção dos conceitos e são fundamentais para uma progressão segura no decurso do ensino/aprendizagem da Matemática e, para isso, são necessários para ancorar cada passo, dar-lhe solidez e acautelar situações futuras, como seja, preparar situações de problema que surgirão posteriormente.

4. Aplicações internas.

As aplicações internas são uma forma de exemplificação que aparece já nas fases de maior aprofundamento do conceito e do tipo de função em estudo. Estas aplicações podem incluir conteúdos ou conceitos leccionados anteriormente ou, então, relacionarem-se com outros que serão leccionados posteriormente. As situações que envolvem este tipo de exemplos requerem um maior grau de formação do conceito, uma estrutura do conceito mais complexa por parte dos alunos, permitindo a interpretação e o manuseamento da situação ou, no caso de o exemplo ser uma situação problema, a sua resolução.

Os exemplos desta categoria surgem como fim de um percurso, é o finalizar de uma estrutura que deverá possuir todos as ferramentas necessárias à aplicação do conceito em qualquer situação estritamente matemática em que este figure. São exemplos que não envolvem apenas o conceito em estudo, já que o edifício matemático não é um somatório de conceitos independentes, mas sim uma rede de conceitos interligados que se devem articular de forma coerente.

Os momentos propícios para a apresentação destes exemplos são as circunstâncias que contemplem situações novas para o aluno ou, então, a resolução de problemas estritamente matemáticos. São exemplos que, pela sua complexidade, não podem ser apresentados oralmente, são apresentados sob a forma escrita para que a sua análise se possa fazer repetidamente se necessário. A abordagem e manuseamento dos exemplos incluídos nesta categoria poderão ser a título individual ou em grupo, poderão assumir um papel importante na dinâmica que se queira incutir na sala de aula e a sua escolha prende-se com critérios individuais de estratégia e de planificação do professor.

Não é de excluir que este tipo de exemplos possa ser utilizado no fim de ciclos educativos, como forma de avaliação dos alunos, do tipo de ensino/aprendizagem, das estratégias ou mesmo, dos exemplos até aí utilizados.

O objectivo destes exemplos é o de provocar um aprofundamento dentro do conceito e nas várias facetas que ele apresente, apenas desta forma se poderá concluir sobre o cabal cumprimento do que é exigido quer ao professor quer ao aluno. O aluno monta uma estrutura já com algum grau complexidade que será o seu esquema conceptual e o professor participa nesse processo fornecendo estes exemplos por ele considerados como os mais adequados a esta fase.

Estes exemplos são situações que programaticamente se apresentam no fim de um ciclo, como tal, são exemplos que obrigam o aluno a utilizar todos os recursos de que dispõe sobre o conceito e suas articulações com outros conceitos. São exemplos que promovem um domínio não apenas sobre uma estrutura, mas sim sobre uma articulação de estruturas. Pretendem um trabalho individual do aluno sobre os temas envolvidos ou, então, um envolvimento entre alunos na procura de uma reflexão e enriquecimento do aluno em interacção com o grupo.

5. Aplicações externas.

Estes exemplos são aplicações à vida real e a outras ciências. O tipo de exemplos desta categoria é semelhante à categoria anterior apenas diferem na sua natureza. São exemplos que podem configurar exercícios ou problemas mas incluem-se nesta categoria por envolverem um certo grau de dificuldade. É exactamente este grau de dificuldade o que os distingue dos exemplos do mesmo género que figurem nas outras categorias. Não estamos perante situações simples mas sim perante situações que exigem do aluno um empenho baseado na profundidade com que se trabalham as diferentes facetas do conceito, o que implica uma estrutura conceptual mais complexa.

Surgem como aplicação efectiva e global do conceito em causa a uma situação determinada já quando o aluno pode perspectivar o exercício ou problema de diversas formas e enquadrá-lo numa das facetas da função. Como são exemplos que envolvem o conceito de função, ou de um certo tipo de função, associado a conceitos de outras disciplinas ou a situações da vida real, obrigam a uma escolha adequada do conceito ou de uma das suas facetas e, para isso, é necessário que o aluno possua agilidade conceptual apropriada.

A modelação do real e a interpretação de situações em outras disciplinas é o terreno ideal para este tipo de exemplificação. Tal como na categoria anterior, poderemos enquadrar estes exemplos numa situação de fim de ciclo e em situação de avaliação sendo que a sua abordagem poderá ser individual ou em grupo, cabendo sempre ao professor escolher em função da planificação e dos critérios pessoais.

De igual modo que na 4ª Categoria o objectivo destes exemplos é o de provocar um aprofundamento dentro do conceito e nas várias facetas que ele apresente mas, por serem de aplicação a outras disciplinas e à vida real, isso apenas acontece quando à complexidade da estrutura conceptual vem associada a flexibilidade na sua utilização.

Ao anterior objectivo devemos também acrescentar que este tipo de exemplos devem fomentar um trabalho individual do aluno sobre o tema ou, então, uma reflexão entre alunos na procura de uma reflexão e enriquecimento do aluno em interacção com o grupo.

Categorias e respectivas subcategorias da exemplificação no âmbito das funções.

1. Definição	Conceito	Planeado
		Modificado
		Espontâneo
	Processo	Planeado
		Modificado
		Espontâneo
	Teorema	Planeado
		Modificado
		Espontâneo
2. Abordagem Inicial Autónoma	Conceito	Planeado
		Modificado
		Espontâneo
	Processo	Planeado
		Modificado
		Espontâneo
	Teorema	Planeado
		Modificado
		Espontâneo

3. Esclarecimento e Aprofundamento	Conceito	Planeado
		Modificado
		Espontâneo
4. Aplicações Internas		
5. Aplicações Externas		

Nota: *a inclusão de um exemplo (ou sequência de exemplos) numa categoria não obsta a que se tipifique como caso definido na bibliografia sobre exemplificação se tal servir para enriquecer a descrição do exemplo ou, então, o conhecimento do professor por via da sua escolha e pelo seu uso.*

Figura 28: Primeiro Instrumento de Observação

7.2 Escolha do instrumento para descrição do Conhecimento Didáctico do Conteúdo de Esmeralda

O conhecimento do professor é complexo e multifacetado (Chick, Baker, Pham e Cheng, 2007). O conhecimento que mais se evidencia quando um professor ensina os seus alunos é, como vimos no enquadramento teórico, o Conhecimento Didáctico do Conteúdo (CDC) e é nele que estão incluídos aspectos importantes como o conhecimento de formas de ensinar completas e profundas, a habilidade para seleccionar representações adequadas que transmitem as ideias chave e, também, uma consciência da razão porque é provável que surjam algumas confusões e falsas concepções (Leinhardt, Putnan, Stein e Baxter, 1991). Ma (1999) descreveu um conhecimento dos professores que é profundo no que respeita às matemáticas fundamentais (PUFM). Os professores que possuem este tipo de conhecimento conseguem fazer ligações entre conceitos e procedimentos; conseguem abordagens aos conceitos e aos problemas sob múltiplas perspectivas; demonstram uma consciência explícita de conceitos básicos mas poderosos; e têm um conhecimento dos currículos como um todo em vez do conhecimento de várias porções que se requerem para o ensino da matemática. De forma semelhante, Ball (1991) salienta a importância dos professores conhecerem as relações que se estabelecem entre os tópicos matemáticos, os procedimentos e os conceitos. Além disso, Ball (2000) descreve "a capacidade para desmontar o próprio conhecimento numa forma final menos polida, onde os seus componentes principais se tornam visíveis e acessíveis" (p. 245) como sendo importante para os professores, e isto é relevante para o Conhecimento Didáctico do Conteúdo. Vários autores relacionam o sólido conhecimento do professor aos sucessos dos alunos, como por exemplo Ma (1999) e Askew, Brown, Rhodes, Johnson, e Wiliam (1997).
Embora haja trabalho publicado sobre o CDC e sobre Exemplos, existe muito pouco sobre a relação entre os dois. Com base na bibliografia (cf. 4. do Cap. II) pode argumentar-se que o CDC influencia a escolha de exemplos, assim, podemos esperar que a escolha de exemplos possa proporcionar evidências sobre o CDC (Chick e Harris, 2007).

É com base em considerações como as anteriores que Chick, Baker, Pham e Cheng (2006) e Chick (2007) desenvolveram um instrumento que permite enquadrar e explicitar elementos do Conhecimento Didáctico do Conteúdo. Este instrumento já foi apresentado na secção 3.2 do Capítulo II, Fundamentação Teórica.
Segundo os seus criadores, não se pode sugerir que este instrumento esteja completo e totalmente testado. No entanto pudemos encontrar duas boas razões para o usar:

- Testá-lo em situação de aula e de entrevista e com tópicos matemáticos diferentes dos usados pelos autores, tal como eles próprios sugerem.
- O instrumento adapta-se muito bem às condições desta investigação, é perfeitamente ajustável à situação de exemplificação. Isto é, tem muito boas potencialidades para estudar o CDC de um professor aplicando-o ao uso dos exemplos que ele escolheu.

A capacidade de adaptação do instrumento ao estudo do CDC dos professores, através da aplicação aos exemplos que eles escolhem e usam, é facilmente comprovável nos artigos de Chick e Harris (2007) e Chick (2007).
O artigo de Chick e Harris (2007) mostra como este instrumento permitiu evidenciar os aspectos do CDC entre catorze professores cujas aulas foram videogravadas. O sistema de categorias foi aplicado, justamente, aos exemplos escolhidos e usados por estes professores. A discussão de resultados desenvolve-se em torno do trabalho de duas professoras, Hilary e Clare, e de como elas mobilizaram os seus conhecimentos para leccionar conteúdos matemáticos a crianças de 11-12 anos. Na conclusão deste estudo ficam patentes as diferenças entre os CDCs de ambas, diferença bem explicitada pela aplicação do instrumento às formas de exemplificar de ambas as professoras.
O artigo de Chick (2007) contém elementos de investigação e resultados do artigo anterior. É, portanto, um estudo mais abrangente e que permite conclusões mais alargadas. O estudo, além de relacionar o CDC com a escolha de exemplos, também incorpora descrições sobre as potencialidades do uso dos exemplos, o que permite que as conclusões não se limitem a explicitar diferenças entre professores e possam abranger a problemática da escolha e uso do exemplo, a sua modificação se tal for aconselhável, a reflexão sobre o grau de dificuldade que apresenta, entre outras coisas. Por outras palavras, o CDC dos professores fica bem caracterizado não pela comparação entre o que dois professores conseguem com a sua exemplificação, mas sim pela análise da escolha, uso e potencialidades inerentes que cada um, por separado, faz dos seus exemplos.

Relativamente ao estudo e descrição do CDC do professor, já existe um número significativo de modelos que têm vindo a ser apresentados desde a década de oitenta e, por isso, não se revelaria necessário para o nosso estudo estar a criar um totalmente novo caso algum dos existentes se adaptasse às nossas pretensões. Foi o caso do modelo de Chick, Baker, Pham e Cheng (2006), que para além de ser um modelo para o CDC do professor pode ser baseado nos exemplos que este apresenta.
Pelos os argumentos apresentados, fica clara a razão pela qual se adoptou um instrumento já existente e, também, a razão pela qual se escolheu este em particular.

Enquadramento Teórico para o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (CPC)
(Helen Chick, 2007)

Categorias do CPC	Evidentes quando o professor…

Claramente CPC

Estratégias de Ensino	Discute ou usa estratégias ou abordagens gerais ou específicas para ensinar uma técnica ou um conceito matemático.
Pensamento do Estudante	Discute ou estabelece com o estudante modos de pensar acerca de um conceito, ou reconhece níveis típicos de compreensão.
Pensamento do Estudante:Concepções Alternativas	Discute ou refere-se às concepções alternativas do estudante.
Exigências Cognitivas de uma Tarefa	Identifica aspectos de uma tarefa que influenciam a sua complexidade.
Representações Detalhadas e Apropriadas Dos Conceitos	Descreve ou exibe formas de modelar ou ilustrar os conceitos (pode incluir materiais ou diagramas).
Explicações	Explica um tópico, conceito ou procedimento.
Conhecimento de Exemplos	Usa um.
Conhecimento de Recursos	Discute/usa os recursos disponíveis para auxiliar o ensino.
Conhecimento do Curriculum	Analisa a forma como os conteúdos integram o currículo.
Objectivo do Conhecimento do Conteúdo	Analisa as razões pelas quais um conteúdo é incluído no currículo ou como pode ser usado.

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental	Demonstra um conhecimento conceptual profundo e minucioso de aspectos identificados da matemática.
Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave	Identifica os componentes matemáticos críticos de um conceito que são fundamentais para a compreensão e aplicação desse conceito.
Estrutura Matemática e Conexões	Faz conexões entre conceitos e conteúdos, incluindo interdependência entre conceitos.
Conhecimento Procedimental	Apresenta habilidade para resolver problemas matemáticos (a compreensão conceptual não necessita ser evidenciada).
Métodos de Solucionar	Apresenta um método de solucionar um problema matemático.

Nota: Não contempla o rigor de Linguagem Verbal nem na Notação.

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo

Objectivos da Aprendizagem	Descreve o objectivo da aprendizagem do aluno.
Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno	Discute ou usa estratégias de interacção com os alunos
Técnicas de Sala de Aula	Discute ou usa práticas gerais de sala de aula.

Figura 29: Segundo Instrumento de Observação

8. A transcrição das aulas: a separação em episódios

De todas as aulas que pudemos gravar em vídeo, não encontrámos pertinente fazer a sua transcrição integral. No entanto, podemos afirmar que transcrevemos integralmente cada episódio identificado. Em termos gerais, isto significou a transcrição de mais de 80% das 12 aulas da professora Esmeralda que gravámos. Apenas não transcrevemos os poucos momentos em que Esmeralda não ensinou os alunos com recurso a algum exemplo. Referimo-nos a momentos em que explica qual é o trabalho de casa, os conteúdos que farão parte de um teste de avaliação ou alguma pausa na leccionação para que os alunos se descontraíssem um pouco.

Relembremos o sentido de *Episódio* para melhor se entender a forma como feita a transcrição das aulas da professora Esmeralda:
Por *Episódio*, consideraremos a parte da aula de Esmeralda onde ela ou os alunos tenham tratado um exemplo ou uma sequência deles, tendo esta parte da aula um início, um fim e um propósito bem definidos.
Dos três elementos da definição, início-fim-propósito, aquele que se revela mais importante é, sem dúvida, o "propósito". Ao lermos um episódio qualquer, dos sessenta que foram isolados das 12 aulas, o propósito do uso daquele exemplo (ou sequência deles) está bem identificado. Assim, podem ser identificados tantos propósitos ou objectivos quantas as categorias do sistema criado para classificar os exemplos quanto ao objectivo. Podem ser exemplos com o objectivo de introduzir um conceito, de esclarecer alguma dúvida, aplicar o conceito a uma situação da vida real, etc.
Este trabalho de identificação do início, fim e propósito do uso de um exemplo em particular, ou de uma sequência deles, não foi complicado. Esta tarefa de isolar os episódios viu-se bastante simplificada pela própria actuação da professora, pois, para que os alunos em qualquer altura estivessem bem situados nos trabalhos, as indicações sobre o desenrolar dos trabalhos estão patentes no seu discurso ao longo das aulas. Foi fácil identificar quando se inicia um episódio e quando ele termina. Como baseámos o nosso trabalho no uso de exemplos, o episódio inicia-se quando a professora propõe uma actividade relacionada com um exemplo e termina logo que a professora considera que o objectivo foi atingido ou que o propósito foi cumprido.

Podemos apresentar como ilustração do que dissemos o Episódio 53 de 16 de Março de 2007. O início do episódio é identificável quando a professora diz: "Então vamos lá corrigir o trabalho de casa". A própria frase que dá início ao episódio também indica qual é o propósito da acção incluída no episódio; neste caso, corrigir o trabalho de casa. No fim, quando foi obtida a informação requerida no exemplo e a professora constata que nenhum aluno ficou com qualquer dúvida, a professora fecha o episódio com a apresentação da informação requerida e na aproximação correcta: "Como nós aqui também arredondámos, a altura máxima, às unidades, portanto [é 3]."

9. A aplicação dos Instrumentos e das Situações Tipificadas na bibliografia

Yin (2003) afirma que são as unidades de análise que definem o que o caso é. No presente caso, as unidades de análise são os episódios que isolámos, partes da entrevista e as questões dos testes de avaliação, porque são estes elementos que, ao conterem a informação, correspondem ao interesse do estudo e permitem a concretização dos objectivos propostos.
As situações de uso de exemplos que recolhemos da bibliografia disponível serviram para caracterizar melhor a forma de exemplificar de Esmeralda. A Exemplificação é uma das componentes mais importantes de uma aula de Matemática. Tal como afirma Leinhardt (2001, p. 347) citado por Zaslavsky (2010)

> A produção ou selecção de exemplos é uma parte fundamental da estruturação de uma boa exposição lectiva… Para que a aprendizagem ocorra, são necessários vários exemplos, não apenas um; os exemplos necessitam encapsular um leque de aspectos fundamentais; e os exemplos necessitam ser clarificados, à custa dos aspectos que fazem deles um exemplo claramente identificável.

A aplicação dos instrumentos de análise tem precisamente a intenção de evidenciar a forma como Esmeralda apresentou os exemplos, os seus aspectos fundamentais que os tornaram exemplos para o conceito em estudo e o conhecimento que determinou a escolha e a forma de usar esses exemplos.

9.1 Aplicação aos Episódios

A aplicação dos instrumentos foi efectuada a cada um dos sessenta episódios. Nesta investigação, a classificação do exemplo quanto ao objectivo, a caracterização do CDC da professora Esmeralda e a forma como os exemplos foram utilizados estão intimamente ligados à exemplificação do conceito de função. Dito de outra forma, de cada episódio podem-se extrair informações sobre três vertentes da exemplificação do conceito de função da professora,

- A classificação do exemplo quanto ao objectivo (1º instrumento)
- Aspectos do Conhecimento Didáctico do Conteúdo (2º instrumento)
- Uso das particularidades do exemplo (casos tipificados na Bibliografia)

A aplicação dos dois instrumentos foi simultânea a cada episódio, quase como se fosse um único instrumento, em que se aponta o objectivo do exemplo e também se caracteriza o CDC que a professora mobilizou naquele episódio. Por fim, explica-se como as características do exemplo presente no episódio, tipificadas na fundamentação teórica, mobilizadas pelo CDC da professora fomentaram a concretização do objectivo identificado. Nas aulas gravadas de onde se retiraram os episódios também se colheram notas de campo. Estas notas foram extremamente úteis porque incluíram pormenores da aula que não ficaram totalmente registados nas gravações e que dificilmente seriam notados aquando das transcrições. Além disso, também incluem as considerações que ocorreram ao investigador enquanto assistia a estas aulas. Assim, no fim da transcrição de cada episódio, as descrições que se fizeram do uso de cada exemplo escolhido por

Esmeralda inclui os dados obtidos destas duas origens, a transcrição do episódio e as notas de campo a ele relativas.
Todos os episódios incluem três tipos de caracterização bem distintos: a classificação do exemplo, incluído no episódio, quanto ao objectivo; aspectos do CDC de Esmeralda evidenciados no episódio; escolha do exemplo e caracterização do seu uso à luz das situações tipificadas existentes na bibliografia específica à exemplificação.
No final da análise de todos os episódios foram construídas três tipos de tabelas, umas relativamente à classificação dos exemplos, outra relativamente ao uso dos exemplos e, por fim, outras relativamente ao CDC de Esmeralda.

As tabelas onde se apresenta a informação sobre como os exemplos foram classificados são sete. Seis tabelas apresentam toda a informação separada em grupos de dez episódios e a sétima apresenta a informação relativa aos sessenta episódios. A razão desta divisão radica na possibilidade de se seguir cronologicamente a utilização dos exemplos no que se refere ao objectivo e ao grau de planeamento.
Como ilustração apresenta-se a tabela relativa ao grupo dos primeiros dez episódios:

Episódios. Totais de 1 a 10
Classificação do Exemplo/Sequência

<table>
<tr><td></td><td>Exemplos</td><td>||||</td><td>Sequências</td><td>||||||</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>Exemplo/ Sequência</td><td>Conceito</td><td>Processo</td><td>Teorema</td><td>1ª categ.</td><td>2ª categ.</td><td>3ª categ</td><td>4ª categ.</td><td>5ª categ</td></tr>
<tr><td>Planeado</td><td>||||||</td><td>||</td><td></td><td>|</td><td>||||||</td><td>|</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Modificado</td><td>|</td><td></td><td></td><td></td><td>|</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Espontâneo</td><td>|||</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>|||</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Nota: 1ª Cat – Definição/Apresentação; 2ª Cat – Abordagem Inicial Autónoma; 3ª Cat – Esclarecimento e Aprofundamento; 4ª Cat – Aplicações Internas; 5ª Cat – Aplicações Externas

A informação presente neste quadro foi obtida pela aplicação do sistema de categorias melhorado obtidas de Figueiredo (2005), o 1º instrumento, e que permitiram classificar os exemplos (ou sequência deles) quanto ao objectivo. A aplicação deste sistema de categorias permite informar sobre o exemplo/sequência quanto ao grau de planeamento, natureza e em qual das cinco categorias (objectivo) se inclui.
A forma como a informação é disposta no quadro permite ver como os exemplos se distribuem pelo grau de planeamento e pelas cinco categorias ou, ainda, pelo grau de planeamento e pela natureza do exemplo (Conceito/Processo/Teorema). Também indica o número de exemplos e o número de sequências de exemplos.
A partir dos quadros foram elaboradas sínteses sobre a forma como a professora escolhe e usa os exemplos enquanto instrumentos para atingir os objectivos de ensino estabelecidos nas descrições de cada categoria, grau de planeamento e natureza do exemplo, ou sequência de exemplos.

Em segundo lugar tratou-se a exemplificação da professora Esmeralda sob a perspectiva dos casos tipificados na bibliografia específica. Na realidade são várias perspectivas, pois a tipificação de casos é bastante variada. Assim sendo, optou-se pela descrição da exemplificação da professora segundo cinco vertentes:

i. *Facetas dos Exemplos*

ii. *Variação e Espaço de Exemplos*
iii. *Observação de Exemplos descritos na Bibliografia*
iv. *Transparência*
v. *Escolha de Exemplos*

A primeira vertente é a que tem uma ligação específica com o conceito de função, pois associa cada exemplo às várias facetas ou representações deste conceito. As restantes vertentes estão tratadas por separado na secção 4 do Capítulo II, Fundamentação Teórica. Sobre cada uma das vertentes foi a realizada uma síntese descritiva da actuação e do conhecimento específico no que respeita à exemplificação do conceito de função.

Por fim, apresentam-se os quadros relativos ao Conhecimento Didáctico do Conteúdo de Esmeralda. Também aqui os quadros são aos grupos de sete, seis que representam grupos de dez episódios e o último quadro que inclui a informação relativa aos sessenta episódios. O interesse desta divisão é exactamente o mesmo que no caso dos quadros relativos à aplicação do primeiro instrumento, a possibilidade de se seguir cronologicamente os diversos aspectos do CDC evidenciados pela professora.

No que concerne ao CDC temos, então, três grupos de sete quadros. Justamente os três grupos de aspectos do CDC que Chick (2007) designou e que se incluem no 2º instrumento:

i. *Claramente CDC*
ii. *Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico*
iii. *Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo*

Também em cada um destes três âmbitos foram elaboradas sínteses descritivas, neste caso dos traços de CDC apresentados pela professora Esmeralda.

9.2 Aplicação à Entrevista

À entrevista da professora Esmeralda aplicou-se apenas o instrumento que permite caracterizar o Conhecimento Didáctico do Conteúdo (Chick, 2007). Como é óbvio, o instrumento que classifica os exemplos quanto ao objectivo não foi aplicado por não se ter pedido, durante a entrevista, que Esmeralda apresentasse qualquer exemplo.

A entrevista foi segmentada em respostas. As evidências relativas aos vários aspectos do Conhecimento Didáctico do Conteúdo de Esmeralda contidas no sistema de categorias de Chick (2007) eram apresentadas segundo a designação atribuídas às respostas. Por exemplo, E1 corresponde à primeira resposta de Esmeralda e E74 corresponde à última. Com esta aplicação recolheram-se as concepções de Esmeralda sobre o que ela considera ser a exemplificação do conceito de função, os seus objectivos e como deve ser implementada em sala de aula.

9.3 Aplicação aos Testes de Avaliação

A apresentação de situações matemáticas em testes de avaliação não é, por regra, considerada uma forma de exemplificar. Mas, em boa verdade, muitas das situações que se apresentam aos alunos durante as aulas são em tudo idênticas àquelas que, mais tarde, se apresentam nos testes. Neste sentido, tratámos as questões apresentadas aos alunos nos testes de avaliação como sendo exemplos que se enquadram na definição de exemplo apresentada a cima, sendo depois foi feita uma confrontação entre eles e os exemplos utilizados em aula. Nesta confrontação procuraram-se pontos concordantes de conceito e de exigência cognitiva.

No entanto, o que se analisou foram os factores que estiveram por detrás da escolha destas questões de avaliação, qual a origem das questões ou a razão da representação do conceito de função que se escolheu. Como Esmeralda utiliza dois tipos de perguntas nos seus testes, de escolha múltipla e de resposta aberta, foram-lhe colocadas várias questões sobre cada grupo de perguntas, que são as perguntas já apresentadas na secção 3.3 deste capítulo.

Porque a análise dos exemplos que Esmeralda apresentou aos seus alunos nos testes de avaliação foi feita em termos de confrontação com os exemplos utilizados em aula, preferimos apresentá-la no Capítulo VI, Discussão dos Resultados. Essa foi a razão pela qual não fazia sentido apresentar esta análise no mesmo capítulo dos outros exemplos, porque os exemplos apresentados aos alunos durante as aulas foram sujeitos a uma análise através de um sistema de categorias construído para esse efeito, o 1º instrumento de análise.

IV ANÁLISE DA INFORMAÇÃO RECOLHIDA

Tendo sido exposto e justificado no capítulo anterior, a análise dos episódios foi feita em quatro domínios. Primeiro, os exemplos são classificados segundo a sua natureza: exemplos de conceito, de processo ou de teorema. Em segundo lugar, incluem-se os exemplos numa das cinco categorias do primeiro instrumento de análise, dando a indicação do objectivo com que ele é proposto aos alunos. Depois analisam-se os exemplos através do segundo instrumento de análise, onde se apontam os aspectos do conhecimento didáctico do conteúdo da professora evidenciados no tratamento dos exemplos propostos. Finalmente, enquadra-se o tratamento dos exemplos nas situações tipificadas na bibliografia que se reporta à escolha e uso dos exemplos.

Esmeralda: **Episódio 1**
Dia: **12 Janeiro 07**

Início: **LA 3 min e 25 Seg.**
Final: **LA 6 min e 36 Seg.**

Manual: **página 20**

Exemplo Planeado de Conceito tratado pelos Alunos

3. Dadas as funções $f(x) = -2x+1$ e $g(x) = x + \frac{1}{x}$ determine:

3.1 $f(1)+g(1)$

3.2 $f(-1)+g(-1)$

Esmeralda: Simão vá fazer o 3.1
O Simão vai ao quadro e resolve.
E: Ora então o Simão foi à função f e tal como tínhamos visto ontem nas outras alíneas é substituído o x pelo valor que nos pedem ali. Na primeira (parcela) pedem-nos a imagem de 1 pela função f, e então isto vai ficar –2(1)+1; a imagem de 1 pela função g 1+(1:1) ali dá 2 ali dá -1 juntamos … deu isto a toda a gente?

Todos perceberam o que estamos a fazer? Vamos lá a ver o que dá na outra.
Uma segunda aluna vai ao quadro resolver a alínea 3.2
E: Ora a imagem de -1, portanto -2(-1)+1; -1+ ora ali dá -1 (….) portanto 2-1=1, exactamente. Deu isto? Deu e toda a gente percebeu o que tinha que fazer.

Fim da transcrição.

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo:

Este episódio contempla dois exemplos da 2ª Categoria, **Abordagem Inicial Autónoma de *processo***. São *Exemplos Planeados* que a professora indicou para trabalho de casa e, por esse motivo, é um trabalho autónomo do aluno. Além disso, são dois casos muito simples de cálculo de imagens de duas funções simples que surgem imediatamente após a apresentação da faceta simbólica de uma função. As funções em causa são: uma afim e uma racional. As diferentes naturezas das duas funções apresentadas exploram duas *Dimensões De Variação Possível*, mas a *Amplitude de Mudança* das duas dimensões não é grande já que os casos que envolvem um nível de cálculo muito elementar. As alíneas seguintes aumentavam mais a amplitude de cada uma das dimensões, nomeadamente os exemplos 3.5 Calcular $f(x+1)+g(x+1)$ e 3.6 Calcular $f(-2x)+g(-2x)$, mas a professora optou por não abordar estes aspectos.
Assim, o papel da professora limita-se a corrigir no quadro dois exercícios que foram correctamente resolvidos por todos os alunos. Note-se que nenhuma dúvida é apresentada à professora.
Este exemplo pouco exige do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo**. Enquadrando este episódio nas categorias de Chick (2007), podemos distinguir algumas evidências:
Ao nível **Claramente do PCP**,

- a professora usa estratégias e abordagens gerais de ensino do conceito de função (Cat. **Estratégias de Ensino**), neste caso o cálculo da imagem de um objecto dada pela expressão analítica da função: "*…o Simão foi à função f e tal como tínhamos visto ontem nas outras alíneas é substituído o x pelo valor que nos pedem ali*."
- para corrigir estes dois exercícios, ilustrar como se determina a imagem de determinado objecto dada a função na sua faceta analítica, a professora exibe no quadro as concretizações da variável nas expressões analíticas. Desta forma, a característica mais importante do conceito de função, a geração de imagens, é apresentada aos alunos também de forma analítica (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**): "*…pedem-nos a imagem de 1 pela função f, e então isto vai ficar –2(1)+1; a imagem de 1 pela função g 1+(1:1) ali dá 2 ali dá -1…*".

No que concerne ao **Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico**,

- pode-se observar como a professora indica claramente os passos a dar para completar o processo (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*…a imagem de 1 pela função g 1+(1:1) ali dá 2…*"

Relativamente ao **Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo**,

- são usadas práticas gerais de sala de aula. A professora corrige no quadro um trabalho de casa e assegura-se que todos compreenderam e não subsiste qualquer dúvida (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**): "*Deu isto? Deu e toda a gente percebeu o que tinha que fazer.*"

Uso do Exemplo

Apresentando este *exemplo planeado de processo*, a professora pretende assegurar a correcta assimilação desta componente do conceito de função, o cálculo de imagens. O processo de cálculo de imagens não é complicado neste tipo de funções, afim e racional, quando os objectos são números inteiros e, com os exemplos escolhidos, a professora manteve a exploração do exemplo no nível mais simples. A *Amplitude De Mudança Das Dimensões* foi mantida estreita com a não inclusão das alíneas 3.5 e 3.6 em que se utilizam objectos que poderiam causar dificuldades, tais como $x+1$ e $-2x$.
Em conclusão, são dois exemplos simples com objectivos simples. Contudo, a professora não desvaloriza este tipo de exemplo e pela utilização que fez dos exemplos se comprova a importância na construção do conceito de função quando apresentado na *Faceta Simbólica*.

Esmeralda: **Episódio 2**
Dia: **12 Janeiro 07**

Ficheiro: **EA1_Episódio2**
Início: **7 min e 35 Seg.**
Final: **11 min e 06 Seg.**

Manual: página 20

Exemplo Planeado de Conceito tratado pelo aluno:

Indique o domínio e o contradomínio de cada uma das seguintes funções (use a calculadora gráfica se necessário). 4.4 $i(x) = x^2$; $-2 \leq x \leq 2$

Esmeralda: Ora então, a questão 4.4, a nossa função i(x) é igual a x ao quadrado e fornecem-nos esta informação e pedem-nos o contradomínio e o domínio. Aquela informação que temos ali ($-2 \leq x \leq 2$)o que é que nos diz?
(os alunos respondem que é o domínio da função)
Esmeralda: Que o domínio da nossa função (alunos: de -2 a 2) … sim senhora. O domínio da função i é o intervalo fechado de -2 a 2. Como é que chegaram ao contradomínio?
Alunos: Fomos à calculadora.
Esmeralda:Foram à calculadora, e o que é que fizeram?
Aluno:Na tabela substituímos e vimos o valor de -2 e de 2.
Esmeralda:E o que é que concluíram?
Alunos: 4 e 4.
Esmeralda:Pois, é natural. Porque a minha função … (representa o gráfico de $i(x) = x^2$)… se vocês pediram o gráfico saiu-vos uma coisa assim. E nós já vimos ontem que aquilo tem um nome, que se chama …
Alunos: Parábola.
Esmeralda: … Parábola. E nós sabemos que quando temos uma função elevada ao quadrado se tivermos um número positivo, e o mesmo número, mas negativo, o resultado vai ser…
Alunos: Positivo.
Esmeralda: … positivo. Em lugar de, por exemplo, ter ali -1, qual é a imagem de -1?
Alunos: 1
Esmeralda: E se for 1?
Alunos: 1
Esmeralda: Portanto, se vocês foram à calculadora e depois à tabela, e sim senhora, viram a imagem de -2 e a imagem de 2. Não está de todo mal, mas depois tinham de pensar assim: Como o valor está ao quadrado, então a imagem de 2 e a imagem de -2 vai ser a mesma (marca no gráfico as imagens de 2 e de -2). Eu não posso dizer que o meu contradomínio, que eu olho para ali, e não posso dizer que o meu contradomínio é 4. Porque se eu vier aqui ao eixo dos xx há aqui mais valores de x com imagem, sem ser o (marca imagens de vários objectos)…
Aluno: Tem que ser entre zero e 4.

Esmeralda: Ah! Mas não foi isso que eu tinha ouvido. Pois não João? Não foi isso que o João disse. O João disse que o contradomínio era 4. Sim senhora, nós neste exercício não podemos proceder da mesma maneira que procedemos, por exemplo, no exercício 4.1 porque era uma recta e … não, no exercício 4.1 não nos dava problema porque nós verificámos que o domínio e o contradomínio era $\mathbb{R}$. Mas no 4.3 onde havia uma limitação dos nossos valores de x ($-1 \leq x \leq 5$ para $f(x) = 2x+1$) o domínio já me era fornecido, e como era uma recta, eu já não me lembro... Ah! Era. A nossa recta era uma recta assim, (esboça o gráfico de uma recta crescente), uma recta ascendente. Então se eu visse a imagem do menor valor (objecto) e a imagem do maior (objecto), então eu tinha o contradomínio. Mas aqui neste caso não me chega. João, percebeu onde estava o seu erro? Neste caso não chega, porque todos os valores que são simétricos vão ter a mesma imagem. Eu vou ter que ver no meu intervalo -2 a 2 qual das imagens é a menor, e neste caso a menor é o zero. Logo, o contradomínio… (repreende uma aluna porque estava a conversar)… o contradomínio vai de zero a 4, intervalo fechado. Foi isto que deu? E perceberam porquê! Porque é que não podia ser só o quatro!

Fim da transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo:

Este exemplo faz parte de uma sequência de exemplos (livro de texto, p. 20). Todos eles têm em comum o mesmo tipo de tarefa, aprofundar as noções de domínio e contradomínio de funções apresentadas na faceta simbólica. A sequência inclui:

4.1 $f(x)=2x$

4.2 $g(x)=x^2$

4.3 $h(x)=2x+1$ e $-1\le x\le 5$

4.4 $i(x)=x^2$ e $-2\le x\le 2$

4.5 $j(x)=\sqrt{x}$ e $0\le x\le 9$

4.6 $k(x)=x+\pi$ e $0\le x\le 3$

Esta sequência é claramente um exemplo que se inclui na 2ª Categoria, **Abordagem Inicial Autónoma**. É um *exemplo planeado* dos *conceitos* de contradomínio e de domínio. É uma *sequência* que é proposta aos alunos, como trabalho de casa, após a introdução das noções de domínio e contradomínio de funções simples e que serve de trabalho autónomo com os conceitos apresentados. A *sequência* contempla vários tipos de funções – afim, quadrática, irracional – que poderão ser tratadas analiticamente ou com o auxílio da calculadora gráfica alargando, assim, a forma de o aluno abordar os conceitos.

No caso da questão 4.4, por ser uma função par definida num intervalo de centro zero surge um erro de um aluno. Este aluno, por ter aplicado o mesmo método que aplicou na questão 4.3 para encontrar o contradomínio de *h*:

$-1\le x\le 5 \Leftrightarrow h(-1)\le f(x)\le h(5) \Leftrightarrow 2(-1)+1\le h(x)\le 2(5)+1 \Leftrightarrow -1\le h(x)\le 11$

obteve em 4.4

$-2\le x\le 2 \Leftrightarrow i(-2)\le i(x)\le i(2) \Leftrightarrow 4\le i(x)\le 4$,

Ou seja o contradomínio é D’=4.

Neste ponto, a professora necessita corrigir o erro. Utilizando a mesma função que figura na questão 4.4 ($i(x)=x^2$), desta vez na sua faceta gráfica, mostra ao aluno que existem mais objectos no domínio que apenas os extremos -2 e 2. Ao mostrar o gráfico da função com as respectivas imagens de alguns objectos que tinha indicado, a professora destaca as imagens (vinca o segmento de recta fechado do eixo dos *yy*) de todos os objectos incluídos no intervalo $[-2;2]$ deixando claro que o conjunto das imagens são todos os elementos do intervalo [0;4] e não apenas o 4. A professora não fez alusão ao facto de que o método utilizado na questão 4.3 apenas se aplica a troços injectivos. Todavia, esta omissão não prejudicou a explicação pois a utilização dos extremos simétricos do intervalo obteve um resultado equivalente, isto é, mostrou porque razão esse método não é utilizável.

Assim, um exemplo *de um conceito* que seria da 2ª categoria, **Abordagens Iniciais Autónomas**, passa a exemplo *de um conceito* da 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**, usado de forma *espontânea*. Agora este exemplo, questão 4.4, serviu para esclarecer a causa do erro do aluno, que foi uma aplicação abusiva à função quadrática de um método para indicar contradomínios que apenas se aplica ao caso das funções cujo gráfico são rectas.

O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo evidenciado neste episódio pela professora é bastante rico. São utilizadas as **categorias de Chick** (2007).
Ao nível de **Claramente do CPC**,

- podemos notar que foram usadas estratégias e abordagens gerais de ensino de um conceito (Cat. **Estratégias de Ensino**): "*Então se eu visse a imagem do menor valor (objecto) e a imagem do maior (objecto), então eu tinha o contradomínio.*";
- discutiu com o aluno uma dificuldade sua e promoveu a evolução conceptual (Cat. **Pensamento do estudante: Concepções Alternativas**) "*Sim senhora, nós neste exercício não podemos proceder da mesma maneira que procedemos, por exemplo, no exercício 4.1 porque era uma recta e ... onde havia uma limitação dos nossos valores de x, o domínio já me era fornecido ... aqui neste caso não me chega. João, percebeu onde estava o seu erro?*";
- identificou aspectos de uma tarefa que influenciam a sua complexidade (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**) "*Como o valor está ao quadrado, então a imagem de 2 e a imagem de -2 vai ser a mesma (marca no gráfico as imagens de 2 e de -2). Eu não posso dizer que o meu contradomínio, que eu olho para ali, e não posso dizer que o meu contradomínio é 4.*";
- apresenta duas formas de representar o conceito de função: a analítica $i(x) = x^2$, o seu gráfico e também a numérica (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas Dos Conceitos**);
- explica detalhadamente dois conceitos, o de função quadrática (indirectamente a paridade e não injectividade) e de contradomínio (Cat. **Explicações**)" *Porque a minha função ... (representa o gráfico de* $i(x) = x^2$ *)... se vocês pediram o gráfico saiu-vos uma coisa assim. E nós já vimos ontem que aquilo tem um nome, que se chama ...*"; "*Então se eu visse a imagem do menor valor (objecto) e a imagem do maior (objecto), então eu tinha o contradomínio.*";
- usa um exemplo que evidencia um conceito ou um procedimento (Cat. **Conhecimento de Exemplos**) "*Mas no 4.3 onde havia uma limitação dos nossos valores de x* ($-1 \leq x \leq 5$ para $f(x) = 2x + 1$) *o domínio já me era fornecido, e como era uma recta, eu já não me lembro. Ah! Era. A nossa recta era uma recta assim, (esboça o gráfico de uma recta crescente), uma recta ascendente. Então se eu visse a imagem do menor valor (objecto) e a imagem do maior (objecto), então eu tinha o contradomínio.*".

Relativamente ao **Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico**,

- a professora identifica os componentes matemáticos críticos de um conceito que são fundamentais para a compreensão e aplicação desse conceito (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**) "*Não está de todo mal, mas*

depois tinham de pensar assim: Como o valor está ao quadrado, então a imagem de 2 e a imagem de -2 vai ser a mesma (marca no gráfico as imagens de 2 e de -2).";
- faz conexões entre conceitos e conteúdos, incluindo interdependência entre conceitos (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**) "*Pois, é natural. Porque a minha função ...* (representa o gráfico de $i(x) = x^2$)*... se vocês pediram o gráfico saiu-vos uma coisa assim. E nós já vimos ontem que aquilo tem um nome, que se chama ... Parábola.*".

No que concerne ao **Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo**,
- a professora, ao confrontar o aluno com o seu erro, fazê-lo no âmbito de trabalho em grande grupo para que os restantes alunos tomem conhecimento do erro, utilizar as três facetas representativas de uma função e as relações entre elas e ralhar com uma aluna, está a usar estratégias de interacção com os alunos (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**) "*Ah! Mas não foi isso que eu tinha ouvido. Pois não João? Não foi isso que o João disse. O João disse que o contradomínio era 4. Sim senhora, nós neste exercício não podemos proceder da mesma maneira que procedemos, por exemplo, no exercício 4.1 porque era uma recta*";
- usa práticas gerais de sala de aula quando interroga os alunos em geral, e algum em particular, com perguntas de controle que visam a avaliação das aprendizagens. (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**) "Esmeralda: *Em lugar de, por exemplo, ter ali -1, qual é a imagem de -1?* Alunos: 1. Esmeralda: *E se for 1?* Alunos: 1.".

Uso do Exemplo:

Para muitos é discutível o facto de se ter utilizado a própria situação que deu origem ao erro para colmatar as dificuldades do aluno. Contudo, o exemplo, e o uso que dele se fez, foram eficazes na superação da dificuldade do aluno e promoveu uma correcta construção da imagem do conceito de contradomínio. Com a utilização deste exemplo, determinar o contradomínio de uma função quadrática, a professora demonstra um conhecimento do conteúdo nas suas várias vertentes e, também, um conhecimento pedagógico que utiliza as relações entre as várias formas de representar a função para aprofundar um pouco mais a generalização do conceito.
Com a proposta deste *exemplo planeado*, bem como em todos os outros da *sequência de exemplos*, a professora pretende que os alunos empreendam os primeiros trabalhos de apresentação do domínio e contradomínio de funções simples e, deste modo, desenvolver o processo de aprofundamento do conceito de função.
Deve-se evidenciar a *Dimensão de Variação*. Embora o *exemplo planeado* esteja vinculado ao tratamento do domínio e do contradomínio, ele versa o caso da quadrática quando na questão anterior tinha sido o caso da função afim e, posteriormente, uma outra questão focará o caso da função irracional de índice 2.
A utilização deste exemplo contemplou três *facetas* do conceito de função, *a simbólica*, *a geométrica* e *a numérica*. O seu uso foi muito variado e clarificador, contudo a transcrição dos valores tabelados da calculadora gráfica para o quadro, que foi apenas

referida oralmente, teria completado a imagem apresentada com a marcação de pontos do gráfico.
A razão porque extraímos este *exemplo* da *sequência de exemplos* deve-se ao facto de ele ser, no início, um *exemplo planeado* da 2ª categoria e que, devido a um erro de um aluno, se transformou num *exemplo espontâneo* da 3ª categoria. Isto é, a questão 4.4, não serviu apenas para que o aluno determinasse autonomamente o domínio e o contradomínio da função, mas também para esclarecer a causa do erro do aluno na indicação do contradomínio, traduzido numa aplicação abusiva à função quadrática de um método que funcionou na função afim.

Neste episódio há que separar o uso da *sequência de exemplos* e o uso *do exemplo* 4.4:

O uso da *sequência de exemplos* tem como objectivo ampliar o conceito de contradomínio utilizando diversos tipos de situação:
1. Função afim com e sem restrições ao domínio e função quadrática com e sem restrições ao domínio.
2. Utilização de formas adequadas de determinar o contradomínio.
3. Exploração das **Dimensões de Variação Possíveis** na **Amplitude Permitida**.
4. Alargar o **Espaço de Exemplos** do aluno.
5. A inclusão dos quatro aspectos anteriores contribui para um desenvolvimento do conceito e do conteúdo matemático.

O uso solitário *do exemplo* 4.4 serviu para
1. Mostrar que a aplicação de um método adequado a uma situação vai redundar num erro quando aplicado a outra situação aparentemente semelhante
2. Resolver o erro originado pelo facto anterior.
3. Esclarecer, clarificar e alargar as características do conceito.
4. Estruturar a **Imagem do Conceito**.
5. Promover uma aprendizagem efectiva dos alunos.

Esmeralda**: Episódio 3**
Dia: **12 Janeiro 07**

Início: **LA 11 min e 25 Seg.**
Final: **LA 15 min e 36 Seg.**

Manual: **página 20**

Exemplos Planeados de Conceitos tratados pelos alunos

Indique o domínio e o contradomínio da função 4.5 $j(x)=\sqrt{x},\quad 0\le x\le 9$

Esmeralda: A função j é raiz quadrada de x. E temos aqui que o nosso x está compreendido entre zero e nove. Ou seja, maior ou igual que zero e menor ou igual que nove.
Qual é o domínio da nossa função j?
Alunos: De zero a nove.
E: Certo. Qual é o contradomínio da nossa função j?
A: e E: Entre zero e três.
E: Deu isso a toda a gente? Portanto, (escrevendo no quadro) o contradomínio de j é o intervalo fechado de zero a três, o domínio de j é o intervalo fechado de zero a nove. Não é?
Então e se, neste exercício, em vez de estar aí colocado o x, não estivesse e a função fosse assim: $f(x)=\sqrt{x}$. Qual era o domínio? Qual seria o domínio daquela função?
Este (o exercício anterior) estava lá limitado. Certo? Agora não havia limitação nenhuma de x e davam-vos esta função, e diziam-vos: calcula, ou indique, o domínio de x… o domínio de f.
Aluno: Seria de zero a mais infinito.
E: Porquê de zero a mais infinito?
Aluno: ….tem que ser positivo
E: Exactamente. Nós no princípio do ano aprendemos que só existem raízes quadradas… se calhar não aprendeu, tinha os ouvidos fechados quando eu expliquei, pois… nós verificámos no princípio do ano que só existem raízes de índice par de números positivos ou zero. Portanto, aquela raiz é uma raiz de índice…
Aluno: Par (?).
E:…dois. Raiz quadrada. Índice dois, índice par. Portanto o meu radical… seja, o meu radicando, o meu x que é o valor que está lá dentro, tem que ser sempre um número positivo ou zero. Neste caso o domínio pode ser representado por $\mathbb{R}_0^+$ ou então, seria a mesma coisa, $[0,+\infty[$. Certo? Toda a gente entendeu? Isto, as noções agora começam-se agora a misturar.

Exemplo:

Indique o domínio e o contradomínio da função 4.6 $k(x)=x+\pi,\quad 0\le x\le 3$

E: Ora depois, o 4.6: $x+\pi$. Qual é a figura que vocês obtiveram quando pediram o gráfico desta função? $x+\pi$, o que é que viram na calculadora, naqueles gráficos… não viram?
Aluna: Uma recta.
E: Uma recta! $x+\pi$. E diz-nos ainda o exercício que o x vai ser maior ou igual que zero e menor ou igual que três. O que é que vocês responderam em termos de domínio?

Alunos: De zero a três.

E: De zero a três. E em termos de contradomínio?
Alunos: de π a 3+π.
E: Toda a gente viu isso e concluiu? Que o domínio vai ser o intervalo fechado de zero a três, o contradomínio vai ser também o intervalo fechado de π a 3+π. Deu isso a toda a gente?
Miguel: Eu pus-lhe um valor? (refere-se os 3,1415…)
E: Não pode ter colocado um valor, eu explico-lhe porquê Miguel. O π é um número… o que é que nós já cá vimos que ele era?
Aluno: (responde de forma imperceptível)
E: Exactamente, é o número que correspondia a uma dizima infinita não periódica. Portanto, o senhor não tem um número exacto para o π. Convencionou-se que quando estivéssemos a trabalhar com a área ou com o perímetro de uma circunferência que o π iria ficar arredondado para 3,14, mas isso não era o valor exacto. Como eu aqui estou à procura de um intervalo exacto uso mesmo a terminologia que tenho, π e 3+π. Está bem?

Fim da transcrição

Classificação Sequencia e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo:

Este episódio inclui os últimos dois exercícios da sequência descrita no episódio anterior. Por si, constituiriam mais dois exemplos da 2ª Categoria na faceta simbólica, **Abordagem Inicial Autónoma**, *planeados*, dos *conceitos* de domínio e de contradomínio. Contudo, cada um dos dois proporcionou uma inflexão do sentido inicial da planificação. No primeiro, podemos observar que a professora modifica o exemplo no que concerne à variação da variável independente e, no segundo, proporciona uma oportunidade de precisar um aspecto do número Pi.
No primeiro exemplo, que foi planeado, a professora abandona a formulação inicial indicada no manual e passa a explorar uma situação diferente pela alteração de uma das *Dimensões de Variação* de exemplo, o intervalo de variação da variável independente. Diz a professora: "*Então e se, neste exercício, em vez de estar aí colocado o x, não estivesse e a função fosse assim:* $f(x)=\sqrt{x}$ *. Qual era o domínio? Qual seria o domínio daquela função?*"; e precisa que a variação da variável independente já não estaria definida: "*Agora não havia limitação nenhuma de x…*" levando a *Amplitude de Mudança* para toda a variação possível da variável independente. Por isso, de um *exemplo planeado* surge um *exemplo modificado*.
No segundo exemplo, observando a confusão do aluno relativamente à utilização da letra π ou de um número aproximado do número que esta letra representa, a professora aproveita a oportunidade surgida para clarificar a confusão do aluno mas, ao fazê-lo, relembra ao resto da classe o que é o número Pi, uma dízima infinita não periódica e a necessidade da utilização de números exactos na formação de intervalos. Assim, um *exemplo planeado* proporciona uma situação de exploração *espontânea* desse exemplo.

O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo evidenciado pela professora é caracterizado segundo Chick (2007).
Ao nível **Claramente do CPC**:

- usou abordagens específicas de ensinar o conceito de domínio de uma função (Cat. **Estratégias de Ensino**): "*…só existem raízes de índice par de números positivos ou zero.*";

- estabeleceu com os estudantes modos de pensar sobre um conceito (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*…Porquê de zero a mais infinito?*" e "*O π é um número… o que é que nós já cá vimos que ele era?*";
- referiu-se a confusões e concepções alternativas do aluno e actuou no sentido de debelar a confusão e para que o aluno evoluísse na sua concepção (Cat. **Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas**): "*Não pode ter colocado um valor, eu explico-lhe porquê Miguel. O π é um número…*";
- explica o conceito de domínio de uma função, neste caso de uma função irracional (Cat. **Explicações**): " …[se] *a função fosse assim:* $f(x)=\sqrt{x}$ *. Qual era o domínio? Qual seria o domínio daquela função? Este (o exercício anterior) estava lá limitado. Certo? Agora não havia limitação nenhuma de x e davam-vos esta função, e diziam-vos: calcula, ou indique, o domínio…*";

para uma melhor visualização do contradomínio a professora recorre à máquina de calcular gráfica (Cat. **Conhecimento de Recursos**): "*…o que é que viram na calculadora, naqueles gráficos… não viram?*"

Relativamente ao **Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico**:

- relaciona a paridade do índice da função racional com as condições a impor ao radicando para encontrar o domínio da função (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*Índice dois, índice par. Portanto o meu radical… seja, o meu radicando, o meu x que é o valor que está lá dentro, tem que ser sempre um número positivo ou zero.*";
- faz menção a outros conteúdos que estão directamente relacionados com o conteúdo em questão (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**): "*Certo? Toda a gente entendeu? Isto, as noções agora começam-se agora a misturar.*" A professora refere-se a que a função irracional de índice par apenas terá significado com concretizações da variável em $\mathbb{R}_0^+$ que é uma representação equivalente do conjunto $[0;+\infty[$.

No que se refere ao **Conhecimento Pedagógico num Contexto do Conteúdo**:

- deixa bem clara a forma de encontrar o contradomínio de uma função dado o seu domínio e que esse é o objectivo dos dois exemplos deste episódio (Cat. **Objectivos da Aprendizagem**): "*Deu isso a toda a gente? Portanto, o contradomínio de j é o intervalo fechado de zero a três, o domínio de j é o intervalo fechado de zero a nove. Não é?* "; "*Toda a gente viu isso e concluiu? Que o domínio vai ser o intervalo fechado de zero a três, o contradomínio vai ser também o intervalo fechado de π a 3+π. Deu isso a toda a gente?*"
- estabelece um diálogo com o aluno com o intuito de o colocar no núcleo do contexto. A forma de o fazer consiste em interromper a frase no momento em que surgiria a informação requerida, obrigando o aluno a reflectir para poder responder (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**):
  "*Portanto, aquela raiz é uma raiz de índice…*
  Aluno: Par (?).
  E:…dois. Raiz quadrada."
- Organiza toda a informação e sintetiza-a de forma a deixar claro o que se pretende (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**): "*Exactamente, é o número que*

correspondia a uma dizima infinita não periódica. Portanto, o senhor não tem um número exacto para o π. Convencionou-se que quando estivéssemos a trabalhar com a área ou com o perímetro de uma circunferência que o π iria ficar arredondado para 3,14, mas isso não era o valor exacto. Como eu aqui estou à procura de um intervalo exacto uso mesmo a terminologia que tenho, π e 3+π. Está bem?".

Uso do Exemplo:
Este episódio deixa bem patente a capacidade que a professora possui para, a partir de dois exemplos simples que suscitaram alguma dúvida, enfrentar situações inesperadas. Não fugindo ao fio da lição, a professora inflecte a direcção da exposição, esclarece conteúdos paralelos e retoma o assunto principal.
No primeiro caso, quando estende o conceito de domínio de uma função a toda a variação possível da variável independente, a professora adapta o exemplo que estava a ser tratado para resolver uma limitação que o exemplo inicial tinha. Repare-se que este exemplo era o quinto da sequência que tinha sido proposta para trabalho de casa, o aspecto da variação da variável independente já estava, na perspectiva da docente, esgotada e, por isso, decidiu introduzir um elemento novo.
No segundo caso, o surgimento do número Pi, do conceito de dízima infinita não periódica e da noção do símbolo π como valor exacto são aspectos inesperados na explicação da professora. Porém, estes aspectos não são ignorados. Pelo contrário, perante a situação não planeada a professora de forma espontânea trata os assuntos e mostra um bom conhecimento dos conteúdos e da forma como devem ser articulados na construção correcta de um conjunto sob a forma de intervalo.
O interessante deste episódio radica, como já referimos, na alteração dos exemplos que lhes altera a categoria onde se situavam num primeiro momento.

Neste episódio podemos demarcar o uso da *sequência de exemplos* e o uso *dos exemplos* 4.5 e 4.6:

O uso da *sequência de exemplos* tem como objectivo ampliar o conceito de contradomínio utilizando diversos tipos de situação:
1. Função irracional com e sem restrições ao domínio e função afim com ordenada na origem irracional.
2. Utilização de formas adequadas de determinar o contradomínio.
3. Exploração da **Amplitude Permitida** numa das **Dimensões Possíveis** do exemplo.
4. Alargar o **Espaço de Exemplos** do aluno.
5. A inclusão dos quatro aspectos anteriores contribui para um desenvolvimento do conceito e do conteúdo matemático.

O uso solitário *do exemplo* 4.5 (modificado) serviu para
1. Ampliar o conceito de domínio de uma função.
2. Relacionar o índice da função irracional com o tipo de condição a impor na determinação do domínio.
3. Estruturar a **Imagem do Conceito**.
4. Promover uma aprendizagem efectiva dos alunos.

O uso solitário *do exemplo* 4.6 (utilização espontânea) serviu para
1. Mostrar que a utilização de um valor aproximado determina um intervalo mal construído.
2. Resolver o erro originado pelo facto anterior.
3. Esclarecer, clarificar as características do número Pi e articulá-lo com a construção de intervalos.
4. Promover uma aprendizagem efectiva dos alunos

Esmeralda: **Episódio 4**
Dia: **12 Janeiro 07**

Início: **LA 15 min e 37 Seg.**
Final: **LB 15min e 13 Seg.**

Manual: página 20

Sequência Planeada de Exemplos tratada pelos alunos:

Determine o domínio da função definida por 5.1 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

E: Ora então vamos passar para o exercício 5. Determine o domínio das funções definidas por … Eu gostava que vocês me dissessem, se ainda se lembram, o que é que nós ontem vimos aqui que nunca podia acontecer numa fracção? Surgiu aqui há um tempo, já não me lembro, num exercício qualquer que nós resolvemos…
Aluna: (…)
E: Desculpe, não percebi.
Aluna: (…)
E: Não. Nós ontem verificámos que havia um valor, que em denominador, nunca podia acontecer.
Aluno: … números negativos.
E: Vimos que eram os números negativos?
Aluna: Exactamente, vimos que não podiam ficar negativos.
E: Não, não, não, não. Eu o que disse é que nunca se deve deixar uma expressão com o denominador negativo. Isso é outra coisa, isto não é um número negativo. Isto é um denominador em que eu vou ter isto, ter esta expressãozinha (escreve $\dfrac{1}{-2x}$) é o mesmo que ter (escreve) $-\dfrac{1}{2x}$. Isso é outra coisa. Mas já ouvi aí para trás.
Aluna: O zero.
E: O zero. E porquê?
Aluna: Porque um número a dividir por zero é zero.
E: Não, não. Zero a dividir por qualquer coisa, ainda é zero. Se eu tiver zero sobre dois, dá zero. Zero sobre três dá zero. Zero sobre a raiz quadrada de dois dá zero. Mas se eu tiver ao contrário, se eu tiver dois sobre zero? Isto, eu não posso fazer. E até se vocês forem à calculadora ela diz-vos assim: Erro de "domain", ou seja, erro de domínio. Há qualquer coisa ali que está errada no domínio que vocês definiram. Pois então vamos aprender a determinar domínios de funções com denominadores. São chamadas as funções racionais. Ora, $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$. Ora, portanto, vocês disseram que em denominador nunca podia estar o zero. Mas em numerador eu posso ter um número qualquer, não posso? E já vimos que se eu tiver zero a dividir por qualquer coisa dá sempre zero. E se eu tiver um número a dividir por qualquer coisa vai-me dar um resultado qualquer. Então a condição que eu tenho que começar por impor, se o denominador não pode ser zero, é que o meu denominador tem que ser o quê? Diferente de zero. Ora então começamos por indicar da seguinte maneira: $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x-2\neq 0\}$. Agora em cálculos auxiliares, eu vou resolver a equação $x-2=0$, vou procurar os zeros desta expressão. E concluo que esta expressão se anula quando x for 2. Então digam-me lá vocês qual irá ser o domínio da função *f*?

Simão: Deve ser $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

E: O Simão disse $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Concordam com ele. Sim ou não?

Alunos: Sim.
E: Portanto, começámos por ver que no dominador, o único valor, o único resultado que ele não poderia obter à medida que fosse substituindo o x pelos valores reais, era o zero. Quando acabei de resolver esta condição, conclui que $x-2$ só é zero quando o x for…
Alunos: 2
E: …2. Portanto, posso ou não concluir o que o Simão diz? Que o domínio é formado por todos os números reais à excepção do valor zero (distraiu-se, seria o 2). Podemos concluir isso, toda a gente entendeu. Então posso dizer que (e escreve) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Porquê o dois? Volto a repetir, porque o 2 anula o denominador. E o meu denominador nunca pode ser igual a zero.
(pausa)
E: Alguma dúvida Inês?
(nenhum aluno se manifesta)
E: Então façam vocês, depois de passarem este, o 5.2 se fazem favor.

Determine o domínio da função definida por
5.2 $f(x)=\dfrac{1}{2x-4}$

(50 segundos depois)
E: Já começaram a fazer o 5.2? (responde a uma dúvida de um aluno sobre a sigla CA) Cálculos auxiliares. Aquela abreviatura significa cálculos auxiliares. É quando eu tenho que fazer alguns cálculos à parte. Está bem?
Tira dúvidas individualmente, corrige e dá indicações sobre a apresentação dos cálculos.
E: Inês, já fez o 5.3?
Inês: O 5.3, já.
E: Vá lá fazer ao quadro.
A aluna vai ao quadro enquanto a professora esclarece as últimas dúvidas do exercício 5.2.
E: Eu detectei um erro aqui no exercício da vossa colega. E vamos lá a ver se mais gente o cometeu ou não. A Carina, quando foi calcular o domínio, escreveu o seguinte: $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x+1\neq 0 \wedge x^2-1\neq 0\}$ (referindo-se ao exercício 5.3).

Determine o domínio da função definida por
5.3 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

Concordam com o raciocínio dela? Ela diz, ela diz aqui, esta informação que é transmitida por ela, diz o seguinte: nem o numerador nem o denominador podem ser zero. È verdade?
Alunos: Não.
E: Não, pois não? Nós tínhamos verificado, foi por aí que nós começámos, que só o denominador é que nunca se podia anular, no numerador podia vir qualquer valor, podia assumir qualquer valor. Verdade? Então minha querida, isto não está correcto (dirigindo-se à Carina). Então faça a senhora (dirige-se outra vez à Inês que está no quadro) como estava a fazer, temos que indicar primeiro domínio de f…
(a aluna mostra como fez no caderno diário)
E: Ah, mas é que não é assim que se indica. Sabia? Pois é, $x=-1$ ou $x=1$. E aqui primeiro tem que dizer que $x=\pm\sqrt{1}$, que é equivalente, como a raiz quadrada de um é um, $x=-1$ ou $x=1$.
(continua a esclarecer dúvidas individualmente)
E: Toda a gente entendeu? Podem passar à resolução do 5.4.

Determine o domínio da função definida por
5.4 $f(x)=\dfrac{2}{x^2+4}$

(os alunos resolvem com a assistência individual da professora)
E: Rita já fez o 5.4?
Rita: Já, mas não sei se está bem.
E: Venha lá fazer [ao quadro].
A Rita vai ao quadro.
E: Olhem! Esta parte da matéria é muito importante e nós no próximo ano lectivo, no 11º ano, no volume das Funções (2º volume do manual) vamos voltar a precisar novamente dos domínios, por causa das Funções Racionais e depois para resolvermos as equações e as inequações irracionais também. Portanto, é bom que isto fique percebido.
(a professora supervisiona a Rita que está no quadro a responder ao exercício 5.4)
Rita: Ponho impossível?
E: Falta aí qualquer coisinha. Uma raiz quadrada…
Rita: … o $\pm$.
E: Exactamente. Agora aí à frente escreve aquilo que temos que escrever. O que é que é?
Rita: Impossível.
E: Exactamente. (para o resto da turma) Porque é que é impossível?
Alunos: Porque não há raízes quadradas de números negativos.
E: Porque não existem raízes quadradas de números negativos. Então, o domínio vai ser?
Rita: R.
E: Exactamente, o conjunto dos números reais. O Domínio é $\mathbb{R}$. O que é que isto significa? Que não há nenhum número real que vá anular o denominador da minha função, que faça com que o denominador da minha função seja zero. Nenhum.
(a professora continua a fazer correcções, a esclarecer dúvidas que vão surgindo aos alunos e a verificar se os trabalhos decorrem de forma correcta)
(finalmente a professora corrige o exercício)

Determine o domínio da função definida por 5.5 $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + x}$

E: Até determinada altura toda a gente foi. E depois ficou aí assim um bocadinho engasgados. Ora vejamos: a nossa função é $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + x}$. Portanto, o domínio, e isto eu vi que toda a gente percebeu e soube fazer, $D = \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 + x \neq 0\right\}$. Depois vi que conseguiram também, em cálculos auxiliares, colocar $x^3 + x = 0$ e a partir daqui a maioria ficou-se. Ora aquilo é uma equação de grau três…
Aluna: Temos que pôr o x em evidência.
E: …é sim senhor, por aí. Então olhem, o que é que ela fez? A Ana, a Ana fez assim, e houve alguns que fizeram, a Rita também, a Marta deu-lhe assim um empurrãozito e também começou a fazer… O factor x repete-se, então eu vou colocar o factor x de menor expoente em evidência. Então vai ficar equivalente a $x(x^2 + 1) = 0$ e agora tenho um produto igual a zero. Vou aplicar o quê para resolver? Qual é a lei que eu vou aplicar ali?
Alunos e E: A lei do anulamento do produto.
E: Ou seja isto é equivalente a $x = 0 \vee x^2 + 1 = 0$ e isto é equivalente a $x = 0 \vee x^2 = -1$. Há algum valor que elevado ao quadrado dê um resultado negativo?
Alunos: Não.
E: Não, então isto significa que esta condição é impossível. Então, qual vai ser o domínio da minha função?
Aluna: O conjunto dos números reais excepto o zero.
E: R excepto o zero, sim senhor. Nem mais. Toda a gente entendeu? Portanto, se isto desse uma equação de segundo grau, pronto, tudo bem, vocês podiam ir à formula resolvente. Agora, é uma equação de grau três, há factores comuns, colocamos os factores comuns em evidência.
(os alunos continuam a fazer os restantes exercícios)
E: Já está? A outra [questão, 5.6]?

Determine o domínio da função definida por 5.6 $f(x) = \sqrt{x+1}$

E: Hum, ainda não tinha olhado para ela. (…) Então contem-me lá, como é que isto ficará?
Aluna: É como se $x+1$ estivesse sobre um.
E: Pois. E o que é que isso adianta para o meu domínio?
Alunos: …
E: Então eu preciso que vocês me ajudem. (pausa) Nós hoje já verificámos aqui o que é que nunca pode acontecer no radicando de uma raiz de índice par.
Alunos: Não pode ser negativo.
E: Não pode ser negativo. Então, …
Aluno: … tem que ser só positivo…
E: … então como é que eu indico essa condição? Eu tenho que escrever, domínio de f igual ao conjunto formado pelos xx pertencentes a R tais que x+1… qualquer coisa…
Alunos: Maior ou igual a zero.
E: Maior ou igual que zero. Portanto, o meu radicando nunca pode ser um número negativo. Pode ser qualquer número positivo ou zero. Então, agora, aquela condição deixa de ser uma equação e passou a ser uma…
Alunos: Inequação.
E: … inequação. Então lá vamos, cálculos auxiliares, $x+1\geq 0$ isto é equivalente a $x\geq -1$. Então como é que eu represento este domínio?
Alunos: De -1 a mais infinito.
E: E como é que fica o intervalo?
Alunos: -1 fechado, …
E: -1, aberto ou fechado?
Alunos: Fechado.
E: Fechado, por causa do sinal de igual. (escreve [-1, +∞[) Percebido? Portanto, seja o radicando aquilo que for, se o índice da raiz for par, o meu radicando tem sempre esta condição. Tem que ser maior ou igual que zero. E que se estiver em denominador há mais qualquer coisinha que eu tenho que escrever, se calhar alguma alteração que eu terei que fazer. Vão pensando. Depois está aí um exercício que é o 5.9 onde temos uma raiz em denominador. E se ela está em denominador, se calhar, além da condição de raiz de índice par ainda terá que ter mais qualquer coisa. Digo eu, não sei.
(pausa longa para que os alunos continuem a fazer os exercícios propostos. A professora assiste os alunos)
(uma aluna vai ao quadro resolver)

Determine o domínio da função definida por 5.7 $f(x)=\sqrt[4]{x+3}$

Escreve $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x+3\geq 0\}=[-3,\infty[$
E: Falta aí um *mais*.
(a aluna acrescenta o sinal e fica $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x+3\geq 0\}=[-3,+\infty[$)
E: Deu isto a toda a gente?
Alunos: Deu.
E: No exercício 5.8 nós temos $f(x)=\sqrt[3]{x+3}$.

Determine o domínio da função definida por 5.8 $f(x)=\sqrt[3]{x+3}$

Quando nós no princípio falámos em raízes, verificámos que raízes de índice par só existiam para números…
Alunos: Positivos.
E: …positivos ou…
Alunos: Zero.
E: E as raízes de índice impar?
Alunos: Todos os valores

E: Existiam para todos. Portanto, até verificámos que a raiz cúbica de -1 era…
Alunos: -1
E: Raiz cúbica de -8 era…
Alunos: -2
E: E assim sucessivamente. Portanto, o que é que isso significa? Qualquer que seja o resultado que eu obtenha aqui (indica o radicando) depois de substituir o x por o conjunto dos números reais, qualquer que seja o resultado que eu vá obter no radicando ele vai ter sempre raiz cúbica. Então, isto significa que o meu domínio vai ser o quê?
Alunos: R
E: O conjunto dos números reais. Então directamente eu digo que o domínio de f vai ser $\mathbb{R}$ (e escreve $D_f = \mathbb{R}$). Eu aqui não tenho nenhuma condição a impor, então escrevo directamente qual é o domínio. (…) E agora vamos pensar na 5.9.
(ainda do exercício 5.8 surge uma dúvida)
Aluna: Professora.
E: Diga-me.
Aluna: Podia explicar outra vez essa?
E: Esta? (aponta para a $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$)
Aluna: Sim.
E: Pensa lá num número qualquer.
Aluna: 2
E: Então, se eu chegar aqui e substituir o x por dois dá-me raiz cúbica de 5, se for à calculadora dá-lhe um determinado resultado. Pense noutro número.
A: … (imperceptível)…
E: Outra vez o dois!!??
A: Não, o seis!
E: E porque é que só está a pensar em números positivos e não pensa em números negativos?
Aluna: -6
E: Pronto. Raiz cúbica de -6+3… -6+3 dá -3. Vá lá à calculadora e veja o que é que ela lhe responde.
Aluna: Não sei fazer isto na calculadora!
(a professora sorri e dirige-se à mesa da aluna. Dá todas as indicações necessárias à aluna até esta executar a $\sqrt[3]{-3}$ na máquina)
E: Portanto, o que é que eu lhe estou a tentar transmitir? Qualquer que seja o número que a Helena pense, independentemente do resultado que eu obtenha aqui dentro (aponta para o radicando) existe sempre solução. Então se existe sempre solução, qual será o domínio da minha função? Eu posso ir buscar, para substituir no lugar de x, qualquer número real.
Aluna: Obrigado.
A professora assiste os alunos na resolução do exercício 5.9

Determine o domínio da função definida por 5.9 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

E: Então vamos pensar no outro domínio. (…) Vamos pensar na 5.9, como é que fica? Ou já pensaram? Então a 5.9 $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$. Como é que irá ficar este domínio? Será $\mathbb{R}$? Será o conjunto dos números reais?
Alunos: Não.
E: Então, temos que impor alguma condição. É isso? Podemos escrever $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \ldots$
E o que é que eu tenho que escrever como condição?
Alunos: Tal que x+2 é maior que zero.
E: $\ldots : x+2 > 0\}$.
Alunos: …maior ou igual que zero.
Outros alunos: …maior que zero.

E: Estou a ouvir duas versões, vamos analisar uma e outra. O Simão diz com muita convicção e ouvi também a Rita ali a reforçar: maior. E ouvi, não sei, acho que a Bruna e mais alguém… não? Mas alguém disse: maior ou igual. E eles voltaram a dizer: maior. Porquê? Porquê "maior" e não "maior ou igual"?
Rita: Não pode ser zero no denominador.
E: Exactamente. O "igual" não pode aparecer, já tínhamos visto, porque o denominador nunca pode ser zero. Então agora aqui como o meu denominador é uma raiz de índice par, eu tenho que impor duas condições. Uma, pelo facto de ser uma raiz de índice par; outra, pelo facto de estar em denominador. Então, pelo facto de ser uma raiz de índice par o radicando tem que ser maior que zero, maior ou igual; estando em denominador o igual não pode aparecer. Pronto, e agora resolvemos a nossa inequação.
Uma aluna, a Filipa, expõe uma dúvida quanto ao sinal de igual não poder aparecer
E: Não pode ser o *igual*, tem que ser só o *maior*, porque se aqui (no radicando) substituirmos o x por -2 fica assim: -2+2?
Filipa: (Silêncio)
E: Sem calculadora, na minha terra -2+2 dá zero. Raiz quadrada de zero dá zero. E quanto é que dá um sobre zero? É impossível.
Filipa: Não dá um?
E: É impossível, não me diga que dá um. Faça lá na calculadora. Ela é muito esperta…
Filipa: (imperceptível)
E: … Não é nada! É impossível! Nada é zero…
Filipa: Dá erro. (a máquina)
E: Há bom! Então se dá impossível, significa que o meu denominador não se pode anular. Então não posso ter ali, no lugar do x, o -2. Logo o sinal de igual nunca pode aparecer ali para ser zero, o denominador tem que ser sempre maior, maior por ser par, a raiz. Está bem? E então como fica o domínio?
Aluna: De -2 a mais infinito.
A professora escreve $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 > 0\} =]-2; +\infty[$.
E: Recapitulando, quando temos uma raiz de índice par no denominador além da condição da raiz de índice par que é de *o radicando tem que ser sempre maior ou igual que zero* tem uma segunda condição, *e o radicando tem que ser diferente de zero* porque está em denominador. Entendido?
Alunos: Sim.

<u>Fim da transcrição</u>

Classificação da Sequência e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo:

Esta Sequencia de Exemplos enquadra-se na 2ª Categoria, **Abordagem Inicial Autónoma**. O conteúdo tratado continua a ser o domínio de uma função e é uma continuação coerente com a sequência anterior. Assim, a sequencia inclui *exemplos planeados* do conceito de função na faceta simbólica que são um pouco mais complicados que os da sequência anterior, ainda assim incluídos na 2ª categoria. Todos os exemplos foram tratados pelos alunos na aula, ao contrário da sequência anterior que foi proposta para trabalho de casa. Por ser um conjunto de exemplos mais exigente promoveu, como se verá, dificuldades aos alunos que, depois de ultrapassadas, ajudaram na construção do conceito e na generalização.
A sequência explora três *Dimensões de Variação Possíveis*, a função racional, a função irracional e uma função que é um misto das duas anteriores e, além das três dimensões, ainda explora as *Amplitudes de Mudança Permitidas* em cada uma das dimensões. Por exemplo, na dimensão que trata as funções irracionais, a amplitude de mudança trata tanto o índice par como o impar. Por outro lado, na dimensão relativa às funções racionais, a amplitude de mudança trata equações de vários graus, com classificações de possíveis e impossíveis, e com ou sem utilização da lei do anulamento do produto.

Embora esta sequência contenha *exemplos planeados do conceito* de domínio podemos observar algumas características de *exemplos planeados de processo*. Isto é, o objectivo principal do uso desta sequência é o de generalização da noção de domínio de uma função, contudo também servem como exemplos do processo de determinação dos domínios. Aliás, pode-se observar que as dimensões de variação assentam nos tipos de função, racional ou irracional, mas as amplitudes de mudança assentam nos processos, equações de graus diferentes e de diferentes formas de resolução.
Existe um aspecto importante no que respeita ao tratamento do primeiro exemplo da sequência e todos os restantes. Embora a sequência tenha sido classificada como tratada pelos alunos, podemos observar que isso não aconteceu na primeira questão, a 5.1, esta foi integralmente tratada pela professora embora com a colaboração dos alunos. Por isso, classificamos esta questão como *Exemplo Resolvido*, um exemplo que servirá de orientação ao tratamento de todas as situações que se seguirão.
O papel da professora no tratamento da sequência por parte dos alunos é bastante activo em todo o processo. Os alunos são acompanhados em todo o momento e não apenas no fim, todas as dúvidas e dificuldades são objecto de atenção no momento em que surgem.

O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo da professora no tratamento desta sequência tem a seguinte descrição (Chick 2007).
Ao nível de **Claramente do CPC**:

- a professora usa uma linguagem própria para ensinar a determinar o domínio de uma função racional à custa da impossibilidade da divisão por zero (Cat. **Estratégias de Ensino**): "*Então posso dizer que* (e escreve) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. *Porquê o dois? Volto a repetir, porque o 2 anula o denominador. E o meu denominador nunca pode ser igual a zero.*"
- pode-se ver a ênfase dada à relação entre as raízes do denominador de uma função racional e as restrições do domínio, entre o índice da função racional e o sinal do radicando. O diálogo estabelecido a este respeito mostra o empenho em obter a compreensão do aluno (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*Então a condição que eu tenho que começar por impor, se o denominador não pode ser zero, é que o meu denominador tem que ser o quê? Diferente de zero. Ora então começamos por indicar da seguinte maneira:* $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0\}$."; "*Portanto, o meu radicando nunca pode ser um número negativo. Pode ser qualquer número positivo ou zero.*"
- a respeito da obtenção do domínio de uma função racional, enquanto questiona os alunos, uma aluna evidencia uma concepção alternativa (Cat. **Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas**): Aluna: "*Porque um número a dividir por zero é zero.*" pelo que a professora corrige: "*Zero a dividir por qualquer coisa, ainda é zero. Se eu tiver zero sobre dois, dá zero. Zero sobre três dá zero. Zero sobre a raiz quadrada de dois dá zero. Mas se eu tiver ao contrário, se eu tiver dois sobre zero? Isto, eu não posso fazer.*"
- No exemplo 5.5, ao surgir um denominador polinomial de 3º grau, surgem dificuldades na resolução da equação de 3º grau. A professora apercebe-se e dá indicações aos alunos para que eles possam contornar a dificuldade (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*Depois vi que conseguiram também,*

em cálculos auxiliares, colocar $x^3 + x = 0$ *e a partir daqui a maioria ficou-se. Ora aquilo é uma equação de grau três… A Ana, a Ana fez assim, e houve alguns que fizeram, a Rita também, a Marta deu-lhe assim um empurrãozito e também começou a fazer… O factor x repete-se, então eu vou colocar o factor x de menor expoente em evidência. Então vai ficar equivalente a* $x(x^2 + 1) = 0$ *e agora tenho um produto igual a zero. Vou aplicar o quê para resolver? Qual é a lei que eu vou aplicar ali?*"

- durante quase todo o tratamento da sequencia a docente explica procedimentos e características das funções de forma a poderem ser determinados os domínios (Cat. **Explicações**): "*Exactamente. O "igual" não pode aparecer, já tínhamos visto, porque o denominador nunca pode ser zero. Então agora aqui como o meu denominador é uma raiz de índice par, eu tenho que impor duas condições. Uma, pelo facto de ser uma raiz de índice par; outra, pelo facto de estar em denominador.*"
- Utiliza a calculadora gráfica como recurso educativo (Cat. **Conhecimento de Recursos**): "*Vá lá à calculadora e veja o que é que ela lhe responde.*"

Em termos de **Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico**:

- quando os alunos sentem alguma dificuldade para encontrar o domínio do último exemplo, 5.9, por via da raiz de índice par que figura no denominador, a professora chama a atenção para os dois principais aspectos da função no que respeita ao domínio (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*Então, pelo facto de ser uma raiz de índice par o radicando tem que ser maior que zero, maior ou igual; estando em denominador o igual não pode aparecer.*"

No tratamento dos últimos exemplos da sequência a professora explica a forma como é necessário utilizar simultaneamente diversos conteúdos, radicais de índice par ou impar, equações de 1º grau ou superior, lei do anulamento do produto e inequações do 1º grau (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**): "*Vou aplicar o quê para resolver? Qual é a lei que eu vou aplicar ali?*"; "*Pronto, e agora resolvemos a nossa inequação.*"; "*Raiz cúbica de -8 era…*"

Enquadrado no **Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo**:

- interage com os alunos com o objectivo de lhes dar pistas e indicações do percurso a seguir ou da informação que necessitam em dado momento (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**):

  "**E:** *Quando nós no princípio falámos em raízes, verificámos que raízes de índice par só existiam para números…*
  Alunos: *Positivos.*
  E: *...positivos ou…*
  Alunos: *Zero.*
  E: E *as raízes de índice impar?*
  Alunos: *Todos os valores*
  E: Existiam *para todos. Portanto, até verificámos que a raiz cúbica de -1 era…*
  Alunos: *-1*
  E: *Raiz cúbica de -8 era…*
  Alunos: *-2*"
- a professora introduz a actividade relembrando conteúdos anteriores que têm importância para o inicio dos trabalhos e fecha a tarefa com a síntese da informação mais importante (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**): "*Eu gostava que*

vocês me dissessem, se ainda se lembram, o que é que nós ontem vimos aqui que nunca podia acontecer numa fracção? Surgiu aqui à um tempo, já não me lembro, num exercício qualquer que nós resolvemos…"; "*Recapitulando, quando temos uma raiz de índice par no denominador além da condição da raiz de índice par que é de* o radicando tem que ser sempre maior ou igual que zero *tem uma segunda condição, e* o radicando tem que ser diferente de zero *porque está em denominador. Entendido*?

Uso da Sequência de Exemplos:

O objectivo da sequência é alargar o *Espaço De Exemplos* dos alunos no que respeita à noção de domínio integrada no conceito de função e a generalização.
Com este objectivo, foi utilizada esta série de exemplos cuja característica de maior interesse é a forma como as três *Dimensões De Variação Possíveis* são trabalhadas.
Se olharmos a série de exemplos sem a distracção do diálogo as *Dimensões De Variação Possíveis* e respectivas *Amplitudes De Mudança Permitidas* são mais evidentes:

Determine o domínio da função definida por

5.1 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

5.2 $f(x)=\dfrac{1}{2x-4}$

5.3 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

5.4 $f(x)=\dfrac{2}{x^2+4}$

5.5 $f(x)=\dfrac{1}{x^3+x}$

5.6 $f(x)=\sqrt{x+1}$

5.7 $f(x)=\sqrt[4]{x+3}$

5.8 $f(x)=\sqrt[3]{x+3}$

5.9 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

Como já dissemos, o exemplo5.1 foi utilizado como padrão a ser seguido e, por isso, os exemplos 5.2, 5.3 e 5.4 foram resolvidos sem problemas de maior, com destaque para a introdução da variável no numerador do caso 5.3. Mas nestes primeiros quatro exemplos pode ser observada como a *dimensão de variação possível* se mantém, função racional, mas em que a *amplitude de mudança permitida* parte de duas polinomiais de 1º grau em denominador até duas polinomiais de 2º grau e em que uma delas não tem raízes. O exemplo 5.5 também mantém a *dimensão de variação* mas, no que respeita à

amplitude de mudança permitida, temos agora um denominador polinomial de 3º grau que traz algumas dificuldades aos alunos. Repare-se que as dificuldades não são introduzidas pela mudança introduzida, os alunos escreveram que $x^3 + x$ teria que ser diferente de zero sem qualquer dificuldade, a dificuldade radicou na resolução da equação de 3º grau.
A segunda *dimensão de variação possível* é introduzida com três casos de funções irracionais: 5.6, 5.7 e 5.8. Nesta *dimensão*, a *amplitude de mudança permitida* foi sendo alterada com a introdução de diferentes índices, primeiro uma raiz quadrada, depois uma de índice quatro e, finalmente uma de índice 3. Ao passar de um índice 2 para o índice 4 para depois recuar para o índice 3 a professora manteve os dois primeiros exemplos com o índice par, mantendo também o tipo de condição a impor e, no terceiro caso, alterou a paridade e em consequência disso o tipo de condição imposta.
A terceira *dimensão de variação possível* é obtida juntando os dois casos anteriores. O exemplo 5.9 é uma função que tendo a forma de uma fracção possui uma raiz de índice par em denominador, o que obriga a juntar duas condições. Nesta dimensão a amplitude de mudança permitida não foi trabalhada visto se ter utilizado um único caso.
Podemos considerar esta sequência de exemplos bastante bem trabalhada pela docente tanto no que respeita ao conteúdo principal da lição, o domínio de uma função, como no que concerne à articulação com os conteúdos anteriormente leccionados mantendo os alunos sempre dentro do contexto das suas *Experiências Prévias*.
Por fim, é de salientar a riqueza, variedade e complexidade do conjunto de exemplos escolhido cuja utilidade à construção da ideia matemática de função se manifesta na capacidade de generalização que proporciona ao aluno contribuindo, também, para a *Ampliação Do Espaço De Exemplos* e estruturando a sua *Imagem Do Conceito*.

Esmeralda: **Episódio 5**
Dia: **12 Janeiro 07**

Início: **LB 15min e 13 Seg.**
Final: **LB 28 min e 0 Seg.**

Manual: página 20

Sequência Planeada de Exemplos tratada pelos alunos:

6. Escreva uma expressão analítica para uma função cujo domínio seja 6.a) $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

E: Ora pensem lá, e respondam-me à questão 6.a). Escreva uma expressão analítica…
Filipa: Espere só um bocadinho por favor
E: Filipa, eu só estou a ler o que está no seu livro. Escreva uma expressão analítica para uma função cujo domínio seja $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. Portanto, o exercício está agora colocado ao contrário. Na questão 5. davam uma expressão analítica e pediam o domínio, agora dão o domínio e pedem uma expressão analítica que corresponda a este domínio.
Simão: (imperceptível)
E: Como?
Inês: (imperceptível)
E: Como? Vamos lá a ver as hipóteses que nos estão aqui a dar. [Espere] só um bocadinho. Posso apagar, não posso?
Alunos: Pode.
E: O que é que disse o Simão? (escreve no quadro) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$. O que é que tinha dito Inês?
(a Inês retira o que tinha dito anteriormente porque envolvia raízes)
Inês: Era com raízes quadradas, mas não dá.
E: Pronto. Então vamos verificar se o que o Simão disse corresponde à questão que nos é colocada. Será o domínio desta função $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$? Vamos ver. (escreve no quadro) $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x+3\neq 0\}$, em cálculos auxiliares, x+3=0, x=-3. Portanto, $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$, por hipótese. Mas haveria mais? Ou não.
Filipa: Ou tenho outra aqui.
E: Qual é a sua? Que dá?
(a Filipa indica a sua função e explica porque tem domínio $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$)
E: (escreve no quadro o que a Filipa indicou) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+3}}$. Claro que é exactamente igual, a raiz cúbica não impõe condição nenhuma, o x+3 continua a ter que ser diferente de zero. Também serve. Pronto. Outra hipótese? Alguém se lembra de mais alguma que queira dizer?
Aluno: $\dfrac{2}{x+3}$
E: $\dfrac{2}{x+3}$, também. 7, 6, 10, -20, -30. Claro! E não necessariamente tem que ser x+3, por exemplo, se eu tiver, ora… (escreve no quadro) $h(x)=\dfrac{-10}{-2x-6}$, será que esta serve?
Alunos: Sim.

E: Serve. Não serve? Porque ficava -2x-6=0, -2x=6, x=6/-2, x=-3. Certo? Então, também dá! Estão a ver? Não necessariamente tem que aparecer logo o x+3, posso arranjar outras expressões. Entendido? Pronto. Então, qualquer uma destas três enquadrava-se para solução…
(uma aluna apresenta uma dúvida relativa ao exemplo da Filipa)
E: O que é que a menina quer saber?
Aluna: Porque é que tem o mesmo domínio aquela da $\sqrt[3]{x+3}$?
E: Então responda-me, diga-me, como é que calcula este domínio.
Aluna: (imperceptível, mas refere-se que apenas aparece x+3=0 quando o denominador é $\sqrt[3]{x+3}$)
E: Anula? Filipa, Se eu estou a calcular o domínio de uma função racional, ou seja, de uma expressão com denominador, se eu comecei por ver que o denominador não pode ser zero; a Filipa agora diz-me que eu anulo o denominador? A condição que eu tenho que impor neste exercício é exactamente a mesma que está aqui (no quadro a ponta as expressões $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ e $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+3}}$), porque a raiz cúbica não acrescentou nada (discordamos). Na raiz cúbica qualquer valor existe, já vimos, estando em denominador a única condição que eu tenho que impor é que o radicando não pode ser zero. A raiz cúbica não afecta dada. Como é cúbica, podia ser quinta, raiz de índice 7, raiz de índice onze. Desde que fosse impar estava tudo bem.
Aluna: Não podia ser par.
E: Par é que não. Par, já tínhamos a tal condição que tinha que ser *maior ou igual* que zero, neste caso que está em denominador seria só *maior* que zero.

Escreva uma expressão analítica para uma função cujo domínio seja 6.b) $\mathbb{R}\setminus\{\pi\}$

E: Então e o $\mathbb{R}\setminus\{\pi\}$? Que função é que se enquadra? Soraia, conte lá. Diga.
Soraia: $g(x)=\dfrac{1}{x-\pi}$
E: Ora vamos ver o que é que a Soraia disse. Posso apagar, já passaram? Não, esta aqui do meio. Posso?
Alunos: Sim.
E: Ora então a Soraia diz, para a alínea b), podemos ter o $g(x)=\dfrac{1}{x-\pi}$. Vamos ver: (escreve no quadro) $D_g=\{x\in\mathbb{R}: x-\pi\neq 0\}$, $x-\pi=0$, $x=\pi$. Digam-me vocês se serve.
Alunos: Sim.
E: Serve. O domínio vai ser (escreve) $D_g=\mathbb{R}\setminus\{\pi\}$. Mas mesmo que eu aqui no denominador (referia-se ao numerador) coloca-se um número negativo (acrescenta um sinal negativo e fica $g(x)=\dfrac{-1}{x-\pi}$) servia na mesma e não tem que estar sempre um. Pode estar x, x+1, menos -x+2, 3x+4, x ao quadrado, x ao cubo, x^5 , desde que não esteja nenhuma raiz no numerador eu não tenho que impor nenhuma condição ao numerador. Se no numerador eu tiver uma raiz de índice par aí já é outra história. Se eu aí tiver uma raiz tenho que impor condições para o numerador e para o denominador. E já vamos fazer um exercício desses.
(uma aluna indica o exercício 6.c) como sendo um caso em que caiba a utilização de raízes de índice par)
E: Pode ser Inês, pode ser. A Inês diz na alínea c) uma raiz quadrada. Pode ser. Mas temos que pensar bem o que havemos de fazer. Vão lá pensando e depois digam-me.

Escreva uma expressão analítica para uma função cujo domínio seja 6.c) $[2;+\infty[$

(a professora vê uma aluna que está a consultar a soluções do manual e chama-lhe a atenção)

E: Olhe Bruna, eu assim também tinha sempre 57 (pontos) nos testes, não era 20 (200 pontos) era 57. Se a professora me desse logo a solução, pois então eu tinha sempre tudo certo. O objectivo aqui na aula não é ter tudo certo, é aprender a pensar para quando estiver sozinha saber fazê-los.
Bruna: Professora, eu só estava a consultar!
E: Está bem, mas aqui não convém ver o resultado, o resultado é a resposta que eu espero e não exactamente a resposta que está nas soluções. Pode ser outro. Já viu que há várias hipóteses.
2 alunos em simultâneo: Eu acho que é $\sqrt{x-2}$.
E: $\sqrt{x-2}$. Posso apagar? Já toda a gente passou? Ora vamos chamar-lhe, por exemplo, $h(x)$ e disseram que era o quê? Raiz quadrada de … x-2. Então, vamos ver.
(escreve no quadro) $D_h = \{x \in \mathbb{R} : x-2 \geq 0\}$; $x-2 \geq 0$ é equivalente…
Aluno: a x maior ou igual a dois.
E: … $x \geq 2$. Então domínio vai ser…
Aluna: De 2 a mais infinito.
E: Como?
Aluna: Intervalo fechado…
E: … Intervalo fechado…, sim senhor. Pronto, um exemplo certo também.
(Um aluno refere outra função com o mesmo domínio)
E: Não percebi Mário.
Mário: Ali onde está a raiz quadrada podia estar raiz quarta.
E: Exactamente. Para impor esta condição. E vão pensando num exemplo para a d).

Escreva uma expressão analítica para uma função cujo domínio seja 6.d) $]2;+\infty[$

(pausa)
Aluno: Oh professora para a d) podia ser $\sqrt{x+2}$?
E: Diga?
Aluno: $\sqrt{x+2}$
E: Raiz quadrada de x mais dois?
(vários alunos dão os seus exemplos e estabelece-se um pequeno diálogo)
E: Vamos lá pensar. Vamos reflectir sobre a sua resposta: se…
(o aluno que tinha respondido $\sqrt{x+2}$ reformula o exemplo para $\frac{1}{\sqrt{x+2}}$)
E: Ah! Pronto! (…) a sua resposta inicial não estava correcta. Porque se for só *raiz*, eu nunca imponho a condição de não poder ser zero. Porque se eu tenho uma raiz de índice par de zero, existe e dá sempre zero. Portanto, se eu tenho como solução (o domínio) um intervalo aberto significa que o 2 não vai pertencer, seja, vai anular e não vai pertencer. Como dizia o Simão vamos ter…
Simão: 1 sobre…
E: Porque é que tem que ser sempre 1!? *Qualquer coisa* sobre…
(os alunos dão outros valores para o numerador)
E: Pronto! Pode ser outra coisa. (escreve no quadro) $j(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$. Domínio de j: $D_j = \{x \in \mathbb{R} : x-2 > 0\}$. (em cálculos auxiliares) x-2>0 que é equivalente a x>2. Lá surge o intervalo aberto $]2;+\infty[$.
(finaliza este exercício com alguns esclarecimentos individuais)
Um aluno pergunta se em denominador poderia estar $\sqrt{2x-4}$, a professora confirma mas detecta que a condição imposta era $2x-4 \geq 0$ e corrige para $2x-4 > 0$.
Outra aluna pede esclarecimento sobre a ausência do sinal de igual na condição e a professora reforça que o radical se situa em denominador, logo não poder ser nulo.

<u>Fim da transcrição</u>

Classificação da Sequência e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo:

Este episódio retrata o tratamento de uma sequência planeada de exemplos do conceito de domínio de uma função tratando a faceta simbólica.
Todos estes exemplos são enquadrados na 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**. Os exemplos próprios desta categoria são usualmente espontâneos mas, neste episódio, foram *planeados* pela professora. A razão da sua inclusão nesta categoria prende-se com a própria natureza da actividade que envolvem. Estes exemplos encaixam no que no enquadramento teórico designámos por actividades do aluno do tipo "*Dê exemplo de…*" e apelam a um envolvimento de um nível cognitivo mais alto por parte do aluno. Este tipo de actividade requer um conhecimento mais avançado do que o conhecimento básico do conceito de domínio pois a situação em causa aceita uma grande multiplicidade de respostas correctas e, por isso, visa um aprofundamento do conceito e não apenas uma abordagem inicial. Este género de exemplos permite o tratamento das várias *Dimensões de Variação Possíveis* e, dentro delas, as *Amplitudes de Mudança Permitidas*. Foi o caso, como veremos quando estudarmos o uso do exemplo. Um aspecto importante, no desenvolvimento da sequência de exemplos, é o facto da professora chamar a atenção dos alunos sobre a natureza diferente deste tipo de exemplos: "*Portanto, o exercício está agora colocado ao contrário. Na questão 5. davam uma expressão analítica e pediam o domínio, agora dão o domínio e pedem uma expressão analítica que corresponda a este domínio.*" A professora, ao não estar familiarizada com a terminologia do tratamento de exemplos, denomina este tipo de exemplo como "*estando ao contrário*" em vez de "*Dê exemplo de…*". Na verdade, o desconhecimento da terminologia não obscurece o tratamento efectivo que dele fez.

O episódio permite ler várias características do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo. Referido a **Claramente do CPC**:

- no início do episódio a professora situa os alunos na actividade a desenvolver, o que reflecte uma estratégia geral de ensino. Mas também diz, especificamente, como conseguir alcançar um determinado resultado no âmbito do conceito de domínio de uma função (Cat. **Estratégias de Ensino**): "*Portanto, o exercício está agora colocado ao contrário. Na questão 5. davam uma expressão analítica e pediam o domínio, agora dão o domínio e pedem uma expressão analítica que corresponda a este domínio.*"; "*Par é que não. Par, já tínhamos a tal condição que tinha que ser maior ou igual que zero, neste caso que está em denominador seria só maior que zero.*"
- na actividade de dar exemplo de funções que possuam o domínio indicado, alunos e professora estabelecem diálogos que evidenciam o que, em dado momento, o aluno está a pensar. Deste modo, a correcção ou incorrecção do raciocínio do aluno pode ser avaliado e, deste modo, o nível de compreensão do conceito de domínio (Cat. **Pensamento do Estudante**):
  "E: Diga?
  Aluno: $\sqrt{x+2}$
  E: *Raiz quadrada de x mais dois?*
  (vários alunos dão os seus exemplos e estabelece-se um pequeno diálogo)
  E: *Vamos lá pensar. Vamos reflectir sobre a sua resposta: se…*

(o aluno que tinha respondido $\sqrt{x+2}$ reformula o exemplo para $\frac{1}{\sqrt{x+2}}$)

E: *Ah! Pronto!*"

- explica, de forma detalhada, como verificar se o exemplo apresentado pelo aluno possui, ou não, o domínio dado na questão que está a ser resolvida (Cat. **Explicações**): "*Pronto. Então vamos verificar se o que o Simão disse corresponde à questão que nos é colocada. Será o domínio desta função* $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$*? Vamos ver. (escreve no quadro)* $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x+3\neq 0\}$*, em cálculos auxiliares, x+3=0, x=-3. Portanto,* $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$*,...*"

Ao nível do **Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico**:

- porque os alunos, nos sucessivos exemplos que criavam, indicavam sempre expressões fraccionárias com numerador 1, a professora chama a atenção que o numerador pode assumir outras expressões diferentes (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "…*e não tem que estar sempre um. Pode estar x, x+1, menos -x+2, 3x+4, x ao quadrado, x ao cubo,* x^5 …"
- no seguimento da exemplificação anterior, chama a atenção que o numerador não poderá ser um radical de índice par. A acontecer o domínio da expressão fraccionária é afectada pela expressão irracional do numerador. Desta forma é mostrada a interdependência das naturezas das expressões utilizadas (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**): "*Se no numerador eu tiver uma raiz de índice par aí já é outra história. Se eu aí tiver uma raiz tenho que impor condições para o numerador e para o denominador.*"

Evidencias vinculadas ao Conhecimento Matemático num Contexto de Conteúdo:

- antes de iniciar a actividade a professora indica claramente o seu objectivo (Cat. **Objectivos da Aprendizagem**): "*Na questão 5. davam uma expressão analítica e pediam o domínio, agora dão o domínio e pedem uma expressão analítica que corresponda a este domínio.*"
- toda a actividade é feita com base num dialogo permanente com os alunos e recorre frequentemente a perguntas de controlo para manter o interesse dos alunos focado no objectivo da aprendizagem enquanto corrige as respostas dadas pelos alunos (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**): "*Ora então a Soraia diz, para a alínea b), podemos ter o* $g(x)=\frac{1}{x-\pi}$*. Vamos ver: (escreve no quadro)* $D_g=\{x\in\mathbb{R}: x-\pi\neq 0\}$, $x-\pi=0$, $x=\pi$ *. Digam-me vocês se serve.*"
- a professora concede aos alunos tempos suficientes para que individualmente apresentem as suas funções que se enquadrem nos domínios indicados no manual. Nesses espaços de tempo circula enquanto esclarece individual e pontualmente os alunos (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).

Uso da Sequência de Exemplos:

A característica principal de cada um dos exemplos que compõem a sequência de exemplos radica no facto de serem do tipo "*Dê exemplo de…*". A multiplicidade de

respostas correctas confere a cada questão uma dificuldade acrescida pois, para responder correctamente, é necessário que o aluno já domine e apresente alguma destreza na utilização do conceito de domínio de uma função. Além disso, para o aluno poder resolver uma tarefa deste tipo necessita fazer a ligação entre dois conceitos, neste caso entre o conceito de função (ir)racional e o conceito de domínio de uma função. O uso deste tipo de tarefa, "*Dê exemplo de…*" revela a forma como o aluno está a expandir o seu *Espaço De Exemplos* e a construir a imagem do conceito, se de forma correcta ou se está a formar concepções alternativas. Ao pedir exemplos de funções que satisfazem determinada condição, neste caso o domínio, o professor pode aferir os acertos ou as debilidades da sua actuação pois é uma tarefa que requer bastante da efectiva aprendizagem do aluno.
É de referir que o nível de dificuldade cresce ao longo da sequência e, o último, já envolve duas *Dimensões de Variação Possíveis* anteriores a ter en consideração, uma expressão fraccionária com denominador irracional, criando assim uma terceira dimensão de variação. A visualização de toda a sequência de exemplos revela bem todas as dimensões de variação e, também, as amplitudes de mudança que foram trabalhadas:

> 6. Escreva uma expressão analítica para uma função cujo domínio seja
> 6.a) $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ 6.b) $\mathbb{R}\setminus\{\pi\}$ 6.c) $[2;+\infty[$ 6.d) $]2;+\infty[$

As duas primeiras alíneas incidem na mesma dimensão, o domínio de uma função racional, e a *Amplitude De Mudança Permitida* apenas explora a natureza da restrição do domínio, ser inteira ou irracional. A terceira alínea, outra dimensão de variação, indica um domínio que se adapta bem a uma função irracional de índice par por ser um intervalo em que um dos extremos é finito. Por fim, a última alínea indica um intervalo aberto que não se adapta a uma função irracional simples, obriga a que a variável independente se situe em denominador.
A sequência não é muito rica de forma a trabalhar, nas várias dimensões, as amplitudes de mudança permitidas. Um ou dois casos é insuficiente. Foi por isso que a professora se viu na necessidade de o fazer, acrescentando mais casos à alínea em causa. Num dos casos, mostrou aos alunos que o numerador não teria que ser sempre 1: "$\frac{2}{x+3}$, *também*. 7, 6, 10, -20, -30. *Claro*!"; noutro que o denominador também pode ser diferente, desde que a raiz da expressão seja o valor que aparece na restrição do domínio: "*E não necessariamente tem que ser x+3, por exemplo, se eu tiver, ora…* (escreve no quadro) $h(x)=\frac{-10}{-2x-6}$, *será que esta serve*?". Acrescentando casos que admitiam o mesmo domínio a professora deixou claro que cada questão admitia uma multiplicidade de respostas. Cada caso, ao trabalhar a amplitude de mudança permitida, proporcionava aos alunos mais um caso a acrescentar ao seu espaço de exemplos e, com isso, possibilitava a generalização do conceito de domínio.
Pelo facto de ter acrescentado mais casos de forma espontânea não se pode dizer a o exemplo tenha passado de *Exemplo Planeado* a *Exemplo Modificado*, as condições iniciais da questão foram sempre mantidas e apenas foram indicadas várias respostas correctas pondo em evidencia a sua multiplicidade.

Esmeralda: **Episódio 6**
Dia: **12 Janeiro 07**

Início: **LB 28 min e 23 Seg.**
Final: **LB 34 min 52 Seg.**

Exemplo não planeado tratado pela Professora

Determinar o domínio da função

$$f(x)=\frac{\sqrt{-x-1}}{-2x+3}$$

E: Então agora, suponhamos que nós tínhamos uma expressão assim: (escreve no quadro) $f(x)=\frac{\sqrt{-x-1}}{-2x+3}$. Como é que nós calculamos aquele domínio?
Rita: $-2x+3\neq 0$
E: Ora, diz a Rita (escreve no quadro) $D_f=\{x\in\mathbb{R}:2x+3\neq 0$ …, foi o que disse. Não foi? Só?!
Rita: … e…
E: … e, o quê?
Rita: $-x-1=0$
Aluno: *maior…*
Aluna: tem o *maior ou igual*.
E: Aqui (do lado esquerdo) ouço *maior*. Já ouvi *diferente*. Já ouvi igual. Então vamos lá a ver se nos aclaramos. Porque é que estão a impor essa condição? Pergunto eu. Colocámos, diz a Rita lá ao fundo, uma condição… diz a Rita, esta condição em relação ao denominador (aponta para $2x+3\neq 0$). E agora eu pergunto: e porque é que vocês acrescentaram e $(\wedge)$ à condição para o denominador?
Aluna: Porque é uma raiz de índice par.
E: Porque é uma raiz de índice…
Alunos: …par.
E: E que obedece a determinadas…
Alunos: …regras.
E: Então, e se obedece a determinadas regras, o que é que eu tenho que escrever a seguir ao $\wedge$? Menos x…
Alunos: …menos um *maior ou igual* que zero.
E: … *maior ou igual* que zero! (completa no quadro $D_f=\{x\in\mathbb{R}:2x+3\neq 0\wedge -x-1\geq 0\}$) Ora, em cálculos auxiliares vou resolver: (escreve) $-2x+3=0$ é equivalente a $-2x=-3$, $x=\frac{3}{2}$. Agora ainda falta resolver a segunda condição, a inequação que temos ali.
(espera que ao alunos façam os cálculos)
E: Quem passou o que está resolvido pode resolver aquela inequação, para depois mostrar.
Já está?
Rita: Já.
E: Então como é que ficou? Conta-me lá. Como é que fica?
(escreve no quadro o que a aluna responde)
Aluna: $-x-1\geq 0$, $-x\geq 1$, $x\leq -1$.

E: Exactamente. Quando o coeficiente da incógnita é negativo multiplicam-se ambos os membros por menos um e troca-se o sentido à desigualdade. E agora qual é o conjunto solução para o meu domínio?
(uma aluna tenta responder mas mostra-se bastante confusa)
Aluna: De -1 a menos infinito e os três meios.
E: Não sei se… Eu acho que vocês estão com um bocadinho de dificuldade. Então, quando isso acontece, nós pegamos na recta real (esboça a recta real no quadro), fazemos a representação e vamos ver onde é que se vai efectuar a intersecção. Então, se a condição fosse só esta (aponta para $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 3 \neq 0$) qual era o domínio?
Aluno: $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$
E: $\mathbb{R}$ excepto três meios. Então se eu tiver aqui o zero (marca o zero na recta real), se eu tiver aqui os três meios (marca também), se for aquela condição (marca na recta todos os reais menores que $\frac{3}{2}$ e também todos os maiores). Então vão-me servir todos os valores menos o três meios. Verdade? Então se a condição fosse só esta?
Alunos: De menos infinito até -1.
E: Ou seja, serviam todos os valores desde menos infinito até -1. Então, -1 para menos infinito, e o -1 serve (marca a bola fechada). Eu pergunto: onde é que se intersectam os dois conjuntos?
Alunos: De menos infinito até -1.
E: Ou seja, neste espaço (marca os pontos entre menos infinito e -1). Então, qual vai ser o domínio?
Alunos: De menos infinito até -1.
E: De menos infinito até -1 (e escreve]-∞; -1]). Entendido Ana Rita? Não?
Rita: Sim.
E: Ah! Toda a gente entendeu? Portanto, quando nós tivermos uma função onde no numerador nos apareça uma raiz de índice par eu além da condição que tenho que impor para o denominador, que é diferente de zero, tenho que impor uma segunda condição: que é que o radicando tem que ser sempre maior ou igual do que zero. Radicando da raiz que está em denominador. Entendido?
Ainda que eu até podia ter outra coisa qualquer. Podia ter assim: mais três x (e na expressão $f(x) = \frac{\sqrt{-x-1}}{-2x+3}$ acrescenta +3x, ficando $f(x) = \frac{\sqrt{-x-1}+3x}{-2x+3}$). O domínio continuava a ser exactamente o mesmo, não alterava nada. Porque neste 3x eu não tenho que colocar nenhuma condição. Estamos entendidos? Portanto, eu ter esta expressão assim ($f(x) = \frac{\sqrt{-x-1}}{-2x+3}$) ou ter assim ($f(x) = \frac{\sqrt{-x-1}+3x}{-2x+3}$) o domínio era calculado da mesma maneira porque o 3x está fora da raiz, não tem condição. Entendido?
Alunos: Sim, professora.
E: Toda a gente passou? Ficou bem percebida a parte dos domínios?
Alunos: Sim.

<u>Fim da transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo:

Este exemplo é um *Exemplo Espontâneo de Conceito* da 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**. Neste exemplo, apresentado na faceta simbólica, a professora pretende que os alunos aprofundem o conceito de domínio de uma função alterando a posição da componente irracional da expressão algébrica da função. No último exemplo da sequência anterior esta componente integrava o denominador, agora figura em

numerador e altera a forma de determinar o domínio. No caso em apreço, será necessário relacionar duas condições que não podem ser condensadas numa só como no exemplo no último exemplo da sequência anterior aumentando o nível de conhecimento exigido para determinar o domínio.
Ao colocar este exemplo a professora "*provoca*"o erro e a dúvida do aluno e, após o seu esclarecimento, obtém uma compreensão mais profunda do conceito por parte do aluno. Isto pode ser apreciado no diálogo inicial estabelecido com a Rita. A aluna estabelece a primeira condição sem qualquer dificuldade, $-2x+3\neq 0$, e falha a segunda, $-x-1=0$. Contudo alguns alunos conseguiram a generalização pretendida e respondem de forma correcta. Com a ajuda destes alunos a professora sintetiza a informação necessária e volta à aluna inicial, a Rita, para se assegurar que ela chegou ao resultado correcto e consequente generalização.

O **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** pode ser descrito pela evidência de comportamentos evidenciados (Chick 2007).
Ao nível de **Claramente do CPC**:

- usa esquemas gráficos específicos para determinar, com os intervalos correspondentes, a intersecção que dará o conjunto de reais que formam o domínio da função (Cat. **Estratégias de Ensino**): "$\mathbb{R}$ *excepto três meios. Então se eu tiver aqui o zero* (marca o zero na recta real), *se eu tiver aqui os três meios (marca também), se for aquela condição* (marca na recta todos os reais menores que $\frac{3}{2}$ e também todos os maiores). *Então vão-me servir todos os valores menos o três meios. Verdade?*"
- discute com os alunos o assunto em causa para estabelecer a forma como o aluno pensa sobre o conceito de domínio de uma função (Cat. **Pensamento do Estudante**):
  "E: *Exactamente. Quando o coeficiente da incógnita é negativo multiplicam-se ambos os membros por menos um e troca-se o sentido à desigualdade. E agora qual é o conjunto solução para o meu domínio?*
  (uma aluna tenta responder mas mostra-se bastante confusa)
  Aluna: *De -1 a menos infinito e os três meios.*
  E: *Não sei se… Eu acho que vocês estão com um bocadinho de dificuldade. Então, quando isso acontece, nós pegamos na recta real (esboça a recta real no quadro), fazemos a representação e vamos ver onde é que se vai efectuar a intersecção. Então, se a condição fosse só esta* (aponta para $D_f=\{x\in\mathbb{R}:2x+3\neq 0$) *qual era o domínio?*

  Aluno: $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$".
- chama a atenção para o facto de se terem que considerar duas condições, uma por causa da expressão fraccionária e outra por causa do radical que inclui a variável independente (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*Portanto, quando nós tivermos uma função onde no numerador nos apareça uma raiz de índice par eu além da condição que tenho que impor para o denominador, que é diferente de zero, tenho que impor uma segunda condição: que é que o radicando tem que ser sempre maior ou igual do que zero. Radicando da raiz que está em denominador. Entendido?*"

- usa as notações específicas dos intervalos e representa-os por meio de esquemas gráficos onde figuram bolas abertas e fechadas para facilitar a obtenção do conjunto intersecção (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**): "*Não sei se… Eu acho que vocês estão com um bocadinho de dificuldade. Então, quando isso acontece, nós pegamos na recta real* (esboça a recta real no quadro), *fazemos a representação e vamos ver onde é que se vai efectuar a intersecção. Então, se a condição fosse só esta* (aponta para $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 3 \neq 0\}$) *qual era o domínio?*"; "*Ou seja, serviam todos os valores desde menos infinito até -1. Então, -1 para menos infinito, e o -1 serve (marca a bola fechada). Eu pergunto: onde é que se intersectam os dois conjuntos?*"
- explica detalhadamente cada passo da exposição do seu exemplo (Cat. **Explicações**): "*Quando o coeficiente da incógnita é negativo multiplicam-se ambos os membros por menos um e troca-se o sentido à desigualdade. E agora qual é o conjunto solução para o meu domínio?*"
- usa um exemplo para aprofundar o conceito de domínio de uma função (Cat. **Conhecimento de Exemplos**): $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x-1}+3x}{-2x+3}$

Relativamente ao **Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico**:

- a forma como altera espontaneamente o exemplo inicial $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x-1}}{-2x+3}$ para $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x-1}+3x}{-2x+3}$ mostra que a professora se sente muito confortável neste conteúdo por possuir um conhecimento conceptual profundo (Cat. **Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental**).
- a necessidade de desdobrar a condição a impor para determinar o domínio deste exemplo em duas outras, identifica os dois aspectos nucleares do cálculo do domínio de expressões desta natureza (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*Portanto, quando nós tivermos uma função onde no numerador nos apareça uma raiz de índice par eu além da condição que tenho que impor para o denominador, que é diferente de zero, tenho que impor uma segunda condição: que é que o radicando tem que ser sempre maior ou igual do que zero. Radicando da raiz que está em denominador. Entendido?*"

No que respeita ao **Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo**:

- usa estratégias de interacção com os alunos (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**):

  "E: *Porque é uma raiz de índice…*
  Alunos: *...par.*
  E: *E que obedece a determinadas…*
  Alunos: *...regras.*
  E: *Então, e se obedece a determinadas regras, o que é que eu tenho que escrever a seguir ao* $\wedge$ *? Menos x…*
  Alunos: *...menos um maior ou igual que zero.*

E: … **maior ou igual** *que zero!* (completa no quadro $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x+3 \neq 0 \wedge -x-1 \geq 0\}$)
Ora, em cálculos auxiliares vou resolver: (escreve) $-2x+3=0$ *é equivalente a* $-2x=-3$, $x=\frac{3}{2}$. *Agora ainda falta resolver a segunda condição, a inequação que temos ali.*"

- faz a síntese de toda a explicação no final do episódio deixando claro quais os pontos mais importantes no que concerne à generalização do conceito em estudo (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).

Uso do Exemplo:
A apresentação espontânea deste exemplo tem um objectivo: introduzir um último caso com vista ao aprofundamento do conceito.
Este exemplo foi apresentado no fim de uma aula, sendo que toda ela foi utilizada para determinar domínios de funções. Este tipo de exemplo não consta das sequências de exemplos retiradas do manual o que mostra que o uso do exemplo tem um objectivo bem definido. Depois de apresentar apenas exemplos de funções cujo domínio podia ser determinado impondo uma única condição surge, neste exemplo, um caso em que para determinar o domínio é necessária a conjunção de duas condições.
No fundo, este exemplo faz a síntese do que é necessário para determinar o domínio de uma função ao nível da programação destinada a estes alunos e, não o encontrando no manual adoptado, gera e apresenta-o aos alunos de forma espontânea.
Este tipo de exemplo é o que encerra o caso mais geral. Nele se pode *ver o geral no particular* e por isso ser um *Exemplo Genérico* no sentido dado por Pimm e Mason (1984) e Bills (1995) ou então, por ser um exemplo a servir de marco de referência, o exemplo pode ser considerado *Exemplo de Referência* no sentido dado por Michener (1978).

Esmeralda: **Episódio 7**
Dia: **19 Janeiro 07**

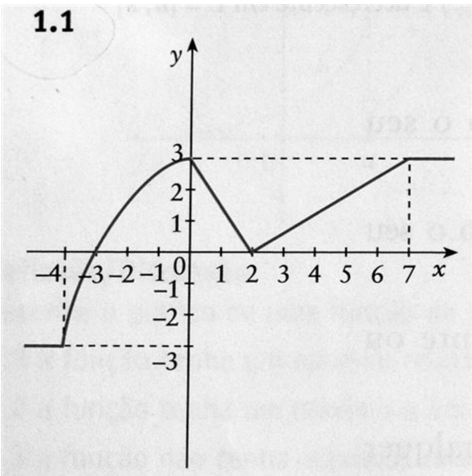
Início: **LA 00 min 26 Seg.**
Fim: **LA 10 min 00 Seg.**

Manual: pág. 34

Sequencia Planeada de Exemplos Planeados tratados pelos Alunos

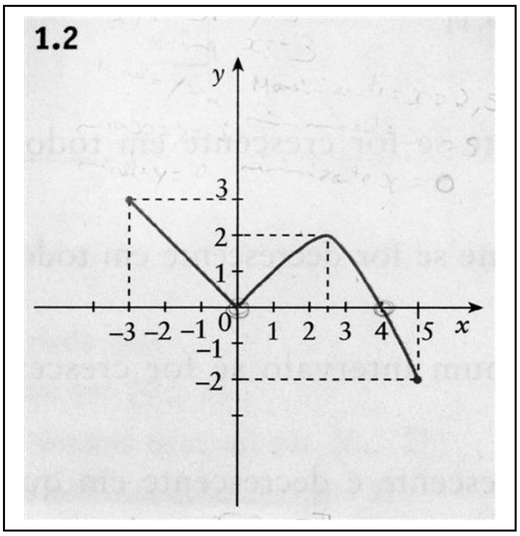
(a professora inicia a aula com a correcção do trabalho para casa)

1. Para cada uma das funções representadas graficamente, indique:	
a) o domínio b) o contradomínio	e) os extremos relativos f) os intervalos em que a função é crescente
c) os zeros	g) os intervalos em que a função é constante
d) os intervalos em que a função é positiva	



Esmeralda: Ora então vamos proceder à correcção do exercício 1.1, faltava-nos as alíneas f) e g). Então, a alínea f, os intervalos em que a função é crescente. O que é que vocês responderam?
Alunos: De menos infinito a zero…
E: … de menos infinito a zero…
Alunos: …e de 2 a mais infinito.
E: Crescente!
(vários alunos respondem, uns de forma correcta e outros não)
E: Não! A função é crescente de…
Alunos: (confuso)
E: … não! Já lá vamos. Menos infinito até zero (escreve no quadro), porque a função é constante. Nós ontem verificámos que uma função constante tanto é considerada crescente como decrescente (refere-se à definição em sentido lato). Portanto, de menos infinito a zero, podemos fechar no zero, e volta a ser crescente novamente de 2 a mais infinito. Portanto, de menos infinito a zero e de 2 a mais infinito (escreve no quadro $]-\infty;0]$ e $[2;+\infty[$).

Os intervalos onde a função é constante. Ela é constante desde…
Alunos: menos infinito a -4…
E: … a -4 …(escreve no quadro).
Alunos: e de 7 até mais infinito.
E: Exactamente, e de 7 a mais infinito (escreve no quadro).
Então a 1.1 está completa em todas as alíneas. Vamos passar à correcção da 1.2.
Ora na 1.2 vamos começar pelo domínio. Qual é o domínio dessa função?



Alunos: de -3 a 5.
E: -3… então eu estou com falta de visão! Ai não! Eu estava a olhar para o contradomínio, têm razão. O domínio é de -3 a 5, sim senhor. Está. Toda a gente respondeu isso?
Alunos: Sim
E: Sim? E o contradomínio?
Alunos: de -2 a 3.
E: Certíssimo, de -2 a 3. Os zeros? São dois, quais são?
Alunos: zero e quatro (alguns respondem, x=0 e x=4)
E: Exactamente. O gráfico da minha função corta o eixo dos xx duas vezes. Intersecta o eixo dos xx duas vezes. Portanto tem dois zeros. Ora, os intervalos em que a função é positiva?
Alunos: de -3 a zero e de zero a 4.
E: E como são os extremos deste intervalo?
Aluna: De -3 fechado a zero aberto.
E: (escrevendo no quadro) De -3 fechado a zero aberto. Porquê?
Aluna: Porque no zero é zero.
E: Porque no zero anula-se. Se é zero não é positivo nem negativo. E depois?
Alunos: de zero aberto a 4 fechado.
E: (escrevendo no quadro) Ora, estamos a falar em ser positiva. Podemos pôr aqui uma reunião, de zero a quatro, aberto também no quatro (escreveu $[-3;0[\cup]0;4[$).
Aluno: Professora, podia ser de -3 a …
E: Como?
Aluno: Podia ser de -3 a 4, excepto o zero?
Aluna: Eu também fiz assim.
E: Também está certo! (escreve no quadro $[-3;4[\backslash\{0\}$) Também está correcto!
Podemos passar aos extremos?
Pareceu-me haver quem não percebeu os extremos, então eu vou passar o gráfico para o quadro. Posso apagar? Vou tentar transcrever o gráfico aqui para o quadro (esboça o gráfico no quadro). È mais ou menos isto.
Ora portanto, ontem tínhamos verificado que, para encontrarmos os extremos, tínhamos que fazer o quê?
Aluno: Centrávamos…

E: Centrávamos uma vizinhança num ponto, tirávamos esse ponto, íamos estudar as imagens dos valores que estavam à esquerda e que estavam à direita desse ponto. E se as imagens à esquerda e as imagens à direita fossem todas menores que a imagem desse ponto, eu considerava ali um…
Alunos: …
E: …menores…as imagens…
Alunos: …um máximo.
E: …um máximo. Se as imagens fossem maiores…
Alunos: …um mínimo.
E: Ora então, vamos aqui ao ponto -3 e vamos centrar ali uma vizinhança. Como é que se comportam aqui as imagens – e eu aqui só posso considerar à direita do -3 porque à esquerda a função não está lá definida – como é que se comportam ali as imagens? Andreia?
Andreia: São menores.
E: São menores. Então, se eu tirar de lá o -3 todas as imagens são mais pequenas. Voltando a falar no -3 novamente, aquela imagem vai ser a maior, nesta vizinhança. Agora vamos olhar para o todo da função, será a maior de todas desta função? Verificámos que o máximo, quando o objecto pertence ao domínio, vai coincidir com o extremo superior do contradomínio. Lembram-se que vimos ontem? Portanto, eu aqui tenho um máximo absoluto que é 3 (escreve no quadro, máximo absoluto:3). Encontraram mais algum extremo?
Andreia: y=2
E: y=2, Andreia, e o que é ali o y=2? Também é um máximo absoluto?
Andreia: Não.
E: Então? Se eu aqui (em x=2) centrar uma vizinhança, como é que são ali as imagens?
Andreia: Vai ser máximo relativo.
E: E porque é que é relativo?
Andreia: Porque é só naquela vizinhança.
E: É só naquela vizinhança que é a maior imagem. Porque nesta aqui (em x=-3) tem uma imagem maior. Portanto, ali àquele, vou-lhe chamar máximo relativo (escreve no quadro, máximo relativo: 2). Foi isso que concluíram, ou não?
Depois, em termos de mínimos, o que é que encontraram?
Alunos: y=0, y=-2
E: y=0 é o quê?
Aluna: Mínimo relativo.
E: Mínimo relativo (escreve, mínimo relativo: 0). E há mínimo absoluto?
Alunos: Sim. y=-2
E: Mínimo absoluto (escreve, mínimo absoluto: -2). Andreia, já percebeu? Ou continua com dúvidas?
Andreia: Não professora, já percebi.
E: Já?
Ora então, já temos os zeros, os extremos. O que é que falta? f) Os intervalos em que a função é crescente.
Alunos: de zero até 2,5 fechado.
E: De zero fechado até 2,5 fechado. Toda a gente fez isso? Sim?
Depois, onde a função é constante.
Alunos: não há.
E: Não existem, porque a nossa função nunca é constante. Ou é crescente ou é decrescente. Então temos o trabalho de casa corrigido, vamos fazer a 1.3.

Fim da transcrição

Classificação dos Exemplos e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Este episódio inclui dois exemplos do estudo de alguns aspectos de duas funções que são apresentadas na faceta geométrica.
Estes dois exemplos são as duas primeiras alíneas de uma sequência de exemplos onde se estudam, em cada um, as mesmas características das funções apresentadas. Os

aspectos a analisar em cada função são: o domínio, o contradomínio, os zeros, sinal, extremos relativos e intervalos de monotonia.
Pela numeração indicada, pois a sequência é retirada do manual, se pode ver que são os primeiros casos a tratar e todos os casos são simples. Como são os primeiros exemplos a tratar pelo aluno, depois da exposição da professora, eles incluem-se na 2ª Categoria, **Abordagem Inicial Autónoma** e são *exemplos planeados* de *conceito*.
Estes dois casos são abordagens genuinamente autónomas já que foram indicados como trabalho de casa. No episódio pode-se apreciar a forma como a professora corrige os trabalhos dos alunos e, no desenrolar do processo, esclarece algumas dúvidas suscitadas pelos alunos.
Toda a sequência de exemplos, da qual estes dois exemplos fazem parte, não apresentam grande variação, podemos dizer que até são todos bastante parecidos, diferindo em pormenores e não em aspectos de fundo. Por isso, os dois exemplos promovem, tão só, a inclusão de casos no *Espaço De Exemplos* dos alunos.

Durante a correcção deste trabalho de casa a professora mostra alguns dos seus traços do seu Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (Chick 2007).
Traços incluídos em **Claramente CPC**:

- para justificar a existência de extremos relativos no segundo exemplo a professora recorre à definição de extremo (Cat. **Estratégias de Ensino**): "*Centrávamos uma vizinhança num ponto, tirávamos esse ponto, íamos estudar as imagens dos valores que estavam à esquerda e que estavam à direita desse ponto. E se as imagens à esquerda e as imagens à direita fossem todas menores que a imagem desse ponto, eu considerava ali um…*"
- esboça no quadro a representação gráfica da função de modo a evidenciar os aspectos importantes para a sua tarefa (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**): "*Pareceu-me haver quem não percebeu os extremos, então eu vou passar o gráfico para o quadro. Posso apagar? Vou tentar transcrever o gráfico aqui para o quadro* (esboça o gráfico no quadro). *É mais ou menos isto*."
- ao indicar os extremos relativos e a razão porque verifica a definição, a professora dá todas as indicações necessárias à compreensão (Cat. **Explicações**): "*É só naquela vizinhança que é a maior imagem. Porque nesta aqui tem uma imagem maior. Portanto, ali àquele, vou-lhe chamar máximo relativo. Foi isso que concluíram, ou não?*"

Ao nível do **Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico**:

- chama a atenção dos alunos para aspectos importantes dos assuntos em questão, insistindo nos pontos que possam apresentar mais dificuldade de compreensão por parte dos alunos (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*São menores. Então, se eu tirar de lá o -3 todas as imagens são mais pequenas. Voltando a falar no -3 novamente, aquela imagem vai ser a maior, nesta vizinhança. Agora vamos olhar para o todo da função, será a maior de todas desta função? Verificámos que o máximo, quando o objecto pertence ao domínio, vai coincidir com o extremo superior do contradomínio. Lembram-se que vimos ontem? Portanto, eu aqui tenho um máximo absoluto que é 3…*"

- ao explicar a igualdade entre os intervalos $[-3;0[\cup]0;4[$ e $[-3;4[\backslash\{0\}$ a professora faz a conexão entre a soma de conjuntos e a diferença de conjuntos (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**).

No que respeita ao **Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo**:

- no segundo exemplo, quando se determinava o extremo relativo, a professora interagiu com a aluna Andreia com o intuito de obter e conservar a atenção desta e promovendo a verbalização do seu raciocínio (Cat: **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**):
  "Esmeralda: *Encontraram mais algum extremo?*
  Andreia: *y=2*
  E: *y=2, Andreia, e o que é ali o y=2? Também é um máximo absoluto?*
  Andreia: *Não.*
  E: Então*? Se eu aqui centrar uma vizinhança, como é que são ali as imagens?*
  Andreia: *Vai ser máximo relativo.*
  E: *E porque é que é relativo?*
  Andreia: *Porque é só naquela vizinhança*."
- Mantém em todo o momento da aula os alunos informados sobre as tarefas a desenvolver (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**): "*Ora então vamos proceder à correcção do exercício 1.1, faltava-nos as alíneas f) e g). Então, a alínea f, os intervalos em que a função é crescente. O que é que vocês responderam?*"; "*Então temos o trabalho de casa corrigido, vamos fazer a 1.3*."
- no diálogo que a professora estabelece com a aluna Andreia podem ser facilmente identificadas as perguntas de controle que são usadas para avaliar a qualidade das aprendizagens (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**)

Uso dos Exemplos

A escolha destes dois exemplos – bem como todos os exemplos da sequência a que pertencem – destinam-se a tratar as noções de domínio, contradomínio, monotonia, etc. na faceta geométrica. Note-se que o estudo das funções pode ser feito de forma bastante completa utilizando a faceta geométrica, o que não acontecia quando as funções eram apresentadas na faceta simbólica. Esta faceta, portanto, proporciona uma visão mais alargada do conceito de função e permite aos alunos construir um pouco mais da sua *imagem do conceito* de função.

O uso destes exemplos, por terem sido trabalhados em casa, proporciona à professora uma avaliação sobre a aprendizagem que os alunos fizeram com a exposição teórica do dia anterior. Pela correcção das respostas dadas pelos alunos se pode observar que foi boa a qualidade da aprendizagem. Contudo, pontualmente, os dois exemplos suscitaram o aparecimento de uma ou outra dúvida – o caso da noção de extremo relativo – que a professora esclareceu. Neste aspecto, os exemplos cumpriram o seu propósito.

A escolha dos exemplos não foi aleatória porque são, de forma natural, o passo seguinte à exposição teórica que teve lugar na lição anterior, cujo papel consiste no aprofundamento de todas as noções envolvidas pela combinação das várias noções em estudo: troços crescentes, decrescentes e constantes; existência ou não de zeros; domínios e contradomínios mais ou menos alargados; etc. Por tudo isto, o objectivo é

alargar o *espaço de exemplos* e não de trabalhar as *dimensões de variação possíveis* porque na realidade, para cada noção, a variedade observada é reduzida.
Por fim, é de evidenciar o diálogo que a professora estabelece com uma aluna que se chama Andreia. Neste diálogo, baseado no exemplo 1.2, torna-se evidente que a aluna já compreendeu o conceito de extremo relativo, seja de máximo ou de mínimo. São perguntas de controlo que permitem à professora avaliar as aprendizagens da aluna e, no fim, constatar a correcta construção da Imagem do conceito de função, de forma particular, um seu aspecto que é a existência de extremos relativos.

Esmeralda: **Episódio 8**
Dia: **19 Janeiro 07**

Início: **LA 10 min 56 Seg.**
Fim: **LA 40 min 18 Seg.**

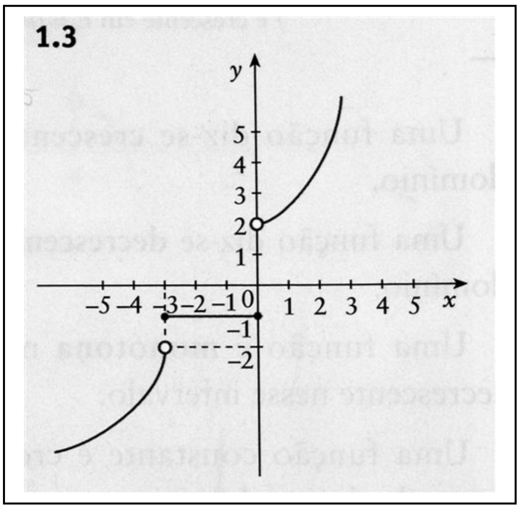
Manual: pág. 34

Sequencia Planeada de Exemplos Planeados tratados pelos Alunos

1. Para cada uma das funções representadas graficamente, indique:

a) o domínio
b) o contradomínio
c) os zeros
d) os intervalos em que a função é positiva
e) os extremos relativos
f) os intervalos em que a função é crescente
g) os intervalos em que a função é constante

Esmeralda: Então vá, vamos fazer o 1.3. Para depois corrigirmos.

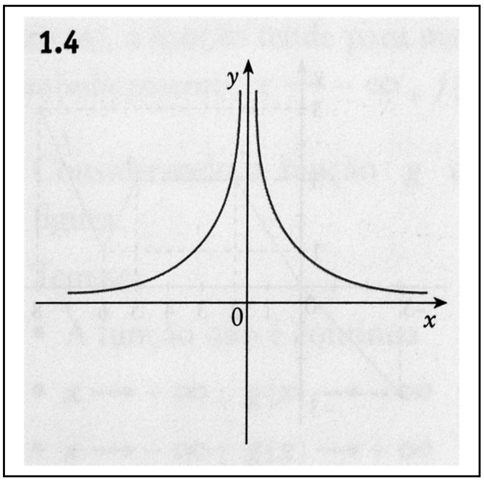


(pausa de 2 min e 30 Seg.)
E: O domínio vamos procurar onde?
Alunos: No eixo dos xx.
E: No eixo dos xx. Então, de onde é que essa minha função está a vir?
Alunos: De menos infinito.
E: De menos infinito. Então, se calhar, temos que começar assim com qualquer coisita. Digo eu, não sei. Ou até não seja preciso. Olhem, vem de menos infinito e depois, nesse ramo, ele pára aonde?
Alunos: -3 aberto.
E: Pára no -3 aberto. Significa que a imagem de -3 não é lida nesse ramo. Então é lida aonde?
Alunos: Na outra recta.
E: Na recta que está por cima. Dá ali um saltito. Não é? Então, mas o -3 tem imagem. Tem ou não? E depois? Essa recta vai de onde a onde?

Alunos: De -3 a zero.

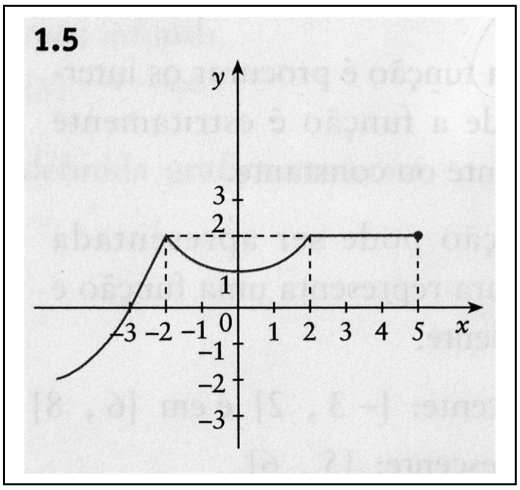
E: E todos os objectos sobre essa recta têm imagem. Depois, quando chega ao zero a imagem de zero está cá em baixo, que é -1. Mas se eu pensar no valor logo imediatamente a seguir ao zero, onde é que vou ler a imagem?
Alunos: (apenas murmuram)
E: Onde?
Alunos: (não respondem)
E: Eu estou a perguntar em termos gráficos, em termos do que está aqui traçado, se eu pensar num objecto imediatamente a seguir ao zero, onde é que eu tenho que ler a imagem?
Aluna: Ali em cima.
E: Aqui em cima, neste ramo. Não é? E se eu pensar noutras imagens à esquerda do zero, onde é que vou ter que as ler todas?
Aluno: No segmento.
E: Então qual é o domínio?
Alunos: de menos infinito até mais infinito.
E: E de menos infinito a mais infinito?
Alunos: É o conjunto dos números reais.
E: É $\mathbb{R}$. O domínio da minha função é $\mathbb{R}$ (escreve no quadro $D_f = \mathbb{R}$). Chamamos-lhe f porque corresponde ao 1.3, por exemplo. Ou *g* ou *k*, o que vocês lhe quiserem chamar.
E agora? Muito bem, procure o contradomínio (escreve no quadro $D_g' =$). Vejam se qualquer que seja o y que vocês aí vêem é imagem de algum x do domínio.
Miguel: É $\mathbb{R}$.
Acha Miguel? Então, eu lamento mas eu não concordo com a sua opinião.
Miguel: Então é…
E: Então é, não. O senhor disse: "é $\mathbb{R}$". E eu disse que não concordava. Então veja bem.
(dirige-se a outro aluno)
E: Bem, bem visto.
(continua a circular pela sala e dialoga com alguns alunos)
E: (para todos os alunos) Então, alguém me sabe já responder qual é o contradomínio da função? Digam-me.
(uma aluna responde)
E: De menos infinito, diz a Inês, a -2 aberto. Concordam com ela?
Alunos: Sim.
E: Tem a ver com este ramo (aponta no manual o ramo definido entre -∞ e -3).
Inês: Exactamente.
E: Pronto. Então, ninguém se opõe de -∞ a -2 aberto (escreve no quadro $]-\infty;-2[$)…
Inês: …
E: Reunião…
Aluna: De dois aberto a +∞.
E: De…? De 2 aberto…
Alunos: a mais infinito.
E: Então *há aqui um rapazito*, no meio, *que não é filho de gente*. Este -1 aqui no meio não é filho de gente para vocês!
Aluna: Excepto o -1
E: Qual excepto nem meio excepto! Reunião com -1 (acrescenta $\cup\{-1\}$) reunião…
Alunos: …com 2 a mais infinito.
(a professora sorri e confirma com a cabeça)
E: (escreve $\cup]2;+\infty[$) mas não pode trocar de lugar, isto é uma sequência. Se fosse um conjunto e depois um excepto qualquer coisa, tudo bem. Agora, assim, a sequência é esta. Você nunca escreve de +∞ a 2, escreve de 2 a +∞. Vai-se sempre do menor para o maior. Toda a gente entendeu?
(pausa)
E: Esta agora a seguir é muito difícil, os zeros. Quantos zeros tem a nossa função?
Alunos: Nenhum.
E: Nenhum, a nossa função não intersecta o eixo dos xx. Portanto não tem zeros.
(pausa)
E: Então e onde é que a nossa função é positiva?

Alunos: de 2 aberto a +∞.
(alguns alunos respondem onde a função é negativa)
E: … pois nós temos duas as alíneas e devemos interpretar aquilo que eles estão a pedir… de -∞ a zero a minha função está toda abaixo do eixo dos xx, logo é toda negativa. Portanto, de zero a +∞. Exactamente, de zero aberto a +∞.
Todos vocês estão a perceber o que se está a fazer?
Aluna: Professora, é de zero ou é de 2?
E: É zero, porque os resultados em termos de ver se a função é positiva, qual é o domínio, quais são os zeros, são lidos sempre no mesmo sítio. Onde?
Aluna: No eixo dos xx.
E: …dos xx. Onde a função é crescente. Tudo isso é valores de x. Não são os valores de y. Os valores de y são: contradomínio e extremos.
Ora, o que é que falta? Extremos relativos se existirem. Existem? Ou não? Digam!
Aluna: $y = -1$.
E: $y = -1$ será o quê…?
Alunos: …um mínimo relativo.
E: … um mínimo relativo, …
Alunos: Um máximo.
E: … e também um máximo relativo. Sim senhora. Pela situação que vimos, que tanto na definição de extremo relativo… de mínimo relativo como de máximo relativo, contempla a igualdade. Sim senhora. Portanto, o -1 é um máximo relativo e um mínimo relativo. Máximo relativo -1 …
Filipa: É tudo relativo…
E: …sim, sim, sim. Porquê? A Filipa disse assim: É tudo relativo. Porquê? Nós temos extremos absolutos aí?
Alunos: Não.
E: É que se o contradomínio é -∞, num extremo, e depois no outro é +∞, eu não sei onde é que a função acaba nem sei de onde é que ela vinha. Certo? Então, nunca pode ter um extremo absoluto. Porque o extremo absoluto tem que ser o maior valor, e eu aí, o maior valor para mim… há sempre mais um… se está a ir para infinito… Está bem?
Ora os intervalos onde a função é crescente.
Alunos: -∞ até zero…
E: De -∞ até zero…
Aluna: …e de zero a +∞.
E: … e de zero a +∞. Ou, então, se considerarmos que ser constante, tanto pode ser crescente como decrescente, então eu poderia considerar que ela era sempre crescente. Não é? Era, podia considerar. Eu podia considerar que a minha função era crescente em $\mathbb{R}$. Porque, por definição, nós sabemos que uma função constante tanto é crescente como decrescente. Então, nós aqui podemos dizer que a nossa função é crescente no conjunto dos números reais. Em $\mathbb{R}$. Em vez de estarmos a separar, podemos dizer exactamente isso, porque ela é sempre crescente, considerando que o instante, ou os instantes, no intervalo onde ela é constante, ela tanto pode ser crescente como decrescente.
E agora o que é que nos falta? Os intervalos onde a função é constante.
Alunos: -3 a zero.
E: De -3 a zero. Sim senhor.
Aluno: Intervalo fechado.
E: Hum, hum. Intervalo fechado nos dois extremos.
Agora passamos à 1.4 também com as respectivas alíneas.
(pausa de ±3 minutos)



E: Ora pois bem, então qual é o domínio da nossa função?
Alunos: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

E: Toda a gente conseguiu visualizar que o zero não tem imagem. Seja, a minha função à esquerda do zero e à direita do zero faz assim, tipo um funil, mas não toca no zero. Portanto todos os xx têm imagem excepto o zero. Então o domínio da minha função vai ser $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Foi isso que toda a gente escreveu? É preciso escrever no quadro? Ou não? Não? Pronto!
Então vamos ao contradomínio. O contradomínio da nossa função é $\mathbb{R}$, dizem vocês?
Alunos: (confusão)
E: Ah! Ouvi dizer aqui de zero a mais… mas como, aberto ou fechado?
Alunos: Aberto.
E: …o zero não…
Aluna: Incluído.
E: Contradomínio. Então, eu posso representar assim (escreve no quadro) $\mathbb{R}^+$, ou intervalo aberto de zero a $+\infty$, é exactamente a mesma coisa. Vão-se familiarizando…
(uma aluna diz que é "*ierre*", lê a barra de |R como sendo a letra i)
…não é "iérre", eu já lhe expliquei, eu já lhe expliquei, que aquilo não é um i. Em matemática nós utilizamos as letras do alfabeto e para não confundirmos o $\mathbb{R}$ com o R normal do alfabeto, coloca-se uma barra por detrás para se distinguir, e lê-se *conjunto dos números reais*. Ali não há nenhum i, como no conjunto dos números naturais também não há nenhum i, há uma barra, para distinguir o N normal do nosso alfabeto do conjunto dos números naturais. Portanto, aquilo lê-se "*érre mais*", e é formado por todos os números positivos.
(pausa de meio minuto)
E: Zeros.
Alunos: Não tem.
E: Não tem. O gráfico não intersecta o eixo dos xx, não tem.
Os intervalos onde a função é positiva.
Inês: O conjunto dos números reais excepto o zero.
E: Ora, onde a função é positiva ela é sempre positiva. Sim, é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Concordam com a Inês?
Alunos: Sim.
E: Extremos relativos?
Alunos: Não tem.
E: Não tem. Intervalos onde a função é crescente?
Alunos: De menos infinito a zero.
E: Sim senhor. A função é crescente no intervalo de menos infinito a zero (escreve no quadro ($]-\infty;0[$). Sim?
A função é constante?
Alunos: Nunca.
E: Vamos passar à 1.5.



(pausa de ±2 minutos)

E: Já está o domínio da 1.5? Qual é o domínio?
Alunos: De menos infinito a 5 fechado.
E: Fechado no 5.
Alunos: Sim.
(pausa)
E: E o contradomínio, já está?
Alunos: De menos infinito a 2 fechado.
E: De menos infinito a 2 fechado? Foi isso que toda a gente considerou?
Zeros?

Alunos: x=-3.
E: x=-3. Certo. Então Ana, não tinha isso? Os zeros?
Ana: Tinha professora.
E: Ah! (pausa) Intervalos onde a função é positiva?
Alunos: De -3 a 5.
E: Como é o intervalo?
Alunos: De -3 aberto a 5 fechado.
E: Portanto, intervalo aberto em -3, porque a imagem de -3 é zero – não é positiva nem negativa – é zero e em 5 é fechado. A imagem de 5 é positiva. Logo, intervalo aberto de -3 a 5 fechado.
Extremos relativos. Tem ou não tem?
Inês: y=2.
E: y=2 o quê?
Inês: Máximo relativo.
E: Máximo relativo, diz a Inês, y=2.
Inês: Não!
E: Como?
Inês: y=2 é máximo absoluto.
E: Ora, vamos analisar o que diz a Inês. O y=2 pode ser um máximo absoluto?
Alunos: Não.
E: Não porquê?
Aluno: Há mais com imagem 2.
E: Nem mais, porque há aí mais objectos que têm imagem 2. Tal como todos os números compreendidos entre 2 e 5, vão ter a mesma imagem que o -2. E é 2, essa imagem. Logo não pode ser absoluto, é um extremo relativo. É um máximo relativo.
Então temos mais algum extremo relativo?
Aluno: O y=1.
E: y=1. E é um…?
Aluno: Mínimo relativo.
E: … mínimo relativo. Sim senhor.
Marisa: Então e qual é o máximo?
E: Como?
Marisa: Qual é o máximo?
E: Qual é o máximo relativo? Pergunta a Marisa.
(dois ou três colegas respondem que é y=2)
E: É isso, y=2. (pausa) Já estão na alínea f) ou não? Carina o que é que se passa?
Carina: Não percebi aqui o 1.
E: Não percebi.
Carina: Não percebi como veio ali o 1.
E: y=1 é um mínimo relativo. (pausa) Podemos passar à f)?
Já posso? Quero que vocês me digam.
Intervalos onde a função é crescente?
Alunos: De menos infinito a -2. (alguns acrescentam: de zero até 5)
E: Olhem, vamos acordar o seguinte: vamos tratar as funções como se estivéssemos a pensar no estritamente crescente ou no estritamente decrescente ou no constante, pronto, separadamente. Pois, porque nós aqui se estamos a tratar dela … monótonas crescente… portanto no sentido lato, acontece que estamos sempre a incluir a função constante em tudo quanto é sítio. Então vamos fazer a separação. Quando nos pedirem o intervalo, ou os intervalos, onde a função é crescente nós vamos restringir e vamos responder apenas onde ela é crescente. Combinado?
Alunos: Está bem.
E: Pronto! Então, onde é que a nossa função é crescente? Estritamente crescente.
Alunos: De menos infinito a -2 e de zero a 2.
E: De menos infinito a -2, certo, intervalo aberto. Calma! Sim… Como?
(os alunos respondem todos ao mesmo tempo e não se compreende bem)
E: Sim, e depois? Onde mais?
Alunos: de zero fechado a 2 fechado.
E: Pronto. Portanto, de menos infinito a -2 e em zero a 2.
Aluna: Intervalo fechado.

E: Sim. (mas, desta vez, não escreve nada no quadro)
Falta constante.
Alunos: De 2 a 5 fechado.
E: Exactamente. De 2 a 5 fechado.
Olhem, o exercício 1.6 vocês vão levá-lo para trabalho de casa.
(a professora retoma um assunto anterior)
E: Digam-me lá uma coisa. Nós aqui neste exercício só nos pediam extremos relativos, mas nós ontem tínhamos resolvido, e tínhamos visto, que existiam os extremos absolutos. E, há bocado, surgiu aí uma dúvida aqui à Nuria, que ela dizia "*porque é que é no eixo dos yy, porque é que é no eixo dos xx?*". Nós ontem verificámos que os extremos, sejam máximos ou mínimos, eram lidos no eixo dos yy mas quando nós damos uma resposta: "*o máximo é 3*", esse 3 é máximo porque é imagem de algum objecto. E o que será esse objecto? Se a imagem é um máximo, o que é que eu chamarei ao objecto cuja imagem é um máximo? Ora…Pois, eu ainda não vos ensinei, pensei que já tivessem visto nalgum sítio, valor que se chama, maximizante. Aos objectos cuja imagem corresponde um máximo, chamam-se maximizantes. Aos objectos cuja imagem é um mínimo, chamam-se minimizantes. Isso aí no vosso livro, tratado assim profundamente, não está. Fazem apenas uma breve abordagem na página 32 e é na resolução de um exercício. E nem sequer vos dizem a que é que se refere o termo. Está bem? Então eu agora pretendo que vocês façam em casa o exercício 1.6 e, para cada uma das alíneas anteriores, vocês indiquem os maximizantes e os minimizantes. Combinado?

Fim da transcrição

Classificação dos Exemplos e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Todos os exemplos que constam neste episódio integram uma sequência de exemplos que figura na página 34 do manual adoptado. Enquanto os exemplos do episódio anterior - 1.1 e 1.2 - foram propostos para serem trabalhados em casa, os exemplos aqui transcritos foram trabalhados na sala de aula pelos alunos. Porém, o facto do local onde foram trabalhados ser diferente não lhes modifica as características. Assim, todas as particularidades apontadas aos exemplos do episódio anterior de adequam aos exemplos deste episódio, desde 1.3 a 1.5 e o 1.6 que foi destinado a trabalho de casa. Pelo que se disse, eles incluem-se na 2ª Categoria, **Abordagem Inicial Autónoma** e são *exemplos planeados* de *conceito* de função apresentados na *faceta gráfica*.
Tal como nos dois primeiros exemplos desta sequência, os três exemplos seguintes que aqui se retratam não apresentam variações de maior e também são variantes possíveis das combinações de troços crescentes, decrescentes e constantes com pontos onde a função está ou não definida juntamente com casos normais de extremos relativos.

As características do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo podem ser observadas pelas inclusões de evidências nas categorias de Chick (2007).
No grupo de **Claramente CPC**:

- A professora usou uma forma geral de ensinar a noção de troço decrescente em sentido lato (Cat. **Estratégias de Ensino**): "*Ou, então, se considerarmos que ser constante, tanto pode ser crescente como decrescente, então eu poderia considerar que ela era sempre crescente. Não é? Era, podia considerar. Eu podia considerar que a minha função era crescente em $\mathbb{R}$. Porque, por definição, nós sabemos que uma função constante tanto é crescente como decrescente. Então, nós aqui podemos dizer que a nossa função é crescente no conjunto dos números reais. Em $\mathbb{R}$. Em vez de estarmos a separar, podemos dizer exactamente isso, porque ela é sempre crescente, considerando que o* *instante, ou os instantes, no intervalo onde ela é constante, ela tanto pode ser crescente como decrescente.*"

- Ao estabelecer um diálogo com os alunos sobre o "inicio" do gráfico da função do exemplo 1.3, quais as suas interrupções e onde o gráfico termina, consegue obter modos de pensar característicos dos alunos e, através deles, levar os alunos aos resultados pretendidos no que se refere ao intervalo que constitui o domínio da função (Cat. **Pensamento do Estudante**):
  "Esmeralda: *O domínio vamos procurar onde?*
  Alunos: *No eixo dos xx.*
  E: *No eixo dos xx. Então, de onde é que essa minha função está a vir?*
  Alunos: *De menos infinito.*
  E: *De menos infinito. Então, se calhar, temos que começar assim com qualquer coisita. Digo eu, não sei. Ou até não seja preciso. Olhem, vem de menos infinito e depois, nesse ramo, ele pára aonde?*
  Alunos: *-3 aberto.*
  E: *Pára no -3 aberto. Significa que a imagem de -3 não é lida nesse ramo. Então é lida aonde?*
  Alunos: *Na outra recta.*
  E: Na recta que está por cima. Dá ali um saltito. Não é? Então, mas o -3 tem imagem. Tem ou não? E depois? Essa recta vai de onde a onde?
  Alunos: *De -3 a zero*."
- a professora apercebe-se de um erro muito comum que costuma aparecer nos alunos de 10º ano. Esse erro consiste em o aluno assumir a barra que acompanha a letra R maiúscula, designação do conjunto dos números reais, como sendo a letra I. Assim, o aluno quando se refere ao conjunto dos números reais não pronuncia "conjunto é*rre*", mas sim, "conjunto *iérre*" (Cat. **Pensamento do Estudante: Concepções alternativas**): "…*não é* "iérre", *eu já lhe expliquei, eu já lhe expliquei, que aquilo não é um i.*"
- identifica, explicando aos alunos, a dificuldade de utilizar a noção de troço decrescente em sentido lato e as confusões que podem advir ao misturar troços estritamente crescentes com troços constantes. Para contornar estas dificuldades, a professora determina o uso da noção de troço crescente em sentido restrito separadamente dos troços constantes (Cat. **Exigências Cognitivas de Uma Tarefa**): "*Olhem, vamos acordar o seguinte: vamos tratar as funções como se estivéssemos a pensar no estritamente crescente ou no estritamente decrescente ou no constante, pronto, separadamente. Pois, porque nós aqui se estamos a tratar dela ... monótonas crescente… portanto no sentido lato, acontece que estamos sempre a incluir a função constante em tudo quanto é sítio. Então vamos fazer a separação. Quando nos pedirem o intervalo, ou os intervalos, onde a função é crescente nós vamos restringir e vamos responder apenas onde ela é crescente.*"
- explica aos alunos a noção de maximizante e minimizante (Cat. **Explicações**): "*Se a imagem é um máximo, o que é que eu chamarei ao objecto cuja imagem é um máximo? Ora…Pois, eu ainda não vos ensinei, pensei que já tivessem visto nalgum sítio, valor que se chama, maximizante. Aos objectos cuja imagem corresponde um máximo, chamam-se maximizantes. Aos objectos cuja imagem é um mínimo, chamam-se minimizantes.*"

Relativamente ao **Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico**:

- ao diferenciar um extremo relativo de um extremo absoluto, a professora destaca os elementos fundamentais de forma a que as noções sejam bem compreendidas pelos alunos (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*Nós aqui neste exercício só nos pediam extremos relativos, mas nós ontem tínhamos resolvido, e tínhamos visto, que existiam os extremos absolutos. E, há bocado, surgiu aí uma dúvida aqui à Nuria, que ela dizia* "porque é que é no eixo dos yy, porque é que é no eixo dos xx?". *Nós ontem verificámos que os extremos, sejam máximos ou mínimos, eram lidos no eixo dos yy mas quando nós damos uma resposta:* "o máximo é 3", *esse 3 é máximo porque é imagem de algum objecto. E o que será esse objecto?*"

No que respeita ao **Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo**:

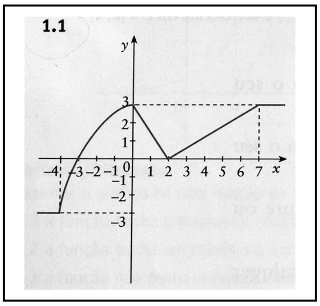
- no fim do episódio a professora dá indicações aos alunos sobre o que , quanto à noção de extremantes, é importante que eles saibam e, nesse sentido, orienta a aprendizagem (Cat. **Objectivos da Aprendizagem**): "*Aos objectos cuja imagem é um mínimo, chamam-se minimizantes. Isso aí no vosso livro, tratado assim profundamente, não está. Fazem apenas uma breve abordagem na página 32 e é na resolução de um exercício. E nem sequer vos dizem a que é que se refere o termo. Está bem? Então eu agora pretendo que vocês façam em casa o exercício 1.6 e, para cada uma das alíneas anteriores, vocês indiquem os maximizantes e os minimizantes.*"
- a forma dialogante como a professora desenvolve dentro do episódio mantém os alunos atentos e activos (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção dos Alunos**)

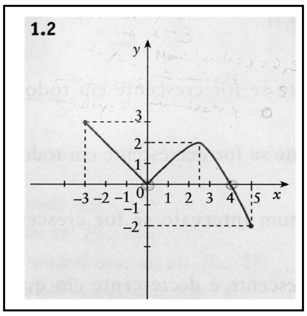
Uso da Sequência de Exemplos

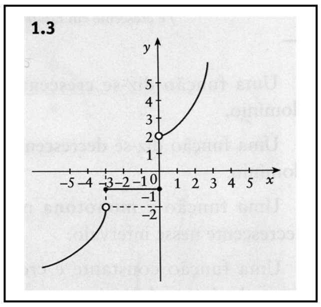
Estes três exemplos são propostos na continuação dos dois exemplos do episódio anterior. Na verdade, são as três questões que se seguem na sequência apresentada como actividade para os alunos na página 34 do manual e, por isso, cumprem os mesmos objectivos e o seu uso é em tudo idêntico aos dois primeiros.

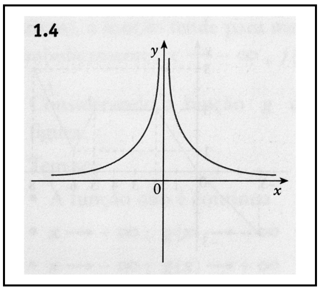
O que obriga a separar estes exemplos num episódio diferente radica no facto de terem sido propostos para trabalho em aula, não em casa como os dois anteriores. Por este facto, as dificuldades que surgem podem, de imediato, ser acompanhadas pela professora. Estes três exemplos proporcionaram à professora algumas situações próprias e propícias à aprendizagem. Isto é, ao abordarem estes exemplos as dificuldades surgidas no seu tratamento implicam, por parte da professora, uma actividade dirigida à aprendizagem dos alunos. Toda a interacção que se observou entre a docente e os seus alunos não pode ser estabelecida em questões que são tratadas em trabalho de casa, a observação serve como avaliação das aprendizagens em tempo real. Desta forma, em aula, o uso dos exemplos pode afinar algumas questões relativas à construção correcta de conjuntos em forma de intervalo, distinção entre aberto e fechado, leitura de troços no gráfico de uma função, obtenção de domínio e contradomínio, sinal, monotonia, etc. utilizando a *Faceta Geométrica* e, pontualmente, relacionando com a faceta analítica.

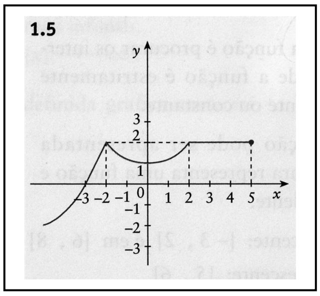
Como já foi referido na análise do episódio anterior, relativamente ao uso dos exemplos 1.1 e 1.2, a *Variação* apresentada pela sequência do manual não é acentuada. Para uma melhor percepção deste facto apresentam-se todos os seis exemplos da sequência:

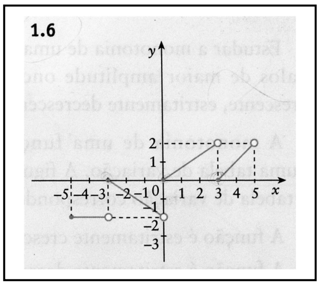












Esta pouca variação é atestada pela professora, por isso não encontrou necessário completar toda a sequência e propôs a última questão, a 1.6, para trabalho de casa introduzindo um novo aspecto a analisar, além de indicar os extremos relativos os alunos deveriam indicar os respectivos extremantes.

Esmeralda: **Episódio 9**
Dia: **19 Janeiro 07**

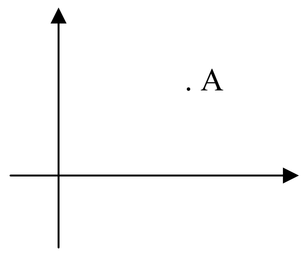
Início: **LB 0 min 40 Seg.**
Fim: **LB 0 min 44 Seg.**

Manual: pág. 34

Exemplo Planeado tratado pelos Alunos

Esmeralda: O exercício 2 também vai para trabalho de casa.

2. Observe a figura.



2.1 Desenhe o gráfico de uma função que contenha o ponto A e seja crescente. Quantas soluções tem o problema?

2.2 Desenhe o gráfico de uma função que contenha o ponto A e seja decrescente. Quantas soluções tem o problema?

2.3 Desenhe o gráfico de uma função que contenha o ponto A e seja constante. Quantas soluções tem o problema?

2.4 Desenhe o gráfico de uma função que contenha o ponto A e não seja monótona.

Classificação da Sequência de Exemplos
Como facilmente se observa este é um caso de exemplos do tipo "*Dê um exemplo de …em que …*" com múltiplas soluções, excepto 2.3. Toda a sequência se enquadra numa actividade que cujo objectivo é a percepção das várias particularidades que uma função, na sua faceta gráfica, pode apresentar. São exemplos que pretendem confrontar o aluno com as suas próprias dificuldades e, ao fazê-las surgir, dá oportunidade de aprofundar no conceito, seja com a ajuda do professor ou autonomamente.
No presente caso, não se pode afirmar que sejam questões exigentes do ponto de vista cognitivo. Embora sejam casos em que se pede ao aluno que apresente um exemplo com imposição de alguma restrição, neste caso de passar no ponto A, pode-se considerar que não ultrapassam uma simplicidade básica. Contudo, é uma sequência de exemplos bem encaixada no tipo que descrevemos e, por isso, se enquadra na 3ª Categoria **Esclarecimento e Aprofundamento**.

Uso da Sequência de Exemplos

O uso da sequência não pode ser descrita por não ter sido gravada. Porém, consultando os cadernos diários das duas alunas, constata-se que as suas resoluções são diferentes. Num caso, a aluna apresenta segmentos de recta fechados tanto para as três primeiras alíneas e uma curva sinusóide sem bolas fechadas, qualquer das quatro alíneas está correctamente resolvida. A segunda aluna demonstra uma originalidade que revela um *espaço de exemplos* mais vasto. Os seus exemplos combinam troços curvos com segmentos de recta, funções descontínuas onde proliferam bolas abertas, fechadas com final num ponto ou no infinito. Também neta aluna todas as funções apresentadas são exemplos que verificam as restrições.

Na análise das respostas dos alunos, neste tipo de actividade, qualquer professor pode apreciar a qualidade dos exemplos apresentados pelos alunos, a originalidade e a riqueza dos seus espaços de exemplos e, com isso, avaliar a aprendizagem do aluno e o rendimento que os alunos retiram da sua acção docente. Este sucesso que se verifica é coerente com a bibliografia específica (Watson e Mason, 2005; Zazkis e Leikin, 2007).

Este exemplo traduz bem o que Watson e Mason (2005) classificam como "*Dê exemplo de* .... Com restrições". É pedido ao aluno que encontre casos que encaixem em situações com determinadas características. Para que o aluno possa apresentar o exemplo com as restrições pedidas é necessário que o do conceito de função esteja bem estruturado e que o *Espaço de Exemplos do aluno* contenha casos que possam ser reorganizados de forma a produzirem outros que serão, também, incorporados no *Espaço*.

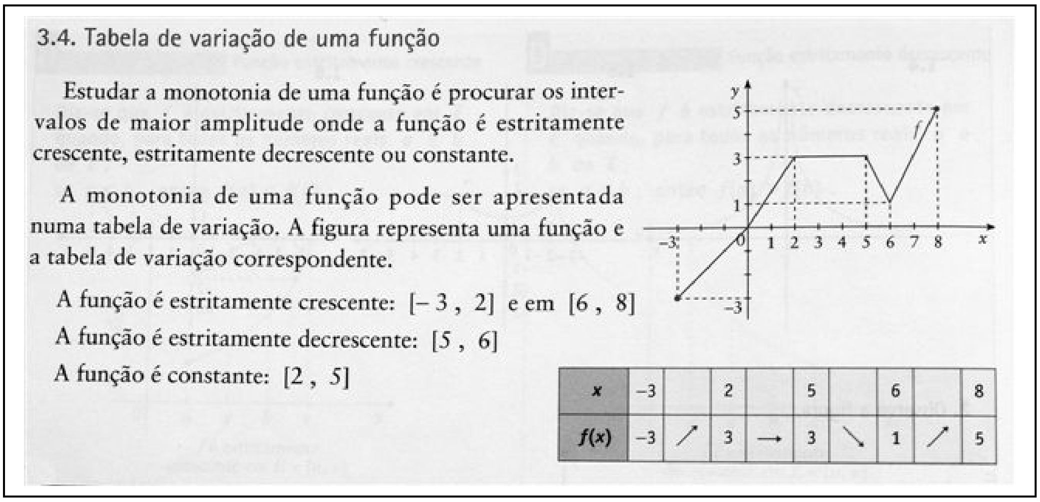
Esmeralda: **Episódio 10**
Dia: **19 Janeiro 07**

Início: **LB 0 min 45 Seg.**
Fim: **LB 2 min 36 Seg.**

Exemplo Planeado tratado pela professora

Manual: pág. 36

Esmeralda: E agora vamos passar à página 36 e temos aí, como título, Tabela de Variação de uma Função.



3.4. Tabela de variação de uma função

Estudar a monotonia de uma função é procurar os intervalos de maior amplitude onde a função é estritamente crescente, estritamente decrescente ou constante.

A monotonia de uma função pode ser apresentada numa tabela de variação. A figura representa uma função e a tabela de variação correspondente.

A função é estritamente crescente: $[-3, 2]$ e em $[6, 8]$

A função é estritamente decrescente: $[5, 6]$

A função é constante: $[2, 5]$

x	−3		2		5		6		8
$f(x)$	−3	↗	3	→	3	↘	1	↗	5

E: Ora, portanto, eu a partir do gráfico posso construir uma tabela de variação de uma função, tal como, a partir da tabela de variação de uma função eu posso construir o gráfico. Porquê? Porque a minha tabela indica-me onde a minha função cresce, onde a minha função decresce, onde é que há essa mudança, qual é o objecto e qual é a imagem desse objecto onde essa mudança se vai efectuar. Diz-me onde a função é constante, porque se vocês repararem nessa tabela que já aí têm construída eu creio que, olhando para ela, conseguiam perceber perfeitamente que para x=-3 a imagem é -3, e a imagem está a crescer até x=2 que vai ter imagem 3. Depois mantém-se constante entre 2 e 5, e a imagem de 5 é 3 na mesma. Depois decresce de 5 a 6 e a imagem de 6 é 1, e depois a função cresce entre 6 e 8 e a imagem de 8 é 5. Então o exercício 1, da página 36, pede-nos… ou melhor, dão-nos uma função e depois pedem-nos para, com a ajuda da calculadora gráfica representar a função graficamente na primeira alínea e na 1.2 pedem-nos para construir a tabela de variação para a função. Então vamos, com a calculadora pedimos o gráfico e vemos como a função se comporta, passamos o gráfico para o papel e depois, a seguir, construímos a tabela.

Fim da transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O exemplo apresentado enquadra-se na 1ª Categoria **Definição/Apresentação**. É um *exemplo planeado* de *processo* que a professora apresenta para mostrar aos alunos o que é e como se constrói uma tabela de variação de uma função. Este exemplo é o primeiro exemplo sobre este conteúdo, é apresentado antes de se explicar o processo de construção da tabela de variação e, sendo uma concretização desse processo, serve para os alunos se apoiarem durante a exposição da professora. É, portanto, um contacto inicial.

Este exemplo envolve duas facetas do conceito de função, a gráfica e a numérica. No processo de ligação entre as duas facetas, o processo de construção da tabela de variação, os alunos trabalham o conceito de função (ou troços) estritamente crescente(s) ou decrescente(s) e a de função (ou troço) constante.

Os aspectos do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo que podem ser observados (Chick 2007) nos três níveis,

Claramente do CPC:

- a professora usa um caso concreto para mostrar aos alunos como se constrói uma tabela de variação de uma função (Cat. **Estratégias de Ensino**).
- descreve a forma de ilustrar as noções de crescimento e decrescimento de uma função, tanto a partir do gráfico como da tabela de variação (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**): "*Porque a minha tabela indica-me onde a minha função cresce, onde a minha função decresce, onde é que há essa mudança,…*"
- quase todo este episódio é uma forma específica de ensinar a forma de construir uma tabela de variação de uma função (Cat. **Explicações**).

Se atendermos ao **Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico**:

- descreve os aspectos importantes para que o aluno perceba como se constrói uma tabela de variação de uma função (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "…*olhando para ela, conseguiam perceber perfeitamente que para x=-3 a imagem é -3, e a imagem está a crescer até x=2 que vai ter imagem 3. Depois mantém-se constante entre 2 e 5, e a imagem de 5 é 3 na mesma. Depois decresce de 5 a 6 e a imagem de 6 é 1, e depois a função cresce entre 6 e 8 e a imagem de 8 é 5*."
- este exemplo é utilizado, com recurso à noção de monotonia de uma função, fazer a ligação entre duas facetas do conceito de função, a gráfica e a numérica (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**).

Relativamente ao **Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo**:

- indica aos alunos a actividade que se segue (Cat. **Objectivos da Aprendizagem**): "*E agora vamos passar à página 36 e temos aí, como título, Tabela de Variação de uma Função*."

Uso do Exemplo

O exemplo descrito tem dois propósitos bem definidos. Por um lado, o exemplo serviu para introduzir o conteúdo relativo à construção da tabela de variação de uma função. Por outro, funcionou como *Exemplo Resolvido*, pois serve para os alunos verem em que consiste o processo da elaboração da tabela e repetirem o processo na questão que se segue.

Esmeralda: **Episódio 11**
Dia: **19 Janeiro 07**

Início: **LB 2 min 03 Seg.**
Fim: **LB 35 min 05 Seg.**

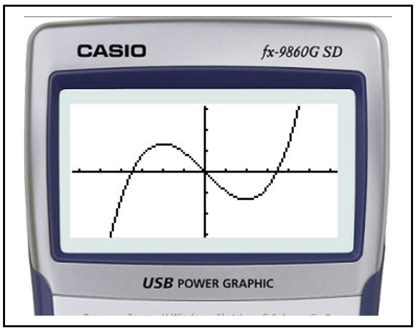
Manual: pág. 36

Sequencia Planeada de Exemplos Planeados tratados pelos Alunos

1. Considere a função *f* definida por $f(x) = x\left(\frac{x^2}{12} - 1\right)$.

1.1 Com a ajuda da calculadora gráfica represente a função graficamente.
1.2 Construa a tabela de variação para a função.

Esmeralda: Então o exercício 1, da página 36, pede-nos… ou melhor, dão-nos uma função e depois pedem-nos para, com a ajuda da calculadora gráfica representar a função graficamente na primeira alínea e na 1.2 pedem-nos para construir a tabela de variação para a função. Então vamos, com a calculadora pedimos o gráfico e vemos como a função se comporta, passamos o gráfico para o papel e depois, a seguir, construímos a tabela.
(o gráfico apresentado pelas calculadoras gráficas dos alunos é o seguinte:)



(pausa de 30 segundos enquanto assiste uma aluna)
E: Diz a Inês que é uma *ondinha*. Mostre… é! É sim senhor. Exactamente.
Olhem, olhando haaaaa… sim depende da escala que tenha, mas é isso. Se vocês olharem para o vosso gráfico, vocês repararam que a vossa função corta o eixo dos xx quantas vezes?
Alunos: Três vezes.
E: Três vezes. Então isso significa que nós, para podermos traçar o gráfico, temos que saber quais são os valores de quantos zeros?
Alunos: Três.
E: Três zeros, então vamos a isso.
(a professora esboça o sistema de eixos no quadro)
E: Sabem o que têm que fazer. Ainda se lembram? Sim ou não?
(atendendo individualmente os alunos explica como se obtém o gráfico da função em cada uma das suas máquinas de calcular gráficas)
E: Estou a ouvir muito barulho e ainda ninguém respondeu à minha pergunta. Ainda sabem procurar os zeros?
Aluno: Sim. Não é no *Root*?
E: Diga. É isso, é. (dá mais indicações ao aluno de como obter os zeros na calculadora gráfica TEXAS TI84)
(fala para os alunos que possuem CASIO como determinar as raízes)

E: Já encontraram algum zero, ou não?
Alunos: Já. -3,…
E: Quanto?
Aluna: -3,46…
E: A alguém dá um número exacto?
E: Pronto. Aproximadamente -3,46? (marca esse valor no eixo dos xx no quadro) Então, mais ou menos aqui, temos um zero. E depois, acho que na origem também temos um zero. Não? É? Então vai passar aqui também na origem (marca esse ponto no quadro). Mas eu aí no meio, como dizia a Inês, tenho uma *ondinha*. Então eu preciso de saber o quê no cimo dessa *ondinha*? Para saber onde é que ela acaba?
Aluno: Precisa do y.
E: Preciso do y? Que y?
Aluna: Temos de ir à tabela.
E: Tem que ir à tabela fazer o quê?
Aluna: Ver o y?
E: Não. Se eu tenho uma ondinha (desenha no quadro uma curva com a concavidade voltada para baixo) eu preciso de saber onde é que ela acaba. Não? E provavelmente isto aqui (marca o ponto máximo da curva) será o quê?
Aluno: Um máximo.
E: Um máximo. Então temos que ir à calculadora, para eu poder calcular e traçar exactamente o gráfico, os pontos correctos, preciso do máximo. Ora, nas CASIO, fazem novamente *2nd, solve, Max* e nas TEXAS vão ao *calc, 2nd calc*, e agora escolhem *Max*. E agora vão com o cursor à esquerda do máximo, depois à direita e depois …
Aluna: … é em -2 e dá 0,33…
E: … Espere. -2… 0,3333… é um terço (marca no gráfico os pontos de coordenadas $(-2;\frac{1}{3})$ e traça o troço de -∞ até à origem).
Aluno: Professora.
E: Diga.
Aluno: Podia vir aqui se faz favor?
E: Vou.
(para a turma) E agora falta o resto.
(dirige-se ao aluno para lhe dar apoio no uso da calculadora)
E: Falta-me aqui do lado direito [do gráfico].
Aluno: É a mesma coisa que do outro lado.
E: É a mesma coisa, como? Não pode ser, então a função vem para baixo.
Aluno: Então veja aqui professora.
E: Ah, no zero. Mas eu preciso também de saber o mínimo.
(volta para o quadro)
E: Ou seja, anula-se também no 3 e qualquer coisa. É isso que me estão a dizer. Um, dois três (marca estes pontos no eixo dos xx)… Ora, 3 vírgula… nós aqui até…não, não, nós queremos com a calculadora, mas podíamos analiticamente calcular os zeros desta função. Mas não sabemos o valor exacto.
Ora, 3, aqui são 4, mas função vai passar aqui (marca a terceira raiz no eixo dos xx). E depois no 2, se aqui for o -1 aqui será o tal $-\frac{1}{3}$ (marca o ponto mínimo de coordenadas $(2;-\frac{1}{3})$) Então a função faz isto (traça o troço de zero até +∞). Toda a gente conseguiu visualizar aquela função?
(pausa de 30 segundos)
E: Mas para eu passar a tabela com os valores exactos, ali nos zeros, eu vou analiticamente calcular os zeros da função. Eu e vocês.
Aluna: Professora, podemos começar?
E: Podem.
(a professora assiste alguns alunos individualmente)
E: Ora então, vamos lá, analiticamente, calcular os zeros… os valores primeiro ali aproximadamente. Vocês disseram que era três e qualquer coisa. Vamos calcular o valor exacto dos zeros. Vamos pegar na nossa função que é (escreve no quadro) $x\left(\frac{x^2}{12}-1\right)=0$. Como é que isto se resolve?

Aluno: Pela lei do anulamento do produto.

E: …lei do anulamento do produto. (escreve no quadro) $x=0 \vee \left(\frac{x^2}{12}-1\right)=0$.

Olhem, o zero já aqui está (mostra que o gráfico da função passa na origem das coordenadas), é aqui na origem. Zero.

(escreve no quadro) $x=0 \vee \frac{x^2}{12}=1$, ora $x=0 \vee x=\pm\sqrt{12}$. Deu isto? Sim ou não?

Alunos: Sim.

E: Ora $x=0 \vee x=-2\sqrt{3} \vee x=+2\sqrt{3}$, sim?

(espera que os alunos passem a resolução do quadro)

E: E agora vamos construir a tabela. Aqui (marca os zeros no gráfico) para nossa informação fica $-2\sqrt{3}$ e $2\sqrt{3}$. Viram porque é que aqui estavam valores aproximados? Porque isto dava raízes e estas raízes não têm valores exactos. Exactamente é aquele valor, se vos pedem só com calculadora então vocês ali colocariam aproximadamente. Colocavam lá o 3,4.., o que é que ao bocado alguém disse?

Alunos: 3,46

E: Pronto. Se era uma situação de teste, se era uma situação de exame, se não nos pedem para calcular os zeros analiticamente – isto foi só para vos mostrar que se pode calcular sim senhora, e nunca é demais fazer este tipo de cálculos porque vocês têm dificuldade – marcavam ali 3,47. Se for o caso, normalmente neste tipo de exercícios dizem que apresentemos o resultado arredondado às décimas ou às centésimas ou às milésimas. Pronto, e vocês apresentavam o número de casas decimais correspondente. Está bem?

E vamos construir a tabela. Lembrem-se que eu do gráfico tenho que conseguir construir a tabela, como olhando para a tabela também tenho que saber construir o gráfico. Portanto a tabela tem que relatar exactamente o que ali acontece. Onde a função cresce, onde ela decresce, onde ela é constante…

(pausa)

E: Posso apagar?

Alunos: Sim.

E: Não o gráfico, mas sim o lado direito (apaga os cálculos). Ora então vamos construir a nossa tabela. E agora, olhando para o gráfico, o que é que vocês conseguem ali visualizar em termos de crescimento e de decrescimento da função?

Patrícia: Que de -∞ a -2 a função é crescente.

E: Ora, (começa a marcar os valores na tabela) de -∞, diz a Patrícia, até onde?

Patrícia: … -2.

E: Então, até -2, a minha função é crescente. Qual é a imagem de -2?

Alunos: É um terço.

E: É um terço. Não é, não. Não. Não é, não. Têm aí, peçam lá o máximo, se faz favor (na calculadora). Há, não é um terço, não. Um terço seria zero virgula qualquer coisa. Não é, não. É 1,33333 salvo erro é quatro terços. Isto aqui (indica o valor do máximo que está representado no gráfico do quadro) está mal. Façam lá quatro a dividir por três.

Aluna: Dá 1,3333333.

E: É quatro terços (corrige para $\frac{4}{3}$). Isto aqui está mal marcado. E aqui (no valor do mínimo) vai ser $-\frac{4}{3}$ (corrige no gráfico). Portanto a imagem de -2 vai ser quatro terços (escreve na tabela) e ali eu tenho um máximo. Depois o que é que acontece na minha função?

Aluno: Desce…

E: Ela desce. Ou seja, decresce (marca uma seta descendente na tabela). Até onde?

(no gráfico marca 2) Aqui é dois.

Alunos: Até ao 2.

E: Até ao …? Ela decresce até onde?

Alunos: Até ao 2.

E: Até ao 2. E este 2 tem imagem…

Aluna: $-\frac{4}{3}$.

E: … menos quatro terços (escreve na tabela o 2 e o $-\frac{4}{3}$. E depois a minha função… (marca uma seta ascendente na tabela)
Aluna: Sobe. Cresce
E: …Se vos dessem esta tabela, vocês conseguiam construir o gráfico?
Alunos: Sim.
(pausa para os alunos passarem a tabela de variação que está construída no quadro)

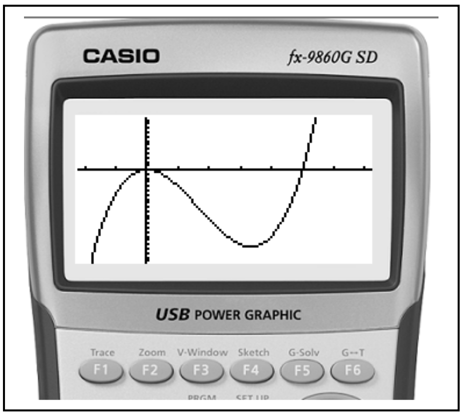
x	-∞	-2		2	+∞
f(x)	↗	$\frac{4}{3}$	↘	$-\frac{4}{3}$	↗

Aluna: É para fazer a [questão] 2?
E: Sim.
(pausa, enquanto assiste individualmente os alunos)

2. Considere a função *f* definida por $g(x) = x^2(x-5)$ de domínio [-2;6].

    2.1 Represente a função graficamente com a ajuda da calculadora gráfica.
    2.2 Construa a tabela de variação para a função.

(o gráfico apresentado pelas calculadoras gráficas dos alunos é o seguinte:)



E: Olhem, eu estou ali a ver a Inês assim um bocadinho a tremer em relação ao que está a fazer. Mas olhem que o exercício é muito explícito: "Considere a função *g* definida por $g(x) = x^2(x-5)$ de domínio [-2;6]." Então, o que é o -2 em relação ao x?
Alunos: O mínimo.
E: O valor mínimo. O 6, o valor máximo. Portanto, vocês vão ter que ajeitar a janela de modo a verem a função nesse intervalo. Consequentemente, se não conseguirem ver os valores todos de y têm que aumentar, se calhar, a escala que têm lá.
(dirigindo-se a um aluno) Pronto, por exemplo.
Se não, não consigo traçar a função.
(pausa, enquanto dá apoio individual aos alunos)
Aluno: Professora dá outra onda dessas.
E: Dá outra onda, diz ele. Eu acho que isso devem ser curvas. Exactamente, mas está diferente daquelas. Então vamos transcrever para o gráfico.
Olhem, mais uma vez a nossa função deve ter zeros e extremos.
A sua [máquina] dá erro. Erro de quê?
Aluna: (imperceptível)

E: Então olhe lá. O seu mínimo é 2 o seu máximo é -6, acha que isso alguma vez funciona? Ai minha Nossa Senhora, o mínimo é -2, diz aí no exercício, e o máximo é seis. Ora o mínimo de y é 8? Por aí você sabe o (…). (continua a dar indicações ao aluno sobre como encontrar a melhor janela) Está feito.
E: Ora a nossa função tem dois zeros, e um dos zeros vai corresponder a um máximo relativo e depois tem um mínimo relativo. É? Conseguiram visualizar isso?
(a professora apaga o quadro)
E: (desenha os eixos coordenados) Então como é que isto fica? É no zero… então é assim, não? Assim (esboça o troço antes do zero) e depois… qual é o mínimo relativo? Quanto? Ora, assim, dá 3, 33 aproximadamente (marca no eixo dos xx). Ora esta imagem aqui vai ser, aproximadamente -18,52 (marca o mínimo e esboça o resto do gráfico. Não respeita o domínio indicado no enunciado).
Ora vocês sabem que me incomoda este barulho de fundo.
(os alunos fazem silêncio e há um aluno que chama a professora)
E: Qual é o problema? Está um erro no gráfico e ninguém me disse nada. Aonde?
O gráfico que eu acabei de desenhar tem um erro. Onde?
Diga?
Aluna: No x, passa no 5.
(os outros alunos reforçam a ideia, o gráfico intersecta o eixo dos xx em x=5)
E: Passa em x=5. E…? É só nisso que está o erro? Ou seja, o que me falta é marcar aqui o 5? (marca esse ponto no gráfico)
É muito mais grave do que isso o erro que está ali.
(Silêncio)
E: Qual é o Domínio daquela função?
Alunos: De -2 a 6.
E: Ai é de -2 a 6? Eu olho para ali, e tenho ali que é $\mathbb{R}$. E vocês não encontram ali um erro. Há um erro, se o domínio tem que ser de -2 a 6, eu tenho que marcar ali que a função começa em -2 e vai terminar em 6. Portanto, consequentemente, ir à tabela e verificar qual é a imagem de -2.
Alunos: -28
E: Quanto?
Alunos: -28
E: (marca o ponto -2 no eixo dos xx) Aquele zero é mesmo zero, não?
Mostre lá a função (observa o gráfico na calculadora de um aluno). É.
Ora, … -2. Menos vinte e oito?
Alunos: Sim.
(marca o ponto (-2;-28) e esboça a partir desse ponto)
E: Exactamente -28?
Alunos: Sim.
E: Então, a minha função começa aqui no -2. Se vocês dizem que o domínio é de -2 a 6, então eu preciso de marcar ali a imagem de 6 (corrige o gráfico de forma a que termine em bola fechada no ponto (6;36)).
Eu já vos tinha dito, quando começámos a falar nas funções e a fazer representação gráfica de funções, que nunca se devem esquecer, quando estão a traçar o gráfico, de marcar o domínio. O domínio é importantíssimo. O domínio, os zeros, os extremos são os pontos que me dão as referências todas do gráfico, porque o que eu tinha ali estava incompleto, eu olhando para ali dizia que o domínio era $\mathbb{R}$ e estava a contradizer aquilo que o exercício diz, que o domínio vai de -2 a 6. O intervalo é fechado, certo? É!
Então, agora, façam o favor de construir a tabela.
Aluno: Como é que a professora chegou àquele 36?
E: Não fui eu. Foram os seus colegas. Foram à tabela e viram qual era a imagem de 6. Foram à tabela (da máquina de calcular) em 2nd, table, tabela, e agora, 6, 36. [E, também] -2, -28. Que é o que eu tenho aqui em baixo. Percebido?
(pausa, enquanto verifica os trabalhos dos alunos)
E: A tabela, já está? Ou não? Ai não, estão a passar o gráfico.
(aguarda que os alunos terminem de copiar do quadro)
(Termina este exercício explicando aos alunos como calcular imagens através da função Calc, nas TEXAS, e G-Solve nas CASIO. Depois, constrói a tabela de variação da função no quadro.)

x	-2		0		3,33		6
g(x)	-28	↗	0	↘	-18,52	↗	36

E: Já toda a gente tem a tabela feita?

<u>Fim da transcrição</u>

Classificação dos Exemplos e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Este episódio inclui dois *Exemplos Planeados de Processo* que interligam três facetas. As funções são apresentadas pelas suas equações (faceta simbólica), propõe que se representem graficamente (faceta geométrica) e, por fim, que se construam as respectivas tabelas de variação (faceta numérica).
Estes dois exemplos surgem imediatamente depois do *exemplo resolvido* tratado pela professora (episódio 10) e são as duas primeiras abordagens feitas pelos alunos sobre a construção de tabelas de variação de uma função. Sendo casos muito simples de aplicação directa do processo de construção das duas tabelas de variação, com base no gráfico obtido da calculadora gráfica estes dois exemplos são incluídos na 2ª Categoria, **Abordagem Inicial Autónoma**.
Os dois exercícios são semelhantes, apresentando uma única *dimensão de variação*, no primeiro o domínio não é apresentado e por isso é constituído pelo conjunto dos números reais, enquanto o segundo é indicado no enunciado do exemplo, [-2;6].

No que respeita ao Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, utilizando Chick (2007), podemos evidenciar na professora os traços em vários níveis.

Claramente do **CPC**:

- mostra aos alunos a necessidade de configurar a janela da máquina de calcular – e a forma de o fazer – de forma a serem visíveis os pontos fundamentais, zeros e extremos, para a construção da tabela de variação (Cat. **Estratégias de Ensino**): "*Portanto, vocês vão ter que ajeitar a janela de modo a verem a função nesse intervalo. Consequentemente, se não conseguirem ver os valores todos de y têm que aumentar, se calhar, a escala que têm lá.*"
- compreende, aceita mas corrige a forma de os alunos se expressarem. Sabe que o aluno se refere ao gráfico da função quando este se lhe refere como sendo uma *onda*, aceita a analogia e informa o aluno da designação correcta do gráfico (Cat. **Pensamento do Estudante**): "Aluno: *Professora dá outra onda dessas.*
E: *Dá outra onda, diz ele. Eu acho que isso devem ser curvas.*"
- quando os alunos têm dificuldade em identificar a parte de cima da *ondinha* como sento o ponto onde a função atinge o máximo relativo, a professora esboça no quadro uma curva simples e indica esse ponto para isolar a noção de máximo relativo (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**): "*Mas eu aí no meio, como dizia a Inês, tenho uma* ondinha. *Então eu preciso de saber o quê no cimo dessa* ondinha? *Para saber onde é que ela acaba?* (…) *Se eu tenho uma* ondinha (desenha no quadro uma curva com a concavidade

voltada para baixo) *eu preciso de saber onde é que ela acaba. Não? E provavelmente isto aqui* (marca o ponto máximo da curva) *será o quê?*"

- todo o episódio é, na sua essência, a elucidação de como se constrói a tabela de variação da função com base no seu gráfico (Cat. **Explicações**).
- para fazer a transição da faceta simbólica (equação da função) para a faceta numérica (tabela de variação) como é proposto pelas duas questões que incluem os exemplos, a professora recorre à máquina de calcular. O seu uso também é sugerido pelo enunciado do exercício que sugere o apoio gráfico, o que implica o recurso à faceta geométrica proporcionada pelo gráfico exibido na calculadora gráfica (Cat. **Conhecimento de Recursos**).
- integra e explica razão da aplicação de técnicas de resolução de equações de grau superior ao segundo na determinação dos zeros da função com vista a integrá-los na tabela de variação (Cat. **Objectivo do Conhecimento do Conteúdo**)

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:

- indica aos alunos os elementos mais importantes que devem ser conhecidos de forma a construir a tabela de variação de forma correcta (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*Eu já vos tinha dito, quando começámos a falar nas funções e a fazer representação gráfica de funções, que nunca se devem esquecer, quando estão a traçar o gráfico, de marcar o domínio. O domínio é importantíssimo. O domínio, os zeros, os extremos são os pontos que me dão as referências todas do gráfico, ...*"
- inclui o cálculo de zeros, recorrendo à Lei do Anulamento do Produto, com o objectivo de incluir os valores exactos na tabela de variação da função (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**): "*Mas para eu passar a tabela com os valores exactos, ali nos zeros, eu vou analiticamente calcular os zeros da função. (…) ...lei do anulamento do produto. (…) E agora vamos construir a tabela. Aqui, para nossa informação, fica* $-2\sqrt{3}$ *e* $2\sqrt{3}$."

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- dá indicações precisas sobre o objectivo do uso do exemplo, como o gráfico da função obtido na calculadora gráfica permite construir a tabela de variação da função (Cat. **Objectivos da Aprendizagem**): "*…dão-nos uma função e depois pedem-nos para, com a ajuda da calculadora gráfica representar a função graficamente na primeira alínea e na 1.2 pedem-nos para construir a tabela de variação para a função. Então vamos, com a calculadora pedimos o gráfico e vemos como a função se comporta, passamos o gráfico para o papel e depois, a seguir, construímos a tabela.*"
- chama a atenção dos alunos para o seu próprio erro, cativando a atenção dos alunos para o elemento chave que é o domínio da função (Cat. **Obtenção e Manutenção da Atenção do Aluno**): "*Ai é de -2 a 6? Eu olho para ali, e tenho ali que é* $\mathbb{R}$. *E vocês não encontram ali um erro. Há um erro, se o domínio tem que ser de -2 a 6, eu tenho que marcar ali que a função começa em -2 e vai terminar em 6.*"
- a utilização adequada do quadro facilita a aprendizagem dos alunos. A professora gere com eficácia as zonas do quadro, utiliza uma escrita com

tamanho apropriado e legível e apaga ou mantém a informação (gráficos e cálculos) de acordo com as necessidades do momento (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).

Uso dos Exemplos

Este exemplo é um caso bastante interessante pelo facto de envolver três facetas do conceito de função. Nesta abordagem do conceito de função, os exemplos $f(x) = x\left(\frac{x^2}{12} - 1\right)$ e $g(x) = x^2(x-5)$ são apresentados na sua *faceta simbólica* propondo uma resolução na *faceta numérica* passando pela sua *faceta geométrica*. Contudo, no uso destes exemplos, também são tratadas outras noções tais como extremos relativos, zeros, monotonia, equação de grau superior ao 2º, Lei do Anulamento do Produto, domínio e aproximações de valores irracionais. As três facetas envolvidas, e a sua interligação, promovem uma aprendizagem muito significativa e concorre para uma boa construção da *imagem do conceito* de função.

Os dois casos são em quase tudo semelhantes. Existe apenas uma *dimensão de variação possível* que foi tratada, o domínio. No primeiro exemplo a ausência de indicação do domínio da função *f* pressupõe que esse domínio é o mais alargado possível e, nesse caso, serão todos os reais; no segundo exemplo, a variação da variável independente é restringida ao intervalo [-2;6]. A *amplitude de mudança permitida* não foi ampla, na verdade limitou-se ao caso de $\mathbb{R}$ e de um intervalo sem complicações mantendo os alunos focalizados nas outras noções atrás referidas.

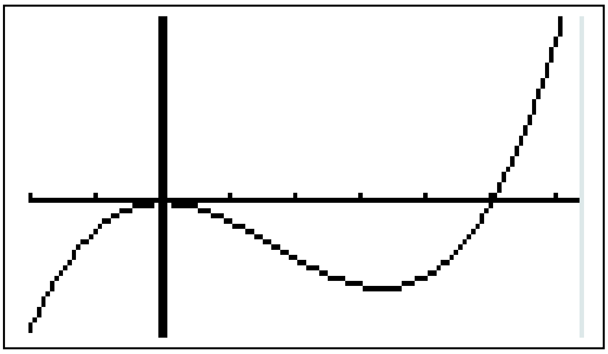
Este episódio inclui os dois exemplos planeados que já se trataram. Porém, existe um rasgo de espontaneidade no tratamento das raízes da primeira função. Isto é, a professora poderia ter utilizado os valores aproximados de $-2\sqrt{3}$ e $2\sqrt{3}$ mas preferiu, no momento, determinar os valores exactos e, com isso, relembrar o processo de resolução de equações de grau superior ao 2º e a aplicação da Lei do Anulamento do Produto. Fica claro que, incluído no tratamento de um *exemplo planeado de processo de construção* da tabela de variação, se pode tratar espontaneamente esse mesmo exemplo como sendo um *exemplo espontâneo de processo* do cálculo de raízes de uma função.

Esmeralda: **Episódio 12**
Dia: **19 Janeiro 07**

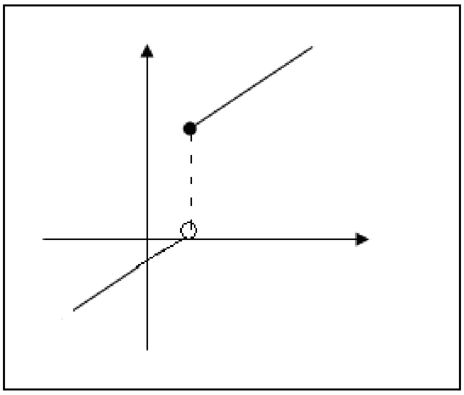
Início: **LB 36 min 35 Seg.**
Fim: **LB 39 min 39 Seg.**

Exemplos Espontâneos tratados pela professora

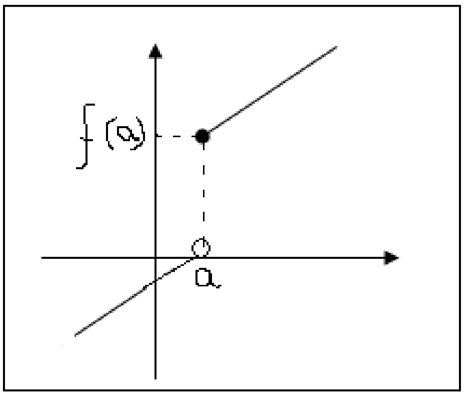
Esmeralda: Digam-me lá uma coisa. Eu não me lembro se ontem falámos nisto. Nós já falámos no termo *continuidade*?
Alunos: Não.
E: Não? Pronto. Mas já agora, digam-me lá. O que é para vocês, na prática, o que é uma coisa ter … quando é que uma coisa tem *continuidade*?
Alunos: (… todos ao mesmo tempo, nada se percebe…)
E: Então, olhando para este gráfico que eu tenho aqui no quadro, vocês diriam que a função é contínua?



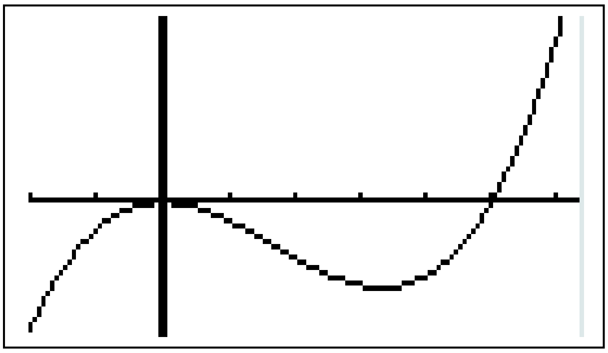
Alunos: Não.
Outros alunos: Sim.
E: Então vá, por partes. Eu já ouvi que *sim* e já ouvi que *não*. Que *sim* porquê?
Ana: Porque é contínua quando está a crescer…
E: É contínua quando está a crescer.
Ana: Sim, ali entre o 3 e 5 ….
E: Ah, então está a menina a dizer que entre zero e 3,33 a função não é contínua porque está a decrescer.
Ana: Não, está a oscilar os valores.
E: Ah, Está a oscilar os valores.
Simão, porque é que disse que a função é contínua?
Simão: Porque não tem paragens, professora.
E: Porque não tem paragens. Então e quem é que disse que ela não era contínua?
Ninguém disse? Eu ouvi alguém dizer.
(pausa para apagar parte do quadro, deixando o gráfico anterior, e esboçar o gráfico de uma função)



E: E então o gráfico desta função. Será contínua esta função?
Alunos: Não.
E: Não? Então vamos lá a ver uma coisa. A Ana ao bocado disse que esta função era contínua, mas era só porque estava a crescer porque os valores oscilavam. Então esta função está sempre a crescer!
Ana: Mas tem um intervalo no meio.
E: Tem um intervalo no meio? Como assim?
Ana: Tem aí um objecto que não tem imagem.
E: Tem, tem. Se aqui for um número "*a*" a imagem é aqui. (acrescenta no gráfico)



Tem, tem. Tem sim senhor.
Aluno: Essa já é descontínua.
E: Esta é descontínua. Porque será?
Aluna: Porque dá um pulo.
E: Ah, porque dá um pulo! Pois bem.
Então é assim. Em termos gráficos, eu digo que uma função é contínua quando eu traço a função toda, e só levanto o giz ou o lápis depois da função estar traçada.
(traça novamente o gráfico que estava no quadro marcando por cima do que já lá se encontrava)



Esta função, não (refere-se ao gráfico da função descontínua em *a*). Vem aqui traçada e depois tem que dar um salto (volta a traçar o gráfico da função descontínua, evidenciando o *salto* em *a*)
E: (toca a campainha e a aula termina) Bom fim-de-semana.

<u>Fim da transcrição</u>

Classificação dos Exemplos e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Para a introdução do conceito de função contínua, a professora utiliza dois *exemplos não planeados de conceito*. Ambos se apresentam na faceta geométrica que é *transparente* no que respeita ao conceito de função contínua. O primeiro exemplo é a mesma função que foi utilizada para construir a tabela de variação de uma função utilizada imediatamente antes (cf. episódio11); o segundo exemplo é criado espontaneamente. Os dois exemplos pertencem claramente à 1ª Categoria, **Definição/Apresentação**. A escolha estratégica da professora para a introdução do conceito é indutiva, primeiro expõe os exemplos e, só no fim do episódio, apresenta aos alunos a definição intuitiva de função contínua num intervalo. Os exemplos apresentados são extremamente simples mas eficazes e usados em contraste: o primeiro é um exemplo de função contínua ao invés do segundo que é um não-exemplo.

O diálogo que se estabelece com a aluna Ana, em particular, e com a generalidade dos alunos matiza o sentido indutivo da apresentação do conceito. Através dos pormenores que a professora evidencia, os alunos vão-se apercebendo dos aspectos que estão em causa, o processo fica claro quando a professora apresenta o não-exemplo. Durante este exemplo, o **Conhecimento Pedagógico Do Conteúdo** pode ser descrito em alguns traços mostrados pela professora.

Claramente CPC:

- a professora utiliza o termo *continuidade* no sentido quotidianamente utilizado na linguagem natural para introduzir, de forma intuitiva, o conceito de função contínua num intervalo. Esta técnica, como se sabe, é bastante utilizada e pretende envolver os conhecimentos prévios dos alunos para uma abordagem informal do conceito de continuidade (Cat. **Estratégias de Ensino**): "*Mas já agora, digam-me lá. O que é para vocês, na prática, o que é uma coisa ter … quando é que uma coisa tem* continuidade*?*"
- utiliza os termos empregues pelos alunos para melhor lhes transmitir a *imagem do conceito* de continuidade e utiliza analogias que sejam de compreensão fácil (Cat. **Pensamento do Estudante**): "Aluno: *Essa já é descontínua.*

  E: *Esta é descontínua. Porque será?*

  Aluna: *Porque dá um* pulo.

  E: *Ah, porque dá um* pulo*! Pois bem.*

  Então é assim. Em termos gráficos, eu digo que uma função é contínua quando eu traço a função toda, e só levanto o giz ou o lápis depois da função estar traçada."
- como todo o episódio descreve, a professora apresenta e trata dois gráficos de funções de forma a ilustrar o conceito de continuidade (e de descontinuidade) (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**).
- Durante o diálogo, uma aluna confunde a descontinuidade num ponto com a ausência de imagem de um dado elemento do eixo horizontal. A professora volta a explicar à aluna como se observa num gráfico a imagem de um objecto, no processo acrescenta ao gráfico as indicações de objecto *a* e da respectiva imagem *f(a)* (Cat. **Explicações**): "Ana: *Mas tem um intervalo no meio.*

  E: *Tem um intervalo no meio? Como assim?*

  Ana: *Tem aí um objecto que não tem imagem.*

  E: *Tem, tem. Se aqui for um número "a" a imagem é aqui. Tem, tem. Tem sim senhor.*"
- Usa exemplo, o segundo exemplo deste episódio, para ilustrar uma situação de descontinuidade (Cat. **Conhecimento de Exemplos**).

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:

- utiliza a faceta geométrica - o gráfico - e identifica o não levantamento do giz como componente fundamental para estudar a continuidade da função (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**).

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:
- pergunta a opinião dos alunos sobre o conceito quotidiano de continuidade e, desta forma, consegue captar a sua atenção para um tratamento matemático do conceito (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**): "*O que é para vocês, na prática, o que é uma coisa ter ... quando é que uma coisa tem* continuidade*? (…) Então, olhando para este gráfico que eu tenho aqui no quadro, vocês diriam que a função é contínua?*"
- dá ênfase às características em estudo quando volta a traçar os gráficos por cima dos existentes marcando o facto de não levantar o giz no primeiro gráfico e de o facto de ter que levantar o giz quando traça o segundo (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).

Uso dos Exemplos
Estes dois *exemplos espontâneos* apresentados na faceta geométrica, sendo contrastantes, são complementares. Assim, o conceito de descontinuidade deriva do conceito de continuidade numa perspectiva formal, porém de um ponto de vista intuitivo a indicação do conceito primário não será tão evidente. Neste episódio fica claro que o uso do *não-exemplo* para função contínua, que é um exemplo de função descontínua, foi aquele que foi o esclarecedor e que levou à generalização. Podemos supor que após este não-exemplo de função contínua os alunos não teriam dificuldade em distinguir muitos casos de continuidade e de descontinuidade, embora mais casos não tenham sido apresentados por, entretanto, a aula ter terminado. Também no episódio, podemos apreciar o papel fundamental de um não-exemplo, é ele que expõe a característica fundamental de uma função que não é contínua, *o salto*, delimitando, assim, o conceito.
A ausência de uma definição formal ou informal do conceito de função não impediu os alunos de diferenciarem ocaso de continuidade do de descontinuidade. Utilizando os conhecimentos quotidianos prévios dos alunos, de forma indutiva a professora expõe as características em questão colocando lado a lado um exemplo e um não-exemplo do conceito. Só depois de avaliar a generalização obtida pelos alunos a professora sistematiza com uma definição informal, por intuitiva, do conceito de continuidade baseada na *transparência* oferecida pela faceta geométrica.
Por último, evidencie-se a utilização do último exemplo do episódio anterior, o episódio 11, como primeiro exemplo deste episódio 12. O mesmo caso serve como *exemplo planeado de processo* de construção da tabela de variação de uma função e também de *exemplo espontâneo de conceito* de função contínua num intervalo. Veja-se como o mesmo caso pode assumir diferentes tipos de exemplificação, dando força ao sentido de exemplo pelo uso e não pelo próprio caso em si.

Esmeralda: **Episódio 13**
Dia: **26 Janeiro 07**

Início: **LA 2 min 23 Seg.**
Fim: **LA 7 min 47 Seg.**

Manual: **Página 45**

Exemplo Planeado tratado pelos alunos e pela professora

Esmeralda: Vamos rapidamente fazê-lo [questão 3.] agora.

3. Considere as funções *f*, *g* e *h* definidas por: $f(x) = x + 3$ e $g(x) = 2x + 3$ e $h(x) = -5x + 3$ E represente-as no mesmo referencial. O que observou?

E: Olhando para as equações o que é que vocês observam?
Alunos: Todas têm o +3.
E: Isso significa que elas vão ter todas, o quê?
Alunos: O mesmo valor.
E: No eixo dos…
Alunos: … yy.
E: Ou seja, a ordenada na origem tem o mesmo valor em todas as rectas. Portanto, todas as rectas vão intersectar o eixo dos yy num ponto de coordenadas…
Alunos: (0;3).
E: … (0;3). Sim senhor. Então vá, rapidamente vamos lá fazer isso.
(a professora assiste os alunos individualmente e, outras vezes, assiste todos os alunos em geral sobre como funcionar com a máquina de calcular gráfica)
E: Bom, toda a gente verificou o que dissemos oralmente? Que as nossas rectas, todas elas, passam pelo ponto de coordenadas (0;3)?
(os alunos confirmam)
E: Pronto. Então, temos que dizer exactamente isso: que todas as rectas intersectam o eixo OY, ou o eixo dos yy que é a mesma coisa, no ponto de coordenadas (0;3).
Já está Mário?
(o aluno confirma)

Fim da transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O exemplo apresentado pela professora visa o tratamento específico de um aspecto do conceito de função, a ordenada na origem. O exemplo é apresentado na faceta simbólica mas relaciona esta faceta com a faceta geométrica e, deste modo, focaliza a atenção dos alunos na relação que existe entre um elemento da equação reduzida da recta, b=3, com um ponto do seu gráfico, a intersecção com o eixo dos *yy* em (3;0). Assim, este *Exemplo Planeado De Conceito* enquadra-se na 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**. O aprofundamento no conceito de função, mais propriamente quando apresentado na faceta simbólica, consiste em estabelecer a *transparência* do

elemento *b*, da equação reduzida da recta, relativamente à ordenada na origem da recta – ponto de intersecção com o eixo dos *yy* – de modo que, a partir deste momento, essa *transparência* seja vista e utilizável pelos alunos.
Sendo um episódio com apenas alguns minutos, podem ser, contudo, observados alguns aspectos do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** da professora.
Claramente CPC:

- no diálogo inicial com os alunos a professora utiliza a resposta dos alunos para os orientar na relação que pretende estabelecer, que o mesmo valor de *b* traduz a mesma intersecção do eixo dos *yy* pela recta que a equação define (Cat. **Estratégias de Ensino**).
- a relação que a professora estabeleceu envolve dois elementos importantes da equação reduzida da recta e do gráfico que a equação define (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*Ou seja, a ordenada na origem tem o mesmo valor em todas as rectas. Portanto, todas as rectas vão intersectar o eixo dos yy num ponto de coordenadas (...) (0;3).*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:

- para a resolução da questão, e também para atingir o objectivo da actividade, a professora e os alunos identificam os elementos chave: o valor de *b* e a intersecção com o eixo dos *yy* (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**).
- o relacionar das duas noções estabelece conexões entre dois conteúdos anteriormente leccionados (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**).

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- todo o diálogo se destina a focalizar a atenção dos alunos no objectivo para o qual o exemplo foi utilizado (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**)
- pode ser observado que, no início do episódio, a professora agrega a atenção de todos os alunos numa mesma característica da equação e, no final do episódio, conclui e estabelece uma resposta à questão (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).

Uso do Exemplo

O uso deste exemplo tem, claramente, o objectivo de apresentar aos alunos a relação entre o valor da ordenada na origem e a intersecção da recta com o eixo dos *yy*. Ao atingir este objectivo, a professora consegue que para os alunos a ordenada na origem *b*, na equação reduzida da recta, passe a ser *transparente* relativamente à intersecção do gráfico – recta – com o eixo dos *yy*.
Para conseguir este propósito a professora utiliza uma das *Dimensões de Variação Possíveis* da equação reduzida da recta. Nesta equação existem duas destas dimensões, o declive e a ordenada na origem e, no presente exemplo, foi trabalhada a segunda. Como é óbvio, a *Amplitude de Mudança Permitida* inclui-se no conjunto dos números reais mas, no exemplo, para aprofundar a noção de ordenada na origem, opta-se pela

invariância. Isto é, mantém-se *invariante* o elemento em causa e faz-se variar a outra dimensão, o declive. Deve ser realçado o facto que, relativamente à *Dimensão de Variação* declive, a *Amplitude de Mudança Permitida* é também em $\mathbb{R}$ mas o monómio do qual o valor do declive é coeficiente deve ser mantido, forçosamente, no 1º grau. Se se quiser, podemos tomar como *Dimensão de Variação* o monómio do 1º grau e, assim, a *Amplitude* utilizada foi: x, $2x$ e $-5x$.

No final do episódio a professora indica aos alunos a resposta a dar à questão. Ao fazê-lo, estabelece a conclusão e atinge o objectivo da utilização do exemplo, para os alunos a ordenada na origem deverá ser *transparente* relativamente ao ponto de intersecção com o eixo dos *yy* e, com isso, adicionar mais um aspecto à *imagem do conceito* dos alunos e também *Amplia os Espaços de Exemplos* dos alunos.

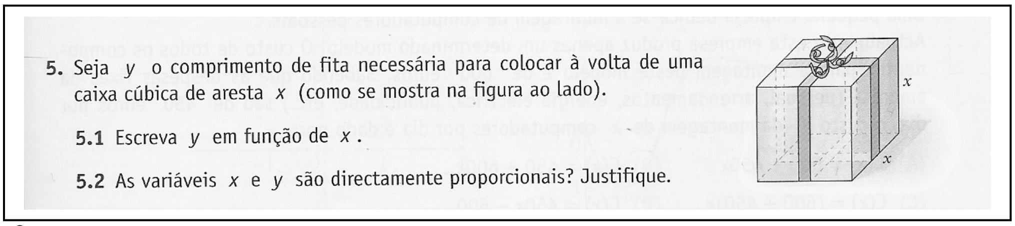
Esmeralda: **Episódio 14**
Dia: **26 Janeiro 07**

Início: **LA 7 min 53 Seg.**
Fim: **LA 14 min 17 Seg.**

Manual: **Página 45**

Exemplo Planeado tratado pelos alunos e pela professora

Esmeralda: E agora vamos pensar no exercício 5 que é um problema. Vamos tentar resolvê-lo.



5. Seja y o comprimento de fita necessária para colocar à volta de uma caixa cúbica de aresta x (como se mostra na figura ao lado).

5.1 Escreva y em função de x.

5.2 As variáveis x e y são directamente proporcionais? Justifique.

E: Diga?
(um aluno informa a professora que já o resolveu)
E: Já está resolvido? Deixe os seus colegas pensar um bocadinho sobre ele.
(Pausa de aproximadamente 2 minutos. A professora assiste os alunos individualmente.)
E: Ora então já leram o problema? O problema diz o seguinte: "*Seja y o comprimento de fita necessário para colocar à volta de uma caixa cúbica de aresta x, como se mostra na figura ao lado. Escreva y em função de x.*"
O que é que escrevemos?
Patríc
E: A Patrícia diz (escreve no quadro): $y = 8x$. E os outros o que é que dizem? Concordam, ou não concordam?
Aluna: $y = 6x$
E: A 6. Hum. Então, significa que nós só vamos precisar de 6 troços de fita de comprimento x. Certo? É isso?
Patrícia: Não.
E: Não. A Patrícia diz: não.
Aluno: É que em cima e aqui em baixo passa duas vezes.
E: Nem mais. Já toda a gente se localizou? É 8 ou é 6?
Alunos: 8.
E: Certíssimo.
5.2 As variáveis x e y são directamente proporcionais? Justifique.
Nós ontem falámos na proporcionalidade. Lembram-se?
Alunos: Sim.
E: Então, são ou não directamente proporcionais?
Alunos: Sim.
Outros alunos: São.
E: Sim, porque…?
Aluna: Porque quando o x aumenta, também o y tem que aumentar.
E: Ora foi exactamente a mesma resposta que ontem o Miguel me deu. Lembram-se?
O Miguel disse assim: *São, são directamente proporcionais. Quando uma aumenta a outra também aumenta.* E eu depois argumentei qualquer coisa que demonstrou que o aumentar não significa… seja, o facto de as duas incógnitas estarem a aumentar, ou a diminuir, não implica que haja proporcionalidade directa. Porque para haver proporcionalidade directa tem que existir uma outra coisa.

Aluna: Tem que ter uma constante de proporcionalidade.
E: Tem que ter uma constante de proporcionalidade, que eu até expliquei que se nós dividíssemos os valores de y pelos valores de x, na situação da aula anterior, nós não íamos obter sempre o mesmo resultado. Ou seja, eu não conseguia chegar a uma constante de proporcionalidade.
No meu caso eu consigo. E quanto é a minha constante de proporcionalidade?
Alunos: 8.
E: 8. Portanto, a resposta que nós temos de dar à questão é: São directamente proporcionais. As variáveis são directamente proporcionais. Ponto final. Existe k pertencente a R (escreve no quadro: $K \in \mathbb{R}$) … existe k pertencente a R, tal que y igual a k x (escreve no quadro: $y = kx$). Vírgula. Sendo k=8 a constante de proporcionalidade directa.

Fim da transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O exemplo apresentado pela professora insere-se na 5ª Categoria, **Aplicações Externas**. É, na primeira alínea, uma aplicação a uma situação da vida real em que o tamanho da fita pode ser expresso à custa da aresta da caixa cúbica. A segunda alínea, vista de forma isolada, poderia ser incluída na 4ª Categoria mas tendo em consideração o contexto do problema também ela deve ser inserida na mesma categoria da primeira alínea. Portanto, como um todo, o exemplo é uma aplicação externa do conceito de função e, também, do conceito de proporcionalidade directa.
A resolução deste exemplo proporciona uma boa situação de aprendizagem pois envolve professora e alunos numa actividade conjunta onde sobressaem vários aspectos do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** da docente (Chick, 2007).
Claramente CPC:

- a professora, ao dialogar com os alunos, estabelece raciocínios característicos da aplicação de conceito de função (Cat. **Pensamento do Estudante**):
  "Aluna: $y = 6x$
  Esmeralda: *A 6. Hum. Então, significa que nós só vamos precisar de 6 troços de fita de comprimento x. Certo? É isso?*"
- com o desenrolar da actividade uma aluna justifica a existência de proporcionalidade directa com o facto de que uma variável cresce quando a outra cresce. Por tal, a professora discute as características da proporcionalidade directa para que a aluna evolua na sua concepção (Cat. **Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas**):
  "Aluna: *Porque quando o x aumenta, também o y tem que aumentar.*
  E: *Ora foi exactamente a mesma resposta que ontem o Miguel me deu. Lembram-se? O Miguel disse assim:* São, são directamente proporcionais. Quando uma aumenta a outra também aumenta. *(...).*"
- perante uma resposta incorrecta de uma aluna, incidente no aspecto principal da variação entre as duas variáveis, a professora chama a atenção para o aspecto chave do problema (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*A 6. Hum. Então, significa que nós só vamos precisar de 6 troços de fita de comprimento x. Certo? É isso?*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:

- no desenrolar do episódio são identificados os componentes matemáticos críticos do conceito de função e do conceito de proporcionalidade que são fundamentais à aplicação desses conceitos (Cat. **Desmonta o Conceito em Componentes Chave**): "*...significa que nós só vamos precisar de 6 troços de fita de comprimento x. Certo?*"; "*Tem que ter uma constante de proporcionalidade, que eu até expliquei que se nós dividíssemos os valores de y pelos valores de x, na situação da aula anterior, nós não íamos obter sempre o mesmo resultado. Ou seja, eu não conseguia chegar a uma constante de proporcionalidade.*"
- no tratamento deste exemplo são relacionados dois conceitos, o de função e o de proporcionalidade directa. Embora, como se sabe, o segundo é subconceito do primeiro (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**).
- pela forma como dialoga com os alunos e faz referência aos aspectos chave do exemplo mostra habilidade na resolução do problema (Cat. **Conhecimento Procedimental**)

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- a forma de tratamento do exemplo privilegia o diálogo com os alunos. Com esta estratégia a professora mantém a atenção dos alunos centrada nos aspectos principais do exemplo (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**).
- no caso deste exemplo, nota-se o cuidado que a professora tem ao introduzir e em finalizar o tratamento do exemplo. No início, lê o enunciado de forma pausada e, no fim, dita a resposta e escreve a simbologia no quadro. Desta forma os alunos entendem o que se pretende resolver e, no final, têm a resposta redigida de forma correcta, não sendo deixado ao seu cuidado esta redacção (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).

Técnica de sala de aula: lê pausadamente o enunciado do problema e, depois, dita a resposta.

Uso do Exemplo

O exemplo apresentado aos alunos destina-se a aplicar o conceito de proporcionalidade directa, que é um subconceito do conceito de função visto que relaciona duas quantidades.
O seu uso teria um desenrolar banal se não fosse o surgimento de uma concepção alternativa por parte de uma aluna. Na forma como a professora tratou a situação, não foram tratados casos em que na relação entre duas quantidades que crescem simultaneamente não se verifica a existência da constante de proporcionalidade, contudo, a referência a uma situação anterior idêntica posiciona a aluna nesse contexto e permite que ela identifique a constante de proporcionalidade no actual contexto. Embora, na relação $y = 8x$, não tivesse sido calculada essa constante em casos particulares, a professora pressupôs a evolução da aluna na sua concepção considerando que a resposta 8 é a correcta.
Em síntese, o uso deste exemplo põe em evidência uma concepção alternativa de um aluno e permite que essa concepção evolua para uma compreensão e para um conhecimento correcto.

Esmeralda: **Episódio 15**
Dia: **26 Janeiro 07**

Início: **LA 16 min 00 Seg.**
Fim: **LB 5 min 16 Seg.**

Manual: **Página 48**

Sequência Planeada de Exemplos Planeados tratados pelos alunos

Esmeralda: Na página 48. Vamos resolver uma alínea de cada uma das alíneas que temos aqui. Ou seja, vamos começar pela 1.1 e vamos calcular o $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

1. Considere as funções *f* e *g* definidas, respectivamente, por: $f(x) = 1 - 2x^2$ e $g(x) = \frac{2-x}{3x}$ Calcule: 1.1 $f(1)$; $f(-1)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 1.2 $g(1)$; $g(-1)$; $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ 1.3 $f(a)$; $f(x-1)$; $f\left(\frac{x}{2}\right)$ 1.4 $g(a)$; $g(x-1)$; $g(2t)$

(pausa para os alunos trabalharem. A professora apoia individualmente cada aluno)

E: Já está o exercício resolvido, não?

(como ainda há alunos a trabalhar, a professora assiste-os individualmente)

E: Já está a primeira questão resolvida? "*Considere as funções f e g definidas, respectivamente, por* $f(x) = 1 - 2x^2$ *e* $g(x) = \frac{2-x}{3x}$*, calcule:*". Eu quero que vocês calculem $f\left(-\frac{1}{2}\right)$. As outras duas, vocês fazem em casa e se houver problemas nós resolvemos.
$f\left(-\frac{1}{2}\right)$, (pausa), já está, ou não? Venha lá fazer Carina. Vá lá, rápido!

(a Carina vai ao quadro calcular o valor da expressão. Apaga o quadro e escreve os cálculos)

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{2^2}{2}$$

E: Calma. Afaste-se lá, se faz favor. Afaste-se lá. Olhem lá para o quadro, e digam-me lá se tudo… desvie-se, Carina, que eles ali não vêem, se faz favor … se tudo o que ela aqui tem feito se está correcto?
Alunos: Não, não.
E: Porque…?
Alunos: Por causa do quadrado.

E: Primeiro calculamos o quadrado. Nunca podemos fazer multiplicações do valor que está fora duma potência pelos valores que estão dentro da potência, ou abrangidos pela potência.
(a aluna rectifica e pergunta se assim está bem)
E: Não sei. Feche lá os parênteses e mostre aos seus colegas.
E: Ela escreveu isso.
(no quadro está $f\left(-\frac{1}{2}\right)=1-2\left(-\frac{2}{4}\right)$)
E: Está correcto?
Alunos: Não.
E: Pois não. Quanto é que é $-\frac{1}{2}$ ao quadrado?
Alunos: É um quarto.
E: É um quarto. Não é $-\frac{1}{4}$, Carina.
Carina: Esqueça, esqueça…!
E: Não posso esquecer. Se não você depois também não se lembra. Menos um meio vezes menos um meio, dá um quarto. Eu estou cansada, já disse isto mais de mil vezes. Sempre que o expoente de uma potência é par o resultado é sempre positivo. Siga.
E falta-lhe aí o equivalente. Equivalentes. Aí, em cima, deste lado.
(A aluna escreve os sinais de equivalente e também $f\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{2}{4}$)
E: Para a frente. Passe para a frente senão eles ali atrás não vêem. Aqui, um equivalente e continua nessa linha.
(a aluna passa para o lado direito do quadro e em cima)
Não, apague isso. Escreva em frente da última linha. F de menos um meio igual ….
Vai repetir outra vez para quê? Ah, está bem.
(a aluna completa os cálculos de forma incorrecta e obtém o resultado $f\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right)=2-1\Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right)=1$ porque elimina denominadores)
E: Afaste-se lá. Está tudo bem o que ela ali tem?
Aluna: Está errado.
E: Está correcto? Não?
Aluna: Faltam os 2.
E: Falta ali o denominador.
Carina: Mas …
E: Querida, eu não estou a resolver uma equação onde reduza tudo ao mesmo denominador e possa retirar os denominadores. Isto é um cálculo numérico, eu não posso tirar os denominadores.
(a aluna rectifica, introduz o denominador dois e obtém o resultado correcto $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$)
E: Percebem-se as notas que a gente tem. Não é?
Deu isto a toda a gente? $\frac{1}{2}$
Cuidado Carina, cuidado. Nós andámos aqui, no 1º período, a resolver equações, trabalhámos com expressões algébricas, trabalhámos com expressões numéricas, expliquei em todas elas o que é que os meninos e meninas deviam fazer. Mas não, continuamos a cometer os mesmos erros.
João: Podia-me dizer o que está ali.
E: O quê João? Aqui?
João: Deixe-se estar que eu assim já vejo. (o reflexo da janela no quadro não permite ao aluno ver o que lá está escrito)
E: Ah! Eu tenho que fazer sombra! Então vá despache-se!

Quem já passou e já fez este pode passar à 1.2, calcular o $g\left(-\frac{1}{2}\right)$. As outras depois fazem… as outras são mais simples, vocês normalmente têm dificuldade é com fracções.
Aluna: É para fazer o quê, professora?
E: Calcular $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.
Vanessa: Venha cá, se faz favor.
E: Já vou. Já está João? Já me posso afastar?
João: Espere só um bocadinho, se faz favor.
(pausa para os alunos calcularem $g\left(-\frac{1}{2}\right)$)
João: Já pode sair professora.
(a professora dirige-se à aluna que a chamou)
E: Diga Vanessa. (apoia apenas a Vanessa nos cálculos)
Já estão a calcular $g\left(-\frac{1}{2}\right)$?
(pausa)
Já alguém calculou o $g\left(-\frac{1}{2}\right)$?
Aluna: Já.
E: Quem? Inês, vá lá fazer se faz favor.
(a Inês levanta-se, vai ao quadro, mas não apaga os cálculos anteriores porque alguém ainda não passou e calcula $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ no canto superior direito do quadro)

$$g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2-x}{3x}\Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2+\frac{1}{2}}{3\left(-\frac{1}{2}\right)}\Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}}$$

E: Então e sem papel? Não consegue fazer? (refere-se ao caderno diário que a aluna levou para o quadro e de onde copia os cálculos)

Inês: Consigo. (põe o caderno atrás das costas e escreve $\Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{5}{2}}{-\frac{3}{2}}$ mas com as fracções desalinhadas com o sinal de “ = “)
E: Então vá.
Olhe, eu não gosto desse tipo de indicações assim. Já devia saber. Ora nem mais! Este traço de fracção é o que divide as duas fracções. Não é? É divisão de divisão, portanto deve fazê-lo correctamente.
(a aluna apaga e escreve as expressões de forma correcta, com os traços de fracção principais alinhados com os sinais de “ = “)
E: Sim senhor.

(a Inês escreve $g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{5}{2}}{-\frac{3}{2}}\Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{10}{5}\Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$)
Inês: Está certo?
E: 2? Não… não… nem sequer dá 10 terços.
Inês: É quintos!

E: Meios por meios e extremos por extremos (refere-se à forma de dividir fracções por meio de uma regra), a sua expressão… se tem…

(escreve no quadro $\frac{\frac{5}{2}}{-\frac{2}{3}} = \frac{5}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{10}{6}$)

Inês: Sim.

E: Inês, $-\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$.

Inês: Está bem.
E: Percebido?
(a Inês acena em sinal de que percebeu)
Tânia: Professora, o que é que diz ali por baixo daquela expressão, ali no denominador…
E: Onde Tânia? Aqui?
Tânia: Sim. Ali no denominador…
E: A seguir ou esta?
Tânia: Na de cima…
E: Esta? Ali?
Tânia: Onde estava.
E: Por favor! Aqui! O que é que diz?
Tânia: Sim, no denominador.
E: Não diz nada, está lá escrito! Menos três meios.
Tânia: É isso. Obrigada.
E: Então quanto é que dá 3 vezes 1?
Tânia: Dá três.
E: Dá três?
Tânia: Não…?
E: Não!?
Tânia: Ah sim, dá!
E: Então já sabe, tem que lá estar menos três meios ($-\frac{2}{3}$).
Tânia: Mas não parece.
E: Pronto, pode não parecer, mas é o que tem que lá estar. Se o exercício está correcto… se o resultado é o correcto… portanto…
Quem já fez este pode ir começando a pensar na 1.3, o $f(a)$ vai para trabalho de casa, e vamos pensar no $f(x-1)$. Pensem lá no que devemos fazer para calcular o $f(x-1)$.
Aluna: É qual, professora?
E: $f(x-1)$ na 1.3.
(pausa para os alunos trabalharem. A professora apoia os alunos individualmente)
E: Já posso apagar o quadro? Já está Filipa? (a professora apaga o quadro todo) E já pensaram como é que vamos calcular o $f(x-1)$?
Patrícia: Resolvemos primeiro o quadrado.
E: Diz a Patrícia que resolvemos primeiro o quadrado. Se calhar, antes de resolver o quadrado, vamos calcular o quadrado ou desenvolver o quadrado, tenho que fazer alguma coisa.
Alunos: É o x-1, substituir.
E: Ah, muito bem. A primeira coisa que nós temos que fazer é ir à função $f(x)$ e, onde está x, colocarmos por x-1. Portanto fica um menos dois vezes x menos um ao quadrado (escreve no quadro $f(x-1) = 1 - 2 \times (x-1)^2$) e agora, sim senhora, como a Patrícia diz, vamos ter que desenvolver aquele quadrado, é o quadrado de uma diferença. Como é que se desenvolve?

Alunos: Quadrado do primeiro mais o dobro do quadrado do segundo (alguma confusão) …
E: Ai, ai, ai, ai, ai… devagarinho. (acompanhada pelos alunos) O quadrado do primeiro, menos – é o quadrado da diferença – menos o dobro do primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo. Sim senhor, então vamos a isto:
$f(x-1)=1-2\times(x-1)^2=1-2(x^2-2x+1)$
E agora, o que é que fazemos mais? Ou não podemos fazer mais nada.
Posso? Fazer o quê?
Aluna: Multiplicar aquele 2.
E: Multiplicamos, sim senhor. Por 2 ou por-2?
Alunos: -2
E: Então vai ficar: $f(x-1)=1-2\times(x-1)^2=1-2(x^2-2x+1)=1-2x^2+4x-2$
Posso ainda fazer mais alguma coisa? Tenho ali monómios semelhantes?
Alunos: Somar os números.
Outros alunos: O 1 e o -2
E: O -2 e o 1. E então isto vai ficar como? (completa no quadro os restantes cálculos e obtém, $f(x-1)=1-2\times(x-1)^2=1-2(x^2-2x+1)=1-2x^2+4x-2=-2x^2+4x-1$)
Posso fazer mais alguma coisa?
Alunos: Não.
E: Já não tenho mais monómios semelhantes, pois não? Fica assim o exercício.
Acabou, está resolvido.
Miguel: Não dá para fazer cálculos auxiliares?
E: Para quê Miguel? Não estou a calcular … Ou melhor, não estou à procura de soluções. Eu estou à procura do $f(x-1)$, não estou à procura do $f(x)=0$ ou do $f(x-1)=0$. Para aplicar a fórmula resolvente das equações do 2º grau, significava que eu estava à procura dos zeros e não é isso que eu pretendo.
Ouviu tudo o que eu disse, não foi Rita?
Rita: Sim, professora.
E: Bem me parecia.
Ora então. Se entenderam, sabem que o $f\left(\frac{x}{2}\right)$ se faz exactamente da mesma maneira. Não vou fazer, vai para trabalho de casa.
Vamos à *g*, e na *g* vamos começar por resolver, destes três, o $g(2t)$, calcular $g(2t)$.
(pausa para os alunos calcularem a expressão de $g(2t)$. A professora apoia os alunos que o desejem)
E: Olhem, aumentou o volume do som. Não percebo porquê. Do som que nem devia existir. Carina, já está o exercício feito? Já?
Carina: Mais ou menos.
E: Não há mais ou menos. Ou está, ou não está.
Carina: Não sei se está bem.
Helena: Fica assim?
E: Fica. Vá lá fazer Helena.
(a Helena vai fazer ao quadro: 1.4 $g(2t)=\frac{2-2t}{3\times 2t}\Leftrightarrow g(2t)=\frac{2-2t}{6t}\Leftrightarrow g(2t)=\frac{1-1t}{3t}$)
E: (verbaliza os cálculos efectuados) … divide por dois e temos a expressão simplificada. Deu isto a toda a gente? Houve dúvidas?
Aluna: não é preciso estar ali o outro 1, pois não?
E: Como?
Aluna: Antes do *t*, não é preciso estar lá o 1, pois não?
E: Não. Basta o *t*. (acrescenta no quadro
$g(2t)=\frac{2-2t}{3\times 2t}\Leftrightarrow g(2t)=\frac{2-2t}{6t}\Leftrightarrow g(2t)=\frac{1-1t}{3t}=\frac{1-t}{3t}$)
Já vimos que $1t$ ou t, $1x$ ou x, $1a$ ou a, é exactamente a mesma coisa. Está bem?

Fim da transcrição

Classificação dos Exemplos e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Ao longo do episódio podemos distinguir dois pares de exemplos. O primeiro par é constituído pelos exemplos $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ e $g\left(-\frac{1}{2}\right)$, sendo o segundo constituído por $f(x-1)$ e $g(2t)$. Os dois primeiros são *exemplos planeados* da 2ª Categoria, **Abordagem Inicial Autónoma**, enquanto os dois últimos são *exemplos planeados* da 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**.

Os dois primeiros não são mais que uma concretização de variável nas duas funções, não apresentam dificuldade de maior mas, mesmo assim, a aluna que fez uma das concretizações no quadro, eliminou erradamente os denominadores nos cálculos. Por isso, estes dois exemplos cumpriram o seu fim, ajudou a aluna a superar as suas dificuldades e promover uma maior autonomia da aluna no cálculo.

Já os dois últimos exemplos constituem casos de funções compostas que não são apresentadas como tal (o caso da função composta é tratado formalmente a penas no ano seguinte, o 11º ano), a concretização não é numérica mas sim com uma outra expressão algébrica. Embora esta concretização tenha sido obtida com alguma facilidade por uma das alunas, Helena, não é liquido que todos os outros alunos o tenham feito com a mesma facilidade. De qualquer modo, o mostrar aos alunos que, além de numérica, a concretização pode manter a variável ou incluir uma mudança de variável constitui um aprofundamento do conceito de função na sua faceta simbólica.

O **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** da professora é evidenciado quando surgem procedimentos categorizados por Chick (2007).

Claramente CPC:

- a professora recorda a uma aluna as prioridades das operações numéricas: "*Primeiro calculamos o quadrado. Nunca podemos fazer multiplicações do valor que está fora duma potência pelos valores que estão dentro da potência, ou abrangidos pela potência.*"; recorda, também, que o sinal de uma potência de expoente par é sempre positivo: " *(...), já disse isto mais de mil vezes. Sempre que o expoente de uma potência é par o resultado é sempre positivo.*"; recorda, ainda, o desenvolvimento do quadrado do binómio: " *Ai, ai, ai, ai, ai... devagarinho.* (acompanhada pelos alunos) *O quadrado do primeiro, menos – é o quadrado da diferença – menos o dobro do primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo. Sim senhor (...)*"; (Cat. **Estratégias de Ensino**).
- quando, no cálculo da expressão numérica de $g\left(-\frac{1}{2}\right)$, surge uma divisão de uma fracção por outra a professora utiliza a mesma regra prática que a aluna (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*Meios por meios e extremos por extremos (...)*".
- No decorrer deste episódio acontecem três erros muito comuns, em muitos estudantes, e que surgem em diversas situações. A primeira situação corresponde àquela em que uma aluna efectua um quadrado indicando o seu sinal como negativo. A segunda, quando a mesma aluna elimina denominadores no cálculo de $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ como se de uma equação se tratasse. A terceira, em que

um aluno confunde o cálculo de $f(x-1)$ com a resolução da equação $f(x-1)=0$. Em todas as situações a professora detecta o erro e ajuda os alunos a superar as dificuldades (Cat. **Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas**): "*Sempre que o expoente de uma potência é par o resultado é sempre positivo.*"; "*Querida, eu não estou a resolver uma equação onde reduza tudo ao mesmo denominador e possa retirar os denominadores. Isto é um cálculo numérico, eu não posso tirar os denominadores.*"; "*Para quê Miguel? Não estou a calcular ... Ou melhor, não estou à procura de soluções. Eu estou à procura do $f(x-1)$, não estou à procura do $f(x)=0$ ou do $f(x-1)=0$. Para aplicar a fórmula resolvente das equações do 2º grau, significava que eu estava à procura dos zeros e não é isso que eu pretendo.*".

- porque se trata de uma função composta, embora tal não possa ser referido no 10º ano, a professora sabe que será complicado para os alunos executarem o primeiro passo, a substituição de *x* por *x*-1 na determinação de $f(x-1)$. Assim, chama a atenção para esse passo (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*Ah, muito bem. A primeira coisa que nós temos que fazer é ir à função $f(x)$ e, onde está x, colocarmos por x-1.*".
- quase todo o episódio é composto por breves situações onde a professora explica os vários procedimentos que devem ser realizados (Cat. **Explicações**).

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:

- no cálculo de $f(x-1)$, a professora realça a substituição de *x* por *x*-1 como sendo um aspecto fulcral e, após isso, relembra a importância da aplicação do desenvolvimento do quadrado do binómio (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*Ah, muito bem. A primeira coisa que nós temos que fazer é ir à função $f(x)$ e, onde está x, colocarmos por x-1.*"; "*O quadrado do primeiro, menos – é o quadrado da diferença – menos o dobro do primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo.*".
- quando, no quadro, a aluna executa os cálculos para a obtenção de $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ a professora relaciona este tipo de cálculo com o sinal da potência e com a paridade do expoente dessa potência (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**): "*É um quarto. Não é $-\frac{1}{4}$, Carina. (...) Sempre que o expoente de uma potência é par o resultado é sempre positivo.*"

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- o episódio é, quase na totalidade, composto por um diálogo – com um aluno ou com toda a turma – com o intuito de manter viva a interacção com os alunos (Cat. **Obtenção e Conservação da atenção dos Alunos**).
  no início do episódio a professora indica e explica exactamente o que se pretende da actividade apresentada (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**): "*Eu quero que vocês calculem $f\left(-\frac{1}{2}\right)$. As outras duas, vocês fazem em casa e se houver problemas nós resolvemos.*". No fim de cada questão conclui e verifica se não

persiste alguma dúvida por parte de algum aluno: "*Já não tenho mais monómios semelhantes, pois não? Fica assim o exercício. Acabou, está resolvido*.", "*Deu isto a toda a gente?* $\frac{1}{2}$ *?*".

Uso do Exemplo

Os exemplos escolhidos pela professora promovem o aumento da destreza no cálculo de imagens de determinado objecto numa dada função. Nos dois primeiros exemplos numa vertente estritamente numérica mas, nos dois últimos, mantendo – ou alterando – a variável. Estes dois últimos visam a introdução elementar da função composta que será leccionada no ano lectivo seguinte.
Esta sequência de exemplos apresenta uma variação apreciável em duas *Dimensões de Variação*. Embora a actividade consista em encontrar as imagens dos objectos indicados, esses objectos podem ser numéricos ou não. Nas *Dimensões* as respectivas *Amplitudes de Mudança Permitidas* são diferentes. Uma é real – na dimensão numérica – e na outra é algébrica, mas mantiveram-se os objectos em expressões monomiais ou binomiais do 1º grau.
É de salientar que dos doze exemplos da sequência a professora apenas indicou quatro para os alunos trabalharem em aula. Os restantes oito foram deixados para trabalho de casa, o que indica que a professora considera importante que toda a variação apresentada pela sequência seja cumprida.
Com a escolha e realização desta sequência de exemplos os alunos ampliam o seu *Espaço De Exemplos*. Isto é, a experiência que consistiu no cálculo de imagens numéricas de uma dada função não é nova e insere-se dentro das *Experiências Prévias* dos alunos. Porém, com a introdução dos dois últimos exemplos, a experiência de cálculo de imagens de objectos que são expressões algébricas é nova e vem aumentar o espaço de exemplos do aluno, além de que, também acrescenta novos traços à imagem do conceito de função dos alunos.
Outro aspecto a ter em consideração é a introdução dos elementos básicos da função composta e, com ela, a generalização que se consegue ao determinar imagens de objectos algébricos e não apenas numéricos.

Esmeralda: **Episódio 16**
Dia: **26 Janeiro 07**

Início: **LB 5 min 16 Seg.**
Fim: **LB 5 min 24 Seg.**

Manual: **Página 48**

Exemplo Planeado tratado pelos alunos

Esmeralda: Olhem, o exercício 2, eu não o vou fazer porque é dentro da mesma linha do que temos estado a fazer.

2. Seja a função definida por:

$f(x) = \dfrac{x-1}{3}$

2.1 Calcule $f(1)$; $f(3)$

2.2 Determine x se $f(x) = 5$

2.3 Determine x se $f(x) = -\dfrac{1}{2}$

<u>Fim da transcrição</u>

Uso do Exemplo

Neste caso deveria ser "Rejeição do Exemplo" em vez de uso do exemplo. Os exemplos que são rejeitados também dão indicações sobre o que a professora pretende de um exemplo. Ao verificar que esta sequência de exemplos não traz qualquer *variação* e que a *invariância* não tem qualquer objectivo didáctico, a professora rejeita a tarefa por esta não possuir qualquer sentido e levar apenas ao desperdício de tempo.

A inclusão deste episódio pretende ilustrar que:

- as escolhas dos exemplos do manual, por parte da professora, não são aleatórias nem verificam incondicionalmente a ordem de apresentação
- a variação, ou a invariância, são utilizadas pela professora com critério
- os exemplos são escolhidos com objectivos definidos
- alguns exemplos do manual, por si ou em conjunto, podem não ter qualidade na perspectiva da professora

Esmeralda: **Episódio 17**
Dia: **26 Janeiro 07**

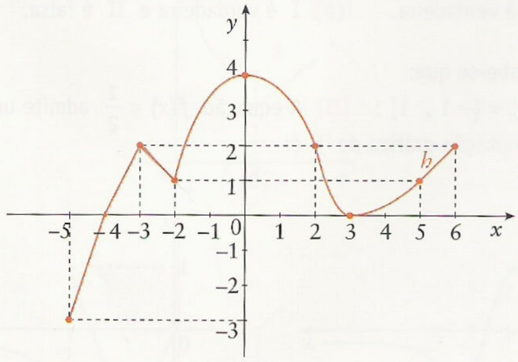
Início: **LB 5 min 25 Seg.**
Fim: **LB 24 min 6 Seg.**

Manual: **Página 48**

Exemplo Planeado tratado pelos alunos e pela professora

Esmeralda: Vamos passar para o 3.

3. O gráfico seguinte representa a função h.



3.1 Indique:

3.1.1 o domínio e o contradomínio de h;

3.1.2 $h(0)$; $h(-2)$; $h(3)$.

3.2 Para que valores da variável independente:

3.2.1 $h(x) = 0$;

3.2.2 $h(x)$ é mínimo relativo; $h(x)$ é mínimo absoluto;

3.2.3 $h(x)$ é máximo relativo; $h(x)$ é máximo absoluto;

3.2.4 $h(x) > 0$; $h(x) < 0$;

3.2.5 h é crescente; h é decrescente.

(pausa para os alunos abordarem o exemplo)
E: Ora então, "*o gráfico seguinte representa a função h…*" Por norma, vocês já falam de mais, no fundo da sala ainda falam mais. Portanto, isso só significa que se está a prejudicar a si próprio. Não é a mim. A mim só me irrita um bocado. Tenho que estar a interromper o que estou a fazer para a mandar calar.
"*O gráfico seguinte representa a função h, indique o domínio e o contradomínio de h*" Ricardo, qual é o domínio da minha função *h*?
Ricardo: De -5 a 6.
E: Concordam com o Ricardo?
Alunos: Sim.
E: -5 a 6, quê?
Alunos: Fechado.
E: Ou seja, o domínio da minha função… (apaga o quadro). Ora, domínio de *h*, intervalo fechado de -5 a 6 (escreve no quadro $D_h = [-5;6]$) fechado em -6. É?
O contradomínio, João?
João: De -3 a 4 fechado.

E: Concordam com o João? De -3 a 4 fechado?
Contradomínio de *h*, intervalo fechado de -3 a 4 (escreve no quadro $D_h^{'} = [-3; 4]$).
$h(0)$, Mário? A que é igual?
Mário: A -4 e 3.
E: $h(0)$? Concorda com o Mário, Patrícia?
Patrícia: Não.
E: Não? Então?
Patrícia: H de zero é igual a 4.
E: Portanto o $h(0)$ está (…) basta ir ao eixo dos xx e depois ir à função e verificar qual é a sua imagem (escreve no quadro $h(0) = 4$). E tal como diz a Patrícia, H de zero é igual a quatro.
$h(-2)$, Inês Duarte?
Inês: Um.
E: H de -2, um. Concordam com ela?
Alunos: Sim.
E: Eu também (escreve e refere oralmente $h(-2) = 1$).
E agora pede-nos H de 3. Inês Jara?
Inês: 2?
E: Marisa ou Ana?
Marisa: Marisa.
E: Marisa, $h(3)$ é 2?
Marisa: Não, é zero.
E: Não, $h(3)$ é zero (escreve no quadro $h(3) = 0$).
Inês, $h(3)$ nunca poderia ser 2 porque este ponto é um ponto que pertence ao eixo dos xx. E qualquer ponto que pertence ao eixo dos xx a sua imagem é sempre…
Inês: …zero.
E: Certo.
Ora então vamos passar para a seguinte. Está percebido até aqui? "*Para que valores da variável independente…*" Qual é a variável independente?
Alunos: O x.
E: "*... para que valores da variável independente?*" (apaga o quadro) Ora, pode ser a Ana (escreve no quadro e verbaliza $h(x) = 0$).
Ana: -4 e 3
E: x igual a -4 ou x igual a 3 (escreve no quadro $\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 3$). Concordam?
Alunos: Sim.
E: Ora vou ver, não sei. Certo, -4 e 3. Sim senhor.
O que é que eu podia concluir acerca dos zeros da minha função?
(silêncio)
E: A minha função tem dois zeros, portanto $x = 4$ e $x = 3$.
"*$h(x)$ é mínimo relativo*" , Rui? Para que valores da variável independente, o enunciado vem de trás, $h(x)$ é mínimo relativo?
Rui: Zero?
E: Zero? Diz ele.
O 1?
Não devemos estar a olhar para o mesmo sítio, mas pronto. Ou estamos? Estamos, Núria?
Núria: (imperceptível)
E: O Zé sabe que é, o mínimo… se é mínimo relativo. É Marta?
Marta: Não sei.
E: Não sabe? Então se vocês centrarem uma vizinhança de zero, as imagens à esquerda e as imagens à direita como é que se comportam?
Marta: São maiores…
E: São maiores, então pode ser um mínimo?

(alguns alunos dizem que não)
E: Pode? As imagens à esquerda e à direita de zero são maiores que a imagem de zero? São maiores?
Aluno: São menores.
E: Ai são menores! Tem uma parábola com a concavidade voltada para baixo, as imagens à direita e as imagens à esquerda do zero são menores que a imagem de zero. Logo, zero nunca pode ser um mínimo. Não é? Então vamos recapitular. Quais são os valores da variável independente para os quais a nossa função tem mínimo relativo? Não sabe Rui?
Ricardo: Professora, -2 e 1.
E: -2 diz o Ricardo.
Aluna: -5, eu acho que é -5.
E: -5? Já ouvi -2 e já ouvi 3. Vamos analisar. O -5, será ou não um mínimo relativo da minha função? Se eu centrar uma vizinhança no ponto -5, como é que se comportam os valores das imagens ali à esquerda e à direita …? neste caso, à esquerda não porque a função termina no -5. Mas como é que se comportam à direita?
Alunos: São maiores.
E: São maiores. Logo esse ponto será um mínimo. Diz o Ricardo, absoluto. Mas o que é que nós tínhamos visto numa aula mais atrás?
Ricardo: Que os relativos podem ser… ai… que os absolutos podem ser relativos.
E: Exactamente. Que os extremos absolutos podem ser… ou são, relativos. Os relativos é que não são [sempre] absolutos. Portanto, o $x = -5$, eu concordo com o Ricardo.
Vamos analisar o -2, que eu ouvi alguém… quem foi que disse -2? Será que se eu centrar uma vizinhança no ponto -2 as imagens à esquerda e as imagens à direita são todas maiores que as imagens de -2?
Alunos: Sim.
E: Sim. Então encaixa ou não?
Alunos: Sim.
E: Pronto. Então $x = -2$ também é um mínimo.
Ouvi falar no 3. Se centrarmos uma vizinhança no ponto 3, o que é que acontece às imagens à esquerda e à direita de 3?
Alunos: São maiores.
E: São todas maiores. São todas até positivas, dado que a imagem de 3 é zero. Logo eu tenho aí um mínimo, que não é absoluto porque já vimos que o absoluto será -3 para $x = -5$, não é verdade? Portanto, que nome, ou que nomes, é que eu dou a estes valores que eu estou a apresentar? São mínimos?
Aluna: Não.
E: São quê?
Alunos: Minim…
E: Minimizantes. Nós já tínhamos visto que os mínimos e os máximos são valores de que variável?
Alunos: Do y.
E: De y, da variável dependente. Os maximizantes e os minimizantes são valores de que variável?
Alunos: x.
E: De x, da independente. Portanto, a resposta que nós temos que dar na 3.2.2, é: $x = -5$ ou $x = -2$ ou $x = 3$ são…
Aluno: Mínimos relativos.
E: Exactamente, são mínimos relativos de $h(x)$. Que aqui não devia vir nesta terminologia, mas pronto. Se tivessem dito logo, minimizantes. Mas como diz no enunciado: *Para que valores da variável independente…*
E agora pedem-me $h(x)$, para que valores da variável independente é que $h(x)$ é mínimo absoluto.
Alguns alunos: -3
Alguns alunos: -5
E: Para x=-5. Sim senhor. Toda a gente está a acompanhar o exercício? O que é que foi Filipa?
Filipa: Nada.
E: Todos perceberam? 3.2.3. (pausa) Já está? Qual era a sua dúvida Carina? Oh … Filipa.
Filipa: Diga?
E: Qual era o seu problema?
Filipa: Ah! Porque eu, no mínimo absoluto, pus -3.
Outra aluna: É que ela estava a ver pelo eixo dos yy.

E: Então não sabe ler os enunciados. Nem sequer nos tem estado a ouvir. Porque eu tenho estado a insistir no enunciado, e o enunciado começa por: "*Para que valores da variável independente…*". Foi por aí que eu comecei. Só que mais uma vez vocês demonstram que estão na sala de aula mas com a cabeça noutro sítio. E é porque eu falo alto e bom som. Ou melhor, eu grito e mesmo assim não ouvem.
Já fizeram a 3.2.3? Então, para que valores da variável independente, para que valores de x – para aqueles que têm falta de ouvido – *h(x)* é máximo relativo, Miguel?
Miguel: $x = -3$, $x = 0$ e $x = 6$.
E: Concordam com o Miguel?
Alunos: Sim.
E: $x = -3$, $x = 0$ e $x = 6$. Ou, ou, ou (refere-se às disjunções entre as condições). Está bem?
Para que valores de x, *h(x)* é máximo absoluto?
Miguel e outros alunos: É zero.
E: Para $x = 0$. Sim senhor. Núria, já percebeu o que está a fazer.
Aluna: Professora, eu tenho aqui algumas dúvidas nesta parte dos máximos e dos mínimos.
E: Mas a parte dos máximos e dos mínimos vem de aulas atrasadas. Já estudou. Ainda não tinha estudado com certeza, pois não?
(a aluna confirma)
E: Ah, é que se não estudarmos não vamos lá.
3.2.4. *h(x)>0*, para que valores da variável independente, ou seja, para que valores de x, a nossa função é maior que zero?
Duas alunas: De -4 a 6.
Apenas uma delas: Excepto o 3.
E: -4 a …?
Aluna: … a 6 excepto o 3.
(alguns alunos referem até ao ponto 3 e depois de 3 a 6)
E: Porquê "excepto o 3"?
Alunos: Porque a imagem do 3 é zero.
E: Exactamente. Portanto podemos escrever o intervalo dessa maneira ou subdividi-lo. Posso dizer que de -4 a 3, reunião com 3 a 6 (escreve no quadro $]-4;3[\cup]3;6]$). Ou então, se vocês fizeram o intervalo todo, de -4 aberto a 6 fechado excepto o 3.
Andreia, para que valores de x, *h(x)<0*?
Andreia: -5.
E: Concordam com a Andreia, -5?
Patrícia: -5 a -4.
E: A Patrícia completou, de -5 a -4.
Patrícia e outros alunos: -4 aberto.
E: Vamos ver, em todo este troço compreendido entre -5 e -4, portanto a sua linha, o seu gráfico está abaixo do eixo dos xx. Logo as imagens são todas negativas, eu tenho aí uma infinidade de valores. Ora a imagem de -5 é, sim senhora, negativa mas a imagem de -4 não é. É zero, então como eu só quero valores negativos (escreve no quadro $[-5;-4[$) é aberto.
Para que valores de x, h é crescente, Carina?
(a aluna não responde)
E: Ou seja, é localizado nos intervalos, ou intervalo, onde a minha função é crescente (apaga o quadro).
(uma aluna inicia a resposta)
E: Shhhh, eu perguntei à Carina. Senão, eu assim, vou deslocar-me para a Ana. (dirige-se à Carina) Não sabe?
Carina: De -5 a -3 …
E: De -5 a -3… Só?
Ana?
Ana: De -5 a -3 e de…
E: Ora, (escreve no quadro $[-5;-3]$) e …
Ana: … de -3 a zero…
E: … -3… é crescente de -3 a zero?
Ana: -2.
E: Ah. -2 a zero (escreve no quadro, e fica: $[-5;-3]$ e $[-2;0]$)
Alunos: … e de 3 a 6.

E: … e de 3 a 6 (escreve. Ora, e em… ora de, de, de… (apaga "e" e substitui por ",") -3 a quantos? (escreve $[-3,)$
Alunos: A 6. De 3, de 3. É 3.
E: É 3, é positivo (apaga o sinal menos do -3 e completa, no quadro, em que fica escrito: $[-5;-3]$, $[-2;0]$ e em $[3;6]$).
Bruna, onde é que a nossa função é decrescente? *Para que valores de x…?*
Bruna: De -3 a -2, fechado, e de zero a 3.
E: Concordam com ela?
Alunos: Sim.
(a professora diz oralmente e, simultaneamente, escreve no quadro: $[-3;-2]$ e em $[0;3]$)

Fim da transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O exemplo tratado neste episódio é um *Exemplo Planeado de Conceito*. Através deste exemplo os alunos tratam de forma muito completa o conceito de função na sua *Faceta Geométrica* através da observação directa do gráfico. A inserção deste exemplo numa das categorias não é imediata; se numa primeira abordagem nos inclinamos pela 2ª categoria, **Abordagem Inicial Autónoma**, a análise mais cuidada do tratamento do exemplo desvia-nos para a 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**. Este desvio radica no facto do tratamento do exemplo ter sido conjunto entre professora e alunos. Como se pode ver pela leitura do episódio, o tratamento do exemplo não é feita autonomamente pelos alunos, embora sejam eles a responder aos diversos itens a participação da professora é muito vincada. Em episódios anteriores, em que inserimos exemplos tratados pelos alunos e pela professora na 2ª categoria, o papel da professora não foi semelhante porque propunha a actividade aos alunos – em aula ou em trabalho para casa – e depois procedia à correcção. Era trabalho autónomo dos alunos corrigido posteriormente pela professora. Não se passa o mesmo neste exemplo, a professora trabalha com os alunos em simultâneo na actividade inerente a este exemplo, explicando e elucidando enquanto a actividade se desenrola aprofundando no conceito de função.
Relativamente ao **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** podemos apontar diversos aspectos.
Propriamente CPC:

- a professora usa o gráfico, ou partes dele, para abordar os conteúdos constantes em cada item deste exemplo (Cat.**Estratégias de Ensino**): "*Vamos ver, em todo este troço* [do gráfico] *compreendido entre -5 e -4, portanto a sua linha, o seu gráfico está abaixo do eixo dos xx. Logo as imagens são todas negativas…*"
- no evoluir do episódio são constantes as referências às noções que estão subjacentes a cada uma das alíneas deste exemplo. Noção de imagem de um objecto: "*… basta ir ao eixo dos xx e depois ir à função e verificar qual é a sua imagem…*"; noção de mínimo: "*Pode? As imagens à esquerda e à direita de zero são maiores que a imagem de zero? São maiores?*"; noção de extremante: "*Os maximizantes e os minimizantes são valores de que variável?*"; noção de sinal de uma função: "*... portanto a sua linha, o seu gráfico está abaixo do eixo dos xx. Logo as imagens são todas negativas, ...*" (Cat. **Pensamento do Estudante**).

- Perante o erro comum dos alunos que confundem o extremo com o extremante a professora toma as medidas adequadas a debelar a confusão (Cat. **Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas**):
  "Filipa: *Ah! Porque eu, no mínimo absoluto, pus -3.*
  Outra aluna: *É que ela estava a ver pelo eixo dos yy.*
  Esmeralda: (…) *Porque eu tenho estado a insistir no enunciado, e o enunciado começa por:* Para que valores da variável independente...".
- a professora, perante as dificuldades dos alunos em indicarem os mínimos relativos da função, identifica a causa dessas dificuldades: a aplicação da definição – ou da sua imagem – ao exemplo em concreto. Para que os alunos superem as dificuldades, a docente aplica, ela própria, a definição a um dos pontos do gráfico onde a função possui um mínimo (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*Vamos analisar. O -5, será ou não um mínimo relativo da minha função? Se eu centrar uma vizinhança no ponto -5, como é que se comportam os valores das imagens ali à esquerda e à direita …?*".
- relativamente à forma de apresentar o intervalo onde a função é negativa, a professora explica a razão pela qual o intervalo é aberto à direita (Cat. **Explicações**): "*Ora a imagem de -5 é, sim senhora, negativa mas a imagem de -4 não é. É zero, então como eu só quero valores negativos* (escreve no quadro $[-5;-4[$) *é aberto.*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- na forma como interage com os alunos no desenrolar da actividade inerente ao exemplo, na facilidade com que aborda as noções e as relaciona entre si, a necessidade evidenciada de se socorrer da definição de extremo, na oportunidade com que chama à colação conteúdos anteriormente leccionados, a professora demonstra um conhecimento conceptual profundo e minucioso de todos estes aspectos da matemática (Cat. **Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental**)
- deixa bem claro aos alunos como distinguir máximos e mínimos de maximizantes e minimizantes(Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**):
  "Esmeralda: *Nós já tínhamos visto que os mínimos e os máximos são valores de que variável?*
  Alunos: *Do y.*
  E: *De y, da variável dependente. Os maximizantes e os minimizantes são valores de que variável?*
  Alunos: *x.*
  E: *De x, da independente. Portanto, a resposta que nós temos que dar na 3.2.2, é:* $x=-5$ *ou* $x=-2$ *ou* $x=3$ ...".
- para melhor ilustrar uma situação de máximo, a professora socorre-se de um conteúdo leccionado anteriormente - o gráfico em forma de parábola - relacionando assim o vértice desta curva com um máximo local (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**).

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo

- tanto no início do episódio como no decorrer deste, a professora repreende algum aluno pelo ruído que está a provocar ou se não está com a atenção devida: "*Por norma, vocês já falam de mais, no fundo da sala ainda falam mais. Portanto, isso só significa que se está a prejudicar a si próprio. Não é a mim. A mim só me irrita um bocado. Tenho que estar a interromper o que estou a fazer para a mandar calar.*"; "*Nem sequer nos tem estado a ouvir. Porque eu tenho estado a insistir no enunciado, e o enunciado começa por: ...*". A forma como conduz a aula, em permanente diálogo, mantém os alunos atentos às explicações e aos aspectos considerados fundamentais à aprendizagem (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**).
- lê o enunciado das diversas alíneas e, quando necessário, volta a ler o enunciado comum às alíneas de forma que os alunos estejam sempre situados nos diversos aspectos do exemplo; dialoga com alguns alunos em particular ou com todos em geral; escreve no quadro toda a informação que é fundamental ao exemplo; verifica as aprendizagens dos alunos (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).

Uso do exemplo

Este episódio não contempla uma sequência de exemplos. Na realidade, é só um exemplo – a função apresentada – onde se trabalham diversas noções incluídas no conceito de função propostas de forma global e integrada.
O tratamento deste exemplo proporciona ao aluno uma visão mais aprofundada do conceito de função através da sua faceta geométrica. A riqueza do exemplo é significativa, ele apresenta vários aspectos do conceito de função e, interligando-os, faz com que nele surjam *Variações* de um mesmo aspecto.
O exemplo foi apresentado aos alunos após cada aspecto abordado do conceito de função ter sido estudado por separado com os alunos. Assim, o exemplo tem como objectivo englobar todos os aspectos de forma que os alunos os possam apreender como um todo. Por outro lado, também tem como objectivo sintetizar todos os conteúdos das últimas aulas e fazer surgir as dúvidas sobre aqueles em que a aprendizagem não tenha sido satisfatória; foi o caso em que se pede aos alunos que indiquem os extremos. Achámos particularmente interessante a forma como a professora recorre à própria definição para ajudar os alunos a ultrapassar as suas dúvidas. É um caso que ilustra de forma evidente o que se deve fazer quando a imagem do conceito, neste caso de extremo, não está suficientemente consolidada e é necessário o recurso à definição para enquadrar a situação de forma rigorosa e fazer luz sobre um aspecto mais obscuro. O caso a que nos referimos ilustra bem a *metáfora do andaime*.
Existem outros pontos sobre o uso deste exemplo que convém realçar:

1. As oportunidades que criou para a introdução de algum rigor no que concerne à notação específica da matemática. O caso dos intervalos, onde são abertos e fechados, ou sobre escrever $]-4;3[\cup]3;6]$ ou $]-4;6]\backslash\{3\}$. A separação das soluções da equação com o conectivo lógico $\vee$ (disjunção). E, por fim, a separação dos intervalos de monotonia com "," e com "e em".
2. A possibilidade de se relacionar o sentido das concavidades com a discriminação do tipo de extremo, máximo ou mínimo.
3. A diferenciação entre as desigualdades > e < com $\leq$ e $\geq$.

Esmeralda: **Episódio 18**
Dia: **26 Janeiro 07**

Início: **LB 24 min 10 Seg.**
Fim: **LB 35 min 19 Seg.**

Manual: **Página 49**

Sequência Planeada de Exemplos de Conceito tratada pelos alunos

Esmeralda: Então vamos fazer o 4.

4. Indique o domínio da função *f* definida por:	
4.1 $f(x)=\sqrt{x}$	4.2 $f(x)=\sqrt{1-x}$
4.3 $f(x)=\dfrac{1}{x}$	4.4 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

(pausa para os alunos trabalharem)
E: O exercício 4 tem a ver com aqueles exercícios que nós demos antes de… ou seja, logo ao princípio das funções, cálculo de domínios.
"*Indique o domínio da função f definida por*: $f(x)=\sqrt{x}$ "
Como é que eu indico o cálculo deste domínio? (a professora apaga o quadro)
Como é que eu indico?
Aluna: f de x …
E: Ena pá, vocês andam a estudar muito, hã.
(alguns alunos tentam responder)
E: Mas como é que eu indico? Largo assim disparado no quadro?
(duas alunas respondem mais acertadamente: "*Domínio de f, são os valores de x tais que…*")
E: Ah! Se calhar assim: (escreve no quadro enquanto verbaliza) Domínio de f igual ao conjunto formado pelos xx pertencentes a R tais que..
Alunos: x maior que zero.
(um aluno diz: x maior ou igual)
E (e escreve no quadro): x maior ou igual, ouvi eu. Maior ou igual ou só maior?
Alunos: Maior ou igual.
E: Maior ou igual. Quando é que estaria só o maior?
(uma aluna diz que seria quando a raiz de x estivesse em denominador)
E: Exactamente. Portanto, quando eu tenho uma raiz de índice par, o meu radicando tem que ser sempre maior ou igual que zero. Se a minha raiz está em denominador, o meu radicando tem que ser SÓ maior do que zero. Igual a zero não pode ser porque eu não posso dividir por zero.
(repreende uma aluna que estava distraída a conversar)
E, então, a que é que é igual o domínio da minha função?
Alunos: de zero a mais infinito.
E: Em zero é fechado?
Alunos: Fechado.
(no quadro, a professora completa a indicação do domínio da função: $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x\geq 0\}=[0;+\infty[$)
E: Qual era a outra forma de eu representar sem ser em intervalo?
Aluna: R mais zero.
E: Exactamente, R mais zero, exactamente, é a mesma coisa. Vou escrever aqui à frente para vocês se familiarizarem (acrescenta $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x\geq 0\}=[0;+\infty[=\mathbb{R}_0^+$).

É exactamente o mesmo. Quando virem aquilo ou o intervalo zero a mais infinito, é exactamente a mesma coisa.
4.2. (pausa para os alunos determinarem o domínio)
(a professora apoia individualmente os alunos)
E: Bruna está à espera do quê para resolver o exercício? Que lhe caia a máquina de filmar (câmara de vídeo) em cima, (…) está à espera do quê?
E: Alguém já fez?
(uma aluna fez sinal que sim)
E: Embora.
(a aluna vai ao quadro e a professora dá-lhe a indicação de que apague o quadro)

(a aluna apaga o quadro e escreve: 4.2 $f(x)=\sqrt{1-x}$

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}:1-x\geq 0\}=]-\infty;1]$$
$$-x\geq -1$$
$$x\leq 1$$

E: Deu isto? Não houve problemas?
A 4.3 é muito fácil. Qual é o domínio da 4.3?
Alunos: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
E: Pronto. Vamos passar por cima dele.
Aluna: Professora, ali [no quadro] é menor ou igual, não é?
E: E é o que está lá. Está lá menor ou igual…
Aluno: Podemos fazer a 4.4?
E: Sim, foi o que eu disse.
(pausa para os alunos trabalharem. apoia os alunos que o solicitarem e por vezes chama a atenção aos alunos que estão desconcentrados)
E: Já está o domínio Rita?
Rita: Já.
E: Então venha fazer.

(a Rita vai ao quadro e escreve: 4.4 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}:x-1\neq 0\}$$

Patrícia: Professora, não podia ser x menos 1 maior que zero?
E: Já vamos analisar a sua questão.
(a Rita continua a escrever: $x-1=0\Leftrightarrow x=1$ e completa $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x-1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$)
E: Este cálculo aqui no canto caiu aqui de pára-quedas?
(a aluna acrescenta C A – cálculos auxiliares – em cima da resolução da equação)
E: Ah!
Concordam com o que está no quadro?
Aluno: Não.
E: Não? Quem é que disse [que] não?
O Mário. E a Patrícia também me colocou ali uma questão.
O Mário não concorda porquê?
Mário: Porque o denominador (… imperceptível…)
E: Repita lá, repita lá, repita lá.
Mario: Porque o denominador não pode ser igual a zero, tem que ser maior.
E: Ai o denominador nunca pode ser igual, tem que ser maior que zero. Então vamos lá pensar. Se eu tiver 2 a dividir por -3 (escreve no quadro $\dfrac{2}{-3}$), não posso ter.
Aluna: Pode, pode. -3 não é igual a zero!
E: Não posso ter Mario? Foi o que o senhor disse. O senhor disse assim: *O denominador não pode ser zero*. E depois disse a seguir: *Tem* que *ser maior que zero*.
Mário: Maior, não.

E: Então já não é a mesma coisa. Então concorda com o que está aqui escrito, ou não?
Mário: Eh….
E: Volto a perguntar.
Mário: Eu acho que tem que ser x-1 maior que zero.
E: Então oiça o que está a dizer. Se tem que ser x-1 maior que zero, o x-1 é o meu denominador – Patrícia isto serve para si – o x-1 é o meu denominador, então o que me está a tentar dizer, tanto um como outro, é que no denominador eu nunca posso ter um valor negativo. Nem negativo nem zero, que é o que significa ser maior que zero. É isso que vocês estão a pensar? Foi isso que eu vos ensinei?
Mário: Não.
E: Então contem lá o que é que eu ensinei.
Mário: Só não pode ser zero.
E: No denominador eu não posso ter zero, a condição de "maior" no denominador vem quando?
Alunos e Esmeralda: Quando eu tenho uma raiz de índice par.
E: É o caso?
Alunos e Esmeralda: Não!
E: Eu tenho aqui [no denominador] um polinómio *normal*. Não é? … no fim, $y = x - 1$, certo? Não tenho nenhuma raiz. Não tenho nenhum radical, não tenho nenhuma função irracional. Pois não? Então a única condição que eu tenho que impor ali é a de denominador. Tem que ser maior… maior…diferente de zero. O maior que zero seria neste caso (aponta para $\sqrt{1-x}$), se eu tivesse em denominador $\sqrt{1-x}$, e se já vimos isto em aulas passadas, aí é que eu teria que impor a condição "*maior ou igual que zero*". Entendido?
Mário: Sim.

<u>Fim da transcrição</u>

Classificação da Sequência de Exemplos e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

A Sequência de Exemplos inclui quatro exemplos em que são semelhantes os dois primeiros e os dois últimos. A faceta que é trabalhada é a *Faceta Simbólica* e os quatro exemplos, pela forma como foram tratados pelos alunos, incluem-se na 2ª Categoria, **Abordagem Inicial Autónoma**. Porém, este tipo de exemplo não é uma abordagem inicial pois já tinha sido tratado anteriormente pelos alunos e, por esse motivo, não é totalmente correcto inclui-lo apenas nesta categoria. Mas, ao levantar dúvidas nos alunos, serviram também para esclarecer. Isto é, também tem traços de exemplo próprio da 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**.

No decorrer do exemplo 4.4 a professora apresentou um *Exemplo Espontâneo de Concretização* da divisão de reais que foi $2/-3$. Este exemplo criou no aluno Mário um conflito cognitivo, o aluno afirmava que numa expressão algébrica com divisão o denominador teria que ser maior que zero. Pela sua afirmação, a divisão $2/-3$ não poderia ser feita, contudo a sua experiência diz-lhe que a divisão $2/-3$ é possível e existe. Este exemplo enquadra-se no que Zazkis e Chernoff (2006, 2008) chamam *Exemplo Fulcral* e, porque levou à aprendizagem correcta, é um *Exemplo Fulcral Ponte*.

O **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** da professora, neste episódio, pode ser caracterizado pelas evidências que seguem.

Propriamente CPC:

- a professora estabelece com os alunos um diálogo sobre a noção de domínio e distingue a forma de obter um domínio consoante a expressão analítica em causa. Isto é, explica porque razão, nas diversas situações, existem diferenças nas condições a impor (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*x maior ou igual,* *ouvi eu. Maior ou igual ou só maior?*" e depois "*Maior ou igual. Quando é que estaria só o maior?*".

- por causa das dúvidas que se levantam, a professora evidencia as causas que determinam as condições a impor (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*Portanto, quando eu tenho uma raiz de índice par, o meu radicando tem que ser sempre maior ou igual que zero. Se a minha raiz está em denominador, o meu radicando tem que ser SÓ maior do que zero. Igual a zero não pode ser porque eu não posso dividir por zero.*"; "*Eu tenho aqui* [no denominador] *um polinómio normal. Não é? ... no fim,* $y = x - 1$*, certo? Não tenho nenhuma raiz. Não tenho nenhum radical, não tenho nenhuma função irracional. Pois não? Então a única condição que eu tenho que impor ali é a de denominador. Tem que ser maior... maior...diferente de zero. O maior que zero seria neste caso* (aponta para $\sqrt{1-x}$), *se eu tivesse em denominador* $\sqrt{1-x}$*, e se já vimos isto em aulas passadas, aí é que eu teria que impor a condição* "maior ou igual que zero". *Entendido?*".
- explica porque razão são equivalentes as notações $[0;+\infty[$ e $\mathbb{R}_0^+$ (Cat. **Explicações**).
- porque o aluno afirmava que um denominador deveria ser maior ou igual que zero para que a divisão tivesse sentido, a professora dá o exemplo da divisão $2/-3$ (Cat. **Conhecimento de Exemplos**).

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:

- no processo de determinação dos vários domínios, a professora indica aos alunos quais os principais aspectos que os alunos devem identificar nas expressões algébricas das funções que lhes permitam determinar o domínio de forma correcta (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**).

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- no início do episódio, a professora indica aos alunos qual o objectivo da actividade que se segue (Cat. **Objectivos da Aprendizagem**): "*O exercício 4 tem a ver com aqueles exercícios que nós demos antes de... ou seja, logo ao princípio das funções, cálculo de domínios.*"
- confronta, em voz alta, os alunos com o enunciado do problema e baseia-se no diálogo com o intuito de os focalizar no trabalho (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção dos Alunos**): "'Indique o domínio da função f definida por: $f(x) = \sqrt{x}$'. *Como é que eu indico o cálculo deste domínio? Como é que eu indico?*".
- pede a alunos que determinem no quadro os domínios pedidos de forma que os outros colegas possam seguir o processo; utiliza o quadro como forma de sistematizar a informação pertinente; repreende alunos distraídos para os manter atentos; (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).

Uso da Sequência de Exemplos

É uma sequência de exemplos que a professora usa para recapitular a matéria já anteriormente leccionada/trabalhada e que vem na linha dos exemplos incluídos nos

últimos episódios. São exemplos que a professora utiliza em fim de capítulo, para o fechar, com exemplos diversificados com o objectivo de dar aos alunos uma visão geral do conceito de função: definição, objectos, imagens, domínio, contradomínio, monotonia, extremos, sinal, tanto na faceta geométrica como na faceta simbólica.
O uso destes exemplos permitiu esclarecer as dúvidas que ainda perduravam ou, então, que eles próprios fizeram surgir. Destacam-se dois incidentes no decorrer do episódio.

- O primeiro caso consiste no ignorar do exemplo 4.3, em que a professora passa por cima desse exemplo, sem o considerar da mesma forma que os outros três, por o considerar demasiado fácil. Embora diga que não se resolve – "*Vamos passar por cima dele.*" – a professora pergunta qual é o domínio da função $f(x)=\frac{1}{x}$ e os alunos, na quase totalidade, respondem correctamente. Com este exemplo em particular, a professora procedeu a uma avaliação diagnóstica das aprendizagens dos alunos e, sabendo que o seguinte era similar, poderia utilizar antes este como já o tinha feito com os dois anteriores, determinação formal no quadro do domínio da função.
- O segundo caso ocorre quando se trabalha o exemplo 4.4. Como já foi referido na parte relativa à classificação dos exemplos, pôde-se assistir a uma situação bem descrita na bibliografia (Zazkis e Chernoff 2006, 2008) como *Exemplo Ponte*. Isto é, um exemplo que além de *fulcral* também faz a *ponte*, a ligação, entre uma concepção alternativa e uma concepção correcta do conceito de divisão de reais, promovendo assim uma evolução conceptual.

  Quando se determinava o domínio da função $f(x)=\frac{1}{x-1}$ surge, por parte do aluno Mário, a concepção de que o denominador deveria ser positivo, provavelmente um conhecimento prévio oriundo do cálculo do domínio de $\sqrt{x}$. Neste momento, a professora propõe de forma espontânea a divisão de 2 por -3 que, pela afirmação do aluno, não poderia ser possível. O uso do exemplo $2/-3$ é que provoca a percepção da inconsistência de ideias por parte do aluno: o facto do denominador $x-1$ ter que ser maior que zero não é consistente com a sua experiência quotidiana – perfeitamente possível – de dividir 2 por -3. O conflito cognitivo é, efectivamente, invocado pelo aluno quando reconsidera que o denominador não tem que ser maior que zero. A partir daqui o aluno desenvolve os seus próprios significados, conclui que o denominador apenas não pode ser zero, rectifica o conflito, evolui na sua concepção e compreende porque razão o domínio da função se obtém a partir da condição $x-1\neq 0$.

  O uso do exemplo $2/-3$ ao provocar o conflito cognitivo é um *Exemplo Fulcral* e, porque consegue ligar a concepção alternativa à concepção correcta resolve o conflito promovendo a evolução conceptual, transforma-se em *Exemplo Ponte*.

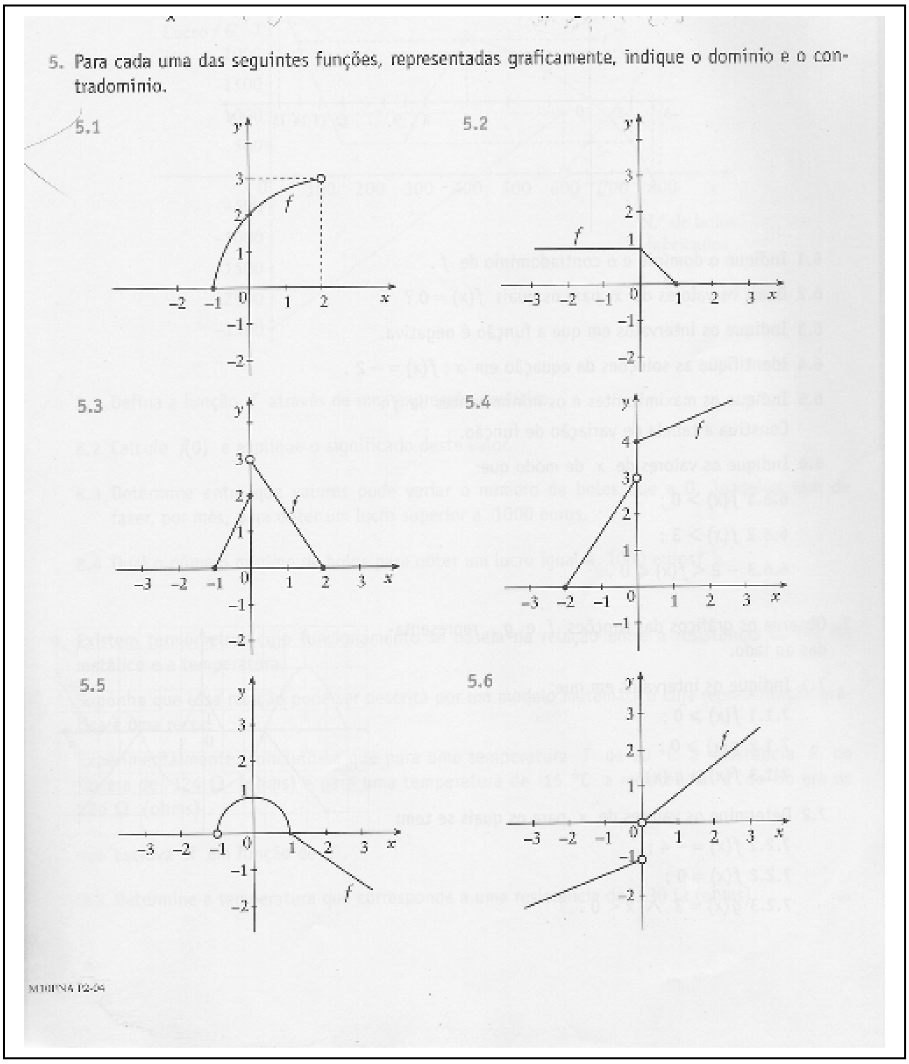
Esmeralda: **Episódio 19**
Dia: **26 Janeiro 07**

Início: **LB 35 min 20 Seg.**
Fim: **LB 35 min 49 Seg.**

Manual: **Página 49**

Sequência de Exemplos Planeados de Conceito

Esmeralda: Olhem, o exercício 5. tem aí vários gráficos, tem aí várias funções, cada gráfico representa uma função, pedem-vos o domínio e o contradomínio, eu não vou fazer, eu acho muito bem que vocês o façam, sim senhor, em casa. Eu não vou marcar como trabalho de casa, mas acho que vocês devem fazer para estudar, que é aquilo que vocês não andam a fazer, e nós estamos para aí a 15 dias do próximo teste e a matéria vem toda. Não sei se estão lembrados desse pormenor. Portanto é bom que se lembrem.


5. Para cada uma das seguintes funções, representadas graficamente, indique o domínio e o contradomínio.

5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6

<u>Fim da transcrição</u>

Classificação dos Exemplos

Esta sequência de exemplos será realizada pelos alunos de forma autónoma e tem como objectivo a superação de dificuldades por parte do aluno, bem como o trabalho específico na *Faceta Geométrica*. São exercícios de um nível de dificuldade simples e que poderão fazer surgir alguma dificuldade que, se efectivamente surgir, deverá ser esclarecida pelo professor. A sequência em causa inclui, portanto, exemplos característicos da 2ª Categoria, **Abordagem Inicial Autónoma**.

Uso do exemplo

A sequência de exemplos proposta aos alunos contém um nível de variação apreciável. As *Dimensões de Variação Possíveis* e respectivas *Amplitudes de Mudança Permitidas* que possam influenciar o domínio e o contradomínio, são três:

- Continuidade num dado ponto – função contínua ou descontínua.
- Início e fim dos intervalos do domínio e do contradomínio – números finitos, ou não.
- Forma dos troços utilizados – segmentos de recta ou de curva – e monotonia desses mesmos troços – crescentes, decrescentes ou constantes.

O número, mas especialmente a variação, de exemplos constante na sequência é adequado ao desenvolvimento do *Espaço de Exemplos* do conceito de função do aluno e à construção da sua *Imagem do Conceito* de função na sua *Faceta Geométrica*. Tem casos específicos, por exemplo na continuidade, que fazem alterar o contradomínio mas, infelizmente, não fazem alterar o domínio.

Esmeralda: **Episódio 20**
Dia: **26 Janeiro 07**

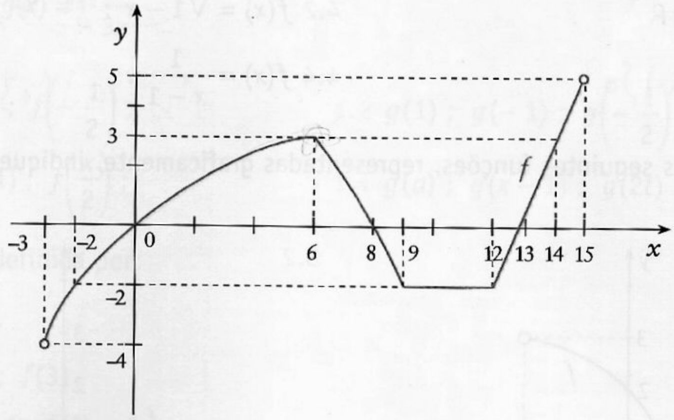
Início: **LB 35 min 49 Seg.**
Fim: **LB 39 min 5 Seg.**

Manual: **Página 50**

Exemplo de Conceito tratado pelos alunos

Esmeralda: Na página 50, vamos resolver, sim senhor, o exercício 6.

6. Considere a função f cujo gráfico é o seguinte:



6.1 Indique o domínio e o contradomínio de f.

6.2 Quais os valores de x para os quais $f(x) = 0$?

6.3 Indique os intervalos em que a função é negativa.

6.4 Identifique as soluções da equação em $x : f(x) = -2$.

6.5 Indique os maximizantes e os minimizantes de f.
Construa a tabela de variação de função.

6.6 Indique os valores de x de modo que:

6.6.1 $f(x) > 0$;

6.6.2 $f(x) > 3$;

6.6.3 $-2 < f(x) \leqslant 0$.

E: Falta quanto tempo para tocar? O meu relógio está um bocado atrasado e eu não…
Alunos: 2 ou 3 minutos.
E: Pronto, então ainda temos tempo de…"*Considere a função f cujo gráfico é o seguinte:*" Temos aí o gráfico da função *f*, primeira alínea: *indique o domínio e o contra domínio de f.*
Ana: De -3 a 15 aberto.
E: Só um bocadinho. A Ana diz que o domínio é de onde a onde?
Ana: De -3 a 15 aberto.

E: A Ana diz que é de -3 aberto, a 15. Concordam?
(os alunos, quase na totalidade, concordam com a resposta da Ana)
E: É sim senhora. É o intervalo aberto de -2 a 15. Domínio de f igual a intervalo aberto de -2 a 15 (enquanto escreve no quadro $D_f =]-2;15[$ e apaga tudo o que estava no quadro da actividade anterior). Então e o contradomínio?
Vários alunos: De -4 até 5 aberto.
E: O contradomínio é de… (consulta o manual)
Alunos: -4 até 5 aberto.
E: -4 a 5. (começa a escrever no quadro) -4 a 5 (escreve no quadro $D_f^{'} =]-4;5[$) intervalo aberto, sim senhora.
(uma funcionária interrompe a aula por motivos de serviço e, entretanto toca para os alunos saírem)

<u>Fim da transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Este exemplo constitui um caso de integração de diversas noções e que visa dar ao aluno um experiência aglutinadora de vários conteúdos anteriormente leccionados. Não é um caso de primeiras abordagens, é, antes, um exemplo que tem como finalidade construir uma estrutura com base nos elementos que até aqui pudessem estar dispersos na *Imagem do Conceito* do aluno. É um exemplo planeado, mas tal facto não impede que se destine, também, a esclarecer alguma dúvida estruturante dessa imagem que possa persistir. A faceta escolhida é a *Faceta Geométrica* e, pelo que foi dito, deve ser enquadrado na 3ª categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**.
Não é feita a caracterização do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** da professora neste episódio. Como se pode ler, o episódio está incompleto, a parte restante, a de maior dimensão, desenrolou-se na aula seguinte que não foi gravada. A pequena parte do episódio que gravámos, por não ser representativa, não justifica que se faça, portanto, a caracterização do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo da professora.

Uso do exemplo

Este exemplo, como já afirmámos, visa integrar num único caso todas as noções deste capítulo que estavam dispersas por terem sido tratadas de forma individual. Neste exemplo, apresentado e tratado na *Faceta Geométrica*, o aluno pode trabalhar um estudo razoavelmente completo de uma função em particular. De realçar é o facto de que a faceta apresentada seja, fundamentalmente a geométrica, mas o exemplo trata e relaciona esta faceta com a *Faceta Simbólica*, veja-se que algumas das noções são referidas na faceta simbólica: as raízes, com $f(x)=0$; a relação objecto/imagem, com $f(x)=-2$; o sinal, com $f(x)>0$. Além das facetas, este exemplo refere aspectos relacionados com a notação específica: a relação entre bolas abertas e fechadas e os intervalos abertos e fechados num dos seus extremos.

Esmeralda: **Episódio 21**
Dia: **2 Fevereiro 07**

Início: **LA 0 min 56 Seg.**
Fim: **LA 2 min 20 Seg.**

Manual: **Página 70**

Sequência Planeada de Exemplos de Conceito tratada pelos alunos

Esmeralda: Ora bem, vocês na página 70 tinham a 1.3 e a 1.4.

> 1. Das seguintes funções, identifique, analiticamente, as que são pares (verifique a resposta graficamente).
>
> 1.1 $f(x) = x^3 + 3x^2$ 1.2 $f(x) = x^4 + 5$
>
> 1.3 $f(x) = (x-3)^2$ 1.4 $f(x) = x^2 - 3$

Toda a gente chegou à conclusão que a função $f(x) = (x-3)^2$ era (imperceptível). Qual foi a conclusão a que toda a gente chegou?
Alunos: É impar.
E: É impar? Toda gente chegou a essa conclusão? A 1.3 … Mas aqui não …
Alunos: Mas diz para dizer só as pares.
E: Exactamente. Era só para dizer que era par. Era essa a conclusão a que deveriam ter chegado. Não é par porque $f(-x)$ é diferente de $f(x)$. O $f(-x)$, supostamente, quando vocês fizeram a substituição obtiveram a seguinte expressão: $(-x-3)^2$, o $f(x)$ é $(x-3)^2$. Depois se fossem fazer o desenvolvimento do quadrado davam-vos expressões diferentes. Hum?
A 1.4, é par, ou não é par?
Alunos: É par.
E: É par. Porque quando fazem a substituição do x por –x, o $(-x)^2$ dá x^2, e então a expressão fica exactamente igual, a $x^2 - 3$. É par, sim senhor.

<u>Fim da transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Esta série de exemplos foi proposto aos alunos imediatamente após a definição de função *par*, *impar* e *não par e não impar*. Foi, por parte dos alunos, o primeiro contacto com o estudo da paridade da função na sua *Faceta Simbólica*, a paridade já tinha sido anteriormente estudada ao nível da *Faceta Geométrica*. Seria nesta sequência de exemplos que deveriam ter surgido as primeiras dificuldades por parte dos alunos, contudo essas dificuldades não foram expressas pelos alunos; porventura, aquando da introdução desta noção na faceta simbólica durante a aula anterior, foi bem interiorizada

pelos alunos. Pelo atrás referido, os exemplos constantes nesta sequência são integrados na 2ª Categoria, **Abordagem Inicial Autónoma**.
Porque o episódio retrata apenas a correcção de dois exemplos da sequência que não suscitaram dúvidas, não se considera que ele seja muito importante para a caracterização do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** da professora.

Uso do exemplo

Os dois últimos exemplos desta sequência foram propostos pela professora como trabalho de casa – os dois primeiros foram trabalhados em aula – e o episódio inclui a sua correcção. Como não são apresentadas dúvidas, a professora limita-se a proceder à sua correcção sem grandes explicações.
Sobre a sequência em si, e sobre os exemplos que a integram, devem ser observados alguns pormenores. Existe suficiente variação nos quatro exemplos de forma a podermos distinguir duas *Dimensões de Variação Possível*, uma relativamente ao tipo de polinómio – completo/incompleto e grau – e outra relativamente ao tipo de expressão – ser ou não um polinómio – que apresentam as *Amplitudes de Mudança Permitidas* ao nível dos dois aspectos distinguidos. Pela diversidade apresentada a sequência permite a ampliação dos *Espaços de Exemplos* dos alunos e algum aprofundamento da *Imagem do Conceito* de função. A faceta com que os quatro exemplos são apresentados é a *Faceta Simbólica* embora remeta para uma verificação da paridade pela utilização da *Faceta Geométrica*.
A utilização da faceta geométrica para verificar os resultados atingidos trabalhando os exemplos na faceta simbólica, prende-se com a *Transparência* apresentada pela faceta geométrica à noção de paridade. A faceta geométrica é bastante transparente à paridade apresentada pelo exemplo; por outro lado, a faceta simbólica apenas é transparente à paridade da função em casos muito específicos (Exemplos 1.2 e 1.4). O uso que foi feito desta sequência não contemplou a transparência (relativamente à paridade) ao nível da faceta simbólica, apenas o fez ao nível da faceta geométrica.

Esmeralda: **Episódio 22**
Dia: **2 Fevereiro 07**

Início: **LA 2 min 20 Seg.**
Fim: **LA 7 min 47 Seg.**

Manual: **Página 51**

Exemplo de Aplicação tratado pelos alunos

E: Depois levavam, da página 73, algum?
Aluna: Sim.
E: Da 73 fizemos todos na aula. Foi?
Aluna: Foi.
E: Depois levavam… Qual?
Aluna: [páginas] 51 e 52.
E: Ah! O problema! É o exercício …?
Alunos: 9.

9. Existem termómetros cujo funcionamento se baseia na relação entre a resistência de um fio metálico e a temperatura.

Suponha que essa relação pode ser descrita por um modelo matemático cuja representação gráfica é uma recta.

Experimentalmente, concluiu-se que para uma temperatura T de 10 °C a resistência R do fio era de 124 Ω (ohms) e para uma temperatura de 15 °C a resistência R do fio era de 126 Ω (ohms).

9.1 Escreva R em função de T.

9.2 Determine a temperatura que corresponde a uma resistência de 130 Ω (ohms).

E: 9. Que dizia que existem termómetros […] e para uma temperatura de 15 graus a resistência do fio era de 126 ohms.

(escreve no quadro enquanto fala: $\begin{array}{cc} T & \mathrm{R} \\ \multicolumn{2}{c}{(10;124)} \\ \multicolumn{2}{c}{(15;126)} \end{array}$)

E: Escreva R em função de T. Já nos dizem que a expressão terá que ser uma… a expressão da função terá que ser uma recta, conheço dois pontos, vamos escrever a equação da recta. Com os dois pontos vamos calcular o declive (escreve no quadro) $m=\dfrac{126-124}{15-10}=\dfrac{2}{5}$, o declive deu dois quintos, e depois com os dois quintos, que é o declive, e com um desses pontos escrevemos a equação da recta. Atenção que eu quero o R em função do T, em que o meu R funciona como se fosse o x e o meu T funciona como se fosse y. Certo? E então fica: (escreve no quadro enquanto verbaliza)

$$R-124=\frac{2}{5}(T-10)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R=\frac{2}{5}T-4+124\Leftrightarrow$$

$$R = \frac{2}{5}T + 120$$

Deu-vos isto?
Aluno: Sim
(pausa para os alunos transcreverem do quadro)
E: A segunda alínea pedia para determinar a temperatura que corresponde a uma resistência de 130 ohms. Ora temperatura… Então o que é que vamos ter que fazer?
(os alunos respondem que se deve proceder à substituição)
E: Exactamente. Posso apagar o lado esquerdo do quadro?
(apaga o quadro e escreve enquanto verbaliza)

$$130 = \frac{2}{5}t + 120 \Leftrightarrow$$

$$130 - 120 = \frac{2}{5}t \Leftrightarrow$$

$$\frac{10 \times 5}{2} = t \Leftrightarrow t = 25$$

25, foi o que vos deu?
Alunos: Sim, 25.
E: Ora, determine a temperatura. [Resposta:] 25 Graus.

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Pela simples observação do Exemplo se pode enquadrá-lo na 5ª Categoria, **Aplicações Externas**. É uma aplicação do conceito de função à Física que consiste, na primeira alínea, em passar a função apresentada da sua *Faceta Numérica* para a sua *Faceta Simbólica* e, no processo, aplicam-se as noções de declive, variável dependente/independente e de função afim. Na segunda alínea, determina-se a temperatura mediante a aplicação da relação entre imagem e objecto de uma função afim e com a resolução de uma equação de primeiro grau.
Na aplicação do conceito de função para resolução deste problema, a professora evidencia alguns traços do seu **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo**.
Claramente CPC:

- como a situação em causa é bem modelada por uma recta, a professora utiliza as características da função afim para resolver a situação apresentada na primeira alínea. Na segunda alínea por se apresentar uma relação objecto/imagem a professora opta pela utilização de uma equação de 1º grau por ser a solução mais simples (Cat. **Estratégias de Ensino**).
- chama a atenção dos alunos para que, se se quer escrever R em função de T, se deve proceder à escolha das variável dependente e independente (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*Atenção que eu quero o R em função do T, em que o meu R funciona como se fosse o x e o meu T funciona como se fosse y. Certo?*".
- para que se torne mais fácil para os alunos compreender o processo de aplicação do conceito de função, a professora utiliza uma tabela numérica onde se

relacionam as duas quantidades (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**).
- dá indicações aos alunos de como obter a equação da função afim à custa de dois pontos, determinando o declive e a expressão final (Cat. **Explicações**).

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:
- mostra aos alunos que a função relaciona duas quantidades mas, nessa relação, é necessário saber qual a quantidade que de da outra. Isto é, identificar qual será a variável dependente e a independente (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**), por isso escreve no quadro $R-124=\frac{2}{5}(T-10)$ para que se obtenha uma relação de R em função de T.
- relaciona, dentro do conceito de função, as *Facetas Numérica, Simbólica* e *Geométrica* de forma que dois pares ordenados de uma recta possam traduzir uma generalidade escrita sob a forma de equação (**Estrutura matemática e Conexões**).
- resolve e descreve a solução da situação problemática com facilidade e clareza (Cat. **Conhecimento Procedimental**).
- Escolheu determinado conteúdo, entre outros possíveis, para aplicar e solucionar o problema (Cat. **Métodos de Solucionar**)

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:
- apaga somente o lado esquerdo do quadro de forma a deixar, no lado direito, a informação pertinente fazendo, com isto, uma gestão adequada do quadro (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**)

Uso do Exemplo

O episódio retrata a correcção de um exemplo que foi proposto tara trabalho de casa. O uso deste exemplo tem como objectivo a aplicação dos conhecimentos sobre a função afim na resolução de um problema de uma área das ciências que não é exclusivamente a da Matemática. Com a resolução deste exemplo, os alunos poderão agregar ao seu *Espaço de Exemplos* um que não é apenas um percurso de um *processo*, ou a *Concretização* de uma definição promovendo, por isso, uma maior destreza na utilização do conceito de função.

Esmeralda: **Episódio 23**
Dia: **2 Fevereiro 07**

Início: **LA 8 min 40 Seg.**
Fim: **LA 18 min 16 Seg.**

Manual: **Página 77**

Sequência Planeada de Exemplos de Conceito tratada pelos alunos

Esmeralda: Ora, levavam o exercício 5. O 5.1, 5.2, 5.3, 5.4., Não era?
Verificar a paridade.
Aluno: Página?
E: Página 77. Já posso apagar o quadro? (apaga o quadro para poder escrever)

> 5. Relativamente a cada uma das seguintes funções verifique se é par, impar ou nem par nem impar.
>
> 5.1 $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 1$ 5.2 $g(x) = \dfrac{1+x^2}{x-2}$
>
> 5.3 $h(x) = x^5 - 3x$ 5.4 $i(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

E: Ora, portanto, 5.1 (escreve e verbaliza a expressão da função)

A nossa função é $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 1$, é esta, ontem tínhamos visto que para podermos estudar a paridade de uma função deveríamos calcular o $f(-x)$.

(escreve no quadro: $f(-x) = 2(-x)^4 - 5(-x)^2 + 1 =$)
E, no primeiro caso, temos –x à quarta dá…?
Aluna: x à quarta.
E: Dá x à quarta. No segundo caso, -x ao quadrado dá…?
Alunos: dá x ao quadrado.
E: dá x ao quadrado. E, mais 1.

(completa no quadro: $f(-x) = 2(-x)^4 - 5(-x)^2 + 1 = 2x^4 - 5x^2 + 1$)

E: Então, comparando as expressões, concluímos que… $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$ (escreve no quadro).
Logo a função *f* é par. Foi essa a conclusão?
Alunos: Sim.
Alunos: Foi.
E: Os que não fizeram passem, se faz favor, para corrigirmos o seguinte.
(pausa)
E: Já posso apagar?
Ninguém responde, parto do pressuposto de que sim. Não? (apaga o quadro)

(escreve no quadro e verbaliza simultaneamente: $g(x) = \dfrac{1+x^2}{x-2}$)

(escreve no quadro e verbaliza simultaneamente: $g(-x) = \dfrac{1+(-x)^2}{-x-2} = \dfrac{1+x}{-x-2}$)

E: g de x é igual a g de –x? (escreve $g(x) = g(-x)$)
Alunos: Não.

E: Não? [então é] Diferente. (altera o sinal e fica $g(x) \neq g(-x)$)
Então qual é o passo que deveremos dar agora a seguir?
(altera a expressão do quadro para $g(-x) \neq g(x)$)
E: Porque nós tínhamos já chegado a uma conclusão. Qual é?
Alunos: Não é par.
E: Não é par. Agora vamos verificar se ela será…?
Alunos: Impar.
E: … como?
Alunos: $-g(x)$
E: Ora, $-g(x)$, vamos ver a que é que será igual (escreve no quadro enquanto verbaliza $-g(x) = -\frac{1+x^2}{x-2}$) Esta expressão [$-g(x)$] é igual a esta [$g(-x)$]?
(os alunos hesitam mas dizem que não)
E: De certeza? Este "menos", já vos disse, tanto pode mudar os sinais do numerador como mudar os sinais do denominador. Como o numerador [de $g(-x)$] é igual [de $-g(x)$] vamos transportar este menos [de $-g(x) = -\frac{1+x}{x-2}$] para aqui [afectar o denominador] e como é que ficava o denominador?
Aluno: -x mais 2.
E: E aqui [$\frac{1+x}{-x-2}$] está …?
Aluna: -x menos 2.
E: Portanto, significa que $g(-x) \neq -g(x)$ (escreve no quadro). E tanto numa como noutra (escreve no quadro) $\forall x \in D_g$. Conclusão?
Alunos: A função *g* não é par nem é impar.

E: A função *g* não é par nem é impar.
(um aluno, João, chama a atenção da professora que na expressão $g(-x) = \frac{1+(-x)^2}{-x-2} = \frac{1+x}{-x-2}$ falta um quadrado e a professora acrescenta o quadrado em falta $g(-x) = \frac{1+(-x)^2}{-x-2} = \frac{1+x^2}{-x-2}$)
E: Ah, aqui este x, peço desculpa. Obrigada.
A função *g* não é par nem impar.
Quando puder apagar, digam.
(pausa)
E: Já? Então vamos passar à [questão] 5.3 (apaga o quadro e escreve $h(x) = x^5 - 3x$)
Ora $h(-x) = (-x)^5 - 3(-x) = -x^5 + 3x$.
Então h de x é igual a h de –x?
Alunos: Não.
E: Então (escreve no quadro) $h(-x) \neq h(x)$. Então será que (escreve no quadro) $h(-x) = -h(x)$? Vamos calcular o (escreve no quadro) $-h(x) = -x^5 + 3x$. É igual, ou não?
Alunos: É

E: É. Então, (acrescenta no quadro) $h(-x) = -h(x), \forall x \in D_h$, logo a função *h* é…?
Aluna: Impar.
E: … impar.
(um aluno pergunta como se obtém a parcela $+3x$)
E: Porque quando faz a multiplicação, como fica? -3 vezes -1? Dá +3. Não é? +3*x*.

(pausa para os alunos transcreverem do quadro para os cadernos diários)
E: Posso apagar? Então vamos corrigir a 5.4.
(espera mais um pouco e apaga o quadro)
(escreve no quadro $i(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

$i(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x}{x^2 - 1}$)
E: Será que i de x é igual a i de $-x$?
Aluno: Não.
E: i de x, i de $-x$, diferente (escreve no quadro $i(x) \neq i(-x)$). Vamos calcular o simétrico de $i(x)$ (escreve no quadro $-i(x) = -\frac{x}{x^2 - 1}$). Então e a igualdade entre i de $-x$ e menos i de x, é verdadeira?
(escreve $i(-x) = -i(x)$)
Alunos: É.
E: É. Para todo o x pertencente ao domínio de i (escreve $i(-x) = -i(x), \forall x \in D_i$). Conclusão?
Alunos: A função é impar.
E: A função i é impar.

Fim da Transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Estes quatro exemplos, que compõem a sequência, destinam-se a que os alunos trabalhem a noção de paridade de funções quando estas se apresentam na *Faceta Simbólica*. São exemplos que, também como trabalho de casa, vêm no seguimento dos dois exercícios da página 70 tratados no episódio 21. A diferença de tratamento entre estes quatro exemplos e os dois exemplos do episódio 21, prende-se com o facto de que nos outros dois se pedia para indicar quais as funções pares e nestes quatro pede-se para estudar a paridade. São, ainda, os primeiros contactos autónomos com o estudo da paridade de uma função e, consequentemente, incluem-se na 2ª Categoria, **Abordagem Inicial Autónoma**. Os exemplos da sequência são *Exemplos Planeados de Conceito* que não apresentam grande variação, dois são polinomiais e dois são racionais e, ao contrário dos dois exemplos do episódio 21, a faceta a trabalhar é exclusivamente a simbólica.
Contudo, a correcção do trabalho de casa permite destacar diversos elementos do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo**.
Claramente CPC:

- porque, em todos os exemplos, recorre às igualdades constantes da definição de função par/impar a professora estabelece dom os alunos modos de pensar vinculados à noção de paridade de uma função (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*Então, comparando as expressões, concluímos que... $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$. Logo a função f é par.*".
- mostra aos alunos como comparar $f(-x)$ e $-f(x)$ quando a função é uma fracção, afectando em $-f(x)$ o sinal de menos, ou ao numerador ou ao

denominador (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*Este "*menos*", já vos disse, tanto pode mudar os sinais do numerador como mudar os sinais do denominador.*".
- no cálculo de uma expressão um aluno não identificava a proveniência de uma parcela – 3x – tendo a professora que explicar essa origem (Cat. **Explicações**): "*Porque quando faz a multiplicação, como fica? -3 vezes -1? Dá +3. Não é? +3x.*".

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:
- todo o trabalho ao longo da sequência pretende deixar claro aos alunos que o estudo da paridade de uma função que se apresenta na *Faceta Simbólica* radica no cálculo, e comparação, entre as expressões $f(x)$, $f(-x)$ e $-f(x)$ (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**).

Conhecimento pedagógico num Contexto de Conteúdo:
- utiliza o diálogo com um ou vários alunos com o objectivo de os manter focalizados na correcção, para uns, ou na aprendizagem, para outros (Cat. **Obtenção e Manutenção da Atenção do Aluno**).
- utiliza o quadro de forma eficaz quando mantém ou escreve no quadro toda a informação importante (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).

Uso do Exemplo

Na sequência de quatro exemplos não se observa uma *Dimensão de Variação Possível* clara. As funções distinguem-se por serem racionais ou irracionais e, dentro de cada tipo, não é observável que se trabalhe uma *Amplitude de Mudança Permitida*. O uso destes exemplos não promovem uma profunda *Ampliação do Espaço de Exemplos* do aluno e tampouco se pode entender que contribua para o desenvolvimento da estrutura da *Imagem do Conceito* de função.
O uso do exemplo evidenciado pela sequência é meramente rotineiro e destina-se a consolidar o cálculo. A aplicação da definição de função par/ímpar não é difícil, as dificuldades dos alunos prendem-se, efectivamente, com o cálculo. Sem menosprezar este tipo de exemplos, é importante que se incluam no trabalho de qualquer aluno. Como sabemos, a destreza no cálculo é fundamental na educação matemática de qualquer aluno.

Esmeralda: **Episódio 24**
Dia: **2 Fevereiro 07**

Início: **LA 23 min 30 Seg.**
Fim: **LA 28 min 44 Seg.**

Manual: **Página 82**

Sequência de Exemplos de Conceito tratado pelos alunos e pela professora.

[A professora pediu aos alunos para escreverem o seguinte, explicando o significado do que eles iam escrevendo:

Título: Função Quadrática

Uma função quadrática é uma função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$.
O domínio de uma função quadrática é o conjunto dos números reais.
O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.]

Esmeralda: Ora pois bem, o exercício que vocês têm na pagina 82, que é o exercício 1

1. Utilize a calculadora gráfica para obter a representação gráfica da função *f* definida por:

1.1	$f(x) = x^2 - 4x + 3$	1.2	$f(x) = -x^2 + 4x - 3$
1.3	$f(x) = 2x^2 - 3x + 3$	1.4	$f(x) = -2x^2 + 3x - 3$

que diz para vocês usarem a calculadora gráfica para obterem representações gráficas dessas parábolas. Eu gostava que vocês fizessem a representação gráfica da 1.1 e da 1.2 e me dissessem o que é que tinha acontecido.
Helena, página 82.
(pausa para os alunos executarem a tarefa)
Aluna: Professora, dá uma coisa assim (mostra a máquina de calcular gráfica à professora e indica com a mão o sentido da concavidade)
E: Sim senhor. Essa "coisa assim" significa que o gráfico tem a concavidade voltada para…
Aluna: … cima.
E: E qual é que tem a concavidade voltada para baixo?
Inês: (imperceptível)
E: A Inês diz que, a 1.2, a função que está representada na 1.2, que é $f(x) = -x^2 + 4x - 3$, tem a concavidade voltada para baixo. A parábola que representa esta função tem a concavidade voltada para baixo. E a parábola que tem de equação $f(x) = x^2 - 4x + 3$ tem a concavidade voltada para cima. Toda a gente conseguiu visualizar? Sim? Rita? Sim? O Ricardo continua sem calculadora. Não?
Diga?
(o Ricardo diz que o companheiro do lado tem uma)
E: Vocês têm uma calculadora? Pronto.
Então, agora, vamos fazer assim: vão apagar essas duas e vão fazer as outras duas.
(pausa para os alunos fazerem e apoia individualmente os alunos que pedem ajuda)
E: Olhem todos. Quando a primeira coisa que vocês vão escrever numa expressão, da vossa calculadora, seja um sinal de menos, as [máquinas] Texas não aceitam o sinal de menos este porque este é o menos operacional. Aceitam, sim, o posicional que é este que está entre parênteses. E se não o fizerem diz "Erro de Sintaxe".

(pausa)
E: O que é que me podem dizer acerca destas duas parábolas?
(os alunos falam todos ao mesmo tempo, não se percebendo o que dizem)
E: Ou seja, uma tem a concavidade voltada…
Alunos: … para cima e a outra para baixo.
(um aluno refere que as expressões são simétricas)
E: Isso, do serem simétricas, são outros quatrocentos (⇔ indicação que esse é outro assunto a tratar posteriormente).
Portanto, uma tem a concavidade voltada para cima e a outra tem a concavidade voltada para baixo.
Será que vocês me podiam dizer alguma coisa sobre o sentido das concavidades? Quando é que uma parábola terá a concavidade voltada para cima?
(vários alunos dão a sua resposta. Confuso)
E: Quando o x ao quadrado é positivo. O x ao quadrado é que é positivo?
Aluna: Não. O *a*.
E: O *a*. Muito bem. O *a* chama-se o coeficiente do x quadrado, não se chama x quadrado.
Portanto, sim senhora, quando o coeficiente do x quadrado for positivo a minha parábola tem a concavidade voltada…
Aluna: … para cima.
E: Quando o coeficiente do x quadrado for …
Alunos: … negativo…
E: … a minha parábola tem a concavidade…
Alunos: … voltada para baixo.
E: Então, quando vos pedirem para indicarem o sentido das concavidades, olhamos para a nossa função de grau dois, olhamos para o coeficiente do x quadrado, e de acordo com o sinal que ele tiver, assim eu dou a minha resposta em relação ao sentido das concavidades. Entendido?
Alunos: Sim.

Fim da Transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

A sequência inclui quatro exemplos e foi apresentada imediatamente após a definição formal de função quadrática com indicação do seu domínio e gráfico. Não são exemplos apresentados pela professora mas sim obtidos na máquina de calcular gráfica que relacionam a *Faceta Simbólica* com a *Faceta Geométrica*. Como os exemplos não têm outra finalidade que não seja visualizar os gráficos, e constituem uma concretização imediata do que foi escrito pelos alunos. Sendo o primeiro contacto que os alunos têm com a parábola, estes *Exemplos Modificados de Conceito* incluem-se na 1ª Categoria, **Definição/Apresentação**. Classificamos os exemplos como *Modificados* devido à adaptação que sofreu. Apenas se destinava à obtenção dos gráficos e passou a incluir o estudo visual do sentido da concavidade das parábolas.
Este episódio deixa ver alguns dos elementos do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** da professora.
Claramente CPC:

- utiliza a calculadora gráfica para gerar gráficos de parábolas para exemplificação do conteúdo em estudo (**Estratégias de Ensino**).
- usa os gráficos obtidos para realçar o facto de algumas parábolas terem o sentido da concavidade voltado para cima enquanto outras o têm voltado para baixo (Cat. **Representações Apropriadas e Detalhadas dos Conceitos**): "*Portanto, uma tem a concavidade voltada para cima e a outra tem a concavidade voltada para baixo.*".

- explica o procedimento correcto de utilização da máquina de calcular gráfica (Cat. **Explicações**): "*Olhem todos. Quando a primeira coisa que vocês vão escrever numa expressão, da vossa calculadora, seja um sinal de menos, as [máquinas] Texas não aceitam o sinal de menos este porque este é o menos operacional. Aceitam, sim, o posicional que é este que está entre parênteses.*".
- utiliza a máquina de calcular gráfica como recurso de apoio às aprendizagens (Cat. **Conhecimento de Recursos**).

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:

- identifica o sentido da concavidade de uma parábola como aspecto importante para a compreensão do assunto em estudo (**Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*Sim senhor. Essa "coisa assim" significa que o gráfico tem a concavidade voltada para…*"; "*… a função que está representada na 1.2, que é $f(x) = -x^2 + 4x - 3$, tem a concavidade voltada para baixo. A parábola que representa esta função tem a concavidade voltada para baixo. E a parábola que tem de equação $f(x) = x^2 - 4x + 3$ tem a concavidade voltada para cima. Toda a gente conseguiu visualizar? Sim? Rita? Sim?*".

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- usa o diálogo com os alunos como estratégia de interacção com os alunos de forma a mantê-los atentos no conteúdo em questão (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção dos Alunos**).
- conclui e sistematiza a informação como forma de fecho do assunto (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**): "*Então, quando vos pedirem para indicarem o sentido das concavidades, olhamos para a nossa função de grau dois, olhamos para o coeficiente do x quadrado, e de acordo com o sinal que ele tiver, assim eu dou a minha resposta em relação ao sentido das concavidades. Entendido?*".

Uso do Exemplo

Esta sequência de exemplos faz a introdução da parábola aos alunos. A professora, após a definição de função quadrática e da designação do gráfico que a representa graficamente podia ter esboçado, ela própria, algumas parábolas. Não o fez. Optou, antes, que fossem os alunos a obter esses gráficos por meio da calculadora gráfica.
O uso deste exemplo serviu para que os alunos se apercebessem de características da função quadrática, que são exclusivas do respectivo gráfico, mas que podem ser antevistas na equação. Após a chamada de atenção para a *Dimensão de Variação Possível* constituída pela utilização do parâmetro *a*, coeficiente do termo em x^2, cuja *Amplitude de Mudança Permitida* se prende com o sinal desse parâmetro, a professora consegue que os alunos se apercebam da *Transparência* do parâmetro relativamente ao sentido da concavidade do gráfico. Como é observável no episódio, na sua parte final, os alunos conseguem identificar o sentido da concavidade do gráfico pela análise do coeficiente do termo em x^2, que era o objectivo modificado da utilização da sequência de exemplos.

Este episódio contém, pelo uso dos exemplos, características que merecem ser sublinhadas.
O enunciado da actividade não faz referência ao sentido da concavidade, apenas pede que sejam obtidos os gráficos na máquina de calcular gráfica, foi por este motivo que se considerou a sequência como sendo formada por exemplos modificados. A modificação do objectivo do uso da sequência foi uma consequência do comentário de uma aluna no início do episódio sobre o aspecto gráfico da função que obteve. Como a alusão ao sentido da concavidade do gráfico foi notória, a professora inflectiu por essa linha de trabalho.
Por outro lado, houve um outro aluno que fez alusão ao facto de as expressões serem em pares simétricos. A professora não deu importância a esse facto por não ser uma característica fundamental para a linha de trabalho escolhida, a relação entre o coeficiente do termo em x^2 e o sentido da concavidade. O facto de serem simétrica não traz qualquer benefício ao que se pretende da sequência e pode, no fim, apenas atrapalhar ou levar a conclusões erróneas sobre a concavidade.

Esmeralda: **Episódio 25**
Dia: **2 Fevereiro 07**

Início: **LA 28 min 45 Seg.**
Fim: **LA 34 min 29 Seg.**

Manual: **Página 82**

Exemplo de Conceito tratado pelos alunos e pela professora

Esmeralda: Ora o exercício 2.

2. A função *g* definida por $g(x) = -2\left(x+1\right)^2 + 2x^2$ será uma quadrática? Porquê?

pede para dizerem se essa função *g* é ou não uma função quadrática. E porquê.
Eu pergunto: E o que é que teremos que fazer?
Aluna: Desenvolver o quadrado.
E: Desenvolver o quadrado, sim senhora. Então, vamos a isso.
(pausa)
E: Atenção que, vocês aí na função $g(x)$, têm o quadrado de uma soma. Vejam muito bem como é que o vão desenvolver, porque vocês costumam dizer que é o quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo, e não é.
Aluno: É o quadrado do primeiro, mais o dobro do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.
E: Exactamente. É o quadrado do primeiro, mais o dobro do primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo.
(pausa)
E: Trabalhar a expressão não implica conversa. Implica, cada um por si, fazer o desenvolvimento. Por vocês gostarem muito da conversa é que, depois nos testes, como não há conversa, os testes são feitos individualmente, é que acontece aquilo que vocês às vezes não esperam. (Escreve no quadro $g(x) = -2\left(x+1\right)^2 + 2x^2$)
Ora, Patrícia como é que fica o desenvolvimento de x+1 ao quadrado?
Patrícia: x ao quadrado, mais 2x, mais 1.
(a professora vai escrevendo a resposta da Patrícia)
E: Alguém já acabou de fazer a simplificação [da expressão] da função $g(x)$?
Já, ou não? Sim? Que conclusão tiraram?
Aluna: Não é uma função quadrática.
E: Não é quadrática, porque…?
Aluna: Porque o *a* anula-se.
E: Porque o termo em x quadrado desaparece. O seu coeficiente é nulo. Já vamos dar a justificação.
Ora então vamos acabar este desenvolvimento:

$$g(x) = -2\left(x+1\right)^2 + 2x^2 = -2\left(x^2 + 2x + 1\right) - 2x^2 = -2x^2 - 4x - 2 + 2x^2 = -4x - 2$$

Toda a gente chegou a esta conclusão?
(ninguém disse que não)
E: Já acabaram os cálculos? Então vamos justificar. *g* não é uma função quadrática porque (escreve no quadro a expressão) $g(x) = -4x - 2$, logo é uma função de grau 1.
Aluno: Desculpe professora, podia repetir.
E: Porque, $g(x) = -4x - 2$ não é quadrática por o $g(x)$ ser igual àquela expressão, e aquela expressão, logo… é uma função de grau 1.

Havia outras formas de justificar, dizendo que, como a é igual a zero, o termo em x quadrado desaparecia, logo a função $g(x)$ passava a ser uma função de grau 1, portanto não podia ser quadrática.

Fim da Transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O exemplo cujo uso este episódio reproduz é um caso típico de um *Não-exemplo*. Este caso tem como fim delimitar os contornos do conceito de Função Quadrática, pretende mostrar que não basta que existam termos em x^2 para que a função seja de 2º grau. No fundo, o não-exemplo ajuda a construir a *Imagem do Conceito* de função quadrática estabelecendo os limites e contornos deste conceito sendo, portanto, estruturante. Pela função desempenhada, o não-exemplo enquadra-se na 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**.

Relativamente aos aspectos demonstrados do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** da professora temos

Claramente CPC:

- a professora estabelece com os alunos um raciocínio relacionado com o conceito de função do 2º grau. Isto é, relaciona o grau do polinómio com as condições da definição (Cat. **Pensamento do Estudante**):
  Aluna: *Não é uma função quadrática.*
  E: *Não é quadrática, porque…?*
  Aluna: *Porque o* "a" *anula-se.* "
- chama a atenção para um erro muito comum nos alunos. No desenvolvimento do quadrado do binómio, os alunos costumam indicar apenas os quadrados doas duas parcelas (Cat. **Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas**): "*Vejam muito bem como é que o vão desenvolver, porque vocês costumam dizer que é o quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo, e não é.*".
- dá a razão pela qual na expressão final não figura nenhum monómio com grau 1 (Cat. **Explicações**): "*…o termo em x quadrado desaparece. O seu coeficiente é nulo.*".

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:

- indica aos alunos que o aspecto crítico para que uma função seja quadrática é a existência de um monómio de 2º grau. Isto é, segundo a definição, o coeficiente do termo de 2º grau não pode ser zero para que a expressão seja do 1º grau (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*Então vamos justificar. g não é uma função quadrática porque (escreve no quadro a expressão)* $g(x) = -4x - 2$*, logo é uma função de grau 1.*"

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- chama a atenção dos alunos de forma a mantê-los concentrados no tema (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**): "*Trabalhar a expressão não implica conversa. Implica, cada um por si, fazer o desenvolvimento.*"
- No final, conclui e sistematiza os pontos fundamentais do episódio indicando, além disso, outro modo de justificar a resposta dada (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).

Uso do Exemplo

O exemplo (não-exemplo) utilizado pela professora tem um único objectivo que é bem definido: mostrar aos alunos que nem toda a expressão onde figure x^2 é uma função quadrática. Este exemplo ultrapassa a definição de função quadrática e é por isso que deixa melhor delineado até onde vai essa definição. O uso do não exemplo tem esse objectivo, delimita os limites do conceito mostrando o que já não é exemplo desse mesmo conceito. Da mesma forma que estabelece os limites do conceito, também delimita o *Espaço de Exemplos* estabelecendo quais são e quais não são exemplos de uma função quadrática.

Embora o exemplo tenha sido proposto para trabalho de casa, a resposta da aluna, logo no início do episódio, mostra que o objectivo da apresentação deste exemplo foi atingido. À pergunta de se a função era quadrática, a aluna responde inequivocamente: "*Não é uma função quadrática.*", e justifica: "*Porque o "*a*" anula-se.*". Todavia, para que não restassem dúvidas aos restantes alunos, a professora deixa claro que a função, de início com monómios de 2º grau, é no fundo de 1º grau e, por isso, não pode ser quadrática: "*Porque,* $g(x) = -4x - 2$ *não é quadrática por o* $g(x)$ *ser igual àquela expressão, e aquela expressão, logo… é uma função de grau 1.*".

Esmeralda: **Episódio 26**
Dia: **2 Fevereiro 07**

Início: **LA 34 min 31 Seg.**
Fim: **LB 00 min 46 Seg.**

Manual: **Página 83**

Sequência de Exemplos de Conceito tratada pelos alunos e pela professora.

Esmeralda: Página 83, exercício 1.

> 1. Por observação da expressão analítica da função *f*, indique o sentido da concavidade do respectivo gráfico e em seguida verifique a resposta usando a calculadora gráfica.
>
> 1.1 $f(x) = x - x^2$ 1.2 $f(x) = x^2 - 4x - 5$
>
> 1.3 $f(x) = -3(x+1)^2$ 1.4 $f(x) = 1 - x + x^2$

e não quero nada, a não ser, que vocês olhem para as parábolas e respondam. Para as parábolas… para as funções. *Por observação da expressão analítica da função f, indique o sentido da concavidade do respectivo gráfico e em seguida verifique a resposta usando a calculadora gráfica.* Rui, $f(x) = x - x^2$ qual é o sentido da concavidade desta parábola?
Rui: Voltada para cima.
E: O Rui diz que é para cima. O Rui tem estado a dormir, há bocado os seus colegas disseram que se o *a* fosse menor que zero a concavidade era voltada para baixo (escreve no quadro $a < 0$ a concavidade era voltada para baixo $\bigcap$), assim. E disseram que quando o *a* fosse menor do que zero a concavidade era voltada para cima (escreve no quadro $a > 0$ a concavidade era voltada para cima $\bigcup$). Então passem esta informação para o caderno se fazem favor, isto é para os distraídos também. Nós não podemos usar só a calculadora porque, suponham que a calculadora se encontrava perdida, como é que fazia? A calculadora é complementar à sua memória e à sua inteligência, não é substitui-las.
(pausa)
E: Então vou voltar a perguntar: A concavidade da primeira parábola é voltada para cima ou para baixo?
Alunos: Voltada para baixo.
E: Então façam o favor de na 1.1 escreverem que, concavidade voltada para baixo. Já está, Patrícia? Do que está à espera?
Patrícia: Então aqui está escrito $x - x^2$ …
E: E…? Patrícia.
Patrícia: O *a* é maior que zero.
E: O *a* é maior que zero?
Patrícia: Então não é?
E: Ah é? Por acaso eu já apaguei, mas se for ao seu caderno lá tem que $f(x) = ax^2$… O *a* é o coeficiente do x quadrado, não é o coeficiente do x. E agora, depois de descobrir o sentido da concavidade, vá à calculadora e verifique que realmente tem uma parábola com a concavidade voltada para baixo.
A 1.2, Bruna. A concavidade voltada para baixo ou para cima?
Bruna: Para cima.
E: Na 1.2 a Bruna acha que a concavidade é voltada para cima. É, ou não?
Alunos: É.

E: É, o coeficiente do x quadrado é 1. Ou seja *a* é igual a 1, é maior que zero, logo a concavidade é voltada para cima. Já está? Já está, Ricardo?
(pausa)
E: Núria, 1.3.
Núria: Para baixo.
E: Sim senhora. Concordam com ela ou não?
Alunos: Sim.
E: Quando nós fazemos o desenvolvimento do quadrado da soma, fica x quadrado mais 2x mais 1, mas depois quando eu vou multiplicar eu passo a ter MENOS três x quadrado. Porque eu tenho -3 a multiplicar pelo caso notável da multiplicação. Logo o coeficiente do x quadrado é $a=-1$ (a professora distraiu-se, é -3), é menor do que zero, logo a concavidade é voltada para baixo. Eu espero que vocês estejam a tomar nota de tudo o que eu estou a dizer. Porque quando resolverem estudar… como não estudam diariamente… porque quando resolverem estudar e depois não se lembram porque é que ficou isso aí marcado, mas pronto.
A 1.4, Soraia. $4-x+x^2$, terá a concavidade voltada para cima ou para baixo?
Soraia: Para cima.
E: Porque…?
Soraia: Porque o coeficiente do x …
E: … quadrado…
Soraia: … do x quadrado…
E: …é quanto?
Soraia: É nulo.
E: É nulo? É nulo, não. Ser nulo é ser zero, significava que não ia haver x quadrado.
Soraia: É um.
E: É um, portanto o coeficiente do x quadrado é um, ou seja, o *a* é igual a 1, maior do que zero, logo a concavidade é voltada para cima.

Fim da Transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

A sequência de exemplos proposta aos alunos não é exclusivamente trabalhada pelos alunos de forma autónoma. Note-se que é a professora que, interrogando os alunos, trabalha os exemplos da sequência avaliando, deste modo, as aprendizagens anteriores. No episódio 24 a professora fez pausas para que os alunos trabalhassem os exemplos de forma autónoma, nesta sequência a professora questiona directamente e pede as justificações para a resposta dada pelo aluno. O pendor avaliativo do objectivo de cada exemplo é patente e visa avaliar a solidez das respostas. Em cada um dos quatro casos, as respostas sobre o sentido das concavidades podem ser dadas de forma imediata devido à *Transparência* da equação a esse aspecto da parábola definida: "…*não quero nada, a não ser, que vocês olhem para as (...) funções. (...) qual é o sentido da concavidade desta parábola?*". O objectivo da aplicação da sequência é fazer emergir dúvidas e fragilidades na utilização da transparência que as equações apresentam após uma fase de exploração autónoma prévia. Como será descrito à frente, essas fragilidades surgiram e a professora cumpriu o seu papel. Assim, estes quatro *Exemplos Planeados* de conceito de função apresentados na sua *Faceta Simbólica* enquadram-se na 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**.
Características do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** apresentado no episódio são bem visíveis.
Claramente CPC:

- a professora chama a atenção dos alunos que a resposta deve ser dada apenas pela observação das equações (Cat. **Estratégias de Ensino**): "*…não quero nada, a não ser, que vocês olhem para as (…) funções. (…) qual é o sentido da concavidade desta parábola?*".
- establece com os alunos formas de raciocínio especificas do conteúdo em questão (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*…há bocado os seus colegas disseram que se o* a *fosse menor que zero a concavidade era voltada para baixo, assim. E disseram que quando o* a *fosse menor do que zero a concavidade era voltada para cima*".
- identifica, e esclarece, um erro muito comum entre os alunos na identificação do coeficiente do termo em x^2, aquele que é indicador do sentido da concavidade da parábola (Cat. **Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas**): "*O a é o coeficiente do x quadrado, não é o coeficiente do x*."
- dá indicações de como proceder para transformar a equação do exemplo $f(x) = -3(x+1)^2$ numa do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ e, só então, verificar o sinal do coeficiente do termo em x^2 (Cat. **Explicações**): "*Quando nós fazemos o desenvolvimento do quadrado da soma, fica x quadrado mais 2x mais 1, mas depois quando eu vou multiplicar eu passo a ter MENOS três x quadrado. Porque eu tenho -3 a multiplicar pelo caso notável da multiplicação. Logo o coeficiente do x quadrado é* $a = -1$ (a professora distraiu-se, é -3), *é menor do que zero, logo a concavidade é voltada para baixo.*".
  indica a uma aluna o significado do termo "nulo" (Cat. **Explicações**): " *É nulo? É nulo, não. Ser nulo é ser zero, significava que não ia haver x quadrado.*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico.

- transmite ao aluno a informação fundamental para que ele possa identificar o sentido da concavidade da parábola dada a sua equação (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*… se o* a *fosse menor que zero a concavidade era voltada para baixo. (…)quando o* a *fosse menor do que zero a concavidade era voltada para cima*".

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- interage, através do diálogo, com os alunos com o intuito de verificar as suas aprendizagens (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**).
- situa os alunos na actividade a desenvolver pela leitura e explicação do enunciado do exemplo; repreende o aluno pela sua falta de atenção relativamente aos trabalhos anteriormente desenvolvidos: "*O Rui tem estado a dormir, há bocado os seus colegas disseram que se o a fosse menor que zero…*"; escreve no quadro a informação crítica $a > 0 \Rightarrow \bigcup$ e $a<0 \Rightarrow \bigcap$; o episódio inclui uma *abertura* e *fecho* (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**)

Uso do Exemplo

Como já se disse, a proposta desta sequência aos alunos sob a forma de diálogo tem como objectivo fazer sobressair as fragilidades de aprendizagem dos alunos e as dúvidas que elas possam suscitar. A faceta utilizada foi a *Faceta Simbólica*, na forma de equação da quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$. No episódio 24 também se procedeu a trabalhar uma actividade semelhante. Porém, o uso dos exemplos é substancialmente diferente. Na sequência descrita no episódio 24, o uso que dela se fez foi centrado no aluno, a professora fazia pausas de modo que os alunos pudessem trabalhar os exemplos de forma autónoma, sendo o papel da professora corrigir o trabalho desenvolvido. Já no presente episódio se pode constatar que o papel da professora é diverso, não existem pausas, os exemplos desta sequência são trabalhados simultaneamente por alunos e professora. O trabalho dos alunos não é corrigido, as respostas são avaliadas pela professora.

Relativamente à parábola que esta equação define, a equação é *Transparente* ao sentido da sua concavidade através do sinal apresentado pelo parâmetro *a*. Contudo, é usual que os alunos atendam ao coeficiente do primeiro termo da equação apresentada e não ao coeficiente do termo em x^2. Esse erro surgiu neste episódio aquando a intervenção de dois alunos no início do episódio. O erro a que nos referimos é recorrente, é natural que muitos alunos o cometam quando trabalham a transparência do sinal do coeficiente do termo em x^2 ao sentido da concavidade da parábola. Os alunos fixam o parâmetro *a* da expressão quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ como sendo o coeficiente do primeiro monómio a aparecer. Assim, no primeiro exemplo apresentado pela sequência $f(x)=x-x^2$, o valor de *a* para os dois alunos, Rui e Patrícia, não é de $a=-1$, coeficiente do termo em x^2, mas sim $a=1$ que é o primeiro coeficiente que se lê, mas que não é *a* mas sim *b*. No final, a professora esclareceu a dúvida. Por isso, pode-se afirmar que a previsão da professora, que alguns alunos cometeriam este erro, se verificou e, por isso, a sequência cumpriu o seu objectivo: evidenciou as fragilidades da *Imagem do Conceito* em pelo menos dois alunos e, a superação dessas dificuldades promove uma mais correcta estruturação do conceito de função; neste caso de função quadrática.

A sequência faz ampliar o *Espaço de Exemplos* do conceito de função do aluno com um tipo novo de exemplos, aqueles em que é possível, por análise da equação, indicar directamente o sentido das concavidades das respectivas parábolas.

Para finalizar, a nosso ver, a ordem apresentada pela sequência não será a melhor. Julgamos que os casos que encaixam directamente na forma $f(x)=ax^2+bx+c$ de modo que o primeiro monómio fosse o termo de 2º grau e, apenas depois, surgissem os casos que não estivessem na forma "*geral*". A sequência teria, assim, este aspecto:

> 1. Por observação da expressão analítica da função *f*, indique o sentido da concavidade do respectivo gráfico e em seguida verifique a resposta usando a calculadora gráfica.
>
> 1.1 $f(x)=x^2-4x-5$ 1.2 $f(x)=x-x^2$
>
> 1.3 $f(x)=1-x+x^2$ 1.4 $f(x)=-3(x+1)^2$

A nova ordem apresenta uma *Variação* mais inteligível ao aluno, a diferença de ordem dos graus dos monómios de cada exemplo é mais evidente e, deste modo, a transparência do coeficiente do termo em x^2 relativamente ao sentido das concavidades é mais evidente ao aluno.

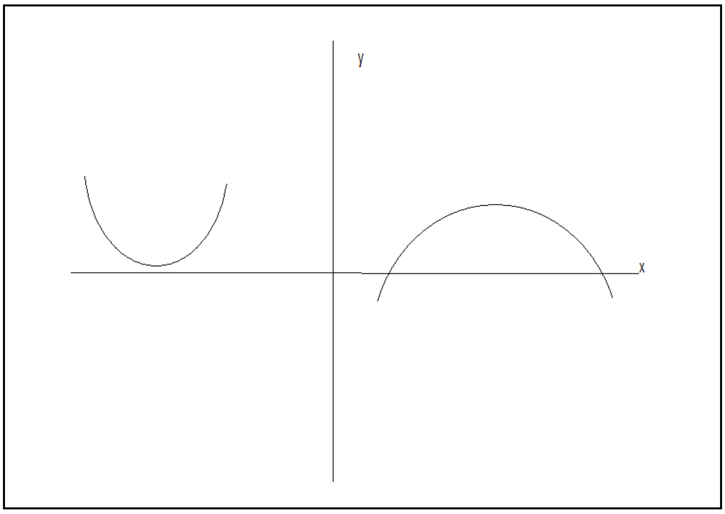
Esmeralda: **Episódio 27**
Dia: **2 Fevereiro 07**

Início: **LB 01 min 19 Seg.**
Fim: **LB 19 min 30 Seg.**

Manual: **Página 85**

Sequência de Exemplos de Conceito tratada pelos alunos.

Esmeralda: Ora portanto, o ponto que se segue fala da intersecção de uma função quadrática com os eixos coordenados. E vocês já sabem que quando uma função intersecta o eixo dos yy, o que é que acontece a esse ponto? Ao ponto de intersecção? Como é que são as coordenadas desse ponto?
Zero, qualquer coisa. Então e quando a intersecção é com o eixo dos xx?
Aluno: Qualquer coisa, zero.
E: É qualquer coisa, zero. Sim senhor. Portanto no [secção] 3.1 do vosso livro diz que, *o conhecimento das coordenadas dos pontos de abcissa zero é muito importante para a representação gráfica de uma quadrática e para a resolução de problemas concretos*. Vocês já repararam que quando traçam as vossas parábolas, e de acordo com o sentido da concavidade, elas podem ser assim, ou elas podem ser assim.
(esboça no quadro duas parábolas)

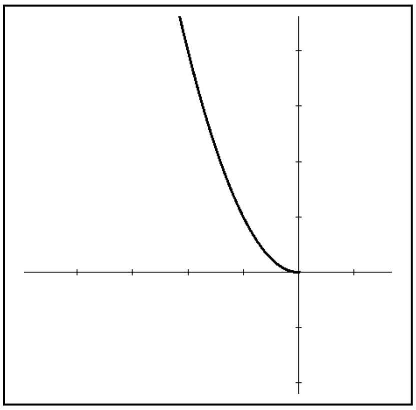


E: Como é que nós iremos classificar este ponto aqui? (indica o vértice da parábola da esquerda)
(nenhum aluno responde)
E: Este ponto em relação a todos os outros pontos da função.
Aluna: É mínimo.
E: Um mínimo. Então e este ponto aqui (indica o vértice da parábola da direita) em relação a todos os outros?
Alunos: É o máximo.
E: E esse mínimo e esse máximo na nossa parábola, ou seja, as coordenadas desse ponto, vão corresponder às coordenadas do vértice da minha parábola. Porque aquele mínimo ou aquele máximo vai ser o vértice da minha parábola.
Ora portanto, vamos à página oitenta e cinco, e depois o vértice nós vamos tratá-lo mais à frente, e vamos resolver o exercício 1.

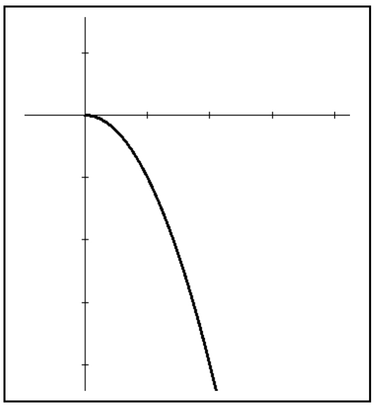
1. Represente graficamente a função *f* definida por:

1.1	$f(x) = x^2, x < 0$	1.2	$f(x) = -x^2, x \geq 0$
1.3	$f(x) = x^2 - 4x + 2, x > 0$	1.4	$f(x) = -(x-2)^2, x \leq 0$

Represente graficamente a função f definida por: f de x igual a x quadrado, e depois atenção, temos uma condição, x menor que zero. Vocês nas vossas calculadores têm duas hipóteses para ver o x menor que zero, ou vão ao *window* e definem o x menor que zero, ou então, quando estão a escrever a vossa função, fazem: (escreve no quadro) $(x^2)(x<0)$. Este menor, nas TEXAS, vocês vão buscar ao *Test*, eu acho que já cá tinha dito. Vão buscar à opção *Test* que têm na calculadora, e depois pedem o gráfico e a função dá-vos o gráfico só naquele intervalo pretendido. De menos infinito a zero.
Aluno: E nas CASIO, professora, como é?
E: Ora boa. Nas CASIO… talvez nas opções…
(a professora com alguns alunos fazem por encontrar a forma de restringir o domínio nas calculadores CASIO)
E: Já toda a gente viu? Temos que passar para o caderno, é o que pedem, para nos fazermos a representação gráfica.
Então minha função $f(x)$ vai ter este aspecto (esboça o gráfico no quadro):



(alguns alunos requerem a ajuda da professora que os apoia nas respectivas necessidades na máquina de calcular)
E: Atenção, se eu quero os valores menores do que zero, o x mínimo terá que ser, por exemplo, -10 e o x máximo zero. E agora já vem o sítio certo. Eu quero os menores que zero, logo o zero é o maior.
(continua a dar apoio individualizado sobre como operar com a máquina)
E: Vamos fazer a 1.2. A 1.3 e a 1.4 vai para trabalho de casa e vamos depois resolver o exercício 2.
E: Mara e Inês, o que é que se passa?
(pausa para os alunos concluírem a questão 1.2)
Aluna: Fazemos a 1.2 e a 1.3?
E: Não, vamos fazer aqui a 1.2. A 1.3 e a 1.4 é que é para trabalho de casa. E vamos resolver o exercício 2.
(a professora vai dando indicações sobre a máquina de calcular para que os alunos possa realizar a actividade)
E: A 1.2 é uma parábola com a concavidade voltada para baixo. E o aspecto gráfico vai ser este (esboça o gráfico no quadro):



É isto que vocês visualizam.

(Porque uma aluna interrompe para questionar a professora sobre o próximo teste de avaliação, verifica-se uma pausa para marcar esse teste)
E: Olhem, na primeira função que vocês representaram há uma coisa que temos que ter em atenção. Esta (2º gráfico) o zero pertence (marca bola fechada), na outra (1º gráfico) nós tínhamos "menor", só, do que zero. Então aqui não pertence (marca bola aberta), exactamente, falta ali uma bolinha aberta.
Atenção a este pormenor: no segundo [gráfico] os valores são maior ou igual que zero, no primeiro [gráfico] é x menor que zero.

Fim da Transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo
O episódio apresenta dois tipos de exemplos diferentes. Primeiro, na parte introdutória do episódio, a professora esboça dois exemplos de parábolas para que os alunos se apercebam que o sentido da concavidade e a posição do vértice determinam várias possibilidades de intersecção com o eixo dos xx. Depois, na restante parte do episódio, são tratados dois exemplos de uma sequência de quatro em que os alunos esboçam os gráficos das quadráticas propostas.
Nos dois exemplos iniciais a faceta utilizada é unicamente a *Faceta Geométrica* num conjunto de *Exemplos Espontâneos*, enquanto que nos restantes se relaciona a *Faceta Simbólica* com a *Faceta Geométrica* e configuram uma *Sequência Planeada de Exemplos* de conceito. Em qualquer dos casos, no primeiro e no segundo grupo de exemplos, os aspectos que são explorados são novidade para os alunos, a intersecção com os eixos e a designação de vértice para o máximo/mínimo da curva. A professora está, deste modo, a alargar a *Imagem do Conceito* de função quadrática dos alunos. Isto é, realça pormenores e estabelece características específicas à estrutura do conceito. Da mesma forma, no segundo grupo, se utilizam os exemplos. Simultaneamente, nas duas facetas utilizadas, se trata a noção de domínio e se aplica a noção de bola aberta e fechada bem como a intersecção com os eixos. Assim, os seis exemplos da sequência pertencem à 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**.
Quanto as características do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** podemos observar, **Claramente CPC**:

- para tratar a noção de intersecção com os eixos, a professora recorre a dois gráficos que, pela posição, evidencia a hipótese de que estes pontos possam ou não existir (Cat. **Estratégias de Ensino**): "*Vocês já repararam que quando traçam as vossas parábolas, e de acordo com o sentido da concavidade, elas podem ser assim, ou elas podem ser assim.*"
- utiliza as noções de máximo e de mínimo para estabelecer com os alunos um modo de pensar conducente à noção de vértice (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*E esse mínimo e esse máximo na nossa parábola, ou seja, as coordenadas desse ponto, vão corresponder às coordenadas do vértice da minha parábola.*"
- com o propósito de ilustrar as várias possibilidades de intersecção das parábolas com os eixos, a professora recorre a duas parábolas que esboça no quadro (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**)

- as duas parábolas anteriores são exemplos adequados ao propósito da professora (Cat. **Conhecimento de Exemplos**).
- A actividade escolhida, e os exemplos que envolve, requer o uso da máquina de calcular gráfica como instrumento poderoso para trabalhar a faceta geométrica do conceito de função quadrática e auxiliar no seu ensino (Cat. **Conhecimento de Recursos**)

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:

- a professora relaciona a intersecção da parábola com o eixo dos yy com os pontos que têm a primeira coordenada nula e a intersecção da parábola com o eixo dos xx com os pontos em que é nula a segunda coordenada. Além disso, relaciona a noção de máximo/mínimo com a noção de vértice (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**).

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- a utilização da máquina de calcular gráfica é, neste episódio, um instrumento de ensino que facilita a manutenção da atenção do aluno nos objectivos da aula (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**).
- antes de iniciar a actividade a professora introduz as novas noções a tratar na sequência (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).

Uso do Exemplo

Como já foi referido, há dois géneros de exemplos em que o seu uso é totalmente distinto, embora os dois géneros tenham sido incluídos na mesma categoria. Os dois exemplos iniciais destinam-se a introduzir graficamente as novas noções de intersecção com os eixos e de vértice de uma parábola, enquanto que os dois últimos se destinam a que o aluno possa observar a parábola definida pela função quadrática e descobrir as novas características e aplicar as noções de bola aberta ou fechada num gráfico.

Os primeiros dois exemplos, que são espontâneos, mostram o caso em que existem duas intersecções com o eixo dos xx e o caso em que não há intersecção com este eixo. A estes dois casos poderia ser acrescentado o caso em que apenas existe uma raiz, a professora não o indicou porque é o caso considerado na questão 1.4 antes de se aplicar a restrição ao domínio. Nestes dois exemplos espontâneos também não foi evidenciada a intersecção com o eixo dos yy, sendo que foi um dos aspectos abordados na abertura do episódio.

O tratamento dos dois exemplos dos quatro que compõem a sequencia planeada é virada mais para o uso da máquina de calcular que propriamente para a visualização dos aspectos evidenciados na abertura do episódio. Como os pontos em que alguma das coordenadas é zero já era um conteúdo conhecido dos alunos e a noção de vértice será tratada posteriormente, a professora inflectiu o sentido da utilização dos exemplos para o aspecto onde os alunos têm mostrado mais dificuldades, a utilização da máquina de calcular gráfica. Neste aspecto a professora desdobrou-se em atenções, prestando um ensino de cariz muito individualizado com o qual os alunos aproveitaram.

Relativamente às *Dimensões de Variação Possíveis* a sequência de quatro exemplos trabalha duas dimensões, a forma de apresentação da quadrática – forma geral e com inclusão de quadrado de binómio – e a restrição ao domínio. Com apenas quatro

exemplos, as *Amplitudes de Mudança Permitidas* não foram demasiado ambiciosas e, por isso, a variação apresentada na sequência não é muito marcada.
Do ponto de vista da *Ampliação dos Espaços de Exemplos* dos alunos esta segunda sequência de exemplos pouco contribuiu, apenas com exemplos de troços de parábolas por via das restrições ao domínio. Contudo os dois primeiros contribuiriam para ampliar este espaço um pouco, apenas pela introdução da noção de vértice. A relação entre a posição do vértice e sentido da concavidade com o número de intersecções com o eixo dos xx (as raízes) não foi explorada neste episódio e, isso sim, poderia para ampliar o espaço de exemplos com exemplos de características renovadas, ou, pelo menos, vistos de uma nova perspectiva.

Esmeralda: **Episódio 28**
Dia: **2 Fevereiro 07**

Início: **LB 19 min 34 Seg.**
Fim: **LB 24 min 00 Seg.**

Manual: **Página 85**

Exemplo tratado pelos alunos.

2. O CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO
Um estudo conduzido pelo departamento estatístico de uma Câmara concluiu que a população da sua cidade nos próximos dois anos cresceria de acordo com a fórmula:
$$P(x) = 30000 + 20x^2 + 20x$$
onde $P(x)$ representa a população, x meses a partir da data em que foi feito o estudo. Quantas pessoas habitavam a cidade na época em que foi feito o estudo?

Esmeralda: Então vamos passar à função do exercício 2.
Qual é o problema Filipa?
Filipa: É o gráfico, eu não consigo fazer (imperceptível).
E: Oh filha, mas porquê?
Filipa: Não sei.
E: Eu há bocado cheguei aí e escrevi-lhe a função de 1.2 e não consegue escrever x? Onde está a função?
Filipa: Aqui.
E: Não filha, isto não é uma função, isto é uma representação gráfica. A função, em si, que não consegue escrever onde é que está? Você tem o valor mínimo 1, e eu disse que era -10 e o máximo era zero. Eu não sei onde é que vocês estão quando eu estou a falar. Sinceramente. Estão sempre na Lua.
Crescimento da População: Um estudo conduzido pelo departamento estatístico de uma Câmara concluiu que a população da sua cidade nos próximos dois anos cresceria de acordo com a fórmula:
$$P(x) = 30000 + 20x^2 + 20x$$
onde $P(x)$ *representa a população, x meses a partir da data em que foi feito o estudo. Quantas pessoas habitavam a cidade na época em que foi feito o estudo?*
(uma aluna dá uma resposta)
E: Eu gostaria que não dissessem quantas, mas como é que estão a pensar resolver.
Aluno: Substituir por zero o x.
E: Nem mais. Portanto, se eu quero o número de pessoas que existiam quando eu ia a iniciar o estudo, então eu estou no instante zero do meu estudo. Vocês vão ter que fazer é substituir o t (lapso, é x) por zero. Calcular o $P(0)$.
(pausa para os alunos executarem o cálculo)
E: Então quanto é que deu o $P(0)$?
Alunos: Trinta mil.
E: Trinta mil. Fica trinta mil mais vinte vezes zero, mais vinte vezes zero, zero, zero, dá trinta mil. Sim senhor. Então, a resposta que nós podemos dar a quantas pessoas habitavam na cidade na época em que foi feito o estudo? Habitavam na cidade na época em que foi feito o estudo trinta mil habitantes. Já está a resposta dada?
(nenhum aluno diz que não)

Fim da Transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O *Exemplo Planeado* incluído neste episódio é claramente uma aplicação da função quadrática a uma situação real. Porém, o baixo grau de dificuldade situa este exemplo na 2ª Categoria, **Abordagem Inicial Autónoma**. A simplicidade da situação proposta é observável pela rapidez e desenvoltura com que os alunos respondem à questão e, também, pela ausência de dúvidas pela parte destes. O exemplo não deve ser enquadrado na 5ª categoria, **Aplicações Externas**, porque para isso seria necessário que concorressem duas condições: a aplicação à realidade e um elevado grau de dificuldade. Neste caso a resposta à questão é obtida mediante um processo cognitivo muito simples, *quando foi feito o estudo* corresponde ao início da contagem do tempo e, portanto, com um simples cálculo mental o aluno pode resolver a questão.

São poucos os aspectos relativos ao **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** pela brevidade do episódio. **Claramente CPC**:

- a professora, neste exemplo, usa a situação real para relacionar o início da contagem do tempo com a concretização da variável com o valor zero. É uma situação em que esta relação é bastante intuitiva (Cat. **Estratégias de Ensino**).
- explica como se calcula o número de elementos da população no instante inicial do estudo (Cat. **Explicações**): "…*então eu estou no instante zero do meu estudo. Vocês vão ter que fazer é substituir o t* (lapso, é x) *por zero. Calcular o* $P(0)$."

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- no final do episódio, resolve verbalmente a questão e explicita claramente a resposta (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).

Uso do Exemplo

Este exemplo, pela sua simplicidade, mostra uma possibilidade de aplicação do conceito de função – neste caso a função quadrática – e prepara os alunos para enfrentarem posteriormente outras situações da vida real mas com níveis de dificuldade mais elevados. Neste caso, o exemplo do conceito de função apresenta-se na sua *Faceta Simbólica* e tem alguma relação com a *Faceta Numérica*, quando pede o valor inicial da população.

No entanto, nota-se a preocupação da professora em evidenciar a importância do *como* em detrimento do *quanto*: "*Eu gostaria que não dissessem quantas, mas como é que estão a pensar resolver.*" Assim, o uso do exemplo não se destina, como dissemos, à mera concretização da variável e respectivo cálculo, mas sim à percepção do género de situação, interpretação da situação e qual o cálculo adequado à quantificação dessa situação.

Esmeralda: **Episódio 29**
Dia: **2 Fevereiro 07**

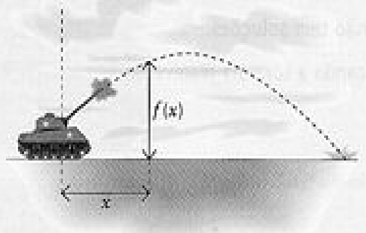
Início: **LB 24 min 05 Seg.**
Fim: **LB 33 min 23 Seg.**

Manual: **Página 87**

Exemplo tratado pelos alunos

Esmeralda: Vamos passar para a página 87 para o exercício 1.

1. A trajectória da bala
Uma bala está colocada 1,5 m acima do solo e é lançada segundo um ângulo de 45° com o nível do solo.

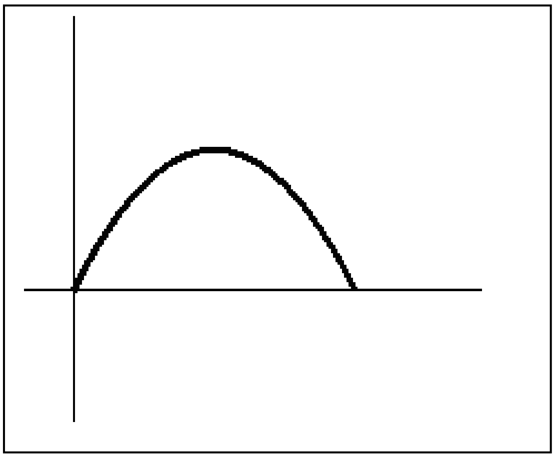


A trajectória da bala é dada pela função f definida por:

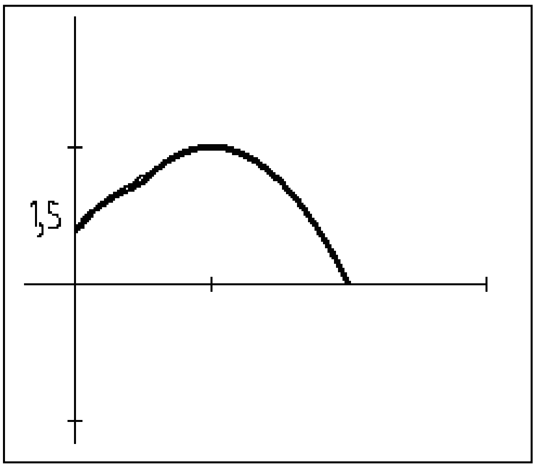
$$f(x) = -0{,}0025x^2 + x + 1{,}5$$

onde $f(x)$ é a altura da bala (em metros) e x é a distância horizontal da bala ao ponto de lançamento.
Determine a distância, na horizontal, entre o ponto de lançamento e o ponto onde caiu a bala.

(pausa para os alunos analisarem o problema)
(a professora esboça no quadro um esquema)



E: Já leram o vosso problema? E …?
Ana: Temos que encontrar os zeros da função.
E: Diz a vossa colega Ana que temos que determinar os zeros da função. Concordam com ela?
Vários alunos: Sim.
E: Sim senhor. *A trajectória da bala é dada pela função f definida por:* $f(x) = -0,0025x^2 + x + 1,5$, *onde* $f(x)$ *é a altura da bala em metros e x a distância horizontal da bala ao ponto de lançamento. Determine a distância na horizontal entre o ponto de lançamento e o ponto onde caiu a bala.* Muito bem, determinar os zeros.
Há um que eu já sei qual é, não?
(pausa)
(uma aluna fala em 1,5)
E: 1,5? O que é que você me respondeu? 1,5 é um zero.
Aluna: Não mas é um ponto onde sabemos que dá 1,5 na direcção do zero…
E: Vamos lá rebobinar.
Outra aluna: Temos que calcular os zeros. E onde a bala caiu tem que ser 1,5 metros.
E: Eu não sei onde a bala caiu, não é isso que eu disse. Eu olhei aqui para o gráfico e disse assim: Há um ponto que eu já sei qual é.
Aluna: É o [ponto de coordenadas] zero, zero. (Origem das Coordenadas)
E: Ah! Você respondeu-me… Não é zero, zero. Não é zero, zero. Você respondeu-me assim: É 1,5. Se eu ando à procura dos zeros como é que me pode responder…
Quer dizer, até podia ser… o 1,5 ser um zero da função. Ser o valor de x onde a função intersectava o eixo, mas não é o caso. Eu aqui, quando estou a lançar a bala, estou no ponto origem, não é? Já colocaram os zeros? O que é que deu? Ou, o que é que deram? É impressionante, agora ou resolver no quadro. Vocês põem-se a olhar para mim como se isto fosse a primeira vez que está a ser feito. Uma equação de 2º grau que vocês deram no 9º ano, que batalharam, ou pelo menos deviam ter batalhado. Fórmula resolvente, não sei do que é que estão à espera.
(pausa para os alunos determinarem os zeros da função)
(a professora altera o esquema que tinha no quadro)



E: Então? Ah, analiticamente não. Mas era uma hipótese.
Estou aqui a olhar para a calculadora do Simão. O Simão analiticamente não fez nada, mas foi à calculadora, e foi bem pensado, colocou a expressão da nossa função e pediu os zeros. E pensou muito bem. O primeiro zero é zero, porque a minha bala é lançada a um metro e meio, é a altura do canhão, e depois faz aquela trajectória e vai cair a quantos metros?
Aluno: 401,49 metros.
E: (escreve no quadro) Quatrocentos e um vírgula quantos? Que eu não ouvi?
Aluno: Quarenta e nove.
E: quatro, nove. E a seguir ao nove?
Alunos: Quatro.
E: Então, quarenta e nove. Analiticamente (resolve, parcialmente, no quadro a equação)

Nas CASIO vocês têm aí a formula resolvente para equações de 2º grau, é só colocarem o valor de *a*, o valor de *b* e o valor de *c*, e ela dá-vos os zeros.
Quem tem essas TEXAS TI-84, hão-de ir ver ao manual Se faz favor, porque eu não tenho, qual é a forma que nós temos de chegarmos à fórmula resolvente, porque alguém me comentou…
(uma aluna informa a professora que isso está nos programas)
E: Espere, deixe ver, mas a calculadora já traz isso de origem? Ou foi você que meteu?
Aluna: Não, fui eu que meti.
E: E onde é que vocês foram [buscar] esse programa?
Aluna: À calculadora de um colega.
E: Copiou de outra calculadora para essa? Mas o que me foi dito… foi uma aluna que comentou, mas já não se lembrava, que já tinha feito mas já não se lembrava. Que na própria calculadora vem um programa que permite… ela acha que dá muitas voltas, mas eu estive no manual e … ela disse que não sabe. É uma aluna do 12º ano. E… para se ver onde é que está, porque eu acho que elas trazem mesmo. Porque não faz muito sentido estas calculadoras mais novas não trazerem a fórmula resolvente.
Então quais foram os valores para os zeros que vocês obtiveram?
Alunos: (imperceptível)
E: Coincide. Ou seja, nós dali (esquema gráfico) nós tiramos x=0 ou x=401,49. Logo, *determine a distância na horizontal entre o ponto de lançamento e o ponto onde caiu a bala*. Quatrocentos e um, isto aqui não dá para arredondar a coisíssima nenhuma, portanto podemos deixar com duas casas decimais, quatrocentos e um vírgula quarenta e nove metros. Foi a distância a que a bala caiu.

Fim da Transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Este *Exemplo Planeado* contempla a aplicação da função quadrática a uma situação da vida real. Mas, tal como no episódio anterior, o grau de simplicidade é baixo. A *bala cai no chão* equivale a encontrar a o momento em que a altura é zero metros, isto é, uma raiz da função e, encontrar uma raiz de uma função de segundo grau, equivale a resolver uma equação de segundo grau. Para o aluno esta cadeia de implicações não é cognitivamente exigente. Por isso, também este exemplo é incluído na 2ª Categoria, **Abordagem Inicial Autónoma** e o seu objectivo é preparar situações de vida real mais complicadas que surgiram futuramente.

Quanto ao **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** da professora podemos anotar alguns aspectos deste episódio.

Claramente CPC:

- com este exemplo, a professora relaciona o ponto onde a bola cai com $f(x)=0$ e, assim, cria uma situação onde calcular os zeros de uma função faz sentido para os alunos (Cat. **Estratégias de Ensino**).
- indica aos alunos que encontrar os zeros de uma função equivale a resolver uma equação de 2º grau (Cat. **Explicações**).
- indica, em alternativa, o uso da máquina de calcular para calcular os zeros da função (Cat. **Conhecimento de Recursos**).

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Contudo:

- no final do episódio, sintetizar a informação de forma a clarificar a informação útil (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).

Uso do Exemplo

O exemplo utilizado pela professora para relacionar a distância de impacto da bala com o chão com um zero da função quadrática proporciona aos alunos uma aplicação de uma das noções aliadas ao conceito de função. Embora seja um exemplo de aplicação simples e sem grandes exigências cognitivas, este tipo de exemplos (bem como o exemplo do episódio anterior) proporcionam ao aluno uma *Ampliação do Espaço de Exemplos* efectiva com casos do mundo real e preparam os alunos para, futuramente, abordarem casos mais exigentes.

Mas o seu uso, além do indicado atrás, proporcionou a oportunidade de relacionar a *Faceta Numérica* com a *Faceta Geométrica*, trabalhar com a máquina de calcular gráfica e abordar o arredondamento de números.

Relativamente às facetas do conceito de função constantes no episódio, note-se que o enunciado apresenta duas, a *Faceta Geométrica* e a *Faceta Simbólica* mas a resposta à questão faz menção à *Faceta Numérica*.

Outra oportunidade que este exemplo ofereceu à professora prende-se com a forma como o aluno resolve a questão. Enquanto a professora estava focalizada na resolução da equação de 2º grau para determinar um dos zeros da função – aquele que responde à questão – o aluno recorre à máquina de calcular gráfica para procurar a intersecção do gráfico com o eixo dos xx, solucionando assim a questão. Isto permitiu à professora mostrar aos outros alunos a relação que existe entre noções diferentes: "*O Simão analiticamente não fez nada, mas foi à calculadora, e foi bem pensado, colocou a expressão da nossa função e pediu os zeros. E pensou muito bem.*"

Por último, o arredondamento do resultado. Veja-se que o enunciado não pede o resultado em qualquer unidade ou arredondamento, contudo, visto o resultado ter na calculadora um número de casas decimais considerável, a professora opta por um arredondamento à segunda casa decimal.

Esmeralda: **Episódio 30**
Dia: **2 Fevereiro 07**

Início: **LB 33 min 40 Seg.**
Fim: **LB 37 min 35 Seg.**

Manual: **Página 87**

Sequência de Exemplos planeados tratados pelos alunos.

Esmeralda: […] vamos resolver o exercício 2.

2. Determine, usando a calculadora gráfica, os zeros de cada uma das funções:
2.1 $f(x) = -x^2 + 1$ 2.2 $f(x) = x^2 - 2x - 3$

(pausa para os alunos trabalharem)
E: Já está o exercício 2? Já?
Determine, usando a calculadora gráfica, os zeros de cada uma das funções: $f(x) = -x^2 + 1$
Quais foram os zeros que encontraram?
Alunos: 1 e -1
E: Então, na 2.1 temos que dizer que… ou indicar que…
(escreve no quadro enquanto verbaliza) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$
Foram estes os zeros que obtiveram?
Então e na 2.2?
Aluna: -1 e 3.
E: -1 e 3 a toda a gente?
Alunos: Sim.
E: Então, mais uma vez, f de x igual a zero é equivalente a x igual a menos um ou x igual a três.

Fim da Transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O episódio inclui dois *Exemplos Planeados de Processo* em que, em cada um, são pedidos os zeros com recurso à máquina de calcular. A tarefa a desempenhar pelos alunos é muito simples, não envolve qualquer dificuldade ao nível cognitivo e destina-se a preparar os alunos na utilização da máquina de calcular para situações futuras. Como se pretende que, autonomamente, os alunos percorram os diversos passos que permitem determinar os zeros de uma função na máquina, os exemplos integram-se na 2ª Categoria, **Abordagem Inicial Autónoma**.

Uso do Exemplo

Estes dois exemplos, embora integrados no mesmo episódio por serem duas alíneas da mesma questão, não proporcionam uma verdadeira sequência de exemplos. Não se verifica uma *Variação* apreciável e os dois exemplos não se destinam a *Ampliar o Espaço de exemplos* do aluno. Contudo, uso destes dois exemplos é muito preciso e importante, destina-se a que os alunos percorram o processo de determinação de zeros na máquina de calcular, o que lhes irá ser fundamental na resolução de problemas. A resolução de problemas com recurso à máquina de calcular é obrigatória e, por isso, este procedimento básico deve ser trabalhado com os alunos.

Esmeralda: **Episódio 31**
Dia: **16 Fevereiro 07**

Início: **LA 0 min 25 Seg.**
Fim: **LA 12 min 48 Seg.**

Manual: **Página 101**

Exemplo planeado tratado pela professora

Esmeralda: Ora vamos à página 101, e vamos começar a resolver o exercício 1.2.

1. Escreva cada uma das funções *f* na forma $f(x)=a(x-h)^2+k$ e indique

a. o domínio;
b. o contradomínio;
c. o eixo de simetria e o vértice da parábola que representa o gráfico;
d. o intervalo de crescimento;
e. o intervalo de decrescimento;
f. o máximo ou o mínimo da função.

1.1 $f(x)=x^2-4x$

1.2 $f(x)=-2x^2-4x+5$

1.3 $f(x)=-2x^2+3x-2$

1.4 $f(x)=2x^2+4x+5$

Então temos $f(x)=-2x^2-4x+5$. Ora pois bem, este exercício é diferente, ligeiramente diferente, daqueles que nós temos andado a resolver. E porquê?
Espero que vocês me respondam porque é que é ligeiramente diferente?
(os alunos respondem todos ao mesmo tempo que o coeficiente do x quadrado não é 1)
E: Exactamente. Estamos na página 101. O coeficiente do x quadrado não é 1, o coeficiente do x ao quadrado é -2. Então prestem todos muita atenção e depois passam.
Portanto, se o coeficiente do x quadrado não é -1… oh não é -1, não é 1, nós vamos ter que colocar aquele factor em evidência. Como? Para eu colocar o -2 em evidência, significa que vou ter que dividir todos os outros termos… estou-me a fazer entender? … todos os outros termos por -2. Então fica: x ao quadrado, porque -2 a dividir por -2 dá 1, isto vou indicar e este 5 vou deixá-lo fora dos parênteses.
(escreve no quadro: $f(x)=-2x^2-4x+5=-2\left(x^2-\dfrac{4x}{-2}\right)+5=$)
Ora, -2, x ao quadrado, mais dois x, mais 5
(completa no quadro: $=-2\left(x^2+2x\right)+5$
Até aqui há alguma dúvida?
Alunos: Não.
E: Se eu coloco, ou sempre que eu tenho que colocar algum factor em evidência eu tenho que dividir todos os outros termos por esse factor. Entendido? Pronto. E agora, se eu olhar para dentro dos parênteses tenho ali uma coisa que vocês já viram. Um x quadrado com coeficiente 1, vou ter que me preocupar com o passo seguinte. Qual é o passo seguinte?
Alunos: O termo em x.
E: E o que é que penso sobre o coeficiente do x?
Aluna: Ver a metade.
E: Quanto é metade. Metade de 2 é 1. Então vamos ter de…
Alunos: Elevar ao quadrado.

E: Elevar o 1 …
Alunos: Elevar o 1 ao quadrado e acertar…
E: Exactamente. Portanto, -2, x quadrado mais 2 x, mais 1 ao quadrado, menos 1 ao quadrado, mais cinco.
(escreveu no quadro: $= -2\left(x^2 + 2x + 1^2 - 1^2\right) + 5 =$)

E agora tenho… (sublinha $x^2 + 2x + 1^2$) … já tenho o caso notável da multiplicação. Sim? E vou buscar o x, o sinal e o 1 (faz três bolas à volta do x do termo de 2º grau, do primeiro sinal + e do 1 do termo 1 ao quadrado). Cá vamos. -2, x mais 1 ao quadrado, e vai-me sobrar o menos 1 ao quadrado.
(escreveu no quadro: $= -2\left[\left(x+1\right)^2 - 1\right] + 5$)

Mas para eu ter o meu polinómio, a minha função polinomial escrita na forma (escreve no quadro enquanto verbaliza $f(x) = a(x-h)^2 + k$) eu ainda não acabei o meu trabalho. Eu aqui dentro tenho o -1 que não deve lá estar. Então o que é que eu vou fazer? Vou tirá-lo para fora dos parênteses [rectos]. Mas atenção, se eu vou tirar para fora dos parênteses, eu vou ter de multiplicar por -2. Entendido? Então fica: -2, x mais 1 ao quadrado, menos por menos dá mais, 2, mais cinco.
(escreveu no quadro $= -2\left(x+1\right)^2 + 2 + 5 =$)
-2, x mais 1 ao quadrado e mais 7.
(escreveu no quadro: $= -2\left(x+1\right)^2 + 7$)
Está percebido até aqui, ou há alguma dúvida?
João: Tenho ali uma dúvida.
E: Onde João?
João: Ali, o 5 não foi dividido por -2.
E: Todos os termos que ficam dentro dos parênteses. Como o 5 fica fora dos parênteses, então eu não o dividi. Está bem?
João: O -2 é o *a*?
E: Sim. Exactamente. Isto significa que eu vou estar perante uma parábola com a concavidade voltada para baixo.
Vera: Professora, e ali aquele 1 ao quadrado?
E: Expliquem lá à Vera aonde é que fomos ao 1 ao quadrado.
Alunos: É metade do 2 do x.
E: Metade do coeficiente do x. Que é o que andámos a fazer nas duas aulas atrás. Só que, em vez de termos o coeficiente do x quadrado igual a um valor diferente de 1, não, tínhamos o coeficiente do x quadrado exactamente igual a 1. Logo, o único passo que não andámos ainda a fazer foi o colocar aquele factor em evidência. Porque o resto fizemos tudo. Sim?
Ora portanto, então sendo assim, o exercício pede: domínio. O domínio, nós à partida já o sabíamos. Qual é o domínio?
Alunos: $\mathbb{R}$.
E: Portanto, domínio igual a R (escreve no quadro: $D = \mathbb{R}$). E depois o que é que pede a seguir, na *b*? O contradomínio. Então qual é o contradomínio da minha função?
(silencio)
E: Helena? Conversa? (chama a atenção da aluna)
Aluna: De menos infinito a 7.
E: Como é que pensou?
Aluna: Como a concavidade está voltada para baixo, o y é 7, o máximo.
E: Exactamente. Quando temos a concavidade voltada para baixo o y, a segunda…
Ainda não escrevemos [no quadro], vamos escrever… Aqui as coordenadas do vértice, são -1 e 7 (escreveu no quadro: $V \to \left(-1, 7\right)$).
Portanto, tínhamos vindo a verificar que, quando a concavidade é voltada para baixo, o contradomínio vem de menos infinito até ao máximo. Se a concavidade fosse voltada para cima o contradomínio ia do mínimo para mais infinito. Certo? Então… eu vou fazer isto assim na horizontal senão depois vocês aí detrás não vêem. Contradomínio vai ser de menos infinito a 7, fechado (escreveu no quadro: $D' =]-\infty; 7]$). O que é que pede mais?
Alunos: Eixo de simetria.

E: Qual é a equação do eixo de simetria?
Alunos: $x=-1$.
E: Que é igual sempre à primeira coordenada do vértice.
Portanto, eixo de simetria é x igual a menos um (escreveu no quadro: "Eixo de Simetria $x=-1$").
Olhem, passem lá para depois nós escrevermos onde a função é…
Aluno: professora, porque é que é -1… e não é +1?
Aluna: Porque na fórmula está…
E: Porque é que é -1 e não +1. Então eu pergunto, porque é que nas coordenadas do vértice são -1 e não +1? Olhe lá para a fórmula (aponta para $f(x)=a(x-h)^2+k$). X menos *h*. O que é que eu tenho aqui? x mais 1, isso significa que o meu *h* é, positivo ou negativo? Negativo, para aparecer lá o mais. Daqui (aponta para $f(x)=a(x-h)^2+k$) sai sempre o simétrico. Certo?
Então passem lá o que fizemos até aqui para depois apagarmos.
(pausa para os alunos transcreverem do quadro)
E: Ora então vamos lá a acabar. Faltam o intervalo de crescimento… ora então eu vou apagar qualquer coisa aqui. De onde a onde é que a minha função cresce?
(silencio)
E: Não ouvi nada.
Alunos: de menos infinito…
E: (verbaliza enquanto escreve no quadro) De menos infinito…
Alunos: … até 7.
E: Crescente! O crescimento é lido no eixo dos xx.
Alunos: …até -1.
E: Menos um (escreveu no quadro, "Crescimento: $]-\infty;-1]$").
Pede decrescimento, certo?
Alunos: De -1 até mais infinito.
E: Sim senhora (escreve no quadro: Decrescimento: $[-1;+\infty[$).
O que é que nos falta?
Alunos: O mínimo ou o máximo.
E: Então o que é que tem a nossa função?
Alunos: Um máximo, y=7
E: Tem máximo y=7, sim senhor (escreveu no quadro $y=7$).

Fim da Transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Neste episódio podemos constatar como a professora trata um exemplo do mesmo tipo dos que os alunos tratarão posteriormente, ele é um dos vários que compõem a sequência que se apresenta. O exemplo tratado pela professora não é um exemplo dado directamente na forma $f(x)=a(x-h)^2+k$, ele é dado na forma $f(x)=ax^2+bx+c$. Assim, os alunos terão que se socorrer dos seus conhecimentos de cálculo e, posteriormente, tratar a quadrática pelos elementos aos quais a forma $f(x)=a(x-h)^2+k$ é *transparente*.

Não é, portanto, uma aplicação directa do conhecimento das coordenadas do vértice que esta forma nos indica a que se refere o exemplo, além dessas coordenadas é necessário utilizá-las para determinar outras características, contradomínio, monotonia, eixo de simetria, etc. Este exemplo, que é apresentado na *Faceta Simbólica*, por ser transparente às coordenadas do vértice e ao sentido da concavidade força o aluno a visualizar o gráfico e, por isso, a relacionar esta faceta com a *Faceta Geométrica* e, por isso, é um exemplo estruturante da *Imagem do Conceito* dos alunos. Somando ao anterior, o exemplo *Amplia o Espaço de Exemplos* dos alunos com novos exemplos de funções quadráticas na forma de apresentação e nas características às quais são transparentes. Pelo que se expôs, este *exemplo planeado do conceito* de função inclui-se na 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aproveitamento**.

Relativamente à professora, são múltiplos os traços do seu **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** que se observam.

Claramente CPC:

- a forma que a professora usa para criar as três parcelas do desenvolvimento do quadrado do binómio é a estratégia que a professora usa para conseguir uma compreensão integrada das duas formas diferentes de apresentar a função quadrática por parte dos alunos (Cat. **Estratégias de Ensino**)
- estabelece formas de comunicação comuns entre professor e aluno de forma a estabelecer uma comunicação efectiva (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*Todos os termos que ficam dentro dos parênteses. Como o 5 fica fora dos parênteses, então eu não o dividi. Está bem?*"
- esclarece os alunos no erro comum em que caem quando indicam o intervalo de (de)crescimento por indicação do máximo/mínimo em vez do maximizante/minimizante (Cat. **Pensamento do Estudante; Concepções Alternativas**): "*Crescente! O crescimento é lido no eixo dos xx.*"
- explica cuidadosamente todo o processo de modificação da forma da função quadrática de $f(x) = ax^2 + bx + c$ para $f(x) = a(x-h)^2 + k$ e evidencia os passos sensíveis deste processo (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*Exactamente. Portanto, -2, x quadrado mais 2 x, mais 1 ao quadrado, menos 1 ao quadrado, mais cinco.*

  (escreveu no quadro: $= -2\left(x^2 + 2x + 1^2 - 1^2\right) + 5 =$)

  E agora tenho... (sublinha $x^2 + 2x + 1^2$) *... já tenho o caso notável da multiplicação. Sim? E vou buscar o x, o sinal e o 1* (faz três bolas à volta do x do termo de 2º grau, do primeiro sinal + e do 1 do termo 1 ao quadrado*). Cá vamos. -2, x mais 1 ao quadrado, e vai-me sobrar o menos 1 ao quadrado.*

  (escreveu no quadro: $= -2\left[\left(x+1\right)^2 - 1\right] + 5$)

  Mas para eu ter o meu polinómio, a minha função polinomial escrita na forma (escreve no quadro enquanto verbaliza $f(x) = a(x-h)^2 + k$) *eu ainda não acabei o meu trabalho. Eu aqui dentro tenho o -1 que não deve lá estar. Então o que é que eu vou fazer? Vou tirá-lo para fora dos parênteses [rectos]. Mas atenção, se eu vou tirar para fora dos parênteses, eu vou ter de multiplicar por -2. Entendido? Então fica: -2, x mais 1 ao quadrado, menos por menos dá mais, 2, mais cinco.*

  (escreveu no quadro $= -2\left(x+1\right)^2 + 2 + 5 =$)

  -2, x mais 1 ao quadrado e mais 7.

  (escreveu no quadro: $= -2\left(x+1\right)^2 + 7$)

  Está percebido até aqui, ou há alguma dúvida?
- explica os diversos passos e a forma de olhar para a expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$ (Cat. **Explicações**): "*Porque é que é -1 e não +1. Então eu pergunto, porque é que nas coordenadas do vértice são -1 e não +1? Olhe lá*

para a fórmula (aponta para $f(x) = a(x-h)^2 + k$). *x menos h. O que é que eu tenho aqui? x mais 1, isso significa que o meu h é, positivo ou negativo? Negativo, para aparecer lá o mais. Daqui* (aponta para $f(x) = a(x-h)^2 + k$) *sai sempre o simétrico. Certo?*

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:

- a professora, pela forma como implementa as estratégias e como explica as ideias matemáticas incluídas neste exemplo, mostra um conhecimento sólido do conteúdo (Cat. **Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental**).
- Separa os parâmetros contidos na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ e indica a sua função e influência no traçado da parábola (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*Sim. Exactamente* [$a = -2$]. *Isto significa que eu vou estar perante uma parábola com a concavidade voltada para baixo.*"; "*Que é igual sempre à primeira coordenada do vértice. Portanto, eixo de simetria é x igual a menos um.*"
- o processo de transição entre as formas de $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $f(x) = a(x-h)^2 + k$ inclui diferentes conteúdos ministrados em anos anteriores, tais como o desenvolvimento do quadrado do binómio, introdução e extracção de factores relativamente aos parênteses e explica aos alunos como integrá-los no conteúdo em estudo. (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**).

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- indica ao aluno o objectivo da aprendizagem. No presente episódio, indica que o que se está a aprender é idêntico ao que se aprendeu nas duas aulas anteriores, a única diferença é que, nesta aula, o coeficiente do termo em x quadrado não é 1 (Cat. **Objectivos da Aprendizagem**): "*Que é o que andámos a fazer nas duas aulas atrás. Só que, em vez de termos o coeficiente do x quadrado igual a um valor diferente de 1, não, tínhamos o coeficiente do x quadrado exactamente igual a 1. Logo, o único passo que não andámos ainda a fazer foi o colocar aquele factor em evidência. Porque o resto fizemos tudo. Sim?*"
- durante todo o episódio o desenvolvimento do exemplo é feito em diálogo com os alunos, a interacção entre professora e alunos focaliza os alunos no trabalho e nos aspectos importantes que são tratados e, quando necessário, chama a atenção de algum aluno em particular (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**).
- utiliza o quadro como elemento central do tratamento do exemplo, nele escreve todas as referências provenientes do exemplo e todos os resultados questionados. Verifica continuamente as aprendizagens dos alunos através de perguntas selectivas e individuais. Conduz a actividade através de questões e indicações até aos resultados pretendidos (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**)

Uso do Exemplo

A forma como este exemplo é usado é claramente como *Exemplo Resolvido*. Note-se que o exemplo é tratado pela professora, embora os alunos tenham um papel activo, a professora provoca as suas respostas com questões precisas e dirigidas aos conhecimentos adquiridos recentemente, obtendo as respostas que pretende.

O uso do exemplo inclui dois momentos, e respectivos objectivos, bem precisos, aquela em que se percorre um processo de transformação da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ para a forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ e a fase de exploração da *Transparência* da segunda forma relativamente às coordenadas do vértice da parábola, $V \to (h;k)$.
A primeira parte requer do aluno habilidades e competências ao nível do cálculo, sendo alguns dos passos bastante exigentes do ponto de vista do aluno.
A segunda parte está relacionada com a *Transparência* da segunda forma às coordenadas do vértice da parábola e do sentido da concavidade, a primeira é totalmente opaca a estas coordenadas embora transparente ao sentido da concavidade. A forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, se bem explorada na transparência ao vértice e ao sentido da concavidade, evita a necessidade de acudir à *Faceta Geométrica* do conceito de função quadrática para determinar aspectos como o contradomínio, intervalos de monotonia ou eixo de simetria, podendo o aluno fazer toda análise do exemplo mantendo-se estritamente na *Faceta Simbólica*. O interessante desta forma de apresentação da função quadrática – $f(x) = a(x-h)^2 + k$ – é que ela apela à faceta geométrica, à parábola, sem que esta tenha que ser visualizada em papel ou na calculadora gráfica, a simples obtenção das coordenadas do vértice e o sentido da concavidade é suficiente para que o aluno consiga visualizar mentalmente ao gráfico definido pela equação apresentada.
Com a exploração deste exemplo, e outros semelhantes, os alunos obtêm uma nova forma de ver a função quadrática, contribuindo, desta forma, para reestruturar o conceito e remodelar a respectiva imagem que dele tenham. Seja na faceta simbólica, na gráfica ou, então, na interligação entre as duas.

Esmeralda: **Episódio 32**
Dia: **16 Fevereiro 07**

Início: **LA 12 min 50 Seg.**
Fim: **LA 31 min 38 Seg.**

Manual: **Página 101**

Sequência de Exemplos planeados tratados pelos alunos

1. Escreva cada uma das funções *f* na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ e indique
   - a. o domínio;
   - b. o contradomínio;
   - c. o eixo de simetria e o vértice da parábola que representa o gráfico;
   - d. o intervalo de crescimento;
   - e. o intervalo de decrescimento;
   - f. o máximo ou o mínimo da função.

   1.1 $f(x) = x^2 - 4x$

   1.2 $f(x) = -2x^2 - 4x + 5$

   1.3 $f(x) = -2x^2 + 3x - 2$

   1.4 $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$

Esmeralda: Então, tentem lá fazer a 1.3 que é dentro do estilo.
E: Têm que colocar o factor -2 em evidência…
(pausa para os alunos fazerem o que foi proposto pela professora. Apoia individualmente os alunos que requerem a sua atenção)
E: Espere, eu vou começar. Espere. Primeiro deixem-me passar o exercício (apaga o quadro e escreve: $f(x) = -2x^2 + 3x - 2$).
Pronto, a primeira parte quase toda a gente fez. O Miguel, por exemplo, ali enganou-se num sinal. x quadrado, mais 3x sobre -2 (escreve no quadro: $= -2\left(x^2 + \frac{3x}{-2}\right) - 2$). Não podemos esquecer que foi -2 que colocámos em evidência. O sinal vai atrás, temos que dividir por -2. Então, -2, x quadrado menos três meios de x, menos dois (escreveu no quadro: $= -2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) - 2$). Até aqui tinham chegado?
Aluna: Sim.
E: E agora? O quê Mário?
Mário: Ali, metade de menos três meios de x…
E: Metade de três meios. Que é quanto?
Alunos: Três quartos.
E: Três quartos, sim senhora. Então cá vamos, -2, x quadrado, menos três meios de x, mais…
Alunos: três quartos ao quadrado.
E: Exactamente…
Alunos: Menos três quartos ao quadrado.
E: Exactamente (escreveu no quadro: $= -2\left[x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] - 2$. Foi isto? Já tinha chegado até aqui?

Ainda não Mário? Não tinha chegado até ali?
Então e agora? Qual é o próximo passo?
Aluna: Fazer o quadrado do binómio.
Miguel: Passa-se para o quadrado.
E: "Passa-se". Eu ensinei isso Miguel? "Passa-se"?
Miguel: Menos x ao quadrado, quatro terços de x…
E: É x ao quadrado que eu costumo escrever?
Carina: -2 vezes x menos três quartos…
E: Então vamos fazer como diz a Carina a ver se está certo. Diga!
(a aluna vai ditando e a professora escreve no quadro enquanto verbaliza)

E: -2, x menos três quartos, …, assim? (escreveu no quadro: $=-2[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$)

Caso notável da multiplicação, (sublinha na passagem anterior as três primeiras parcelas correspondentes ao desenvolvimento do quadrado do binómio). Vou buscar este (bola à volta do $\frac{3}{4}$) o sinal do x (bola à volta do sinal -) e a base do quadrado do x também (bola à volta de x). Está bem? E agora, está completo ou falta-me ali alguma coisa?
Aluno: Falta ali o desenvolvimento do que está ao quadrado.
E: Que é quanto?
Aluno: Menos nove dezasseis avos.
E: Menos nove dezasseis avos, menos dois (completa no quadro o que faltava da passagem: $=-2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right]-2$). E agora?

Aluna: Tiramos o …
Aluno: Multiplicamos o menos nove dezasseis avos por -2.
E: Exactamente. Então fica: -2, x menos três quartos ao quadrado… menos nove dezasseis avos vezes menos dois, quanto é que dá?
Aluna: Dá menos dezoito dezasseis avos.
E: Menos…?
Aluna: Mais dezoito dezasseis avos.

E: Mais dezoito dezasseis avos, menos dois (escreve no quadro $=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{18}{16}-2$). E agora?

Aluna: Temos que reduzir ao mesmo denominador.
E: E quanto é que isto vai dar?
Aluna: Trinta e dois dezasseis avos.
E: Ora, dezasseis… nós aqui podíamos ter simplificado o dezoito dezasseis avos, dava…

Aluno: Nove oitavos.
E: Nove oitavos. Mas pronto, está feito, depois simplificamos no fim. Então fica, dezoito dezasseis avos, menos trinta e dois dezasseis (escreve: $=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{18}{16}-\frac{32}{16}$). -2, x menos três quartos ao quadrado, e agora menos, 18-32. Dá catorze, certo? Portanto 18 menos 32 dá -14, sobre dezasseis (escreve no quadro: $=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{14}{16}$). -2, x menos três quartos ao quadrado, ora menos, sete oitavos (escreve no quadro $=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{7}{8}$. Quais são as coordenadas do vértice?
Alunos: Três quartos e sete oitavos.
E: Três quartos e…?
Alunos: Menos sete oitavos.

E: (acena e escreve $V \to \left(\frac{3}{4};-\frac{7}{8}\right)$) Falta o domínio. Que é?
Alunos: $\mathbb{R}$.
E: $\mathbb{R}$. Podem escrever se fazem favor: O domínio é $\mathbb{R}$. Já está? Já passou as coordenadas do vértice?
Aluna: Não.
E: Então tem que passar para a seguir escrever o contradomínio.
(uma aluna fala com a professora, mas não se percebe)
E: Pois é minha querida. Mas como é que a menina sabe essas coisas todas sem passar por ali (coordenadas do vértice). Qual é o contradomínio?
Alunos: De menos infinito até sete oitavos.
E: Exactamente. Estamos perante uma parábola com a concavidade voltada para baixo, portanto o contradomínio é: intervalo aberto, de menos infinito até menos sete oitavos, fechado.
Eixo de simetria?
Alunos: x igual a três quartos.
E: x igual a três quartos, sim senhora.
E onde é que a nossa função é crescente?
Alunos: De menos infinito até três quartos.
E: De menos infinito, aberto, até três quartos, fechado.
E decrescente?
Alunos: De três quartos, fechado, até mais infinito.
E: Certíssimo. De três quartos, fechado, até mais infinito, aberto.
E agora, que tipo de extremo temos?
Alunos: Máximo.
E: Máximo ou mínimo? Máximo. Quanto é que é o máximo?
Alunos: Menos sete oitavos.
E: Então o máximo é y igual a menos sete oitavos. O máximo, vocês podem responder da seguinte maneira. Vocês podem responder assim: o máximo é menos sete oitavos para x igual a três quartos. E ao mesmo tempo vocês respondem o máximo e o maximizante. Mas de qualquer forma está certíssimo se disserem que o máximo é y igual a menos sete oitavos. Ali, no fundo, a resposta vem assim. O máximo é *não sei quantos* para x igual a *não sei quê*. Portanto está certíssimo.
Ora, pois 1.4.
(pausa para os alunos realizarem a actividade. Apoia individualmente os alunos que requerem o seu auxílio)
E: Ora então, qual foi a primeira coisa que fizeram?
(silêncio)
E: Não ouvi nada. Dois x ao quadrado mais quatro x mais cinco (escreveu no quadro: $2x^2+4x+5$). Colocaram o dois em evidência e como é que ficou?
(enquanto os alunos ditam a professora escreve no quadro)
Alunos e E: Dois, mais quatro x sobre dois, …
E: Que dá quanto?
Alunos: … dois…
Alunos mais E: …dois x mais cinco (escreveu no quadro: $=2\left(x^2+2x\right)+5$). E agora?
Alunos: dois, x ao quadrado mais dois x mais um ao quadrado, menos um ao quadrado, mais cinco.
(a professora escreveu no quadro: $=2\left(x^2+2x+1^2-1^2\right)+5$)
E: Toda a gente percebeu de onde veio o "*mais um ao quadrado menos um ao quadrado*"?
Coeficiente do x, metade do coeficiente do x, somamos o quadrado da metade e subtraímos o quadrado dessa metade. E agora? Pego aqui (sublinha os três termos do desenvolvimento do quadrado do binómio) …
Alunos: … quadrado do binómio.
E: Quadrado duma soma, neste caso. Então fica…
Alunos: Dois, x mais um ao quadrado, menos um ao quadrado…
E: E um ao quadrado dá quanto?
Alunos: … dá um. Mais cinco.

(a professora escreveu no quadro: $=2\left[(x+1)^2-1\right]+5$)
E: E agora?
Alunos: Passa-se o mais um para fora dos parênteses rectos.
E: E como é que eu passo o mais um para fora?
Alunos: Multiplicado por dois.
E: Exactamente (escreve no quadro: $=2(x+1)^2-2+5$). Assim?
Alunos: Sim.
E: E isto vai ser igual…
Alunos: Dois, x mais um ao quadrado, mais três.
E: Certíssimo. Quais são as coordenadas do vértice?
Miguel quais são as coordenadas do vértice?
Miguel: Menos um e três.
E: Ah! Já percebeu que é sempre o simétrico.
Ora, domínio é R (escreveu no quadro: $D=\mathbb{R}$). As coordenadas do vértice são…
Aluna: Menos um e três.
(a professora escreve no quadro: $V\rightarrow(-1;3)$)
E: Menos um e três. Contradomínio?
Aluna: De três a mais infinito.
E: Portanto, tenho uma parábola com a concavidade voltada para cima, logo, de três a mais infinito (escreveu no quadro: $D'=[3;+\infty[$). O que falta?
Alunos: Eixo de simetria.
E: Eixo de simetria?
Ana e João: x igual a um.
E: Diz a Ana e o João, x igual a um. Um…?
Alunos: Menos um.
E: Ah! (escreveu no quadro: *eixo de simetria:* $x=-1$)
O que é que falta mais?
Alunos: Onde a função é crescente.
E: …crescente. E onde é que ela é crescente?
Alunos: De menos um a mais infinito.
E: De…? Desculpem.
Alunos: De menos um a mais infinito.
E: Portanto, ela tem a concavidade voltada para baixo (lapso da professora), ela vai ser crescente de menos um a mais infinito (escreveu: *crescente*: $[-1;+\infty[$).
E decrescente…
Alunos: De menos infinito a menos um.
E: (escreveu no quadro: *Decrescente:* $[-\infty;-1[$) E falta mais alguma coisa.
(confuso, mas na generalidade falam de máximos e mínimos)
E: E o que é que viram, mínimo ou máximo?
Alunos: Mínimo.
(a professora escreve: *mínimo:* $y=3$)
E: y igual a três. Sim senhora.

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação da Sequência de Exemplos e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Para a análise desta sequência de exemplos devemos integrar também o exemplo do episódio anterior, ele é parte integrante da Sequência no sentido em que os quatro exemplos são do mesmo tipo, apresentam-se da mesma forma e, em cada caso, pedem as mesmas características.

Se o exemplo 1.2, tratado no episódio anterior, foi incluído na 3ª Categoria também os restantes exemplos da sequência devem ser incluídos nessa mesma categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**. A diferença entre tratamento que é dado pela professora aos dois exemplos 1.3 e 1.4 deste episódio e o 1.2 do episódio anterior radica no nível de envolvimento dos alunos e da professora. Neste o papel dos alunos é preponderante e o tratamento dos exemplos é feito fundamentalmente por eles, cabe à professora um papel mais próximo da supervisão. Contudo, a proposta destes exemplos em sequência tem como objectivo trabalhar as diversas *Dimensões de Variação Possíveis* e explorar as vantagens da *Transparência* que a forma $f(x)=a(x-h)^2+k$ apresenta relativamente às coordenadas do vértice e ao sentido da concavidade da parábola.

Considerando o **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** da professora, podemos considerar vários aspectos que foram evidenciados.

Claramente CPC:

- a professora, para transmitir aos alunos a forma como obter a terceira parcela do desenvolvimento do quadrado do binómio, chama a atenção que este terceiro termo é sempre o quadrado da metade do coeficiente do termo em x. Daí que insista com os alunos na expressão *quadrado da metade* daquele coeficiente (Cat. **Estratégias de Ensino**): "*Metade de três meios. Que é quanto?*"
- utiliza o raciocínio de uma aluna para melhor elucidar os outros elementos da turma (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*Então vamos fazer como diz a Carina a ver se está certo. Diga!*"
- chama a atenção dos estudantes para os aspectos principais tanto do cálculo que permite passar da equação $f(x)=ax^2+bx+c$ para a equação $f(x)=a(x-h)^2+k$, como para os principais aspectos da segunda equação (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*. O Miguel, por exemplo, ali enganou-se num sinal. x quadrado, mais 3x sobre -2* (escreve no quadro: $=-2\left(x^2+\frac{3x}{-2}\right)-2$). *Não podemos esquecer que foi -2 que colocámos em evidência. O sinal vai atrás, temos que dividir por -2. Então, -2, x quadrado menos três meios de x, menos dois* (escreveu no quadro: $=-2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)-2$)."; "*Pois é minha querida. Mas como é que a menina sabe essas coisas todas sem passar por ali* (coordenadas do vértice)."
- indica aos alunos como obter os três termos do desenvolvimento do quadrado do binómio mantendo a igualdade com a expressão anterior (Cat. **Explicações**): "*Toda a gente percebeu de onde veio o* "mais um ao quadrado menos um ao quadrado"*? Coeficiente do x, metade do coeficiente do x, somamos o quadrado da metade e subtraímos o quadrado dessa metade.*"
- do conhecimento das coordenadas do vértice para as características da parábola em estudo, a professora integra vários conteúdos na exploração de um único exemplo de função quadrática (Cat. **Conhecimento do Curriculum**)
- indica aos alunos a razão da utilização da equação $f(x)=a(x-h)^2+k$, conhecimento das coordenadas do vértice e, consequentemente, das restantes características da parábola definida pela equação (Cat. **Objectivo do**

Conhecimento do Conteúdo): "*Pois é minha querida. Mas como é que a menina sabe essas coisas todas sem passar por ali* (coordenadas do vértice)."

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:

- identifica os elementos essenciais tanto no que respeita ao cálculo utilizado na actividade – desenvolvimento do binómio – como no que se refere à análise da equação $f(x) = a(x-h)^2 + k$ (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*Têm que colocar o factor -2 em evidência…*"; "*Quais são as coordenadas do Vértice?*"; "*Portanto. Ela vai ter a concavidade voltada para* [cima], *ela vai ser crescente de…*"
- evidencia a interdependência de noções dentro do estudo da parábola definida por um dado exemplo e conexões entre estas noções com a necessidade de utilizar o desenvolvimento do binómio para as poder obter (Cat: **Estrutura Matemática e Conexões**)

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- corrige as actividades dos alunos envolvendo-os na correcção, estimula as suas respostas e, com isto, mantém os alunos concentrados na dinâmica da aula (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**)
- através da comparação das respostas dos alunos a algumas perguntas precisas e direccionadas com as respostas esperadas a professora verifica as aprendizagens e avalia a sua própria performance. Premeia as respostas correctas dos alunos como forma de motivação "*Ah! Já percebeu que é sempre o simétrico*" (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**)

Cabe ainda referir que, em termos de **Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico**, a professora evidenciou uma preocupação com o rigor da linguagem utilizada pelos alunos "'Passa-se'. *Eu ensinei isso Miguel?* 'Passa-se'*?*"; e pela utilização apropriada da Terminologia "*Vocês podem responder assim: o máximo é menos sete oitavos para x igual a três quartos. E ao mesmo tempo vocês respondem o máximo e o maximizante.*"

Uso da Sequência de Exemplos

O uso dos dois exemplos, 1.3 e 1.4, são em tudo semelhantes. Por isso, a atenção sobre o uso destes exemplos deve ser dada ao uso de toda a sequência, a análise do todo é mais elucidativa que a análise de cada uma das partes. Em termos gerais, há dois momentos em toda a sequência, um momento em que a primazia é dada ao cálculo e outro em que a primazia é dada aos resultados proporcionados pelas coordenadas do vértice.

Relativamente à parte dedicada ao cálculo, a sequência pode ser considerada de *Exemplos de Processo*. A *Faceta Simbólica* é a utilizada, e todo o cálculo utilizado para escrever a equação do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ numa do tipo $f(x) = a(x-h)^2 + k$, utilizando o desenvolvimento do quadrado do binómio, pode ser mecanizada pelo aluno se ele interiorizar os passos fundamentais do processo.

A segunda parte, a que é dedicada à exploração da *Transparência* de equação $f(x) = a(x-h)^2 + k$ relativamente às coordenadas do vértice, não envolve cálculo mas diz bastante mais da parábola associada à função quadrática. O aluno, identificando as coordenadas do vértice pode, de forma imediata, produzir resultados ao nível do contradomínio, monotonia, eixo de simetria e natureza do extremo. Para que estes resultados surjam de forma natural, o professor deve fazer apelo à *Faceta Geométrica* quer de forma explícita ou implícita. Neste episódio, a utilização da faceta geométrica foi sempre implícita porque, consultando as lições anteriores das duas alunas, a utilização explícita da faceta geométrica foi amplamente usada nas duas aulas anteriores. Aliás, para que os alunos compreendessem a razão pela qual a equação usada é transparente às coordenadas do vértice, a professora trabalhou de forma consistente as transformações do plano que se associam aos parâmetros h e k da equação $f(x) = a(x-h)^2 + k$ que, como é bem sabido, privilegia o uso da faceta geométrica. A máquina de calcular gráfica foi um meio fundamental para que este trabalho fosse rápido e maximizasse o número de exemplos trabalhados.
O uso de exemplos em sequência, como já foi referido, permite trabalhar de forma controlada a *Variação*. A forma como se explora a variação proporcionada pelos exemplos desta sequência é feita ao nível das três *Dimensões de Variação Possíveis*: o parâmetro a, o parâmetro h e o parâmetro k, respectivamente, ao nível do sentido da concavidade, da translação horizontal e vertical. A sequência trabalha também as *Amplitudes de Mudança Permitidas*, que se ficaram pelos números inteiros e fraccionários nunca aparecendo qualquer parâmetro com valor irracional. Um dos valores que incorpora a amplitude de mudança permitida está relacionado com a paridade do coeficiente do termo em x. Isto é, como o terceiro elemento do desenvolvimento do quadrado do binómio se obtém a partir do quadrado da metade deste coeficiente, se o coeficiente é par a metade será inteira ou, sendo impar, a metade será fraccionária, influenciando o tipo e a dificuldade do cálculo.
A influência desta sequência de exemplos no âmbito da *Ampliação dos Espaços de Exemplos* dos alunos é evidente. Após o tratamento de toda a sequência o espaço de exemplos do conceito de função do aluno passará a incluir exemplos de quadráticas em que o aluno identificará de imediato o sentido da concavidade, a sequência dos intervalos de monotonia, a equação do eixo de simetria e a existência de máximo ou mínimo.
Finalmente, ficou por explorar uma *Dimensão de Variação Possível*. A própria letra identificativa da variável independente poderia ter variado não criando, assim, a sensação no aluno que todas as parábolas são definidas à custa de equações em que esta variável é sempre o x.

Esmeralda: **Episódio 33**
Dia: **16 Fevereiro 07**

Início: **LA 32 min 15 Seg.**
Fim: **LB 00 min 57 Seg.**

Manual: **Página 102**

Sequência de Exemplos planeada tratado pelos alunos e pela professora

Esmeralda: E vamos à página 102, e vamos tentar fazer esse exercício aí na Reflexão /Discussão.

2. Reflexão /Discussão

2.1 Seja $a = 2$ e $h = 3$.

Represente no mesmo referencial $f(x) = a(x-h)^2 + k$ para $k = -3$, $k = 0$ e $k = 4$.

Explique o efeito no gráfico de *f* devido à alteração de *k* na fórmula que define a função.

2.2 Seja $a = 3$ e $k = -2$.

Represente no mesmo referencial $f(x) = a(x-h)^2 + k$ para $h = -2$, $h = 0$ e $h = 5$.

Explique o efeito no gráfico de *f* devido à alteração de *h* na fórmula que define a função.

2.3 Seja $h = 1$ e $k = -3$.

Represente no mesmo referencial $f(x) = a(x-h)^2 + k$ para $a = -2$, $a = -1$ e $a = 0{,}5$.

Explique o efeito no gráfico de *f* devido à alteração de *a* na fórmula que define a função.

Ler com calma, entender o que está aí, se faz favor, porque vocês costumam ter sempre muita dificuldade na interpretação de enunciados. Vamos lá, exercício 2 da página 102.
(pausa para os alunos analisarem a actividade)
E: Por aquilo que eu percebo, devem precisar de calculadoras. Estou a ver-vos sem calculadoras. Pede para representar no referencial $f(x) = a(x-h)^2 + k$ para: $k = -3$, $k = 0$ e $k = 4$, sendo $a = 2$ e o $h = 3$. E depois temos de explicar o efeito no gráfico de *f*, devido à alteração de *k* na fórmula que define a função.
Marta, Calculadora! Ficou de fim-de-semana, já está no Carnaval?
(pausa para os alunos trabalharem)
E: Então já alguém verificou alguma coisa e nos sabe ajudar?
Rita: Sobe, sobe.
E: Sobe!? Sobe, o sobe significa que há uma alteração relativamente a quê? À abcissa, à ordenada…
Rita: Ao y.
E: Ao y. Todos conseguiram ver o que diz a Rita? Sobe?
Rita: Sim.
E: Há uma alteração do nosso gráfico, ou dos nossos gráficos, relativamente à…
Mas todos sobem?
Alunos: Sim.
Uma aluna: Não, há um que desce.
E: Ah! Pois, bem me parecia. Tem aí as parábolas todas Simão? Mostre. Pois, vocês têm uma que tem o vértice sobre o eixo dos xx, têm outra parábola que tem o vértice acima do eixo dos xx, ou seja, na parte positiva. E depois têm uma outra parábola que tem o vértice na parte negativa, abaixo do eixo dos xx. Então todos conseguiram visualizar que essa alteração tem a ver com o vértice? Tem a ver com o valor *k*? Sim?
Então vamos responder, vamos dizer que *k* traduz uma variação da ordenada do vértice.
Não foi isso que visualizaram?
Alunos: Sim.
E: Então vamos fazer a 2.2 e ver o que é que acontece.

(pausa para os alunos trabalharem a questão 2.2)
E: Já visualizaram alguma coisa? Já? E o que viram?
Aluna: Vai assim alterando.
E: Vai alterando, mas quê, na horizontal ou na vertical?
Aluna: Na horizontal.
E: Na horizontal. Então, e na horizontal será ordenada ou abcissa?
Aluna: Abcissa.
E: Abcissa. Toda a gente já conseguiu visualizar? Não? Então vá, peça os gráficos se faz favor. Já conseguiu Filipa?
Filipa: Já.
E: E viu o mesmo que os seus colegas? Que houve uma alteração na horizontal como diz a Carina?
Então temos que concluir se é na horizontal tem a ver com a abcissa, então significa…
porque se você reparar o que foi alterado agora foi qual das letras? Qual das incógnitas?
Não senhora, o *h*. Então, *h* traduz…
Miguel, algum problema?
… *h* traduz uma variação…
Já viu?
Miguel: Em vez de mudar o *h*, mudei o *h* e o *k* ao mesmo tempo.
E: Pois, assim dava mesmo jeito. Portanto, *h* traduz uma variação da abcissa do vértice.
Vamos fazer a 2.3 e ver e ver o que é que acontece. A 2.3 diz que o *h* é um, o *k* é menos três, e o que vai variando agora é o valor de *a*.
(pausa para os alunos visualizarem os gráficos na calculadora gráfica)
E: Já está, ou não? (…) Já está Filipa?
Filipa: Já.
E: O que é que visualizou?
Filipa: Uma está para cima e duas estão para baixo. E a que está para cima está mais aberta.
E: E qual é a que está para cima e quais é que estão para baixo?
Filipa: A que está para cima é a que tem o *a* igual a 0,5.
E: Espere! Espere. O que é que disse? Deixe ouvir aqui.
Simão: Aquela que têm o *a* maior estão mais abertas.
E: As que têm maior *a* estão mais abertas, diz o Simão. E a Rita dizia que as que estão para cima são…
Rita: São maiores do que zero. É quando o *a* é 0,5 é a que está virada para cima.
E: Ou seja, significa que o *a* é positivo. Quando o *a* é negativo tem a concavidade voltada para…
Alunos: … baixo.
E: Já tínhamos visto isso. Verdade? E à medida que o valor do *a* altera, a abertura da nossa concavidade também altera. Não é verdade? Então vamos realmente escrever isso. Vamos dizer que: *a* define o sentido da concavidade. Foi isso que visualizaram, não foi? Sim ou não?
Alunos: Foi.
E: *a* define o sentido da concavidade. E quanto maior for o valor absoluto de *a* mais fechada é a curva.

Fim da Transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

A sequência de três exemplos é apresentada na *Faceta Simbólica*, utilizando a função quadrática do tipo $f(x) = a(x-h)^2 + k$, mas trabalha a *Faceta Geométrica* e tem como objectivo trabalhar três *Dimensões de Variação Possíveis*, o parâmetro *a* que influência o sentido da parábola associada, e os parâmetros *h* e *k* que traduzem, respectivamente, translações horizontais e verticais. A *Amplitude de Mudança Permitida* para os parâmetros relativos às translações inclui valores inteiros e o zero, a *Amplitude de Mudança Permitida* para o parâmetro que determina o sentido da concavidade não pode incluir o zero.

Trabalhando estas três dimensões, a sequência aprofunda no conceito de função quadrática proporcionando aos alunos uma generalidade associada a este tipo de equação. Interiorizada a generalidade pelo aluno, os elementos da quadrática que dependem da posição do vértice no plano e do sentido da concavidade da parábola associada são imediatamente obtidos. Assim, a estrutura do conceito de função quadrática é alargada com funções do tipo $f(x)=a\left(x-h\right)^2+k$ e, entendendo melhor as quadráticas deste tipo e relacionando-as com as do tipo $f(x)=ax^2+bx+c$, pode o aluno alargar a forma de ver esta ultima já que, até aqui, os elementos mais importantes que se lhe referiam eram os zeros. Pelo que, os *Exemplos Planeados de Conceito* desta sequência se incluem na 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**.
Conhecimento Pedagógico do Conteúdo pela professora inclui aspectos que foram evidenciados.
Claramente CPC:

- a professora utiliza os exemplos 2.1, 2.2 e 2.3 para que os alunos relacionem a variação de cada um dos parâmetros da equação $f(x)=a\left(x-h\right)^2+k$ com as respectivas transformações do plano e, assim, compreenderem que os parâmetros *h* e *k* também são as coordenadas do vértice da parábola associada à função quadrática. Também utiliza os mesmos exemplos para relacionar o sinal do parâmetro *a* com o sentido da concavidade (Cat. **Estratégias de Ensino**)
- estabelece com o estudante um raciocínio idêntico na descrição da influência das variações dos parâmetros da equação $f(x)=a\left(x-h\right)^2+k$ nas transformações no plano (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*Sobe!? Sobe, o sobe significa que há uma alteração relativamente a quê? À abcissa, à ordenada…*"; "*Portanto, h traduz uma variação da abcissa do vértice.*"
- utiliza os gráficos das quadráticas e respectivas transformações no plano para introduzir e para promover uma reflexão/discussão com os alunos sobre os resultados obtidos (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**)
- explica a função do parâmetro *a* na equação $f(x)=a\left(x-h\right)^2+k$ tanto no sentido da concavidade como na contracção/expansão da parábola (Cat. **Explicações**): "*Ou seja, significa que o a é positivo. Quando o a é negativo tem a concavidade voltada para… (...) E à medida que o valor do a altera, a abertura da nossa concavidade também altera. Não é verdade?*"
- todo o estudo que relaciona variação dos parâmetros da equação $f(x)=a\left(x-h\right)^2+k$ com as transformações do plano e com a variação das coordenadas do vértice é feito com o auxilio da máquina de calcular gráfica como recurso (Cat. **Conhecimento de Recursos**)

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:

- identifica cada transformação do plano com a variação do parâmetro correspondente (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*Então vamos responder, vamos dizer que k traduz uma variação da ordenada do vértice. Não foi isso que visualizaram?*"; "*Portanto, h traduz uma variação da* *abcissa do vértice.*"; "*Quando o a é negativo tem a concavidade voltada para…* [baixo]"

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- ao estabelecer um diálogo baseado em questões sobre os aspectos em discussão, ao promover uma análise dos resultados obtidos, a professora mantém focalizada a atenção dos alunos (Cat. **Obtenção e conservação da Atenção do Aluno**)
- chama a atenção dos alunos para uma leitura cuidada e faz pausas em número e tempo suficientes para que os alunos possam trabalhar (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**): "*Ler com calma, entender o que está aí, se faz favor, porque vocês costumam ter sempre muita dificuldade na interpretação de enunciados. Vamos lá, exercício 2 da página 102.*"

Uso do Exemplo

Esta pode ser considerada uma sequência típica para explorar as várias *Dimensões de Variação Possíveis*. É uma sequência de três exemplos em que, em cada um, existem três variações num determinado parâmetro da equação $f(x)=a\left(x-h\right)^2+k$ o que perfaz nove equações e nove parábolas associadas. È um número suficiente de casos em que os alunos podem apreciar bastante *Variação* – a do parâmetro variado – e bastante *Invariação* – a dos parâmetros não variados – para associarem as respectivas alterações. Note-se que a formulação deste exemplo não indica um resultado que deve ser alcançado, como se lê, indica que com base no que se observa se deve reflectir e discutir deixando em aberto, para aluno e professor, o sentido dessa reflexão. Neste episódio o sentido das observações apontou os três resultados esperados: translação horizontal, translação vertical e sentido da concavidade. Contudo, houve um resultado apontado por um aluno que não é usual ser observado, a relação entre o valor absoluto do parâmetro *a* e uma contracção/expansão da parábola associada.

Pode-se observar, por parte da professora, uma condução da discussão para os resultados esperados através das questões que vai levantando mas isto apenas mantém a discussão na linha pretendida mas não retirando validade às generalizações produzidas pelos alunos.

Os três valores apresentados em cada um dos exemplos da sequência enquadram as *Amplitudes de Mudança Permitidas* em cada uma das *Dimensões*. São valores positivos, negativos ou nulos para as translações, provocando transformações para a direita, esquerda, para cima e para baixo ou, por outro lado, não produzindo qualquer deslocamento. O valor zero não é um valor permitido na *Amplitude* associada à *Dimensão* vinculada ao sentido da concavidade. Obviamente, se $a=0$ não se obtém uma quadrática nem a respectiva parábola associada.

Outro resultado que o uso desta sequência produz relaciona-se com a compreensão e utilização futura da *Transparência* que a equação $f(x)=a\left(x-h\right)^2+k$ apresenta quanto às transformações do plano sofridas pela parábola associada e, em consequência, as coordenadas do seu vértice e sentido da concavidade. O uso da sequência aspira alcançar a generalidade que a equação $f(x)=a\left(x-h\right)^2+k$ encerra. A generalidade proporcionada pela equação é que está na base da transparência que ela proporciona. Quando o aluno, pela apreciação da variação produzida na sequência, estabelece a generalidade pretendida ele interioriza a transparência da equação às coordenadas do vértice e ao sentido da concavidade por um lado e, por outro, está preparado para relacionar esses aspectos com outros, caso da monotonia, contradomínio ou natureza do extremo.

O efeito que tudo isto provoca na *Ampliação dos Espaços de Exemplos* é significativo, esse espaço irá incluir um tipo novo de exemplos e, necessariamente, contribuirá para reestruturar a *Imagem do Conceito de Função Quadrática* do aluno.

Esmeralda: **Episódio 34**
Dia: **16 Fevereiro 07**

Início: **LB 01 min 00 Seg.**
Fim: **LB 20 min 30 Seg.**

Manual: **Página 103**

Sequência de exemplos planeados tratados pelos alunos e pela professora

Esmeralda: E agora vamos à página 103, e vamos resolver o exercício 1 que ainda não resolvemos nenhum deste tipo.

> 1. Escreva uma equação da parábola conhecendo:
> 1.1 o vértice $V(2;5)$ e um dos seus pontos $A(1;8)$;
> 1.2 o vértice $V(3;-10)$ e um dos seus zeros $x=5$
> 1.3 os zeros $x=2$ e $x=6$, e o valor máximo 8.

Dão o vértice duma parábola e um ponto dessa parábola e pedem-me para eu escrever a equação. Ora pois bem, a equação que eu me lembro é $y=a(x-h)^2+k$ (escreve a equação no quadro), lembram-se doutra? Não.
Então, se me fornecem as coordenadas do vértice, dizem que o vértice é o ponto de coordenadas (2;5). Na minha fórmula onde está o 2 e onde é que está o 5? Onde é que vai ficar o 2, onde é que vai ficar o 5?
Alunos: o 2 no lugar do *h* e o 5 no *k*.
E: Portanto, o h é quanto?
Alunos: 2.
E: E o k?
Alunos: 5.
E: Mas se vocês repararem, se eu deixar ficar a equação assim (escreve no quadro, por baixo da primeira equação, a equação $y=a(x-2)^2+5$), quantas incógnitas é que eu tenho ali?
Alunos: Duas.
E: Duas? Eu vejo três. Três: *x*, *a* e *y*. E vocês aprenderam que para podermos determinar o valor das nossas incógnitas eu tenho de ter tantas equações quantas as incógnitas. Certo? Para eu ter só uma equação, então só posso ter quantas incógnitas?
Alunos: Uma.
E: Uma. Então será que, com os dados deste problema, eu tenho hipótese de ficar, naquela expressão, só com uma incógnita?
Marta: (não se entende)
E: Ou seja, percebi perfeitamente, não sei se os outros perceberam. A Marta diz que o *x* que aparece ali pode ser substituído por 1 e o *y* por 8. Pois bem, eu venho dizendo que o *y* e o *x* em todas as expressões representam pontos genéricos, ou seja, qualquer ponto da minha figura. Neste caso eu tenho um ponto particular, que é o ponto A, então posso, sim senhora, ir ali onde está o *x* e o *y* e substituir por 8 e 1. (na expressão $y=a(x-2)^2+5$ que está no quadro, concretiza as coordenadas de A e obtém $8=a(1-2)^2+5$) E agora tenho uma equação e uma incógnita e já posso resolver. Entendido?
Ora então fica, oito menos cinco igual a *a*, menos um ao quadrado. Três igual a *a*. Então o *a* é três. Logo a equação da minha parábola será (verbaliza enquanto escreve) $y=3(x-2)^2+5$.
(faz uma pausa para os alunos transcreverem do quadro para os cadernos)
E: Então tentem lá, sozinhos, fazer a 1.2.
(pausa para os alunos trabalharem)
E: Já alguém fez? Já? Vá lá fazer Marta.

(a Marta escreve no quadro $V \rightarrow (3;-10)$ e $x=5$, e diz à professora que se $x=5$ é um zero, então a raiz tem segunda coordenada zero. Escreve também $P(5;0)$)
E: Certíssimo. E pensou muito bem. Diz que um dos zeros é $x=5$. Se é um zero, significa que a imagem é zero. Portanto, o ponto vai ser um ponto de coordenadas 5 e 0.
(a aluna escreve no quadro $y=a(x-h)^2+k \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0 = a\left(5-3\right)^2 - 10$$
$$\Leftrightarrow 0+10=(2)^2$$
$$\Leftrightarrow 10=4a$$
$$\Leftrightarrow a=\frac{10}{4}$$
)

E: Ainda não acabou. Dez quartos é igual a cinco meios.
(a aluna conclui escrevendo $\Leftrightarrow a=\frac{5}{2}$)
E: E agora, aqui de lado, temos que escrever a equação.
(verbaliza enquanto a Marta escreve $y=\frac{5}{2}(x-3)^2-10$) São as coordenadas do vértice e o ponto A… o valor de *a*. Foi por isso que eu fui à procura da incógnita essa, do *a*. Certo?
Deu isso a toda a gente?
(pausa)
E: Então e como é que fazemos a 1.3. Preciso de ajuda. Como é que se resolve a 1.3?
Mário é a 1.3!
Ana: O k é igual a 8.
E: Diz a Ana que o k é igual a 8. Concordam? Ou não.
Alunos: Sim.
E: Sim senhor. Valor máximo… E depois? Já temos uma ajuda.
Já passaram, não passaram? O que está no quadro?
(apaga o quadro)
A Ana já me ajudou um pedacinho. Disse que… Portanto eu tenho a equação $y=a(x-h)^2+k$ e a Ana disse que o k é 8.
(vários alunos falam simultaneamente, mas percebe-se que alguém fala dos zeros 2 e 6)
E: Zeros? 2 e 6? Diz aqui?
Aluno: Sim diz aqui [no manual], $x=2$ e $x=6$.
E: O que é que isso significa? Temos o ponto (2;0) e (6;0). Pois bem. Mas continuo a precisar de ajuda.
Aluno: A abcissa é quatro.
E: O x do vértice é 4? Como é que sabe?
Aluno: Porque se a parábola tem dois zeros, o x do vértice está ao meio de 2 e de 6.
E: Não está mal pensado não senhora. Mas suponhamos que esse pormenor tinha passado de alta… ele fez isto porque traçou, desenhou a parábola, mas se ele não tivesse traçado a parábola tal como os seu colegas não traçaram… com estes dados o que é que eu posso fazer?
(silêncio)
E: Como é que eu vou usar estes dois pontos?
Aluna: No *x* e no *y*.
E: Tenho que substituir o *x* e o *y*. Então se eu substituir o *x* por 2, eu fico sem conhecer o *h*, estou sem conhecer o *a*, mas tenho que o *y* é zero (escreveu no quadro: $0=a(2-h)^2+8$). Mas ainda tenho ali ainda um ponto suplente, ainda não usei. Eu ali naquela condição tenho quantas incógnitas?
Alunos: Duas.
E: E como é que eu faço? Tenho duas incógnitas, supostamente precisava de quantas condições?
Alunos: Duas.
E: Então posso escrever uma segunda condição?
Aluna: Pode, com o ponto (0;6).

E: Um sistema. Exactamente. (escreve no quadro a segunda condição $\begin{cases} 0 = a(2-h)^2 + 8 \\ 0 = a(6-h)^2 + 8 \end{cases}$

Sim senhor, o senhor Rui foi inteligente, porque a sua parábola lhe facilitou um bocado as coisas, e agora vamos ver se eu, realmente, tinha razão ou não.
(a professora resolve o sistema enquanto vai explicando os passos da resolução aos alunos e obtém a solução $\begin{cases} a = -2 \\ h = 4 \end{cases}$)

E: *a* igual a -2 e *h* igual a 4. Logo, a equação $y = -2(x-4)^2 + 8$. Sim ou não?
Foi essa a conclusão que chegaram?
(os alunos confirmam)

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação dos Exemplos e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Os três exemplos que constituem esta sequência são do género *Dê Exemplo de* uma parábola conhecendo alguns dos seus elementos. Quando se pede ao aluno que dê exemplos com imposição de restrições, ele tende sempre a ver esta situação como sendo uma *situação ao contrário*. Isto é, também no caso das quadráticas, o aluno espera que lhe seja apresentada a equação que define a parábola e lhe seja pedido que determine alguma das suas características e, neste caso, o que se pretende do aluno está invertido. Esta tarefa é, do ponto de vista cognitivo, mais exigente porque pode não depender de um processo que determina a solução, para o aluno seguir uma rotina é sempre uma actividade de resultados mais previsíveis.
Cada uma destas três actividades, a produção de exemplos com restrições, deve ser considerada um problema, no sentido em que para o aluno não existe processo predeterminado que leve à solução. Acresce que estamos num âmbito estritamente matemático e, por isso, é uma situação interna que pelo grau de exigência cognitiva é já o final do percurso na leccionação do conceito de função quadrática apresentada na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$. O aluno que mostre destreza neste tipo de actividade, *Dê Exemplo de...* com restrições, é um aluno cuja *Imagem do Conceito* de função quadrática está convenientemente estruturada. Pelo exposto, os exemplos desta sequência enquadram-se na 4ª Categoria, **Aplicações Internas**.
Relativamente ao **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** da professora que se pode observar neste episódio, destacamos alguns em particular.
Claramente CPC:

- a professora recorre à necessidade de se obter igual número de equações e de incógnitas para poder determinar o valor do parâmetro em falta (Cat, **Estratégias de Ensino**): "*E vocês aprenderam que para podermos determinar o valor das nossas incógnitas eu tenho de ter tantas equações quantas as incógnitas. Certo?*"; "*Tenho duas incógnitas, supostamente precisava de quantas condições?*"
- verifica que uma aluna reconhece o sentido da noção de raiz de uma função (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*Certíssimo. E pensou muito bem. Diz que um dos zeros é $x = 5$. Se é um zero, significa que a imagem é zero. Portanto, o ponto vai ser um ponto de coordenadas 5 e 0.*"

- na resolução da questão 1.3, não são indicadas as duas coordenadas do vértice, apenas se dá a segunda coordenada quando se refere que o valor máximo é 8. Um aluno, o Rui, usando a simetria da curva afirma que o vértice se situa no ponto médio entre as duas raízes. A professora explica outra forma de determinar a abcissa do vértice mas admite que tal tarefa é exigente do ponto de vista cognitivo (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): " *Sim senhor, o senhor Rui foi inteligente, porque a sua parábola lhe facilitou um bocado as coisas…*"
- explica detalhadamente a forma de obter os resultados que são necessários (Cat. **Explicações**): ""*Pois bem, eu venho dizendo que o y e o x em todas as expressões representam pontos genéricos, ou seja, qualquer ponto da minha figura. Neste caso eu tenho um ponto particular, que é o ponto A, então posso, sim senhora, ir ali onde está o x e o y e substituir por 8 e 1. E agora tenho uma equação e uma incógnita e já posso resolver. Entendido?*

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:

- reconhece que o método do aluno Rui é válido para determinar o parâmetro *a* e a apresenta outro que não depende da simetria da parábola (Cat. **Conhecimento Procedimental**): "*Não está mal pensado não senhora. Mas suponhamos que esse pormenor tinha passado de alta… ele fez isto porque traçou, desenhou a parábola, mas se ele não tivesse traçado a parábola tal como os seu colegas não traçaram… com estes dados o que é que eu posso fazer?*"
- recorre às condições iniciais indicadas no enunciado da questão 1.3 para criar a condições suficientes para o cálculo dos parâmetros *a* e *h* (Cat. **Métodos de Solucionar**): "*Tenho que substituir o x e o y. Então se eu substituir o x por 2, eu fico sem conhecer o h, estou sem conhecer o a, mas tenho que o y é zero. Mas ainda tenho ali ainda um ponto suplente, ainda não usei. Eu ali naquela condição tenho quantas incógnitas?*"

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- estabelece uma base de diálogo com todos os alunos, ou com algum em particular, para os manter centrados na actividade em curso ou na explicação de dado passo o resultado (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**)
- explica aos alunos o objectivo da actividade a desenvolver: "*Dão o vértice duma parábola e um ponto dessa parábola e pedem-me para eu escrever a equação. Ora pois bem, a equação que eu me lembro é* $y = a(x-h)^2 + k$, *lembram-se doutra?*"; recompensa os alunos que conseguem resultados com uma palavra de incentivo: "*Sim senhor, o senhor Rui foi inteligente…* "; usa formas de envolver os alunos no trabalho: "*Preciso de ajuda.*" (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**)

Uso do Exemplo

Existe, por parte da professora, um papel diferenciado entre o primeiro exemplo e os restantes dois. O primeiro, servindo como *Exemplo Resolvido*, prepara o trabalho mais autónomo dos alunos para os dois seguintes. A professora utiliza esta estratégia de forma conscientemente, depois da questão 1.1 diz: "*Então tentem lá, sozinhos, fazer a 1.2.*".

A actividade relatada neste episódio é, como já foi referido, do género *Dê um Exemplo de…*, neste caso de funções quadráticas, pela sua equação, cuja parábola associada responde a certas condições. A actividade problemática envolve funções quadráticas apresentadas, de certa forma, na forma geométrica. Se repararmos, embora não sejam dadas as parábolas é dada alguma das características delas e, portanto, a *Faceta* é a *Geométrica*. O uso de cada um dos problemas visa que o aluno relacione características próprias da *Faceta Geométrica* com outras da *Faceta Simbólica*, o objectivo é, efectivamente, dar exemplo de uma determinada parábola pela sua equação. A relação entre as duas facetas é mais evidente quando se resolve o problema 1.3, o Rui socorreu-se da faceta geométrica para, pela situação das duas raízes, determinar o valor do parâmetro h que é a abcissa do vértice.

As *Dimensões de Variação Possíveis* não são evidentes neste episódio. Pelo menos no sentido mais usado neste estudo. Contudo podemos dizer que, desde 1.1 até 1.3 se pode notar uma *Variação* ao nível da apresentação das condições iniciais:

- vértice e ponto
- vértice e raiz
- segunda coordenada do vértice e duas raízes

Como se vê, existe a variação de um aspecto mantendo os outros invariantes. É este equilíbrio entre variação e invariação que desperta o aluno para a generalidade que determinadas situações proporcionam. Se se variam demasiados aspectos simultaneamente o aluno perde o sentido do aspecto que varia e, assim, a generalidade que a variação pretende alcançar.

A *Transparência* da equação $y = a(x-h)^2 + k$ às coordenadas do vértice joga um papel preponderante já que é a partir desta equação que o problema pode ser atacado.

Como é referido na literatura, e explicitado acima na classificação do exemplo, o uso deste tipo de actividade, *Dê um Exemplo de…,* actua directamente na *Ampliação dos Espaços de Exemplos* do aluno com uma grande vantagem, é o próprio aluno que faz essa ampliação, desenvolvendo a estrutura da sua *Imagem do Conceito* de função quadrática e aplicando-a directamente à resolução de um problema. Esta dupla funcionalidade, resolver problemas e ampliar o espaço de exemplos, é a qualidade mais interessante do uso desta sequência de exemplos.

Esmeralda: **Episódio 35**
Dia: **16 Fevereiro 07**

Início: **LB 22 min 10 Seg.**
Fim: **LB 40 min 13 Seg.**

Manual: **Página 109**

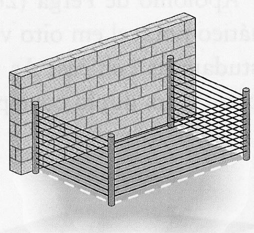
Exemplo planeado tratado pela professora e pelos alunos

Esmeralda: Há muitas situações da nossa vida, do dia-a-dia, em que o modelo matemático que mais se adequa é a função quadrática. E esta função, vocês já viram, este tipo de funções permitem-nos maximizar, minimizar, calcular máximos, calcular mínimos de determinadas situações. Então vamos resolver uns problemas, vamos à página 109 e vamos começar por resolver o problema 1. Leiam lá com atenção, se faz favor.

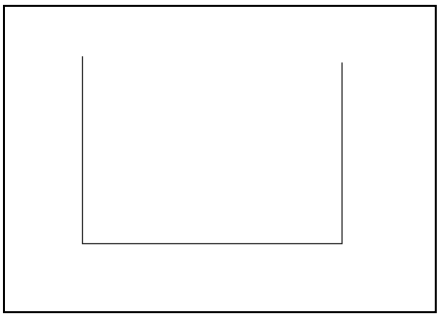
1. O Sr. Joaquim tem 100 metros de rede e pretende utilizá-la para construir uma vedação com a forma rectangular. Um dos lados do rectângulo dispensa a utilização da rede, uma vez que tem como suporte um muro, como se mostra na figura.

Determine, utilizando a calculadora gráfica como suporte, a área máxima do rectângulo que ele pode formar com os 100 metros de rede.

Apresente o gráfico da função que introduziu na calculadora, indicando o domínio, o contradomínio e o extremo.

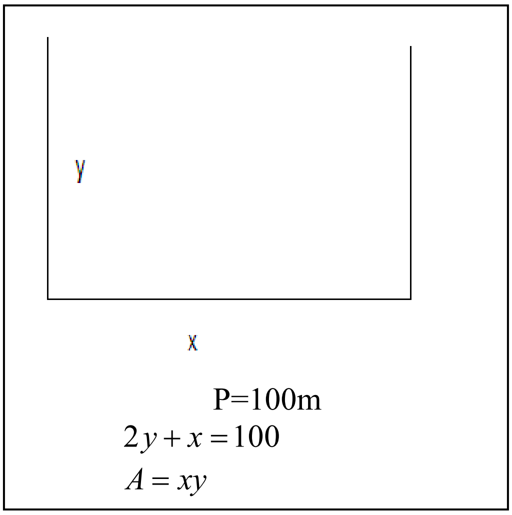


(pausa para os alunos entenderem a situação)
E: Já está lido? Percebido?
(outra pausa enquanto apaga o quadro)
E: Já toda a gente leu? Então vamos lá a ver se vemos isto.
"*O Sr. Joaquim tem 100 metros de rede (...) o contradomínio e o extremo*".
Então contem-me lá onde é que eu vou usar estes 100 metros de rede e como é que os vou usar.
(pausa)
Têm aí a figura. O que é que representam os 100 metros…?
Alunos: O perímetro.
(faz no quadro um esquema da situação em causa:



E: …o total da rede? O Perímetro. Então, se calhar, eu perguntaria como é que eu calculo o perímetro daquele rectângulo que esta parte aqui não está vedada (indica a parte superior da figura). Pois, o perímetro é igual à soma de todos os lados.
Aluna: Dividido por quatro…
E: Bem pensado. Portanto, perímetro é igual à soma de todos os lados (escreve: P=100m), e diz a Rita que os 100 metros é o perímetro, eu ouvi uma coisa que não gostei muito: 100 metros a dividir por quatro. Ou seja, está a partir do pressuposto que aquilo vão ser vedados quantos lados?
(alguns alunos respondem quatro)
Alunos: São três.
E: E partiu logo do pressuposto errado, que eram todos iguais. E nós não sabemos. Então, se eu não sei quais são as dimensões, como é que lhes chamo?

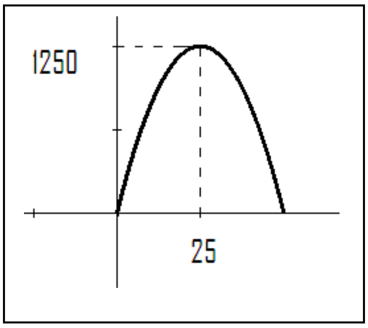
Aluna: Incógnitas.
E: Pois bem, …
Aluna: *x* e *y*.
E: Ora pois era isso que eu queria ouvir. Por exemplo, *x* e *y* (atribui a letra *x* ao comprimento e a letra *y* à largura).
E então agora? Com o nosso *x* e com o nosso *y*, como é que eu indico ali o perímetro? A expressão para o perímetro?
Alunos: $2x + y$.
E: Dois y mais x igual a cem (escreve no quadro: $2y + x = 100$), está certo. Mas, eu é o perímetro que quero saber?
Alunos: Não. É a área.
E: E como é que eu calculo a área de um rectângulo?
Alunos: Comprimento vezes a largura.
E: Então usando ali a minha figura, e as dimensões da minha figura, como é que eu indico essa área?
Aluna: x y.
E: Então a área… (escreve no quadro: $A = xy$). Então, se vocês entenderam o problema, eu quero arranjar uma expressão para a área. Certo? Então como é que eu vou fazer?
(pausa)
Vou transportar aquela informação para aqui.
(no quadro, do lado esquerdo tem a seguinte informação:



E do lado esquerdo escreve: $\begin{cases} A = xy \\ 2y + x = 100 \end{cases}$)

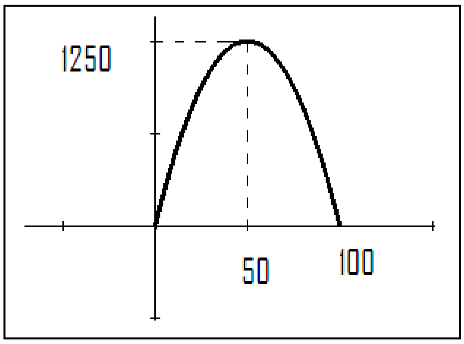
E: Digam-me lá vocês como é que eu vou chegar à expressão da área? Vocês sabem que quando nós temos uma… quando temos uma função, só temos uma incógnita, não é?
Normalmente um *x* ou um *t*, depende daquilo com que esteja a trabalhar, que é a minha variável independente. Mas eu ali na expressão da área tenho duas incógnitas, tenho um *x* e um *y*. Como é que eu faço?
Aluna: Podemos descobrir o x ou o y utilizando a expressão do perímetro.
E: Está bem pensado, sim senhora. Então se eu vier à expressão do perímetro e isolar o y, (escreveu: $\Leftrightarrow \begin{cases} \\ 2y = 100 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = x \cdot y \\ y = 50 - \dfrac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 50x - \dfrac{x^2}{2} \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{x^2}{2} + 50x \\ \end{cases}$) posso ficar com uma expressão deste tipo?
Agora o exercício diz para "*Determinar, usando a calculadora gráfica como suporte, a área máxima*". O que é que temos de fazer agora a seguir?
Pedimos o gráfico da função na calculadora, e procuramos o quê?
Aluno: O máximo.
E: O máximo. Então vá.
(pausa para os alunos determinarem o máximo da função Área)

E: Vocês ali, se quisessem, podiam reduzir tudo ao mesmo denominador. Mas eu acho que não há necessidade, toda a gente sabe trabalhar com menos um meio. Não é verdade?
(nova pausa, apoia individualmente os alunos que solicitem esse apoio)
E: Isso está mal, isto é uma parábola, desculpe lá. Aquilo é uma função quadrática. Temos que ser críticos. A Ana diz que já tem, tem uma janela desadequadissima e aparece-lhe uma recta. Temos que saber aquilo que estamos a fazer, atenção.
(nova pausa)
E: Errado! Olhe Miguel, nós andámos aqui a dizer que o sinal de *a* dava-nos o sentido da concavidade. Ou seja, o coeficiente do x quadrado, quando ele é positivo, a concavidade é voltada para onde?
Aluna: Para cima.
E: E quando ele é negativo…?
Aluno: … a concavidade está para baixo.
E: Temos que ser críticos! E temos que estar atentos aos conhecimentos que temos. Já viu? Ou não?
Nós…
Peça o máximo, faz favor. Que é o nosso problema…
51 o máximo?
Aluna: Não dá 43…
E: Ao João dá-lhe mil duzentos e cinquenta.
Aluna: O y.
(a professora verifica os resultados de vários alunos)
E: Já pediram o máximo?
Alunos: Sim.
E: E o que é que vos deu?
Alunos: x igual a 50 e o y…
E: Máximo não é x querido, isso é maximizante.
Dá 1250 que é o que tinha aqui o João.
Aluna: A mim dá-me erro.
E: Dá-lhe erro? Porque provavelmente o senhor quando introduz este menos, não introduz o posicional que é o que está dentro dos parênteses, eu ando a dizer isto há umas quantas aulas e vocês continuam a não ouvir.
(a professora apoia individualmente duas alunas)
E: Ora portanto, a figura que vocês observaram na calculadora… (esboça o gráfico)



1250 Corresponde ao x, 25. Então, eu tenho que indicar o domínio, o contradomínio e o extremo. Qual é o domínio da minha função?
Aluno: $\mathbb{R}$.
E: $\mathbb{R}$?! Ai desculpe, então eu tenho uma área negativa? (mostra no quadro que não há gráfico abaixo do eixo dos xx) Então tem que procurar este valor aqui (aponta a raiz da direita do gráfico).
Aluno: Zero.
E: Zero, exactamente. Não é $\mathbb{R}^+$. Eu quando estou a tratar de medidas do comprimento… Vamos lá a ver uma coisa, então eu consigo fazer um rectângulo, ou formar um rectângulo, onde uma das dimensões é zero?
Aluno: Não.
E: Nem com comprimento negativo.
Aluno: Professora, ali (abcissa do vértice) é 50.

E: Quanto? Aqui? (a professora marca a raiz 100 e consulta a calculadora de um aluno para verificar a abcissa do vértice) 50?
Aluno: A mim também me deu 50.
E: No máximo? Ora, menos x quadrado a dividir por dois… De facto, é provável que me possa ter enganado. Aqui 50. (altera o valor da abcissa do vértice)



E: Deu isto?
Alunos: Sim.
E: Ora portanto, então nós temos que começar por responder à área máxima. A área máxima do rectângulo, quanto é?
Aluno: 1250.
E: Então vamos dizer exactamente isso. A área máxima do rectângulo é de 1250 para x igual a 50. Depois, faltam-nos o domínio e o contradomínio.
Domínio, qual é o menor valor que o x pode assumir?
Aluna: Zero.
E: Zero. E qual é o valor máximo que o x pode assumir?
Alunos: 100.
E: Qual é o contradomínio?
Aluna: De zero a 1250.
E: De zero a 1250. Ora, nós na área não colocámos medidas. Nós na área temos de dizer que a área máxima que é possível vedar é de 1250 metros quadrados. Estamos a trabalhar com metros.

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Este exemplo planeado pela professora insere-se na 5ª Categoria, **Aplicações Externas**. Cognitivamente, é um exemplo exigente já que obriga o aluno a relacionar duas grandezas do rectângulo, o perímetro e a área. A aplicação da função quadrática não é, neste exemplo, aplicada de forma directa ou simples a uma situação da vida real. É necessário que o aluno seja capaz de raciocinar em termos de que tanto a área como o perímetro dependem das duas dimensões do rectângulo, comprimento e largura. Assim, é necessário utilizar a expressão do perímetro para poder escrever a área apenas em função ou do comprimento ou da largura. Estamos pois no fim de um percurso, onde o aluno deve utilizar o conceito de função quadrática de uma forma cognitivamente exigente e, por isso, este exemplo é uma aplicação externa.

Quanto ao **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** existem aspectos a destacar.

Claramente CPC:

- a professora situa os alunos na actividade para que eles apreendam uma aplicação externa do conceito de função quadrática (Cat. **Estratégias de Ensino**): "*Há muitas situações da nossa vida, do dia-a-dia, em que o modelo matemático que mais se adequa é a função quadrática.*"
- identifica um pensamento típico do aluno: se é para vedar um quadrilátero, então divide-se o comprimento por quatro (Cat. **Pensamento do Estudante**): "…*diz a Rita que os 100 metros é o perímetro, eu ouvi uma coisa que não gostei muito:*

100 metros a dividir por quatro. Ou seja, está a partir do pressuposto que aquilo vão ser vedados quantos lados?"

- indica aos alunos onde radica a dificuldade de exprimir a área do quadrilátero (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*Digam-me lá vocês como é que eu vou chegar à expressão da área? Vocês sabem que quando nós temos uma... quando temos uma função, só temos uma incógnita, não é? Normalmente um x ou um t, depende daquilo com que esteja a trabalhar, que é a minha variável independente. Mas eu ali na expressão da área tenho duas incógnitas, tenho um x e um y. Como é que eu faço?*"
- mostra como a área do quadrilátero é bem modelada por uma função quadrática (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**): "$A = -\frac{x^2}{2} + 50x$ *...posso ficar com uma expressão deste tipo?*" e representa no quadro a parábola associada à área inserindo o domínio no contexto do problema: "*Domínio, qual é o menor valor que o x pode assumir? [...] Zero. E qual é o valor máximo que o x pode assumir?*"
- incentiva e usa a máquina de calcular gráfica para visualizar gráficos e para procurar o extremo que soluciona a aplicação externa que propôs aos alunos (Cat. **Conhecimento de Recursos**): "*O que é que temos de fazer agora a seguir? Pedimos o gráfico da função na calculadora, e procuramos o quê? (...) O máximo. Então vá.*"
- utiliza a noção de extremo, que é um conteúdo anterior e estritamente matemático, para solucionar a situação da vida real. Isto é, há noções tratadas anteriormente que fazem sentido, e podem ser usados, em termos de uma aplicação externa (Cat. **Objectivo do Conhecimento do Conteúdo**): "*Então vamos dizer exactamente isso. A área máxima do rectângulo é de 1250 para x igual a 50.*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:

- direcciona os alunos por intermédio de questões que, depois de respondidas pelos alunos, os encaminha para a resolução do problema. Estas questões são sempre dirigidas aos elementos chave da actividade problemática (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*O que é que representam os 100 metros...?*"; "*E então agora? Com o nosso x e com o nosso y, como é que eu indico ali o perímetro? A expressão para o perímetro?*"; "*Então usando ali a minha figura, e as dimensões da minha figura, como é que eu indico essa área?*"; "*Digam-me lá vocês como é que eu vou chegar à expressão da área? Vocês sabem que quando nós temos uma... quando temos uma função, só temos uma incógnita, não é? Normalmente um x ou um t, depende daquilo com que esteja a trabalhar, que é a minha variável independente. Mas eu ali na expressão da área tenho duas incógnitas, tenho um x e um y. Como é que eu faço?*"
- para resolver este problema, a professora apresenta um método baseado no estudo da função quadrática, na sua parábola associada e com recurso à calculadora gráfica e demonstra habilidade no processo de resolução (Cat. **Métodos de Solucionar** e também **Conhecimento Procedimental**)

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- descreve o objectivo da aprendizagem dos alunos e uma aplicação dessa aprendizagem (Cat. **Objectivos da Aprndizagem**): "*Há muitas situações da nossa vida, do dia-a-dia, em que o modelo matemático que mais se adequa é a função quadrática. E esta função, vocês já viram, este tipo de funções permitem-nos maximizar, minimizar, calcular máximos, calcular mínimos de determinadas situações. Então vamos resolver uns problemas, vamos à página 109 e vamos começar por resolver o problema 1.*"
- Utiliza um problema da vida real para captar a atenção dos alunos. Mantém essa atenção com perguntas chave à resolução do problema (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**)
- abre e fecha o episódio. Abre o episódio explicando aos alunos o que vão fazer e fecha o episódio com a explicitação da solução e a forma correcta de a redigir. Esboça no quadro todos os gráficos necessários à compreensão da resolução do problema e mantém no quadro a informação relevante numa utilização correcta do quadro (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**)

Uso do Exemplo

Ao usar este exemplo, a professora mostra aos alunos uma aplicação prática do estudo que têm vindo a fazer da função quadrática e também da parábola associada. Mais especificamente, este exemplo mostra como pode ser útil o conhecimento de um elemento da parábola, o seu vértice. O vértice, consoante a situação, é a chave da resolução de um problema de maximização ou de minimização. A aplicação externa do exemplo faz-se primordialmente utilizando a *Faceta Simbólica* da função quadrática mas, em certos momentos da resolução do problema, é necessária a utilização da *Faceta Geométrica* para melhor compreender os aspectos formais do conceito de função – domínio, contradomínio e variável independente – num contexto real e necessário à crítica dos resultados obtidos. Através de pistas muito específicas a professora orienta os alunos para os aspectos mais importantes do problema e da sua resolução, fazendo uso da função quadrática e das incógnitas envolvidas. Estas incógnitas, x para o comprimento e y para a largura, traduzem a generalidade necessária para se poder atacar o problema mantendo as relações entre elas, transformando-se em concretizações numéricas aquando da obtenção da solução.

O exemplo, sendo uma aplicação prática, também deve ser observado de um ponto de vista formal e estritamente matemático para melhor descrever o seu uso. Assim, podemos observar o interesse de indicar o domínio, o contradomínio, natureza do extremo e a variável independente, noções estritamente matemáticas, no contexto do problema. De uma perspectiva menos formal, a indicação do domínio da variável obriga o aluno a criticar a situação num contexto real. A professora faz essa observação, conjuntamente com o contradomínio, outra noção matemática, relativamente à inexistência de medidas de área negativas.

Este tipo de exemplo dá significado à modelação matemática. O aluno pode, de modo efectivo, *ver* a matematização da realidade e da sua utilidade prática.

Além do mais, este tipo de exemplos, as aplicações à vida real, promove também uma *Ampliação do Espaço de Exemplos do Aluno*, o seu espaço deixa de incluir apenas exemplos fundamentalmente matemáticos e passa a incluir outros mais *reais*.

Esmeralda: **Episódio 36**
Dia: **23 Fevereiro 07**

Início: **LA 00 min 00 Seg.**
Fim: **LA 12 min 37 Seg.**

Manual: **Página 118**

Exemplo planeado tratado pela professora e pelos alunos

Esmeralda: E o ponto de intersecção com o eixo dos yy, que era (0;30). Depois faltava determinar os pontos de intersecção com o eixo dos xx. Tem feito Inês? Essa alínea [13.5]? Vá lá fazer, se faz favor.

13. Considere a função *h* definida por $h(x) = -3x^2 + 9x + 30$

13.1 Qual é o sentido da concavidade da parábola que representa graficamente a função?
13.2 Determine o vértice da parábola que representa graficamente a função.
13.3 Indique os intervalos de monotonia da função.
13.4 Indique o máximo absoluto da função.
13.5 Determine as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico de *h* com os eixos coordenados.
13.6 Determine *x*, de modo que $h(x) \geq 0$.
13.7 Qual é o ponto do gráfico da função que tem a mesma ordenada que o ponto (-1;18)?

(a aluna vai ao quadro e escreve:

Intersecção com o eixo Ox.

$$0 = -3x^2 + 9x + 30 \Leftrightarrow$$

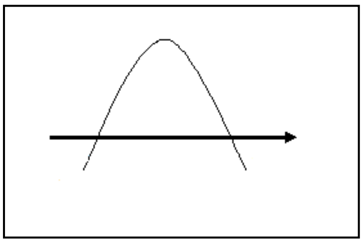
$$\Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4(-3)(30)}}{2(-3)} \Leftrightarrow$$)

E. Foi assim que fizeram?
Alunos: Foi.
(como $x =$ não ficou alinhado com o traço de fracção, a professora chamou a atenção à aluna que, depois de apagar $x =$, voltou a escrever o resto da expressão já alinhado com o traço de fracção)
E: Inês, hoje mudou de parceira mas continua a dar à língua. Não?
Inês: Só estava a tossir, professora.
E: Antes. Antes de ter tossido.
(a aluna que está no quadro escreve:

$$\Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 360}}{-6} \Leftrightarrow$$)

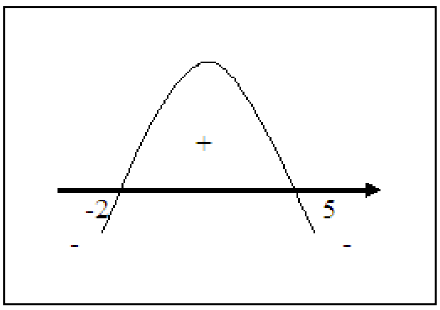
E: Qual é o resultado disso?
Aluna do quadro: da raiz? Dá 21.
Aluno: professora, ali é 81?
E: É, nove vezes nove, oitenta e um. É o *b* ao quadrado.
(a professora dá indicações à aluna onde escrever no quadro de forma que todos os alunos que estão sentados possam ver)
E: A Patrícia questiona o 441. Não vos deu 441?
Alunos: Deu.
E: Mostre-me a calculadora, se faz favor. Ora 81 mais 4 vezes 3 vezes trinta… A calculadora da Bruna dá 441 também. Veja lá não seja a sua que esteja avariada. A sua, a biológica, é lógico.
Aluna do quadro: Deu isto [$x = -2 \vee x = 5$].

E: Não sei. Deu isto, ou não?
Alunos: Sim.
E: Ora, -2 e 5. Sim. Agora basta indicar as coordenadas dos pontos. Portanto, será $(-2;0)$ e $(5;0)$. Sim senhora.
A outra alínea. Houve pessoas que me disseram que era complicada. *Determine x de modo que* $h(x)\geq 0$. Como é que nós fazemos o estudo de uma inequação de 2º grau? O que é que eu ensinei?
Aluna: Resolvemos como equação.
E: Resolvemos como equação. Está resolvida! E agora?
Alunos: Desenhamos.
E: É. A menina não tem a calculadora aí ao seu lado? Clica nas teclasinhas, coloca lá a raiz quadrada de 441 e ela responde-lhe um número: 21.
Conte lá Ana, como é que era?
Ana: Resolvemos como uma equação.
E: Resolvemos como uma equação. Resolvemos já na alínea anterior, que para determinar os pontos de intersecção com o eixo dos xx, tenho que resolver como equação.
Ana: Sabemos que de -2 a 5 é positivo…
E: Como é que sabe? Como é que fez esse estudo?
Ana: Meti a função na calculadora.
E: Boa! Rita, ajuda.
Rita: Desenhei.
E: Desenhou o quê?
Rita: A parábola!
E: Boa! Era isso que eu queria ouvir! Temos uma parábola com a concavidade voltada para onde?
(uns alunos respondem: para baixo; outros: para cima)
(a professora faz cara de surpresa, os segundos rectificam e a professora sorri)
Aluna: Professora eu faço ao contrário. Fiz ao contrário, fica para cima…
(alguns alunos riem)
E (sorrindo): Explique para que se entenda.
Aluna: Ela está assim…
E: A concavidade assim (com as mãos indica a concavidade para cima) é para cima ou para baixo?
Aluna: É para baixo.
E: Ai a concavidade assim é para baixo?!
(a aluna explica tudo ao contrário, diz que se o vértice está para baixo a concavidade também, a professora olha surpreendida)
E: Não tem nada a ver. Eu assim (mantém as mão em concha) considero a concavidade voltada para cima. Estou a olhar para cima. Concavidade para cima. E assim (une as pontas dos dedos e as mãos formam uma curva) será a concavidade para baixo. Digo eu. Não sei!
Ora, então temos uma parábola com a concavidade voltada para baixo, (esboça no quadro uma parábola)



a nossa função tem dois zeros que encontrámos na alínea anterior, (marca os valores das raízes, -2 e 5), qual é o sinal da função entre os zeros?
Alunos: Positiva.
(a professora marca um sinal de + entre os zeros)
E: Qual é o sinal da função fora dos zeros?
Alunos: Negativa.
(a professora marca um sinal de - fora dos zeros)

E: E então o que é que eu procuro na alínea 13….



Aluna: Onde é que é maior ou igual que zero.
E: Então, se é maior ou igual que zero, qual é a resposta?
Alunos: De menos dois a cinco fechado.

E: x pertence ao intervalo fechado, -2 a 5. (escreveu no quadro $x \in [-2;5]$)
Olhem, para quem continua a não estudar isto continua a não estar sabido. E já sabem o que é que isso significa, não é?
(pausa)
E: Já passaram?
Alunos: Não.
(nova pausa para os alunos acabarem de transcrever para os cadernos)
E: 13.7: "*Qual é o ponto do gráfico da função que tem a mesma ordenada que o ponto (-1;18)*?" Como é que resolveram este exercício?
Aluna: Fui à calculadora…
(outro aluno começa também a falar)
E: Espere, espere só um bocadinho. Foi à calculadora, e depois?
Aluna: Meti a função e desenhei.
E: Exactamente.
Aluna: E fiz a recta $y = 18$.
E: Sim senhora, e depois?
Aluna: Depois fui ver o ponto de intersecção da recta com…
E: Foi determinar os pontos de intersecção. Então e se tivesse que fazer analiticamente? O que é que isso significa? Foram à calculadora, colocaram lá a expressão desta função. E depois, numa segunda função, $y = 18$, subentendo eu. Certo? Procuraram os pontos de intersecção, calculadora.
Analiticamente, como é que nós traduzimos isso? O que é que significa procurar os pontos de intersecção entre esta função e a tal segunda função, $y = 18$?
Aluno: É ver onde é que a função é igual a 18.
E: Nem mais. É, se eu procuro o ponto de intersecção, procuro o ponto onde elas se juntam, onde a imagem das duas é dezoito. Logo, é exactamente a mesma coisa que eu pegar naquela equação que a Inês tem ali e, em vez de estar igual a zero, colocar igual a dezoito. E depois (vai escrevendo no quadro) menos três x ao quadrado, mais nove x. Ora trinta menos dezoito dá doze. Igual a zero (escreveu $-3x^2 + 9x + 12 = 0$), e agora, menos nove, oitenta e um, menos quatro …., empreste-me a calculadora se faz favor… (faz os cálculos até chegar ao resultado da equação. Utiliza os cálculos que estão no quadro, da equação anterior que a aluna efectuou, onde vai alterando os valores) isto dá quinze…
Dá menos um… quatro… (escreve no quadro a solução da equação $x = -1 \vee x = 4$).
Ora portanto, o ponto de coordenadas $(4;18)$ é o outro ponto. Porque o que me dão é $(-1;18)$, qual é o ponto? Então, o nosso segundo ponto cuja imagem é 18, é o ponto de abcissa 4 (escreve no quadro $(4;18)$). Analiticamente, é isto que tinham que fazer. Usando a calculadora, tinham que fazer exactamente o que a Patrícia disse. Colocar em segunda função, além do menos três x quadrado, mais nove x, mais trinta, e pedir os pontos de intersecção. Um dos pontos de intersecção seria o ponto de coordenadas $(-1;18)$ e o outro ponto de intersecção seria o ponto de coordenadas $(4;18)$. Esclareceram-se as dúvidas todas?

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O *Exemplo Planeado de Conceito* que este episódio inclui integra-se na 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**. Esta classificação justifica-se não apenas pelas características do próprio exemplo – tratamento global de uma função quadrática – mas também pela situação de dúvida que ajudou a resolver, designadamente, a confusão que uma aluna evidenciava na constatação do sentido da concavidade da parábola associada a uma função quadrática. Se a construção da imagem do conceito e o aprofundamento na estrutura do conceito são obtidas à custa da superação de diversas etapas, então este exemplo contribui para que algumas sejam ultrapassadas. Pelo tratamento que a professora deu ao exemplo com a colaboração dos seus alunos, pode-se constatar como os conhecimentos prévios dos alunos são operacionalizados em novas situações. A resolução de equações do 2º grau serve, neste exemplo, para determinar as intersecções com o eixo dos xx; a interpretação do sinal de gráficos serve para a resolução de inequações de 2º grau e a visualização de gráficos para justificar a utilização de uma igualdade de expressões algébricas.

Alguns aspectos do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** podem ser lidos na actuação da professora.

Claramente CPC:

- a professora, para resolver a inequação de 2º grau usa uma técnica baseada em 3 etapas: escrever a inequação na forma canónica, determinar as raízes e o sentido da concavidade da quadrática associada à inequação e esboçar o gráfico da parábola associada. Com o esboço o aluno facilmente determina o(s) troço(s) onde a função é positiva ou negativa. Para percorrer as etapas do processo a professora utiliza pequenas orientações que relembram aos alunos um conteúdo prévio: "*Resolvemos como uma equação. Resolvemos já na alínea anterior, que para determinar os pontos de intersecção com o eixo dos xx, tenho que resolver como equação. (...)Boa! Era isso que eu queria ouvir! Temos uma parábola com a concavidade voltada para onde? (...) ... qual é o sinal da função entre os zeros? (...)Qual é o sinal da função fora dos zeros? (...)E então o que é que eu procuro na alínea 13.6? (...)Então, se é maior ou igual que zero, qual é a resposta?*" (Cat. **Estratégias de Ensino**)
- estabelece com uma aluna formas de comunicar sobre a noção de sentido da concavidade de uma parábola. A compreender que a aluna não tinha apreendido a noção de forma correcta, utiliza formas intuitivas de corrigir a concepção errónea que a aluna adquiriu (Cat. **Pensamento do Estudante** e **Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas**): "*Não tem nada a ver. Eu assim* (mantém as mão em concha) *considero a concavidade voltada para cima. Estou a olhar para cima. Concavidade para cima. E assim* (une as pontas dos dedos e as mãos formam uma curva) *será a concavidade para baixo.*"
- para determinar a solução de $h(x) \geq 0$ a professora recorre à representação gráfica da função e estuda, visualmente, o sinal (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**): "*Ora, então temos uma parábola com a concavidade voltada para baixo,* (esboça no quadro uma parábola)"
- no tratamento do aspecto 13.7 do exemplo, antes de o fazer analiticamente, a professora trata este aspecto de forma gráfica por uma aluna o ter sugerido. Depois, baseada na visualização do aspecto em causa e a ligação que tem à igualdade entre funções, a professora e explica porque se transforma numa igualdade simbólica (Cat. **Explicações**): "*Analiticamente, como é que nós traduzimos isso? O que é que significa procurar os pontos de intersecção entre esta função e a tal segunda função, $y = 18$? (…) … eu procuro o ponto de intersecção, procuro o ponto onde elas se juntam, onde a imagem das duas é dezoito. Logo, é exactamente a mesma coisa que eu pegar naquela equação que a Inês tem ali e, em vez de estar igual a zero, colocar igual a dezoito*."
- a professora recorre à calculadora gráfica em diversas situações, seja para efectuar cálculo simples seja para a visualização de parábolas (Cat.

Conhecimento de Recursos): "*Analiticamente, é isto que tinham que fazer. Usando a calculadora, tinham que fazer exactamente o que a Patrícia disse. Colocar em segunda função, além do menos três x quadrado, mais nove x, mais trinta, e pedir os pontos de intersecção. Um dos pontos de intersecção seria o ponto de coordenadas* $(-1;18)$ *e o outro ponto de intersecção seria o ponto de coordenadas* $(4;18)$."

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:
- ao indicar o processo de determinar a solução de uma inequação de 2º grau, a professora indica quais os pontos importantes a ter em consideração e como os interpretar (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**)
- relaciona o resultado da aplicação da fórmula resolvente, os zeros da função, que são conhecimentos prévios do aluno com os pontos onde a função intersecta o eixo das abcissas (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**): "*Ora, -2 e 5. Sim. Agora basta indicar as coordenadas dos pontos. Portanto, será* $(-2;0)$ *e* $(5;0)$."

Nota: é evidente a preocupação da professora com rigor da notação e a forma de escrever no quadro quando pede a uma aluna que apague o que escreveu, e reescreva, porque o traço de fracção não está alinhado com o sinal de igual.

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:
- chama a atenção de uma aluna que se encontra distraída: "*Inês, hoje mudou de parceira mas continua a dar à língua. Não?*"; dialoga directamente com os alunos para conseguir manter a sua atenção no trabalho (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**)
- avalia as aprendizagens dos alunos no decurso do tratamento dos exemplos: "**Ana:** *Sabemos que de -2 a 5 é positivo…*
  Esmeralda: Como *é que sabe? Como é que fez esse estudo?*"; envolve outros alunos na situação em apreço: "*Boa! Rita, ajuda.*"; utiliza de forma adequada o quadro quando, no início do episódio, pede a uma aluna que escreva numa zona do quadro que seja visível por todos os alunos; recorre a poios visuais – calculadora gráfica, esboços no quadro e a as mãos – para melhor transmitir a mensagem (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**)

Uso do Exemplo

Este exemplo foi proposto aos alunos na aula anterior, contudo não pôde ser totalmente trabalhado por a aula ter terminado. Os três últimos pontos foram levados como trabalho de casa, este episódio relata a correcção desse trabalho.

A descrição do uso deste exemplo não contempla apenas os aspectos tratados e descritos no episódio, far-se-á o tratamento de todo o exemplo.

Os aspectos contidos nos itens 13.1, 13.2, 13.3 e 13.4 estão directamente relacionados com a *Transparência* de uma equação da função quadrática aos elementos da parábola que define. Os elementos tratados são o sentido da concavidade, as coordenadas do vértice, os intervalos de monotonia e o extremo. As facetas envolvidas no uso deste exemplo são a *Faceta Simbólica* e a *Faceta Numérica* e, na relação entre as duas facetas destaca-se o facto de que a faceta simbólica envolve duas equações da função quadrática: $h(x) = ax^2 + bx + c$ e $h(x) = a(x-h)^2 + k$. A necessidade de utilizar estes dois tipos de equação prende-se com os elementos relativamente aos quais as equações são transparentes. Assim, a primeira é transparente a penas ao sentido da concavidade e a segunda é transparente às coordenadas do vértice e, consequentemente, aos intervalos de monotonia e extremo. Ambas são transparentes ao sentido da concavidade e a primeira equação é mais apropriada à determinação dos vértices e, por isso, ao estudo do sinal.

O tratamento do exemplo relativamente aos aspectos da parábola associada que são *visíveis* na equação $h(x) = a(x-h)^2 + k$ não figura na transcrição deste episódio, somente os aspectos relativos ao tratamento dos aspectos relacionados com a equação $h(x) = ax^2 + bx + c$.

A primeira parte do episódio trata o processo de aplicação da fórmula resolvente à determinação das intersecções com o eixo horizontal e é, o fundo, a base para resolver a questão seguinte, determinar o troço não negativo da parábola.

A resolução da inequação $h(x) \geq 0$ é o aspecto que melhor relaciona as duas facetas em uso. Embora a professora pudesse manter um tratamento do exemplo puramente simbólico, utilizando apenas processos analíticos, preferiu que os alunos visualizassem o aspecto da parábola que resolve a questão. Sabendo as raízes e o sentido da concavidade a professora esboça a parábola e, quando a aluna situa o problema repetindo a pergunta "*Onde é que é maior ou igual que zero?*", com o esboço no quadro, a resposta é obvia para todos os alunos. Com esta decisão, envolver as duas facetas no tratamento do exemplo a professora fornece aos alunos um exemplo mais rico do que seria se apenas fosse tratado analiticamente, além disso, os alunos ao criarem relações entre as duas facetas do conceito de função, aprofundam no conceito e desenvolvem a imagem do conceito de forma mais adequada ao tratamento deste tipo de exemplos.

Relativamente à resolução da questão 13.7, a professora também recorreu às duas facetas. A primeira vontade da professora seria um tratamento analítico, por meio da faceta simbólica resolveria a equação associada ao problema. Contudo uma das alunas recorre à máquina de calcular gráfica e enquadra a situação num âmbito geométrico intersectando a função *h* com a função constante igual a 18. Neste momento a professora opta por explorar a faceta geométrica e, ilustrada nesta faceta, explica a resolução analítica radicada na faceta simbólica. Saliente-se a forma como a professora justifica as duas soluções, a intersecção faz-se segundo dois pontos e, visualmente, justifica que um é o ponto dado e o outro será, necessariamente, o ponto pedido: "*…o ponto de coordenadas* $(4;18)$ *é o outro ponto. Porque o que me dão é* $(-1;18)$*, qual é o ponto? Então, o nosso segundo ponto cuja imagem é 18, é o ponto de abcissa 4 (escreve no quadro* $(4;18)$*). Analiticamente, é isto que tinham que fazer. Usando a calculadora, tinham que fazer exactamente o que a Patrícia disse. Colocar em segunda função, além do menos três x quadrado, mais nove x, mais trinta, e pedir os pontos de intersecção. Um dos pontos de intersecção seria o ponto de coordenadas* $(-1;18)$ *e o outro ponto de intersecção seria o ponto de coordenadas* $(4;18)$."

Mais uma vez os alunos puderam Ampliar o seu *Espaço de Exemplos* com um caso que relaciona estreitamente estas duas facetas do conceito de função quadrática. O uso deste exemplo contribui para uma visão muito global do conceito de função quadrática considerando os numerosos aspectos que trata e a forma como os relaciona.

Esmeralda: **Episódio 37**
Dia: **23 Fevereiro 07**

Início: **LA 13 min 00 Seg.**
Fim: **LA 31 min 37 Seg.**

Manual: **Página 118**

Exemplo planeado tratado pelos alunos e pela professora

Esmeralda: Então vamos fazer o exercício número catorze.

14. Determine os números reais a e b, com $a \neq 0$, de modo que a parábola de equação $y = ax^2 + bx + 4$ tenha o vértice no ponto $(-1;2)$.

(pausa para os alunos analisarem a actividade proposta)
E: É bom que vocês comecem a resolver alguns dos problemas por vossa conta e risco porque eu não tenho tempo de os resolver todos. Vocês, de um modo geral, na interpretação dos problemas têm sempre problemas.
(apoia individualmente os alunos que solicitam a ajuda da professora)
E: " *Determine os os números reais a e b, com* $a \neq 0$*, de modo que a parábola de equação* $y = ax^2 + bx + c$ *tenha o vértice no ponto* $(-1;2)$ ". Aceitam-se sugestões!
Ana: Pode-se fazer um sistema.
E: A Ana acha que tem que se fazer um sistema. Assim… Partindo de onde?
Ana: … queremos o *a* e o *b*, temos que substituir na forma y=… os pontos que nos dão.
E: Os pontos. Hum. Então dão-nos os pontos…
Aluno: É só um.
E: Dão-nos um ponto, e esse ponto tem um nome…
Alunos: Vértice.
E: É vértice. É um ponto especial. Então eu posso substituir assim como ela quer fazer?
Aluna: Não, vamos pôr primeiro na forma, $y = a(x-h)^2 + k$
E: …menos.. ao quadrado mais k. Exactamente. Então, é por aí que esta cabecinha de vento (brinca com a Ana) devia ter começado, mas não, começou pelo sistema que tinha no caderno. Que fez em casa… pois! Mas nós aqui, já tínhamos feito um exercício parecido com este. Nem mais! Não é? Pronto.
Então, sim senhora, a primeira coisa que nós temos que fazer, se nos dão as coordenadas do vértice, é escrever a nossa equação na forma $y = a(x-h)^2 + k$. Então vamos a isso.
Procedimento normal. Ainda que nós tenhamos letras, se nós olharmos para o coeficiente do x quadrado, o coeficiente do x quadrado é 1, … É? É, ou não?
Aluno: Não.
E: O que é que lá está?
Alunos: *a*.
E: *a*. Então qual é a primeira coisa que temos que fazer?
Alunos: Pôr o *a* em evidência.
E: Pôr o *a* em evidência. Então vamos a isso, é como se fosse um 2, ou um -3…
Só que neste caso é *a*.
(escreve no quadro $y = ax^2 + bx + 4$)
E: Então colocaram *a* em evidência, como é que ficou?
Aluno: *a*, abre parênteses, x ao quadrado mais bx sobre *a*, mais 4.
E: a, …

(a professora escreve no quadro o que os alunos lhe ditam: $y = ax^2 + bx + 4 = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + 4$)
E: Exactamente. E agora?
Aluno: Metade do x…
E: Metade do coeficiente do x. Quanto é o coeficiente do x?
Alunos: b sobre … (confuso)
E: O coeficiente, Bruna? Não grite, oiça-me! O coeficiente, ando eu dizendo aqui à uma série de aulas, é o número, neste caso não é um número, são letras, mas podem representar números. Mas não é a incógnita x. Se eu tenho ax quadrado, coeficiente é a. bx, coeficiente é b. Se eu tivesse lá 2, seria 2. Se eu tivesse menos um x, seria -1. E assim sucessivamente. Boa? Então não me volte a responder que o coeficiente tem x.
Qual é o coeficiente de x?
Alunos: *b* sobre *a*.
E: Quanto é a metade?
Alunos: …
E: A metade como é que nós calculamos?
Alunos: Vezes um meio.
E: Vezes um meio. Portanto, quando nós tínhamos os tais três quartos que resolvemos aí numa oportunidade, metade era três oitavos. Ou seja, três quartos vezes um meio. Portanto, no nosso caso, metade de *b* sobre *a* vais ser *b* sobre 2*a*. E vou pôr ao quadrado e subtrair o quadrado dessa metade (escreveu:

$$y = ax^2 + bx + 4 = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + 4 = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + 4 \qquad)$$

E agora?
Aluno: O quadrado do binómio.
E: Agora já tenho o quadrado da soma. Então vai ficar: $= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + 4 =$
Está percebido até aqui?
Portanto para escrevermos na forma $y = a(x-h)^2 + k$, não necessariamente temos que estar sempre a trabalhar com números, também podemos trabalhar com letras. E o raciocínio é exactamente o mesmo, porque onde está uma letra pode estar qualquer número. Então e agora? Já está escrito na forma que eu quero?
Alunos: Não. (muita confusão, todos respondem ao mesmo tempo)
E: …para fora dos parênteses. Como é tão fácil. Mas a multiplicar pelo *a*, diz o João.
Então, ficará assim: (escreve no quadro: $= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$). Até aqui não há dúvidas, pois não? Agora, se for para tirar para fora dos parênteses, o *a* é positivo, o –*b* sobre 4*a* é negativo, então vais ficar: $= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + 4 - \frac{b^2 a}{4a^2}$. Posso fazer aqui alguma simplificação? Ou não.
(vários alunos respondem. Não se percebe)
E: Posso simplificar este *a* (aponta no numerador) com um *a* deste *a* quadrado (aponta no denominador). Aqui tenho um produto (no numerador), aqui também tenho um produto (no denominador), como entre o *a* e o *a* quadrado tenho uma divisão entre duas potências com a mesma base, qual é a regra?
Alunos: …
E: Dá-se…
Alunos: … a mesma base e subtraem-se os expoentes.
E: Os expoentes nunca se dividem. Ou se somam ou se subtraem, dependendo se é multiplicação ou divisão [de potências]. As bases é que, ou se multiplicam ou se dividem, dependendo da operação. Ai essas regras Sr. João.

Ora, (escreve no quadro enquanto verbaliza) $= a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + 4 - \dfrac{b^2}{4a}$.
Pois bem, e agora? E agora de que é que eu estou à procura?
Aluna: Do vértice.
E: Estou à procura do vértice? Não. O Vértice eu tenho aqui. Dizem-me que é -1 e 2, as coordenadas.
Aluna: Do *a* e do *b*.
E: Do *a* e do *b*, então qual é o próximo passo?
Aluna: Descobrir o *a* e o *b*.
E: Então vou pôr a questão de outra maneira: Eu já tenho a equação da minha parábola, escrita na forma $y = a(x-h)^2 + k$. Então, olhando para ali, quais seriam as coordenadas do vértice desta parábola?
Alunos: -*b* sobre *2a*…
E. Ora, olhando para ali, seria: *b* sobre 2*a*, a abcissa. (escreve no quadro: $V \to (\dfrac{b}{2a},\quad)$
(os alunos tentam continuar, mas têm dificuldade)
E: Quanto é o meu *k*?
Alunos: 4 menos, *b* quadrado sobre 4*a*.
(a professora completa as coordenadas do vértice, escrevendo no quadro $V \to (\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4-b^2}{4a})$ enquanto verbaliza)
E: Muito bem. Mas o que é que o enunciado me diz?
Alunos: As coordenadas do vértice.
E: Determinar o valor de *a* e *b*, sabendo que as coordenadas do vértice são -1 e 2. Então e onde é que eu vou usar agora o -1 e o 2?
Alunos: Vai igualar.
Outra aluna: É substituir lá em cima.
E: Ora pois bem. É, sim senhora, isso. Se eu sei que as coordenadas do vértice são -1 e 2, então se eu quero o *a* e o *b*, tenho que fazer exactamente o que diz a Inês. Tenho que pegar naquelas coordenadas, ou seja, na abcissa que é $\dfrac{b}{2a}$ e igualar a -1, na ordenada que é $\dfrac{4-b^2}{4a}$ e igualar a 2. Resolvemos este sistema e determinamos o valor de *a* e de *b*. Vamos lá.
(a professora apoia individualmente os alunos que requerem esse apoio)
E: Há aqui um erro. É 4, sim senhora, menos … mas o 4 não está sobre o traço de fracção. (altera a 2ª coordenada do vértice, e fica $V \to (\dfrac{b}{2a}, 4-\dfrac{b^2}{4a})$)
(um aluno chama a professora e aponta para a 1ª coordenada do vértice)

E: É "menos". A 1ª coordenada do vértice é negativa (acrescenta o sinal de menos na 1ª coordenada do vértice: $V \to (\dfrac{-b}{2a}, 4-\dfrac{b^2}{4a})$) E fica –*b*, porque a fórmula é $y = a(x-h)^2 + k$. É sim senhor, é o simétrico.
O que é que foi Bruna?
(a professora apoia os alunos que o requeiram)
E: Ajudem a Patrícia que ela não sabe como é que há-de começar. Ora nós acabámos de escrever no quadro que, olhando para a fórmula que temos ali, as coordenadas do vértice são $\dfrac{-b}{2a}$ e $4-\dfrac{b^2}{4a}$. O que é que o enunciado diz? Não ouvi nada. O que é que diz o enunciado?
Aluno: Determinar *a* e *b*, sabendo que o vértice é -1 e 2.
E: Exactamente. Então, o que é que nós temos de fazer?
Aluna: Igualar…

E: Se eu quero que o vértice seja o ponto de coordenadas $(-1;2)$, o que é que eu vou fazer com aquela expressão que eu tenho ali? Com o $\frac{-b}{2a}$.
Aluna: Igualar a $(-1;2)$.
E: Igualar a $(-1;2)$ não, $\frac{-b}{2a}$ igual a 1. O que eu quero é a igualdade entre dois pontos, não é? Posso apagar?
Alunos: Pode.
E: Ora portanto, eu sei que $(\frac{-b}{2a}, 4-\frac{b^2}{4a}) = (-1;2)$ (escreveu a igualdade no quadro e apagou todo o quadro). E a partir de aqui podemos determinar o valor de *a* e de *b*. Não é? E agora é a 1ª coordenada de um igual à 1ª coordenada do outro… isto é como se fosse a igualdade entre dois pontos… 4 menos *b* ao quadrado, sobre 4*a*, igual a 2.

(escreveu no quadro: $(\frac{-b}{2a}, 4-\frac{b^2}{4a}) = (-1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} = -1 \\ 4-\frac{b^2}{4a} = 2 \end{cases}$)

E: Duas equações, duas incógnitas, temos hipóteses de resolver.
(pausa para os alunos resolverem o sistema)
E: Já alguém fez alguma coisa? Não?
Já!? O que é que fez? Pois, mas agora ali em cima?
Estou a ver aí pessoal que não sabe fazer sistemas. Como é que fazemos?
(os alunos vão dando indicações à professora que vai resolvendo o sistema de duas equações a duas incógnitas pelo método de substituição. Solução: $\begin{cases} b = 4 \\ a = 2 \end{cases}$)
E: Deu isto? Portanto, sabendo que as coordenadas do vértice são $(-1;2)$, o valor do *a*, para que isso aconteça, tem que ser 2 e o valor do *b* tem de ser 4.

Fim da Transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Este exemplo explora a generalidade contida no uso de letras nos lugares dos coeficientes dos termos de 2º e 1º grau, respectivamente o *a* e o *b*. O exemplo está apresentado ao *contrário*. Em vez de pedir as coordenadas do vértice da quadrática definida por uma dada equação, é dado o vértice e uma *família* de equações da qual se pretende o *membro* com o vértice dado. A generalidade que o uso de parâmetros encerra é uma dificuldade acrescida, principalmente se a equação usada não é da forma $y = a(x-h)^2 + k$ e os parâmetros usados não se relacionam com o vértice da parábola. A forma $y = ax^2 + bx + c$ não é *Transparente* às coordenadas do vértice.
Pelo que foi dito, o exemplo em questão é um *Exemplo Planeado* que incluímos na 4ª Categoria, **Aplicações Internas**. É uma situação problemática, cognitivamente exigente, que obriga o aluno a relacionar a forma $y = a(x-h)^2 + k$ com a forma $y = ax^2 + bx + c$ em termos de toda a generalidade inerente ao uso de parâmetros.

Durante o tratamento deste exemplo, e presentes neste episódio, podemos apreciar diversos aspectos do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** da professora.
Claramente CPC:

- a professora, para conseguir que os alunos transformem a expressão $y = ax^2 + bx + 4$ em $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + 4 - \frac{b^2}{4a}$ necessita que eles obtenham o desenvolvimento do quadrado da soma. Por este caso ser mais exigente, os coeficientes não são números, estabelece com os alunos a mesma rotina verbal que utilizava quando trabalhavam com coeficientes numéricos (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*…é escrever a nossa equação na forma* $y = a(x-h)^2 + k$ *. Então vamos a isso. Procedimento normal.*"; "*Então qual é a primeira coisa que temos que fazer?* (**alunos:** *Pôr o* **a** *em evidência*)"; "*Metade do coeficiente do x. Quanto é o coeficiente do x?* (**alunos: b** *sobre* **a** (…) *vezes um meio*)"; "*E vou pôr ao quadrado e subtrair o quadrado dessa metade…*"
- logo nos primeiros segundos do episódio, a professora alerta para a complexidade da tarefa proposta aludindo às dificuldades que os alunos demonstram na interpretação dos enunciados dos problemas (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*É bom que vocês comecem a resolver alguns dos problemas por vossa conta e risco porque eu não tenho tempo de os resolver todos. Vocês, de um modo geral, na interpretação dos problemas têm sempre problemas.*"
- explica, pela igualdade entre as coordenadas de dois pontos, porque se recorre a um sistema de duas equações a duas incógnitas (Cat. **Explicações**): "*...eu sei que* $(\frac{-b}{2a}, 4 - \frac{b^2}{4a}) = (-1;2)$. *E a partir de aqui podemos determinar o valor de a e de b. Não é? E agora é a 1ª coordenada de um igual à 1ª coordenada do outro… isto é como se fosse a igualdade entre dois pontos… 4 menos b ao quadrado, sobre 4a, igual a 2.*"
- para que os alunos relembrassem a forma de obter metade do coeficiente do termo de 1º grau, recorre a um exemplo de uma situação de uma aula anterior (Cat. **Conhecimento de Exemplos**): "*Vezes um meio. Portanto, quando nós tínhamos os tais três quartos que resolvemos aí numa oportunidade, metade era três oitavos. Ou seja, três quartos vezes um meio.*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:

- ao longo do episódio, a professora consegue que os alunos identifiquem as várias etapas a percorrer até que o problema fique resolvido (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): **Aluna:** *Não, vamos pôr primeiro na forma,* $y = a(x-h)^2 + k$ (…) **Esmeralda:** *Determinar o valor de* **a** *e* **b**, *sabendo que as coordenadas do vértice são -1 e 2. Então e onde é que eu vou usar agora o -1 e o 2?* **Alunos:** *Vai igualar.* **Outra aluna:** *É substituir lá em cima.*(…) **Esmeralda:** *Duas equações, duas incógnitas, temos hipóteses de resolver.*
- a professora, pela facilidade e desenvoltura que apresenta no desenrolar do episódio, demonstra uma habilidade para resolver e explicar de forma clara essa resolução (Cat. **Conhecimento Procedimental**)

- entre alunos e professora foi obtido um método adequado à resolução do problema proposto (Cat. **Métodos de Solucionar**)

Nota: corrige um aluno no uso da linguagem, apelando a um rigor da expressão que ele utiliza: **Aluno:** *Metade do x…* **Esmeralda:** *Metade do coeficiente do x.*

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- interage com os alunos de forma a captar-lhes a atenção: "*O coeficiente, Bruna? Não grite, oiça-me!*"; e, além disso, mantém a atenção dos alunos através de um diálogo directo e individual (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**)
- a professora lê o enunciado do problema de forma pausada para que a interpretação do texto seja melhor compreendida pelos alunos e como forma de desencadear a actividade. Através de pistas, palavras chave e questões dirigidas consegue que os alunos percorram as várias etapas da resolução do problema sem dificuldades: **Esmeralda:** *Dá-se…* **alunos:** *...a mesma base e subtraem-se os expoentes*; (…) **Esmeralda:** *…Procedimento normal*; **Esmeralda:** *Quanto é o meu* **k**? (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**)

Uso do Exemplo

O exemplo trabalhado neste episódio é um problema que determina que muitos conhecimentos prévios dos alunos sejam postos em campo e que seja obtida uma importante generalização.

O uso deste exemplo tem como objectivo a tomada de consciência, por parte dos alunos, que a forma $y = ax^2 + bx + c$ não é *Transparente* às coordenadas do vértice e que, sempre que a resolução de um problema dependa do conhecimento das coordenadas do vértice, é necessário o uso da forma $y = a(x-h)^2 + k$ e não basta fazer a substituição das variáveis dependente e independente pelas coordenadas do vértice. Neste aspecto em particular, a necessidade de trabalhar com a forma $y = a(x-h)^2 + k$, foi bem compreendida pelos alunos, no início, foi uma aluna que indicou essa necessidade à professora:

> **Esmeralda:** *É vértice. É um ponto especial. Então eu posso substituir assim como ela quer fazer?*
>
> **Aluna:** *Não, vamos pôr primeiro na forma,* $y = a(x-h)^2 + k$.

E, mais à frente, são os alunos que indicam à professora o que fazer:

> **Esmeralda:** *Determinar o valor de a e b, sabendo que as coordenadas do vértice são -1 e 2. Então e onde é que eu vou usar agora o -1 e o 2?*
>
> **Alunos:** *Vai igualar.*
>
> **Outra aluna:** *É substituir lá em cima.*
>
> **Esmeralda:** *Ora pois bem. É, sim senhora, isso. Se eu sei que as coordenadas do vértice são -1 e 2, então se eu quero o* **a** *e o* **b**, *tenho que fazer exactamente o que diz a Inês. Tenho que pegar naquelas coordenadas, ou seja, na abcissa que*

é $\frac{b}{2a}$ *e igualar a -1, na ordenada que é* $\frac{4-b^2}{4a}$ *e igualar a 2. Resolvemos este sistema e determinamos o valor de* **a** *e de* **b**.

Todavia, a principal dificuldade evidenciada pelos alunos revelou-se no cálculo. A não transparência da equação $y = ax^2 + bx + c$ às coordenadas do vértice obriga a que se escreva primeiro na forma $y = a(x-h)^2 + k$ e, se os alunos já sabiam como fazê-lo quando as equações têm os coeficientes numéricos, com os coeficientes algébricos a tarefa revelou-se complicada. A identificação dos coeficientes por parte dos alunos quando eles não são numéricos revela-se difícil, o que obriga a professora a dar exemplos de coeficientes numéricos com o objectivo de generalizar para coeficientes algébricos. No fim, a utilização de exemplos de coeficientes numéricos concretiza o objectivo:

Esmeralda: *O coeficiente, ando eu dizendo aqui à uma série de aulas, é o número, neste caso não é um número, são letras, mas podem representar números. Mas não é a incógnita x. Se eu tenho ax quadrado, coeficiente é* **a**. *bx, coeficiente é* **b**. *Se eu tivesse lá 2, seria 2. Se eu tivesse menos um x, seria -1. E assim sucessivamente. Boa? Então não me volte a responder que o coeficiente tem x.*
Qual é o coeficiente de x?
Alunos: b *sobre* **a**.

Ainda sobre a generalidade inerente à utilização de coeficientes não numéricos, a professora chama a atenção dos alunos para esse facto várias vezes ao longo do episódio, explicando que funciona como se fosse um número e que no seu lugar poderia estar um número qualquer: "…*Procedimento normal. Ainda que nós tenhamos letras, …*"; "*Pôr o* **a** *em evidência. Então vamos a isso, é como se fosse um 2, ou um -3…*
Só que neste caso é **a**."; "*O coeficiente, ando eu dizendo aqui à uma série de aulas, é o número, neste caso não é um número, são letras, mas podem representar números.*"; "*E o raciocínio é exactamente o mesmo, porque onde está uma letra pode estar qualquer número.*".

Por fim, depois de trabalhado todo o aspecto intrínseco ao cálculo, a professora explora tudo o que está vinculado à *Transparência* da forma $y = a(x-h)^2 + k$, ainda que dependente de coeficientes não numéricos. Por necessidade, a forma $y = ax^2 + bx + 4$ é transformada em $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + 4 - \frac{b^2}{4a}$ onde os alunos, por transparência, podem deduzir as coordenadas do vértice $V \to (\frac{-b}{2a}, 4 - \frac{b^2}{4a})$.

O que pode parecer um simples passo para os alunos é, na verdade, um exigente processo de generalização, o que até este momento envolvia concretizações de h e k em números (por exemplo, a parábola definida por $y = 3(x+2)^2 + 5$ tem vértice $V \to (-2;5)$) agora envolve a concretização não numérica de h e k em valores algébricos dependentes de a e de b.

A partir deste momento o raciocínio dos alunos completa-se e o problema fica resolvido por meio dos cálculos finais:

Esmeralda: *Muito bem. Mas o que é que o enunciado me diz?*
Alunos: *As coordenadas do vértice.*
Esmeralda: *Determinar o valor de a e b, sabendo que as coordenadas do vértice são -1 e 2. Então e onde é que eu vou usar agora o -1 e o 2?*
Alunos: *Vai igualar.*
Outra aluna: *É substituir lá em cima.*
Esmeralda: *Ora pois bem. É, sim senhora, isso. Se eu sei que as coordenadas do vértice são -1 e 2, então se eu quero o* **a** *e o* **b***, tenho que fazer exactamente o que diz a Inês. Tenho que pegar naquelas coordenadas, ou seja, na abcissa que é* $\frac{b}{2a}$ *e igualar a -1, na ordenada que é* $\frac{4-b^2}{4a}$ *e igualar a 2. Resolvemos este sistema e determinamos o valor de* **a** *e de* **b**.

Os cálculos finais recorrem a um conhecimento prévio dos alunos que é a resolução de um sistema de duas equações a duas incógnitas:

Esmeralda: *... portanto, eu sei que* $(\frac{-b}{2a}, 4-\frac{b^2}{4a}) = (-1;2)$

Logo o sistema é $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} = -1 \\ 4-\frac{b^2}{4a} = 2 \end{cases}$

A *Generalização* que os alunos podem acrescentar à sua *Estrutura do Conceito* de função quadrática e a *Ampliação do Espaço de Exemplos* pela exploração deste exemplo é considerável. O trabalho obtido sobre o exemplo retratado neste episódio é particularmente completo na perspectiva da utilização da *Faceta Simbólica* sem, contudo, perder de vista a *Faceta Geométrica*, subtilmente envolvidas pela transparência que a forma $y = a(x-h)^2 + k$ pode proporcionar.

Esmeralda: **Episódio 38**
Dia: **23 Fevereiro 07**

Início: **LA 32 min 00 Seg.**
Fim: **LB 13 min 07 Seg.**

Manual: **Página 118**

Exemplos planeados tratados pelos alunos e pela professora

Esmeralda: Podem ir pensando no exercício 15. Ainda não fizemos nenhum deste estilo.

> 15. 1 Resolva a equação $x^2 - \left(6\sqrt{3}\right)x + 24 = 0$, apresentando o valor exacto das soluções.
>
> 15.2 Determine as soluções da equação $x^4 - \left(6\sqrt{3}\right)x^2 + 24 = 0$, dando a resposta com duas casas decimais. (Faça $y = x^2$)

(pausa para os alunos pensarem na actividade)
Aluna: Temos que resolver a equação com o valor exacto.
E: Sim, e isso significa…? Como é que resolvemos esta equação?
Aluna: Então, fica x ao quadrado menos…
E: x ao quadrado menos… Como é que se resolve…
Aluno: Eu acho que é com a fórmula resolvente.
E: Exactamente. Aplicando a fórmula resolvente das equações do 2º grau. Vamos lá.
Qual é o valor do *a*?
Alunos: Um.
E: Do *b*?
Alunos: Seis raiz de três. (outros dizem: menos seis raiz de três)
E: Afinal?
Alunos: Menos seis raiz de três.
E: Ah! Menos seis raiz de três. E do *c*?
Alunos: Vinte e quatro.
E: Pronto, é isso. Isto é muito importante, o sinal. Como é muito importante um número e… (imperceptível)… aqui para resolvermos uma equação e dar certo, o sinal também conta.
Aluna: Aqui o primeiro…
E: O primeiro quê?
Aluna: O primeiro *b*.
E: O primeiro *b*. Então temos mais do que um *b*?
Aluna: Não. O primeiro *b* da fórmula tem o menos…
E: Se está lá –*b*, e se o seu *b* é negativo, fica menos por menos, dá mais.
(pausa para os alunos resolverem a equação)
E: Ora, seis raiz de três… (escreve no quadro $x = \dfrac{6\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(-6\sqrt{3}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot 24}}{2\times 1}$)
Ora portanto, seis raiz de três, mais ou menos… E agora aqui surgem os problemas.
Como é que calculamos aquele quadrado?
Aluno: Menos seis ao quadrado e depois a raiz de três ao quadrado, e depois dá seis ao quadrado vezes três. Acho eu.
Aluna: É igual!
E: É igual ao quê?
Aluna: Como fazemos todas as outras!

E: Ah pois é! A questão é que eu vejo aí em todas as outras assim: seis vezes três. Como vi no teste! Aquilo é um produto. O quadrado do produto é igual ao produto dos quadrados! Seja, um factor ao quadrado vezes o outro factor ao quadrado. Entendido?
Diga D.ª Patrícia?
Patrícia: Assim fica positivo.
E: Claro. Se está ao quadrado…
E então, fica: trinta e seis vezes três, menos quatro vezes quatro dezasseis e quatro vezes dois oito, e um, nove. Sobre dois (escreveu $= \dfrac{6\sqrt{3} \pm \sqrt{36\times 3 - 94}}{2}$). E quanto é que deu o resultado ali dentro da raiz?
Alunos: Professora dá 96!
E: Quatro vezes quatro dezasseis. (corrige para $= \dfrac{6\sqrt{3} \pm \sqrt{36\times 3 - 96}}{2}$)
Quanto é que dá?
Alunos: Dá 12.
E: Seis raiz de três, mais ou menos raiz de doze, sobre dois.
Aluna: Raiz de doze dá para simplificar.
E: Raiz de doze… Então eu vou fazer aqui a divisão.
(escreve $x = \dfrac{6\sqrt{3} - \sqrt{12}}{2} \vee x = \dfrac{6\sqrt{3} + \sqrt{12}}{2}$)
E: Digam-me lá como é que dá para escrever a raiz de doze?
Alunos: Dois raiz de três.
E: Ou seja, factorizando o doze em dois ao quadrado vezes três, passa-se o factor dois para fora, fica o três lá dentro. Portanto, (escreve enquanto verbaliza $x = \dfrac{6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2} \vee x = \dfrac{6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2}$). Olhem que vocês aqui estão a testar os vossos conhecimentos de…?
Aluna: … racionalização.
E: … de radicais. Não necessariamente a racionalização porque eu não tenho ali radicais em denominador, mas as operações com radicais. E agora? Posso fazer mais alguma coisa?
Alunos: Somar.
Aluno: Somar os números cá fora.
E: Tenho ali duas raízes com o mesmo índice e com o mesmo radicando. Então quanto é que aquilo dá?
Alunos: Quatro raiz de três sobre dois…
E: Quatro raiz de três sobre dois… ou x igual…
Alunos: Oito raiz de três sobre dois.
(a professora escreve no quadro $x = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} \vee x = \dfrac{8\sqrt{3}}{2}$)
E: Acabou ou podemos fazer mais alguma coisa?

Aluno: Podemos simplificar. Ali fica 2 e ali fica 4.

E: Exactamente. Então fica (verbaliza enquanto escreve) $x = 2\sqrt{3} \vee x = 4\sqrt{3}$.
Então pediam as soluções exactas da equação. E as soluções exactas são: $x = 2\sqrt{3} \vee x = 4\sqrt{3}$.
Há dúvidas? Não há dúvidas? Então vamos passar para a alínea seguinte, que também nunca resolvemos.
(interrupção por motivo alheio à aula)
E: Vamos resolver o exercício 15.2 que também é um bocadinho elucidativo de um exercício destes moldes e, no 11º e no 12º ano, este tipo de equações aparecem muitas vezes. Então o método que aí nos é sugerido é o que nós temos que utilizar.
Já toda a gente passou o que está no quadro? Não! Pois não?
Miguel!? Diga?
Está a acabar? Então vamos.

Portanto, o 15.2 diz o seguinte: *Determine as soluções da equação* $x^4 - \left(6\sqrt{3}\right)x^2 + 24 = 0$. Ora, dos conhecimentos que vocês têm, não conhecem nenhuma fórmula para resolver uma equação deste tipo. Pois não? E porque é que não conhecemos? Ora porque, primeiro não temos nenhum factor comum que nos permita baixar o grau. Se tivéssemos aqui algum factor comum, ou se por exemplo o 24 não estivesse aqui na expressão, eu já podia pôr o x ao quadrado em evidência e assim vocês já sabiam resolver. Mas não. Está cá o 24. Então dão-nos uma sugestão: *dando a resposta com duas casas decimais. (Faça* $y = x^2$ *).* Ora, isto que aqui nos é dado como sugestão, nós chamamos *fazer uma mudança de variável*. Portanto, se me pedem… se me dão como sugestão para eu substituir o x quadrado por y, significa que o x à quarta há-de ser substituído por quê?
Alunos: Por y ao quadrado.
E: Por y ao quadrado, sim senhor. Portanto, eu vou ter que fazer uma substituição de variáveis. Então isto chama-se mudança de variável. Eu vou fazer uma mudança de variável. E nestes exercícios dá-me sempre muito jeito senão eu não os consigo resolver. A não ser ir à calculadora, não é verdade? Mas se me pedem analiticamente, eu tenho que fazer esta mudança de variável.
E fazendo a tal mudança de variável, como é que a minha expressão fica? Ora, a expressão que eu tenho é (escreve no quadro enquanto verbaliza) $x^4 - \left(6\sqrt{3}\right)x^2 + 24 = 0$. Então vamos escrever: (escreve no quadro) "Fazendo $y = x^2$, vem $y^2 - \left(6\sqrt{3}\right)y + 24 = 0$". Sim? Ou não? É?
Ora portanto, a equação que nós temos ali… conhecem alguma fórmula para a resolver?
Alunos: A fórmula resolvente.
E: A fórmula resolvente das equações de 2º grau. Então vamos resolver. Apliquem lá a fórmula resolvente, se faz favor.
(pausa para os alunos resolverem a equação de 2º grau)
E: O resultado vai dar o mesmo que na alínea anterior. Só que agora, em vez de ficar "$x =$", vocês vão indicar o quê?
Alunos: "$y =$".
E: "$y =$". ($\Leftrightarrow y = \dfrac{6\sqrt{3} \pm \sqrt{108-96}}{2}$, escreve no quadro parte da resolução anterior, terminando com $y = 4\sqrt{3} \vee y = 2\sqrt{3}$) Vocês façam os passos todos e vejam se chegam a esta conclusão, se faz favor, para reflectirmos sobre o que está ali.
Alguma dúvida Inês?
Inês: Não estou a perceber ali uma coisa.
E: Os passos estão todos feitos na alínea anterior.
(pausa)
E: Já está? Já toda a gente passou o que tem ali?
Então, olhando para o quadro, o exercício já está resolvido? Eu procuro o valor de y?
(os alunos hesitam na resposta)
E: Sim, ou não!?
Filipa?
Filipa: Não.
E: Ah! Pronto, fico mais descansada. Então o que é que eu procuro?
Aluno: O valor de x à quarta.
Aluna: O valor de x.
E: O valor de x. E quando eu fiz a mudança de variável, eu disse que o y era igual a quantos?
Alunos: A x ao quadrado.
E: Então para eu poder determinar o valor de x eu vou ter que, onde está y, substituir por quanto?
Aluno: x ao quadrado.
(a professora sorri como forma de concordância)
E: (escreve no quadro enquanto verbaliza) $x^2 = 4\sqrt{3} \vee x^2 = 2\sqrt{3}$. Sim, ou não?
Então e agora?
João: x igual à raiz quadrada de quatro raiz de três…

E: Como é que é, João? Como é que fica?
(uma aluna começa também a responder)
E: Espere, espere, já a oiço a si.
(para o João) Diga?
João: O quadrado passa para o outro membro…tira-se o quadrado do x. Fica raiz de quatro raiz de três, e x igual a raiz de dois raiz de três.
Aluna: Se elevássemos tudo ao quadrado, como o x já está ao quadrado, elevávamos o quatro ao quadrado e para tirar a raiz do três.
E: Ah, então elevando tudo ao quadrado como é que ficava?
(um aluno ia responder, e a professora impede-o de o fazer)
E: Shhh! Shhh! Como é que ficava?

Aluna: Quatro ao quadrado vezes três.
E: Ah! E o x?
Aluna: Ficava só x.
E: Ai era? Ah! Então quer dizer, se eu tiver dois ao quadrado, que dá quatro (escreve no quadro $2^2 = 4$) e se eu fizer dois ao quadrado ao quadrado dá dois? (escreveu $\left(2^2\right)^2 = 2$)
Aluna: Não.
E: Ah! Então?
Aluna: Não vai dar.
E: Então, é esse o melhor processo? Nem a menina sabe ainda resolver exercícios desse tipo. Então temos que fazer, sim senhora, o que disse o João. Se eu quero isolar a incógnita, eu para tirar o quadrado tenho que passar à raiz quadrada. Não esquecendo que a raiz quadrada é sempre… assim, sem mais nada? Só a raiz quadrada?
Aluna: Mais ou menos.
E: Ah, mais ou menos. (escreve enquanto verbaliza) $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4\sqrt{3}} \vee x = \pm\sqrt{2\sqrt{3}}$. Eles pedem-nos o resultado com duas casas decimais. Portanto isto significa que vocês podem colocar aqueles valores na calculadora e ver quanto é que dá com arredondamento.
Diga Sr. João?
João: É assim que se faz?
E: Ora, raiz quadrada de 2 raiz de três… é! Sim.
Então vamos lá a começar por este negativo. Quanto é que dá raiz de quatro raiz de três?
Menos quantos?
Alunos: 2,63
ofessora escreve no quadro $x = -2,63$)
E: … preservando as duas casas decimais. Fizeram os arredondamentos correctos?
Alunos: Sim.
E: Ou x igual a 2,63. Ou x igual… quanto é que dá a raiz de dois raiz quadrada de três?
Alunos: 1,86
E: -1,86 ou x igual a 1,86.
(escreveu no quadro $x = -2,63 \vee x = 2,63 \vee x = -1,86 \vee x = 1,86$)
E: Portanto, temos os valores de x. Perceberam, ou não?
Então recapitulando, quando temos uma expressão daquele tipo, em que temos um x à quarta e um x quadrado, quando a quisermos resolver temos sempre que fazer uma mudança de variável.

Fim da Transcrição

Classificação dos Exemplos e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Os dois exemplos presentes no episódio são dois *Exemplos Planeados de Processo*. No primeiro caso exemplifica-se como se aplica a fórmula resolvente para equações do 2º grau, agora com coeficientes irracionais. No segundo caso exemplifica-se como resolver uma equação biquadrada à custa de uma mudança de variável e recorrendo à fórmula resolvente para equações do 2º grau. A categoria onde se enquadram os exemplos é a 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**. A razão desta inclusão é simples, o que se exemplifica são dois processos de resolução de equações através do uso da fórmula resolvente. Para estes alunos, a sua utilização não é recente, o que é novo são os casos onde ela será aplicada e, sendo casos novos, configuram um aprofundamento na utilização do processo de resolução de equações de 2º grau ou biquadradas.

O trabalho desenvolvido com os dois exemplos deixa observar aspectos do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo**.

Claramente CPC:

- a professora, no exemplo 5.2, confronta os alunos com a sua incapacidade de resolver uma equação do 4º grau: "*Ora, dos conhecimentos que vocês têm, não conhecem nenhuma fórmula para resolver uma equação deste tipo. Pois não?*". A partir desta impossibilidade criou nos alunos a necessidade do uso do processo de mudança de variável para a resolução de uma equação biquadrada (Cat. **Estratégias de Ensino**).
- emprega formas de pensar sobre equações e, destas, as que sendo de grau superior ao segundo o aluno sabe resolver (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*Ora porque, primeiro não temos nenhum factor comum que nos permita baixar o grau. Se tivéssemos aqui algum factor comum, ou se por exemplo o 24 não estivesse aqui na expressão, eu já podia pôr o x ao quadrado em evidência e assim vocês já sabiam resolver.*"
- no exemplo 5.2, após a mudança de variável, ao aplicar a fórmula resolvente, prevê um erro que é comum os alunos cometerem. Os alunos estão habituados à variável x na aplicação da fórmula resolvente e não se apercebem que devem iniciar a aplicação desta fórmula com a variável y (Cat. **Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas**): "*O resultado vai dar o mesmo que na alínea anterior. Só que agora, em vez de ficar " x = ", vocês vão indicar o quê?*"
- no exemplo 5.1, quando se aplica a fórmula resolvente a uma equação de 2º grau com coeficientes irracionais, a professora sabe que o cálculo com este tipo de números pode criar dificuldade aos alunos (Cat: **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*...seis raiz de três, mais ou menos... E agora aqui surgem os problemas. Como é que calculamos aquele quadrado?*"
- todo o episódio é uma explicação, neste caso, de dois procedimentos (Cat. **Explicações**).
- usa um *contra-exemplo* para mostrar a não validade do seu raciocínio (Cat. **Conhecimento de Exemplos**): "*Ah! Então quer dizer, se eu tiver dois ao quadrado, que dá quatro* (escreve no quadro $2^2 = 4$) *e se eu fizer dois ao quadrado ao quadrado dá dois?* (escreveu $\left(2^2\right)^2 = 2$)."

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:

- em termos gerais, a professora identifica as etapas de resolução de uma equação biquadrada, fundamentais para a compreensão de todo o processo. Particularmente, destaca aspectos que devem ser considerados pelos alunos para executarem determinado cálculo: "*Tenho ali duas raízes com o mesmo índice e com o mesmo radicando. Então quanto é que aquilo dá?*". Por outro lado, no exemplo 5.2, indica aos alunos qual o objectivo do processo: "*Então o que é que eu procuro?*" (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**).

- faz conexões entre a equação biquadrada e conteúdos que serão trabalhados proximamente (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**): "*Vamos resolver o exercício 15.2 que também é um bocadinho elucidativo de um exercício destes moldes e, no 11º e no 12º ano, este tipo de equações aparecem muitas vezes.*"

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- a professora indica o objectivo da aprendizagem que se vai seguir (Cat. **Objectivos da Aprendizagem**): "*Vamos resolver o exercício 15.2 que também é um bocadinho elucidativo de um exercício destes moldes e, no 11º e no 12º ano, este tipo de equações aparecem muitas vezes.*"
- capta a atenção dos alunos chamando-os pelo nome, mantendo a sua atenção por meio de diálogos com os alunos, algumas vezes em geral, outras individualmente (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**): "*Já toda a gente passou o que tem ali? Sim, ou não!? Filipa!?*"
- utiliza formas de condução da aula que permite aos alunos, por eles, irem respondendo aos aspectos fundamentais das etapas em que se encontram:

  Esmeralda: *Exactamente. Aplicando a fórmula resolvente das equações do 2º grau. Vamos lá.*
  Qual é o valor do a?
  Alunos: *Um.*
  E: *Do **b**?*
  Alunos: *Seis raiz de três.* (outros dizem: *menos seis raiz de três*)
  E: *Afinal?*
  Alunos: *Menos seis raiz de três.*
  E: *Ah! Menos seis raiz de três. E do **c**?*
  Alunos: *Vinte e quatro.*
  E: *Pronto, é isso. Isto é muito importante, o sinal.*

  Tem a preocupação de responder à pergunta que o exemplo 5.1 contém oralmente e escrevendo no quadro, com isso indica aos alunos a conclusão do processo e dá-lhes a indicação precisa do que responder: "*Então pediam as soluções exactas da equação. E as soluções exactas são:* $x = 2\sqrt{3} \vee x = 4\sqrt{3}$."

  No final, tem o cuidado de fechar o exemplo sintetizando a informação relevante: "*Portanto, temos os valores de x. Perceberam, ou não? Então recapitulando, quando temos uma expressão daquele tipo, em que temos um x à quarta e um x quadrado, quando a quisermos resolver temos sempre que fazer uma mudança de variável.*"

  (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**)

Nota: este episódio inclui diversos casos de ***preocupação com o rigor de linguagem***.

Primeiro caso: Aluna: *Aqui o primeiro…*
E: *O primeiro quê?*
Aluna: *O primeiro b.*
E: *O primeiro b. Então temos mais do que um b?*
Aluna: *Não. O primeiro b da fórmula tem o menos…*

Segundo caso: Esmeralda: *Portanto,* (escreve enquanto verbaliza $x=\frac{6\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{2}\vee x=\frac{6\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2}$). *Olhem que vocês aqui estão a testar os vossos conhecimentos de…?*
Aluna: *... racionalização.*
E: *... de radicais. Não necessariamente a racionalização porque eu não tenho ali radicais em denominador, mas as operações com radicais.*

Terceiro caso: Alunos: *Oito raiz de três sobre dois.*
(a professora escreve no quadro $x=\frac{4\sqrt{3}}{2}\vee x=\frac{8\sqrt{3}}{2}$)
E: *Acabou ou podemos fazer mais alguma coisa?*
Aluno: *Podemos simplificar. Ali fica 2 e ali fica 4.*
E: *Exactamente. Então fica* (verbaliza enquanto escreve) $x=2\sqrt{3}\vee x=4\sqrt{3}$. *Então pediam as soluções exactas da equação. E as soluções exactas são:* $x=2\sqrt{3}\vee x=4\sqrt{3}$.

O primeiro caso evidencia o cuidado em que, na fórmula resolvente, o coeficiente *b* representa sempre o mesmo valor embora figure mais que uma vez. No segundo caso é o rigor na utilização dos termos que está em causa. No terceiro caso, a preocupação vai no sentido de os alunos não apresentarem como resultado final uma fracção por racionalizar.

Uso do Exemplo

No caso do exemplo 5.1 a professora explora, na *Faceta Simbólica*, uma nova *Dimensão de Variação Possível* nos exemplos relativos às equações de 2º grau do tipo $ax^2+bx+c=0$. Assim, no ano anterior, os alunos ainda não tinham trabalhado o uso de coeficientes irracionais, coeficientes que foram introduzidos neste exemplo. Note-se que os alunos vão determinar as raízes exactas, por isso o uso de coeficientes irracionais é uma variação relativa aos conhecimentos prévios dos alunos, porque se o uso do exemplo fosse com o auxílio da Máquina de Calcular Gráfica seria indiferente a natureza dos coeficientes da equação de 2ª grau.

É interessante o facto de os alunos não considerarem problemática a identificação correcta dos coeficientes irracionais da equação de 2º grau. O mesmo não pode ser afirmado sobre o cálculo que envolve este tipo de coeficientes. Por isso a conveniência deste exemplo, o envolvimento dos alunos em tipos de cálculo diferentes daqueles a que estão habituados. Por isso a professora diz: "*E agora aqui surgem os problemas. Como é que calculamos aquele quadrado?*"

A *Ampliação do Espaço de Exemplos* que este tipo de exemplos determina é óbvia. Se ao nível do 9º Ano (14-15 anos) as *Dimensões de Variação Possíveis* incluíam apenas números naturais, inteiros ou racionais, depois deste exemplo o *Espaço de Exemplos* é ampliado aos coeficientes irracionais.

O Caso do exemplo 5.2 é destacado pela professora como sendo um exemplo de um certo *tipo* e que, por ser *elucidativo*, deverá ser considerado um exemplo a memorizar

para mais tarde ser utilizado. A professora refere-se a este exemplo nos seguintes termos: "*Vamos resolver o exercício 15.2 que também é um bocadinho elucidativo de um exercício destes moldes e, no 11º e no 12º ano, este tipo de equações aparecem muitas vezes.*" Também é interessante ver que a professora se refere a exemplos destes *moldes*, isto é, o exemplo apresentado servirá, portanto, de *Exemplo Resolvido*. Se repararmos nas palavras da professora, *Então o método que aí nos é sugerido é o que nós temos que utilizar*, designa por *método* o que nós estamos denominando como *Exemplo de Processo*. Pelo que se disse, o uso deste exemplo é, no fundo, mostrar e explicar o processo de resolução deste tipo de equação, a equação biquadrada. Este exemplo, nas palavras da professora, é diferente de outros de quarto grau já tratados, que são aqueles que podem ser tratados pelos alunos visto configurarem casos notáveis da multiplicação de polinómios. Contudo, a existência do termo independente (24) exclui o exemplo desses casos: "*...não temos nenhum factor comum que nos permita baixar o grau. Se tivéssemos aqui algum factor comum, ou se por exemplo o 24 não estivesse aqui na expressão, eu já podia pôr o x ao quadrado em evidência e assim vocês já sabiam resolver. Mas não. Está cá o 24.*"
Ainda sobre o uso do exemplo, podemos apontar uma nova *Dimensão de Variação Possível* quando os graus das parcelas da equação passam de dois, um e zero para quatro, dois e zero; poderiam ser seis, três e zero; oito, quatro e zero, mas a professora optou por não referir nem tratar essa dimensão. Esta nova dimensão só faz sentido se, tal como no exemplo 5.1, não for considerado o uso da máquina de calcular gráfica. Usando as capacidades gráficas da calculadora, não existe distinção entre equações de graus diversos, todas se resolvem de igual modo. Este detalhe, que se deve recorrer a processos diferentes consoante a equação, é bem evidente na explicação da professora: "*A não ser ir à calculadora, não é verdade? Mas se me pedem analiticamente, eu tenho que fazer esta mudança de variável.*"

No uso do exemplo 5.2 surge um micro-episódio ao qual deve ser dado destaque. Para melhor se perceber vamos isolá-lo do texto.
A mudança de variável foi efectuada e resolvida a equação de 2ª grau que resultou. Conhecidas as soluções da equação de segundo grau, os alunos compreenderam o regresso à variável inicial e restam duas equações de 2º grau por resolver, $x^2 = 4\sqrt{3} \vee x^2 = 2\sqrt{3}$. Vejamos o diálogo:

> **Aluna:** *Se elevássemos tudo ao quadrado, como o x já está ao quadrado, elevávamos o quatro ao quadrado e para tirar a raiz do três.*
> **Esmeralda:** *Ah, então elevando tudo ao quadrado como é que ficava?*
> (um aluno ia responder, e a professora impede-o de o fazer)
> **Esmeralda:** *Shhh! Shhh! Como é que ficava?*
> **Aluna:** *Quatro ao quadrado vezes três.*
> **Esmeralda:** *Ah! E o x?*
> **Aluna:** *Ficava só x.*
> **Esmeralda:** *Ai era? Ah! Então quer dizer, se eu tiver dois ao quadrado, que dá quatro* (escreve no quadro $2^2 = 4$) *e se eu fizer dois ao quadrado ao quadrado dá dois?* (escreveu $\left(2^2\right)^2 = 2$)
> **Aluna:** *Não.*
> **Esmeralda:** *Ah! Então?*

Aluna: *Não vai dar!*

No início pode-se perceber o erro da aluna. A aluna eleva ao quadrado o segundo membro da equação $x^2 = 4\sqrt{3}$ e obtinha ***Quatro ao quadrado vezes três***. Contudo, em vez de elevar, também, o primeiro membro da equação ao quadrado e obter x^4, baixa o grau de dois para um, pela raiz quadrada, e obtém apenas *x*, ***Ficava só x***.
É neste momento que, espontaneamente, a professora apresenta um exemplo à aluna. Introduz a igualdade $2^2 = 4$ e aplica o mesmo processo, um membro é elevado ao quadrado e o outro é-lhe aplicada a raiz quadrada. A igualdade que se obtém, por um processo idêntico ao utilizado pela aluna, $\left(2^2\right)^2 = 2$ é falsa.

Como é óbvio, a professora utilizou um *contra-exemplo* para mostrar à aluna a incorrecção do seu raciocínio. Depois, à pergunta … ***se eu fizer dois ao quadrado ao quadrado dá dois?*** A aluna responde negativamente e apercebe-se que o processo não é válido.
Com o uso do contra-exemplo a professora provoca o *conflito cognitivo* na aluna que reconhece não existir uma igualdade verdadeira. Este contra-exemplo deve ser considerado um *Exemplo Fulcral* (Zazkis, Chernoff) e, porque a aluna se apercebe que a falsidade proveio de um processo incorrecto, "***Não vai dar***", também funcionou como *Exemplo Ponte* (Zazkis, Chernoff) porque a aluna reconhece uma razão para abandonar aquele processo e tomar a operação inversa, a raiz quadrada, como o adequado.

Esmeralda: **Episódio 39**
Dia: **23 Fevereiro 07**

Início: **LB 14 min 08 Seg.**
Fim: **LB 30 min 53 Seg.**

Manual: **Página 118**

Exemplo planeado tratado pela Professora

Esmeralda: Ora, 16.

16. 1 Determine as constantes *a*, *b* e *c* de modo que, para todos os valores de *x*, se tenha: $$3x^2 - 5x + 1 = a(x+b)^2 + c$$ 16.2 Determine o contradomínio da função *f* definida por $$f(x) = 3x^2 - 5x + 1$$

E: D.ª Patrícia, exercício 16.
(pausa para os alunos pensarem na actividade)
E: Toda a gente percebeu o exercício? Ou há problemas.
Não obtive resposta. Das duas, uma: ou ninguém percebeu ou toda a gente percebeu.
Aluna: Eu não percebi bem.
E: Ou ninguém percebeu o que eu disse!
Ah! "*Determine as constantes a, b e c de modo que, para todos os valores de x, se tenha:* $3x^2 - 5x + 1 = a(x+b)^2 + c$ ". Quando é que dois polinómios são exactamente iguais?
(não obtém resposta)
E: Quando? Estou a falar chinês. É por isso que vocês não sabem resolver problemas.
Quando é que eu sei qual é o Simão?
(risos)
Simão (brincando): Nunca sabe.
E: Boa! Nunca!
Então, quando é que dois polinómios são iguais?
Alunos (brincando): Nunca!
E: Ai nunca!! Muito bem! (escreveu no quadro: $3x^2 - 5x + 1 = a(x+b)^2 + c$)
Então, digam-me lá uma coisa. (escreve no quadro: $x^2 - 3x = 2x^2 - 3x$) Estes dois polinómios são iguais?
Alunos: Não.
(a professora escreve no quadro: $-x^2 - 7x + 2 = -x^2 - 7x + 2$)
E: Então e estes dois?
Alunos: Esses são.
E: Então porquê? Porque é que os de cima [os primeiros] não são iguais e os de baixo [os segundos] são?
Inês: Porque a igualdade (imperceptível) …
E: Porque… o quê?
Inês: (imperceptível)
E: Não percebi nada, Inês. Tem que falar mais alto. Diga lá!
Inês: Têm uma igualdade entre eles quando estiverem resolvidos.
E: Têm uma igualdade entre eles quando estiverem resolvidos.
Inês: Pois…!?
Simão: Porque o primeiro termo é igual ao segundo.
E: Como?
Simão: O primeiro termo é igual ao segundo.

E: O primeiro *termo* é igual ao segundo.
Simão: Dá o mesmo resultado.
E: Seria o primeiro *membro*.
Simão: Pois.
E: Pois. Eu, se calhar, diria aquilo de outra maneira. Eu diria assim: estes dois polinómios são diferentes, porque o coeficiente do x quadrado do polinómio do primeiro membro é um, o coeficiente do x quadrado do polinómio do segundo membro é dois. Ainda que os coeficientes de x sejam iguais. E no segundo caso, tanto o coeficiente do x ao quadrado, como o coeficiente do x, como o termo independente, são todos iguais. Coeficiente do x quadrado [é] -1 no polinómio do primeiro membro, no polinómio do segundo membro também é -1. Coeficiente do x [é] -7, no do segundo membro também é -7. Termo independente 2, termo independente 2.
Então, portanto vamos ao nosso caso. Quando é que aqueles dois polinómios vão ser iguais?
(algum aluno tenta responder)
E: Quando… o quê?
O que é que você está para aí a falar baixinho que eu não percebi?
Aluna: Quando tiverem os mesmos coeficientes no x quadrado e quando tiverem no x...
E: Quando tiverem o mesmo coeficiente do x quadrado, quando tiverem o mesmo coeficiente de x e quando tiverem o termo independente também igual. Ou seja, quando os coeficientes dos termos homólogos, os termos do mesmo grau, forem iguais. Ou não?
Alunos: Sim.
E: Mas para eu poder ter esse pensamento, eu tenho de ter, como dizia aqui a Inês, os polinómios escritos na mesma forma. E eu no polinómio do segundo membro, tenho lá o quê?
Aluna: A fórmula do vértice.
E. O quadrado de uma soma. Primeiro tenho que fazer aquele desenvolvimento. Certo?
Então vamos fazê-lo.
Como é que se faz? Mário, como é que se desenvolve $(x+b)^2$?
(a professora, com a ajuda do Mário escreve no quadro:

$$3x^2-5x+1=a(x+b)^2+c \Leftrightarrow$$
$$3x^2-5x+1=a\left(x^2+2bx+b^2\right)+c \Leftrightarrow$$
$$3x^2-5x+1=ax^2+2abx+ab^2+c \Leftrightarrow$$

E: Ai esses problemas, esses problemas.
Então e agora, o que é que fazemos a seguir? Hum?
Eu preciso de determinar o valor de *a*, de *b* e de *c*, de modo que aquela igualdade seja verdadeira. O que é que temos de fazer? Diga!
Patrícia: Igualamos.
E: Igualamos o quê, Patrícia?
Aluno: Substituímos o *a* pelo 3.
E: Igualamos o *a* a 3, (escreve no quadro $\begin{cases} a=3 \\ \end{cases}$), …
Aluno: Igualamos o *b* ao -5…
E: O *b* ao -5? Então, o coeficiente do x quadrado (faz uma bola à volta do 3) no polinómio do primeiro membro é três, no polinómio do segundo é *a*.
(interrompe para chamar a atenção à Filipa)
E: O coeficiente do x (sublinha o -5) no primeiro membro… no polinómio do primeiro membro é -5, o coeficiente de x no polinómio do segundo membro (sublinha 2ab) é…
Alunos: 2ab.
E: Então eu vou ter de igualar o -5 a quantos?
Alunos: 2ab.
(a professora acrescenta no quadro: $\begin{cases} a=3 \\ -5=2ab \end{cases}$)
E: E agora, já acabou? Ou há mais alguma coisa para igualar?
Aluno: O 1 ao *c*.
E: O 1 ao *c*!? Aclarem-se lá, ao *a*, ao *b*, ao *c*, ao…

Alunos: Ao a, b quadrado, mais c.

E: Ah! a, b ao quadrado, mais c. (completa no quadro $\begin{cases} a = 3 \\ -5 = 2ab \\ 1 = ab^2 + c \end{cases}$)

E: Então, o valor de a eu já o tenho. É quanto?
Alunos: Três.
E: Três. Então, posso vir, por exemplo, aqui à segunda expressão e substituir. Então fica, -5 igual a 2 vezes 3 vezes b. Posso ir à de baixo e, também, substituir. 3, b ao quadrado, mais c.

(escreve no quadro: $\begin{cases} ----- \\ -5 = 2 \times 3 \times b \\ 1 = 3b^2 + c \end{cases}$)

E: Então, -5 sobre 6 igual a b. b é igual a menos cinco sextos. Vou vir aqui a baixo, 1 igual a três vezes, menos cinco sextos, ao quadrado, mais c.

(escreveu no quadro: $\begin{cases} ----- \\ \frac{-5}{6} = b \\ 1 = 3\left(\frac{-5}{6}\right)^2 + c \end{cases}$)

(continua a resolver o sistema no quadro e obtém $\begin{cases} ----- \\ ----- \\ 1 = \frac{25}{12} + c \end{cases}$)

Aluna: Professora.
E: Diga.
Aluna: Não percebi de onde vem aquele 25 sobre 12.
E: Desculpe?
Aluna: De onde vem aquele 25 sobre 12?
E: Porque é que eu coloquei 25 sobre 12… aqui?
Aluna: Sim.
E: Pensando, 3 vezes 25, sobre 36…3 divide por 3 dá 1, 36 divide por 3 dá 12.
Ou então faz, 3 vezes 25 sobre 36, vá à calculadora, se não sabe fazer doutra maneira, e simplificado dá-lhe aquela expressão. Hum?
Ou então, manda com o 75 para trás, sobre o 36, e depois passa o 75 sobre 36 para o primeiro membro, reduz tudo ao mesmo denominador, faz as devidas simplificações e vai chegar ao mesmo resultado que eu. Hum?
Ora portanto, o c é menos treze e sobre doze, o b [é] menos cinco sextos e o a três.

(escreve a solução final no quadro: $\begin{cases} a = 3 \\ b = -\frac{5}{6} \\ -\frac{13}{12} = c \end{cases}$)

E: Para que a igualdade seja verdadeira, o valor de *a* tem que ser três, o *b* menos cinco sextos e o *c* menos treze sobre doze avos. Sim?
Olhem, o 16.2 vai para trabalho de casa. Porque para determinar o contradomínio o que é que nós devemos de fazer? Para o fazer analiticamente?
(um aluno dá a indicação que é necessário utilizar a fórmula do vértice)
E: $y = a(x-h)^2 + k$. No fundo, pretendemos determinar directamente as coordenadas do vértice directamente da fórmula. Pronto.

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O primeiro exemplo é, claramente, um *Exemplo Planeado de Processo*. O exemplo é um caso onde pode ser utilizado o método dos coeficientes indeterminados, e a professora usou esse processo. O exemplo é, todo ele, tratado pela professora porque introduz o método e por ser a primeira vez que os alunos com ele contactam. O entendimento deste processo não é muito exigente no que se refere à vertente cognitiva. Perceber que dois polinómios são iguais quando são iguais os coeficientes dos termos homólogos, não foi difícil para os alunos. Aliás, a noção de igualdade de polinómios foi entendida com base em dois casos, a professora não precisou de a transmitir com base na definição. Por isso classificamos este exemplo como sendo da 1ª Categoria, **Definição/Apresentação**.
As dificuldades sentidas pelos alunos durante o desenrolar da explicação do método dos coeficientes indeterminados, não se prendem com os aspectos do processo, tal como afirmámos; prende-se, isso sim, com a dificuldade que os alunos apresentam no que cabe ao cálculo.

Relativamente ao **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** que a professora evidencia, podem ser apontados diversos traços.
Claramente CPC:

- a professora utiliza uma situação estritamente matemática, a igualdade entre duas quadráticas de diferente aspecto, para conduzir os alunos ao método dos coeficientes indeterminados (Cat. **Estratégias de Ensino**)
- emprega, na interacção com os estudantes, termos de linguagem e raciocínios que permitem a compreensão do processo de cálculo dos coeficientes indeterminados (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*Quando tiverem o mesmo coeficiente do x quadrado, quando tiverem o mesmo coeficiente de x e quando tiverem o termo independente também igual. Ou seja, quando os coeficientes dos termos homólogos, os termos do mesmo grau, forem iguais. Ou não? (...) Mas para eu poder ter esse pensamento, eu tenho de ter, como dizia aqui a Inês, os polinómios escritos na mesma forma. E eu, no polinómio do segundo membro, tenho lá o quê?*"
- depois de os alunos terem apreendido intuitivamente quando é que dois polinómios são iguais ou diferentes, a professora formaliza a situação dando a definição aos alunos. Seguidamente, explica como se procede para aplicar a definição, comparando coeficientes entre os termos homólogos (Cat.

Explicações): "*Coeficiente do x quadrado* [é] *-1 no polinómio do primeiro membro, no polinómio do segundo membro também é -1. Coeficiente do x* [é] *-7, no do segundo membro também é -7. Termo independente 2, termo independente 2.*"

- Para introduzir, de forma intuitiva, a noção de igualdade de polinómios a professora introduz dois exemplos, um onde a igualdade é verdadeira e outro onde não é. Os exemplos são muito simples, por isso não se destacam os exemplos, antes o seu uso (Cat. **Conhecimento de Exemplos**)

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- para que os alunos compreendam o processo de cálculo dos coeficientes indeterminados, a professora necessita *fraccionar* a definição em termos mais adequados aos alunos. Utiliza "*Quando tiverem o mesmo coeficiente do x quadrado, quando tiverem o mesmo coeficiente de x e quando tiverem o termo independente também igual.*" para exprimir " *... quando os coeficientes dos termos homólogos, os termos do mesmo grau, forem iguais.*" E com isto melhor transmitir o significado de cada etapa do processo. Também chama a atenção dos alunos para um aspecto importante: "*Quando é que dois polinómios são exactamente iguais?*" (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**)

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo

- a professora usa estratégias de comunicação para atrair a atenção dos alunos quando diz "*Não obtive resposta. Das duas, uma: ou ninguém percebeu ou toda a gente percebeu.*" depois de perguntar se tinham entendido o enunciado de 16.1; quando afirma "*Estou a falar chinês. É por isso que vocês não sabem resolver problemas.*"; ou faz perguntas fora do contexto "*Quando é que eu sei qual é o Simão?*" (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**)
- no início do episódio, para melhor compreensão do enunciado por parte dos alunos, a professora lê o enunciado do exemplo 1.6 e, no final, para concluir indica claramente o resultado pretendido (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**): "*Para que a igualdade seja verdadeira, o valor de* **a** *tem que ser três, o* **b** *menos cinco sextos e o* **c** *menos treze sobre doze avos. Sim?*".

Nota: neste episódio, mais uma vez, ao nível do conhecimento do conteúdo, podem-se observar intervenções da professora que demonstram a preocupação com o rigor de linguagem:

> "*Quando tiverem o mesmo coeficiente do x quadrado, quando tiverem o mesmo coeficiente de x e quando tiverem o termo independente também igual. Ou seja, quando os coeficientes dos termos homólogos, os termos do mesmo grau, forem iguais.*"
> "*O primeiro **termo** é igual ao segundo. (...) Seria o primeiro **membro**.*"

Uso do Exemplo

Este exemplo destina-se a introduzir o método dos coeficientes indeterminados, embora esta designação.

Embora os alunos estejam dentro das operações com polinómios, as condições de igualdade entre dois polinómios não é um conteúdo que já tenha sido abordado em termos formais. Contudo, a igualdade entre dois polinómios é bastante intuitiva e, no desenrolar do episódio, pode-se constatar que não é difícil para os alunos entenderem essa igualdade. Mas, para que os alunos se possam compreender o que vai ser trabalhado ao longo da actividade, a professora apresenta dois *Exemplos Espontâneos* com o objectivo de *mostrar* aos alunos os aspectos a serem considerados fundamentais. Repare-se que a informação não é simplesmente transmitida aos alunos, os exemplos são suficientemente ilustrativos dos aspectos importantes da igualdade de polinómios sem que as condições de igualdade tenham sido formalizadas. É por isso que a forma como uma aluna indica que dois polinómios são iguais é formalmente incorrecta, todavia percebe-se que ela, bem como os outros alunos, *entendeu* a mensagem veiculada pelos exemplos:

Esmeralda: *Então, digam-me lá uma coisa,* (escreve no quadro: $x^2 - 3x = 2x^2 - 3x$) *estes dois polinómios são iguais?*
Alunos: *Não.*
(a professora escreve no quadro: $-x^2 - 7x + 2 = -x^2 - 7x + 2$)
Esmeralda: *Então e estes dois?*
Alunos: *Esses são.*
Esmeralda: *Então porquê? Porque é que os de cima* [os primeiros] *não são iguais e os de baixo* [os segundos] *são?*
(…)
Inês: *Têm uma igualdade entre eles quando estiverem resolvidos.*

Esmeralda: *Têm uma igualdade entre eles quando estiverem resolvidos.*
Inês: *Pois…!?*
Simão: *Porque o primeiro termo é igual ao segundo.*
Esmeralda: *Como?*
Simão: *O primeiro termo é igual ao segundo.*
Esmeralda: *O primeiro* **termo** *é igual ao segundo.*
Simão: *Dá o mesmo resultado.*
Esmeralda: *Seria o primeiro* **membro**.
Simão: *Pois.*

Quando a aluna afirma que são iguais se *têm uma igualdade quando estão resolvidos*, este termo *resolvido* quer dizer, na linguagem dos alunos, que não há monómios semelhantes para serem somados e, assim, o polinómio apresenta-se simplificado. O aluno, por outro lado, determina a igualdade entre polinómios pela verificação da *igualdade parcela a parcela* entre os dois membros da equação.

No final da introdução prática da igualdade de polinómios, a professora formaliza a desigualdade do primeiro exemplo dado: … *estes dois polinómios são diferentes, porque o coeficiente do x quadrado do polinómio do primeiro membro é um, o coeficiente do x quadrado do polinómio do segundo membro é dois. Ainda que os coeficientes de x sejam iguais.*" E formaliza a igualdade do segundo exemplo dado: … *tanto o coeficiente do x ao quadrado, como o coeficiente do x, como o termo independente, são todos iguais.*"

Por isso, relativamente à exemplificação espontânea utilizada, os dois exemplos cumpriram totalmente o propósito para o qual foram apresentados. Depois de

desenvolvido e simplificado o segundo membro da igualdade $3x^2-5x+1=a\left(x+b\right)^2+c$ e se obteve $3x^2-5x+1=ax^2+2abx+ab^2+c$ à pergunta: "*Eu preciso de determinar o valor de **a**, de **b** e de **c**, de modo que aquela igualdade seja verdadeira. O que é que temos de fazer?*" a resposta é natural e simples: "*Igualamos*".
No restante diálogo vem correctamente descrito o sentido do termo *Igualamos*.
A exemplificação, com estes dois casos, tipifica a instância em que primeiro se exemplifica e somente depois se define, configurando uma generalização; do particular para o geral, *Exemplificação Indutiva* (Rowland, Huckstep).

Sobre o exemplo 16.1 que a professora propõe aos alunos, pode-se afirmar que ele tem como função introduzir a necessidade de estabelecer a igualdade entre polinómios e, com isso, justificar a utilização do método dos coeficientes indeterminados. Este exemplo não é muito diferente de exemplos anteriormente propostos em que são estudados alguns aspectos da parábola associada a uma função quadrática, mas quando a quadrática é apresentada na forma *opaca* ao vértice $f(x)=ax^2+bx+c$ e não na forma *Transparente* $f(x)=a(x-h)^2+k$. Porém, em vez de transformar o primeiro membro da igualdade $3x^2-5x+1=a\left(x+b\right)^2+c$ na forma $a(x-h)^2+k$ e determinar os parâmetros *a*, *b* e *c* directamente, a professora optou por desenvolver o quadrado do segundo membro, simplificar, e empregar então o método dos coeficientes indeterminados. Desta forma transformou um exemplo idêntico a outros já anteriormente tratados num exemplo com novas características, ou pelo menos, tratado de uma outra perspectiva.
Relativamente ao método dos coeficientes indeterminados, este processo implica que o aluno o reconheça os coeficientes *a*,*b* e *c*, como sendo valores genéricos e, por isso, este exemplo explora a generalidade contida na expressão algébrica $ax^2+2abx+ab^2+c$.

Sobre o exemplo 16.2, que será trabalhado em casa, pode ser observado que, embora a professora tenha trazido a igualdade para o aspecto nos dois membros, os alunos retornam à forma $f(x)=a(x-h)^2+k$. Como o aspecto que foi pedido, relativamente à parábola associada à quadrática $f(x)=3x^2-5x+1$, foi o contradomínio, os alunos abandonam a forma $f(x)=ax^2+bx+c$ porque o contradomínio é mais facilmente determinado pela transparência que forma $f(x)=a(x-h)^2+k$ exibe. Por isso, este exemplo visa explorar a igualdade encontrada no exemplo anterior. Como a forma $f(x)=3x^2-5x+1$ não é *transparente* às coordenadas do vértice, e portanto ao contradomínio, pela igualdade anterior procura-se a resposta na forma $f(x)=a(x-h)^2+k$ que, com os valores dos coeficientes indeterminados que foram calculados em 16.1, se transforma em $f(x)=3\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{12}$.

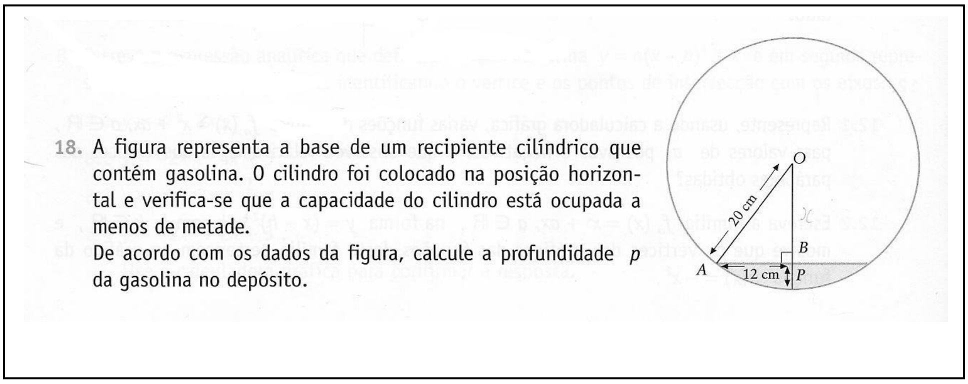
Esmeralda: **Episódio 40**
Dia: **23 Fevereiro 07**

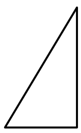
Início: **LB 33 min 03 Seg.**
Fim: **LB 36 min 58 Seg.**

Manual: **Página 118**

Exemplo planeado tratado pelos alunos

Esmeralda: Resolver o exercício 18. Se não acabarmos vocês levam como trabalho de casa e o 19.


18. A figura representa a base de um recipiente cilíndrico que contém gasolina. O cilindro foi colocado na posição horizontal e verifica-se que a capacidade do cilindro está ocupada a menos de metade.
De acordo com os dados da figura, calcule a profundidade *p* da gasolina no depósito.

E: Sim, já que vocês não fazem assim voluntariamente, fazem voluntariamente à força. É um problema que não é fácil nem difícil, é só olhar e interpretar o que lá está.
(pausa para os alunos lerem e interpretarem o enunciado e apoia individualmente os alunos)
E: Então contem-me lá. Como é que é?
Patrícia: Podemos ir pela hipotenusa.
E: Podemos ir pela hipotenusa. Vamos lá a decifrar. O que é que isso significa, Patrícia?
A Bruna fala no teorema de Pitágoras. Vocês olharam para a figura e visualizaram logo o quê?
Alunos: Um triângulo rectângulo.
E: Um triângulo rectângulo. E desse triângulo rectângulo o que nós conhecemos?
Alunos: Um cateto e a hipotenusa.
Conhecemos um cateto e uma hipotenusa. A hipotenusa mede quanto?
Alunos: 20.
(a professora esboça um triângulo rectângulo no quadro )

E: 20. E o cateto que conhecemos é qual, este (horizontal) ou este (vertical)?
Alunos: O de baixo.
E: Este (horizontal). Mede quanto?
Alunos: 12.
E: E o que nós desconhecemos é qual?
Alunos: O BO.
E: O BO. (indica as medidas e os vértices B e O) Mas eu, entretanto, ainda tenho aí mais um pedacinho.
Alunos: É o P.
E: Mas pronto, vocês querem começar por aqui. Certo?
Alunos: Sim.
E: Então, e o que faziam aqui?
Alunos: Tiramos o outro cateto.
E: Vamos.
(os alunos ditam e a professora escreve no quadro)

Alunos: 20 ao quadrado é igual a 12 ao quadrado mais BO ao quadrado.
E: Mais…?
Alunos: …BO ao quadrado.
E: D.ª Bruna, não há x ao quadrado porque ali não há nenhum x. A não ser que a menina chame ao cateto maior x. Certo? Mas como tem lá BO, demos nome …(imperceptível) … temos que nos habituar a trabalhar com outro tipo de linguagem. Não pode ser só sempre x e y. Há outras, neste caso é BO.
Ora, isto dá? 20 ao quadrado menos 64…
Aluno: …igual a BO ao quadrado.
(ouve-se o toque de campainha que indica que a aula terminou)
E: Acabem em casa se faz favor. Está bem?

Fim da Transcrição

Nota: Consultando os cadernos diários das duas alunas da Esmeralda, pode-se verificar que o trabalho de casa foi corrigido. O exemplo termina depois das alunas determinarem BO (16) e fazerem a diferença entre 20 e BO, 20-16. A resposta das duas alunas é: A profundidade da gasolina é de 4 centímetros.

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O exemplo deste episódio é uma aplicação externa do Teorema de Pitágoras, mas não é uma aplicação externa do conceito de função. Na realidade, o exemplo envolve a noção de quadrado mas não o conceito de função quadrática.

Contudo, o episódio contém alguns traços do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** evidenciados pela professora no tratamento deste exemplo.
Claramente CPC:

- a professora decifra a forma como a aluna se expressa, pondo em discurso claro e correcto aquilo que a aluna pretende comunicar (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*Podemos ir pela hipotenusa. Vamos lá a decifrar. O que é que isso significa, Patrícia? A Bruna fala no teorema de Pitágoras. Vocês olharam para a figura e visualizaram logo o quê?*"7
- estiliza geometricamente o problema através de um simples triângulo rectângulo. Desta forma, desdenha toda a informação excessiva e inútil que a figura comporta (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**)

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- a professora dialoga com todos os alunos em geral e faz perguntas a algum em particular para obter e manter a atenção dos alunos (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**)
- proporciona tempo suficiente aos alunos para lerem e interpretarem o enunciado da questão e, depois, apoia individualmente os alunos que requeiram ajuda (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**)

Nota: no final do episódio, uma das alunas designa por *x* um dos catetos, aquele que na figura se apresenta como [BO]. A professora corrige a aluna para que ela se expresse com rigor, que use de rigor na linguagem: "*D.ª Bruna, não há x ao quadrado porque ali* *não há nenhum x. A não ser que a menina chame ao cateto maior x. Certo? Mas como tem lá BO,* (…) *temos que nos habituar a trabalhar com outro tipo de linguagem. Não pode ser só sempre x e y. Há outras, neste caso é* BO."

Uso do Exemplo

Não é um exemplo onde se aplique o conceito de função. Pode ser um exemplo utilizável no 9º ano (14-15 anos) quando se trata o Teorema de Pitágoras num âmbito de resolução de problemas.

Esmeralda: **Episódio 41**
Dia: **2 Março 07**

Início: **LA 3 min 52 Seg.**
Fim: **LA 14 min 04 Seg.**

Manual: **Página**

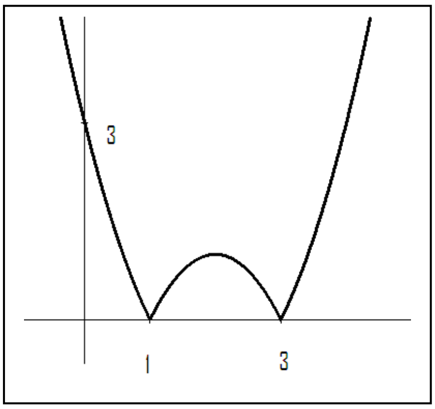
Exemplo planeado tratado pelos alunos e pela professora

Esmeralda: Então, estávamos, como dizia, na página 129 porque acabámos na última aula por verificar o seguinte: que quando temos o módulo de uma função, ou melhor, quando tenho uma função (escreve no quadro enquanto verbaliza) $y = f(x)$ e nos pedem $y = |f(x)|$, o que é que acontece ao nosso gráfico?
Aluna: O que é negativo passa a positivo.
E: Exactamente, as imagens positivas ou iguais a zero mantêm-se, e as imagens negativas passam a positivas. Vimos ontem, aqui, vários exemplos. Pronto. Então sendo assim, vamos à página 129 e vamos resolver o que aí nos pede. Exercício 1:

1. Represente graficamente e indique os extremos relativos da função *f* definida por: $$f(x) = \lvert -x^2 + 4x - 3 \rvert$$

Represente graficamente e indique os extremos relativos da função f definida por: $f(x) = |-x^2 + 4x - 3|$.
Vá lá, calculadora e verificar o que é que temos. Esta função é do estilo de uma que vimos ontem.
(pausa para os alunos retirarem o gráfico da máquina de calcular gráfica)
E: O que é que foi Miguel?
Filipa: É que ele não trouxe calculadora.
E: O Miguel? Ou Filipa?
Miguel: Fui eu que não trouxe.
E: Ou ela? Também não?
Miguel: Não, ela trouxe.
E: Outra vez! Outra vez, Miguel! Outra vez!
Então não estamos a trabalhar com a calculadora? Não estamos a precisar da calculadora todos os dias? Então e agora quem é que não tem? Porque ele já tem uma!
Miguel: (imperceptível)
E: E já descobriram onde é que está o erro, Miguel? Ou não?
Miguel: Ela não pôs entre parênteses.
E: Com módulo, para ficar o valor absoluto. Pronto, temos sempre a cabeça no ar!
Mas se vos faz falta a calculadora, sentem-se um ao lado do outro e os dois vêem pela calculadora. É uma hipótese? Desde que não falem…
O que é que verificaram?
Alunos: Faz assim para cima…
E: Exactamente, só que o espaço que fica compreendido entre os zeros da nossa parábola… se a nossa função não estivesse em módulo, valor absoluto, teriam imagens negativas, passam a positivas. Passam assim, (com as mão indica a concavidade voltada para baixo) tipo uma conchinha. Vá lá, toca a passar para o caderno. Ah, mas para passarmos para o caderno, o que é que precisamos de tirar do gráfico?
Alunos: Os zeros…
E: Os zeros… e, as coordenadas do vértice… quer dizer, neste caso… mas convém. E o ponto de intersecção da nossa função com o eixo dos yy.
(a professora esboça no quadro o sistema de eixos cartesianos)
E: Quais são os zeros?
Alunos: $x = 1$ e $x = 3$

(a professora marca no sistema as abcissas 1 e 3)
E: Qual é o ponto de intersecção da parábola com os eixos dos yy?
Alunos: Zero, três.
(a professora marca no eixo vertical a ordenada 3 e esboça o gráfico da função)



E: Supostamente, o que vocês vêem é… É isto que visualizaram?
Como tínhamos visto ontem. Tinham imagens positivas… os valores de x que tinham imagens positivas, essas imagens mantêm-se, as imagens negativas são as que passam a positivas. As nulas, os zeros, também se mantêm.
(apoia os alunos de forma individual)
E: O primeiro "menos" é sempre o "menos" posicional. É o dos parênteses, senão dá erro. Então qual é o problema? É que a menina tinha introduzido mal o "menos", não? Pois, pois!
(pausa para apoio individual dos alunos)
E: Ora quem já fez pode ir pensando no exercício 2. Se faz favor.
(o Miguel dá uma indicação à professora sobre os extremos)
E: É o quê? Ah, está bem! Portanto, nesta pergunta ainda falta indicar os extremos relativos da função.
Miguel: O dois é um máximo absoluto da função?
E: É. Não, não é absoluto. É relativo.
Os mínimos são dois. Tem duas imagens do xx.
(pausa)
E: Falta indicar os extremos. Que extremos é que a nossa função tem?
Alunos: Tem mínimo relativo.
E: …mínimo relativo. Que é quanto?
(alguns alunos chamam a professora para esclarecer dúvidas)
E: Então, já toda a gente verificou os extremos? Que extremos é que a nossa função tem?
Alunos: Mínimos.
E: Que é quanto? Mínimo relativo.
Aluna: Zero.
Outro aluno: y igual a zero.
E: E depois?
Alunos: Máximo relativo, y igual a um.
E: Sim senhor!
E quais seriam os minimizantes?
Aluno: $x = 1$ e $x = 3$
E: $x = 1$ e $x = 3$. E o maximizante?
Aluna: $x = 2$
E: Exactamente. Pronto, agora temos o primeiro exercício concluído.

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Os primeiros exemplos fornecidos pela professora, após a introdução do conceito de função módulo, tinham sido apresentados na aula anterior e serviram como apresentação deste novo conceito, tendo sido tratados apenas pela professora: *Vimos ontem, aqui, vários exemplos.*
O episódio aqui transcrito mostra como os alunos trabalham pela primeira vez um exemplo de função módulo. A forma como o fazem ainda não é de forma totalmente autónoma. Embora sejam os alunos a tratar o exemplo, é à professora que cabe o papel de liderança, isto é, é a professora que conduz os trabalhos através de questões particulares que levam os alunos aos resultados pretendidos. Contudo, os alunos já se encontram situados no conceito, os exemplos da aula anterior tiveram essa função, são os alunos que fazem todo o trabalho e a professora apenas lhes indica o que fazer utilizando algumas indicações. Assim, este *Exemplo Planeado de Conceito* insere-se na 2ª Categoria, **Abordagem Inicial Autónoma**.

O episódio contém alguns traços do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** evidenciados pela professora no tratamento deste exemplo.
Claramente CPC:

- o exemplo tratado neste episódio, pela sua simplicidade, leva os alunos a entenderem a aplicação do módulo a uma função e a consequente obtenção de uma função módulo. A estratégia da professora é levar os alunos a esboçar o gráfico da função módulo porque, com ele os alunos irão tratar também a essência da função módulo e o que a distingue das outras funções (Cat. **Estratégias de Ensino**)
- com a calculadora, a professora obtém dos alunos as características do gráfico que determinam uma forma de pensar sobre o conceito de função módulo (Cat. **Pensamento do Estudante**):

  "**Esmeralda**: (…). *O que é que verificaram?*
  Alunos: *Faz assim para cima…*
  Esmeralda: *Exactamente, só que o espaço que fica compreendido entre os zeros da nossa parábola… se a nossa função não estivesse em módulo, valor absoluto, teriam imagens negativas, passam a positivas. Passam assim,* (com as mão indica a concavidade voltada para baixo) *tipo uma conchinha.*"
- a professora, com o aspecto gráfico da função obtido na máquina de calcular gráfica, com os valores dos zeros e com a intersecção do gráfico com o eixo vertical, esboça o gráfico da função. Será a partir do gráfico que será estudada a existência de extremos (Cat. **Representações detalhadas e apropriadas dos Conceitos**)
- explica a diferença entre os sinais de "-" na máquina de calcular (Cat. **Explicações**): "*O primeiro "menos" é sempre o "menos" posicional. É o dos parênteses, senão dá erro.*"
- a professora utiliza de forma correcta a máquina de calcular gráfica, não apenas na obtenção dos resultados, mas também na utilidade estratégica desse uso (Cat. **Conhecimento de Recursos**)

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- a professora chama a atenção dos alunos para os aspectos de do gráfico que identificam e distinguem a função módulo (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*Como tínhamos visto ontem. Tinham imagens positivas… os valores de x que tinham imagens positivas, essas imagens mantêm-se, as imagens negativas são as que passam a positivas. As nulas, os zeros, também se mantêm.*"
- mostra aos alunos como conteúdos anteriores são fundamentais para o tratamento do actual exemplo (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**): "(…) *mas para passarmos para o caderno, o que é que precisamos de tirar do gráfico?* (…) *Os zeros… e, as coordenadas do vértice* (…)"

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- no início do episódio a professora dá indicações sobre os objectivos da aprendizagem dos alunos (Cat. **Objectivos da Aprendizagem**): "(…) *acabámos na última aula por verificar o seguinte: que quando temos o módulo de uma função, ou melhor, quando tenho uma função* (escreve no quadro enquanto verbaliza) $y = f(x)$ *e nos pedem* $y = |f(x)|$, *o que é que acontece ao nosso gráfico?*"
- a forma de diálogo que a professora utiliza para tratar o exemplo obriga os alunos a estarem centrados nos aspectos principais do exemplo e, neste caso, da função módulo (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção dos Alunos**)
- situa os alunos no trabalho a desenvolver (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**): "*Vá lá, calculadora e verificar o que é que temos. Esta função é do estilo de uma que vimos ontem.*"

Uso do Exemplo

O exemplo incluído neste episódio é apresentado aos alunos na *Faceta Simbólica* mas, relativamente ao uso que a professora dele faz, a faceta utilizada é a *Faceta Geométrica*. A apresentação da função módulo ocorreu na aula anterior e os exemplos foram todos tratados pela professora. Assim, a professora apresentou duas equações de funções e os respectivos gráficos e, de seguida, aplicou-lhes a função módulo e explicou aos alunos as consequências da aplicação do módulo. Os gráficos das funções módulo obtidas deste modo foram comparados com os gráficos das funções originais: o gráfico de $f(x) = x^2 - 16$ foi comparado com o gráfico de $g(x) = \left|x^2 - 16\right|$ e o gráfico de $f(x) = x + 2$ foi comparado com o gráfico de $g(x) = |x + 2|$. Na comparação, a professora deu a ênfase aos aspectos dos dois gráficos, $f(x)$ e $g(x)$, que se mantiveram e aos aspectos que se alteraram.

Este exemplo, contrariamente aos exemplos da aula anterior, foi tratado pelos alunos com o auxílio da professora, mediante pequenas indicações que lhes iam orientando os passos e que dirigiram os trabalhos para os aspectos principais do exemplo. Embora a utilização da máquina de calcular tenha um papel preponderante do ponto de vista gráfico a professora não descura as características do gráfico que têm sido tratadas anteriormente de forma analítica: "*Os zeros… e, as coordenadas do vértice…*". Aliás, este exemplo poderia ter sido tratado de forma exclusivamente analítica, mas a professora preferiu dar-lhe um uso totalmente baseado na faceta geométrica e retirar todos os elementos da calculadora gráfica. Numa primeira abordagem deste tipo de função a utilização exclusiva da faceta simbólica, o uso analítico, não proporcionaria ao aluno a *visão* das consequências da aplicação do módulo a uma função, neste caso, a função quadrática.

Essa *visão* das transformações do gráfico após a aplicação do módulo foi bem vincada pela professora: " *Como tínhamos visto ontem. Tinham imagens positivas… os valores de x que tinham imagens positivas, essas imagens mantêm-se, as imagens negativas são as que passam a positivas. As nulas, os zeros, também se mantêm.*" Como se verá no tratamento de exemplos semelhantes, em episódios seguintes, é esta frase que os alunos repetem e que lhes serve de guia para as funções módulo em causa. Por isto, este primeiro exemplo que os alunos trabalharam, pode ser visto como *Exemplo Resolvido*.

Finalmente, a contribuição deste exemplo e dos da aula anterior no que se refere à *Ampliação do Espaço de Exemplos dos Alunos* é óbvia. A partir deste momento os alunos incorporaram no seu espaço de exemplos um caso que possui características bem marcadas e que é aplicável a qualquer tipo de função. A aplicação do módulo pode ser feita a qualquer tipo de função que os alunos já tenham estudado ou que ainda venham a estudar e produz em todos os gráficos as mesmas transformações, o que lhe confere características de generalização bem assimiladas pelos alunos.

Esmeralda: **Episódio 42**
Dia: **2 Março 07**

Início: **LA 14 min 04 Seg.**
Fim: **LA 25 min 29 Seg.**

Manual: **Página 129**

Sequência planeada de Exemplos tratada pelos alunos e pela professora

Esmeralda: Agora podemos passar para o segundo:

2. Indique o contradomínio da função *g* definida por $g(x)=\mid f(x)\mid$, sendo:			
2.1	$D'_f=[-2;3[$	2.2	$D'_f=]-1;3]$
2.3	$D'_f=]-3;3[$	2.4	$D'_f=[-4;3]$

E se se lembrarem do que vocês concluíram ontem através dos gráficos, o segundo exercício é fácil de resolver.
(pausa para os alunos trabalharem)
E: Já vi pessoal que já resolveu a primeira alínea. Estou a gostar! A primeira alínea… ou melhor, o exercício 2 diz, *Indique o contradomínio da função g definida por* $g(x)=\mid f(x)\mid$, *sendo:* o contradomínio de f, o intervalo fechado de -2 a 3 aberto. Então, se eu agora tenho a minha função em módulo, valor absoluto, quais são as alterações que o contradomínio vai sofrer?
Aluna: A parte negativa desaparece.
E: A parte negativa deixa de existir. Ou seja, todas as imagens que eram negativas passam a ser …
Alunos: Positivas.
E: … porque estão em valor absoluto. Então, o contradomínio da minha função *g*, qual é?
Alunos: De zero a três.
E: Dizem os vossos colegas aqui desta ala que o contradomínio de *g* … Zero a três, como? Como são os extremos?
Aluna: Zero fechado a três aberto.
E: (escreve no quadro: $D'_g=[0;3[$) Percebeu toda a gente o que se fez? Ou não?
João: Sim.
E: Sim, responde o João. Mas toda a gente? Faltam mais 27. Não! (há alunos que não perceberam) Então vamos ver.
(marca um sistema de eixos cartesianos no quadro)
Eu tenho uma função… eu não sei que função é, sei que as imagens vão ser…
Miguel! Se olhar para o quadro percebe o que eu estou a fazer!
…sei que as imagens vão ser estes valores compreendidos neste intervalo (no eixo vertical, evidencia com outra cor os pontos entre as ordenadas -2 e 3). Agora, eu quero o contradomínio da função *g* (escreve no quadro D'_g). E o que é a minha função *g*? *g* é igual ao valor absoluto da função f de x (escreve no quadro $g(x)=\mid f(x)\mid$). E as imagens que estão compreendidas entre -2 e 2 (pretendia dizer 3) são as imagens de $f(x)$. O que é que vimos ontem, Miguel, quando tínhamos um módulo, o que é que acontecia?
Miguel: Os valores negativos passavam a positivos.
E: Ou seja, esta parte aqui (aponta os pontos do eixo dos yy compreendidos entre -2 e 0) deixa de existir como imagem quando fez o valor absoluto. Certo?
Então, para onde é que vão passar estas imagens?
Miguel: Para cima.

E: Para cima! Para cima, para aonde? (marca os pontos do eixo vertical compreendidos entre 0 e 2) Para ali! Então, agora o meu contradomínio começa onde?
Miguel: Começa no zero.
E: E vai até?
Miguel: 3.
E: (faz para o Miguel um sinal de confirmação) Toda a gente entendeu?
Alunos: Sim.
E: Então vamos pensar no próximo.
(pausa para os alunos fazerem o 2.2)
E: Já toda a gente fez o 2.2?
(a professora apaga o quadro e depois escreve e verbaliza: $D'_f = \left]-1;3\right]$)
Contradomínio de f, de -1 a 3. -1 aberto, 3 fechado. Preciso do contradomínio de g.
(escreve no quadro: D'_g) O que é que me diz, Carina? Qual é o contradomínio de *g*.
Carina: De zero a três.
E: Diz a Carina, de zero a três. Aberto ou fechado?
Carina: Aberto, aberto.
E: Aberto onde?
Carina: No zero.
E: Aberto no zero?
Carina: Não, fechado! É fechado no zero.
E: Fechado no zero…
Carina: E no três.
E: E fechado no três? (escreve no quadro: $D'_g = \left[0;3\right]$)
Carina: Não, aberto.
E: Aberto no três? Porquê?
Carina: É fechado.
E: Mau! É aberto ou é fechado?! Vamos lá a ver se a gente se entende!
Carina: Fechado.
E: É fechado? (a professora, com um aceno, confirma que é fechado)
O que é que vocês dizem?
(alguns alunos afirmam que é fechado em três)
E: Fechado? (apontando para $D'_f = \left]-1;3\right]$) Se ele está lá fechado, porque é que eu agora o vou abrir (aponta para $D'_g = \left[0;3\right]$). A dúvida surge no zero, o que é que acontece neste caso, neste caso temos assim (esboça outro sistema de eixos e marca as ordenadas de -1 a 3) ora 1,2,3; zero, -1. As imagens estariam todas aqui (assinala os pontos do eixo dos yy compreendidos entre -1 e 3). A parte negativa, como [a função *f*] está em valor absoluto, é o que vai desaparecer (faz uma cruz nos pontos do eixo vertical entre a ordenada -1 e zero), então a parte negativa vai passar para aonde? (assinala os pontos do eixo dos yy entre zero e 1) Entre zero e 1. Certo? Logo, o meu contradomínio vai ser de zero a três. O três ali é fechado, portanto aqui continua a ser fechado. Entendido?
(pausa)
E: Então e a 2.3?
Alunos: De zero a três.
E: (apaga o quadro) 2.3, o contradomínio de f é … aberto ou fechado?
Aluna: Aberto.
(a professora escreve no quadro enquanto verbaliza: $D'_f = \left]-3;3\right[$)
E: …-3 a 3. Assim? E agora eu quero o contradomínio de *g*. (escreve D'_g)
Como é que vai ficar?
(os alunos respondem ao mesmo tempo de forma indistinta)
E: (escreve no quadro $D'_g =$ 0;3) De zero a três. Como são os extremos? Intervalo…?
Alunos: Em zero é fechado e aberto em três.
(a professora completa: $D'_g = \left[0;3\right[$)

E: Toda a gente concorda? Toda a gente compreendeu?
(os alunos confirmam)
E: Mesmo? Então podem passar à próxima, 2.4.
(pausa para os alunos fazerem a 2.4)
E: Já está a 2.4? Mário e João? Então, na 2.4 o contradomínio da *f* é de -4 a 3. Aberto ou fechado?
Aluna: Fechado.
E: Fechado nos dois. Então como é que fica o contradomínio de *g*, Mário?
(escreve no quadro: $D'_f = [-4;3]$)
Mário: Fica de zero a três.
E: O Mário diz: de zero… aberto, fechado, como é que é?
Mário: De zero fechado…
E: De zero fechado…
Mário: … a três…
E: … a três…? Aberto ou fechado?
Mário: Eu acho que é de zero a 4…
E: Calma! Está-me a baralhar! Estou a ficar baralhada! Isto logo de manhã não pode ser! (rindo) É de zero a 3 ou de zero a 4?
Mário: Acho que zero a 4.
E: Ele acha. Vocês o que é que acham? Ou não acham nada. Quem não acha nada não tem que sair de casa!
Miguel: É de zero a 4.
E: De zero a 4, diz ali o Miguel com muita convicção. E vocês?
(a maioria dos alunos concorda)
E: E a Carina está naquela de que, deixa ver para onde é que vai a maioria que é para eu ir atrás deles.
(risos)
E: É de zero a 4 ou de zero a 3? Não estou a perceber, estou a ficar baralhada.
(rindo) E a Carina também não percebe nada. Pois Não?
(a aluna, rindo, confirma)
Ora vamos lá a ver. (esboça um sistema de eixos cartesianos) Um, dois três. Sem problemas. Pois não, Carina? -1, -2, -3, -4. Supostamente, naquele contradomínio, eu tenho…
(marca a verde todos os pontos do eixo dos yy compreendidos entre 3 e -4)
…estes valores todos com imagem, podendo ser esta imagem (marca bola fechada em 3) e podendo ser esta imagem (marca bola fechada em -4). O que é que vai acontecer quando eu coloco ali um módulo?
(alguns alunos vão responder mas a professora impede-os)
E: Hei, hei, hei, hei, hei… (pergunta directamente à Carina) O que é que vai acontecer?
Carina: Os negativos…
E: O quê?
Carina: Os negativos…
E: Estes negativos…? O que é que lhes acontece?
Carina: Desaparecem.
E: Desaparecem. Para aonde? Para onde vão? Atiro-os fora? Explique-me!
(silêncio)
E: Carina, desaparecem para aonde? O que é que vimos ontem quando fizemos os gráficos?
Carina: Iam para positivo.
E: Como?
Carina: Iam para positivo.
E: Iam para positivo. Então explique-me lá, de onde até onde é que estes valores vão em valor absoluto? De onde a onde?
Carina: De zero a 4.
E: De zero a…?
Carina: De zero a 4.
E: De zero (aponta a origem no sistema de eixos), certo? (evidência os pontos do eixo vertical até 4) Então qual é o contradomínio da nova função?
Carina: De zero a 4.
E: Ah! Toda a gente percebeu? (escreve no quadro $D'_f =]0;4[$)
Então o contradomínio da função *g*, na 2.4, é o intervalo fechado de zero a 4.

Fim da Transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo
A sequência de exemplos retratada neste episódio tem como objectivo a compreensão, por parte dos alunos, das consequências da aplicação do módulo a uma função. A forma de o fazer é por via da determinação do contradomínio da função obtida após a aplicação do módulo, esta é a característica mais afectada pela transformação que o gráfico inicial sofre.
Para determinar o novo contradomínio o aluno deve compreender bem as transformações do gráfico. A *Faceta Geométrica* é utilizada para melhor transmitir ao aluno quais as consequências da aplicação do módulo a uma função e, mais tarde, aplicar à *Faceta Simbólica*. Com esta sequência, cujos exemplos se apresentam na faceta geométrica, surgiram as dúvidas inicias, algumas dificuldades, que a professora obviou. O número de dificuldades levantadas não é apreciável, este tipo de exemplos já tinha sido trabalhado pela professora em ocasiões anteriores, sendo um deles tratado no episódio anterior e a regra de aplicação do módulo na perspectiva geométrica não se revelou demasiado exigente no aspecto cognitivo. Pelo exposto, classificamos todos os exemplos como *Exemplos Planeados de Conceito* de 2ª categoria, **Abordagem Inicial Autónoma**.

Contudo, o episódio contém alguns traços do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** evidenciados pela professora no tratamento deste exemplo.
Claramente CPC:
- para melhor introduzir a aplicação do módulo a uma dada função e analisar as suas consequências, a professora propôs um exemplo em que é pedido o contradomínio da uma função que se obtém pela aplicação do módulo dado o contradomínio inicial (Cat. **Estratégias de ensino**)
- a professora estabelece com os estudantes um diálogo que se reporta à aprendizagem anterior sobre o tema. As pistas verbais são específicas a uma dada resposta que a professora espera, e que orientam o aluno na actividade (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*A parte negativa deixa de existir. Ou seja, todas as imagens que eram negativas passam a ser ...*"; "*Então, agora o meu contradomínio começa onde?*"
- para o cálculo do contradomínio da função módulo, dado o contradomínio da função original, a professora salienta um aspecto fundamental que é a existência do zero (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*A dúvida surge no zero, o que é que acontece neste caso, neste caso temos assim (...)*"
- para melhor compreensão das transformações dos gráficos, a professora exibe no quadro, gráficos que ilustram os aspectos fundamentais da aplicação do módulo (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos conceitos**): "*Ou seja, esta parte aqui* (aponta os pontos do eixo dos yy compreendidos entre -2 e 0) *deixa de existir como imagem quando fez o valor absoluto. Certo?*"
- no final do episódio, exemplo 2.4, é facilmente observável a síntese de tudo que foi explicado nos três exemplos anteriores. De início ao final, a professora explicou todos os passos à aluna Carina (Cat. **Explicações**)

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico:

- a professora destaca e deixa bem claro qual é o segmento do contradomínio que vai sofrer a alteração por aplicação do módulo (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*Agora, eu quero o contradomínio da função g* (escreve no quadro D'_g). *E o que é a minha função g? g é igual ao valor absoluto da função f de x* (escreve no quadro $g(x) = |f(x)|$). *E as imagens que estão compreendidas entre -2 e 2 (pretendia dizer 3) são as imagens de* $f(x)$*.*"; "*A parte negativa, como [a função f] está em valor absoluto, é o que vai desaparecer* (faz uma cruz nos pontos do eixo vertical entre a ordenada -1 e zero), *então a parte negativa vai passar para aonde?*"

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- a professora enquadra os alunos na actividade e, com isso, dá-lhes a indicação do que se segue em termos de aprendizagens (Cat. **Objectivos da Aprendizagem**): "*E se se lembrarem do que vocês concluíram ontem através dos gráficos, o segundo exercício é fácil de resolver.*"
- Chama um aluno de forma a que ele acompanhe os trabalhos desenvolvidos e se integre na actividade (Cat. **Obtenção e Conservação da atenção do Aluno**): "*Miguel! Se olhar para o quadro percebe o que eu estou a fazer!*"
  Brinca com o Mário e com a Carina de forma a manter os alunos motivados e atentos (Cat. **Obtenção e Conservação da atenção do Aluno**).
- incentiva alguns alunos com palavras de estímulo (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**): "*Já vi pessoal que já resolveu a primeira alínea. Estou a gostar!*"
  No fim de cada exemplo sistematiza os resultados, clarifica-os e pergunta à turma se não há dúvidas (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**): (no caso do exemplo 2.4) "*Toda a gente percebeu?* (escreve no quadro $D'_f =]0;4[$) *Então o contradomínio da função g, na 2.4, é o intervalo fechado de zero a 4.*"
  Verifica as aprendizagens e a forma como os alunos progridem na actividade por intermédio de perguntas de controlo (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).

Uso do Exemplo

O uso deste tipo de exemplos é a aplicação do módulo a funções e a observação das consequências dessa aplicação. A presente sequência centra-se no efeito que a aplicação do módulo tem no contradomínio da função original. Numa fase inicial, a aplicação do módulo é feita com uma forte incidência na *Faceta Geométrica*, embora a apresentação da sequência de exemplos seja feita na *Faceta Simbólica*. Mas, no evoluir do episódio, nota-se que o recurso à *visualização gráfica* é cada vez menor. Esta evolução explica-se com a generalização conseguida por parte dos alunos, o método tantas vezes apresentado pela professora, *a parte negativa do gráfico desaparece e todas as imagens negativas passa a ser positivas*, passam a traduzir simbolicamente um início do intervalo, que representa o contradomínio, no zero. Unicamente no que respeita à obtenção do contradomínio da função módulo, pode observar-se a evolução da facilidade da sua indicação à medida que os alunos se apropriam das consequências do

uso do módulo nos contradomínios inicias. Pode-se verificar que: quanto mais se generaliza, menos se recorre ao apoio gráfico. O exemplo que é apresentado na faceta simbólica, após a apropriação do conceito de função módulo, pode ser resolvido nessa mesma faceta sem o recurso à faceta geométrica.
A evolução que se observa na forma como os vários exemplos da sequência são tratados, de um maior recurso à faceta geométrica nos primeiros exemplos para uma maior utilização da própria faceta simbólica, explica-se pela natureza da sequência utilizada. Note-se que existe uma *Variação* apreciável na evolução da sequência. E essa evolução é melhor apreciável pela análise das *Dimensões de Variação Possíveis* e pelas respectivas *Amplitudes de Variação Permitidas*.
As dimensões que podem ser identificadas são: a natureza do intervalo (aberto/fechado), os valores absolutos do extremo direito e esquerdo dos intervalos e o sinal desses extremos. Veja-se o que acontece relativamente às amplitudes de variação possíveis:

- os dois primeiros exemplos são semelhantes, o valor absoluto do limite inferior é menor que o valor absoluto do limite superior do intervalo. Este facto não altera o valor superior do contradomínio após a aplicação do módulo.
- quando se passa para o terceiro exemplo, os valores absolutos dos limites do intervalo são iguais, o que também não altera o contradomínio após a aplicação do módulo.
- já no quarto exemplo, o limite inferior do intervalo é, em absoluto, maior que o limite superior. Isto acarreta, após a aplicação do módulo, que o valor superior do contradomínio se altere.

A nosso ver, a variação que a sequência apresenta deveria apresentar os dois casos em que ambos os extremos do intervalo fossem negativos e, também, que os dois extremos do intervalo fossem positivos. Isto daria uma maior completude à variação, cimentaria mais a generalização e ampliaria na totalidade os *Espaços de Exemplos* dos alunos.

Esmeralda: **Episódio 43**
Dia: **2 Março 07**

Início: **LA 27 min 45 Seg.**
Fim: **LA 32 min 00 Seg.**

Exemplo espontâneo tratado pela professora

Esmeralda: Quando temos uma equação, ou quando temos uma inequação, o que é que temos? Condições. Tenho uma igualdade, ou tenho uma desigualdade. Certo? Pronto.
Esse palavrão a que se refere *condições*, envolvendo módulos, significa que eu com módulos também posso resolver equações e eu com módulos também posso resolver inequações. Então, vamos aprender a resolver equações com módulos.
Ora, portanto, quando eu tenho módulo de x igual a a (escreveu no quadro $|x|=a$)… já vos disse ontem que aquele x pode ser qualquer coisa, $x+2$, $x+3$, $-x+4$, $3x-5$. Qualquer coisa. O desdobramento de qualquer uma destas coisas faz-se da seguinte forma: x igual a a ou x igual a $-a$ (escreveu no quadro: $|x|=a \Leftrightarrow x=a \vee x=-a$).
Um exemplo:

$$\boxed{\left|-x-\sqrt{2}\right|=7}$$

(escreve enquanto verbaliza)
Equivalente a, $-x-\sqrt{2}=7$ ou $-x-\sqrt{2}=-7$.
E agora estou perante duas equações para resolver e vocês já deviam saber, se não sabem eu volto a lembrar ou a dizer-vos, que uma equação só está resolvida quando o x está isolado e com coeficiente 1.
Então, ainda não está isolado e também não tem coeficiente 1.
(escreve enquanto verbaliza)
$\Leftrightarrow -x=7+\sqrt{2} \vee -x=-7+\sqrt{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=-7-\sqrt{2} \vee x=7-\sqrt{2} \Leftrightarrow$
E então a solução do meu problema vai ser -7 menos raiz de 2, 7 menos raiz de 2 (escreve no quadro $S=\left\{-7-\sqrt{2},7-\sqrt{2}\right\}$)
Percebido?
Então, quando vocês tiverem uma equação com um módulo… também pode ter dois, já vamos fazer… o desdobramento é daquele tipo: x igual a a ou x igual a $-a$.
Porquê? Porque nós vimos ontem que nós ao termos um número positivo, ou termos um número negativo, o seu módulo é exactamente igual.
Vimos, por exemplo, se bem me lembro, o módulo de 6 era 6 e o módulo de -6 também era 6.
O módulo de 3 é 3 e o módulo de -3, por exemplo, também é 3.
Então eu dentro dos parênteses… digo, do módulo, eu posso ter um valor positivo ou um valor negativo, o seu módulo é sempre igual.
Então passem lá este exemplo, se faz favor.
(…)
Ah, mas tenham em atenção, na solução das equações… prestem lá atenção se faz favor! Olhem lá… condições envolvendo módulos… na solução das equações, e depois nas inequações também vão ver, eu só posso fazer este desdobramento quando o meu módulo estiver sozinho, porque eu poso ter, por exemplo, 2x… 2 módulo de, menos x menos raiz de 2, menos 5, igual a 7 (descreve oralmente a situação $2|-x-\sqrt{2}|-5=7$). Eu só posso fazer este desdobramento quando o -5 e o 2 saírem do primeiro membro, se estiver o módulo no primeiro membro. Entendido?
Já vou passar um exemplo para vocês verem.

Fim da Transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Como se pode ler no princípio do episódio, a professora define o que é uma *condição com módulo*, explicita uma equação geral, $|x| = a$, e de seguida apresenta o primeiro exemplo:
"*Um exemplo:* $\left|-x-\sqrt{2}\right| = 7$".
Este *Exemplo Espontâneo de Processo* é todo ele tratado pela professora e servirá de *Exemplo Resolvido*, aos exemplos do mesmo género que se seguirão. Por isso é incluído na 1ª Categoria, **Definição/Apresentação**. Acresce que, no final do episódio, apresenta outro exemplo espontâneo que não foi tratado.
Durante a apresentação e tratamento deste episódio podem ser apreciados diversos traços do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** da professora.

Claramente CPC:

- a professora opta por enquadrar as equações com módulos num contexto mais geral, as condições. Só depois particulariza às condições e, de forma ainda mais específica, às equações com módulos (Cat. **Estratégias de ensino**): " (…) *Condições. Tenho uma igualdade, ou tenho uma desigualdade. Certo? Pronto. Esse palavrão a que se refere* ***condições****, envolvendo módulos, significa que eu com módulos também posso resolver equações* (…)"
- relembra, de forma prática, como se resolve uma equação, mais propriamente, quando se chega à sua solução (Cat. **Pensamento do Estudante**): " (…) *eu volto a lembrar ou a dizer-vos, que uma equação só está resolvida quando o x está isolado e com coeficiente 1.*"
- chama a atenção dos alunos para um aspecto que faz a diferença entre encontrar, ou não, a solução correcta e que pode constituir uma dificuldade no processo de resolver equações com módulos (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): " (…) *eu só posso fazer este desdobramento quando o meu módulo estiver sozinho,* (…)"
- após o desdobramento da equação com módulo obtém duas equações de 1º grau para resolver. Indica a razão porque se têm que resolver e explica a resolução (Cat. "**Explicações**): "*Então*, [o *x*] *ainda não está isolado e também não tem coeficiente 1.*" e explica a resolução das duas equações.
- quando falava aos alunos sobre a necessidade de isolar o módulo apresentou espontaneamente um exemplo de um caso em que o módulo não vem, *a priori*, isolado (Cat. **Conhecimento de Exemplos**): " (…) *quando o meu módulo estiver sozinho, porque eu poso ter, por exemplo, 2x… 2 módulo de, menos x menos raiz de 2, menos 5, igual a 7* (descreve oralmente a situação $2|-x-\sqrt{2}|-5=7$)."

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- a professora identifica o aspecto crítico à boa compreensão da razão do desdobramento da equação com módulo em duas equações (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*O módulo de 3 é 3 e o módulo de -3, por exemplo, também é 3. Então eu dentro* (…) *do módulo, eu posso ter um valor positivo ou um valor negativo, o seu módulo é sempre igual.*"
- refere conteúdos anteriores às equações com módulos e invoca outros casos com módulos que só surgirão posteriormente, as inequações e as equações com dois módulos (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**): "*Esse palavrão a que se refere condições, envolvendo módulos, significa que eu com módulos também posso resolver equações e eu com módulos também posso resolver inequações.*"; "*Então, quando vocês tiverem uma equação com um módulo… também pode ter dois, já vamos fazer…*"

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- a professora de pois de introduzir as condições, equações com módulos, indica claramente aos alunos quais os objectivos das a aprendizagens que estão incluídas na actividade que segue (Cat. **Objectivos da Aprendizagem**): "*Então, vamos aprender a resolver equações com módulos.*"
- preocupa-se com a atenção dos alunos e que estejam atentos ao seu trabalho (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção dos Alunos**): "*Ah, mas tenham em atenção, na solução das equações… prestem lá atenção se faz favor! Olhem lá… condições envolvendo módulos…*"
- abre o episódio com a indicação do propósito da actividade, faz alusão às aprendizagens anteriores dos alunos e estabelece os aspectos principais da actividade (alguns escreve no quadro) (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).

Uso do Exemplo

Como se disse, este é o primeiro exemplo após a introdução do tema a estudar e, por isso, pretende servir como *Exemplo Resolvido* ao processo de resolução de equações com módulos. A professora tem o cuidado de trazer à colecta as *Aprendizagens Prévias* dos alunos para os enquadrar e para introduzir a actividade relacionada com o tratamento de equações com módulos.
A resolução de equações com módulos pode ser feita analiticamente, utilizando a *Faceta Simbólica*, ou pode ser feita recorrendo à utilização da calculadora gráfica utilizando, para isso, a *Faceta Geométrica*, considerando os exemplos anteriores. O episódio descreve o uso de um exemplo apresentado na faceta simbólica e tratado, também, apenas nesta faceta por opção estrita da professora.

No uso do exemplo, a professora concretiza uma *generalidade* contida na forma $|x|=a$. Assim, a professora refere-se à aula anterior quando pretende estipular que o argumento do módulo, aqui representado por *a*, pode ser uma expressão que desempenha uma generalidade algébrica ou inclui uma função à qual foi aplicada um módulo: "*Ora, portanto, quando eu tenho módulo de* ***x*** *igual a* ***a*** (escreveu no quadro $|x|=a$) … *já vos disse ontem que aquele x pode ser qualquer coisa,* $x+2$, $x+3$, $-x+4$, $3x-5$."

Este episódio, além do exemplo principal, também inclui um exemplo que a professora apresentou de forma espontânea. Quando explicava aos alunos a existência de um tipo de equações com módulos em que estes são factores e parcelas de expressões mais complexas, apresentou no seguimento do seu raciocínio o exemplo $2|-x-\sqrt{2}|-5=7$. Este exemplo ilustra o caso em que é absolutamente necessário isolar o módulo antes de poder desdobrar a equação: " (…) *eu só posso fazer este desdobramento quando o meu módulo estiver sozinho, porque eu poso ter, por exemplo, 2x… 2 módulo de, menos x menos raiz de 2, menos 5, igual a 7* ($2|-x-\sqrt{2}|-5=7$). *Eu só posso fazer este desdobramento quando o -5 e o 2 saírem do primeiro membro, se estiver o módulo no primeiro membro. Entendido? Já vou passar um exemplo para vocês verem.*"
Que é exactamente o exemplo do episódio seguinte, com a diferença que será tratado pelos alunos.

Esmeralda: **Episódio 44**
Dia: **2 Março 07**

Início: **LA 35 min 12 Seg.**
Fim: **LA 40 min 12 Seg.**

Exemplo espontâneo tratado pelos alunos e pela professora

Esmeralda: Então, alterando ali um bocadinho, para vos explicar o que eu dizia há bocado…
Por exemplo: Menos módulo de 2x mais 1, mais 3, igual… ora deixa-me pensar… -5.

(escreveu no quadro)

$$-|2x+1|+3=-5$$

Se perceberam o que eu disse há bocado, antes de vocês começarem a passar, digam-me lá qual é o primeiro passo que eu devo dar na resolução daquela equação.
Alunos: Tirar o 3 e o menos…
E: Tirar o 3. E fazer o quê com ele?
Alunos: Passar para o outro membro.
E: Passar para onde? Para o segundo membro? E fica como?
Alunos: -3.
E: Exactamente. Então, equivalente, menos módulo de, 2x mais 1, é igual a menos 5 menos 3 (escreveu no quadro, à frente da equação proposta: $\Leftrightarrow -|2x+1|=-5-3$).
E agora? Menos módulo de, 2x mais 1, igual a…?
Alunos: … -8
(a professora escreveu no quadro: $\Leftrightarrow -|2x+1|=-8$)
E: E depois? Já tenho o módulo sozinho? Já posso fazer todo o desdobramento?
Alunos: Não.
E: Então?
(os alunos, todos ao mesmo tempo, respondem sobre o sinal menos)
E: (para uma aluna em particular) Faço o quê?
Aluna: Mudamos os sinais dentro do módulo.
E: (ironicamente) Claro! Pois foi isso mesmo que eu disse: Mudamos os sinais dentro do módulo!
Muito bem! Dá muito mais jeito. É muito mais fácil!
Pois é, vá por aí vá. É assim que muitos – depois de se darem os módulos, e depois de fazerem quinhentos exercícios, quando temos testes – fazem. Depois nós, quando estamos a verificar os testes, o que é que fazemos? Com uma caneta vermelha, plim plom.
Então, e se eu em vez de ter ali menos, tivesse lá 3? O que é que você fazia? Também mandava-o para dentro do módulo.
Aluna: Se calhar…
E: Ah, se calhar!
(risos)
E: Então, ajudem-na lá, que ela está um bocadinho perdida.
(os alunos respondem de forma confusa, não se percebe)
E: Ou seja, você se for ao lado de um carro, ainda que o carro não seja seu, se a vê a ela no carro do outro lado, você atira-se para dentro do carro! Dá-me jeito.
(risos)
E: Então contem-me lá.
Alunos: temos que passar o “menos” para o outro lado.
Aluno: Ya.

E: Ya, o quê? O que é que "ya"? Não é "ya", é "sim".
Aluno: Está bem, professora.
E: Ah, pronto! Contem lá. Como que é que fazemos ali ao "menos"? Já que a Ana, hoje, deu para tirar logo de manhã…
Aluno: Multiplica-se, professora.
E: Multiplicam-se ambos os membros por -1. E então, ficamos com módulo de, 2x mais 1, igual a 8.
(escreveu no quadro: $\Leftrightarrow \left|2x+1\right| = 8$)
E: E agora?
Já tenho o módulo, com coeficiente 1, fazemos o quê? O desdobramento.
Como é que fica?
Alunos: 2x mais 1 igual a 8…
E: 2x mais 1 igual…
Alunos: … 8, ou 2x mais 1 igual a -8.
(a professora escreveu: $\Leftrightarrow 2x+1=8 \vee 2x+1=-8$)
E: E agora?
Resolvemos a equação. (brincando com a aluna) Não entramos para o carro do outro!
Imagine que o outro lhe quer fazer mal. Hum?
(escreve no quadro enquanto verbaliza)
$\Leftrightarrow 2x = 8-1 \vee 2x = -8-1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \vee x = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow$, solução $S = \left\{-\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right\}$
Entendido?
Não entramos para o carro do outro!
Diga!
Miguel: A professora fez ali uma coisa.
E: Eu fiz o quê?
Miguel: A professora multiplicou por qual?
E: Eu multipliquei o quê?
Miguel: O "menos" por quanto? Dá o quê?
E: Eu multipliquei ambos os membros por -1. O módulo fica positivo e o -8 também.
Miguel: Ah sim, eu julgava que ficava -2x menos 1, menos por mais....
E: Outro! Outro! Módulo, quietinho! Tudo o que está dentro do módulo não se toca! É intocável!
Miguel: Multipliquei pelo -8…
E: … E pelo módulo. O módulo estava "menos módulo" e passou a estar "mais módulo". Sim, Miguel? Sim? Ou não?
Miguel: Sim.

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

No episódio anterior a professora tratou em solitário um exemplo espontâneo que apresentou aos alunos como padrão do processo de resolução de uma equação que incluísse um módulo. O exemplo cujo tratamento vem apresentado neste episódio, embora proposto também pela professora de forma espontânea, é tratado pelos alunos. O efeito que teve este tratamento – não totalmente autónomo – do exemplo foi provocar o surgimento das primeiras dúvidas. Ora este aspecto é aquele que sobressai dos exemplos, neste caso *Exemplo Espontâneo de Processo*, que se incluem na 2ª Categoria, **Abordagem Inicial Autónoma**.

O episódio contém alguns traços do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** evidenciados pela professora no tratamento deste exemplo.

Claramente CPC:

- para incutir nos alunos o aspecto principal da resolução de equações com módulos, a professora dá indicações que evidenciam a necessidade de isolar o módulo antes de desdobrar a equação (Cat. **Estratégias de Ensino**): "*E depois? Já tenho o módulo sozinho? Já posso fazer todo o desdobramento?*"; "*Já tenho o módulo, com coeficiente 1, fazemos o quê? O desdobramento.*"
- a professora reconhece o erro comummente cometido pelos alunos neste conteúdo em especial, fazer $-\left|A(x)\right|=\left|-A(x)\right|$ e toma medidas para que os alunos debelem a tendência para o cometerem (Cat. **Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas**): "*Outro* [aluno]! *Outro* [aluno]! *Módulo, quietinho! Tudo o que está dentro do módulo não se toca! É intocável!*"
- embora não haja uma frase que se destaque, a ênfase que se dá ao isolamento do módulo e a não validade da igualdade $-\left|A(x)\right|=\left|-A(x)\right|$ transmitem as principais dificuldades do processo de resolução deste tipo de condições (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**)
- explica a um aluno como *desaparece* o sinal negativo que está a afectar o módulo (Cat. **Explicações**): "*Eu multipliquei ambos os membros por -1. O módulo fica positivo e o -8 também.*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- pelas perguntas que coloca, a professora fracciona as etapas do processo de resolução da equação com módulo, tratando-as de forma isolada (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): " (…) *digam-me lá qual é o primeiro passo que eu devo dar na resolução daquela equação.*"; "*Já tenho o módulo sozinho?*"; "*Contem lá. Como que é que fazemos ali ao* **menos***?*"

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- no início do episódio a professora dá indicação do tipo de equação que vai desenvolver. Esta indicação está relacionada com o último comentário do episódio anterior (episódio 43) (Cat. **Objectivos da Aprendizagem**): "*Então, alterando ali um bocadinho, para vos explicar o que eu dizia há bocado…*"
- baseia toda a evolução do tratamento do exemplo numa troca de perguntas e respostas. Um dos objectivos deste diálogo é obter e conservar a atenção dos estudantes (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**)
- durante o diálogo, coloca perguntas de controlo aos alunos, de forma a avaliar as aprendizagens. Interage com os alunos de forma menos formal de forma a promover um bom ambiente de trabalho (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**)

Uso do Exemplo

Este *Exemplo Espontâneo de Processo* distingue-se do exemplo do episódio anterior pelo sujeito da acção e pela existência de uma *Variação* que envolve a existência de um coeficiente do módulo diferente de 1. Este exemplo é tratado pelos alunos, embora com a introdução de pistas por parte da professora. A essência deste exemplo de resolução de uma equação com módulo radica na aplicação do método introduzido anteriormente, que a professora apresentou no episódio anterior e que se resume a: apenas podemos desdobrar o módulo quando este estiver *sozinho*, isto é, possuir coeficiente 1. As frases da professora, "*E depois? Já tenho o módulo sozinho? Já posso fazer todo o desdobramento?*" e "*Já tenho o módulo, com coeficiente 1, fazemos o quê? O desdobramento.*" é bem ilustrativa dessa *receita* que orienta todo o processo.
Os alunos perceberam e interiorizaram o método de resolução deste tipo de equação. Contudo, uma aluna e um aluno mostram alguma dificuldade. A dificuldade a que nos referimos é bem conhecida por qualquer professor, a vontade que alguns alunos demonstram em introduzir o sinal de " – " no módulo, multiplicar o argumento por -1. Esta dificuldade é esperada pelos professores mais experientes, e este tipo de exemplo destina-se, justamente, a que este tipo de dificuldades surja nas primeiras abordagens a este tipo de equações em que os alunos se envolvem: "*Mudamos os sinais dentro do módulo.*", tal como diz a aluna.
Depois de explicar que o módulo, na equação, deve ser isolado pela aplicação das regras de resolução de equações de 1º grau, depois de isolado o módulo e desdobrada a equação em duas, ambas são resolvidas e, no fim, é apresentado o conjunto solução.
Veja-se que, já após a determinação da solução, ainda há um aluno que apresenta a mesma dúvida:"*Ah sim, eu julgava que ficava -2x menos 1, menos por mais....*", ao que a professora, para reiterar como forma alternativa que o sinal de " – " não pode ser introduzido no módulo, afirma: "*Módulo, quietinho! Tudo o que está dentro do módulo não se toca! É intocável!*" Aliás, este tipo de erro, por ser muito comum, era espectável pela professora e já tinha sido objecto de referência anteriormente.

Também é de assinalar uma outra forma, uma analogia, que a professora encontrou para indicar aos alunos que o sinal " – " não deve ser introduzido no módulo: "*Não entramos para o carro do outro!*". Além de contrariar esta tendência errónea dos alunos de forma explícita, também o faz utilizando outros recursos que não são estritamente matemáticos, para reforçar a mensagem a transmitir.

Na perspectiva da *Variação*, a professora explora uma *Dimensão de Variação Possível*, o coeficiente que acompanha o módulo que a condição inclui. A *Amplitude de Mudança Permitida* abrange qualquer valor real diferente de zero, mas neste exemplo a professora decidiu utilizar o real -1.
A conjugação de dimensões de variação a utilizar e as respectivas amplitudes de mudança irão jogar um papel primordial na *Ampliação do Espaço de Exemplos* dos alunos.

Esmeralda: **Episódio 45**
Dia: **2 Março 07**

Início: **LB 03 min 13 Seg.**
Fim: **LB 6 min 50 Seg.**

Exemplo espontâneo tratado pelos alunos e pela professora

(A professora faz uma revisão sobre a noção de módulo de um número real com os alunos)
Esmeralda: Vamos lá rebobinar, nós ontem dissemos o quê? … o módulo de -6 era 6, o módulo de… não me lembro. Pronto, não interessa. O módulo de 3 é 3, o módulo de -3 é 3, o módulo de raiz quadrada de 3 é raiz quadrada de 3, o módulo de menos raiz quadrada de 3…
Aluno: … é raiz quadrada de 3.
E: O módulo de zero…?
Alunos: …é zero.
E: Então, depois nós escrevemos uma conclusão, quando estivemos a resolver aquela actividade de reflexão, o que é que nós dissemos acerca disto? Que o módulo era sempre…
Aluna: …que trocava de sinal se era negativo e igual a si próprio se era positivo.
E: Então, resumindo isso, qual é o sinal que resulta do módulo?
Alunos: Mais.
E: Mais. Ou…?
Aluna: Zero.
E: Zero. Há algum módulo… você diz: o módulo de 6 é -6? Diz? Não!
Diz que o módulo de -7 é -7? Ah!
Então, há lá "menos"?
Alunos: Não
E: Não!
Lembrem-se do que me acabaram de dizer! Ouviram bem o que disseram?
(a professora apaga o quadro e escreve no quadro a seguinte equação:

$$-2|x-5|=3$$

E: Como é que eu resolvo este exercício?
Aluna: Tem que tirar o -2
E: E para onde é que o atiro? (…) Para a braseira!
(risos dos alunos e da professora)
Aluna: (…) a dividir.
E: Ah! Ah! (verbaliza enquanto escreve) $\Leftrightarrow |x-5|=-\frac{3}{2}$.
E agora?
Outra aluna: Agora…
E: E agora…?
Rui: Resolve-se!
E: Resolve-se, diz o Rui.
Ana: … fazendo o desdobramento.
E: Resolve-se fazendo o desdobramento, diz a Ana.
É? Agora fazemos o desdobramento?
(uma aluna e um aluno referem que o número não pode ser negativo)
E: A Inês lançou daqui que… e o Mário… não pode ser negativo. E o que é que vocês acham?
(silêncio prolongado)
E: Então o que é que me responderam *antes* de eu escrever o exemplo?
Aluna: (…) o que lá está dentro com sinal menos ou com o sinal mais. Mas este tem sinal menos.

E: Então…? Qual é a solução?
(os alunos respondem simultaneamente de forma confusa, ouvem-se palavras como "impossível" e "não tem")
E: Quando uma equação é impossível, qual é a solução?
Aluno: O conjunto fechado.
E: O…?
Aluno: Conjunto fechado.
E: Conjunto fechado!?
Quando uma coisa não tem solução, qual é a sua solução?
Aluno: É impossível…
E: É impossível! Mas qual é o conjunto solução? Como é que eu encontro o conjunto solução? … de uma coisa impossível.
Aluna: É uma coisa aberta sem nada lá dentro.
E: Uma coisa aberta sem nada lá dentro.
Aluna: É uma bola com um risco.
E: E isso como se chama?
Alunos: Conjunto vazio.
E: Conjunto vazio. Portanto, isto que está aqui (aponta para $\Leftrightarrow |x-5| = -\frac{3}{2}$) é impossível, a solução é igual ao conjunto vazio. *Uma coisa sem nada lá dentro*. Espectáculo!

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

A classificação deste exemplo não é tão linear como os anteriores. O exemplo tratado no episódio é claramente espontâneo mas a situação, da qual o exemplo é um elemento vital, já não é espontânea. Este exemplo, ao contrário do anterior, é tratado pelos alunos; porém, o papel da professora é crucial, pois conduz o trabalho dos seus estudantes ao longo do tratamento de todo o exemplo.
A situação criada, cuja descrição se faz à frente na forma como o exemplo é usado, tem um objectivo bem preciso, e esse objectivo é levar os alunos a um caso muito concreto: o caso em que se obtém a igualdade de um módulo com um real negativo. Os conflitos criados suscitam dúvidas, as dúvidas e os conflitos são resolvidos e, no final, estabelecem-se regras para a notação. O *Exemplo Espontâneo de Processo* insere-se, por tudo isto, na 3ª Categoria: **Esclarecimento e Aprofundamento**.

Contudo, o episódio contém alguns traços do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** evidenciados pela professora no tratamento deste exemplo.
Claramente CPC:

- como forma de tratar um caso muito particular de equações com módulos, a professora estruturou o episódio em três fases (ver uso do exemplo) para melhor aprendizagem dos alunos (Cat. **Estratégias de Ensino**).
- na fase final do uso do exemplo, quando a professora pretendia a solução da condição, as perguntas colocadas aos alunos pretendiam que eles relacionassem a impossibilidade da igualdade com o seu conjunto solução, o conjunto vazio (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*É impossível! Mas qual é o conjunto*

solução? Como é que eu encontro o conjunto solução? ... de uma coisa impossível."

- a dificuldade que os alunos encontraram, no final do episódio, em apresentar a solução vazia não pode ser considerada uma dificuldade cognitiva, antes uma lacuna na sua aprendizagem. A exigência cognitiva mais marcante do exemplo proposto é a igualdade que se obtém entre um módulo e um real negativo e a respectiva interpretação à luz de uma solução da condição (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*Mas este tem sinal menos.*"
- a professora, sem qualquer dificuldade, propõe um exemplo que se enquadra na sua estratégia e no seu objectivo (Cat. **Conhecimento de Exemplos**): " (…) $-2|x-5|=3$. *Como é que eu resolvo este exercício?*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- no tratamento deste exemplo, a professora deixo clara a impossibilidade da igualdade que se obteve. Esta evidência de impossibilidade radica na separação dos dois elementos da equação e o seu sinal: positivo, no caso do módulo; negativo no caso do real $-\frac{3}{2}$ (Cat. **Desmonta o conteúdo em Componentes Chave**): "*Lembrem-se do que me acabaram de dizer! Ouviram bem o que disseram?* [os módulos são sempre positivos]"; "*A Inês lançou daqui que… e o Mário… não pode ser negativo. E o que é que vocês acham?*"

Nota: repare-se no cuidado que a professora põe, no final do episódio, em tratar o sentido do *Conjunto Vazio* na condição, o seu significado e a forma de estabelecer a sua notação. Tudo isto se prende com o rigor de linguagem e de notação que a disciplina obriga.

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- a professora, no inicio do episódio, tem bem claro qual o objectivo da estratégia que estruturou, qual a aprendizagem que com ela os alunos deveriam conseguir (Cat. **Objectivos da Aprendizagem**)
- a forma dialogante como a professora desenvolve dentro do episódio mantém os alunos atentos e activos (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção dos Alunos**)
- no início do episódio, antes de introduzir o exemplo, a professora situa os alunos na actividade que seguirá: "*Vamos lá rebobinar, nós ontem dissemos o quê? ... o módulo de -6 era 6, o módulo de…*". Depois de tratar o exemplo, estabelece um final, neste caso, o conjunto solução da equação: "*Conjunto vazio. Portanto, isto que está aqui* (aponta para $\Leftrightarrow |x-5|=-\frac{3}{2}$) *é impossível, a solução é igual ao conjunto vazio.*" (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**)

Uso do Exemplo

Este episódio contempla o uso de um exemplo que evidencia a experiência da professora na leccionação deste conteúdo. Como se disse atrás, na classificação do exemplo, o exemplo $-2|x-5|=3$ foi apresentado de forma espontânea, mas a situação foi planeada. A professora sabe que há um caso de uma equação, em que o primeiro membro é um módulo e o segundo membro é um número negativo, que deve ser tratado de forma individualizada.

Veja-se que o uso deste exemplo tem três etapas bem definidas. Na primeira, a professora deixa estabelecido que um módulo não pode ser negativo. Na segunda, após a apresentação deste exemplo, gera-se o conflito de ter uma igualdade que contraria aquilo que foi afirmado na primeira etapa. Na terceira e última etapa, resolve-se o conflito criado, os alunos apercebem-se da impossibilidade, e apresenta-se o conjunto solução.

O uso do exemplo induz um conflito cognitivo nos alunos. Porém, o conflito não é imediato. Há um aluno que perante a equação $|x-5|=-\frac{3}{2}$ e a pergunta da professora "*E agora?*", responde, simplesmente, "*Resolve-se*". Para o Rui o caso era simples, como o módulo estava isolado aplica-se o caso geral. Esta posição é totalmente apoiada pela aluna Ana "*...fazendo o desdobramento.*" Só posteriormente, a Inês e o Mário se apercebem da igualdade entre o módulo $|x-5|$ e $-\frac{3}{2}$. A professora chama a atenção para o problema destes dois alunos: "*A Inês lançou daqui que… e o Mário… não pode ser negativo. E o que é que vocês acham?*" O silêncio que se seguiu foi elucidativo que nenhum aluno sabia o que responder. Uma aluna afirma "*Mas este tem sinal menos*"

Por um lado, eles sabem que os módulos são sempre positivos mas, por outro, têm uma igualdade que afirma que o módulo é negativo, $|x-5|=-\frac{3}{2}$ e devem procurar o valor real que satisfaz a condição. Esta situação configura a situação descrita por Zazkis e Chernoff (2008), e o exemplo apresentado pela professora é um *Exemplo Fulcral* porque provoca o conflito, houve um ponto de viragem porque notam algo de novo na sua percepção cognitiva, algo que os confunde. Uma expressão que iguala um módulo a um real negativo afinal tem significado, contrariamente à crença dos alunos até então. Nenhum módulo pode ser negativo.

A resolução do conflito surge quando os alunos se apercebem que a expressão que enfrentam é uma condição, e elas podem ser impossíveis. Esta resolução parece ser simultânea em muitos alunos (*os alunos respondem simultaneamente de forma confusa, ouvem-se palavras como "impossível" e "não tem"*), assim, nos alunos, o exemplo também promoveu uma *evolução conceptual*, isto é, o conflito que surgiu evolui para uma situação familiar, a de condição impossível. Seguindo novamente Zazkis e Chernoff (2008), quando o exemplo promove a evolução conceptual, referimo-nos a ele como sendo um *Exemplo Fulcral-Ponte*, ou simplesmente, *Exemplo Ponte*.

Resolvido o conflito, facilmente os alunos indicam a sua solução como sendo o Conjunto Vazio. A forma de representar esse conjunto levantou, como já se referiu, as suas dificuldades com a notação, mas esse aspecto prende-se com o facto do exemplo levantar certas dificuldades e, tal facto, integra-o na 3ª categoria, como também já foi explicitado.

A professora inicia o episódio situando os alunos na definição de Função Módulo e nas suas características. Para isso, opta por dar exemplos simples de módulos de números

reais e, ao fazê-lo recorre a uma *Variação Possível* da única *Dimensão* que neste momento dispõe, variar o número sobre o qual se aplica o módulo. Ao estabelecer a variação, a professora percorre alguns elementos da *Amplitude de Mudança Permitida*, foram os números reais -6, 3, -3, $\sqrt{3}$ e o 0. Repare-se que a amplitude apenas não contemplou os números fraccionários. Por fim, recorda de forma indutiva a definição de função módulo, dados os elementos particulares parte para a definição:
"**Esmeralda:** (…) *o que é que nós dissemos acerca disto? Que o módulo era sempre…?*
Aluna: *... que trocava de sinal se era negativo e igual a si próprio se era positivo.*"

Esmeralda: **Episódio 46**
Dia: **2 Março 07**

Início: **LB 7 min 53 Seg.**
Fim: **LB 38 min 20 Seg.**

Sequência de Exemplos planeada tratada pelos alunos

Esmeralda: … cá vai. Enunciado:
(…)
Resolva analiticamente… resolva analiticamente as seguintes equações.
Olhem, eu vou passar umas quantas, o que nós resolvermos aqui, resolvemos. O que não resolvermos aqui, fazem depois em casa. Está bem? Para ficar, porque o vosso livro tem muito pouca coisa sobre isto.

1.	$\left\|x+\frac{2}{3}\right\|=5$	2.	$\|2-3x\|=1$
3.	$4-\|x+1\|=-5$	4.	$\left\|\sqrt{7}-2x\right\|-2=0$
5.	$\|2x+1\|=0$	6.	$\|-x-2\|=-4$

Olhem, alterem aqui, se faz favor, vocês vão pôr isto… vamos colocar aqui um 5. Na segunda, antes do módulo, um 5 (o segundo exemplo passa a ser $5\|2-3x\|=1$).
(pausa para os alunos trabalharem os exemplos)
E: Rita, Já tem a primeira feita? Vá lá fazer ao quadro, se faz favor.
(a aluna vai ao quadro para resolver a primeira equação. Escreve:

$$\left|x+\frac{2}{3}\right|=5 \Leftrightarrow x+\frac{2}{3}=5 \vee x+\frac{2}{3}=-5 \Leftrightarrow$$
$$x=\frac{15}{2} \vee x=-\frac{15}{2}$$
)

E: (ao apoiar individualmente uma aluna no exemplo 2) Hum, Hum. Foi isso que eu disse? Foi? Não!
Miguel! O que é que foi que eu há bocado lhe respondi em relação ao que ficava dentro do módulo?
Miguel: Não se lhe tocava.
E: Ouviu? Intocável!
Aluna: (imperceptível)
E: Ah! Então o que é que vai fazer a esse valor?
Aluna: Vou multiplicar.
E: Multiplicar por quê? Se o que está lá dentro é intocável, você multiplica por quê, rapariga? Não é multiplicar…
(dirigindo-se à aluna que está no quadro, a Rita, que já acabou de resolver o exemplo 5.1)
O que é que se passa aí à frente? Isso foi demasiado rápido para a cabeça de qualquer um! Como é que já sabe que dão essas soluções?
Rita: Porque eu pus o 3 a multiplicar e o 2 a dividir.
E: Ah! Então olhe: ding, dong. Está mal.
Rita: Pois é. Era o que ela me estava a dizer.
E: Pois é. Eu tenho aí… Você não sabe resolver equações? Você teve um 17 no último teste e você não sabe resolver equações!?
Rita: 18.
E: Um 18?! Ainda se está a afundar mais!
A (…) ainda vais ser maior!
"x mais". Se eu quero isolar o x, o que é que eu faço ao "$+\frac{2}{3}$"?
Rita: Passa para o outro lado a subtrair.

E: Ah. Boa! Então é a multiplicar?
(a Rita apaga a última passagem)
E: Ai por favor! Vocês cada vez me entristecem mais. Um 18! Você vai ver. Você vai ver o estampanço!
(a Rita escreve $x = 5 - \frac{2}{3} \vee x = -5 - \frac{2}{3}$)
E: Só estudam para os testes.
O que está a escrever?
Ah, já está a fazer o cálculo. É uma rapariga muito despachada.
(a Rita conclui $x = \frac{13}{3} \vee x = -\frac{17}{3}$)
E: (brincando) Agora temos que ajudar ali a Marta, que a Marta está ali quase a suicidar-se. Está quase a atirar-se para dentro do automóvel. E leva a Ana com ela. Leva, leva. Uma arrasta a outra.
(a Rita escreve o conjunto solução $S = \left\{\frac{13}{3}\right.$)
E: Lindinha, primeiro os negativos! Ordem crescente. Convém.
(a Rita reformula e escreve $S = \left\{-\frac{17}{3}; \frac{13}{3}\right\}$)
Ainda que possa indicar as soluções, mas quando tem sete ou oito, deve indicar tudo por ordem crescente. Toda a gente chegou a esta conclusão? Brilhante!
(enquanto transcrevem, a professora brinca com uma aluna)
E: Então podem começar a pensar no exercício 2. porque eu acho que a Marta está ali dependurada. Que eu ainda não a ajudei, precisa de ajuda urgente.
(pausa)
E: Então ajudem lá ali a vossa colega! No segundo exercício nós temos: 5 módulo de, 2 menos 3x, igual a 1. Ela está ali com problemas. Ela está ali numa luta com o 5, que vocês nem imaginam.
O que é que ela faz a este 5?
(as respostas de vários alunos não se percebem. As respostas sobrepõem-se.)
E: Ouviram ali a Filipa? (brincando) Que nunca diz nada de jeito, hoje está inspirada!
Filipa: Há bocado acertei!
E: Muito bem! Estou a gostar!
E você? Isso é o quê? Temos dois anos? Estamos na Pré [primária] (…)
(risos)
E: Ora o 5 está a multiplicar pelo módulo, vai passar para o segundo membro a dividir. E só depois, é que eu vou poder… fazer o quê Carina?
Carina: (imperceptível, mas sem sentido para a professora)
E: (censura a Carina) É natural. Vocês estão na aula com a cabeça noutro sítio!
Assim ninguém aprende matemática. Matemática aprende-se seguindo os raciocínios do professor. E aquilo que ele diz. (…) Ora, recapitulando: Eu tenho, 5, módulo, igual a 1. E se disse a Filipa, e muito bem, que o 5 vai passar para o segundo membro a dividir. Fica um quinto. O que é que se faz a seguir, depois de ter já o módulo sozinho?
Alunos: O desdobramento.
E: O desdobramento. Então vá. Toca a andar!
(dirige-se a um aluno) Já fez? Já? Então vá fazer Simão.
(o Simão escreve: $5|2-3x| = 1 \Leftrightarrow |2-3x| = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 2-3x = \frac{1}{5} \vee 2-3x = -\frac{1}{5}$ mas os caracteres muito próximos uns dos outros)
E. Qual é que é a discussão?
Aluna: É que ele junta tudo.
E: Simão, afaste um bocadinho mais aí essas coisitas. Se faz favor. Imagine que eu estava aí, e despejava tudo assim como se fosse um camião, isso depois assim era uma grande confusão. Então, temos que fazer assim para todos. Inclusive assim para as exigentes como a Inês. Não fazem nada de jeito, mas é exigente. Pronto.
(o Simão reescreve a passagem de forma mais clara)

E: O que é que se passa? Já Chega. Não vos podemos dar um bocadinho de…
Mostramos um bocadinho os dentes, pronto. Já apanharam as dentaduras. A de cima, a de baixo, a do meio, a boca. Tudo.
(apoia os alunos individualmente enquanto o Simão escreve:
$-3x=\frac{1}{3}-2 \vee -3x=-\frac{1}{3}-2 \Leftrightarrow -3x=\frac{1}{3}-\frac{10}{5} \vee -3x=-\frac{1}{3}-\frac{10}{5} \Leftrightarrow$)
E: Vamos lá ver se o que o Simão tem ali está certo.
Então Simão, não tem espaço em baixo?
Simão: E depois eu não sei se aí atrás…
E: É? Então vá. Ora vejamos, um quinto, menos dois menos dez, dá menos… menos nove quintos. E depois, menos um quinto, menos dois, menos onze quintos.
(…)
Primeiro passam-se as contas, Miguel. Só depois os produtos. Ouviu bem? Miguel?
Miguel: Sim.
(O Simão continua a resolver $-3x=-\frac{9}{5} \vee -3x=-\frac{11}{5} \Leftrightarrow x=\frac{9}{15} \vee x=\frac{11}{15}$)
E: Há dúvidas no que o Simão está a fazer? Ou não? Não
(por fim, o Simão indica a solução $S=\left\{\frac{9}{15};\frac{11}{15}\right\}$)
E: Muito bem. Obrigada.
(fala com outra aluna) Vai dar tempo, e depois vai fazer o outro.
(pausa para os alunos trabalharem)
E: Já passaram o que está no quadro? Então faça o favor!
(um aluno vai ao quadro para resolver a equação seguinte: $4-|x+1|=-5 \Leftrightarrow -|x+1|=-\frac{5}{4}$)
E: Rui, errado. Onde é que está o erro?
(vários alunos apontam o erro)
E: Ah! Muito bem! Porque o 4 não está a multiplicar, meu querido. É “+4”.
Então fica, “menos 5….”?
João: …mais quatro.
E: Menos quatro! Está “+4” João! Menos 5, passa à operação inversa, “-4”.
(o Rui apaga e escreve: $4-|x+5|=-5 \Leftrightarrow -|x+1|=-5-4 \Leftrightarrow |x+1|=5+4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x-1=$
E: Não apague. Basta só colocar o módulo e igual a 9. E depois faz o desdobramento.
(o Rui escreve $\Leftrightarrow |x+1|=9$)
E: Isso! Nove. E agora faz o desdobramento.
(a resolução continua com $\Leftrightarrow |x+1|=9 \Leftrightarrow x+1=9 \vee x+1=-9 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=9-1 \vee x=-9-1 \Leftrightarrow$
E: Está tudo bem até ali?
(nenhum aluno se manifesta e o Rui termina com: $\Leftrightarrow x=8 \vee x=-10$ e $S=\{-10;8\}$)
E: Deu assim? (…) Ora, -10 e 8. O que é que acham? Está bem, ou não? Está?
Muito obrigado!
(…)
Já está o outro a seguir? Vá lá, vocês o que querem é conversa!
O próximo (…)
Já está o 4.? Vá lá, faça o favor.
(uma aluna vai resolver: $\left|\sqrt{7}-2x\right|-2=0$)
E: Olhem, como só já nos vamos ver na segunda-feira, então, além do que não fizermos do que eu passei no quadro, vão levar: da página 131, o exercício 1.3, (…); página 138, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4. E acabar os que não fizermos aqui.
(a aluna tem no quadro: $\left|\sqrt{7}-2x\right|-2=0 \Leftrightarrow \left|\sqrt{7}-2x\right|=0 \Leftrightarrow \sqrt{7}-2x=0 \vee \sqrt{7}-2x=0$)

E: Ora, portanto, vamos lá a ver se o que a Ana está a fazer está correcto.
Oh Ana, tu viste? Olhem lá bem, bem, para o quadro. Está correcto o que a Ana fez?
(a Ana apercebe-se do erro e altera:

$$\left|\sqrt{7}-2x\right|-2=0 \Leftrightarrow \left|\sqrt{7}-2x\right|=2 \Leftrightarrow \sqrt{7}-2x=2 \vee \sqrt{7}-2x=-2\text{)}$$

(…)
E: Certo! Já estava a ficar baralhada. E agora?
Rui, já está este? E o próximo, também?
(a Ana escreve no quadro $\Leftrightarrow -2x=\frac{-2}{\sqrt{7}}$)
E: Oh, Oh! Está certo o que a Ana fez?
Alunos: Não.
(a Ana apaga a última passagem)
E: Então o que é que estava mal?
(a Ana corrige e escreve $\Leftrightarrow -2x=2-\sqrt{7} \Leftrightarrow$)
E: Realmente, se calhar, se eu me sentasse ao pé de si e fizesse assim "Oh, Oh", você percebia o que estava a fazer de errado e voltava atrás. Não é? Olhe, já aí está outro!
Ana: Aonde, professora? Eu já não sei o que estou a fazer!
E: Então (imperceptível). Olhe, é muito fácil, nós podemos, consoante vocês levarem os exercícios! Não é?
Se a menina tivesse feito assim… quer ver? Equivalente, e, tem uma equação, ou, outra equação; eu já não me perdia (a professora indica que, no quadro, convém resolver as equações na vertical de forma que, em cada passagem, as duas equações separadas pelo símbolo $\vee$ fiquem alinhadas). Digo eu. Ou se tivesse a noção do que estou a fazer, "cabecinha no ar".
(a Ana apaga a última passagem e reescreve com a seguinte disposição:

$$\left|\sqrt{7}-2x\right|-2=0 \Leftrightarrow \left|\sqrt{7}-2x\right|=2 \Leftrightarrow \sqrt{7}-2x=2 \vee \sqrt{7}-2x=-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x=2-\sqrt{7} \vee -2x=-2-\sqrt{7} \Leftrightarrow\text{)}$$

E: Ora viu? Depois de *levar nas orelhas* já se faz tudo direito!

$$\text{(}x=\frac{2-\sqrt{7}}{-2} \vee x=\frac{-2-\sqrt{7}}{-2}\text{)}$$

E: -2 mais raiz de 7, sobre 2. Não dá para simplificar mais nada.
(a professora verbaliza enquanto a Ana escreve: $x=\frac{-2+\sqrt{7}}{2} \vee x=\frac{2+\sqrt{7}}{2}$)
(um aluno refere uma simplificação)
E: Como?
Aluno: Corta-se o 2 de baixo com o de cima.
E: Ai, ai, ai, ai! Só podemos fazer esse tipo de simplificações quando há produtos!
Então fica: 2 mais raiz de 7… faz-lhe lá mal a raiz de 7?
Ana: Não.
E: Pronto. Ainda bem. … sobre 2.
Solução, ali ao lado.
Assim não cabe, tem que ser mais para o lado. Mais, você tem uma letra grande.
Conjunto… ora aquele primeiro, que é mais pequeno. -2 mais raiz de 7, sobre 2; sete, ai, ai! …sobre 2 e 2 mais raiz de 7… sete! …
Ana: Eu troco os números todos.
E: mas não tem que trocar os números todos. Só tem é que copiar!
Até a copiar é trapalhona!
Pronto.
(o aspecto final do exemplo quando acabado ficou:

$$\left|\sqrt{7}-2x\right|-2=0 \Leftrightarrow \left|\sqrt{7}-2x\right|=2 \Leftrightarrow \sqrt{7}-2x=2 \vee \sqrt{7}-2x=-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x=2-\sqrt{7} \vee -2x=-2-\sqrt{7} \Leftrightarrow\text{)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2-\sqrt{7}}{-2} \vee x = \frac{-2-\sqrt{7}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$S = \left\{ \frac{-2+\sqrt{7}}{2}; \frac{2+\sqrt{7}}{2} \right\} \Leftrightarrow x = \frac{-2+\sqrt{7}}{2} \vee x = \frac{2+\sqrt{7}}{2} \qquad)$$

Fim da Transcrição

Classificação dos Exemplos da Sequência e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

A sequência que se trata neste episódio tem como objectivo que os alunos adquiram solidez no processo de resolução de equações com ***um módulo***. Na resolução de cada exemplo a professora espera que alguma dificuldade surja e que possa ser, de imediato, esclarecida. O trabalho com cada um dos exemplos é feito pelos alunos e o papel da professora, neste episódio, consiste em proporcionar apoios pontuais a todos os alunos que o requeiram. Este papel é um pouco diferente com o aluno que trabalha o exemplo no quadro, com ele a professora funciona de forma geral, como se esse aluno representasse toda a turma, esclarecendo e destacando os aspectos mais problemáticos ou mais importantes. Por tudo isto, cada um dos cinco exemplos da sequência é, claramente, um *Exemplo Planeado de Processo* da 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**.
O exemplo que constitui excepção é o exemplo número 2, aquele que foi alterado logo no início do episódio. Por razões que à frente se mencionam, o exemplo planeado $|2-3x|=1$ foi eliminado da sequência e substituído pelo exemplo $5|2-3x|=1$. Assim, este último integra-se do mesmo modo na 3ª categoria, mas como *Exemplo Modificado de Processo*.

O episódio abrange alguns aspectos do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** demonstrados pela professora no tratamento deste exemplo.
Claramente CPC:

- a professora usa duas metodologias que visam minimizar os erros dos alunos na resolução de equações com um módulo. A primeira consiste em que o aluno isole a parcela que contém o módulo e o faça com coeficiente 1. A outra metodologia propõe-se impedir que qualquer valor seja introduzido no módulo, isto é, não aplicar a regra $k|A(x)|=|kA(x)|$ por não ser sempre verdadeira (Cat. **Estratégias de Ensino**) respectivamente: "*O que é que se faz a seguir, depois de ter já o módulo sozinho?*" e "*Miguel! O que é que foi que eu há bocado lhe respondi em relação ao que ficava dentro do módulo?* **Miguel:** *Não se lhe tocava.*"
- estabelece com o aluno uma espécie de *código* pela utilização de *frases chave* que, após um erro, reconduzem o aluno aos procedimentos correctos (exemplo 1) (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*Se eu quero isolar o x, o que é que eu faço ao "*$+\frac{2}{3}$*"?* **Rita:** *Passa para o outro lado a subtrair.*"

- No exemplo número 6, depois de se obter o resultado $x=\frac{-2+\sqrt{7}}{2}\vee x=\frac{2+\sqrt{7}}{2}$, um aluno propõe uma simplificação que a professora reconhece imediatamente como um erro muito comum entre os alunos, por isso usa o "*ai, ai, ai!*" (Cat. **Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas**):
  "**Aluno:** *Corta-se o 2 de baixo com o de cima.*
  Esmeralda: *Ai, ai, ai, ai! Só podemos fazer esse tipo de simplificações quando há produtos!*"
- para poder percorrer uma *variação* que considera correcta, a professora altera um dos exemplos para que melhor se adeqúe às suas pretensões (Cat. **Conhecimento de Exemplos**): "*Olhem, alterem aqui, se faz favor, vocês vão pôr isto… vamos colocar aqui um 5. Na segunda, antes do módulo, um 5.*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- ao escolher uma sequência de exercícios que se adeqúem aos objectivos de tarefa que propõe aos alunos, a professora sabe quais os aspectos a vincar e a evidenciar (Cat. **Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental**)
- tal como em episódios anteriores, a professora insiste em dois pontos. Primeiro isolar o módulo e não introduzir qualquer valor dentro do módulo e, depois, desdobrar a equação em duas (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**)

Nota: existem dois momentos que demonstram a preocupação da professora com o rigor, seja de linguagem, seja de utilização correcta do quadro.

<u>Num primeiro momento</u>, a aluna estava a escrever o conjunto solução, indicando dentro das chavetas, primeiro o número maior:

"$S=\left\{\frac{13}{3}\right.$

Esmeralda: *Lindinha, primeiro os negativos! Ordem crescente. Convém.*

(a Rita reformula e escreve $S=\left\{-\frac{17}{3};\frac{13}{3}\right\}$)

Esmeralda: *Ainda que possa indicar as soluções, mas quando tem sete ou oito, deve indicar tudo por ordem crescente.*"

<u>Num segundo momento</u>, a professora chama a atenção para a confusão que está escrita no quadro:

"*Se a menina tivesse feito assim… quer ver? Equivalente, e, tem uma equação, ou, outra equação; eu já não me perdia* (a professora indica que, no quadro, convém resolver as equações na vertical de forma que, em cada passagem, as duas equações separadas pelo símbolo $\vee$ fiquem alinhadas). *Digo eu. Ou se tivesse a noção do que estou a fazer,* ***cabecinha no ar***.

(a Ana apaga a última passagem e reescreve com a seguinte disposição:

$$\left|\sqrt{7}-2x\right|-2=0 \Leftrightarrow \left|\sqrt{7}-2x\right|=2 \Leftrightarrow \sqrt{7}-2x=2 \vee \sqrt{7}-2x=-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x=2-\sqrt{7} \vee -2x=-2-\sqrt{7} \Leftrightarrow$$)

E: *Ora viu? Depois de* ***levar nas orelhas*** *já se faz tudo direito!*"

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- a sequência trazida pela professora pretende colmatar uma lacuna do manual. Segundo a professora, o manual utilizado não traz exemplos suficientes para aquilo que a professora considera indispensável, o que demonstra que a professora é bem consciente dos objectivos de aprendizagem para os seus alunos (Cat. **Objectivos da Aprendizagem**"): " (…) *resolva analiticamente as seguintes equações. Olhem, eu vou passar umas quantas, o que nós resolvermos aqui, resolvemos. O que não resolvermos aqui, fazem depois em casa. Está bem? Para ficar,* ***porque o vosso livro tem muito pouca coisa sobre isto***."
- quando a professora pede ajuda aos restantes alunos, fá-lo com a finalidade de chamar e conservar a atenção dos alunos. Enquanto dialoga com o aluno que está no quadro, mas requer a opinião dos demais, também procura o mesmo fim (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**): "*Então ajudem lá ali a vossa colega! No segundo exercício nós temos: 5 módulo de, 2 menos 3x, igual a 1. Ela está ali com problemas. Ela está ali numa luta com o 5, que vocês nem imaginam. O que é que ela faz a este 5?*"; "Ouviram ali a Filipa? (brincando) *Que nunca diz nada de jeito, hoje está inspirada!*"
- Como já se referiu, a professora procura que a informação presente no quadro esteja disposta de forma compreensível. Pede aos alunos, um por um, que vão ao quadro tratar cada um dos exemplos para verificar e avaliar as aprendizagens. Apoia individualmente cada aluno quando faz pausas para o trabalho individual. De tempos a tempos brinca um pouco com os alunos para proporcionar algum momento de descontracção (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**)

Uso do Exemplo

O episódio transcrito ilustra o uso de uma sequência de exemplos de processo, todos os exemplos são equações com **um módulo** em que os alunos rotinam a sua resolução e o cálculo dos respectivos conjuntos solução.
Os exemplos foram trazidos para a aula pela professora porque, nas suas palavras, o livro tem um número insuficiente de exemplos deste tipo: "*O que não resolvermos aqui, fazem depois em casa. Está bem? Para ficar, porque o vosso livro tem muito pouca coisa sobre isto.*" Nesta sequência é patente a *Variação* utilizada, cada caso tem uma característica diferente de todos os outros. Tal não aconteceu num primeiro momento, foi por isso que a professora optou por alterar o exemplo número 2: "*Olhem, alterem aqui, se faz favor, vocês vão pôr isto… vamos colocar aqui um 5. Na segunda, antes do módulo, um 5* (o segundo exemplo passa a ser $5|2-3x|=1$)." Repare-se que cada exemplo que se segue apenas se modifica um pormenor, e cada caso estabelece um exemplo em algo diferente dos anteriores. Em termos da variação que se obtém com esta sequência, podem ser distinguidas três *Dimensões de Variação Possíveis*, o coeficiente do módulo, a possibilidade de se desdobrar o módulo e a impossibilidade de um módulo ser negativo. Relativamente aos coeficientes dos módulos, os exemplos 1 e 2 eram do mesmo tipo, por isso a professora alterou o segundo de um coeficiente 1 (igual ao do primeiro exemplo) para um coeficiente 5; juntamente com o exemplo 3

obtém-se uma *Amplitude de Mudança Permitida* que vai focar os reais 1, 5 e -1. O exemplo 4 obriga a um desdobramento da equação em duas, obtendo-se, assim, duas soluções, enquanto o exemplo 5 não obriga a desdobramento por se procurar o zero do módulo. Por último, temos um caso semelhante ao caso tratado no episódio anterior, a impossibilidade de um módulo ser negativo e se obter o conjunto vazio como solução.
A preocupação com a *Ampliação dos Espaços de Exemplos* dos alunos fica, com esta sequência, resolvida. Os espaços de exemplos dos alunos contemplarão, após a sequência, todos os casos de resolução de equações com ***um módulo***, podendo a partir deste ponto apenas enriquecer este espaço com subtipos, mas não com novos exemplos de natureza diferente. Referimo-nos aos valores numéricos utilizados, mas até nesta *Dimensão* os exemplos foram suficientemente variados, desde valores naturais até valores irracionais.

Outro aspecto a focar no uso deste exemplo conecta-se com a estratégia que a professora tem vindo a usar em todos os episódios anteriores que incluem *exemplos de processo* de resolução de equações com módulos. Como se viu, a estratégia consiste em isolar o módulo e desdobrar de seguida a equação em duas:
"**Esmeralda:** (…) *O que é que se faz a seguir, depois de ter já o módulo sozinho?*
Alunos: *O desdobramento.*"
Esta estratégia tem-se revelado eficaz, no sentido em que tem ajudado os alunos no desenvolvimento do processo de resolver as equações com módulos. O método pode ser discutível, de um ponto de vista metodológico apela à mecanização. Contudo, a mecanização do processo só se estabeleceu após boa compreensão por parte dos alunos e este método – baseado na rotina/mecanização – apenas foi observado neste tipo de exemplos de processo.

Também nesta sequência se pode observar, no exemplo 2, o aparecimento de um pormenor que a professora tem deixado claro e evidenciado nos episódios anteriores que incluem *exemplos de processo* de resolução de equações com um módulo, não introduzir qualquer valor, positivo ou negativo, no módulo. Isto é, não usar a relação $k\left|A(x)\right| = \left|kA(x)\right|$ por ela não ser sempre verdadeira:
"**Esmeralda:** *Miguel! O que é que foi que eu há bocado lhe respondi em relação ao que ficava dentro do módulo?*
Miguel: *Não se lhe tocava.*
Esmeralda: *Ouviu? Intocável?*"

Por último, o uso do exemplo 4 trouxe à tona o erro muito comum de simplificar parcelas iguais que figuram no numerador e no denominador: "*Corta-se o 2 de baixo com o de cima.*" O termo utilizado pelo aluno foi "*corta-se*" e, de seguida, veja-se como a professora corrige simultaneamente o erro matemático e a falta de rigor na linguagem: "*Ai, ai, ai, ai! Só podemos fazer esse tipo de simplificações quando há produtos!*", altera o termo *cortar* para *simplificar*.

Esmeralda: **Episódio 47**
Dia: **9 Março 07**

Início: **LA 0 min 0 Seg.**
Fim: **LA 8 min 00 Seg.**

Manual: **Página 133**

Exemplos planeados tratados pelos alunos

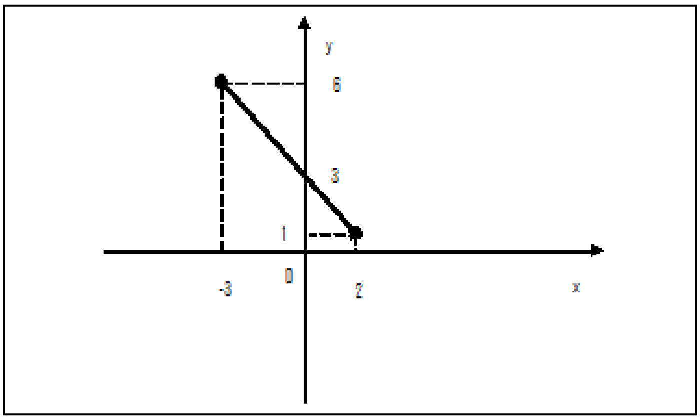
Esmeralda: Ora o exercício 1.1 e o 1.2 da página 133

1. Use a calculadora gráfica para representar graficamente a função g definida por:

1.1 $g(x) = |x-3|$ de domínio $[-3;2]$

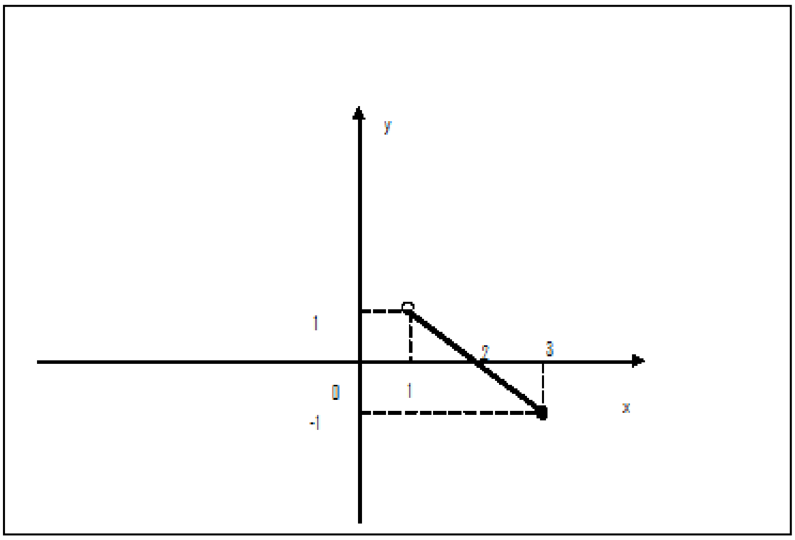
1.2 $g(x) = \begin{cases} |x-3|-1 & \text{se } x > 1 \\ x^2 & \text{se } -2 \le x \le 1 \end{cases}$

onde 1.1 é g de x igual ao valor absoluto de x-3, e o meu domínio é o intervalo de -3 a 2, este gráfico, eu acho (esboça o sistema de eixo cartesianos) que toda a gente o conseguiu fazer, pois. Chegaram à calculadora, escreveram o valor absoluto de x-3 … eu acho, até, que tínhamos feito cá um parecido… e depois viram no intervalo -3 a 2 o que é que acontecia. Empreste-me a calculadora, se faz favor.
(utilizando a calculadora gráfica que um aluno emprestou)
Ora, x menos 3, vai ali para o valor mínimo de x: -3. Valor máximo: 2. Pede-se o gráfico, agora vou à tabela, a imagem de -3 é 6 (marca o ponto no sistema de eixos). Depois a imagem de 2 é 1 (marca o ponto no sistema de eixos). Ora intersecta aqui no (0,3), (esboça o gráfico) e tinham este gráfico.

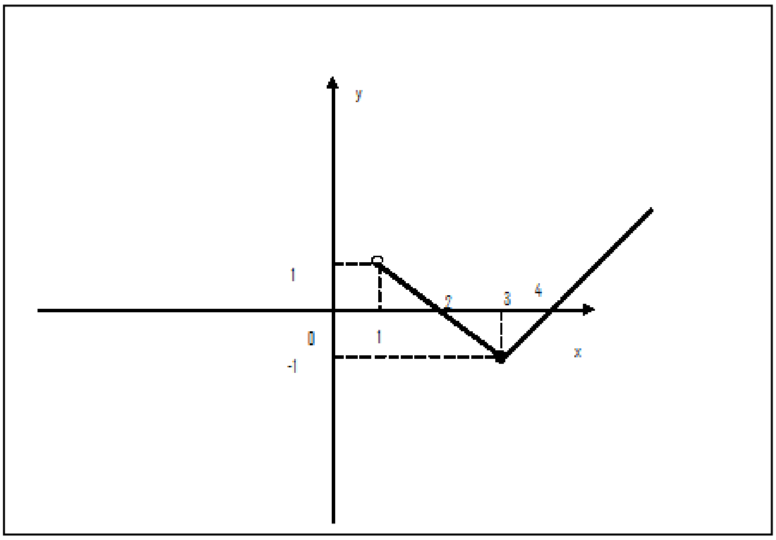


No exercício 1.2, a função $g(x)$ é uma função definida por ramos, ou troços. O primeiro ramo … (esboça o sistema de eixo cartesianos), o primeiro ramo é o módulo, ou valor absoluto, de x menos 3, menos 1. E é isso que vocês devem colocar na calculadora: valor absoluto de, x menos três, menos 1. Depois a condição que temos à frente é: se x maior do que 1. Portanto, esta minha função… esta representação desta função, só é válida para valores maiores que 1. Portanto, eu peço, normalmente, o gráfico com um zoom… pode ser um zoom decimal normal… e o que é que eu tenho que observar na calculadora? Sem condição nenhuma! Sou eu que tenho que perceber, não é a calculadora que tem que me ensinar! Eu tenho que perceber o que estou a fazer, e…
Por acaso está com um telemóvel na mão, Bruna? É só por acaso!
Bruna: Estava só a ver as horas.
E: Ah! … e tenho que ir à calculadora e procurar aquilo que me interessa. Portanto, a minha função definida como módulo de, x menos 3, menos 1; só é válida para valores maiores do que 1. E no gráfico, indo à tabela, vou verificar qual seria a imagem de 1; se este valor pertencesse a este ramo. A imagem

seria 1 (marca o ponto no sistema de eixos). Portanto a minha função vai partir daqui (marca uma bola aberta no ponto de coordenadas (1;1)). E eu vou colocar ali uma *bolinha* aberta, que vocês, na vossa mente, têm associada a quê? *A que não pertence*. Certo? Pronto. Depois, a minha função vai daqui até *mais infinito*, com este ramo. Certo? E observando o gráfico verifico que algures aqui, no ponto 2… não, 3, a imagem é -1 e a imagem de 2 é 0 (marca este ponto). Portanto, a minha função vai passar no ponto de coordenadas (2;0), o 3 vai ter imagem -1 (marca o ponto de coordenadas (3;-1)), e então já tenho uma parte da função traçada.

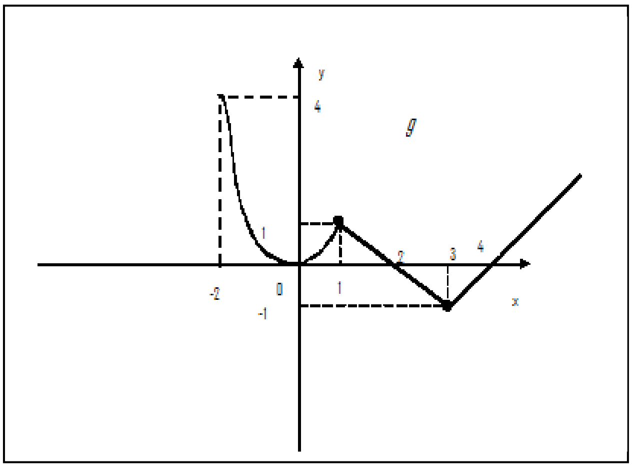


Mas o meu gráfico ainda continua. E se observarem ele vai ter um novo zero, e o novo zero é para x igual a 4 (marca a raiz 4). E de pois, a partir daqui, a função tem este aspecto (marca o ramo da direita no gráfico).
Eu tenho, volto a repetir, de saber analisar o gráfico, saber ir ao gráfico e tirar o que pretendo. Não tenho que estar sempre a introduzir condições. Porque, quando não sabem introduzir as condições, estão perdidos.
Não, não! A calculadora até se podem acabar as pilhas! E então, eu tenho de atribuir valores ao x no intervalo que me é definido. Neste caso, valores maiores que 1.



Agora, para valores compreendidos entre -2 e 1, a minha função vai ter outro aspecto. Será parte de uma parábola. Então vêm à calculadora e escrevem x ao quadrado, pedem o gráfico. Vamos ver qual é a imagem de -2, toda a gente sabe, se é x quadrado, a imagem de -2 é quanto?
Aluna: 4.

E: 4. Parece que nem toda a gente sabe. Ou então estão a dormir ainda. Ora, 1, 2, 3, 4 (marca o ponto de coordenadas (-2;4)). Ali. E depois, também sabemos, e basta olhar para o gráfico, que a imagem de zero é zero (marca a origem das coordenadas). Também sabemos que 1 ao quadrado é 1, e pra este ramo eu tenho o sinal de igual para o valor de 1. Portanto 1 pertence (marca bola fechada em (1;1). Certo? E então a minha parábola vai ter… isto vai ser parte de uma parábola… este aspecto (conclui o gráfico)



E este é o gráfico da função g.
Para os meninos e meninas que não tinham feito [o trabalho de casa] ficou esclarecido? Ou não?
Alunos: Sim.

E: Mas houve mais, não foi só a Núria. Miguel, já percebeu? Não precisamos de introduzir nada. Basta usar o nosso… ou melhor, os nossos conhecimentos.

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Estes exemplos foram propostos aos alunos como trabalho de casa depois de uma aula onde foi iniciado o estudo das Funções Definidas por Ramos. São exemplos relativamente simples de tratar, apenas incluem uma função quadrática e uma função módulo, porque se requer simplesmente capacidades ligadas ao esboço de gráficos, restrições ao domínio e cálculo de imagens.
A principal novidade destes exemplos recai no facto de que, enquanto na aula o tratamento de exemplos semelhantes foi feito pela professora, estes são tratados em casa unicamente pelos alunos e, além disso, são as primeiras abordagens autónomas. O encaixe na 2ª categoria é, por isso mesmo, perfeito. Assim, estes dois casos são *Exemplos Planeados de Conceito* que se integram na 2ª Categoria, **Abordagem Inicial Autónoma**.

O episódio contém alguns traços do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** evidenciados pela professora no tratamento deste exemplo.
Claramente CPC:

- a professora, usa o primeiro exemplo para preparar os alunos para o segundo. Isto é, como para esboçar o gráfico de uma função definida por ramos é preciso utilizar a noção de *restrição de uma função a um domínio dado*, essa noção é trabalhada antes na alínea 1.2 (Cat. **Estratégias de Ensino**).
- para que os alunos entendam a relação entre intervalo aberto (faceta simbólica) e bola aberta (faceta geométrica), a professora comunica com os alunos de forma a chamar a atenção para esse facto e a sua compreensão(Cat. **Pensamento do Estudante**): "*E no gráfico, indo à tabela, vou verificar qual seria a imagem de 1; se este valor pertencesse a este ramo. A imagem seria 1* (marca o ponto no sistema de eixos). *Portanto a minha função vai partir daqui* (marca uma bola aberta no ponto de coordenadas (1;1)). *E eu vou colocar ali uma **bolinha aberta**, que vocês, na vossa mente, têm associada a quê? A que **não pertence**. Certo?*"
- chama a atenção dos alunos para a dificuldade que representa a incapacidade de leitura de um gráfico para a construção de gráficos de funções definidas por ramos (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*Eu tenho, volto a repetir, de saber analisar o gráfico, saber ir ao gráfico e tirar o que pretendo. Não tenho que estar sempre a introduzir condições. Porque, quando não sabem introduzir as condições, estão perdidos.*"
- em todo o episódio perpassa a necessidade de utilização de etapas consecutivas até se construir todo o gráfico pretendido, mais no exemplo 1.2 (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**).
- explica a forma de utilizar a máquina de calcular no contexto do exemplo e, simultaneamente, enquadra o exemplo nos limites da máquina de calcular (Cat. **Explicações**): "*E é isso que vocês devem colocar na calculadora: valor absoluto de, x menos três, menos 1. Depois a condição que temos à frente é: se x maior do que 1. Portanto, esta minha função… esta representação desta função, só é válida para valores maiores que 1. Portanto, eu peço, normalmente, o gráfico com um zoom… pode ser um zoom decimal normal… e o que é que eu tenho que observar na calculadora?*"
- usa a máquina de calcular gráfica para ultrapassar os aspectos mecânicos da construção de gráficos e assim poder focar o que é realmente importante no exemplo (Cat. **Conhecimento de Recursos**).

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- a professora chama a atenção para os aspectos principais da função definida por ramos da qual se está a esboçar o gráfico (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*(...) o primeiro ramo é o módulo (...); Mas o meu gráfico ainda continua. E se observarem ele vai ter um novo zero, e o novo zero é para x igual a 4 (...); (...) isto vai ser parte de uma parábola (...)*"

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- a professora, como procede à correcção de um trabalho de casa, não apoia o tratamento do exemplo no diálogo com os alunos, como o tem feito em episódios anteriores. Mas, para que os alunos se mantenham atentos, usa expressões irónicas (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção dos Alunos**) e (Cat. **Técnicas de sala de Aula**): "*Parece que nem toda a gente sabe. Ou então estão a dormir ainda.*"

Uso do Exemplo

O exemplo retratado neste episódio aparenta ter sido tratado pela professora, mas, tendo sido proposto como trabalho de casa, na verdade foi tratado pelos alunos. O episódio revela, portanto, a correcção de um trabalho realizado pelos alunos.
O primeiro exemplo, que pretende a representação gráfica de uma função módulo, é um caso de relacionamento entre a *Faceta Simbólica* e a *Faceta Geométrica* com base na função $g(x)=|x-3|$ de domínio $[-3;2]$. Repare-se que o exemplo não trata a função em todo o seu domínio, existe uma restrição que enquadra o esboço do gráfico na utilização da máquina de calcular gráfica e no cálculo de imagens dados os respectivos objectos. Este exemplo deve ser observado como sendo um que vem na continuidade de várias funções módulo que haviam sido, anteriormente representadas. Assim, nas representações anteriores, os alunos viram representações gráficas *tipicamente* associadas a funções módulo pelo aspecto que apresentam. Este gráfico, por outro lado, apresenta um aspecto diferente que se deve à restrição do domínio que foi imposta e que justifica o uso da calculadora. Com a calculadora, o aluno tem uma visão mais alargada da representação gráfica da função que lhe é apresentada no visor, mas as restrições impostas definem apenas uma parte que, não aparentando ser de uma função módulo, o é.
Por outro lado, este exemplo dever ser observado como uma preparação para o exemplo seguinte. Se nos situarmos no conteúdo a tratar, Função Módulo e Função Definida por Ramos, a restrição apresentada neste exemplo é um objectivo em si mesmo, mas, considerando o exemplo da alínea seguinte, prepara o que será o esboço gráfico de uma função com dois ramos. Isto é, ao ser definida em dois subdomínios, terá duas restrições a tratar.
Por este motivo, os dois exemplos vêm juntos no manual, o primeiro constitui a questão 1.1 e o segundo a 1.2. Faz todo o sentido que assim seja, o verdadeiro exemplo a tratar é a segunda alínea e a primeira constitui a preparação de dois aspectos próprios da segunda.

A segunda questão apresenta um exemplo que agrega duas *Experiências Prévias* de modo muito particular e enquadra-se perfeitamente no conteúdo em que o trabalho está inserido, a Função Definida por Ramos: o esboço de uma Função Quadrática e de uma Função Módulo. São conteúdos tratados antes, mas que são utilizados num conteúdo específico.
Este exemplo, claramente, também relaciona a *Faceta Simbólica* e a *Faceta Geométrica* e faz uso da máquina de calcular gráfica como forma de apoio. Os aspectos contemplados no exemplo anterior, 1-restricção ao domínio, 2-cálculo de imagens e 3-esboço de troços de gráficos, fazem a sua aparição por duas vezes. Porém, neste exemplo, as características das funções utilizadas são mantidas no aspecto final da função definida por ramos, a quadrática aparece como parábola e o módulo de uma afim aparece com a forma de V.

Com o que se referiu, pode-se constatar as razões da escolha dos exemplos, observar que a escolha não é aleatória e faz uma abordagem complexa do conceito de Função Definida por Ramos; sem, contudo, ser uma abordagem complicada.

Esmeralda: **Episódio 48**
Dia: **9 Março 07**

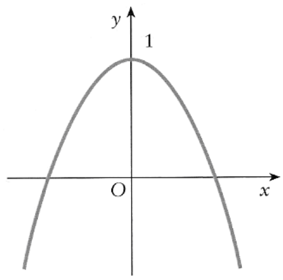
Início: **LA 10 min 50 Seg.**
Fim: **LA 16 min 45 Seg.**

Manual: **Página 136**

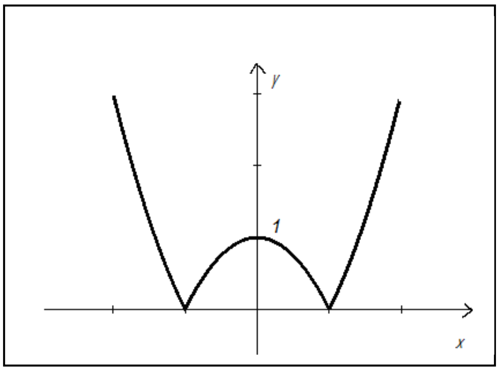
Exemplo planeado tratado pelos alunos

Esmeralda: Eu não vou resolver nada no quadro. Eu vou resolver um exercício de escolha múltipla que levaram para trabalho de casa. Bom, então o exercício 4 da página 136… porque nós ficámos com o 3. resolvido, não foi?
Aluna: Foi.
E: … dizia o seguinte: Na figura está parte da representação gráfica de uma função quadrática *f* cujo contradomínio é, intervalo aberto, de *menos infinito* a 1, fechado.
Filipa!
Qual é o conjunto de valores de *k* para os quais… concentre-se!...
Aluna: Eu estava a ouvir…
E: Diga?
Aluna: … não estava a dizer nada.
E: Não estava. Completamente na lua… Ahhh, qual é o conjunto de valores de *k* para os quais a equação, valor absoluto de *f* de *x*, igual a *k*, tem duas e só duas soluções?

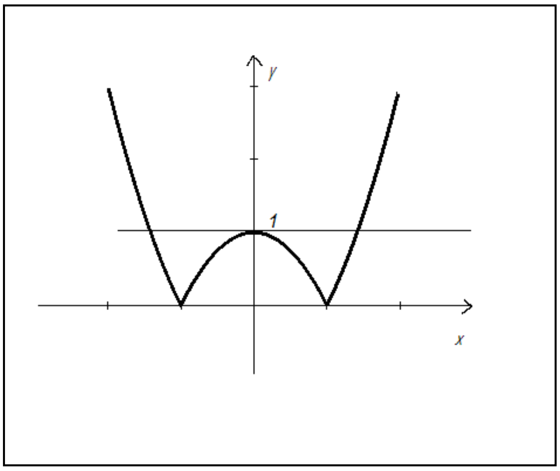
4. Na figura está parte da representação gráfica de uma função quadrática f cujo contradomínio é $]-\infty\ ,\ 1]$.
Qual é o conjunto de valores de k para os quais a equação $|f(x)| = k$ tem duas e só duas soluções?
(A) $]-\infty\ ,\ -1]$ (B) $]1\ ,\ +\infty[$
(C) $\{0\} \cup [1\ ,\ +\infty[$ (D) $\{0\} \cup]1\ ,\ +\infty[$



Ora, se vocês se lembram o que nós temos andado a tratar a partir do momento em que falámos do valor absoluto, com certeza que me sabem responder o que eu vou pedir (esboça um sistema de eixos cartesianos no quadro com uma parábola voltada para baixo como a da figura).
Ora portanto, o que eu sei desta função é exactamente o que está no quadro. O contradomínio vai de *menos infinito* até 1. Mas esta função que eu tenho ali, é a função $f(x)$. Agora, eu quero saber como é que vai ficar a representação da função módulo de *f* de *x* ($|f(x)|$). Quais são as alterações que o valor absoluto, ou módulo, de $f(x)$ vai introduzir neste gráfico?
Alunos: Os valores negativos passam a positivos.
E: (acena com a cabeça em sinal de concordância) Ou seja, se eu bem entendi, os valores que estavam negativos passam a positivos. E estão a falar dos valores de *x* ou *y*?
Alunos: De *y*.
E: Muito bem. Então, se calhar, nós vamos passar a ter esta função a vermelho
(a professora, nos ramos negativos, transformou o gráfico por simetrias de eixo horizontal).



Certo? Então, agora, vamos ver o que é que nos pedem. *Quais são os valores onde a condição módulo de f de x igual a k, tem duas soluções?* Ou seja, quais são os valores de *x*… diferentes, dois, dois, só podem ser dois… que vão ter o mesmo *y*?
O que é que me respondem?
Dois alunos: A "D".
E: Hã?
Dois alunos: A "D".
E: Eu não quero que olhem para as opções. Quero que me respondam olhando para aquilo que está no quadro!
Dois alunos: O zero…
E: O zero, que vai ter este e este objecto (reforça no gráfico os zeros com dois pontos mais destacados). Portanto, o valor zero, a imagem zero, o *k* igual a zero, é imagem de dois valores de *x*. Portanto, certíssimo, o zero serve (escreve no quadro $\{0\}$). Há mais algum solto? Há mais algum valor solto que sirva? (solto=isolado)
Alunos: Não.
E: Não. E então?
Vários alunos: Pode, a partir do 1.
E: A partir do 1, porque se eu traçar aqui uma recta horizontal (traça uma recta horizontal que intersecta o eixo dos *yy* em 1), o 1 é imagem de quantos valores de *x* ?



Alunos: Dois.
E: Hã? Ouvi mal!
Alunos: Três.
E: Três! Deste, deste e deste valor do *x* (destaca no gráfico os três pontos de intersecção). Verdade? Então, o 1 serve ou não para valor de *k*?
Alunos: Não.
E: Então tenho que dizer que x pertence… zero, reunião com, intervalo aberto, de 1 até …?
Alunos: … *mais infinito*.
(a professora escreve no quadro $x \in \{0\} \cup]1;+\infty[$)
E: Que há-de ser uma das nossas opções, com certeza. Certo?
Miguel: Mas o 1 é fechado. Não é professora?
E: Como?
Miguel: O 1 não é fechado?
E. Não sei Miguel. Vamos lá olhar para o quadro e, se percebeu o que eu expliquei… Olhe para lá, e diga-me lá. O 1 é imagem de quantos valores de *x*?
Miguel: Três.
E: De…?
Miguel: …de três.
E: Então serve para [valor de] *k*?
O *k* só pode ser imagem de dois [objectos]. Serve ou não?
(o Miguel abana a cabeça indicando que não)
E: Não. Então, no intervalo, o extremo 1 tem que ser aberto, ou fechado?
Miguel: Aberto.

E: Pronto.
Logo, agora, a representante das soluções, será a opção D.
Toda a gente entendeu?

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O exemplo que se aponta neste episódio traduz uma situação problemática que envolve diversas noções relacionadas com o conceito de função e com o (sub-) conceito de função módulo. As ideias matemáticas presentes são várias, desde o conceito de função módulo, noções de imagem de um objecto e de contradomínio, noção de equação pela intersecção dos respectivos gráficos, intervalo de reais, extremo aberto de um intervalo, ponto isolado (para $k = 0$) e de certa forma a noção intuitiva de limite (quando k se aproxima de 1).
Sem dúvida que este exemplo traduz um aprofundamento no conceito de função módulo pela abordagem de todas as noções atrás enumeradas. A solução da situação que este exemplo enquadra é cognitivamente exigente e, por isso, representa o nível de dificuldade a não superar que a programação sugere. Estamos, portanto, no final dos trabalhos que envolvem a função módulo.
Por tudo o que se afirmou, e porque é uma situação estritamente matemática, este *Exemplo Planeado de Conceito* é inserido na 4ª Categoria, **Aplicações Internas**.

No tratamento deste exemplo reconhecem-se aspectos do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** que a professora demonstra.
Claramente CPC:

- a professora indica com veemência que, para responder à pergunta que o exemplo apresenta, os alunos devem procurar a resposta no gráfico que se encontra no quadro. Com isto a professora orienta os alunos para uma resposta que decorra do gráfico da função módulo e não de uma resposta que, eventualmente, seja indicada de forma aleatória (Cat. **Estratégias de Ensino**): "*Eu não quero que olhem para as opções. Quero que me respondam olhando para aquilo que está no quadro!*"
- utiliza com os alunos uma linguagem que não seja demasiado hermética, demasiado rigorosa ou técnica, para se fazer compreender. Quando se refere à solução $k = 0$, a professora não utiliza o termo "ponto isolado", prefere utilizar o termo "solto" para se fazer entender (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*Portanto, certíssimo, o zero serve* (escreve no quadro $\{0\}$). *Há mais algum solto? Há mais algum valor solto que sirva?*"
- no que respeita à inclusão do valor $k = 1$ na solução, a professora vê-se obrigada a repetir as razões pelas quais esse valor não pode ser incluído e, por tal, determinar que o intervalo seja aberto em 1. O esclarecimento centrou-se, nos dois esclarecimentos, no número de objectos cuja imagem dada por $|f(x)|$ é 1 (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**).

- Pare que a visualização do número de soluções seja melhor visualizada pelos alunos, a professora esboça o gráfico das funções $|f(x)|$ e $y = k$, mais precisamente $y = 1$ (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**).
- altera os termos da pergunta para que os alunos a entendam melhor. Isto é, explica com outra frase equivalente o que a pergunta pretende (Cat. **Explicações**): "*Então, agora, vamos ver o que é que nos pedem.* ***Quais são os valores onde a condição módulo de f de x igual a k, tem duas soluções?*** *Ou seja, quais são os valores de x… diferentes, dois, dois, só podem ser dois… que vão ter o mesmo y?*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- embora não haja uma frase que o ilustre, percebe-se, pela forma como a professora progride no exemplo, que o domínio dos conteúdos e das várias noções envolvidas é bastante aprofundado (Cat. **Conhecimento Profundo da matemática Fundamental**).
- as três fases em que o exemplo foi decomposto, deixa claro quais são os aspectos principais do exemplo, 1-função módulo, 2-contradomínio/equação e 3-solução (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**).
- a forma como a professora corrige este exemplo proposto para trabalho de casa, centrando os alunos nos aspectos principais, pelas explicações que dá baseada nos gráficos que elabora, demonstra a habilidade que a professora tem para resolver, explicando, as situações problemáticas (Cat. **Conhecimento Procedimental**).

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- usa expressões destinadas a captar a atenção dos alunos quando estes se distraem e dialoga directamente com os alunos para os manter focalizados nos aspectos principais do exemplo (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**): "*Qual é o conjunto de valores de* k *para os quais… concentre-se!...*"; "*Hã? Ouvi mal!*" e "*Não sei Miguel.* (…) *Olhe para lá, e diga-me lá.*"
- no início do episódio, a professora lê pausadamente o enunciado do exemplo, marcando com a voz os seus pontos principais. Fecha o episódio com a indicação precisa da letra que representa a solução de forma a não permitir qualquer ambiguidade (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**): "*Logo, agora, a representante das soluções, será a opção* D. *Toda a gente entendeu?*"

Uso do Exemplo

O uso do exemplo contido neste episódio é feito exclusivamente na *Faceta Geométrica*. Todavia, a solução gráfica do exemplo deve ser convertida em intervalo de números reais, o que introduz um aspecto de *Faceta Simbólica*.
O uso deste exemplo visa aprofundar o conceito de Função Módulo e, para isso, explora várias *Dimensões de Variação Possíveis*. São elas: 1-contradomínio do módulo, 2-

imagem de um dado objecto, 3-resolução gráfica de equações 4-conjunto solução de uma condição (com intervalo aberto). Cabe ainda referir que é aflorado, ainda que intuitivamente, a noção de ponto isolado.
As *Dimensões de Variação Possíveis* mais importantes do exemplo são a variação traduzida pelo parâmetro k e a variação do número de soluções da equação que se obtém. Para a dimensão da variação de *k*, a *Amplitude de Mudança Permitida* é todo o conjunto dos números reais, enquanto que a *Amplitude de Mudança Permitida* para o número de soluções da equação $\left|f(x)\right| = k$ é $\{0,1,2,3,4\}$.

Para resolver a situação apresentada neste exemplo o aluno deve possuir uma ideia muito clara da transformação do plano operada pela aplicação do módulo. A função obtida deve ser analisada em termos de contradomínio e confrontada com a noção de equação quando apresentada de forma gráfica; isto é, que a igualdade de duas funções determina no gráfico os pontos onde as funções se intersectam. Por fim, contadas as soluções, esse conjunto deve ser apresentado de forma simbólica.
Estas são as três etapas que o episódio reflecte e que podem ser claramente isoladas na transcrição:

1. Transformação do gráfico. Obtenção da nova função por aplicação do módulo.
2. Cálculo do contradomínio. Obtida a função módulo, professora e alunos concluem que o contradomínio se altera de $\left]-\infty;1\right]$ para $\left[0;+\infty\right[$.
3. Variação de *k* e soluções obtidas para a equação $\left|f(x)\right| = k$. As variações de *k* produzem diferentes equações das quais é necessário contar as soluções e verificar se são duas, conforme imposição do enunciado.

A maior exigência cognitiva radica na generalidade que o aluno deve trazer à situação quando identifica e utiliza o parâmetro *k*. Este parâmetro é em si uma generalidade, porque k é um determinado número, sendo, simultaneamente, o valor que o aluno quiser.
Como sabemos essa generalidade traduz-se no movimento vertical que é permitido realizar pela recta $y = k$ e nas infindáveis equações que esse movimento determina.
Como se disse, é necessário que o aluno compreenda a intersecção dos dois gráficos como sendo pontos em que para o mesmo objecto *x* se obtêm imagens iguais, mesmo que uma dessas imagens seja dada por uma função constante.
Julgamos que um aluno que tenha entendido todas as noções que este exemplo traz à colação não tem dificuldades em determinar a variação de *k* que determina exactamente duas soluções (da mesma forma se poderiam pedir quatro soluções). Já as circunstâncias de $k = 0$ e de $k = 1$ já não parecem tão pacíficas, uma com as duas soluções pedidas e a outra com três soluções para a equação apresentada $\left|f(x)\right| = k$. A primeira parece ser mais difícil de identificar como solução do problema e a segunda mais fácil de identificar como não fazendo parte dela. Estas duas circunstâncias traduzem a noção de ponto isolado inserido numa solução contínua, o que, de forma intuitiva, foi aflorado quando a professora fala em *ponto solto*.

Esmeralda: **Episódio 49**
Dia: **9 Março 07**

Início: **LA 16 min 45 Seg.**
Fim: **LA 18 min 50 Seg.**

Manual: **Página 136**

Exemplo planeado tratado pelos alunos

Esmeralda: A [questão] 5, tem… ou melhor, fazem-se duas afirmações.

5. Considere as afirmações:

(i) A condição $|x| < 0$ é impossível em $\mathbb{R}$.

(ii) A condição $|x| > 0$ é universal em $\mathbb{R}$.

Quanto à veracidade ou falsidade das afirmações anteriores:

(A) São ambas verdadeiras. (B) (i) é verdadeira e (ii) é falsa.

(C) (i) é falsa e (ii) é verdadeira. (D) São ambas falsas.

Primeiro: a condição, valor absoluto de *x* menor que zero é impossível em R.
O que é que vocês acham, de acordo com os conhecimentos que têm sobre o módulo ou valor absoluto, sobre a veracidade ou não desta condição.
Alunos: É verdadeira.
Aluna: Porque não pode. O módulo de *x* tem que ter valores iguais a zero ou positivos.
E: O valor absoluto de um número é sempre um número positivo ou nulo. Portanto, aqui diz que esta condição é impossível no conjunto dos números reais. Concordam…
Alunos: Sim.
E: …verdadeira. Então vamos analisar a segunda: a condição, valor de *x* maior do que zero é universal em $\mathbb{R}$. Universal é ser sempre possível para todos os números.
(alguns alunos dizem que não, mas de forma muito hesitante)
E: Porque…?
Aluno: …porque o zero… pode ser zero.
E: Falta lá o sinal de igual. Porque quando é zero, valor absoluto de zero, verificaram vocês que era zero. Não era um número maior do que zero. Correcto?
Então esta afirmação será verdadeira ou falsa?
Alunos: Falsa.
E: Então qual é a opção correcta?
Alunos: A "B".
E: Sim senhor.
D.ª Ana, respondeu daí que é verdadeira. Percebeu o que está aí a falhar?
Ana: Falta o zero, [além do] maior ou igual.
E: Ora sim senhor.

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O objectivo deste exemplo é verificar se os alunos interiorizaram o conceito de Função Módulo de uma forma correcta. Muitas vezes, os alunos tendem a considerar a Função

Módulo como uma função em que *todas as imagens são positivas* em vez de *todas as imagens são não negativas*. Ou, então, pela aplicação do módulo a uma dada função, afirmarem que todas as imagens positivas permanecem positivas e todas as imagens negativas são transformadas em positivas (no seu simétrico), esquecendo-se de transformar os zeros da função inicial. O papel do professor, para além de não promover esta falsa concepção, deve ser o de indicar com rigor – de linguagem e de notação – o papel importante que o valor zero desempenha na Função Módulo ou na aplicação do módulo a uma função dada.
Assim, a utilidade deste exemplo, tratado apenas pelos alunos como trabalho de casa, é dar rigor e prevenir confusões que se possam gerar na construção do conceito de Função Módulo. Por esse motivo, este exemplo deve ser classificado como *Exemplo Planeado de Conceito* e inserido na 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**.

O episódio é pouco extenso, mas, mesmo assim contém alguns traços do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** evidenciados pela professora no tratamento deste exemplo.
Claramente CPC:

- este exemplo serve como estratégia para professora ajudar os alunos a entenderem o valor zero como um aspecto a ter em consideração no estudo de Funções Módulo ou na aplicação do módulo a uma função dada (Cat. **Estratégias de Ensino**)
- a professora justifica a necessidade do sinal de igual na condição (ii) para que esta seja universal mediante uma linguagem acessível aos alunos e, desta forma, clarificar o conceito de módulo de um número real (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*Falta lá o sinal de igual. Porque quando é zero, valor absoluto de zero, verificaram vocês que era zero. Não era um número maior do que zero. Correcto?*"
- clarifica o significado do termo "Universal" no contexto do exemplo (Cat: **Explicações**): "*Universal é ser sempre possível para todos os números.*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- separa, depois da aplicação do módulo a uma função, os valores negativos dos positivos e, todos, do zero (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*O valor absoluto de um número é sempre um número positivo ou nulo.*"

Nota: na primeira frase do episódio, a professora corrige o verbo que empregou. Da utilização do verbo *ter* passa à utilização do verbo *fazer*, porque o exemplo é de duas afirmações em vez de ter duas afirmações. Esta correcção do verbo demonstra o cuidado e o rigor que a professora transfere para a sua linguagem.

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- a forma de interagir com os alunos reveste-se da forma de diálogo, mantendo a concentração dos alunos nos trabalhos que se desenvolvem (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**) e.

- no final do episódio, depois de tudo esclarecer, a professora verifica a aprendizagem de uma aluna que tinha, anteriormente, emitido a valoração lógica "verdadeiro" decorrente de um raciocínio erróneo (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**): "*D.ª Ana, respondeu daí que é verdadeira. Percebeu o que está aí a falhar?*"

Uso do Exemplo

Este exemplo foi tratado pelos alunos em trabalho proposto para casa, sendo depois corrigido em aula.
O objectivo que a professora pretende atingir com o uso deste exemplo é precisar o papel do zero nas duas condições e, ao fazê-lo, matizar o alcance da aplicação do módulo, como se afirmou quando classificámos o exemplo.
Uma das grandes confusões dos alunos de 14-15 anos é distinguir o alcance das afirmações *x é um número positivo* e *x é um número não negativo*. O mesmo se pode afirmar, por analogia, para as afirmações *x é um número negativo* e *x é um número não positivo*. Como é sabido por qualquer professor com alguma experiência como professor de alunos destas idades, eles tendem a considerar as *x é um número positivo* e *x é um número não negativo* como sendo equivalentes, isto é, determinam o mesmo conjunto. Ora, este exemplo destina-se, justamente, a evidenciar essa confusão em alguns alunos ou, por outro lado, a confirmar que não existe em outros.
Repare-se que, em episódios anteriores, a professora tem sempre o cuidado de afirmar a possibilidade de um módulo ser nulo além de positivo. O mesmo se passou neste episódio, quando a professora afirma "*Porque quando é zero, valor absoluto de zero, verificaram vocês que era zero. Não era um número maior do que zero. Correcto?*" e os alunos já têm esse pormenor bem interiorizado, como é observável pela afirmação de uma aluna "*O módulo de x tem que ter valores iguais a zero ou positivos.*"
Por fim, cabe assinalar, que a ideia de juntar as duas afirmações, (i) e (ii), num único exemplo é, a nosso ver, bastante conseguida. Desta forma, os alunos podem em cada uma delas contrastar a diferença entre *x é um número positivo* e *x é um número não negativo*, e entre *x é um número positivo* e *x é um número não negativo*.

Esmeralda: **Episódio 50**
Dia: **9 Março 07**

Início: **LA 18 min 50 Seg.**
Fim: **LA 31 min 51 Seg.**

Manual: **Página 137**

Exemplo planeado tratado pelos alunos e pela professora

Esmeralda: Exercício 6.

6. Seja f uma função quadrática da qual se apresenta parte do gráfico correspondente ao intervalo $[2\ ,\ 4]$. Admita ainda que $f(4) = 2$ é um máximo de f .

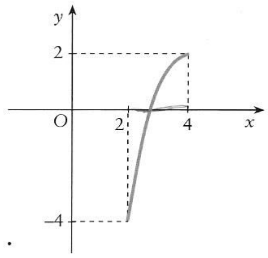
Então, pode concluir-se que:

(A) O contradomínio de $|f|$ é $[0\ ,\ 4]$.

(B) f tem apenas um zero.

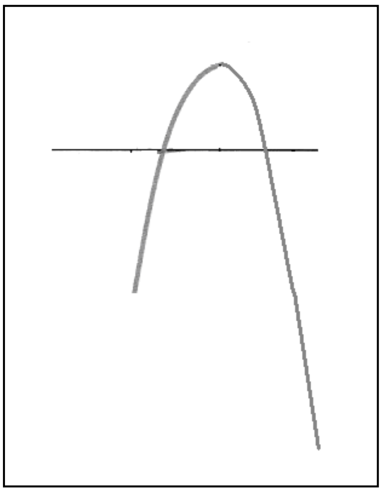
(C) A equação $|f(x)| = 1$ tem duas, e só duas, soluções em $[2,\ 4]$.

(D) A equação $|f(x)| = 2$ tem uma, e só uma, solução em $\mathbb{R}$.

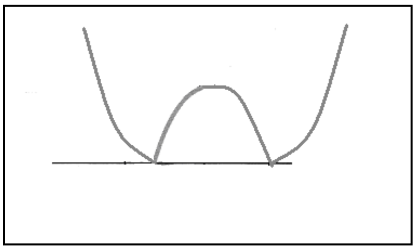


(pausa para os alunos trabalharem)
E: Podem fazer também o 7.
(pequena conversa entre a professora e os alunos fora do âmbito do episódio)
(pausa para apoio individual da professora aos alunos)
E: (para todos) Quero-os [exercícios] percebidos. Porque depois quero que me expliquem porque é que escolheram, não é chegar aí, como vocês costumam fazer nos testes, *um dó li tá, quem está livre, livre está*, e lá vai a escolha. Não é? Não é assim!
(pausa e apoio individual)
E: Bom, vamos corrigir o primeiro? (refere-se à questão 6.)
Então o primeiro diz assim: seja *f* uma função quadrática da qual se representa parte do gráfico correspondente ao intervalo 2, 4. Admita ainda que *f* de 4 igual a 2 é um máximo de *f.* Então, pode concluir-se que "o contradomínio do valor absoluto de *f* é o intervalo fechado, 0 a 4".
Pode ser que sim. Posso concluir isto?
Dois alunos: Não.
E: Porque…? Acha que sim?
Aluna: Acho que não.
E: Então?
Quem acha que não. Porque não?
Quem acha que sim. Porque sim?
Aluna: Vai de -4 a -2, acho que não…
E: Tem esse troço de -4 a -2? De -4 a 2?
Aluna: Sim. Depois passamos para cima tinha que ser… este troço, ficavam os valores negativos passavam a positivos. E como aqui está 2 ficava, 2 a 4. Não?
E: Eu acho que não ficaria de 2 a 4. Porque você nesse intervalo tem um zero. O único ramo que iria passar… ou que iria alterar seria aquele que está abaixo do eixo dos *xx*.
Outra aluna: Então esse ficava entre zero e 4.
E: Entre 0 e 4. Pois. Mas eu volto… ou melhor, eu pergunto uma coisa que eu faço. E faço sempre esta pergunta, que eu percebo que vocês não façam o que eu vou perguntar: vocês leram o enunciado?
Alunos: Sim.
E: Leram? E no enunciado diz o quê?
(as respostas são simultâneas e confusas)

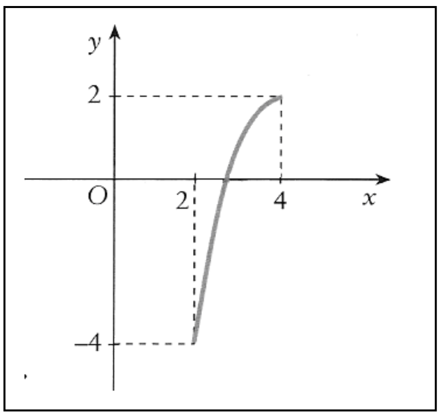
E: Ah é só o que diz!? Olhem, vem lá uma coisa muito mais importante.
Aluna: É só uma parte da função.
E: É só uma parte da função! Eu não sei como é a outra parte. Sei que nesta parte – e em todo o domínio, não é? – a função tem máximo. Mas não sei mais nada!? Sei que ela é quadrática, também. Se ela é quadrática, ela não pode ter só este aspecto. Certo?
Então, volto a perguntar: será que o contradomínio pode ser de 0 a 4? O valor absoluto. É que nada me impede de fazer, como fazia ali o João, o João tem assim a função e, depois, fazia assim



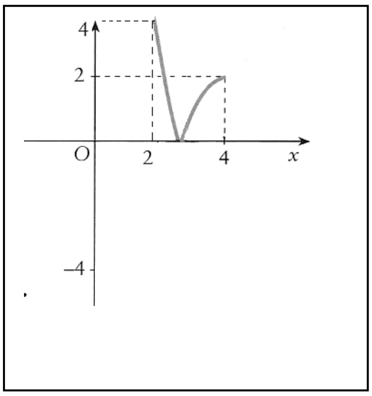
(acrescentou parte do ramo à esquerda do máximo da figura dada)
E: Então o contradomínio já não seria de 0 a 4. Seria de 0 até à imagem deste valor (indica um ponto abaixo da ordenada -4), não é? Passaria a positivo em valor absoluto.
Ora, "*f* tem apenas um zero". Posso afirmar isso?
Alunos: Não.
E: No caso da função ser assim (fig. anterior), o valor absoluto ficava assim (esboça no quadro)



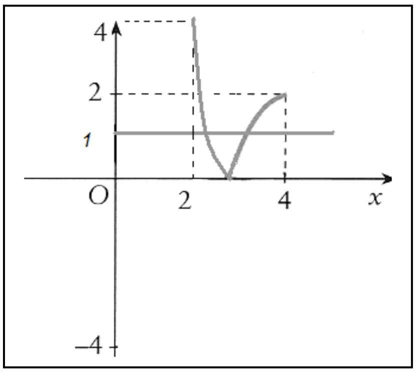
e quantos zeros tinha?
Alunos: Dois.
(a professora encolhe os ombros indicando que contraria a afirmação)
E: É que o que está aqui é pouco. E eu, só posso falar sobre o que vejo. Não posso falar sobre o que não vejo. O que não vejo, só posso é especular.
"A equação, valor absoluto de *f* de *x* igual a 1 tem duas e só duas soluções no intervalo fechado 2 a 4".
Simão: Verdadeiro.
E: Diz o Simão, e foi o único que eu ouvi, verdadeiro. O que é que vocês acham?
(ninguém responde. A professora apaga o quadro)
E: Vou transcrever o gráfico (esboça o gráfico no quadro)



Como é que vai ficar a função valor absoluto?
(alguns alunos da primeira fila respondem)
E: Dizem eles aqui à frente, não sei se vocês concordam, que as imagens negativas vão passar a positivas. Concordam?
Ou seja (esboça no quadro)



Assim? Então, voltem lá a analisar a terceira afirmação e digam lá se ela é verdadeira ou falsa. Valor absoluto… onde é que ela anda… de *f* de *x* igual a 1 tem duas e só duas soluções. Ou seja, o valor 1, pela função módulo de *x*, corresponde a duas imagens. Ou melhor, desculpem-me, é imagem de dois objectos. É, ou não é?
Vamos lá, têm aqui o valor 1 (marca o ponto de ordenada um no eixo vertical), Vamos traçar uma recta horizontal.



Em quantos pontos é que esta recta horizontal intersecta a função módulo, que é esta função aqui traçada a [cor de] laranja?
Alunos: Duas.
E: Aqui (marca com um ponto a primeira intersecção), e aqui (marca a segunda intersecção). Então, esta afirmação será verdadeira, ou não?
Alunos: Sim.
E: Então, já agora, vamos ver a última. "A equação, valor absoluto de *f* de *x* igual a 2 tem uma e uma só solução em R". Verdadeiro ou falso?
Alunos: Falso.
E: Tem quantas?
Alunos: Duas.
E: Ou seja, o 2 é imagem de dois valores diferentes de *x* (aponta no quadro as duas intersecções do tracejado com o gráfico). Verdade?
Pronto. Então a opção correcta é a "C".

Fim da Transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

A proposta aos alunos deste exemplo visa o aprofundamento do conceito de função. Repare-se como este exemplo envolve várias vertentes do conceito, função módulo, transformação de um gráfico, número de raízes de uma quadrática e contradomínio, equações num âmbito gráfico e restrição do domínio de uma função. Para que este aprofundamento seja efectivo, o uso do exemplo proporciona situações de dúvida e de confusão que a professora deve esclarecer e, com isso, promover uma construção correcta da estrutura do conceito de função.
Considerando as características deste exemplo e o seu papel e objectivos, este *Exemplo Planeado de Conceito* inclui-se na 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**.

O episódio contém aspectos do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** evidenciados pela professora no tratamento deste exemplo.
Claramente CPC:

- a professora ao tratar a terceira afirmação (C) e a quarta (D), onde se deve identificar o número de soluções das equação apresentadas, recorre ao gráfico e às duas ideias matemáticas equivalentes para resolver uma equação do tipo $g(x) = k$ (Cat. **Estratégias de Ensino**): " (…) *o valor 1, pela função módulo de x, (...) é imagem de dois objectos.*" e "*Em quantos pontos é que esta recta horizontal intersecta a função…*"
- quando uma aluna comete o erro de raciocínio "*se x está entre -4 e 2, então o módulo de x está entre 2 e 4*" a professora indica-lhe um ponto do primeiro enquadramento que deveria estar no segundo enquadramento, o zero. Desta forma, consegue trazer a aluna ao enquadramento correcto "*se x está entre -4 e 2, então o módulo de x está entre 0 e 4*", embora a conclusão seja de outra aluna (Cat. **Pensamento do Estudante**): "**Esmeralda:** *Eu acho que não ficaria de 2 a 4. Porque você nesse intervalo tem um zero. O único ramo que iria passar… ou que iria alterar seria aquele que está abaixo do eixo dos xx.*" Com a resposta de "**outra aluna:** *Então esse ficava entre zero e 4.*"
- o erro de raciocínio cometido pela aluna "*se x está entre -4 e 2, então o módulo de x está entre 2 e 4*", é um erro muito comum entre alunos de 10º ano (14-15 anos) e que a professora se apressou a corrigir (Cat. **Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas**).
- aponta um elemento que pode causar dificuldades aos alunos: a função a considerar é toda a quadrática cuja parte do gráfico se apresenta. Aos alunos caberá conseguir fazer a visualização de toda a parábola (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*É só uma parte da função! Eu não sei como é a outra parte. Sei que nesta parte – e em todo o domínio, não é? – a função tem máximo. Mas não sei mais nada!? Sei que ela é quadrática, também. Se ela é quadrática, ela não pode ter só este aspecto. Certo?*" e "*É que o que está aqui é pouco. E eu, só posso falar sobre o que vejo. Não posso falar sobre o que não vejo. O que não vejo, só posso é especular.*"
- todo o uso deste exemplo é feito com base na visualização, com base na *Faceta Geométrica* da função quadrática e, depois, do seu módulo. A professora estabeleceu todo o uso do exemplo em representações gráficas das funções (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**).

- na terceira afirmação, a professora justifica porque o contradomínio da função com módulo apenas inclui os pontos até 4 (Cat. **Explicações**): "*Então o contradomínio já não seria de 0 a 4. Seria de 0 até à imagem deste valor* (indica um ponto abaixo da ordenada -4), *não é? Passaria a positivo em valor absoluto.*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- o tratamento e uso deste exemplo também é exigente para a professora, considerando a complexidade que comporta agregar todas as vertentes do conceito de função nele contidas de forma a fazer sentido para o aluno e, além disso, ajudá-lo na construção do conceito de função. Neste episódio a professora demonstra um conhecimento conceptual profundo dos aspectos matemáticos em causa (Cat. **Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental**).
- em qualquer das quatro afirmações, para determinar o seu valor lógico, é necessário separar a função quadrática inicial da função módulo que se obtém; por outro lado, também é necessário separar o módulo como função, do módulo como valor absoluto de um número. Outras vezes, é necessário enfatizar o contradomínio das funções, os zeros, o significado da intersecção dos gráficos, etc. (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**)
- efectivamente, este é um exemplo onde se faz a conexão entre vários aspectos do conceito de função que, em determinados momentos, foram conteúdos *per se* e que agora estão interligados (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**).
- se considerarmos que cada afirmação, em determinado sentido, pode constituir uma situação problemática, então a professora apresenta destreza no seu tratamento (Cat. **Conhecimento Procedimental**).

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- indica aos alunos que a compreensão deste tipo de situações é fundamental, para a sua educação matemática em geral e, particularmente, em situação de avaliação de forma a não terem a tentação de responderem aleatoriamente (Cat. **Objectivos da Aprendizagem**): "*Quero-os* [exercícios] *percebidos. Porque depois quero que me expliquem porque é que escolheram, não é chegar aí, como vocês costumam fazer nos testes,* **um dó li tá, quem está livre, livre está***, e lá vai a escolha. Não é? Não é assim!*"
- interage com os alunos de várias formas de modo a conservar o interesse e a atenção no trabalho que se desenvolve. Seja pelo diálogo individual, seja pelo diálogo com o grande grupo "*Diz o Simão, e foi o único que eu ouvi, verdadeiro. O que é que vocês acham?*". Também capta a atenção dos alunos pela análise dos gráficos que esboça no quadro (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**) e (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).
- para identificar uma técnica de sala de aula em especial, veja-se o aspecto que qualquer professor dá muita importância tanto em actividade de aula normal como em situação de avaliação. A atenção com que os enunciados devem ser lidos (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**): "*E faço sempre esta pergunta, que eu percebo que vocês não façam o que eu vou perguntar: vocês leram o enunciado?*"

Uso do Exemplo

Como já foi afirmado atrás, o exemplo cumpre o objectivo de provocar o aparecimento das dúvidas e confusões dos alunos e, com os esclarecimentos da professora, aprofundar o conceito de Função Módulo. Este, em particular, sempre com base na *Faceta Geométrica*, embora, para isso, o e enunciado recorra por vezes a aspectos da *Faceta Simbólica*.
O uso que foi feito do exemplo é, todo ele, coerente com o objectivo a alcançar. O exemplo trata três *Dimensões de Variação Possíveis*:

1. O contradomínio da função $|f|$.
2. O número de zeros da função quadrática.
3. O número de elementos da solução da equação $|f|=1$ ou da equação $|f|=2$ no domínio indicado.

As afirmações que são feitas nas várias opções são casos verdadeiros ou falsos do exemplo com restrições. Isto é, ao explorar as dimensões de variação possíveis nas respectivas *Amplitudes de Mudança Permitida* são apresentados exemplos ou contra-exemplos da situação "*Dê exemplo de ...*" com restrições, o que representa, respectivamente, afirmações verdadeiras ou falsas.

Para que o uso do exemplo cumpra as três tarefas descritas a professora dividiu o tratamento do exemplo em quatro partes, tantas quantas as afirmações contidas no enunciado. Chegada à afirmação correcta, a terceira afirmação, a professora podia ter dado o exercício por terminado mas, para que todas as dimensões fossem tratadas, optou por continuar com a quarta afirmação.

A primeira afirmação tem dois pontos importantes.
Primeiro: determinar o contradomínio do módulo de uma função em que apenas é dado um troço.
Segundo: explorar um erro comum cometido pelos alunos quando transformam um gráfico, com imagens negativas e positivas, através do módulo.
O primeiro ponto envolve um exemplo com restrições, neste caso é uma parábola truncada com o vértice dado. Esta situação obriga o aluno a visualizar todo o gráfico e determinar todo o contradomínio considerando as restrições impostas e, depois, transformar esse gráfico pela aplicação do módulo de uma função.
O segundo refere-se ao erro comum que, por certo, uma aluna cometeu. Em linguagem simbólica $-4 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq |x| \leq 4$, que se explica facilmente: o módulo deixa positivo o 2 e transforma o -4 em 4. Portanto, o módulo de *x* ficará compreendido entre 2 e 4. Evidentemente a implicação não é verdadeira, a professora deixa esse facto bem patente quando chama a atenção da aluna para o valor zero.

> Este momento poderia configurar um *Exemplo Fulcral* se considerássemos o real zero como o exemplo numérico que contraria a afirmação da aluna do módulo de *x* estar entre 2 e 4, pois o módulo de zero é, também, zero. Pelo que se passou e pudemos ver nas imagens, não podemos atestar que a introdução do zero tenha provocado um conflito cognitivo na aluna, necessário para que o exemplo seja

> *Fulcral*, contudo, para uma segunda aluna poderá ter sido um *Exemplo Ponte*. Ela afirma: "*Então esse* [ramo] *ficava entre 0 e 4.*"

A *Dimensão de Variação* é explorada no âmbito de *Um exemplo de … com restrições* ao nível da visualização. Isto é, a curva é indicada como uma parábola em que se indica o vértice e o sentido da concavidade, mas apenas se apresenta uma parte. Caberá ao aluno visualizar a parábola no seu todo a partir das indicações dadas e, daí, determinar o seu contradomínio.

A segunda afirmação refere-se a uma *Dimensão de Variação* da função inicial e não do seu módulo. A partir da situação apresentada, *Um exemplo de … com restrições*, obter, agora, o número de raízes que a parábola possui.

As duas últimas afirmações têm uso e objectivos semelhantes, embora uma equação seja considerada num intervalo de $\mathbb{R}$ e a outra em todo o conjunto dos números reais. Sobre esta afirmação o aluno deve visualizar não só a função *f*, mas também a função após a aplicação do módulo.
Estas duas afirmações são as mais exigentes do ponto de vista cognitivo. Nelas é necessário tratar a função antes da aplicação do módulo e verificar o que acontece depois da aplicação do módulo, considerando o domínio da equação em causa.

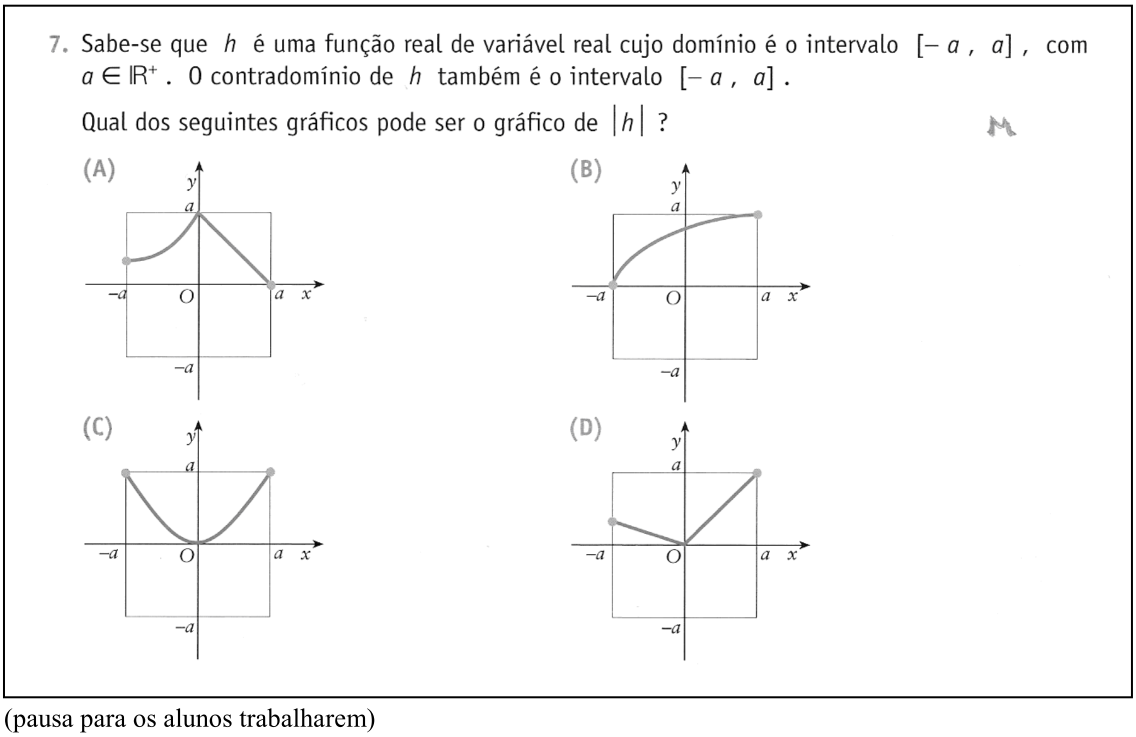
Esmeralda: **Episódio 51**
Dia: **9 Março 07**

Início: **LA 31 min 51 Seg.**
Fim: **LB 9 min 20 Seg.**

Manual: **Página 137**

Exemplo planeado tratado pela professora e pelos alunos

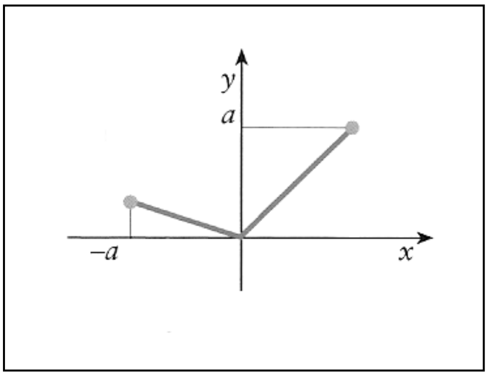
Esmeralda: Mais uma interpretação de gráficos.
Olhem, eu estou a insistir nesta interpretação de gráficos porque isto é muito importante. Nos exames nacionais, cada vez mais, se aposta nos gráficos, em representações de gráficos e, sobre eles, vocês têm sempre que fazer interpretações. Se não os souberem fazer, se vocês não perceberem os gráficos, não sabem fazer os exercícios. A escolha múltipla então, cada vez mais apostam nisso. Portanto, eu estou a insistir neste tipo de análise, neste tipo de abordagem porque é muito importante. Porque é assim, este tipo de questões que aparecem… ou que costumam aparecer nos exames nacionais, dadas a deslocamentos, partículas, sobre uma circunferência, costumam aparecer ligados a valores absolutos com logaritmos, com exponenciais, com sucessões… Se vocês não souberem fazer interpretações de gráficos, se não souberem interpretar aquilo que lá está no gráfico, vocês andam a resolver os exercícios *um dó li tá*, e não é com *um dó li tá* que acertam as perguntas. A não ser que estejam num dia muito inspirado. Eu faço *um dó li tá* quando jogo no Euromilhões e no Totoloto e ainda nunca me saiu na da de jeito. Se calhar sou uma mulher de azar, não sei, não faço ideia. Mas neste caso acho que é bom, portanto, não jogar no azar mas sim jogar com inteligência e pelo certo. Vamos lá, o exercício 7.


7. Sabe-se que h é uma função real de variável real cujo domínio é o intervalo $[-a, a]$, com $a \in \mathbb{R}^+$. O contradomínio de h também é o intervalo $[-a, a]$.

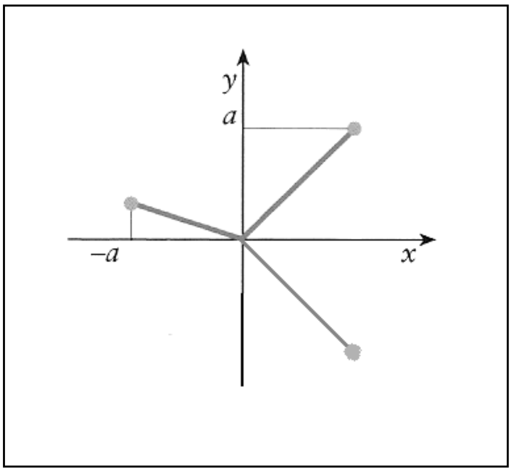
Qual dos seguintes gráficos pode ser o gráfico de $|h|$?

(pausa para os alunos trabalharem)
E: Ora, vamos resolver o 7. Então Miguel, conte-me lá! Sem ir às soluções…
Miguel!!!!
…Conseguiu chegar à resposta certa? Continua com a dúvida?
Miguel: Não.
E: Ora portanto, o exercício 7 diz o seguinte: "Sabe-se que *h* é uma função real de variável real cujo domínio é o intervalo fechado de *–a* a *a*, com *a* pertencente ao conjunto dos números reais positivos

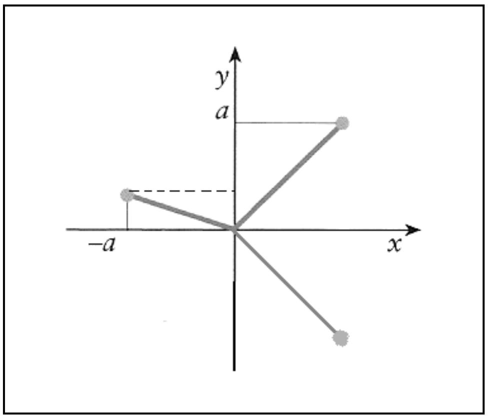
(escreve no quadro $\left[-a;a\right], a \in \mathbb{R}^{+}$). O contradomínio…" ora portanto, a função é *h*, domínio de *h* (acrescenta no quadro $D_h = \left[-a;a\right], a \in \mathbb{R}^{+}$) "…o contradomínio de *h* é também o intervalo fechado de –*a* a *a* (escreve no quadro $D'_h = \left[-a;a\right]$). Qual dos seguintes gráficos pode ser o gráfico do valor absoluto de *h*?"
Eu pergunto, sem olhar para sítio nenhum: Qual será, de acordo com os dados que eu tenho ali no quadro, o contradomínio da função valor absoluto de *h*?
Contradomínio da função valor absoluto de *h*? E qual será o domínio da função valor absoluto de *h*? (escreve no quadro $D'_{|h|} =$ e $D_{|h|} =$)
Aluna: O domínio igual.
E: O domínio igual. Concordam ou não?
Alunos: Sim.
E: O que é que altera com o valor absoluto de *h* de *x*?
Alunos: O contradomínio.
E: O contradomínio, porque o *h* de *x* são… ou, é o conjunto das imagens. Portanto, sim senhora, mantém-se (escreve no quadro $D_{|h|} = \left[-a;a\right]$). E agora? O contradomínio…?
Alunos: De zero a *a*.
E: Toda a gente concorda que é de zero a *a*? Ou alguém tem alguma dúvida?
Há ou não?
(ninguém apresenta dúvidas e a professora escreve no quadro $D'_h = \left[0;a\right]$)
E: Então vamos ver. Se eu pegar na primeira função, valor absoluto de *h*. Será que este gráfico pode ser o gráfico da função valor absoluto de *h*? Será que este gráfico se encaixa nas condições que nós temos?
Aluna: Não.
E: Não? Então? Contém-me lá. O que é que vocês encontram aí? Hum?
(silêncio muito longo)
E: Não encontram nada? Então contém-me lá o que é que encontraram como opção correcta para este exercício? Vocês foram por exclusões, certo?
Alunos: Sim.
E: E o que é que excluíram?
Alunos: …
E: Excluíram qual?
Alunos: O "B".
E: O "B"
Alunos: O "D".
E: O "D".
Aluna: E o "A".
E: E o "A". Então, por exclusão, optaram pelo…?
Alunos: … o "C".
E: O Miguel, excluiu O "A" e o "B". Certo? E ficou com dúvidas entre o "C" e o "D". E ele continua com essas dúvidas, verdade?
Preciso de ajuda. Preciso que expliquem ao Miguel porque é que vocês rejeitaram o gráfico"D". Porque é que o "D" não pode ser o gráfico da função valor absoluto de *h*?
(a Rita começa a explicar)
E: Diga.
Rita: (pouco compreensível)
E: Diz a Rita que se este gráfico for o gráfico do valor absoluto, então eu tenho que pensar assim: quais são as possíveis alterações que eu posso fazer a este gráfico? Certo?
É isso que me está a tentar dizer. É assim que nós temos que pensar, sim senhor. Então é assim, este gráfico é um gráfico assim, *a, -a*.



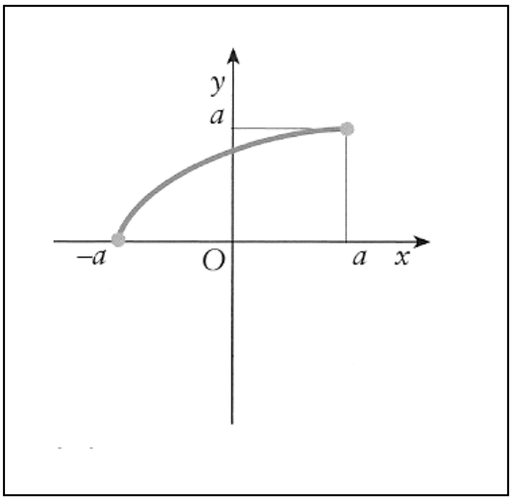
E então, se o meu gráfico antes de ser o gráfico do valor absoluto fosse… o gráfico da função *h*, simplesmente, sem valor absoluto de *h*… e eu tivesse, isto podia acontecer, estas imagens, podiam ser todas negativas (esboça o gráfico)



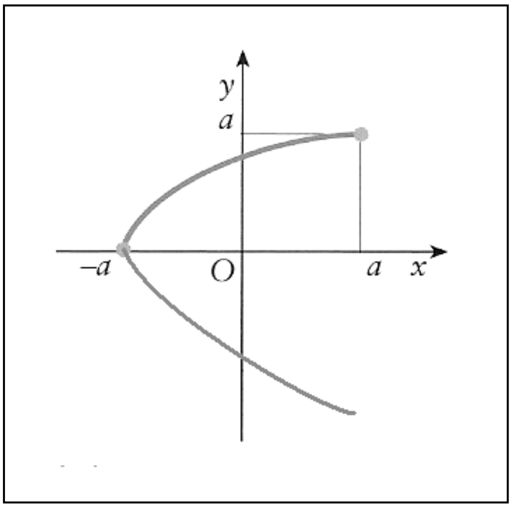
com o valor absoluto, pegava nelas, e Pimba (faz o gesto de passarem de negativas a positivas). Qual era o contradomínio desta função?
Aluna: De –*a* a *a*.
E: Não, não. De –*a* à imagem do *a*. (pretendia dizer a ***imagem do –a***, pois marcou a sua imagem no gráfico)



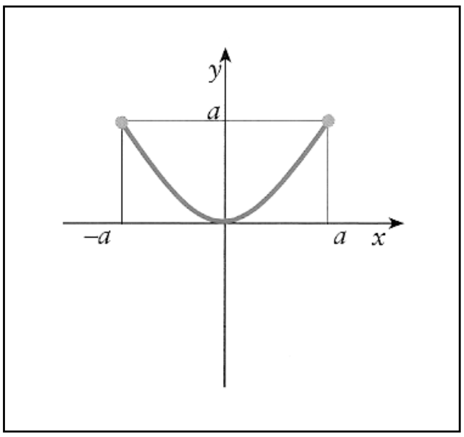
que eu não sei qual é!
E o que é que diz o enunciado?
Alunos: Que o contradomínio é de –*a* a *a*.
E: Percebeu, Miguel?
(o Miguel dá indicação que percebeu)
E: Pronto. Este está devidamente justificado porque é que não pode ser.
Toda a gente entendeu? Pronto.
Então agora vamos analisar os outros que vocês não me souberam responder. Eu fiquei baralhada! (apaga o gráfico anterior)
Ora temos o gráfico “B” que é assim:



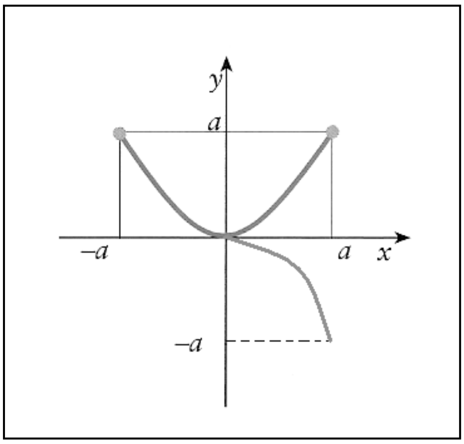
(verbaliza enquanto marca no gráfico *a* e *–a*) Ora, este será o gráfico da função módulo. Como é que podia ser o outro? O outro podia estar assim, todo aqui, abaixo do eixo, ser uma coisa assim:



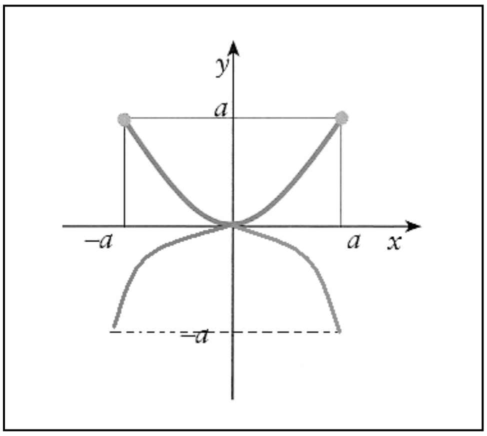
Qual era o contradomínio?
Alunos: De *–a* a zero.
E: Pode ser?
Alunos: Não.
E: (apaga o gráfico anterior) Então, agora já me sabem explicar porque é que o gráfico da função "A" não pode ser o gráfico do valor absoluto de *h*?
Sim, ou não?
(uma aluna tenta explicar)
E: Havia, novamente, alterações do contradomínio que não se encaixavam no contradomínio da função *h*. Tem que ser o intervalo de *–a* a *a*. Portanto, se nós pegarmos no gráfico da função que está representada na alínea "C", que é uma…
Aluna: …parábola.
E: … parábola. Aqui, *a*. Aqui, *a*. Aqui, -*a*.



Se eu puxar este ramo aqui para baixo, como é que fica?



Alunos: De $-a$ a a.
E: Contradomínio de $-a$ a a, domínio de $-a$ a a. Se for aquele (indica o ramo dos objectos positivos) que ficar lá em cima e se for este a trocar aqui para baixo…



Miguel: De $-a$ a a.
E: Entendido?
Portanto a opção correcta: a "C".

<u>**Fim da Transcrição**</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O exemplo apresentado não descreve uma aplicação do módulo, a uma função cujo gráfico é dado, e indicar o respectivo gráfico. O que é dado são algumas das características da função inicial e é pedido o gráfico do módulo dessa função.
Para que um aluno empreenda a resolução deste exemplo é-lhe necessária uma compreensão das características do módulo da função pela interpretação do seu gráfico e, num trabalho inverso, compará-las com as características de uma função que se coloca como hipotética função inicial. Assim, o exemplo que é proposto aos alunos visa um aprofundamento no que concerne às características de uma função e de uma função módulo, promovendo uma relação estreita entre as que se mantêm e as que se alteram.
Pelo que se referiu, o *Exemplo Planeado de Conceito* deve ser incluído na 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**.

O episódio contém alguns traços do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** evidenciados pela professora no tratamento deste exemplo.
Claramente CPC:

- a professora utiliza os esboços das funções que se colocam de forma hipotética para que, por intermédio do estudo das suas características, se possam comparar com as características apresentadas pelo gráfico da função módulo que se apresenta em cada uma das alternativas (Cat. **Estratégias de Ensino**).
- refere-se à simetria de eixo horizontal numa linguagem informal mas totalmente compreensível para os alunos (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*Se eu puxar este ramo aqui para baixo, como é que fica?*"
- para resolver o exemplo de forma compreensível para os alunos, a professora esboça no quadro todos os gráficos que ilustrem a sua explicação (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**).
- explica a razão pela qual uma função inicial proposta de forma hipotética, depois de aplicado o módulo, apresenta um gráfico igual ao da figura (Cat. **Explicações**): "*E então, se o meu gráfico antes de ser o gráfico do valor absoluto fosse… o gráfico da função h, simplesmente, sem valor absoluto de h… e eu tivesse, isto podia acontecer, estas imagens, podiam ser todas negativas, com o valor absoluto, pegava nelas, e Pimba. Qual era o contradomínio desta função?*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- o trabalho com os alunos com este exemplo exige, da parte da professora, um conhecimento conceptual minucioso e profundo dos aspectos nele contidos. Esse conhecimento é preponderante para uma correcta transmissão dos pormenores importantes para a construção do conceito de função módulo (Cat. **Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental**).
- enquanto trabalha o exemplo que propôs aos alunos, a professora necessita separar alguns aspectos e, com eles, explicar as razões pelas quais se deve rejeitar ou aceitar alguma das alternativas. Assim, repare-se como, antes de começar a abordar cada um dos gráficos, a professora pede aos alunos que se centrem no domínio e no contradomínio da função módulo (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*Eu pergunto, sem olhar para sítio nenhum: Qual será, de acordo com os dados que eu tenho ali no quadro, o contradomínio da função valor absoluto de h? Contradomínio da função valor absoluto de h? E qual será o domínio da função valor absoluto de h?*"
- relaciona este conteúdo, apreciação de gráficos, com outros conteúdos a leccionar posteriormente (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**): "*Porque é assim, este tipo de questões que aparecem… ou que costumam aparecer nos exames nacionais, dadas a deslocamentos, partículas, sobre uma circunferência, costumam aparecer ligados a valores absolutos com logaritmos, com exponenciais, com sucessões…*"

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- a professora chama a atenção para um dos objectivos da aprendizagem: os momentos de avaliação sumativa; mais precisamente o exame nacional no fim do 12º ano. A professora encobre, deste modo, o verdadeiro objectivo da aprendizagem que é uma construção correcta do conceito de função módulo. Como todos sabemos, muitas vezes os alunos dão mais importância às situações de avaliação que às aprendizagens, propriamente ditas (Cat. **Objectivos da**

Aprendizagem): "*Olhem, eu estou a insistir nesta interpretação de gráficos porque isto é muito importante. Nos exames nacionais, cada vez mais, se aposta nos gráficos, em representações de gráficos e, sobre eles, vocês têm sempre que fazer interpretações. Se não os souberem fazer, se vocês não perceberem os gráficos, não sabem fazer os exercícios. A escolha múltipla então, cada vez mais apostam nisso. Portanto, eu estou a insistir neste tipo de análise, neste tipo de abordagem porque é muito importante.*"

- Para que os alunos se mantenham atentos no exemplo que se trabalha, a professora dialoga com a turma em geral e, também, com algum aluno em particular (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**): "*Preciso de ajuda. Preciso que expliquem ao Miguel porque é que vocês rejeitaram o gráfico"D".*"; "*Diz a Rita que se este gráfico for o gráfico do valor absoluto, …*"
- Abre o episódio com a indicação do que se vai fazer com o exemplo proposto: "*Mais uma interpretação de gráficos.*". Seguidamente explica porquê a insistência neste tipo de exercício.
  Requer o envolvimento dos alunos de forma a os manter focalizados: "*Preciso de ajuda.*". (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).

Uso do Exemplo

Este exemplo pode ser considerado como um caso de *"**Dê exemplo de**…" com restrições*, e todo o trabalho que se faz em torno dele é com base nas características deste tipo de situação.

Devidamente enquadrado no âmbito do conceito de função, a situação proposta aos alunos envolve somente a *Faceta Geométrica* e pretende-se que os alunos **dêem exemplo** de uma função módulo em que são postas restrições ao domínio, ao contradomínio. Neste caso existe uma variante que se deve realçar, o dar exemplo de, deve recair numa das quatro alternativas apresentadas.
O uso deste exemplo tem como objectivo o aprofundamento do conceito de função, usando a faceta geométrica, no que respeita ao seu contradomínio após a transformação do plano operada pela aplicação do módulo. O interessante deste exemplo, em termos do seu uso, recai no facto de os alunos (e a professora) terem que fazer, de certo modo, a antevisão da função antes de se lhe aplicar o módulo e, após a transformação, verificar o resultado através da imposição das restrições.
O exemplo obriga os alunos a desdobrarem a função, apresentada em cada um dos quatro casos, nas diversas variações que se obtêm pela aplicação, ou não, de simetrias dos ramos direito e esquerdo. Isto é, verificar o contradomínio da função quando se põe uma dada hipótese obtida de uma determinada simetria.
Em síntese, o foi que foi feito para cada uma das alternativas A, B, C e D foi estudar as várias funções que se põem como hipótese e que sabemos, pela aplicação do módulo, irão ter o gráfico que se apresenta na alternativa em causa. Este processo de *passo para trás/passo para a frente* ajuda o aluno a aprofundar no conceito de função as características que neste exemplo estão em evidência: domínio, contradomínio, aplicação de módulo a uma função e simetrias.

Esmeralda: **Episódio 52**
Dia: **9 Março 07**

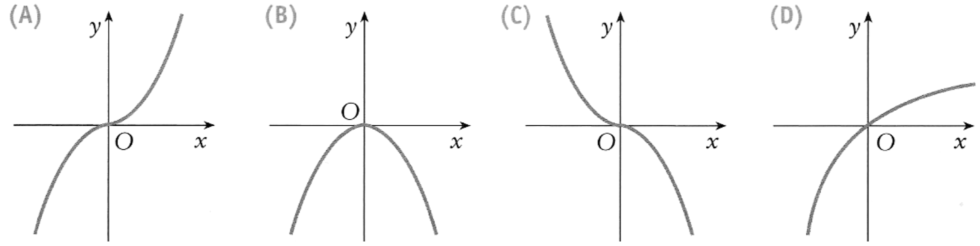
Início: **LB 9 min 23 Seg.**
Fim: **LB 18 min 00 Seg.**

Manual: **Página 137**

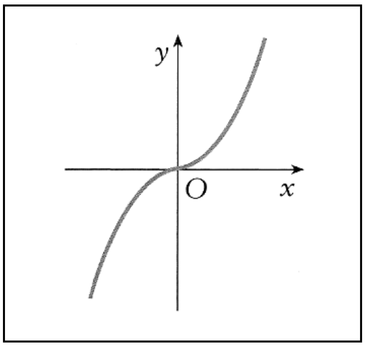
Exemplo planeado tratado pela professora e pelos alunos

Esmeralda: [Exemplo] 8.

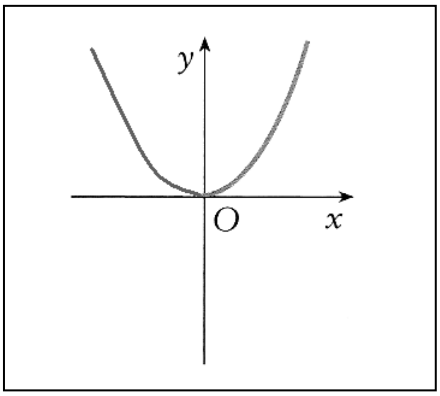
8. Sabe-se que $|f(x)| = -f(x)$. Qual pode ser o gráfico de f?



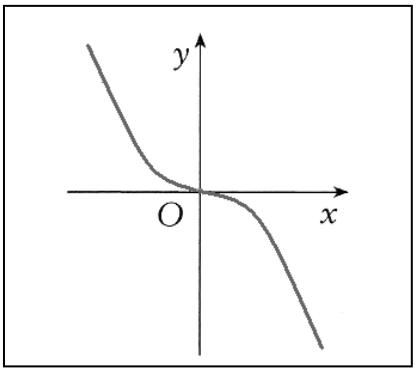
(pausa para os alunos trabalharem)
E: Então, já está? Ora, "Sabe-se que valor absoluto de *f* de *x* igual a menos *f* de *x* – ou seja, ao simétrico de *f* de *x* – Qual pode ser o gráfico de *f*?" Onde o valor absoluto fica exactamente igual ao simétrico de *f* de *x*. Contém-me. O que é que vocês optaram?
Simão: É a "B".
E: O Simão diz que é a "B". Porque…?
Então, porque é que não pode ser a "A"?
(vários alunos respondem, mas de forma muito confusa)
E: (dirigindo-se a uma aluna) Olhe, gostei! Mas temos que recapitular isso que eles não ouviram. Só ouvi eu, você tem esse dom. Se não se está em silêncio, não a ouvem. Eu não. Eu já não digo o mesmo, mesmo sem silêncio conseguem-me às vezes ouvir. A não ser aí a Inês, que viaja de vez em quando e tal, assim para o paraíso… Bom! (esboçou o gráfico)



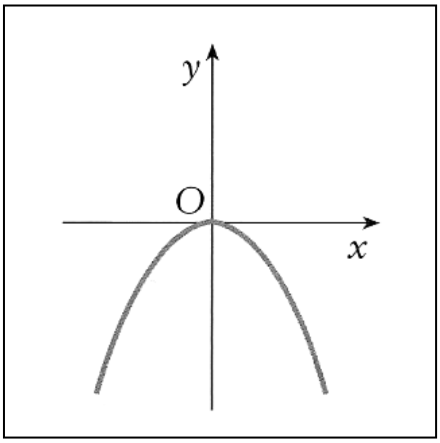
Então diga lá o que é que disse.
Aluna: Com o módulo os valores ficam todos positivos, quando voltam ao simétrico ficam negativos. Não ficam os mesmos, uns positivos e outros negativos. Ficam sempre todos negativos. Por isso só pode ser a "B".
E: Eu não encarava bem assim. Mas… vamos lá pensar.
Se este fosse o gráfico de *f*, como é que ficaria o gráfico do valor absoluto de *f*?
(os poucos alunos que respondem, indicam que todo o gráfico ficava acima do eixo horizontal)
E: Ou seja, eu vou fazer o gráfico à parte. Ficava assim (esboça a parte direita do gráfico igual ao anterior), e depois… talvez… ora em vez de vir assim, ela passa para cima… passa simétrico, sim. Assim:



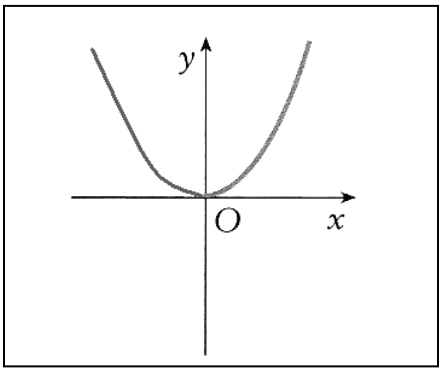
Este seria o valor absoluto de… aquele é *f*, não é?
Alunos: Sim.
E: É? Então, e o simétrico de *f* de *x*?
O simétrico de *f* de *x* ficava, este para cima e este para baixo (faz um novo gráfico):



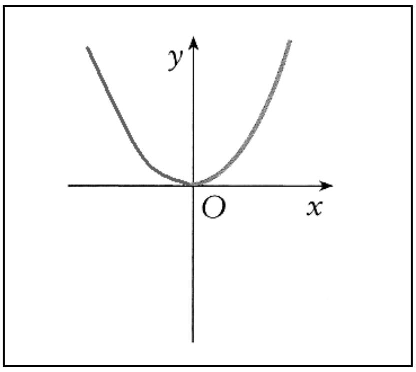
Então, são iguais?
Alunos: Não.
E: Pronto. Temos justificado porquê!
Isto não é só rejeitar, nós temos que perceber porque é que estamos a rejeitar. E eu insisto nisto, volto a repetir, que este tipo de interpretação é muito importante. Porque se vocês souberem ler gráficos, se vocês souberem interpretar os gráficos, quando chegarem ao 12º ano, já para o ano, na trigonometria, vocês não têm problemas. Volto é a dizer: a Matemática vai-se aprendendo. E o que eu estou aqui a transmitir não é para se esquecer, é para ficar nas vossas cabecinhas, lá dentro de um compartimento. Sim senhor, num cantinho, que é para quando precisarmos de, é para ir lá buscar. Tal como as transformações dos gráficos, os deslocamentos que nós falámos este ano, e que já cá andámos a fazer imensos exercícios e ainda ontem fizemos exercícios sobre isso, não se podem esquecer. Tem que ficar lá num cantinho, porque depois vamos ter que nos adaptar, quando falarmos nas funções tangentes, nas funções seno, quando falarmos nas funções logaritmo, nas funções exponenciais, …
Sim senhor, Helena, deixe-se estar na conversa que no próximo teste depois a gente fala. No próximo e nos outros. E eu volto-vos a dizer, eu quando estou a falar para vocês não estou a pregar para os patos, não estou a contar anedotas, estou-vos a transmitir conhecimentos que são importantes. E se vocês os apanharem… se calhar vão longe. Agora se vocês… quando eu estou a falar para vocês, vocês estiverem preocupadas com o que se passa ao lado, ou que a blusa é azul, ou que o vestido é preto, ou o que é que vamos comer a seguir, ou aonde é que vamos logo à noite… assim não vão a lado nenhum. Nem vocês, nem ninguém.
Ora gráfico da função representada na alínea "B".
(esboça o gráfico de *f*)



Como fica o valor absoluto?
Aluna: Muda para cima.
E: Tudo para cima. (esboça um novo gráfico de $|f(x)|$)



Como fica o simétrico? (refere-se a *f*)
Alunos: Tudo para baixo. (confundiram-se com o simétrico do ultimo gráfico. Ou seja o simétrico de $|f(x)|$)
E: Hã!? Tudo para cima!! Porque se as imagens [de *f*] são todas negativas, pelo simétrico passam todas a positivas.
(uma aluna refere-se ao gráfico de *f*, o primeiro a ser esboçado)
E: Claro! Estou a falar do primeiro! É tudo partindo do primeiro. (esboça o gráfico $-f$)



Então, os gráficos são ou não iguais?
Alunos: São.
E: E se fizerem o mesmo para a alínea "C" o raciocínio é o mesmo que fizemos para a "A".
Na "D", não é bem o mesmo, mas é parecido. Há a troca, que é assim, o simétrico o que é que faz? As imagens da esquerda que são negativas passam a positivas, as positivas passam a negativas. O que é que faz o módulo? Fica tudo positivo ou zero. Logo já não são iguais. Certo?

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O exemplo que foi tratado com os alunos, e que o episódio retrata, é em tudo semelhante ao exemplo do episódio anterior. O exemplo não é uma aplicação directa do módulo a uma função dada, é, antes, a escolha de uma das quatro funções representadas pelos respectivos gráficos que verificam uma condição inicialmente imposta.
Para que os alunos possam tratar o desafio que o exemplo exibe, eles devem ser capazes de operacionalizar simultaneamente dois aspectos do conceito de função quando é apresentada na *Faceta Gráfica*. São elas, as transformações dos planos geradas pela aplicação do módulo a uma função e a transformação do plano gerado pela simetria $-f(x)$. Não é, portanto, um exemplo simples. Este exemplo apela aos níveis cognitivos

mais altos dos alunos no tratamento do conceito de função em diversas vertentes, visa um aprofundamento no conceito de função e, por isso, deve ser considerado um *Exemplo Planeado do Conceito de Função* da 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**.

No decorrer do episódio podem observar-se alguns traços do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** que a professora evidencia no tratamento deste exemplo.
Claramente CPC:

- a professora usa o primeiro gráfico para ilustrar a forma como se escolhe uma, e rejeita três, das quatro alternativas. Com o gráfico (A), que corresponde à função *f*, esboça por separado os gráficos de $|f(x)|$ e $-f(x)$ que serão depois comparados (Cat. **Estratégias de Ensino**).
- traduz, para que os alunos entendam melhor, a igualdade $|f(x)|=-f(x)$ para a metalinguagem (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*Onde o valor absoluto fica exactamente igual ao simétrico de f de x. Contém-me.*"
- deixa bem evidente que a resolução de situações como a que estão a tratar não é uma tarefa simples (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*Isto não é só rejeitar, nós temos que perceber porque é que estamos a rejeitar. E eu insisto nisto, volto a repetir,* (…)"
- para os dois gráficos tratados, (A) e (B), a professora esboça todos os gráficos que são necessários para a correcta compreensão do exemplo por parte dos alunos (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**).
- quando esboça o gráfico do valor absoluto de *f*, na alternativa (A), a professora volta a esclarecer os alunos a forma de o fazer (Cat. **Explicações**): "*Ou seja, eu vou fazer o gráfico à parte. Ficava assim* (esboça a parte direita do gráfico igual ao anterior*), e depois… talvez… ora em vez de vir assim, ela passa para cima… passa simétrico, sim. Assim:* (indica o gráfico*). Este seria o valor absoluto de… aquele é f, não é?*"
- dá indicação aos alunos de como a interpretação de gráficos é importante para um conteúdo de um ano curricular posterior (Cat. **Conhecimento do Currículo**): " (…) *volto a repetir, que este tipo de interpretação é muito importante. Porque se vocês souberem ler gráficos, se vocês souberem interpretar os gráficos, quando chegarem ao 12º ano, já para o ano, na trigonometria, vocês não têm problemas.*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- ao trabalhar o exemplo com os alunos, a professora mostra flexibilidade na justificação da alternativa correcta. Indica a sua própria justificação depois de corroborar uma outra indicada por uma aluna (Cat. **Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental**).
- para poder demonstrar a igualdade em cada uma das duas alternativas efectivamente tratadas, a professora chama a atenção para os vários aspectos do conceito de função que estão em causa no tratamento deste exemplo: os gráficos das funções $|f(x)|$ e $-f(x)$, a forma de os obter, ramos positivos e ramos negativos e valor absoluto de uma dada imagem (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**).

- faz apelo a conexões entre a interpretação de gráficos e conteúdos a leccionar posteriormente (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**): "*Tal como as transformações dos gráficos, os deslocamentos que nós falámos este ano, e que já cá andámos a fazer imensos exercícios e ainda ontem fizemos exercícios sobre isso, não se podem esquecer. Tem que ficar lá num cantinho, porque depois vamos ter que nos adaptar, quando falarmos nas funções tangentes, nas funções seno, quando falarmos nas funções logaritmo, nas funções exponenciais, ...*"

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- indica aos alunos que a interpretação de gráficos, eventualmente com módulos, é um conteúdo importante e que deve ser bem interiorizado para momentos futuros (Cat. **Objectivos da Aprendizagem**): "*Volto é a dizer: a Matemática vai-se aprendendo. E o que eu estou aqui a transmitir não é para se esquecer, é para ficar nas vossas cabecinhas, lá dentro de um compartimento. Sim senhor, num cantinho, que é para quando precisarmos de, é para ir lá buscar.*"
- repreende uma aluna por não estar atenta (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**): "*Sim senhor, Helena, deixe-se estar na conversa que no próximo teste depois a gente fala. No próximo e nos outros. E eu volto-vos a dizer, eu quando estou a falar para vocês não estou a pregar para os patos, não estou a contar anedotas, estou-vos a transmitir conhecimentos que são importantes.*"
  Baseia o tratamento do exemplo num diálogo com os alunos, quer de forma generalizada, quer de forma individual.
- Utiliza pequenas questões para verificar as aprendizagens dos alunos (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**): "*Se este fosse o gráfico de f, como é que ficaria o gráfico do valor absoluto de f?*"; "*Então, são iguais?*"; "*Como fica o valor absoluto?*"

Uso do Exemplo

Este exemplo, tal como o exemplo do episódio anterior, enquadra-se no tipo "*Dê Exemplo de...*" com restrições. O enunciado poderia estar redigido da seguinte forma: *Dê exemplo de uma função em que* $|f(x)| = f(x)$. A diferença entre as duas formulações assenta no facto de que aquela que foi apresentada aos alunos é de escolha múltipla e, por isso, a escolha recai num dos quatro gráficos apresentados nas alternativas enquanto a segunda é resposta aberta. Contudo, o tipo mantém-se. Isto é, dar exemplo de uma função em que $|f(x)| = f(x)$, das quatro que se apresentam.

O uso deste exemplo contempla algumas das características de uma função quando apresentada na sua *Faceta Geométrica*. As características em causa são o sinal e a simetria por aplicação do módulo. Na verdade, as transformações do plano geradas por aplicação do módulo a uma função e o estudo das características gráficas da função módulo que se obtém são o objectivo do uso deste exemplo.

Como apenas se trabalha uma *Dimensão de Variação Possível* – o aspecto gráfico da função – a *Amplitude de Mudança Permitida* abrange quatro possibilidades que oferecem uma variação capaz de contribuir para a generalidade que se pretende que o aluno venha a alcançar no que respeita ao conceito de função módulo.

A resposta que a aluna proporciona no início do episódio é muito interessante. Esta resposta baseia-se apenas em aspectos de sinal e de simetria de valores reais, utilizando o conceito de valor absoluto. Assim, segundo a aluna, para que o simétrico seja sempre positivo (porque a função módulo é sempre positiva) a função terá que ter todas as imagens negativas. Logo, o gráfico que obedece a esta lógica é o gráfico representado na alternativa B.
No vídeo pode perceber-se a surpresa da professora, mas também se vê que a resposta é valorizada e aceite como correcta. Porém, o sentido utilizado não vai ao encontro da resposta planeada pela professora que prefere um uso assente nas transformações do plano geradas pela aplicação do módulo e pelo estudo das características da função módulo que se obtém.

Esmeralda: **Episódio 53**
Dia: **9 Março 07**

Início: **LB 19 min 25 Seg.**
Fim: **LB min Seg.**

Manual: **Página 140**

Exemplo planeado tratado pela professora e pelos alunos

Esmeralda: Vamos resolver o 12.

12. Um foguetão é lançado verticalmente e a distância ao solo é dada pela fórmula:

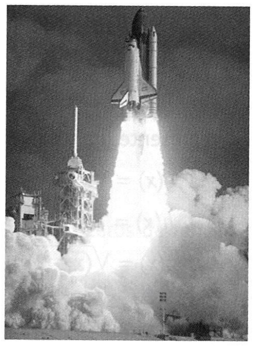
$s = -4{,}9t^2 + 300t$, sendo t em segundos e s em metros.

12.1 Ao fim de 4 segundos, a que distância está o foguetão do solo?

12.2 Dê um significado à expressão:

$$|s - 1000| < 500$$

e determine t de modo que a condição dada se verifique. (Use a calculadora gráfica para ajudar.)



Que é um problema, que vocês gostam muito. Pois é, disto é que faz falta. Não é só saber que *x mais 1 é igual a zero*, ou *é igual a x menos 1*. Só isso não chega.
Exercício 12.
(Pausa para os alunos resolverem. Apoia individualmente os alunos, principalmente em questões relativas ao uso da máquina de calcular gráfica)
E: O primeiro exercício… a primeira alínea deste exercício, melhor, não pede calculadora. Ou pede?
Alunos: Não.
E: É que eu estou a ver-vos, *tlim, tlim, tlim*, a brincar com o brinquedo, mas não é! Eu quero analiticamente.
"Um foguetão é lançado verticalmente e a distância ao solo é dada pela fórmula $s = -4,9t^2 + 300t$, sendo t em segundos e s em metros."
Primeira questão: "Ao fim de 4 segundos a que distância está o foguetão do solo?"
(uns alunos respondem s de 4, outros dão a resposta final)
E: Então façam o favor de calcular o $s(4)$. Onde está t substituem pelo valor 4. Ou seja, s de 4 (escreveu no quadro $s(4)$). Vá lá!
(pausa para ver o que os alunos fizeram e esclarecer algumas dúvidas, sobre o problema e sobre cálculo)
E: Já está o $s(4)$? Sim ou não?
Já está Daniela?
(a professora dá a indicação à aluna para ir ao quadro indicar os cálculos)
E: Vá lá, já está começado e indicado, igual e *bim, bim, bim…*
(a Daniela começa a escrever o cálculo de $s(4)$)
E: Olhem, eu, no exercício 12.2, fazia o desenvolvimento do módulo analiticamente, fazia a interpretação do que vejo, depois de ter isolado o s, e para determinar o t de modo que a condição dada se verifique, eu usava a calculadora.
(a Daniela escreveu no quadro:

$$\begin{aligned} s(4) &= -4,9 \times 4^2 + 300 \times 4 \\ &= -4,9 \times 16 + 1200 \end{aligned}$$

$$= -78,4 + 1200$$
$$= 1121,6 \qquad)$$

E: Ora, portanto, ao fim de 4 segundos, a distância do foguetão ao solo é de…(dita a resposta para a aluna, que a vai escrevendo no quadro) ao fim de 4 segundos a distância do foguetão ao solo… a distância do foguetão ao solo é de 1121,6 metros.
Muito obrigada.
Vou repetir o que disse, na 12.2, para eu dar um significado à expressão, "valor absoluto de *s* menos 1000, menor do que 500". Eu, antes de mais nada, faria o desdobramento do módulo – vocês sabem fazer – isolava o *s*, e depois interpretava aquilo que encontrava. Porque o que é que é o nosso *s*? É a distância ao solo.
Aluna: Do foguetão.
E: Exactamente, o s é a distância do foguetão ao solo. Portanto, vejam lá se conseguem fazer o desdobramento, isolar o *s*, e seguindo o que eu disse… lembrem-se que o *s* significa a distância… é a fórmula que nos permite saber a distância do foguetão ao solo. Então, temos que introduzir isto na observação que fazemos do desenvolvimento do módulo. Hum?
Façam lá!
(pausa)
E: Olhem, ajudem-me lá! Quando nós temos uma equaç…
Oiça bem Miguel, oiça bem o que eu vou perguntar.
…quando nós temos uma inequação de 2º grau, como é que a resolvemos?
Aluna: Resolvemos em cálculos auxiliares.
E: E o que é que fazemos em cálculos auxiliares?
Alunos: Igualamos a zero.
E: E depois?
Aluna: Passamos o que está no segundo membro para o primeiro e igualamos a zero.
E: Bom. Já disseram. Igualamos a zero em cálculos auxiliares, diz a Rita. Igualamos a zero para fazer o quê?
Outra aluna: Para utilizara a fórmula resolvente.
E: E o que é que eu pretendo obter?
Alunos: Os zeros…
E: Os zeros da função. E depois, a seguir, o que é que eu faço?
Aluna: Estudar o gráfico.
E: Foi o que fez, Miguel? Não foi!
É que o Miguel passou de desigualdades quadráticas para a fórmula resolvente.
Miguel: Já vou apagar.
E: Hã? Não precisa de apagar tudo, só precisa de pôr uma nota que isso está incorrecto. E colocar lá a expressão igual a zero, como cálculos auxiliares. Estou-me a fazer entender? Pronto!
Então, agora, preciso de saber: Já toda a gente conseguiu desdobrar o módulo?
Alunos: Sim.
E: Como é que ficou o desdobramento?
(muitos alunos respondem ao mesmo tempo e não se percebe nenhum)
E: "*A coisa para baixo*". O que é que é a coisa para baixo?
Ou seja, vocês obtiveram a condição: *s* menor que 1500 e…?
Alunos: … *s* maior que 500.
E: Como é que nós vamos interpretar isto, no contexto do nosso problema?
(muitos alunos falam, mas há uma que se destaca)
Aluna: É a distância ao solo do foguetão.
E: A distância!... avaliação, eu tenho valores! Eu tenho *s* menor do que 1500 e maior que 500! O *s* representa sim senhor, muito bem como disseram, a distância ao solo. Agora, temos de adaptar. Não é? Não é uma distância qualquer.
Alunos: (confuso)
E: O *s* está definido à custa do quê?
Aluna: Do tempo.
E: Do tempo. Se calhar eu pretendo os instantes…
(vários alunos respondem, destaca-se o Miguel)
Miguel: É os instantes que ele está entre 500 e 1500…

E: Então vamos lá estruturar isto direitinho antes de passar à segunda parte do problema, que é determinar o tempo de modo que a condição…
(ouve-se o toque da campainha indicando o final da aula)
…olhem, acabem em casa.

Fim da Transcrição

Nota: Na aula seguinte, pela consulta dos cadernos diários das duas alunas, pode-se observar que o resto do problema, que foi levado como trabalho de casa, foi corrigido. A resolução da condição $500 < s < 1500$ foi feita de forma analítica. De qualquer modo, pela forma como esta condição tinha sido abordada no fim do episódio que se transcreveu, já se adivinhava que seria analítica a forma de calcular a solução pedida.

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

A natureza do exemplo obriga a sua inclusão na 5ª Categoria, **Aplicações Externas**.
Na realidade esta classificação resulta da análise da segunda alínea, a primeira é um simples cálculo e foi irrelevante na inclusão do exemplo na Categoria. É uma aplicação do Conceito de Função à vida real mas com exigências ao nível cognitivo, a explicação da expressão $|s - 1000| < 500$ no contexto não é simples e estimula o aluno a aprofundar no conceito e a aperceber-se de outras características da estrutura do conceito.

No tratamento deste exemplo a professora evidencia alguns traços do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo**.
Claramente CPC:

- a aplicação do conceito de função a situações da vida real é, em si, uma estratégia que a professora utiliza para aprofundar no conceito de função, com este exemplo o aluno apercebe-se que o uso do módulo pode modular situações que envolvem distâncias, e que essas distâncias podem variar em função do tempo (Cat. **Estratégias de Ensino**).
- quando se torna necessário resolver uma inequação de 2º grau, a professora estabelece com os alunos uma troca de perguntas e respostas que denota o estabelecimento de níveis típicos de compreensão. A cada pergunta da professora os alunos sabem perfeitamente a resposta e, consequentemente, qual o passo a der dentro do processo de resolução deste tipo de inequações (Cat. **Pensamento do Estudante**).
- a repetição em diálogo do processo de resolução de inequações de 2º grau deve-se à identificação de um erro muito comum dos alunos neste tipo de cálculo, resolver uma inequação do 2º grão pelo mesmo processo que se resolvem as equações do 2º grau (Cat. **Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas**): "*Foi o que fez, Miguel? Não foi! É que o Miguel passou de desigualdades quadráticas para a fórmula resolvente.*"
- a professora sugere, na segunda alínea, que os alunos desdobrem o módulo para facilitar a compreensão da condição e explicar o seu significado no contexto do problema (Cat. **Exigências Cognitivas de Uma Tarefa**): "*Eu, antes de mais nada, faria o desdobramento do módulo – vocês sabem fazer – isolava o s, e*

depois interpretava aquilo que encontrava. Porque o que é que é o nosso s? É a distância ao solo."

- explica aos alunos no que consiste interpretar a condição no contexto do problema, o que significa ler a letra *s* integrada numa expressão com valor absoluto (Cat. **Explicações**): " *(...) vejam lá se conseguem fazer o desdobramento, isolar o s, e seguindo o que eu disse… lembrem-se que o s significa a distância… é a fórmula que nos permite saber a distância do foguetão ao solo. Então, temos que introduzir isto na observação que fazemos do desenvolvimento do módulo.*"
- Incentiva a utilização da máquina de calcular para ajudar o cálculo (Cat. **Conhecimento de Recursos**)

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- A professora separa a condição apresentada na segunda alínea em quatro partes distintas: 1-desdobramento do módulo; 2-interpretação da condição equivalente; 3-resolução das inequações de 2º grau 4-interpretação das soluções no contexto do problema (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**).

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- indica o objectivo do uso deste tipo de exemplos. Para a construção do conceito de função estas situações problemáticas são onde se aplicam as rotinas anteriores (Cat. **Objectivos da Aprendizagem**): "*Vamos resolver o 12. Que é um problema, que vocês gostam muito. Pois é, disto é que faz falta. Não é só saber que* 'x mais 1 é igual a zero'*, ou* 'é igual a x menos 1'. *Só isso não chega.*"
- mantém a atenção dos alunos através de um diálogo constante com eles, seja com todos em geral ou com algum em particular (Cat. **Obtenção e conservação da Atenção do Aluno**).
- utiliza pequenas questões para verificar as aprendizagens e, também, para conduzir os alunos no desenvolvimento do exemplo (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**): "*...quando nós temos uma inequação de 2º grau, como é que a resolvemos?*"; " (…) *Os zeros da função. E depois, a seguir, o que é que eu faço?*"

Uso do Exemplo

O exemplo em estudo é uma aplicação do Conceito de Função a uma situação real ou, se se quiser, um exemplo de modelação.
O exemplo tem duas alíneas. A primeira é um caso que envolve um simples cálculo de imagem dado um objecto que, em termos de modulação, corresponde à distância dado o instante.
A segunda alínea é a que envolve a aplicação do conteúdo em que a turma está a trabalhar nas últimas aulas, a aplicação do valor absoluto e estudo da Função Módulo que daí resulta. Contudo, a aplicação do módulo não é feita à função inicial $s(x) = -4,9t^2 + 300t$ como tem sido feito nos exemplos anteriores, este exemplo é uma função com módulo onde a função *s* é um dos elementos da expressão analítica. A

análise que se fará da expressão $|s-1000|<500$ não tem carácter gráfico como as anteriores tem, isso sim, um carácter totalmente simbólico. Isto é, a *Faceta* em que a função módulo tinha sido apresentada era primordialmente *Geométrica* e, neste caso, a interpretação recai para a *Faceta Simbólica*.

Para simplificar um pouco a análise, a professora sugere aos alunos que desdobrem, analiticamente, a expressão para, assim, interpretarem uma expressão onde o módulo já não figura. A expressão a obter será $s<1500 \wedge s>500$ que também será mais fácil para os alunos aplicarem a fórmula resolvente e, desse modo, obter os instantes pedidos.
Esta é uma forma de os alunos apreenderem o que significa, qual é o papel, da utilização do módulo num caso real.
Este exemplo cumpre bem o seu papel em termos de *Ampliação do Espaço de Exemplos* do Conceito de Função dos alunos, neste caso da função módulo. Até este momento os alunos tinham trabalhado com mais intensidade a aplicação directa do módulo a uma dada função e verificar, na *Faceta Geométrica*, as transformações no plano que tal implicava. Com este exemplo incluem no seu *Espaço de Exemplos* uma situação muito diferente das anteriormente tratadas, uma situação em que toda a primazia é dada à *Faceta Simbólica*. Ao ampliar o espaço de exemplos, o caso tratado na segunda alínea promove também o aprofundamento no Conceito de Função por parte do aluno, que aplicação do valor absoluto não tem apenas implicações *geométricas* mas, também, *algébricas*.

Um aspecto interessante do uso deste exemplo é aquele que se prende com o uso de rotinas e processos tratados em exemplos anteriores. Quando o tratamento deste exemplo envolve a resolução de uma inequação de 2º grau, pode observar-se que o uso de outros exemplos – os de processo – frutifica neste exemplo mais exigente, veja-se o diálogo entre a professora e os alunos que se inicia após a pausa para os alunos resolverem a segunda alínea.

Por fim, note-se que a professora não seguiu a sugestão do enunciado que apontava para utilização das capacidades gráficas da máquina. Salvo no que envolveu exclusivamente cálculo numérico, a professora optou por um tratamento exclusivamente analítico do exemplo proporcionando, assim, uma visão estritamente algébrica (*Faceta Simbólica*) do exemplo com função módulo e do seu significado neste modelo dado por $s(x)=-4,9t^2+300t$.

Esmeralda: **Episódio 54**
Dia: **16 Março 07**

Início: **LA 0 min 0 Seg. (Um pouco antes. Tirado da gravação áudio)**
Fim: **LA 12 min 00 Seg.**

Livro de Exercícios: **Página 48**

Exemplo planeado tratado pelos alunos e pela professora

Esmeralda: Então vamos lá corrigir o trabalho de casa.

6. Quando se atira uma bola ao ar, com uma velocidade inicial de 30m/s, a altura em metros atingida pela bola ao fim de *t* segundos é dada pela expressão

$$h = 30t - 4,9t^2$$

6.1 Fará sentido considerar qualquer real para *t*?
6.2 Determine a altura máxima atingida pela bola.
6.3 Indique o intervalo de tempo durante o qual a bola subiu.

Então o primeiro exercício do trabalho de casa dizia que "*quando se atira uma bola ao ar a uma velocidade inicial de 30 metros por segundo, a altura em metros atingida pela bola ao fim de t segundos é dada pela expressão: h igual a 30 t menos 4,9 t quadrado. Fará sentido considerar qualquer valor real para t?*"
Alunos: Não.
E: Porquê?
Alunos: Porque não existe tempo negativo.
E: Exactamente. Portanto, *não* porque o *t* representa o tempo… Estão-me a ouvir? *Não* porque *t* representa o tempo, era assim que nós devíamos responder, e por isso só faz sentido considerar *t* maior do que zero.
Houve problemas para responder a esta questão?
Quem não tinha feito, já passou?
Alunos: Sim (outros responderam que ainda não)
E: Não, porque *t* representa o tempo e, por isso, só faz sentido falar em tempo maior do que zero.
Não é do livro, fui eu que ditei. É do livro de exercícios.
Já está Carina? Pronto.
Ora, a 6.2 pedia para vocês determinarem a altura máxima atingida pela bola. Quem Fez? Como é que fez?
Não fez? Foi neste 6.2 que houve problemas…
Como?
Aluna: Calculei o vértice.
E: Calculou o vértice. E ou outros?
E qual foi o seu problema no vértice?
Aluna: Não, nenhum, professora.
E: Ah! Como disse que tinha tido… É, como acho que ainda nunca foi ao quadro e é tão bonita, venha lá fazer.
Aluna: Professora, isto deve estar mal…
E: Então!? Estamos cá, exactamente, para… Já estamos na véspera do teste, supostamente devíamos estar a fazer revisões… ou melhor, a tirar dúvidas. Não é fazer revisões. Mas os meninos e as meninas ainda não estudaram, então vamos tentar … determinadas coisas que … aí na vossa cabeça.
Este exercício, volto a repetir, esta alínea deste exercício ficaria muito mais fácil se vocês fossem à calculadora.
(a aluna escreve no quadro: $h = 30t - 4,9t^2 \Leftrightarrow$

$$-4,9t^2 + 30t \Leftrightarrow 4,9(t^2 + \quad)$$

E: Olhe, eu aconselho-a, Andreia, que faça assim à frente. Risque… apague esse risco que o meu colega aí fez, tem a mania de andar a fazer riscos, parece os gaiatos como vocês e não os apagam, continue a fazer isto para a frente se faz favor. Se não, eles lá atrás, a Patricia manda cortar a cabeça aqui à Inês … Está aí um erro, já. É que se o *t* tem que ficar com coeficiente 1, temos que colocar em evidência o -4,9.
(a aluna reformula o que está a escrever, e fica:

$$-4,9t^2 + 30t \Leftrightarrow -4,9\left(t^2 + \frac{30t}{-4,9}\right))$$

E: Exactamente. Este exercício… está aí outra coisa mal, é que não são equivalentes, querida, isso tudo são iguais porque a menina não tem aí nenhuma igualdade pelo meio.
(a aluna substitui todos os sinais de equivalente por sinais de igualdade

$$h = 30t - 4,9t^2 =$$

$$-4,9t^2 + 30t = -4,9\left(t^2 + \frac{30t}{-4,9}\right) = -4,9 \quad)$$

E: Lá em cima, sim, são tudo iguais. Vá, continue.
Eu, o que achei neste exercício, é depois os cálculos vocês tinham que envolver, impreterivelmente, a calculadora. Não é? Para fazer aquelas simplificações.
(os alunos chamam a atenção da calculadora para os cálculos efectuados no quadro

$$-4,9t^2 + 30t = -4,9\left(t^2 + \frac{30t}{-4,9}\right) = -4,9\left(t^2 - \frac{30}{4,9}t + \left(\frac{30}{4,9}\right)^2 - \left(\frac{30}{4,9}\right)^2\right) \quad)$$

E: Ora, eu resolvi porque vi que isto davam valores complicados e fui à minha calculadora e… daqui eu conclui que este valor, colocando na calculadora, dava 300 sobre 49. Tira a virgula e coloca e depois é mais fácil. Aqui, supostamente, vai ficar 300 sobre 98. E aqui, consequente mente, a mesma coisa. Certo? E agora, estes parênteses deviam ser rectos, e... nada, estes são parênteses rectos. Isso, e ali ao fundo. Isso.
(a expressão passou a ser

$$-4,9t^2 + 30t = -4,9\left(t^2 + \frac{30t}{-4,9}\right) = -4,9\left[t^2 - \frac{30}{4,9}t + \left(\frac{300}{98}\right)^2 - \left(\frac{300}{98}\right)^2\right] \quad)$$

Porque eu olhei, e achei que isto assim, mentalmente, não se faz. A não ser que vocês saibam muito bem… fazia-se, 4,9, são 49 décimas, e depois os extremos pelos extremos… mas pronto, na calculadora é mais rápido.
Fecha parênteses, ao quadrado.
(a aluna fica confusa com o cálculo que está a desenvolver)
E: Está bem! Está bem!
Alunos: É 28.
E: Sim, sim. Isso. Fecha parênteses, ao quadrado. Isso. (ajuda a aluna enquanto esta executa os cálculos)
Sobram 300 ao quadrado. Não, escreva, 300 ao quadrado sobre 98, ao quadrado. Fecha os parênteses, é isso. Igual, -4,9. Agora, sem parênteses rectos, faz o caso notável da multiplicação… ou seja, isto, exacto, e depois a mim, deu-me…
Agora, depois de os cálculos efectuados… não! Isso agora dá mais. Porque menos por menos dá mais. E como eu precisava de um valor para saber a altura, e se ando sempre com quocientes não chego a nenhuma conclusão, então eu introduzi na calculadora o -4,9 vezes o menos 300 ao quadrado a dividir por 98 ao quadrado, e isso deu +45,9. E depois como ainda precisava das coordenadas do vértice exactamente por causa da outra alínea que se seguia, nós tínhamos visto, então ainda fiz mais um passo. Isso é igual a 4,9 vezes *t* menos 3,06. Isso, fecha parênteses, ao quadrado, mais 45,9. E agora escrevi as coordenadas do vértice.

(entretanto a aluna acaba os cálculos: $= -4,9\left(t - \frac{300}{49}\right)^2 + 45,9$ e indica as coordenadas do vértice $V \to (3,06; 45,9)$)

E: E respondi que a altura máxima… a altura máxima atingida pela bola… foram estes valores que tinham dado, a quem fez? Ou não?
Não? Então perderam-se pelo caminho!
Soraia, baralhou-se?
(a Soraia explica à professora que a partir de certo passo os cálculos já não coincidiam)
E: Esqueceu-se do “metade”.
A altura máxima atingida pela bola é de, aproximadamente, 46 metros.
Alguém recorreu à calculadora para verificar isto? Não? Então fez assim analiticamente? E deu isto?
Aluna: Verifiquei.
E: Diga? Verificou e está certo? Dava-lhe isto assim também? Pronto. Muito obrigado.
Então, os que não fizeram, façam o favor de passar.
Deu isto, Simão?
E a si?
(pausa, a professora conversa com os alunos sobre temas que não se prendem com o exemplo)
E: Já está, Sr. João? A resposta é: *A altura máxima atingida pela bola é de, aproximadamente, 46 metros.*
A terceira questão era, *indique o intervalo de tempo durante o qual a bola subiu*. Tínhamos verificado que quem resolvesse a questão desta maneira… ou que recorresse à calculadora, não é?... chegava à mesma conclusão. Qual é esse intervalo? De onde a onde é que a minha bola sobe?
Aluna: De zero até 3,06.
E: Exactamente. Ou aproximadamente 3. Pronto.
Podem dizer que no intervalo de zero a 3, ou quem escreveu no intervalo de zero a 3,1, está certo na mesma (a professora escreveu no quadro $\left]0;3\right[$), depende do arredondamento que se faça. Como nós aqui também arredondámos, a altura máxima, às unidades, portanto…

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Este exemplo é um caso de modelação à vida real. É um exemplo em que o conceito de função é aplicado ao estudo, neste caso, do comportamento de um projéctil e, para isso, o aluno deve saber tratar com os vários aspectos do conceito. Deve distinguir variável dependente da independente, sendo que essa distinção deve fazer sentido no que concerne às medidas utilizadas, o metro e o segundo; deve distinguir as noções de domínio e contradomínio; deve entender a noção de monotonia de uma função; e deve, por último, ser capaz de interpretar as duas coordenadas do vértice – maximizante e máximo – no contexto do problema.
Pelo dito, este exemplo não é um caso simples de estudo de uma função em particular. É, antes, o fim de um percurso no estudo do conceito de função que, de alguma forma, interliga as *Facetas Simbólica* e *Geométrica* bem como a leitura da *Transparência* da forma $h(t)=a\left(t-h\right)^2+k$ às coordenadas do vértice da parábola associada. Assim, o *Exemplo Planeado do Conceito de Função* deve ser integrado na 5ª Categoria, **Aplicações Externas**.

Relativamente ao **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo,** o tratamento deste exemplo revela alguns aspectos a sublinhar.
Claramente CPC:

- a professora opta por um tratamento analítico das duas últimas alíneas em detrimento da opção gráfica, se tivesse usado a calculadora gráfica. A professora segue o método usado pela aluna que foi ao quadro, não impondo qualquer método de tratamento do exemplo e, dessa forma, utiliza a forma $h(t) = a\left(t-h\right)^2 + k$ para explicar as coordenadas do vértice (Cat. **Estratégias de Ensino**)

- a professora chama a atenção dos alunos que a utilização da calculadora gráfica seria mais fácil que a abordagem analítica. Assim, deixa claro que a procura das coordenadas do vértice pela via analítica é mais exigente (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*Este exercício, volto a repetir, esta alínea deste exercício ficaria muito mais fácil se vocês fossem à calculadora.*"
- grande parte do episódio destina-se a explicar à aluna que foi ao quadro a forma de obter analiticamente as coordenadas do vértice. Pontualmente, pode-se verificar uma explicação bastante focalizada num dos passos da rotina, porque razão a uma aluna os cálculos não estavam a quadrar (Cat. **Explicações**): "*Esqueceu-se do "metade".*"
- Durante o desenvolvimento da abordagem analítica do exemplo, a professora refere-se a outra forma possível, a abordagem gráfica com recurso às capacidades gráficas da máquina de calcular gráfica (Cat. **Conhecimento de Recursos**): "*Este exercício, volto a repetir, esta alínea deste exercício ficaria muito mais fácil se vocês fossem à calculadora.*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- a professora segue o método de tratamento do exemplo escolhido pela aluna que foi ao quadro, mesmo sabendo que não é a forma mais simples. Assim, a forma analítica também é a forma menos simples de tratar com os alunos e, por isso, demonstra um conhecimento sólido do conteúdo e das possíveis abordagens (Cat. **Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental**)
- intrinsecamente, o exemplo foi dividido nas diversas etapas necessárias ao seu tratamento, cálculo das coordenadas do vértice, uso do máximo e do maximizante, no contexto do modelo (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**)

Nota: Saliente-se o rigor com que a professora trata os resultados obtidos em termos da aproximação utilizada: "*Podem dizer que no intervalo de zero a 3, ou quem escreveu no intervalo de zero a 3,1, está certo na mesma (a professora escreveu no quadro* $]0;3[$*), depende do arredondamento que se faça. Como nós aqui também arredondámos, a altura máxima, às unidades,* […]."

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- utiliza o diálogo com o grande grupo em geral, e com algum aluno em particular, para manter e focalizar a atenção dos alunos (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**)
- tem cuidado especial com a informação que é colocada no quadro. Cuida que a informação esteja acessível a todos os alunos, os das primeiras filas e os das últimas (Cat. **Técnicas de sala de Aula**)

Uso do Exemplo

O exemplo que a professora tratou neste episódio constitui um caso de modelação, ou de aplicação do conceito de função à vida real.

O exemplo é constituído por três alíneas. A primeira refere-se à situação de modelação da vida real e as últimas duas estão relacionadas com o vértice da parábola associada.
A questão que a primeira alínea envolve, a contagem do tempo, não constitui qualquer problema para os alunos. Os alunos respondem correctamente e a professora limita-se a emitir a mesma resposta de forma mais correcta.
Relativamente às duas últimas alíneas, o seu tratamento poderia ser feito de duas formas: a) com recurso às capacidades gráficas da máquina de calcular gráfica; b) de forma analítica, recorrendo às coordenadas do vértice. Estas duas vias referem-se, respectivamente, ao uso da *Faceta Geométrica* e ao uso da *Faceta Simbólica*.

Como se pode observar, o tratamento das alíneas que se referem à altura máxima atingida pela bola e o intervalo de tempo no qual a trajectória da bola foi ascendente foi feito de forma analítica.
Para determinar as coordenadas do vértice os alunos recorreram à forma $h(t) = a\left(t-h\right)^2 + k$ que é, como já vimos, *transparente* às coordenadas do vértice da parábola associada: $h(t) = -4,9\left(t - \frac{300}{49}\right)^2 + 45,9$ e o seu vértice é o ponto $V \rightarrow \left(3,06;45,9\right)$. Seguindo a opção analítica que os alunos escolheram, a professora recorre a uma rotina que os alunos já possuem, obtido à custa de trabalho efectuado em momentos anteriores. É nestas situações que se pode verificar como frutificam os tratamentos de exemplos da 2ª e 3ª Categorias, **Abordagem Inicial Autónomas** e **Esclarecimento e Aprofundamento**, que é a parte que mais ocupa o episódio transcrito, passar da expressão $h = 30t - 4,9t^2$ para $h(t) = -4,9\left(t - \frac{300}{49}\right)^2 + 45,9$.
Saliente-se que a professora opta pelo processo analítico num caso em que o cálculo se pode constituir como factor perturbador. A professora, seguindo os alunos, não recorre ao uso da calculadora gráfica, contrariando o que se pode considerar normal, pois é crença generalizada entre professores que determinados casos são específicos do uso da máquina, enquanto outros são específicos do tratamento analítico. É, justamente, a dificuldade associada ao cálculo que determina um ou outro tratamento.

Obviamente, determinadas as coordenadas do gráfico, analiticamente ou com recurso às capacidades gráficas da calculadora, a resposta às duas alíneas é imediata pela correcta análise da parábola associada e, também, pela distinção das duas variáveis em causa: *h* como variável dependente em metros e *t* como variável independente em segundos.
Por fim, este é outro exemplo que o aluno agrega ao seu *Espaço de Exemplos* promovendo a sua ampliação no que se refere a aplicações à modelação de casos da vida real.

Esmeralda: **Episódio 55**
Dia: **16 Março 07**

Início: **LA 12 min 00 Seg.**
Fim: **LA 24 min 30 Seg.**

Livro de Exercícios: **Página 48**

Exemplo planeado tratado pelos alunos e pela professora

Esmeralda: E era o7 também. O 7 aqui no livro, para vocês era o segundo exercício.
Ora vamos ler o segundo exercício:

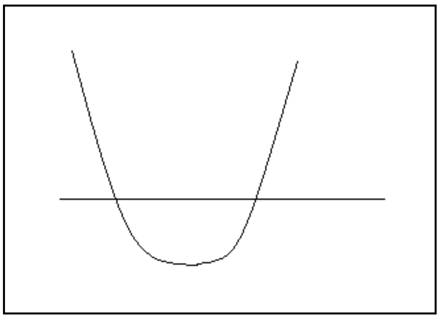
> 7. Para os doze meses de 1999, uma empresa apresentou as contas, expressas em milhares de euros, através da fórmula: $f(t) = t^2 - 8t + 15$, em que a unidade de tempo é o mês e $t = 0$ corresponde a 1 de Janeiro de 1999.
>
> 7.1 Em que meses foi positivo o saldo da empresa?
>
> 7.2 Indique o mês em que a empresa teve prejuízos e qual o seu montante.

Primeira questão: *Em que meses foi positivo o saldo da empresa?*
O que é que vocês fizeram?
Alunos: Achámos os zeros.
E: Procuraram os zeros.
Simão: E vimos a parábola.
E: E depois, diz o Simão, fez o estudo da parábola. Quem mais fez dessa maneira? Aqui o Simão… você não? Fez? Mais quem?
Mais ninguém? Não?
Então como é que responderam?
Aluna: Fui à tabela.
E: Ai foi à tabela! Então, e se as pilhas da calculadora se acabassem? Ou se eu tivesse escrito no teste "*Sem recorrer à calculadora*"?
Aluna: Ia ao estudo do gráfico.
E: Ah! Então era isso que devia ter feito, porque eu pedi que era para praticar para o teste. Lembra-se?
Aluna: Sim.
E: Ah, pois! (imperceptível, brinca com a aluna) … Venha lá fazer, ande.
(a Margarida vai fazer ao quadro)
E: [Escreva] lá em cima. Isso.
(a professora continua a brincar com os alunos e a Margarida começa a escrever

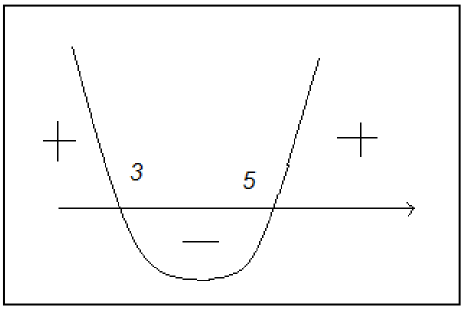
$t^2 - 8t + 15 \Leftrightarrow$)

E: Margarida, equivalente… antes do equivalente o igual a zero.
(a aluna apaga com a mão o sinal de equivalente)
E: Para que está a sujar as mãozinhas? Tem um apagador.
Sr. Ricardo, uma vez que faltou ontem, o que eu ditei, porque isto… não sei se o senhor tem, isto é um livro que vocês (… Imperceptível).
E ontem, e ontem, que o senhor não veio, estivemos a resolver exercícios… de qual? Do vosso [manual], não foi? Tinham levado no dia anterior.
Daquele livro… sabe qual é? Já o abriu alguma vez?
Ricardo: Sim, sim.
E: Ah! Não tem pó. Vai saindo o pó. Ao contrário da calculadora (… imperceptível).
(a Margarida escreveu no quadro $t^2 - 8t + 15 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} \Leftrightarrow t = 8 \pm$)
E: Dois.
Margarida: Hã?

E: Dois.
Margarida: Ah, não estava a perceber.
E: Então, 64 menos 60 dá 4, raiz quadrada de 4 dá 2. Não?
Margarida: Sim, só que eu…
E: Então pronto, siga, siga. Desenvolvamos isso. Nós já somos muito crescidos, já sabemos muito, não é João?
João: Não sei.
(risos, a professora brinca com o João)
(a Margarida termina os cálculos $t = \frac{8 \pm 2}{2} \Leftrightarrow t = \frac{8+2}{2} \vee t = \frac{8-2}{2} \Leftrightarrow t = 5 \vee t = 3$, e chama a professora para indicar que terminou os cálculos)
E: (deixa de brincar com os outros alunos) Fazer o estudo. Eu estou a ouvi-la! Acho que tem que fazer o estudo, boa? Se não, não resolvemos o exercício!
Margarida: Aaaaa…
E. Surgiu algum problema?
Margarida: Foi agora.
E: Então diga.
Margarida: Fazer a parábola, professora?
E: Convém, fazer o esboço.
(a aluna faz uma parábola não muito bem. Os restantes alunos riem-se)



E: Está bom! Quem souber fazer melhor que faça e mostre, porque se eu for aos cadernos de certeza que há lá pior.
Ali a setinha. Isso. Vá, agora os sinais. Não, dentro. Isso
(a aluna indica o sentido de crescimento do eixo, marca os zeros e o sinal da parábola)



E: E agora, o que é que o exercício pedia? *Em que meses foi positivo o saldo da empresa?*
Margarida: De 1 a 3.
E: Meses.
Margarida: Ah! De Janeiro a Março e de Maio até Dezembro.
E: Outra forma mais simples de dizer isso.
Margarida: Todos os meses menos Abril.
E: Boa! Então vá, escreva. O saldo da empresa foi positivo excepto… ai espere. Não.
… foi positivo todos os meses do ano excepto nos meses de… Quais é que foram os meses que vocês disseram?
Aluna: Abril.

E: Só!?
Aluna: Março, Abril e Maio.
E: Ah! Em Março é zero e em Maio também. Eu quero positivo.
… Em todos os meses do ano excepto…
Aluno: … Março, Abril e Maio.
E: … Março, Abril e Maio. Sim senhora. (a Margarida acaba de escrever a resposta no quadro e senta-se) Muito obrigada.
(a professora brinca com os alunos enquanto alguns passam o que está no quadro)
E: Bom. Aproximadamente, dizia que, para vocês indicarem, o mês em que a empresa teve prejuízos e qual o seu montante.
Eu gostaria que me dissessem o que é que pensaram.
Aluna: O vértice, calculá-lo.
E: Calcular o vértice. Eu não calculava nada! Eu, olhando ali para o gráfico, se os meses são inteiros, …
Aluna: … para saber o montante.
E: Ah! Mas teve que pensar outra coisa antes disso.
Aluna: O mês do ano.
E: Ah! Boa! E qual é?
Aluna: Maio.
E: Hã? Não ouvi!
Aluna: Abril.
E: Deixe, deixe o caderno e olhe para o quadro. Março e Maio é zero, não é?
Simão: Não houve lucro nem prejuízo.
E: Exactamente. Não houve lucro nem prejuízo. Houve lucro nos primeiros meses do ano até Março, em Março nem lucro nem prejuízo. Depois há ali uma parte em que as imagens são negativas, como os meses são inteiros, e o próximo mês em que não há lucro, em que nem há lucro nem prejuízo, é o mês de Maio, então entre Março e Maio só existe um mês. Qual é?
Alunos: Abril.
E: O mês de Abril. Que é o mês 4. E agora, sim senhora, devemos calcular a imagem do 4. Quem é que fez? Ninguém fez.
Simão: Eu fiz.
E: Você fez, Simão? Então vá lá fazer.
(enquanto o Simão vai ao quadro a professora fala com uma aluna sobre assuntos não relacionados com o exemplo)
E: É menos. Mais quinze, igual… quanto é que isso deu? (no quadro o Simão escreveu

$$f(4) = 4^2 - 8 \times 4 + 15 = -1 \qquad)$$

Olhem lá, isto dá -1. […] E agora?
(uma aluna responde, mas de forma imperceptível)
E: Diga? O que é que disse?
Aluna: No enunciado diz que os valores são em milhares.
E: Exactamente. O "menos" significa prejuízo, no enunciado diz que os resultados são em milhares de euros. Logo, -1 significa ter um prejuízo de…
Alunos: Um milhar…
E: …1000 euros. Milhar, mil.
Então faça o favor de me dar a resposta.
(o Simão escreve no quadro: *Em Abril a empresa teve um prejuízo de 1000 euros*)
E: … de 1000 euros. Muito obrigado.

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Tal como o exemplo do episódio anterior, e pelas mesmas razões, o exemplo contido neste episódio é uma aplicação do estudo de uma função quadrática a uma situação da

vida real. Neste caso, os aspectos do conceito de função envolvidos são a noção de raiz e de sinal que representam, respectivamente, os meses em que não há lucro ou prejuízo e os meses em que alguma destas duas situações se verifica.
O exemplo envolve alguma exigência cognitiva por parte dos alunos. O tratamento inteiro dos resultados (0 - Janeiro; 1 - Fevereiro; 2 – Março; etc.) obriga os alunos a uma relação cuidadosa entre o significado dos objectos da função e o significado das respectivas imagens que são expressas em milhares. Outro aspecto, é a relação entre o sinal das imagens da função e o seu significado em termos de lucro e de prejuízo.
Assim, este *Exemplo Planeado* é naturalmente incluído na 5ª Categoria, **Aplicações Externas**.

O episódio contém alguns traços do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** evidenciados pela professora no tratamento deste exemplo.
Claramente CPC:

- a professora estabelece com uma aluna uma pista sobre a forma de tratar o exemplo. Entre as duas há uma compreensão exacta do significado da frase "*sem recorrer à calculadora*" e, recorrendo a esta compreensão a professora dá à aluna a indicação de que a forma de abordar o exemplo é pela *Faceta Simbólica*, isto é, o tratamento deve ser analítico e não com recurso às capacidades gráficas da calculadora gráfica (Cat. **Pensamento do Estudante**) "*Ai foi à tabela! Então, e se as pilhas da calculadora se acabassem? Ou se eu tivesse escrito no teste* "Sem recorrer à calculadora"?"
- a professora transmite aos alunos qual o ponto mais sensível no tratamento deste exemplo, a diferenciação entre *positivo* e *não negativo*. Este aspecto gerou um erro de raciocínio na aluna que estava no quadro, a Margarida, quando indica que os meses do ano em que o saldo da empresa foi positivo (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**):

  "**Margarida**: *Todos os meses menos Abril.*
  Esmeralda: *Boa! Então vá, escreva. O saldo da empresa foi positivo excepto… ai espere. Não.*
  ... foi positivo todos os meses do ano excepto nos meses de… Quais é que foram os meses que vocês disseram?
  Aluna: *Abril.*
  Esmeralda: *Só!?*
  Aluna: *Março, Abril e Maio.*
  Esmeralda: *Ah! Em Março é zero e em Maio também. Eu quero positivo.*
  ... Em todos os meses do ano excepto…
  Aluno: *... Março, Abril e Maio.*"
- incentiva a utilização do esboço da parábola associada para melhor compreensão dos resultados obtidos, no contexto do problema, por parte dos alunos (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**)
- explica à Margarida, no contexto do problema, a diferença entre o saldo ser positivo e não ser negativo, o que elimina os meses de Março e Maio. Também explica aos alunos qual o significado do sinal menos, no contexto do problema (Cat. **Explicações**): "*Em Março é zero e em Maio também. Eu quero positivo.*";

e "*Exactamente. O "menos" significa prejuízo, no enunciado diz que os resultados são em milhares de euros. Logo, -1 significa ter um prejuízo de…*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- identifica, com a aluna que está no quadro, os elementos que são necessários a compreensão da situação modelada: adequação da parábola, identificação das raízes, parte positiva e negativa da parábola, valores inteiros dos objectos e imagens e o seu sinal, sempre no contexto do problema (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**): "*Não houve lucro nem prejuízo. Houve lucro nos primeiros meses do ano até Março, em Março nem lucro nem prejuízo. Depois há ali uma parte em que as imagens são negativas, como os meses são inteiros, e o próximo mês em que não há lucro, em que nem há lucro nem prejuízo, é o mês de Maio, então entre Março e Maio só existe um mês. Qual é?*"
- relaciona as características da função quadrática e da parábola associada com os elementos importantes ao modelo em causa: Sinal positivo é lucro, sinal negativo é prejuízo, o valor das imagens deve ser lido em milhares de euros, etc. (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**).

Nota: É de sublinhar a preocupação da professora no rigor da linguagem utilizada. Primeiro, quando a Margarida refere os objectos "*De 1 a 3*" e a professora corrige para que ela refira os meses e, em segundo lugar, na forma de responder a pergunta que o exemplo contém, "*Então faça o favor de me dar a resposta*."

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- a professora pede a uma aluna que vá ao quadro e com os restantes alunos verificam a sua prestação. Desta forma, a professora mantém atentos os alunos e empenhados no tratamento de exemplo proposto (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**).
- No início do episódio lê, de forma pausada, o enunciado do exemplo de modo a que fique mais claro e compreensível para os alunos e, no fim do episódio, fecha o episódio com a identificação clara da resposta que os alunos devem transcrever do quadro para o caderno diário (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).

Uso do Exemplo

O episódio que se transcreve inclui o tratamento de um exemplo que relaciona o estudo do sinal de uma função quadrática com uma situação da vida real. É, portanto, um exemplo de modelação.
Os alunos, para responderem às questões que o exemplo apresenta, devem fazer o estudo da função quadrática no que se refere aos zeros e ao sinal.

O enunciado não é indicativo do método a empregar mas, por indicação da professora, os alunos abordaram o exemplo de forma analítica e não utilizaram as capacidades gráficas da máquina de calcular. O intuito da professora, ao dar tal indicação, prende-se com motivos relacionados com o teste de avaliação que se realizará na próxima aula.

Assim, a professora aproveita o exemplo para, também, tratar a função quadrática no que respeita à existência de zeros e ao sinal.
O recurso às *Experiências Prévias* dos alunos é evidente. Aliás, a professora utiliza o exemplo como forma de recordar essas experiências e reavivá-las para a posterior utilização em situação de avaliação: "*Então era isso que devia ter feito, porque eu pedi que era para praticar para o teste. Lembra-se?*". Por isto, podemos afirmar que o exemplo joga um duplo papel, o tratamento analítico dessa função e a aplicação do estudo da quadrática numa situação de aplicação à vida real, sendo que, no início do episódio, o desenvolvimento destas duas vertentes é feito no âmbito da *Faceta Simbólica* do conceito de função mas, depois, aquando da aplicação à vida real, utiliza-se a *Faceta Geométrica* por ser a mais indicada à interpretação da situação modelada.

Em síntese, independentemente da abordagem ter sido analítica ou côa recurso à máquina de calcular, o uso deste exemplo destina-se a dar ao aluno uma outra situação de aplicação do conceito de função. Este é outro caso, específico da função quadrática, que promove a *Ampliação do Espaço de Exemplos* do aluno.
Note-se que este exemplo tem um aspecto complementar ao exemplo que foi usado no episódio anterior (episódio 54). Ambos são exemplos de modelação, e enquanto o exemplo anterior se referia à aplicação do vértice e da noção de monotonia, este exemplo refere-se à aplicação da noção de raiz e de sinal de uma quadrática às condições da situação modelada.

Esmeralda: **Episódio 56**
Dia: **16 Março 07**

Início: **LA 29 min 38 Seg.**
Fim: **LA 47 min 30 Seg.**

Caderno de actividades: **Página 20**

Exemplo planeado tratado pelos alunos e pela professora

Esmeralda: Então cá vai.

Indique os valores reais de *k* que tornam a função $f : x \to x^2 + kx + 9$ positiva em todo o seu domínio.

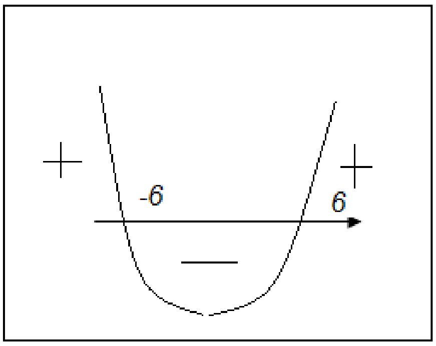
Aluna: (imperceptível)
E: Sim senhora.
Outra aluna: … positiva em todo…?
E: … o seu domínio.
(pausa)
E: Estou à espera, não fiquem a olhar para mim. Porque na terça-feira, quando tiverem o teste à frente, por muito que olhem para mim, eu não vos transmito nada. Têm que ser vocês a transmitirem-me a mim aquilo que sabem, a escreverem no papel.
Aluna: Não é preciso fazer a parábola?
E: Se acham que não… Como é que responde?
Quando é que uma função é positiva em todo o seu domínio? O que é que acontece ao seu gráfico?
Miguel: Está acima do eixo do x.
E: Não percebo.
Miguel: Está acima do eixo do x.
E: Diz o Miguel, e bem, está todo acima do eixo dos x. Concretamente o que é, ou como é a representação gráfica desta função?
Alguns alunos: Uma parábola.
Outra aluna: Maior ou igual que zero.
E: A representação gráfica é maior ou igual que zero?
Aluna: Não, (imperceptível).
E: Foi o que eu aprofundei. Por isso é que vocês erram nos testes. Oiçam. E habituem-se a ler o que lá vos vai aparecer. Porque é no ler é que está o ganho. Se não lermos não sabemos o que nos pedem, se olhamos e inventamos, estamos a responder errado. Ou temos muita sorte e por acaso até é aquilo que pedem. Eu perguntei, graficamente, como é esta função? Qual é a representação gráfica desta função?
Alunos: É uma parábola.
E: É uma parábola. Então, se esta parábola tem que obedecer á condição que o Miguel disse que é estar toda acima do eixo dos *xx*, o que é que tem que acontecer?
Núria: O *k* tem que ser maior que zero.
E: Diz a Núria que o *k* tem que ser maior do que zero. Porquê?
Núria: Para poder estar acima…
E: E o poder estar acima implica o valor de *k*? Só?
O que é que significa eu ter uma parábola toda acima do eixo dos *xx*?
Núria: […] o resultado tem que ser positivo.
E: Mas qual resultado? Eu não tenho ali nenhuma igualdade! Aquela expressão não tem nenhum resultado, aquela expressão tem uma representação. Aquela expressão representa a função *f*, não tem resultado nenhum.
Volto a perguntar: Quando é que eu tenho uma parábola que está toda acima do eixo do *x*?
Aluna: Quando não tem zeros.

E: E quando é que eu tenho uma parábola que está toda abaixo do eixo do *x*? Quando não tem nenhum zero! Agora, o que é que acontece à que está toda acima do eixo do *x*? Significa que ela tem o quê? Concavidade voltada para onde?
Alunos: Para cima.
E: E a outra?
Alunos: Para baixo.
E: E o que é que significa não ter nenhum zero?
Aluno: Não pode intersectar o eixo do *x*.
E: Pois, graficamente é. Mas na prática?
O que é que eu encontro…
Aluno: O *k* não pode ser zero.
E: Não. O que é que eu encontro que me diz que a minha função não intersecta o eixo do *x*?
(algum aluno fala de forma hesitante)
E: Não inventem, pensem! Matemática, os inventores já morreram, eu não conheço nenhum vivo. E o problema da matemática é que vocês não pensam, matemática exige raciocínio. Não é olhar para lá e dizer a primeira baboseira que me vem à cabeça.
- Olha é positivo!
- Olha é porque o x…
Não é assim! Temos que pensar nos conhecimentos que temos. E nós já cá trabalhámos isto. O que é que vocês fazem para saber se uma parábola intersecta, ou não, o eixo do *x*? Ou uma função intersecta ou não o eixo do *x*?
Alunos: Vemos os zeros.
E: Igualamos a zero! E qual é a conclusão a que chegamos?
Aluna: Que não há nenhum zero.
E: E quando é que não há nenhum zero?
Aluna: Quando não intersecta o eixo do *x*.
E: Boa! Analiticamente!
Outra aluna: Quando é impossível. Não é?
E: Quando é…?
Aluna anterior: … impossível.
E: E quando é que é impossível?
Aluna anterior: Quando o binómio discriminante é menor do que zero.
E: Boa! É isso! Quando o binómio discriminante é menor do que zero. Ou seja, quando eu estou perante uma raiz quadrada de um número…?
Alunos: … negativo.
E: …negativo. Ou seja, quando o *b* ao quadrado menos *4ac* é negativo a minha função não tem zeros. E como ela, não tendo zeros, fica toda positiva vocês ao fazerem a substituição verificam que toda a função fica sobre o eixo… ou seja, acima do eixo do *x*. Nem sequer toca, porque para tocar tinha que acontecer o quê?
Aluna: Tinha um zero.
E: Tinha que ter um zero. Então façam favor. Indicar o *delta*, os meninos aprenderam no 9º ano de escolaridade, e isto vocês aprenderam no 9º ano de escolaridade que, numa equação de 2º grau, se o *delta* for menor do que zero não tem nenhuma solução; se o *delta* for igual a zero tem uma solução e se o *delta* for maior do que zero tem duas soluções. Isto é de 9º ano e vocês estão no 10º, quase no final.
(pausa para os alunos trabalharem e a professora esclarece algumas dúvidas individualmente)
E: Ora, depois de ter percorrido carteira a carteira, depois de ir dando nas orelhas a alguns de vocês, houve alguns que espertaram e perceberam que eu estava a falar no *delta*. *Delta*, binómio discriminante… quer dizer, nem fui eu, foi a Inês Duarte. Eu apelei aos conhecimentos de 9º ano e ela respondeu-me dali que *delta* menor que zero (escreveu no quadro $\Delta < 0$).
O que é o *Delta*?
Alunos: *b* ao quadrado…
E: *b* ao quadrado. Quanto é o *b* no caso concreto?
Alunos: *k*.
Alguns alunos: *k* ao quadrado.
E: … menos quatro… quanto é o meu *a*?
Alunos: 1.
E: Quanto é o meu *c*?

Alunos: 9.
E: …e isto tem de ser…?
Alunos: Menor que zero.
(a professora foi escrevendo no quadro $k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 < 0$)
E: E isto fica, *k* ao quadrado menos 36 menor que zero (escreve $k^2 - 36 < 0$).
Quando nós queremos fazer o estudo da parábola, ou seja, quando temos uma inequação deste tipo, o que é que fazemos?
Alunos: Cálculos auxiliares.
E: Em cálculos auxiliares colocamos os zeros e fazemos o estudo da nossa parábola. Foi ou não foi o que andámos aqui a fazer? E, isto, eu já vi feito em três ou quatro pessoas.
(a professora escreve no quadro:

$$k^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 36 \Leftrightarrow k = -\sqrt{36} \vee k = \sqrt{36} \Leftrightarrow k = -6 \vee k = 6 \quad)$$

E: E agora temos dois zeros.
Aluno: Fazemos a parábola.
E: Concavidade voltada para…?
Aluno: … cima.
E: (faz o esboço da parábola e marca as raízes) -6 e 6.
Onde é que ela é negativa?
Alunos: de -6 a 6.
E: E onde é que ela é positiva?
(os alunos indicam os intervalos $]-\infty;-6[$ e $]6;+\infty[$, e a professora marca o sinal)



E: Então e agora? Contem-me lá o que é que eu devo responder?
Qual é o intervalo onde o meu *delta* é menor que zero?
Alunos: Entre -6 e 6.
E: Isto – $k^2 - 36 < 0$ – é equivalente a *k* ser maior que -6 e menor que 6 (escreveu

$$k^2 - 36 < 0 \Leftrightarrow -6 < k < 6 \quad)$$

E: Conjunto solução *k* pertence ao conjunto aberto de -6 a 6.
(escreveu no quadro $C.S. =]-6;6[$).
Chinês? Não é chinês. Já fizemos montes destas coisas. Em contexto de problemas, muita coisa desta.

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O exemplo envolve o estudo de uma expressão quadrática quanto ao sinal e número de zeros. A expressão não define *uma* função de 2º grau mas uma expressão que define uma família de funções quadráticas, depende do valor que se atribua ao parâmetro *k*.

Estamos, portanto, num caso que não é simples. Não se trata de estudar aspectos de uma função quadrática ou de características da sua parábola associada, mas de estudar uma generalidade de funções quadráticas com aspectos comuns e outros que não o são. Cabe ao aluno entender o papel do parâmetro k e o que a sua variação implica em determinado aspecto da função e da parábola, designadamente, o número de raízes e o sinal.

Para que este estudo tenha sentido para o aluno é necessário que o seu conhecimento do conceito de função quadrática tenha atingido um aprofundamento considerável. Isto é, que a imagem do conceito esteja suficientemente estruturada de forma a garantir ao aluno uma flexibilidade suficiente no tratamento de todos os aspectos da expressão do exemplo e as relações que estes têm com as características das parábolas associadas, mediante a variação de k.

Pelo que se mencionou, este *Exemplo Planeado de Conceito* deve ser integrado na 4ª Categoria, **Aplicações Internas**.

O relativamente aos aspectos do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** evidenciados pela professora no tratamento deste exemplo, podemos referir os que seguem.

Claramente CPC:

- a professora socorre-se da relação entre a *Faceta Simbólica* e a *Faceta Geométrica* do conceito de função para ilustrar por via gráfica aquilo que é apresentado de forma analítica. Isto é, ser positivo em todo o domínio é melhor entendido por meio da visualização de um gráfico sempre acima do eixo horizontal (Cat. **Estratégias de Ensino**): "*Quando é que uma função é positiva em todo o seu domínio? O que é que acontece ao seu gráfico?*"
- a professora aborda com os alunos o significado da restrição *positiva em todo o seu domínio* tanto de forma gráfica: "*Então, se esta parábola tem que obedecer á condição que o Miguel disse que é estar toda acima do eixo dos xx, o que é que tem que acontecer?*"; como de forma analítica: "*Mas na prática? Como é que eu encontro…", "Boa! É isso! Quando o binómio discriminante é menor do que zero.*" (Cat. **Pensamento do Estudante**)
- expressa de forma enfática o essencial do exemplo. Isto é, deixa bem claro aos alunos que a solução deste caso radica na capacidade de eles relacionarem o sinal do binómio discriminante e o número de raízes da quadrática com a existência de imagens positivas e negativas ou de apenas um sinal (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*Ou seja, quando o b ao quadrado menos 4ac é negativo a minha função não tem zeros. E como ela, não tendo zeros, fica toda positiva vocês ao fazerem a substituição verificam que toda a função fica sobre o eixo… ou seja, acima do eixo do x.*"
- esboça o gráfico que expressa o sinal do binómio discriminante de forma aos alunos entenderem qual a variação do parâmetro k adequada à restrição contida no enunciado do exemplo (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**).
- explica aos alunos a relação entre o sinal do binómio discriminante e o número de zeros da função quadrática (Cat. **Explicações**): "*Então façam favor. Indicar o **delta**, os meninos aprenderam no 9º ano de escolaridade, e isto vocês aprenderam no 9º ano de escolaridade que, numa equação de 2º grau, se o **delta***

for menor do que zero não tem nenhuma solução; se o ***delta*** *for igual a zero tem uma solução e se o* ***delta*** *for maior do que zero tem duas soluções.*"

- descreve e justifica a utilização de um conteúdo de um ano de escolaridade anterior (fórmula resolvente e binómio discriminante) no exemplo em questão (Cat. **Conhecimento do Currículo**): "*É isso! Quando o binómio discriminante é menor do que zero. Ou seja, quando eu estou perante uma raiz quadrada de um número* […] *negativo. Ou seja, quando o* ***b*** *ao quadrado menos* ***4ac*** *é negativo a minha função não tem zeros.*" e "*os meninos aprenderam no 9º ano de escolaridade, e isto vocês aprenderam no 9º ano de escolaridade que, numa equação de 2º grau, se o* ***delta*** *for menor do que zero…*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- a professora percorre e isola as etapas necessárias ao estudo do sinal da expressão $f: x \to x^2 + kx + 9$ e de forma que esse sinal seja positivo em todo o domínio (Cat. **Desmonta o conteúdo em Componentes Chave**): 1- determinar a expressão do binómio discriminante; 2- impor um sinal negativo ao binómio discriminante; 3- justificar a não existência de zeros; 4- relacionar a não existência de zeros com o sentido da concavidade para concluir sobre o sinal positivo em todo o domínio.
- ao relacionar os conteúdos leccionados no 9º ano (fórmula resolvente e binómio discriminante) com o estudo do sinal de uma função quadrática, a professora deixa patente a relação estreita entre conteúdos de anos diferentes (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**).

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- a apresentação deste exemplo insere-se na preparação de um teste de avaliação. Assim, um dos objectivos desta proposta prende-se com o reavivar de certos aspectos vinculados ao estudo de uma função quadrática de forma a melhorar a prestação dos alunos nesse momento de avaliação (Cat. **Objectivos da Aprendizagem**).
- invoca o teste de avaliação da aula seguinte como forma de sublinhar a importância da atenção que deve ser prestada a este exemplo, além de manter um diálogo constante com os alunos de forma a os manter centrados no trabalho (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**): "*Porque na terça-feira, quando tiverem o teste à frente, por muito que olhem para mim, eu não vos transmito nada. Têm que ser vocês a transmitirem-me a mim aquilo que sabem, a escreverem no papel.*"
- a professora alerta os alunos para a importância de ler com atenção e de interpretar correctamente o enunciado das actividades propostas de forma a evitar erros (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**): "*Por isso é que vocês erram nos testes. Oiçam. E habituem-se a ler o que lá vos vai aparecer. Porque é no ler é que está o ganho. Se não lermos não sabemos o que nos pedem, se olhamos e inventamos, estamos a responder errado. Ou temos muita sorte e por acaso até é aquilo que pedem.*"

Uso do Exemplo

Com o estudo deste exemplo, a professora pretende que os alunos relacionem *entre si* vários aspectos do conceito de função quadrática e, consequentemente, como estes aspectos se reflectem nas características apresentadas pela parábola associada. Os aspectos que professora e alunos devem trabalhar são o sinal de a, o número de raízes da quadrática e o sinal das imagens. Por outro lado, as características da parábola associada que directamente se referem a estes aspectos são o sentido da concavidade, o número de intersecções com o eixo horizontal e o sinal do gráfico. Evidentemente, o elo de ligação entre os aspectos da quadrática e as características do seu gráfico é, neste exemplo, o sinal do binómio discriminante e, mais especificamente, a influência que sofre pela variação do parâmetro k.

A *Variação* de k é neste exemplo um factor de *Generalização* e a sua influência no sinal do binómio discriminante é a ligação entre a *Faceta Simbólica* e a *Faceta Geométrica*.
A apresentação do exemplo é feita na faceta simbólica. Contudo, o estudo da variação do sinal do binómio discriminante, também do 2º grau, é feito na faceta geométrica bem como a interpretação da influência do parâmetro na modificação do gráfico de função quadrática inicial.
A *Variação* do parâmetro k deve ser interpretada como uma *Dimensão de Variação Possível* em que a *Amplitude de Mudança Permitida* é todo o conjunto dos números reais. Todavia, o objectivo do exemplo é saber qual a restrição a efectuar à *Amplitude de Mudança Permitida* de forma que o número de raízes da função seja nulo.
Saliente-se que a professora apela aos conhecimentos prévios dos alunos, o estudo da fórmula resolvente no ano anterior (9º ano), para justificar a variação no número de raízes da parábola associada. A generalidade transportada pelo parâmetro k gera, portanto, uma família de quadráticas com características comuns, que são observáveis através da *Transparência* da forma $f(x)=ax^2+bx+c$ – o sentido da concavidade e a ordenada na origem – mas que diferem nas coordenadas do vértice e nas raízes. Estas características da parábola são do conhecimento dos alunos mas, para o tratamento específico deste exemplo, a professora apenas necessita referir o número de raízes e o sentido da concavidade e, com base nisso, explicar a variação que k induz e a *generalidade* que acarreta.

Pelo dito, o objectivo do uso deste exemplo persegue razões de generalização e, no seu âmbito, procurar particularizações. Isto é, na *Generalidade* que k transporta quando gera uma família de quadráticas e de parábolas associadas, procurar alguns elementos da família que verificam determinada particularidade pela imposição de restrições à *Amplitude de Mudança Permitida* na *Dimensão de Variação* introduzida pelo parâmetro. Estes elementos são aqueles cujo sinal é sempre positivo e, consequentemente, cujo gráfico está acima do eixo dos *xx*.

Esmeralda: **Episódio 57**
Dia: **16 Março 07**

Início: **LB 1 min 25 Seg.**
Fim: **LB 13 min 41 Seg.**

Caderno de actividades: **Página 20**

Exemplo planeado tratado pela professora e pelos alunos

Esmeralda: Quero o exercício 7 da página 20, ficha 5. Tem a ver com a matéria lá de trás, das rectas. Eu não me lembro, mas acho que isto até faz parte também de…
Vou repetir, página20, ficha 5, exercício 7.

Seja *r*: $-2y+3x=-1$, determine a equação da recta *s*:, paralela a *r*:, e que passe no ponto $(-1;2)$.

(pausa para os alunos trabalharem e a professora apoia individualmente os alunos)
E: Ora, quando nos dão… empreste-me lá o livro, se faz favor… quando nos dão uma equação duma recta (escreve $-2y+3x=-1$) nesta forma e nos pedem para escrever a equação de uma outra recta que contenha o ponto de coordenadas $(-1;2)$, e seja paralela àquela recta. Eu vi muita gente chegar ali e dizer… primeiro, antes disso, o que é que duas rectas paralelas têm de comum?
Alunos: O declive.
E: E então, neste seguimento, vi muita gente a olhar para ali e dizer assim: o declive é 3. Se bem me lembro, eu disse que $y=mx+b$ era a equação reduzida de uma recta onde o *m* me dava o declive.
y, vou repetir, igual a *mx* mais *b*. Isso significa que o coeficiente do *y* é quanto?
Alunos: 1.
E: Ou eu vejo mal, ou está lá um -2. Ou eu vejo mal, ou nem sequer aquela equação está escrita nessa forma. Ou está?
(muitos alunos referem que se tem que resolver em ordem a *y* ou que se tem que isolar o *y*)
E: Então vá, comecem por fazer isso, se faz favor.
(pausa)
E: Já resolveram? Então, agora vou escrever o seguinte – e isto agora vai para si – não sabem escrever as coisas como deve ser. Ou então…. Não percebo.
Fazem isto: -2*y* igual a -3*x*… nem era assim que você tinha! Mas pronto… mais 1.
(a professora escreveu no quadro $-2y+3x=-1 \Leftrightarrow -2y=-3x+1$)
E: E depois? 5º, 6º, 7º, 8º, 9º ano de escolaridade.
Aluna: É -1.
E: Ah, é -1 (altera para $-2y+3x=-1 \Leftrightarrow -2y=-3x-1$).
Hã, volto a repetir o que disse: 5º, 6º, 7º, 8º, 9º ano, muito grave, mas pronto. Fazem assim, *y* igual a -3*x*-1, tudo sobre -2 (escreve $\Leftrightarrow y=\dfrac{-3x-1}{-2}$). E depois chegam aqui e dizem-me assim: *Já não sei o que hei-de fazer*!
Aluna: Mas eu não cheguei aí.
E: Ai não? Mas olhe, eu vi lá (refere-se ao caderno da aluna).
Aluna: Sim, mas não estava sobre -2.
E: Ai não? Então estava sobre quanto?
Aluna: Sobre 2.
Aluna: Sobre 2. Pior ainda! Pior ainda! Porque eu ando aqui a dizer desde o princípio do ano que os sinais não trocam. E vocês na vossa cabeça têm isso lá embutido. E já deviam ter ouvido porque eu falo alto e bom som. Quando eu passo um termo de um membro para outro, passa à operação inversa. Não é, muda o sinal, é a operação! E esta operação aqui é uma multiplicação, e o -2 está a multiplicar e vai passar a dividir.

Ainda é pior!
E depois chegam aqui e não sabem o que têm que fazer. Então, eu desde o momento que comecei a aperceber-me destes problemas e quando demos este conteúdo eu disse: *Não façam um traço de fracção corrido, se não sabem o que estão a fazer. Façam separadamente*, sobre -2 e sobre -2 ali também (alterou para $\Leftrightarrow y=\frac{-3x}{-2}-\frac{1}{-2}$). E, agora, é só ajeitar os sinais, *y* igual, menos por menos dá mais, três meios de *x* mais um meio (escreveu no quadro $\Leftrightarrow y=\frac{-3x}{-2}-\frac{1}{-2}\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$). E agora perfeitamente se vê que o declive é quanto?
Alunos: Três meios.
E: Ah! Pois é!
E a [aluna] está a repetir o 10º ano pela segunda vez e acometer esse erro, não sei quantas vezes. Se calhar já pela enésima vez. E eu alertei na aula em que demos este período, por causa que este problema surgiu muitas vezes. Mas depois de estarem alertados eu esperava que já não voltassem a cometer o mesmo erro. Como vocês se esquecem das coisas, é por isso que depois a matemática tem insucesso. Porque a matemática… nela está tudo interligado. Isto são conhecimentos básicos, se vocês os esquecem não os sabem resolver. A equação reduzida da recta já foi dada este ano, estamos no segundo período e já não se lembram, como é que fazem quando precisarem dela no 12º [ano]? Isto é muito mau, e parece que eu já fui bem clara que aquilo que se trata aqui era importante, e o que é importante eu batalho, que é para vocês não se esquecerem. Se mesmo assim se continuam a esquecer, então está garantido, falta de sabedoria. E depois está garantida a negativa.
Ora, temos declive?
Alunos: Sim.
E: (escreve no quadro $m=\frac{3}{2}$) Que é exactamente igual porquê?
Alunos: Porque as rectas são paralelas.
E: E agora.
(os alunos dizem como obter a recta pedida, uns de uma forma e outros de outra)
E: Têm dois processos. Ou utilizam a equação $y-y_1=m\left(x-x_1\right)$ ou $y=mx+b$, procuram o *b* e escrevem a equação da recta.
y menos 2 é igual a três meios de, *x* mais 1 (escreveu no quadro $y-2=\frac{3}{2}\left(x+1\right)$).
Foi assim que fizeram?
Alunos. Sim.
E: Equivalente a *y* menos 2 igual a três meios de *x* mais três meios.
y igual a três meios de *x* mais três meios mais dois.
y igual a três meios de *x* … ora, quatro… sete meios.
(a professora escreveu no quadro

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow y-2=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}+2\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}\end{aligned}$$

)
E: Percebido ou há dúvidas?
[aluna] não me volte a fazer a mesma asneira. Olhe que você no último teste fez isso também. Na resolução de um exercício fez isto também, e já são muitas vezes.

Fim da Transcrição

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O exemplo apresentado por este episódio integra dois tipos de exemplos típicos do conteúdo programático referido à função afim que, em geometria do plano, é a equação reduzida de uma recta. Os dois tipos de exemplo são aqueles que dada a equação se questiona sobre o declive da recta definida e, o outro, dado o declive e um ponto se pergunta qual a equação da recta definida.
Por outro lado, a forma de integrar os dois tipos é feito no âmbito do estudo do paralelismo entre duas rectas definidas pelas suas equações, ou que são gráfico de duas funções afim. Como se vê o exemplo envolve todas estas noções, e todas elas estão devidamente interligadas num problema exclusivamente matemático, que atinge um nível de dificuldade superior ao nível de dificuldade de cada um dos dois tipos referidos tomados isoladamente.
Assim, classificamos este *Exemplo planeado do Conceito de Função* na 4ª Categoria, **Aplicações Internas**.

O episódio contém alguns traços do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** evidenciados pela professora no tratamento deste exemplo.
Claramente CPC:

- a professora, verificando as dificuldades dos alunos para transformar a condição dada na equação reduzida da recta, utiliza a operação inversa e não as regras de resolução de equações para obter uma equação equivalente à dada. Deste modo, os alunos deverão entender melhor a razão das equivalências em vez de mecanizar procedimentos (Cat. **Estratégias de Ensino**): "*Quando eu passo um termo de um membro para outro, passa à operação inversa. Não é, muda o sinal, é a operação! E esta operação aqui é uma multiplicação, e o -2 está a multiplicar e vai passar a dividir.*"
- Com duas simples perguntas a professora orienta os alunos sobre a noção de paralelismo de duas rectas definidas na forma reduzida (Cat. **Pensamento do Estudante**): "*Ora, temos declive?*" e "*Que é exactamente igual porquê?*"
- a professora identifica um erro comum dos alunos e esclarece-os usando o princípio das operações inversas para obtenção de condições equivalentes (**Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas**): "*Sobre 2. Pior ainda! Pior ainda! Porque eu ando aqui a dizer desde o princípio do ano que os sinais não trocam. E vocês na vossa cabeça têm isso lá embutido. E já deviam ter ouvido porque eu falo alto e bom som.*" e "*Então, eu desde o momento que comecei a aperceber-me destes problemas e quando demos este conteúdo eu disse: Não façam um traço de fracção corrido, se não sabem o que estão a fazer.*"
- explica aos alunos que o declive é o coeficiente do termo em x apenas quando a condição assuma a forma de equação reduzida da recta (Cat. **Explicações**): "*E então, neste seguimento, vi muita gente a olhar para ali e dizer assim: o declive é 3. Se bem me lembro, eu disse que* $y = mx + b$ *era a equação reduzida de uma recta onde o m me dava o declive.*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- pela forma como aborda o exemplo e como, na parte final do seu tratamento, propõe duas formas diferentes de obter a equação reduzida da recta pedida, a professora mostra que domina os conteúdos de forma muito sólida (Cat. **Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental**): "*Têm dois processos. Ou utilizam a equação* $y - y_1 = m(x - x_1)$ *ou* $y = mx + b$*, procuram o b e escrevem a equação da recta.*"
- no início do episódio a professora pergunta "[…] *o que é que duas rectas paralelas têm de comum?*", mais à frente "[…] *ou nem sequer aquela equação está escrita nessa forma (* $y = mx + b$ *). Ou está?*", já no final também pergunta "Ora, temos declive? [da recta paralela]" e termina dizendo "[…] *utilizam a equação* $y - y_1 = m(x - x_1)$ *ou* $y = mx + b$*, procuram o b e escrevem a equação da recta.*" Com estas etapas a professora deixa bem claro quais a etapas a seguir (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**)
- a professora refere-se às conexões existentes no edifício matemático e também entre conteúdos do 10º ano e do 12º ano de escolaridade(Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**): "*Porque a matemática… nela está tudo interligado.*" e "*A equação reduzida da recta já foi dada este ano, estamos no segundo período e já não se lembram, como é que fazem quando precisarem dela no 12º?*"

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- a professora deixa bem claro e de forma muito veemente quais os objectivos das aprendizagens (Cat. **Objectivo da Aprendizagem**): "[…] *está a repetir o 10º ano pela segunda vez e acometer esse erro, não sei quantas vezes. Se calhar já pela enésima vez. E eu alertei na aula em que demos este período, por causa que este problema surgiu muitas vezes. Mas depois de estarem alertados eu esperava que já não voltassem a cometer o mesmo erro. Como vocês se esquecem das coisas, é por isso que depois a matemática tem insucesso. Porque a matemática… nela está tudo interligado. Isto são conhecimentos básicos, se vocês os esquecem não os sabem resolver. A equação reduzida da recta já foi dada este ano, estamos no segundo período e já não se lembram, como é que fazem quando precisarem dela no 12º [ano]? Isto é muito mau, e parece que eu já fui bem clara que aquilo que se trata aqui era importante, e o que é importante eu batalho, que é para vocês não se esquecerem.*"
- utiliza o diálogo directo com os alunos com o objectivo de os manter centrados nos trabalhos (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**).
- a professora abre o episódio "[…] *quando nos dão uma equação duma recta (escreve* $-2y + 3x = -1$*) nesta forma e nos pedem para escrever a equação de uma outra recta que contenha o ponto de coordenadas* $(-1;2)$*, e seja paralela àquela recta.*" e fecha-o "*Percebido ou há dúvidas?*", de forma a que os alunos se situem nos exemplos. Também, ao longo do episódio, faz perguntas cujas respostas permitem uma verificação e avaliação das aprendizagens dos alunos "[…] *o que é que duas rectas paralelas têm de comum?*", " […] *o declive é quanto?*" e "[o declive] *é exactamente igual porquê?*" (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**).

Uso do Exemplo

Este exemplo trata dois aspectos muito importantes sobre o conceito de função: a) Noção de paralelismo entre duas rectas definidas por função afim; b) a *Transparência* da equação reduzida da recta $y = mx + b$ ao seu declive.

A noção de paralelismo entre rectas definidas pela sua equação reduzida é um dos pontos do currículo que é abordado no 10º e 11º anos. Antes disso, o conteúdo relativo à recta de declive *m* que passa por um ponto dado é tratado com bastante profundidade. Aliás, no tema dedicado às funções, a função afim (ou equação reduzida da recta) é a primeira função que os alunos estudam em que são relacionados de uma forma muito estreita a *Faceta Simbólica* e a *Faceta Geométrica*. Por isso, não é estranho que a recta seja apresentada por uma condição que não é a sua equação reduzida. Pretende-se que o aluno a identifique como não sendo a forma reduzida e a procure para que possa identificar o declive e a ordenada na origem.

Por outro lado, também é comum trabalhar nos dois sentidos os exemplos que incluem rectas definidas pela sua equação reduzida. Isto é, dada a equação determinar o declive, a ordenada na origem e verificar se dado ponto pertence ou não à recta; ou então, dada uma recta definida por dois dos seus pontos, ou o declive e um ponto da recta, determinar a sua equação reduzida. Note-se que este exemplo consegue abarcar os dois sentidos, na primeira parte do tratamento do exemplo o aluno deve determinar o declive da primeira recta e, seguidamente, com esse declive e um ponto determinar a equação da segunda recta.

O outro aspecto a salientar é o uso deste exemplo que, para trabalhar a noção de paralelismo entre duas rectas, se apoia na *Transparência* que a equação reduzida da recta apresenta relativamente ao conceito de declive da recta. E, como sabemos, o conceito de declive é dos mais importantes conceitos da geometria do plano.

Neste exemplo, em particular, a transparência é essencial para trabalhar a relação entre paralelismo e os declives das rectas. *Duas rectas são paralelas se e só se têm o mesmo declive*. Assim sendo, a forma reduzida da recta e a *transparência* que esta equação envolve são essenciais para um correcto estudo e compreensão da noção de paralelismo, sendo o aspecto central de todos os exemplos deste tipo.

O exemplo apresentado neste episódio, ao juntar dois tipos de exemplos

- Indicar o declive e a ordenada na origem de uma recta definida pela sua equação reduzida
- Determinar a equação reduzida de uma recta definida por dois dos seus pontos, ou pelo seu declive e um seu ponto,

concorre para a *Ampliação do Espaço de Exemplos* do aluno, alargando os tipos de exemplos aos dois casos num contexto de paralelismo.

Quanto ao uso, propriamente dito, deveria ter sido protagonizado pelos alunos e terminou por ser tratado pela professora, tendo os alunos uma participação mais discreta. Não era esta a intenção dos alunos mas, considerando as dificuldades apresentadas pelos alunos no cálculo, a professora assumiu o protagonismo no tratamento do exemplo. Porém, depois de obtida a equação reduzida da recta, já os alunos fizeram quase sozinhos o tratamento do exemplo determinando a equação reduzida da recta pedida.

Esmeralda: **Episódio 58**
Dia: **16 Março 07**

Início: **LB 13 min 53 Seg.**
Fim: **LB 21 min 44 Seg.**

Caderno de actividades: **Página 20**

Exemplo planeado tratado pelos alunos e pela professora

Esmeralda: Olhem, da mesma página podem fazer o 5.3.
É da mesma, Cabé, da página 20.

Determine a equação reduzida da recta que contém os pontos $P\left(\frac{1}{3};0\right)$ e $Q(0;-1)$.

(pausa para os alunos trabalharem e a professora apoia individualmente os alunos)
(a professora dá indicação a uma aluna para ir ao quadro)
(a aluna escreveu: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-1-0}{0-\frac{1}{3}} = 3$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Leftrightarrow y+1 = 3(x-0) \Leftrightarrow y+1 = 3x \Leftrightarrow y = 3x-1$$)

E: Perceberam o que a Ana fez?
Alunos: Sim
E: Não houve dúvidas?
Alunos: Não.
E: Tem alguma dúvida? Rita o que é que disse?
Rita: Nada, nas soluções é que não está assim.
E: Não percebi.
Rita: Nas soluções não está assim. Nas soluções está *y* igual a *x* sobre 2 menos 1. mas a mim deu-me como a ela (refere-se à Ana).
E: Mas aquilo está certo. Ora o declive … (faz os cálculos mentalmente)
Miguel: Eu não precisei de fazer aqueles cálculos todos.
E: Não precisou? Então como é que soube qual era o valor do declive, Miguel?
(o aluno diz à professora que como o ponto Q é a ordenada na origem, então $b = -1$)
E: Ah, sim, tudo bem. De qualquer forma precisava do declive. Pronto, a única coisa que não fez foi fazer esta substituição, porque olhando para aqui (aponta para $Q(0;-1)$) e verificou que o valor *b*, que é o valor da ordenada na origem, era -1. Portanto está certo.
Pode que as soluções nem sempre são viáveis, como vocês sabem. Certo?
Ora, portanto… (volta a efectuar os cálculos mentalmente). Não, está certo.

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O exemplo que a professora propões aos alunos visa *rotinar* o processo de obtenção da equação reduzida de uma recta definida por dois pontos. Porque este exemplo é

apresentado na aula anterior a um momento de avaliação, ele tem como objectivo fazer surgir alguma dúvida nos alunos que seria prontamente clarificada.
Assim, este *Exemplo Planificado de Processo* está enquadrado na 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**.

O episódio não contém traços do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** evidenciados pela professora no tratamento deste exemplo porque é bastante breve e com pouca participação da professora.

Uso do Exemplo
Este episódio retrata a aplicação directa do processo de obtenção da equação da recta que passa por dois pontos. É, nesta perspectiva, um exemplo que se enquadra no que se chama um *Exemplo Resolvido*. Através deste exemplo espera-se que os alunos possam tratar qualquer exemplo que seja da mesma natureza.
Com o exemplo proposto pela professora os alunos puderam trabalhar a equação reduzida de uma recta definida por três pontos. Nele, a noção de declive e de ordenada na origem é trabalhada sempre na *Faceta Simbólica* e a aluna que foi ao quadro nunca se socorreu de qualquer suporte gráfico apoiado na *Faceta Geométrica*.

Para determinar a equação reduzida da recta que inclui os pontos dados, a aluna percorreu o processo de a obter, que foi trabalhado em momentos anteriores. É de salientar que este exemplo é proposto aos alunos nas vésperas de um teste de avaliação em que se toma uma visão geral dos conteúdos a testar, não vá o leitor julgar que o tratamento do exemplo seja por de mais extemporâneo.
O processo de obtenção da equação reduzida utilizado pela aluna baseia-se em exclusivo na expressão $y-y_1=m(x-x_1)$ e não explora a *Transparência* que a expressão $y=mx+b$ apresenta.
Já o Miguel explora a *Transparência* da expressão reduzida da recta $y=mx+b$. Pela intervenção deste pode deduzir-se que ele calcula o declive e introduz na expressão o valor 3. Mas onde se pode apreciar o uso que o aluno faz da transparência é quando analisa as coordenadas do ponto $Q(0;-1)$. Note-se que o aluno sabe que na expressão $y=mx+b$, o valor de *b*, a ordenada na origem, é a intersecção da recta com o eixo vertical, logo com a primeira coordenada nula, que é o caso do ponto $Q(0;-1)$. Portanto, $b=-1$.

Esmeralda: **Episódio 59**
Dia: **16 Março 07**

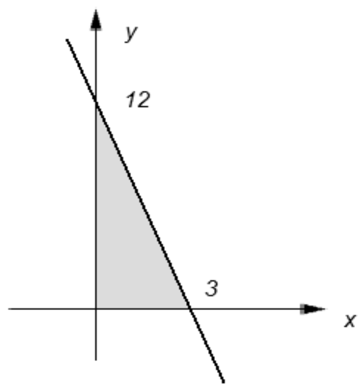
Início: **LB 21 min 50 Seg.**
Fim: **LB 28 min 48 Seg.**

Caderno de actividades: **Página 20**

Exemplo planeado tratado pelos alunos e pela professora

Esmeralda: Olhem, façam lá o 8.1. Por acaso não me lembro se está no teste, não sei se… mas de qualquer forma tem a ver com rectas, regiões sombreadas… para poderem resolver têm que fazer cálculos simples, portanto…

Escreva uma condição que defina a zona do plano a sombreado



(pausa para os alunos trabalharem o exemplo e a professora apoia os alunos que requeiram essa ajuda)
E: Ora, olhando para o desenho… ou seja, para a zona sombreada, quantas condições temos?
Alunos: Três.
E: Três. Duas directas, ou não?
Alunos: Sim.
E: E quais são?
Alunos: *y* maior que zero e *x* maior que zero.
E: *y* maior que zero e *x* maior… ou igual, porque ambas as rectas estão a cheio. Mas depois temos uma recta oblíqua, que não é nenhuma das nossas amigas bissectrizes. Portanto não sabemos qual é a sua equação.
Miguel: Temos que determinar.
E: Temos de escrever a equação desta recta. Fazendo o quê? E como?
Miguel: Calculando o declive e depois…
E: Calculando o declive, como?
Alunos: Com os dois pontos.
E: Temos dois pontos. Temos o ponto de intersecção com o eixo dos *xx* e temos o ponto de intersecção com o eixo dos *yy*. Portanto, com esses dois pontos podemos calcular…?
Miguel: O declive.
E: O declive. E depois?
(os alunos respondem todos ao mesmo tempo, uns dizem que se calcula o *b* e outros que se aplica a expressão $y - y_1 = m(x - x_1)$)

E: Nem mais. Agora, o João tem ali uma coisa mal na condição que escreveu.
João: É o *y* menor.
E: Ah pois é! É que o joão escreveu, *y* igual a *não sei quanto, não sei quê*, e depois menor ou igual que zero. Não foi assim que eu ensinei.
Então, alguém já escreveu a equação dessa recta?
Aluno: Sim.
E: sim, quem? O João ainda não veio ao quadro hoje, pois não? Ela já veio. Venha lá fazer, se faz favor.
(o João vai ao quadro e escreve $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{12-0}{0-3} = -4$

$y - 0 = -4(x-3) = y = -4x + 12$)
E: João. Igual, igual, igual. O que é que está aí mal?
João: Falta o sinal de equivalente.
E: Não apague. Ponha só o sinal de equivalente.
Não! Isso.
(o joão altera para $y - 0 = -4(x-3) \Leftrightarrow y = -4x + 12$)
E. E agora escrever as três condições. Temos três condições.
(o João escreve no quadro $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq -4x + 12$)
E: Está bom.

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Este exemplo tem como propósito relembrar aos alunos alguns aspectos que serão importantes na aula seguinte, a resolução de um teste de avaliação. Por isso, este exemplo tem como objectivo recordar vários aspectos relacionados com o conceito de função. O conceito de função na definição de rectas e de semi-planos.
Com o tratamento deste exemplo é propósito da professora relembrar o modo de definir regiões do plano e, por acréscimo, fazer surgir alguma dúvida que tenha persistido nos alunos após conveniente preparação para o momento de avaliação que se avizinha.
Como pode ser facilmente observado, o exemplo proposto não é especialmente exigente do ponto de vista cognitivo, no entanto ele cumpre a função de desencadear o surgimento de dúvidas; ou, por outro lado, dar a oportunidade a algum aluno que deseje esclarecer alguma no âmbito do exemplo.
Assim sendo, este exemplo pode ser categorizado como *Exemplo Planeado de Conceito* da 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**.

O episódio contém alguns traços do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** evidenciados pela professora no tratamento deste exemplo.
Claramente CPC:

- a professora estabelece com os alunos formas de pensar sobre a forma de definir regiões abertas ou fechadas do plano com a existência do sinal de igual nas inequações (Cat. **Pensamento do Estudante**): "y maior que zero e x maior… ou igual, porque ambas as rectas estão a cheio."
- embora duas das rectas, a vertical e a horizontal, sejam facilmente identificáveis pelas suas equações, a equação da recta oblíqua não é tão fácil de determinar (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*Mas depois temos uma recta*

oblíqua, que não é nenhuma das nossas amigas bissectrizes. Portanto não sabemos qual é a sua equação."

- a representação gráfica do exemplo foi traduzida em linguagem simbólica pela professora e pelos alunos (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**)
- depois de estabelecer com os alunos que com os dois pontos se pode calcular o declive da recta oblíqua, a professora explica aos alunos com quais o pode fazer (Cat. **Explicações**): "*Temos dois pontos. Temos o ponto de intersecção com o eixo dos xx e temos o ponto de intersecção com o eixo dos yy. Portanto, com esses dois pontos podemos calcular…?*"

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- o tratamento do exemplo divide-se em vários momentos: identificação do número de lados do polígono e, respectivamente, número de condições; determinação das equações das duas rectas, horizontal e vertical; cálculo da equação da recta que delimita o semi-plano oblíquo; conjunção das três condições que definem os três semi-planos (Cat. **Desmonta o Conteúdo em Componentes Base**)

Nota: A professora chama a atenção do aluno que foi ao quadro sobre a forma correcta de separar as condições. Isto é, pelo uso correcto dos sinais de equivalência. Este pormenor que a professora evidência deixa claro o cuidado que tem com o rigor na linguagem simbólica. A professora primeiro indica que o aluno só utiliza sinais de igual: "*João. **Igual, igual, igual**. O que é que está aí mal?*". Depois indica que o sinal adequado deve ser utilizado: "*Falta o sinal de equivalente.*"

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- a professora adopta um diálogo com os alunos da turma em geral e, em particular, com o aluno que está no quadro para manter os alunos concentrados no exemplo em questão (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**)
- a professora dirige ao aluno que tratou o exemplo no quadro um sinal de que o seu trabalho está correcto proporcionando, com isso, um gesto de incentivo e de motivação (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**): "*Está bom.*"

Uso do Exemplo

Tal como o exemplo anterior, este deve ser visto num contexto de preparação para um teste de avaliação que terá lugar na aula seguinte.
Neste tipo de exemplo, o aluno deve identificar a condição que define a região a sombreado. Contudo, essa condição é obtida à custa da conjunção de várias e cabe aos exemplos deste género mostrar aos alunos que ao número de lados do polígono convexo corresponde igual número de condições dependentes de equações que representam rectas e, consequentemente, de inequações que representam semi-planos. É notório que os *Espaço de Exemplos* dos alunos já incluem exemplos deste género, porque é com facilidade que eles identificam todos os elementos básicos do tratamento deste exemplo.

Repare-se que às perguntas da professora correspondem as respostas correctas dos alunos sem se notar qualquer hesitação:

> **Esmeralda**: *Ora, olhando para o desenho… ou seja, para a zona sombreada, quantas condições temos?*
> **Alunos**: *Três.*
> **Esmeralda**: *Três. Duas directas, ou não?*
> **Alunos**: *Sim.*
> **Esmeralda**: *E quais são?*
> **Alunos**: *y maior que zero e x maior que zero.*

Com a pergunta de quantas condições são directas, a professora apoia-se na *Transparência* que as equações $y = k$ e $x = k$ apresentam relativamente às rectas verticais e às rectas horizontais do plano. Com isto, a professora determina de forma imediata as condições que definem dois dos lados do polígono. Resta agora determinar a terceira condição. A recta obliqua está definida pela intersecção com os eixos, logo a equação a utilizar poderia ser a equação axial da recta $\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_2} = 1$ que é *Transparente*, precisamente, às intersecções com os eixos $I_x\left(x_1;0\right)$ e $I_y\left(0;y_2\right)$ mas a professora não o pode fazer porque esta equação não está contemplada na programação do 10º ano de escolaridade. Portanto, o processo a utilizar será aquele que os alunos já conhecem com recurso ao cálculo do declive e posterior utilização da expressão $y - y_1 = m(x - x_1)$. É exactamente este processo que está retratado no episódio anterior (Episódio58).

Finalmente, escrever a conjunção de três condições para definir correctamente a zona do plano não parece ser de maior dificuldade para o aluno, o que demonstra que na posse das equações das rectas facilmente deduz as inequações que definem os semi-planos. Também neste exemplo se vê como os alunos relacionam a *Faceta Geométrica* com a *Faceta Simbólica* com bastante destreza.

Esmeralda: **Episódio 60**
Dia: **13 Abril 07**

Início: **LA 01 min 28 Seg.**
Fim: **LA 18 min 23 Seg.**

Manual: **Página 161**

Exemplo planeado tratado pela professora e pelos alunos

Esmeralda: Então agora vamos pegar nas calculadoras e vamos resolver o exercício 2. Rapidamente.

2. Sejam f e g duas funções polinomiais definidas por:

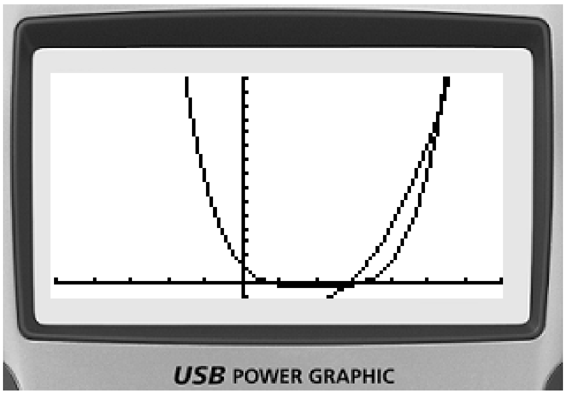
$$f(t) = t^3 - t - 21 \text{ e } g(t) = (t-2)^4 - 2 .$$

Utilizando a calculadora gráfica, determine t de modo que:

2.1 $f(t) = g(t)$.
2.2 $f(t) > g(t)$.

(pausa para os alunos trabalharem o exemplo)
E: Porque é que você tanto escreve e eu disse, peguem nas calculadoras e vamos resolver o exercício 2?
Aluna: Estava a passar uma coisa para o caderno.
E: Ah! Está bem.
Carina já colocou as funções na calculadora?
Expliquem-me lá o que é que se pretende com a alínea 2.1?
Aluna: Saber onde se intersectam.
E: Saber o quê?
Aluna: Onde se intersectam.
E: Exactamente. Ou seja, graficamente o que é que nós vamos à procura?
Outra aluna: Da intersecção.
E: Da intersecção. Dos pontos de intersecção das duas funções. E então, tiraram alguma conclusão? Ou não?
Onde é que se intersectam? Onde é que a função $f(t)$ é igual à função $g(t)$?
Simão: (imperceptível)
E: Não ouvi nada!
Simão: Em 2,81
E: Aproximadamente. O Simão diz que conseguiu visualizar um ponto que tem de abcissa 2,81, aproximadamente. Toda a gente encontrou esse ponto? Sim?
Então é essa a resposta que temos que dar, porque o exercício diz: *Utilizando a calculadora gráfica, determine t de modo que.* E depois a primeira expressão é $f(t) = g(t)$, então isto é equivalente a t aproximadamente igual a 2,81.
(a professora escreveu no quadro $f(t) = g(t) \Leftrightarrow t \simeq 2,81$)
E. Toda a gente conseguiu visualizar isto?
Podemos passar à alínea seguinte?
Aluna: Mas ainda se intersectam em mais um sítio.
E: Não percebi.
Aluna: Mas ainda se intersectam em mais um sítio.
E: Intersectam-se em mais algum sítio? Onde?
Aluna: Estou a ver.
E: Ah! Está a ver.
(pausa)
Aluna: Não se vê.

E: Pois, não se vê porque elas não se intersectam em mais sítio nenhum.
Outra aluna: Professora, na minha [máquina] intersectam-se em 2,8.
E: Diga?
Outra aluna: A minha, agora, deu-me em 2,8.
E: E a seguir não vem mais nada?
(a aluna abana a cabeça indicando que não)
E: A mim deu-me, aproximadamente, 2,81. Simão, quais foram os valores que …
Terceira aluna: Professora, mas ainda se intersecta mais num sítio!
E: Ainda se intersecta aonde?
Terceira aluna: Venha lá aqui, se faz favor.
(a professora olha para a máquina de um aluno da primeira fila)
E: Oh Rapariga, eu estou aqui a ver a função, a função não se intersecta.
(a professora desloca-se ao lugar da terceira aluna e conversa com ela sobre a dimensão da janela utilizada na máquina pela aluna e introduz o comando "Isect", que indica a intersecção dos gráficos)



y máximo é de 150, escala 10

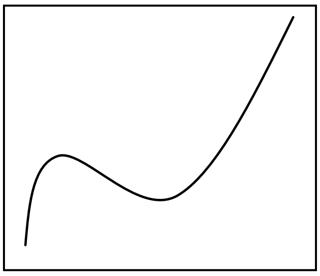
Figura 1

E: Existe um segundo valor, existe. Existe um segundo valor. Só que, se o vosso *y* for pequeno, nós não o vemos. Existe uma segunda intersecção para *t* aproximadamente igual a 5,39. Têm é que ter uma janela com o *y* grande. Eu, na minha calculadora, provavelmente também não a teria.
(dirige-se outra vez ao aluno da primeira fila) Pois, mas você tem aqui. Mas não estava a visualizar ao bocado.
Aluno: Não.
(a professora desloca-se a várias carteiras para verificar se os alunos conseguem configurar a janela da calculadora de modo a incluir as duas intersecções)
E: Você tem que ajeitar aqui a janela, aqui para o *y* máximo, ele deu o… sei lá… nos cento e tal…
João, esta variável pode tomar valores negativos. Atenção, no contexto do problema de ontem é que não. Agora… era tempo…
João: Mas deste lado não se intersectam.
E: Ah! Está bem. Sim, bastava aumentar. Mas assim não vê a outra. Tem que ter um *y* menor, menor do que esse valor que tem aí, assim também consegue ver as duas.
(a professora continua a esclarecer individualmente os alunos)
E: Então olhem, aqui temos… isto é equivalente… já não me lembro quanto é que dava o outro? *t* aproximadamente igual a 5,39. Pronto (acrescentou no quadro $f(t) = g(t) \Leftrightarrow t \simeq 2,81 \vee t \simeq 5,39$).
Vamos passar à alínea seguinte, e na alínea seguinte nós podemos utilizar essas duas funções que já temos aí, precisamos de saber é o que é que estamos a procurar. Porque a alínea 2.2 pede para eu verificar onde é que *f* de *t* é maior que *g* de *t* (escreve no quadro $f(t) > g(t)$. Ora, normalmente, normalmente, este tipo de visualização não é fácil. Normalmente, é mais fácil para vocês, de um modo geral, pensarem desta maneira (escreveu no quadro $f(t) > g(t) \Leftrightarrow f(t) - g(t) > 0$), é mais fácil visualizar o gráfico da diferença das duas funções e ver onde ele é maior do que zero, onde ele está acima do eixo, do que ver onde é que uma é maior que a outra. Mas, mas, vocês devem saber fazê-lo. Onde é que esta função

($f(t)$) é maior do que esta ($g(t)$)? Onde as imagens de *g* forem maiores do que as imagens de *f*. É este o sentido de raciocínio que nós devemos seguir, mas eu dá-me a sensação, da minha experiência, que de um modo geral vocês têm mais facilidade em visualizar a segunda expressão. Então, vocês introduzem na calculadora (escreve no quadro) $t^3 - t - 21 - (t-2)^4 + 2 > 0$. Ora, isto podia ainda ser ajeitado ($\Leftrightarrow t^3 - t - 19 - (t-2)^4 > 0$), mas se não ajeitassem nada, se colocassem assim na calculadora isto na mesma. E agora pedem o gráfico e vão ver onde é que aquela expressão é maior do que zero.
(pausa para os alunos trabalharem com a calculadora e a professora apoia os alunos que o requeiram)
E: O que é que visualizaram? Nada? (continua a apoiar individualmente os alunos)
E: Então, qual foi a conclusão?
(alguns alunos respondem, mas de forma incompreensível)
E: Não percebi nada!
Entre que valores é que a nossa expressão é maior do que zero?
Aluna: 2,81
E. Entre 2,81 e…?
Aluno: …e 5,39.
(a professora escreveu no quadro: $\Leftrightarrow 2,81 < t < 5,39$)
E: Olhem, vou explicar outra coisa. Ora, como vocês tinham aí colocado na vossa calculadora as funções, para verificar onde uma é maior do que outra… eu, se bem me lembro, acho que era assim. Não era? E a outra, como era?

(esboça no quadro)

Figura 2



Alunos: Uma parábola
Posso? (consulta a calculadora do aluno da primeira fila)
É esta. Depois a outra…
Esta função faz assim: vem aqui, mais ou menos assim e depois faz isto.

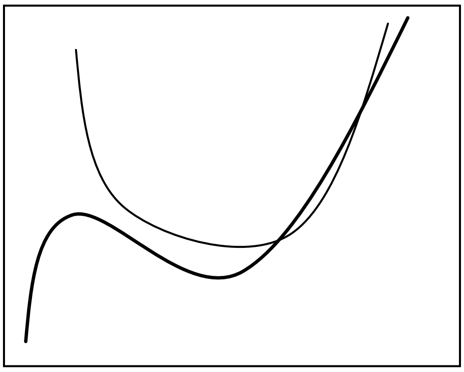


Figura 3
f (mais grosso) e *g* (mais fino)

Exactamente.
(a máquina apresenta algo assim:

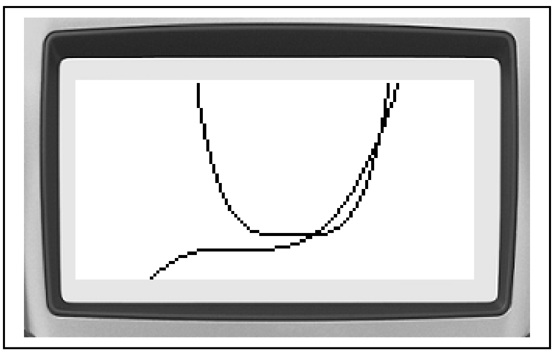


Figura 4
(calculadora gráfica)

Então, vocês conseguem verificar que a nossa função, graficamente, para ver onde é que uma é maior do que a outra, tendo as duas funções. Tenho que ir ver onde é que as imagens da função *g* que é esta… não? Qual é que é? Esta. É esta. Onde é que estas imagens (gráfico fino, da Figura 3) são maiores (devia ter dito menores) que as imagens desta função (gráfico mais grosso). Verificar na calculadora é exactamente o mesmo que verificar onde é que a diferença entre as duas funções é maior do que zero.
Fiz-me entender?

<u>Fim da Transcrição</u>

Classificação do Exemplo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O exemplo proposto aos alunos destina-se a proporcionar-lhes mais experiência no uso da máquina de calcular gráfica na resolução de equações e inequações no âmbito da *Faceta Geométrica*, embora no enunciado a faceta escolhida seja a *Faceta Simbólica*.
Este género de exemplos, enquanto trabalha a destreza do aluno com a máquina de calcular gráfica, propicia também a interligações entre facetas e pode fazer surgir dúvidas e erros. Tal veio a acontecer de facto. Entre todos, pôde-se observar a dificuldade em encontrar a segunda intersecção dos dois gráficos devido à escolha da dimensão apropriada da janela.
Por outro lado, o exemplo esclarece os alunos quanto à noção de existência pontos onde de igualdade de funções. Se a primeira opção do aluno, ao deparar-se com uma equação, é resolvê-la por métodos analíticos (*Faceta Simbólica*), este exemplo *Amplia o Espaço de Exemplos* do aluno ao proporcionar-lhe um método alternativo de solucionar a equação e, desta forma, ajudar o aluno a visualizar (*Faceta Geométrica*) o que normalmente é simbólico. Bem como se relacionam estes dois aspectos do conceito de função.
Portanto, este *Exemplo Planeado de Conceito* enquadra-se na 3ª Categoria, **Esclarecimento e Aprofundamento**.

No tratamento do exemplo há traços do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** da professora que podem ser comprovados.
Claramente CPC:

- a professora, para que os alunos tenham mais destreza no uso da máquina de calcular gráfica e para que aprofundem na obtenção gráfica de pontos de igualdade entre funções, opta por um exemplo que integra estas duas vertentes (Cat. **Estratégias de Ensino**).
- sobre a noção de igualdade entre imagens de duas funções, a professora cria com os alunos ligações sobre como abordar o exemplo (Cat. **Pensamento do Estudante**): à pergunta "*Expliquem-me lá o que é que se pretende com a alínea 2.1?*" os alunos respondem "*Saber onde se intersectam.*" que, para a todos equivale a perguntar "*Ou seja, graficamente o que é que nós vamos à procura?*" e responder "*Da intersecção.*"
- refere dificuldades que os alunos possam sentir ao trabalharem graficamente a inequação que o exemplo apresenta (Cat. **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**): "*Porque a alínea 2.2 pede para eu verificar onde é que f de t é maior que g de t. Ora, normalmente, normalmente, este tipo de visualização não é*

fácil. Normalmente, é mais fácil para vocês, de um modo geral, pensarem desta maneira […]"

- obviamente, este exemplo exige que a professora esboce os gráficos que a máquina de calcular apresente para melhor tratar o exemplo (Cat. **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**).
- para a resolução da inequação a professora optou por estudar o sinal da função que se obtém pela subtracção de funções. No entanto, a professora explica como se chega ao mesmo resultado trabalhando directamente a expressão $f(t) > g(t)$ na máquina de calcular gráfica (Cat. **Explicações**): "*Então, vocês conseguem verificar que a nossa função, graficamente, para ver onde é que uma é maior do que a outra, tendo as duas funções. Tenho que ir ver onde* (…) *é que estas imagens são* (…) [menores] *que as imagens desta função. Verificar na calculadora é exactamente o mesmo que verificar onde é que a diferença entre as duas funções é maior do que zero.*"
- porque um aluno, o João, se referiu à variação da variável independente ter que ser maior que zero a professora corrige-o. Depois, para ilustrar a rectificação que lhe fez, apresenta como exemplo um caso tratado no dia anterior (Cat. **Conhecimento de Exemplos**): "*João, esta variável pode tomar valores negativos. Atenção, no contexto do problema de ontem é que não.*"
- este exemplo deve ser trabalhado na faceta geométrica, o que obriga a professora a trabalhar com os alunos num âmbito de calculadora gráfica (Cat. **Conhecimento de Recursos**).

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- quando a professora estuda o sinal de $f(t)-g(t)$, em vez de determinar o intervalo onde $f(t) > g(t)$, a professora relaciona dois conteúdos diferentes, **sinal do gráfico de uma função** e **intervalo onde as imagens de uma função são maiores que as imagens de outra** (Cat. **Estrutura Matemática e Conexões**): " […] *é mais fácil visualizar o gráfico da diferença das duas funções e ver onde ele é maior do que zero, onde ele está acima do eixo, do que ver onde é que uma é maior que a outra.*"

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo:

- utiliza o diálogo com os alunos para obter e conservar a atenção dos alunos no exemplo em questão (Cat. **Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno**)
- a professora escreve sempre toda a informação relevante no quadro. Primeiro escreve $f(t) = g(t) \Leftrightarrow t \simeq 2{,}81$ que depois emenda para $f(t) = g(t) \Leftrightarrow t \simeq 2{,}81 \vee t \simeq 5{,}39$ no caso da primeira alínea. No caso da segunda, escreve $\Leftrightarrow 2{,}81 < t < 5{,}39$. Além do mais, todos os resultados são convenientemente destacados e ilustrados no quadro com gráficos (Cat. **Técnicas de Sala de Aula**)

Uso do Exemplo

Este exemplo relaciona, claramente, a *Faceta Simbólica* com a *Faceta Geométrica*. A fazer esta relação os alunos podem contornar uma dificuldade, própria da *Faceta*

Simbólica, que é resolver uma equação de 4º grau analiticamente. Assim, o exemplo permite aprofundar no conceito de função, mais propriamente a igualdade de funções, no âmbito da Faceta Geométrica e indo na segunda alínea à noção de desigualdade de duas funções, também através dos seus gráficos. Neste último aspecto, a professora optou por integrar a desigualdade entre duas funções no estudo de sinal de uma função. Isto é, não resolveu $f(t) > g(t)$ mas sim $f(t) - g(t) > 0$, por considerar mais acessível aos alunos. Além disso, ao tomar esta opção, a professora promove nos alunos uma *Ampliação do Espaço de Exemplos* dos alunos ao mostrar-lhes uma forma equivalente de tratar os exemplos deste tipo.

O tratamento do exemplo permite aos alunos distinguirem, ainda que indirectamente, as facetas geométrica e simbólica da *Faceta Numérica*. Na verdade, ao comparem os gráficos para identificarem os pontos onde as imagens são iguais ou os intervalos onde as imagens de *f* são maiores que as imagens de *g*, os alunos devem considerar os valores numéricos das duas funções. É através das comparações entre valores numéricos que estabelecem $f(t) = g(t)$ e $f(t) > g(t)$ com as intersecções dos gráficos e onde um gráfico está *acima* do outro.

Entrevista Esmeralda. (5 de Janeiro de 2007)

Carlos: Há quanto tempo é que tu estás a dar aulas?
Esmeralda: 10.

C: 10 anos.
Descreve a forma como utilizas os exemplos nas tuas aulas.
E1: Que exemplos?

C: Os exemplos, sobre os conteúdos que dás.
E2: Exemplos adequados àquilo que estou a fazer, quando reparo que os alunos não perceberam com aqueles exemplos tento arranjar outros de forma que chegue ao nível dos alunos e eles compreenderam o conteúdo.

C: E conheces outra forma de utilização dos exemplos que não seja essa?
E3: Não!?

C: E quais é que são os objectivos da tua utilização dos exemplos?
E4: Levar os alunos a compreenderem melhor a aplicação prática dos conteúdos teóricos.

C: Só?
E5: Sim.

C: Nunca pensaste em mais nada?
E6: Não. Os objectivos dos conteúdos matemáticos é explicá-los no geral…

C: Os exemplos, os exemplos.
E7: … certo, mas é assim, os conteúdos matemáticos são dados no geral e depois para poderem ser aplicados em qualquer situação. Então, os exemplos são situações particulares da aplicação. Logo, procuro ter um vasto leque de exemplos onde aquele conteúdo ou aquela matéria que estivemos a dar possa ser aplicável.

C: Hum, Hum. Então, tu ponderas as razões porque escolhes um determinado exemplo e não outro?
E8: Claro! Se eu vejo que um conteúdo tem várias aplicações, eu procuro mostrar aos meus alunos as várias aplicações daquele conteúdo, que é para quando surgir uma situação nova eles lembrarem-se das situações práticas que eu lhes dei e saberem aplicar. Saberem qual, ou quais são os conteúdos que deram que servem ali naquele problema que estão a resolver.

C: Se tu tiveres dois exemplos para o mesmo conteúdo, o que é que te faz utilizar um e não outro?
E9: O que me faz utilizar um e não outro… normalmente quando dou exemplos, e se dou mais que um, e o processo de resolução é o mesmo, é porque houve alunos que não perceberam a primeira resolução ou o primeiro exemplo. Então procuro arranjar outros, de forma que os alunos tenham mais elementos práticos. Se percebo que é um conteúdo

que eles até entenderam logo com o primeiro exemplo, pois então acho que não há necessidade e passamos logo à resolução de exercícios do livro sem eu estar a pensar em mais exemplos práticos, pode ser depois que entretanto com os exercícios do livro vão surgindo novas situações e eles vão ver.

C: Quando se apresenta uma série de exercícios ou de problemas, comenta a frase dos alunos: "Professora pode resolver o primeiro para nós vermos como é que é que se faz?" Como é que comentas esta frase? "Professora faça lá o primeiro para a gente ver como é que se faz."
E10: Porque, normalmente, os alunos acabados de ouvir uma explicação teórica têm dificuldade em pô-la logo em prática. Então, se vêem a primeira resolução, eles entretanto os outros exercícios vão resolvê-los à mesma imagem e semelhança do primeiro. Daqueles que eles nos pedem para nós resolvermos. Portanto, de um modo geral os alunos sentem necessidade de ver a aplicação prática. Que é assim, só com letras, só com incógnitas os alunos têm sempre dificuldade em compreender, enquanto que quando se coloca uma aplicação prática, um exercício prático com números, então eles aí já conseguem perceber.

C: O conteúdo.
E11: O conteúdo. A aplicação desse conteúdo. Como é que se faz.

C: Então vamos particularizar. Em vez de um conteúdo vamos particularizar a uma determinada definição. Seja o que for. Definição ou uma determinada situação, mas… podes pôr uma definição que não perde demasiada generalidade. Considera os processos: exemplificar antes de definir e definir antes de exemplificar. Há algum que te pareça mais apropriado?
Silencio longo
E12: Depende, porque é assim: há situações que se nós lhes dermos um exemplo particular antes, eles conseguem depois generalizar a sua aplicação.

C: Para a definição.
E13: Para a definição. E conseguem chegar eles sozinhos à definição. Agora, há situações e há definições que mesmo que lhes dês antes um exemplo prático antes eles não conseguem chegar ao geral.

C: Então nesse caso é ao contrário.
E14: Então nesse caso eu dou-lhes primeiro a definição e depois é que particularizo.

C: Não há nenhum que te pareça mais apropriado?
E15: Não, depende das situações mesmo.

C: Para umas é mais um, para outras é mais outro.
E16: Exacto. Há situações em que se eu lhes der um exemplo prático, um ou dois ou três exemplos práticos que eles costumam ver, estou-me a lembrar por exemplo das sucessões, se nós lhes dermos dois ou três exemplos práticos, eles normalmente quando têm que chegar ao termo geral da sucessão conseguem reconhecer, por exemplo, a razão, e como é que se forma o termo geral, como é que se escreve o termo geral. Então

aí, nesse caso, levo-os ao método de dedução. A partir de exemplos, não é, eles deduzem depois a definição.

C: Induzem.
E17: Induzem, e muitas vezes deduzem depois a forma geral.

C: Pois é, deduzir é do geral para o particular, induzir é que é do particular para o geral. Certo? Portanto, tu primeiro dás aplicações práticas, e eles vão para a definição, qual é a razão, ou qualquer coisa, então estão a induzir a definição de progressão.
E18: Isto não é considerado uma dedução?

C: Não. É uma generalização. Pronto, uma generalização é uma indução. Induzes para a generalidade.
E19: Pronto, então há conteúdos onde…

C: Eu estava a perceber e estava a perceber o que tu estavas a dizer, só que estavas a utilizar o termo ao contrário. Mas é para generalizar.
E20: Mas em termos dos programas matemáticos, o que se pretende é dar… levar os alunos a deduzir. Não é a induzirem. E essa dedução que eles pretendem que os alunos façam é, exactamente, por este processo. Através de trabalhos práticos, de exemplos práticos, de exercícios práticos, chegarem à generalização.

C: Comenta: "Existem exercícios ou problemas que achamos especiais ou representativos por serem mais indicados para os alunos perceberem melhor um conteúdo em questão"
E21: Queres que eu comente?

C: Ou seja, achas… ou pelo menos tu consideras no teu dia-a-dia, ou em determinado conteúdo, há um exercício que tu consideras mais representativo, ou que digas: -É com este que eles vão chegar lá.
E22: Nunca costumo utilizar esse tipo de pensamento quando estou a planificar as minhas aulas. Porque é assim, eu de ano para ano tenho alunos diferentes, e muitas vezes, eu quando estou a planificar aulas penso assim: -Se eu chegar à aula e começar a explicar o conteúdo desta maneira, os alunos vão chegar a esta conclusão. Muitas vezes isto não acontece, eu começo por explicar e eles até chegam a um patamar muito superior daquilo que eu estava à espera. Portanto, a forma como eu planifico as aulas é uma forma flexível, eu levo as coisas pensadas e estruturadas, e depois de acordo com a impulsão dos alunos, seja com a maneira como os alunos reagem, e me respondem e conseguem colocar as coisas … pronto, organizadas, estruturar o exercício, então a partir de aí eu vejo que aquele exemplo é adequado ou não. Ainda que, quando nós pegamos nos livros, eles tenham muitas vezes *exercícios tipo*. É este conteúdo, então é sempre aquele exercício tipo que se dá. Eu não, não ligo muito a isso porque isso depende muito dos alunos que tenho à frente.

C: Mas um exercício tipo, e mais outro e mais outro, podem ajudar à tal generalização.

E23: Podem em determinados conteúdos. Por exemplo, se for no cálculo de limites, esses exercícios tipo exemplificam quase tudo aquilo que eles têm que saber. Não é? Pronto, nesse caso, agora, quando eu utilizo o tal método, de colocar o exercício antes, para eles depois deduzirem, ou induzirem, a fórmula geral, aí …

C: Generalizar.
E24: … exactamente, para eles chegarem ao geral, então eles aí, o que é que acontece, eu estou à espera da reacção deles. A partir do que eles respondam e do que eles consigam realizar aí será, então, a forma ou os exercícios que eu vou utilizar.

C: Então, tu exemplificas conforme as necessidades.
E25: Exactamente.

C: Então achas necessário uma pessoa ter uma espécie de uma bolsa onde vai buscar aquilo que lhe interessa em determinado momento.
E26: Ou uma bolsa, ou então ter trabalhado o assunto previamente planificado a sua aula…

C: … previsto aquilo que iria acontecer…
E27: … exactamente. Dentro do tipo de alunos que em determinada altura, nós que conhecemos os alunos, temos na frente, temos que pensar assim: aquele aluno, sobre este conteúdo, vai-me fazer esta pergunta. Então, se ele fizer esta pergunta, ou colocar esta dúvida, eu vou responder desta, ou daquela maneira, ou apresentando este ou aquele exemplo.

C: Que interesse pode ter uma sequência de exercícios sobre o mesmo tema?
E28: Levar os alunos a ter uma maior destreza no cálculo. Ou, muitas vezes, porque eles gostam muito e é um método errado, mecanizar a resolução.

C: Então e se mudássemos o termo *exercícios* para *problemas*?
E29: Se mudarmos o termo de exercícios para problemas, como cada problema tem um enunciado diferente … a não ser que utilizemos sempre o mesmo tipo de enunciado, então aí já leva o aluno a desenvolver várias capacidades. E a conseguir interpretar esses problemas e equacioná-los de maneiras diferentes.

C: Então, se for um exercício serve…
E30: Se for um exercício prático serve para a mecanização.

C: … para aprender um processo.
E31: Exactamente.

C: Se for um problema, serve para…?
E32: … para ajudar os alunos a melhor interpretar os futuros problemas.

C: Ajuda na interpretação.
E33: Exactamente. Na interpretação, no equacionar os problemas, até na própria resolução, estou-me a lembrar das Probabilidades. Quantos mais exercícios, quantos

mais problemas – exercícios em termos de problemas – o aluno resolver, melhor compreende a terminologia e melhor consegue associar as ideias para os outros problemas. Não é? Situações novas, o caso de uma situação de exame. Não é? Um aluno vê um problema pela primeira vez, e aí tem que se lembrar que enquanto esteve na sala de aula resolveu este, e aquele e o outro e o outro por determinado processo, que ali a linguagem é semelhante, então terá que usar aqueles processos para resolver, então, o problema.

C: Então, nesse caso, poderá servir – se se lembra daquele e do outro e do outro – poderão servir esses que dás nas aulas como modelo para os posteriores que aí vêm.
E34: Modelo, ajuda. Ajuda a desenvolver as capacidades do aluno…

C: Então voltamos cá atrás, àquilo que eu perguntei ao bocado, achas que existem alguns exercícios que tu penses que sejam especiais ou representativos de um determinado conteúdo.
E35: Eu aqui não diria exercícios. Por exemplo…

C: No caso de problema.
E36: … no conteúdo das probabilidades, por exemplo, eu diria *uma linguagem*. Porque as probabilidades têm termos específicos, não é? Por exemplo, ao teres que utilizar uma condicionada. Não quer dizer que a tenhas que utilizar. Por exemplo. Quando diz: Determine a probabilidade de isto acontecer, dado que o outro aconteceu. Leva que o aluno associe a uma condicionada, mas muitas vezes nós sabemos que esse problema, ainda que utilizando essa linguagem, pode ser resolvido por outros processos.

C: Já percebi.
Como é que tu trabalhas os conteúdos programáticos com os alunos? Utilizando sequências do manual, ou utilizando fichas que tu elaboras?
E37: De um modo geral utilizando sequências do manual. Porque, visto que os pais gastam o dinheiro e os alunos dispõem do manual, eu acho que é desnecessário, acrescido a esse dinheiro que já foi gasto, a escola estar a gastar mais dinheiro em papel, em tinta. Só faço fichas quando eu acho que aquilo que o manual tem é insuficiente. Então, como complemento, utilizo fichas.

C: Ah, era isso que eu ia a perguntar depois. Então, eventualmente, até podes utilizar as duas coisas.
E38: Posso.

C: E as situações em que utilizas um caso ou outro… portanto, utilizarás as tuas próprias fichas quando achas que…
E39: … para complementar.

C: Para complementar. Quando achas que no manual há determinado aspectos que não foi suficientemente bem tratado.
E40: Pois. Que há deficiência em termos de exercícios, ou até de conteúdo teórico, que eu ache que seja necessário complementar.

C: Mas no dia-a-dia consegues, mais ou menos, dizer quanto é que é um caso e quanto é que é outro em termos de percentagem?
E41: Ehh, não sei. Mas… mais, portanto 90%, por aí.

C: 90% é manual.
E42: 90% é manual. Sim.

C: O que é que te preocupa quando tu escolhes, neste caso, ou elaboras se for no caso das fichas, numa sequencia de exercícios ou problemas sobre um tema. Quando tu fazes…
E43: Quando estruturo uma ficha.

C: … quando tu fazes uma série de exercícios sobre o mesmo tema ou sobre o mesmo conteúdo. Ou quando vais escolher um no manual, há algum aspecto dentro da sequência que tu …?
E44: Procuro exercícios que… diversificados. Se houver dois exercícios que se resolvam da mesma maneira e que só haja ali uma diferença, sei lá, de um número, por exemplo, então aqueles dois exercícios são iguais só faço um. Procuro fazer um número de exercícios de forma a abranger toda a matéria. Ou melhor, todas as aplicações daquele conteúdo.

C: A diversidade. Fundamentalmente a diversidade.
E45: Exactamente. Não haver muita repetição, mas sim diversificação.

C: Já percebi. Tanto nos que fazes como naqueles que procuras…
E46: Até mesmo nos testes. Procuro. E até muitas vezes procuro exercícios que, onde se possa aplicar aquele conteúdo. Como os conteúdos de um modo geral estão interligados se possa aplicar aquele e outros. Que estejam para trás, que já tenham sido leccionados.

C: Então, o que procuras é que a sequência de exercícios tenha o máximo de formas possível de abordar o mesmo conteúdo.
E47: Exactamente.

C: E põe a coisa ao contrário. Achas que, pelos livros que tens utilizado, achas que… que preocupações é que achas que o autor no manual teve ao elaborar uma sequência de exercícios ou de problemas? Também achas que o intuito do…
E48: Eu acho que sim. Ainda que, por exemplo, os da Porto Editora tenham muitos exercícios repetidos. Ainda que se preocupem na diversidade, seja, ter um vasto leque, todos diferentes, mas também há muita repetição.

C: Repetição…
E49: Repetem.

C: … de exercícios em que entra o mesmo esquema ou o mesmo processo…

E50: Exactamente iguais, mudando um sinal ou mudando um número, depois a forma de resolver é exactamente a mesma. Talvez aí seja para que o professor seleccione o que ache mais importante e os outros ficarem para o aluno praticar em casa.

C: Então não tens nenhum problema, em numa sequência de exercícios, fazeres só os pares ou só os impares.
E51. Não, eu escolho aqueles que eu acho que são diferentes. Os que eu acho que são iguais, digo aos alunos: Olhe, resolva e se houver problemas traz e nós aqui resolvemos o problema.

C: Então não fazes, metodicamente, só os pares ou só os impares?
E52: Não, Não. Depende da forma como os exercícios estejam estruturados. Porque há sequências de exercícios, em conteúdo, há sequências que são todos diferentes em que não há um único que se repita. Ainda que depois, nos propostos já haja essa repetição, não é? Mas naqueles de margem não há essa repetição. Então aí faço todos, são todos diferentes, faço todos. Se há alguns repetidos, pois então tenho o cuidado de dizer que "olhe este é igual a este, a maneira de resolver é a mesma, então este vocês resolvem em casa, se houver problemas nós depois…" ou então até posso mandar para trabalho de casa e na aula seguinte corrigir. Não é? Mas procuro que não haja repetição.

C: O que é que achas importante no tema Funções? Vamos situar-nos no 10º Ano. Vais começar a dar esta semana, já deste uma vista de olhos, não?
E53: Não…

C: Tu fazes planificação de unidade ou não?
E54: Não… Eu planifico, pronto, uma quantidade de aulas…

C: Não tens nada escrito?
E55: Tenho, tenho tudo escrito. Não tenho é uma planificação assim dizer que, hoje vou fazer isto, vou fazer aquilo, vou fazer o outro, esse tipo de planificação não faço, não é?

C: Não tens planificação a curtíssimo prazo.
E56: Não, mas planifico as minhas aulas. Ou seja, resolvo os exercícios vejo o que é importante, o que é que os alunos precisam de saber, o que é que eu devo ditar para o caderno para ficar registado…

C: Marcas os objectivos que queres que eles atinjam?
E57: Quando estou a planificar a minha aula, ou seja, quando estou a resolver, quando estou a tomar notas daquilo que lhes devo dizer a eles, para não me esquecer, como é óbvio, porque eu acho que se não houver uma orientação muitas vezes nós sabemos as coisas, sim senhora, mas chegamos à aula e largamo-las soltas. E isso para os alunos é muito mais difícil de compreender aquilo que o professor lhes está a querer transmitir. Eu procuro ter a aula organizada, seguindo uma determinada sequência, não é? Este, ou então, se por acaso chego à aula e começo a falar no conteúdo e, lá está, os alunos até o conhecem, até o dominam, e as coisas começam a fluir. Então aí, tudo bem, falamos, resolvemos, chegamos a conclusões mas depois eu procuro, se aquilo, pronto… se

falado só assim muitas vezes é esquecido, que eu procuro que depois com uma sequência lógica aquilo fique registado no caderno.

C: Sequencia lógica de quê?
E58: Daquilo que estivemos a tratar. Por exemplo, estivemos a tratar do tema funções, então a sequência lógica terá que começar pela noção de função. O que é uma função.

C: Então tens estipulado os objectivos que queres que eles atinjam.
E59: Exactamente.

C: E escritos?
E60: E escritos.

C: Então das funções de 10º ano, quais são os tópicos que tu consideras realmente importantes?
E61: Primeiro que tudo: noção de função. Depois domínio de uma função, ahh, que eles saibam distinguir entre conjunto de chegada e contradomínio, cálculo de imagens de funções, de objectos de objectos através de uma função, não é? A representação gráfica de funções também é importante, ahh, e 10º ano, basicamente, creio que… depois, entretanto, no 11º, também vem um conteúdo que é importante, tem a ver com… não, este ano também é dado a injectividade de funções, é portanto depois para o cálculo da inversa precisam de saber…

C: …a injectividade.
E62: … verificar se a função é injectiva ou não…

C: Mas só no 10º ano, não vamos para o 11º.
E63: Não, estou a dizer no 10º dão essa noção, porque depois no 11º precisam para a inversa e no 12º exactamente a mesma coisa.

C: O que é que tu achas que um aluno de 10º ano, no fim do tema Funções, o que é que achas que ele deve evidenciar para que tu aches que ele sabe alguma coisa de funções?
E64: Deve saber identificar o que é que é uma função. Tanto graficamente como analiticamente. Bom, mais graficamente… porque analiticamente, quando tu lhe dás a expressão geral já é função. Que eles saibam calcular o domínio, saibam calcular a imagem de um dado objecto e a injectividade. Domínio, contradomínio, esse tipo de coisas, os zeros de uma função, onde a função é crescente e decrescente, portanto… pronto, crescente e decrescente graficamente… máximos e mínimos…

C: Mas isso graficamente.
E65: Exactamente, através da calculadora.

C: Analiticamente não.
E66: Analiticamente não.

C: Não faz parte do programa…

E67: Não, não, não. Nem acho que seja importante. Porque importante é um aluno saber interpretar um gráfico. Porque muitas vezes, muitos problemas são dados com gráficos e os alunos depois têm que saber interpretar. Não é? Então, se eles souberem traçar o gráfico correctamente sabem tudo o que há que saber sobre uma função. Porque quando se traça o gráfico de uma função tem-se atenção a quê? Domínio, contradomínio, aos zeros, aos máximos, aos mínimos, onde ela é crescente, onde ela é decrescente, onde ela é constante. Portanto, todo o estudo de uma função … se ela é injectiva… também se via graficamente. Portanto eles conseguem visualizar tudo isso. Se eu lhes dou um gráfico e lhes peço todos estes conteúdos e eles me souberem responder, então eu concluo que o aluno conseguiu entender plenamente o conteúdo Funções. E, a partir daí, está preparado para…

C: E achas que existe alguma maneira adequada para ensinar funções? Se achas que há várias maneiras e que alguma é mais adequada?
E68: Bom, eu normalmente, primeiro, no início da abordagem do tema Funções, eu começo por utilizar coisas que eles já conhecem. Por exemplo a representação de uma função através de um gráfico, de uma tabela, de um diagrama, uma expressão para dar início ao tema Funções. A partir dali vejo o que é que eles sabem.

C: Fazes uma resenha daquilo que já foi dado.
E69: Exactamente. E depois…

C: Do que já foi feito até ao 9º ano.
E70: Até ao 9º ano. Que o conteúdo Funções é dado, salvo erro, no 7º e no 8º ano, onde eles têm essa noção da representação de uma função, se a aplicação é função ou não é função, se é injectiva, se é sobrejectiva, o que é o domínio, o que é o contradomínio, o que é o objecto, o que é a imagem. Pronto, eles têm essas noções e eu vejo como é que… e como é que eles fazem a interpretação gráfica, se eles sabem verificar a imagem através do gráfico, ou se dada a imagem sabem identificar o objecto através do gráfico. E depois, a partir daí, começamos a explorar problemas. Que podem ser problemas dados através de uma representação gráfica ou dado um problema pede-se o gráfico… para o aluno traçar o gráfico, ou pode-se dar a expressão da função e pede-se para eles representarem na calculadora e depois passar para o papel e depois fazer a sua interpretação…

C: Então qual é que é a maneira mais adequada?
E71: Para mim, esta. Primeiro fazer uma sondagem para ver o que é que o aluno sabe…

C: E a partir de aí…
E72: …e a partir daí explorando, e aprofundando e completando os saberes…

C: As coisas…
E73: …exacto, os saberes do aluno.

C: Pronto. Acabámos, não te aborreço mais. Obrigado.
E74: Foi rápido!

Fim da transcrição

V APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Este capítulo inclui os resultados que se obtiveram da análise do material recolhido. Os resultados são apresentados em função do instrumento de análise aplicado, primeiro a forma como a professora escolheu e usou os exemplos e depois o conhecimento que mobilizou para o fazer. A aplicação dos instrumentos é feita à informação proveniente de duas fontes, a entrevista que se realizou e as aulas que se videogravaram.

1. A Exemplificação do Conceito de Função e o Conhecimento Didáctico do Conteúdo

Na investigação descrita nesta tese observaram-se as aulas de uma professora enquanto ensinava aos seus alunos de 15-16 anos o conceito de função, analisando-se o seu CDC através dos exemplos que utilizou.

Não é inédito o uso do conceito de função como matéria a utilizar para estudar e/ou descrever o conhecimento do professor (e.g. Stein, Baxter e Leinhardt, 1990; Norman, 1992; Even, 1993; Vidakovic, 1996; Llinares, 1996; Loyd e Wilson, 1998; Silverman e Thompson, 2005; Figueiredo, 2005; Lucus, 2006; Figueiredo, Blanco e Contreras, 2006).
Stein, Baxter e Leinhardt (1990) estudaram a relação entre o conhecimento da matéria disciplinar e o impacto que este conhecimento tem na leccionação no âmbito do conceito de função. Como resultado deste estudo puderam concluir que um conhecimento limitado do conhecimento da matéria reduz a efectividade do ensino de três formas: 1- a falta de provimento de trabalho de campo para trabalho futuro nesta área; 2- exagero de verdades limitadas e 3- perda de oportunidades na promoção de ligações significativas entre conceitos chave e as suas representações.
Norman (1992) usa os termos *conhecimento prático*, *conhecimento didáctico* e *conhecimento do conteúdo* para descrever o conhecimento do professor no que se vincula ao tema das funções. As categorias referidas são muito idênticas às de Shulman (1986, 1987) e contêm os mesmos atributos que Ma definiu como sendo o *profundo conhecimento das matemáticas fundamentais* (PUFM) (Ma, 1999). Os resultados do

estudo de Norman indicam que a maioria dos professores exibiam graves lacunas, por vezes perturbadoras, nas suas conceptualizações de função.
Numa investigação sobre o conhecimento da matéria disciplinar e sobre o conhecimento didáctico do conteúdo, Even (1993) tenta determinar a ligação entre estes dois conhecimentos num grupo de professores de matemática em formação. Even descobre que muitos dos participantes não possuíam o conhecimento necessário sobre o assunto. Este facto influenciou os seus discernimentos didácticos. Even vê esta situação como problemática para a qualidade do ensino: "*Uma situação onde os professores do ensino secundário, no fim do século XX, têm uma imagem do conceito tão semelhante como a existente no século XVIII, é uma situação problemática*". As suas descobertas estão alinhadas com a opinião de Shulman de que o conhecimento didáctico precisa estar fortemente ligado ao conhecimento da matéria disciplinar, de forma que o ensino da matemática se torne efectivo.
Por outro lado, Vidakovic (1996) e Lucus (2006) investigaram a forma como os alunos aprendem (Vidakovic) e estudantes para professores ensinam (Lucus) a composição de funções e a função inversa de uma função. Os resultados destas investigações apontam para o facto de que alunos e estudantes para professores têm uma visão mecanicista e procedimental da noção de composição de funções e da obtenção da função inversa de uma função. Esta noção apresenta-se muito frágil no que concerne o conhecimento conceptual do tema, o que se reflecte nas capacidades de ensinar, no caso dos estudantes para professores. Lucus (2006), por seu lado, chega a uma conclusão deveras interessante, pois o seu estudo reúne argumentos que suportam a afirmação de que, de facto, o conhecimento da matéria disciplinar não muda com os anos de prática lectiva.
Por seu lado, Llinares (1999) faz uma descrição muito aprofundada das metodologias a utilizar nas investigações sobre o conhecimento profissional do professor de matemática nas vertentes do conhecimento, crenças e contexto do conceito de função. Naquele trabalho, Llinares pretendeu "pôr de manifesto que a complexidade inerente ao estudo do conhecimento do professor de matemática impõe uma série de condicionantes metodológicas e de estruturação da investigação." Evidenciando "a necessidade de criar ligações entre o enquadramento teórico da investigação sobre o conhecimento profissional do professor e a classe e a natureza dos instrumentos utilizados."
Loyd e Wilson (1998), no seu estudo sobre o conhecimento do conceito de função de um professor de matemática do secundário, bem como do seu impacto no ensino das funções, define as categorias do conhecimento para descrever o conhecimento do conceito de função do participante. Estas categorias são, 1- Definição e imagem do conceito de função; 2- repertório sobre funções no secundário; 3- a importância e o uso das funções em contextos variados e 4- representações e conexões múltiplas entre funções. Estas categorias são semelhantes às categorias definidas por Shulman (1986, 1987) e por Ma (1999). As descobertas desta investigação sugerem que as concepções abrangentes e bem estruturadas contribuem para um ensino caracterizado por uma ênfase nas ligações conceptuais, representações eficazes e debates significativos.
Numa investigação recente, Silverman e Thompson (2005) estudaram um conjunto de professores em formação que frequentava um curso com o objectivo de desenvolver o seu conhecimento sobre o conceito de função. Em particular, desenvolver uma visão mais avançada do conceito de função como a relação covariante entre duas quantidades e a subsequente influência na interacção entre estes professores e os seus alunos. Os resultados mostraram que, apesar de nesse curso os professores terem desenvolvido uma

compreensão mais rigorosa e coerente da noção do conceito de função como covariação entre quantidades, facto que lhes proporcionou um entendimento de função que lhes permitiu adquirir um discurso conceptual sobre relações funcionais, os professores permaneceram amarrados a uma variante da tradicional visão de função como sendo uma correspondência. Assim, continuou a ser esta a forma de entender o conceito de função, como correspondência, que continuou a fundamentar as planificações e trabalho destes professores com os seus alunos.
Na investigação desenvolvida por Figueiredo (2005) foi escolhido, também, o conceito de função como matéria disciplinar onde a leccionação de quatro professores em formação pôde ser observada. Na realidade, o que se estudou foi a forma como estes professores exemplificaram o conceito de função a alunos cujas idades variavam entre os 15 e os 17 anos e, através dela, caracterizar o conhecimento que estes professores possuíam à saída da universidade no fim da sua formação académica.

O estudo de que damos conta nesta tese vem no seguimento dos trabalhos descritos em Figueiredo (2005) e Figueiredo, Blanco e Contreras (2007). Mantendo novamente o conceito de função como matéria disciplinar que dá substância à exemplificação, nas linhas que seguem apresentam-se os resultados vinculados ao conhecimento de uma professora de matemática com experiência, obtidos após a análise de todos os episódios gravados nas suas aulas.

2. A professora Esmeralda

Esmeralda é professora de Matemática na Escola Secundária de D. Sancho II em Elvas e no ano de 2007, quando a entrevistámos e assistimos às suas aulas, tinha pouco mais de 10 anos de experiência docente. A sua formação académica e profissional foi obtida com a Licenciatura em Ensino da Matemática na Universidade de Évora, tendo feito o seu Estágio Pedagógico na escola onde actualmente lecciona. Esmeralda é professora do quadro de nomeação definitiva da escola e, normalmente, lecciona os três níveis do ensino secundário. Isto é, em todos os anos lectivos costuma leccionar as disciplinas de Matemática-A e Matemática-B aos 10º, 11º e 12º anos, alunos entre os 15 e os 18 anos.
Pessoalmente, Esmeralda é uma pessoa simpática, afável, muito franca e preocupada com o percurso escolar dos seus alunos. Estes retribuem-lhe respeito e uma certa cumplicidade, nota-se na relação que Esmeralda estabelece com os seus alunos que existe uma verdadeira comunicação e que o ambiente que se vive nas aulas é propício ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Este ambiente de trabalho é conseguido com um misto de formalidade e informalidade, embora se possa dizer que os alunos podem trabalhar com um certo à-vontade, também é certo que Esmeralda não gosta e não deixa que os alunos se excedam nesse à-vontade. Por vezes, pudemos testemunhar, chega a ser bastante severa com algum aluno que mostre sinais de preguiça ou de falta de atenção. Enérgica e decidida, transporta para as aulas estes dois traços de personalidade. Gosta das coisas "à sua maneira" e as suas aulas decorrem segundo as suas regras, umas explícitas e outras implícitas. Uma das suas características mais evidentes é a exigência, para com os alunos e para com ela própria. E esta característica é sempre acompanhada pelo o rigor que implementa no seu discurso matemático e que gosta seja espelhado pelo discurso matemático dos seus alunos.

Esmeralda nunca leu qualquer bibliografia sobre exemplos, conhecimento profissional do professor nem, portanto, sobre a relação entre a exemplificação de um professor e a relação que esta tem com o seu conhecimento profissional. Por isso, podemos afirmar, a forma como leccionou as aulas que gravámos em vídeo foi totalmente genuína.

3. A exemplificação de Esmeralda

3.1 Os exemplos quanto à classificação

Para melhor se observar a forma como foram utilizados os exemplos por Esmeralda optámos por agregar os episódios em grupos de dez. Tal como foi justificado no capítulo dedicado à metodologia da investigação, com isto podemos analisar o modo como os exemplos foram usados no desenrolar do período de tempo que ocupou o capítulo "Funções", na perspectiva das suas características. Além disso, para esta síntese, apresentam-se apenas os quadros relativos à classificação dos exemplos em grupos de 10 episódios e dispostos por ordem cronológica. Desta forma ficam visíveis as alterações das características dos exemplos quando tomados numa perspectiva um pouco mais abrangente.

Episódios: Totais do 1º ao 10º
Classificação do Exemplo/Sequência

<table>
<tr><th></th><th>Exemplos</th><th>||||</th><th>Sequências</th><th>||||||</th><th colspan="4"></th></tr>
<tr><td>Exemplo/ Sequência</td><td>Conceito</td><td>Processo</td><td>Teorema</td><td>1ª categ.</td><td>2ª categ.</td><td>3ª categ.</td><td>4ª categ.</td><td>5ª categ</td></tr>
<tr><td>Planeado</td><td>||||||</td><td>||</td><td></td><td>|</td><td>||||||</td><td>|</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Modificado</td><td>|</td><td></td><td></td><td></td><td>|</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Espontâneo</td><td>|||</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>|||</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Nota: 1ª Cat – Definição/Apresentação; 2ª Cat – Abordagem Inicial Autónoma; 3ª Cat – Esclarecimento e Aprofundamento; 4ª Cat – Aplicações Internas; 5ª Cat – Aplicações Externas

Episódios: Totais do 11º ao 20º
Classificação do Exemplo/Sequência

<table>
<tr><th></th><th>Exemplos</th><th>|||||</th><th>Sequências</th><th>|||||</th><th colspan="4"></th></tr>
<tr><td>Exemplo/ Sequência</td><td>Conceito</td><td>Processo</td><td>Teorema</td><td>1ª categ.</td><td>2ª categ.</td><td>3ª categ.</td><td>4ª categ.</td><td>5ª categ</td></tr>
<tr><td>Planeado</td><td>|||||||||||</td><td></td><td></td><td></td><td>|||||</td><td>|||||</td><td></td><td>|</td></tr>
<tr><td>Modificado</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Espontâneo</td><td>|</td><td></td><td></td><td>|</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Episódios Totais do 21º ao 30º
Classificação do Exemplo/Sequência

<table>
<tr><th></th><th>Exemplos</th><th>||||</th><th>Sequências</th><th>||||||</th><th colspan="4"></th></tr>
<tr><td>Exemplo/ Sequência</td><td>Conceito</td><td>Processo</td><td>Teorema</td><td>1ª categ.</td><td>2ª categ.</td><td>3ª categ.</td><td>4ª categ.</td><td>5ª categ</td></tr>
<tr><td>Planeado</td><td>|||||||</td><td>|</td><td></td><td></td><td>|||||</td><td>|||</td><td></td><td>|</td></tr>
<tr><td>Modificado</td><td>|</td><td></td><td></td><td>|</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Espontâneo</td><td>|</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>|</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Episódios: Totais do 31º ao 40º
Classificação do Exemplo/Sequência

<table>
<tr><td></td><td>Exemplos</td><td>|||||||</td><td>Sequências</td><td>|||</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>Exemplo/ Sequência</td><td>Conceito</td><td>Processo</td><td>Teorema</td><td>1ª categ.</td><td>2ª categ.</td><td>3ª categ.</td><td>4ª categ.</td><td>5ª categ</td></tr>
<tr><td>Planeado</td><td>|||||||</td><td>||</td><td>|</td><td>|</td><td></td><td>|||||</td><td>||</td><td>||</td></tr>
<tr><td>Modificado</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Espontâneo</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Episódios: Totais do 41º ao 50º
Classificação do Exemplo/Sequência

<table>
<tr><td></td><td>Exemplos</td><td>||||||||</td><td>Sequências</td><td>||</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>Exemplo/ Sequência</td><td>Conceito</td><td>Processo</td><td>Teorema</td><td>1ª categ.</td><td>2ª categ.</td><td>3ª categ.</td><td>4ª categ.</td><td>5ª categ</td></tr>
<tr><td>Planeado</td><td>|||||</td><td>|</td><td></td><td></td><td>|||</td><td>||</td><td>|</td><td></td></tr>
<tr><td>Modificado</td><td></td><td>|</td><td></td><td></td><td></td><td>|</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Espontâneo</td><td></td><td>|||</td><td></td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Episódios: Totais do 51º ao 60º
Classificação do Exemplo/Sequência

<table>
<tr><td></td><td>Exemplos</td><td>||||||||||</td><td>Sequências</td><td></td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>Exemplo/ Sequência</td><td>Conceito</td><td>Processo</td><td>Teorema</td><td>1ª categ.</td><td>2ª categ.</td><td>3ª categ.</td><td>4ª categ.</td><td>5ª categ</td></tr>
<tr><td>Planeado</td><td>|||||||||</td><td>|</td><td></td><td></td><td></td><td>|||||</td><td>|</td><td>||||</td></tr>
<tr><td>Modificado</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Espontâneo</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Episódios: Totais do 1º ao 60º
Classificação do Exemplo/Sequência

	Exemplos	38	**Sequências**	22				
Exemplo/ Sequência	**Conceito**	**Processo**	**Teorema**	**1ª categ.**	**2ª categ.**	**3ª categ.**	**4ª categ.**	**5ª categ**
Planeado	**45**	**7**	**1**	**2**	**19**	**21**	**4**	**8**
Modificado	**2**	**1**		**1**	**1**	**1**		
Espontâneo	**5**	**3**		**2**	**1**	**5**		

Estando os exemplos classificados nestes quadros pelas diversas características, faremos a síntese em quatro tempos:

i. *Exemplo/Sequência*
ii. *Conceito/Processo/Teorema*
iii. *Planeado/Modificado/Espontâneo*
iv. *Categoria*

i. Exemplo/Sequência

Relativamente a esta característica dos exemplos trabalhados pela professora, é clara a opção por sequências de exemplos no início do tema "Funções" e, à medida que avança, o uso de sequências de exemplos é progressivamente substituído pelo uso de exemplos isolados; 4 exemplos e 6 sequências na série 1-10, contra 10 exemplos e zero sequências na série 51-60. Ao relacionarmos este facto com os conteúdos do tema (cf. Programação/Planificação, pp. 39-50), é visível que as sequências são utilizadas nos conteúdos iniciais do conceito de função: definição, facetas, características e estudo do gráfico. Esmeralda utiliza as sequências para poder apresentar uma variação suficiente com vista a que os alunos se apercebam dos elementos importantes em estudo e, com isto, à possibilidade de generalização do conceito de função em todos os seus aspectos. Veja-se o Episódio 4 (12 de Janeiro), neste episódio a professora utiliza uma sequência de exemplos onde se trabalha o domínio de uma função e, com ela, estabelece várias *Dimensões De Variação Possível* onde os alunos podem construir a imagem do conceito, no que concerne ao domínio da função, através do trabalho dentro das *Amplitudes De Mudança Permitida*. Por outro lado, as sequências também são utilizadas para trabalhar as rotinas que serão utilizadas posteriormente.

No final do capítulo apenas são utilizados exemplos isolados. Isto é, o conceito de função já não é trabalhado com base na *Variação* ou na sistematização das rotinas mas sim na resolução de situações cognitivamente mais exigentes, tais como a modelação de situações reais ou problemas matemáticos.

ii. Conceito/Processo/Teorema

No que respeita à natureza do exemplo que a professora utilizou durante a leccionação, não estranha que a maioria dos exemplos sejam de conceito, considerando que o capítulo é todo ele sobre funções, sobre as suas características e sobre situações onde este conceito desempenha um papel central.

No entanto, puderam ser observados alguns exemplos classificados como sendo de processo. Estes exemplos prendem-se com os aspectos rotineiros associados aos conteúdos presentes na programação do capítulo. Como exemplo pode observar-se o episódio 10 (19 de Janeiro) onde se pode examinar a forma como a professora utilizou um exemplo isolado para trabalhar com os alunos o processo de construção de uma tabela de variação ou, no episódio 30 (2 de Fevereiro), a forma como a professora instruiu os alunos no processo de obtenção dos zeros de uma função através da máquina de calcular gráfica.

Já no que respeita ao uso de exemplos de aplicação de um teorema, apenas nos foi dado a ver um único exemplo. O episódio que relata o uso de um exemplo de aplicação de teorema está descrito no episódio 40 (23 de Fevereiro) e respeita à aplicação do Teorema de Pitágoras. O exemplo não relaciona o teorema com o conceito de função, embora haja situações de modelação em que para relacionar duas grandezas por meio de uma função seja necessário recorrer ao Teorema de Pitágoras, este não foi o caso. No tema em questão, "Funções", vem determinada a leccionação de um conteúdo intitulado *Teorema do Resto*. Este conteúdo foi leccionado pela professora, existem exemplos sobre a aplicação deste teorema nos cadernos diários das duas alunas, mas esses exemplos não foram tratados em nenhuma aula registada em vídeo e, portanto, não há nenhuma transcrição de episódio onde um exemplo sobre a aplicação deste teorema seja apreciável.

iii. Planeado/Modificado/Espontâneo

Esmeralda usa quase exclusivamente exemplos planeados nas suas aulas. Os seus exemplos são, na grande maioria, obtidos do manual adoptado pelo grupo disciplinar da escola e é com eles que desenvolve o seu trabalho com os alunos, por vezes apresentando exemplos que preparou em casa ou que encontrou em outros manuais. Dos sessenta episódios que transcrevemos puderam-se contar três exemplos modificados e oito espontâneos, o que é um claro indicador de que a docente prefere a segurança que um planeamento cuidadoso proporciona à incerteza de uma actividade lectiva baseada numa actuação espontânea e instintiva. Todavia, Esmeralda soube apresentar aos seus alunos exemplos espontâneos quando a situação assim o exigiu, e os exemplos espontâneos que surgiram destinaram-se a resolver situações que não puderam ser antevistas aquando da preparação das actividades lectivas. Esses exemplos espontâneos foram observados na primeira metade dos sessenta episódios, durante as aulas em que são introduzidos os conteúdos iniciais do capítulo, no espaço temporal em que no aluno o conceito de função está a ser organizado e a imagem do conceito vai sendo construída, e são exemplos que a professora utiliza para precisar algum aspecto do conceito de função ou esclarecer alguma dúvida em particular. É claro que, no final do capítulo, o surgimento de exemplos espontâneos é mais improvável pois é a altura em que surgem as situações de aplicação do conceito à modelação e a resolução de problemas matemáticos, neste âmbito os exemplos dificilmente surgem de forma espontânea.

iv. Categoria

Um olhar pelos seis quadros é quanto basta para verificar que, cronologicamente, os episódios que incluem casos da 1ª e da 2ª categoria são mais numerosos nos primeiros 30 episódios. Se a contabilização fosse por exemplos, então o total seria ainda maior porque a maioria dos exemplos que formam as várias sequências se incluem, justamente, na primeira metade do tema das “Funções”. Esta escolha da professora explica-se, e mostra-se adequada, por ser no início do capítulo a ocasião em que se introduzem as várias noções integrantes do conceito de função, – exemplos da 1ª categoria – e onde os alunos tomam os primeiros contactos autónomos com essas noções – exemplos da 2ª categoria. Os exemplos da 3ª categoria, esclarecimento e aprofundamento, são mais numerosos no centro dos sessenta episódios, entre os 11º e 40º episódios, durante os quais Esmeralda faz o aprofundamento no conceito de função através dos esclarecimentos das dúvidas que vão surgindo nos alunos enquanto se abordam as várias noções e conteúdos do capítulo. Os exemplos que configuram as aplicações do conceito de função a situações de modelação e a problemas estritamente matemáticos, exemplos de 4ª e 5ª categorias, fazem a sua aparição na segunda metade dos sessenta episódios.

Esta distribuição das várias categorias de exemplos pelo capítulo das funções e pelo tempo, mostra como foi adequada a escolha dos exemplos para o tratamento do conceito de função e de todos os conteúdos a ele associados pela programação. Esta escolha adequada da professora pode traduzir-se numa ordenação tão simples como natural: apresentação, aprofundamento e aplicação do conceito.

O número de observações em cada categoria é, também, merecedor de atenção, veja-se o quadro relativo aos totais desde o episódio 1 ao episódio 60. Os cinco episódios que incluem exemplos da 1ª categoria correspondem às aulas, a que assistimos e transcrevemos, em que foi introduzida alguma noção, definição ou processo. Os vinte e um episódios que incluem exemplos de 2ª categoria e os vinte e sete episódios que incluem exemplos de 3ª categoria ilustram, em termos relativos, o tempo e o trabalho empregues no aprofundamento do conceito de função e da construção da imagem do conceito. Por fim, para a aplicação do conceito de função temos os exemplos cujo tratamento está descrito em doze episódios. Portanto, em termos proporcionais, a utilização dos exemplos das diversas categorias parece equilibrado na abordagem do capítulo dedicado ao tema das funções.

3.2 Os exemplos quanto ao uso

Esmeralda utilizou durante o ensino do tema "Funções" um número bastante elevado de exemplos. Em cima descreve-se a exemplificação da professora em termos de objectivo segundo o esquema de categorias descrito na metodologia desta investigação. Nesta secção, a perspectiva com que se aborda o uso dos exemplos prende-se com três grandes áreas que estão presentes na bibliografia consultada e cuja essência está referenciada no capítulo relativo à fundamentação teórica. As cinco áreas onde iremos enquadrar o uso dos exemplos trabalhados por Esmeralda com os seus alunos são:

i. *Facetas dos Exemplos*
ii. *Variação e Espaço de Exemplos*
iii. *Observação de Exemplos descritos na Bibliografia*
iv. *Transparência*
v. *Escolha de Exemplos*

Optámos por esta divisão por considerarmos serem os âmbitos onde as características da exemplificação são mais marcadas, distinguíveis e com objectivos diferenciados.

i. Facetas dos Exemplos

Todos os exemplos da professora Esmeralda constantes neste trabalho estão relacionados com o ensino e com a aprendizagem do tema "Funções" e, por isso, o seu uso deve ser observado segundo a bibliografia específica do tema. Assim, utilizaremos a terminologia apropriada e o uso dos exemplos deve ser especificada conforme a faceta ou facetas envolvidas (DeMarois e Tall, 1999).

Os exemplos que a professora utilizou não se inseriam, na quase totalidade, unicamente numa única faceta. Embora tenham sido utilizados alguns exemplos trabalhados numa só faceta, esta não foi a norma. Os exemplos, em número significativo, foram apresentados numa faceta e trabalhados noutra, ou apresentados em duas facetas relacionadas ou, ainda, apresentadas e trabalhadas numa faceta mas com grande influência de outra.

O primeiro caso prende-se, por exemplo, com algum caso em que sendo o exemplo apresentado na faceta simbólica se trabalhem características próprias da faceta geométrica:

Episódio 13 (26 de Janeiro)

3. Considere as funções *f*, *g* e *h* definidas por:

$$f(x) = x + 3 \text{ e } g(x) = 2x + 3 \text{ e } h(x) = -5x + 3$$

E represente-as no mesmo referencial. O que observou?

O segundo caso tem como exemplo um caso em que as facetas geométrica e simbólica vêm relacionadas logo na forma como o exemplo é apresentado e que se relacionam de forma estreita:

Episódio 26 (2 de Fevereiro)

1. Por observação da expressão analítica da função *f*, indique o sentido da concavidade do respectivo gráfico e em seguida verifique a resposta usando a calculadora gráfica.

1.1	$f(x) = x - x^2$	1.2	$f(x) = x^2 - 4x - 5$
1.3	$f(x) = -3(x+1)^2$	1.4	$f(x) = 1 - x + x^2$

O terceiro caso refere-se, por exemplo, a casos em que o exemplo é apresentado na faceta simbólica mas que trabalha características específicas da faceta geométrica:

Episódio 32 (16 de Fevereiro)

1. Escreva cada uma das funções *f* na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ e indique

   a. o domínio;

   b. o contradomínio;

   c. o eixo de simetria e o vértice da parábola que representa o gráfico;

   d. o intervalo de crescimento;

   e. o intervalo de decrescimento;

   f. o máximo ou o mínimo da função.

   1.1 $f(x) = x^2 - 4x$

   1.2 $f(x) = -2x^2 - 4x + 5$

   1.3 $f(x) = -2x^2 + 3x - 2$

   1.4 $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$

Ou, então, de forma inversa. O exemplo é apresentado pelas características próprias da faceta geométrica mas é trabalhado na faceta simbólica:

Episódio 34 (16 de Fevereiro)

1. Escreva uma equação da parábola conhecendo:

   1.1 o vértice $V(2;5)$ e um dos seus pontos $A(1;8)$;

   1.2 o vértice $V(3;-10)$ e um dos seus zeros $x = 5$

   1.3 os zeros $x = 2$ e $x = 6$, e o valor máximo 8.

Em qualquer das formas, a professora utilizou e trabalhou os exemplos de um modo variado e equilibrado sem dar demasiado peso a alguma das facetas em particular. Em resumo, estão assinalados dezassete episódios onde foram referenciados exemplos próprios da faceta geométrica, dezasseis episódios com a alusão a exemplos trabalhados na faceta simbólica e onze episódios onde se faz alusão a exemplos em que se relacionavam as duas facetas. De qualquer modo, embora as facetas simbólica e geométrica tenham sido as facetas de eleição para o trabalho com os alunos, em cinco episódios a professora também utilizou exemplos em que interveio a faceta numérica. Este número mais reduzido é explicável pelos conteúdos e pelos seus destinatários, alunos de 15-16 anos.
É de notar que, durante a análise dos episódios, não é referida a faceta verbal. Todavia, esse facto não deve minimizar o papel desta faceta do conceito de função. Na realidade a faceta verbal cumpre um papel importantíssimo em grande parte dos episódios, na medida em que se faz uso dela quando se interpreta um enunciado de uma situação problemática para, posteriormente, traduzi-lo ou expressá-lo na forma simbólica ou na forma geométrica. Cumpre, por assim dizer, um papel de linguagem intermédia entre aquilo que é estritamente matemático e aquilo que pode ser trabalhado analiticamente.

Ainda no que respeita ao vocabulário específico do ensino do conceito de função, deve ser feita a distinção entre a abordagem à imagem do conceito e a abordagem à definição do conceito. A definição do conceito de função foi relembrada por Esmeralda aos alunos na aula inicial do capítulo, embora o conceito de função seja um conteúdo já tratado em anos anteriores. Nesses anos, o conceito de função, depois de definido com o auxílio de diagramas de Venn, é tratado fundamentalmente na faceta numérica e na faceta coloquial mas levemente abordado nas facetas geométrica e simbólica. Assim, visto o conceito de função ser já do conhecimento dos alunos, a definição do conceito foi relembrada nessa aula de introdução do tema, como pode ser constatado no caderno diário das alunas, não sendo sistematicamente relembrado durante toda a leccionação do tema das funções. Como está transcrito no episódio 17 (26 de Janeiro), a professora recorreu à definição do conceito para esclarecer uma dúvida apresentada pelos alunos e, por isso, esse episódio está referenciado como contendo um caso ilustrativo da Metáfora do Andaime. Excluindo este episódio, o uso dos exemplos esteve sempre voltado para o aprofundamento do conceito de função por via da construção **da imagem** do conceito de função.

ii. Variação e Espaço de Exemplos
Nesta área de uso dos exemplos, a sua utilização tem objectivos bem definidos. Com o uso de exemplos, e mais propriamente das sequências de exemplos, a professora pretende apresentar aos alunos um número suficiente de exemplos de forma que eles se apercebam das características fundamentais do conceito em causa pela variação, ou pela invariância, presente em cada um dos exemplos.

Veja-se a sequência de exemplos:

Episódio 33 (16 de Fevereiro)

> 2. Reflexão /Discussão
>
> 2.1 Seja $a = 2$ e $h = 3$.
> Represente no mesmo referencial $f(x) = a(x-h)^2 + k$ para $k = -3$, $k = 0$ e $k = 4$.
> Explique o efeito no gráfico de f devido à alteração de k na fórmula que define a função.
>
> 2.2 Seja $a = 3$ e $k = -2$.
> Represente no mesmo referencial $f(x) = a(x-h)^2 + k$ para $h = -2$, $h = 0$ e $h = 5$.
> Explique o efeito no gráfico de f devido à alteração de h na fórmula que define a função.
>
> 2.3 Seja $h = 1$ e $k = -3$.
> Represente no mesmo referencial $f(x) = a(x-h)^2 + k$ para $a = -2$, $a = -1$ e $a = 0{,}5$.
> Explique o efeito no gráfico de f devido à alteração de a na fórmula que define a função.

Esta sequência deixa bem claro o que se pretende com a variação dos três parâmetros relativos ao sentido da concavidade da parábola e às coordenadas do respectivo vértice. Pela variação de cada um deles nesta sequência de exemplos os alunos podem perceber, por separado, a sua influência nas características do gráfico associado à função, a localização do vértice e o sentido da concavidade.

Por outro lado, na sequência que segue, nos três exemplos que a constituem existe um pormenor que não varia em cada uma das expressões analíticas das funções. Ora esta invariância da parcela +3 pretende, justamente, evidenciar a ordenada na origem das funções:

Episódio 26 (2 de Fevereiro)

> 3. Considere as funções *f*, *g* e *h* definidas por:
> $$f(x) = x + 3 \text{ e } g(x) = 2x + 3 \text{ e } h(x) = -5x + 3$$
> E represente-as no mesmo referencial. O que observou?

Com estas duas sequências que a professora utilizou é bem apreciável o objectivo da variação e da invariância. Repare-se que ambas jogam um papel igualmente importante e o seu uso por parte de Esmeralda mostra o acerto da escolha dos exemplos em função do fim pretendido.
Como já foi abordado no enquadramento teórico desta investigação, a variação dos exemplos está intimamente ligada a duas noções chave ao ensino e aprendizagem de

conceitos matemáticos, a dimensão de variação possível e a respectiva amplitude de mudança permitida. Estes dois factores da variação presentes nas sequências de exemplos usados por Esmeralda podem ser encontrados num número significativo de episódios. Mais concretamente, as dimensões de variação possíveis estão referenciadas em vinte e quatro episódios e as amplitudes de mudança permitida estão mencionadas em vinte e três episódios. O número quase igual de referências obtido deve-se à interligação entre as duas noções, a uma dimensão de variação vem sempre associada um amplitude de mudança permitida. No que concerne à descrição da variação empregue por Esmeralda, os sessenta episódios são profícuos em sequências onde as dimensões de variação e as amplitudes de mudança são exemplo do papel fundamental que jogam nas generalizações que se pretende que os alunos efectuem no âmbito do conceito de função, seja com vista à construção da imagem do conceito, seja com o objectivo de ampliação dos espaços de exemplos dos alunos.

O uso que Esmeralda fez da variação, das suas dimensões e respectivas amplitudes é bem ilustrado na sequência de exemplos descrita no episódio 4 de 12 de Janeiro. As dimensões de variação desta sequência podem ser identificadas na tipologia das funções, umas são racionais e outras são irracionais. Na primeira dimensão, a amplitude de mudança permitida relaciona-se com o grau dos polinómios que se apresentam em denominador, a mudança permitida só pode atingir o grau dois ou, se superior, terá que configurar um caso notável da multiplicação de polinómios; os alunos, neste momento estão condicionados às equações de 1º ou 2º grau ou, então, aos casos onde possam utilizar a lei do anulamento do produto. Na outra dimensão, podemos identificar o índice do radical como sendo uma amplitude de mudança permitida. Aqui a mudança permitida não está limitada, o aluno apenas tem que verificar a paridade desse índice e impor que o radicando seja não negativo se o índice for par ou, se o índice for impar, não existir qualquer condição a impor.

5. Determine o domínio da função definida por

5.1 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ 5.2 $f(x)=\dfrac{1}{2x-4}$

5.3 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$ 5.4 $f(x)=\dfrac{2}{x^2+4}$

5.5 $f(x)=\dfrac{1}{x^3+x}$ 5.6 $f(x)=\sqrt{x+1}$

5.7 $f(x)=\sqrt[4]{x+3}$ 5.8 $f(x)=\sqrt[3]{x+3}$

5.9 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

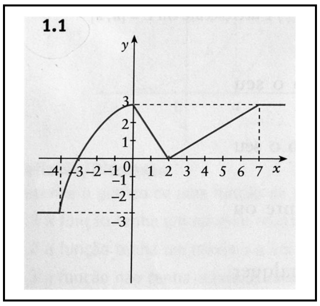
O exemplo 5.9 configura uma dimensão de variação diferente. Todavia é o único que se inclui nesta terceira dimensão. Sendo o único, a variação não poderá ser apreciada pelos alunos, por isso, este exemplo foi tratado pela professora como um misto entre as duas dimensões tratadas anteriormente.

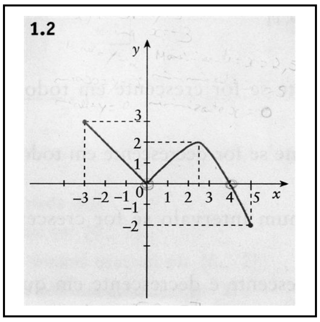
O uso de exemplos isolados e de sequências de exemplos por parte de Esmeralda perseguiram objectivos diferentes. Podemos considerar os casos de exemplos de modelação da vida real como tendo o objectivo de aplicar um conceito, ou dos exemplos de 3ª categoria – Esclarecimento e Aprofundamento – que foram apresentados de forma espontânea visando esclarecer uma dúvida, ou ainda dos exemplos que materializaram uma dada definição. Já o uso que a professora fez de sequências de exemplos, como dissemos, visa criar uma variação, ou invariância, que permitisse ao aluno fazer generalizações ou aperceber-se dos aspectos que a professora desejou evidenciar. Porém, existem dois objectivos que são considerados comuns ao uso de sequências de exemplos e ao uso de exemplos isolados, a ampliação dos espaços de exemplos dos alunos e o aprofundamento no conceito de função.

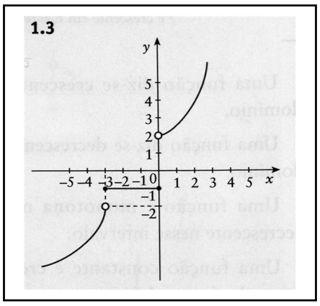
Veja-se, como exemplo, o uso que Esmeralda deu a uma sequência de exemplos relatada no episódio 8, em 19 de Janeiro:

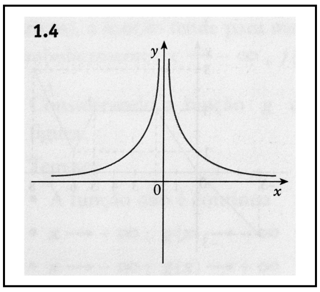
1. Para cada uma das funções representadas graficamente, indique:

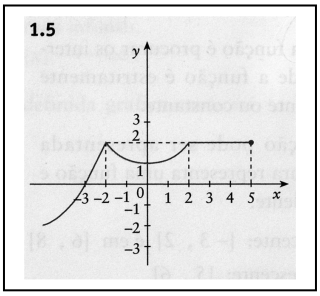
a) o domínio
b) o contradomínio
c) os zeros
d) os intervalos em que a função é positiva
e) os extremos relativos
f) os intervalos em que a função é crescente
g) os intervalos em que a função é constante

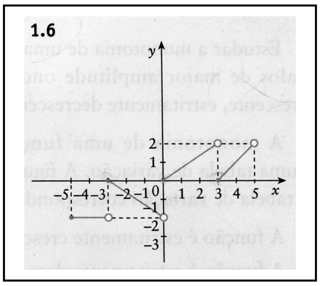












A sequência não apresenta nenhuma variação onde se identifique claramente uma dimensão de variação possível e, por outro lado, não se reconhece uma qualquer invariância que permita destacar uma característica comum a todos os gráficos que seja digna de nota. O uso dado a esta sequência estava orientado ao estudo de funções com características diferentes mas que deveriam ser estudadas segundo elementos que são estudados nos gráficos, preconizado na programação do tema "Funções". São exemplos onde o aluno pratica a identificação gráfica das características exigidas na programação e que, caso a caso, aumentam a *experiência* do aluno neste conteúdo, isto é, ampliam os espaços de exemplos dos alunos.

Por outro lado, atenda-se ao exemplo apresentado por Esmeralda no episódio 43 no dia 2 de Março:

$$\left|-x-\sqrt{2}\right|=7$$

Este foi um exemplo espontâneo que a professora usou para alargar um pouco o estudo da expressão $|x|=a$. Na aula anterior à apresentação deste exemplo espontâneo, os alunos tinham trabalhado apenas a expressão $|x|=a$ de forma intuitiva e gráfica, como pode ser observado nos cadernos diários das duas alunos. Com a introdução do exemplo $\left|-x-\sqrt{2}\right|=7$ a professora ampliou o espaço de exemplos dos alunos indicando-lhes que o argumento do módulo poderia ser uma expressão mais complicada que simplesmente x. O interessante é que apresentou outro exemplo espontâneo imediatamente a seguir, episódio 44, ampliando ainda mais o espaço de exemplos:

$$-|2x+1|+3=-5$$

Ao ampliar o espaço de exemplos dos alunos, Esmeralda preparou-os para os exemplos que se seguiram, minimizando, por assim dizer, o impacto de exemplos a tratar onde dificuldade iria ser maior.

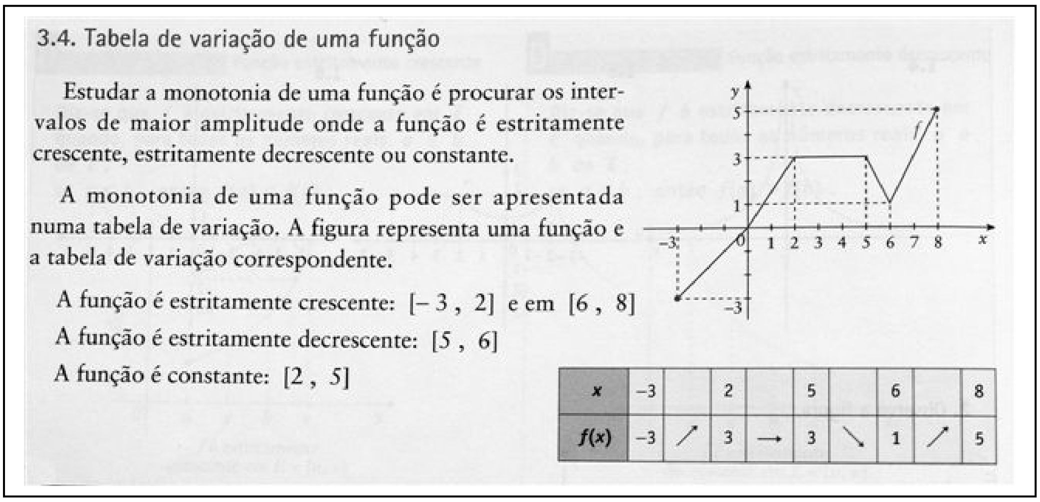
Com os exemplos apresentados, entre vários que podíamos ter escolhido, descrevemos como Esmeralda usa sequências de exemplos e exemplos isolados com o mesmo propósito, dotar os alunos com um número significativo de exemplos que lhes permitam desenvolver as suas próprias estruturas e ligações matemáticas, adquirir competências matemáticas e poder enfrentar outras situações com uma maior desenvoltura (Mason e Watson, 2005). Ou seja, é, concretamente, o propósito de qualquer professor que promove a ampliação dos espaços de exemplos dos seus alunos. Este propósito é claro na professora e pôde ser apreciado em trinta e três episódios ao logo dos sessenta transcritos.

iii. Observação de Exemplos descritos na Bibliografia

De forma isolada, pudemos observar que o uso que Esmeralda fez dos seus exemplos encaixa em algumas situações descritas na bibliografia específica e referidas neste trabalho de forma mais aprofundada na secção 4. do Capítulo II. Porém, antes de descrever o uso que Esmeralda lhes deu, apresenta-se uma descrição sumária do seu teor.

Exemplo Genérico (Bills, 1995): É um exemplo particular que se usa para nos referirmos ao caso geral. Por ter características *englobantes*, usa-se este exemplo como caso geral que poderá ser utilizado como orientação para outras situações que nele estejam incluídas.
Vimos Esmeralda utilizar um exemplo genérico no episódio 6. O tema em questão era a determinação de domínios de funções, a professora apresentou um exemplo espontâneo que enquadrou, por ser um caso mais geral, a sequência de exemplos que tinha sido tratada anteriormente (episódio 5) e que preparou os casos que lhe seguiriam.

O **Exemplo Resolvido** tem algumas semelhanças com o Exemplo Genérico. Mas, enquanto o exemplo genérico é um caso geral que abrange casos com diferenças entre si e diferentes dele próprio, o exemplo resolvido tem características que em tudo são análogas aos exemplos que se seguirão. A maior diferença radica no âmbito do objectivo, o exemplo genérico destina-se a preparar e enquadrar outros exemplos de conceito enquanto o exemplo resolvido, como se descreveu, se adapta melhor a preparar exemplos de processo e rotinas.
Encontrámos exemplos resolvidos em oito episódios. O episódio que inclui o exemplo que melhor representa o conceito de exemplo resolvido é o Episódio 10 (19 de Janeiro). Este episódio descreve a forma como Esmeralda mostra aos seus alunos o processo de construção de uma tabela de variação de uma função.



3.4. Tabela de variação de uma função

Estudar a monotonia de uma função é procurar os intervalos de maior amplitude onde a função é estritamente crescente, estritamente decrescente ou constante.

A monotonia de uma função pode ser apresentada numa tabela de variação. A figura representa uma função e a tabela de variação correspondente.

A função é estritamente crescente: $[-3, 2]$ e em $[6, 8]$
A função é estritamente decrescente: $[5, 6]$
A função é constante: $[2, 5]$

x	-3		2		5		6		8
$f(x)$	-3	↗	3	→	3	↘	1	↗	5

Com este exemplo, Esmeralda mostrou e justificou todos os passos que constituem a resolução de casos análogos, ou seja determinar os intervalos de monotonia de uma função que se apresenta na sua faceta geométrica.

Depois, o episódio que se seguiu, ilustra a forma como os alunos abordaram sem dificuldades uma sequência de dois exemplos em tudo análogos ao tratado pela professora. A abordagem utilizada pelos alunos foi em tudo idêntica à forma utilizada anteriormente pela sua professora no exemplo trabalhado.

Dê Exemplo de... Com restrições (Mason e Watson, 2005): Esta forma de exemplificar tem o aluno como emissor do exemplo, em que o professor indica as restrições, e tem

como propósito criar a oportunidade de o aluno construir ligações entre conceitos matemáticos ou entre aspectos do mesmo conceito.
Esta forma de exemplificar de Esmeralda é visível em seis episódios, mas aquele que melhor a ilustra é o Episódio 34 (16 Fevereiro). Esmeralda pede aos alunos que escrevam a equação de três parábolas em que cada uma deve obedecer às restrições indicadas:

1. Escreva uma equação da parábola conhecendo:
   1.1 o vértice $V(2;5)$ e um dos seus pontos $A(1;8)$;
   1.2 o vértice $V(3;-10)$ e um dos seus zeros $x=5$
   1.3 os zeros $x=2$ e $x=6$, e o valor máximo 8.

Este caso, como facilmente se aprecia, faz a ligação entre diversos aspectos do conceito de função, mais concretamente do gráfico de uma função quadrática, e enquadra-se na perfeição na descrição da actividade "*Dê exemplo de…*".

Exemplo Fulcral e Exemplo Ponte (Zazkis e Chernoff, 2006): O exemplo fulcral tem como objectivo provocar um conflito cognitivo com base nas concepções alternativas do aluno e, se esse exemplo provocar a mudança conceptual, toma, então, a designação de exemplo ponte.
Nos sessenta episódios que transcrevemos pudemos identificar quatro situações que configuram o que Zazkis e Chernoff descreveram como exemplo fulcral/ponte. O interessante da exemplificação de Esmeralda, no que respeita a este tipo específico de exemplo, é que nos devidos momentos se podem constatar as evidências que o caracterizam.
No Episódio 38 (23 de Fevereiro) podemos ver como Esmeralda procede com uma aluna cuja concepção alternativa consiste em confundir a *raiz quadrada de* com o *quadrado de*. A aluna, para resolver a equação $x^2=4\sqrt{3}$ propôs que se elevassem ambos os membros ao quadrado para isolar a incógnita *x*. Ao reconhecer o erro da aluna, a professora introduz o exemplo que provoca o conflito cognitivo:

> *Então quer dizer, se eu tiver dois ao quadrado, que dá quatro (escreve no quadro* $2^2=4$*) e se eu fizer dois ao quadrado ao quadrado dá dois? (escreveu* $\left(2^2\right)^2=2$*)*

Após este exemplo, a aluna apercebe-se que o elevar ao quadrado não determina o resultado por ela esperado, o conflito cognitivo é patente pois a aluna responde:

> *Não vai dar!*

Por isso o exemplo $\left(2^2\right)^2=2$ funcionou como exemplo fulcral. Depois, a aluna, apercebendo-se que elevando *x* ao quadrado não isolava a incógnita, entendeu que o correcto seria fazer o contrário. A operação correcta é tirar a raiz quadrada do segundo membro e, por isso, o exemplo da professora também serviu de ponte para a mudança conceptual.

iv. Transparência
A noção de transparência, como vimos na secção 4.5 do Capítulo II, está relacionada com a capacidade que uma dada expressão tem de *mostrar* determinadas características (Zazkis e Sirotic, 2004). Neste trabalho, a noção de transparência prende-se com

aspectos e com características da função que são *mostrados* pela expressão analítica da função em causa.
De todos os episódios transcritos e analisados pudemos registar que Esmeralda, em catorze episódios, tirou partido da transparência apresentada pelos exemplos trabalhados com os alunos. Treze, em sessenta episódios, é um rácio importante, o que nos indica que a professora explora significativamente esta propriedade que as expressões analíticas das funções apresentam. A forma como Esmeralda explora a transparência é, na maioria das vezes, para estudar características do gráfico com base na análise exclusiva da expressão analítica da função, e por isso, também é uma forma de relacionar duas facetas do conceito de função: a simbólica e a geométrica.
O Episódio 31 (16 de Fevereiro) ilustra o conceito de transparência da expressão analítica de uma função quadrática – faceta simbólica – relativamente a aspectos gráficos da parábola associada – faceta geométrica:

1. Escreva cada uma das funções *f* na forma $f(x)=a(x-h)^2+k$ e indique
   a. o domínio;
   b. o contradomínio;
   c. o eixo de simetria e o vértice da parábola que representa o gráfico;
   d. o intervalo de crescimento;
   e. o intervalo de decrescimento;
   f. o máximo ou o mínimo da função.

1.2 $f(x)=-2x^2-4x+5$

O exemplo que se apresenta é composto por duas etapas. A primeira assenta totalmente no cálculo, transformar a expressão analítica $f(x)=-2x^2-4x+5$ na expressão equivalente $f(x)=-2(x+1)^2+7$. Na segunda parte, é onde se explora a transparência da expressão analítica, isto é, sem recorrer ao gráfico da função o aluno deve indicar todas as características gráficas que a parábola exibe. Repare-se que não são pedidas as coordenadas do vértice da função nem o sentido da concavidade, mas sabendo estes dois elementos da parábola todas as características da parábola que são pedidas no exercício são facilmente depreendidas. É neste momento que a transparência da expressão $f(x)=-2(x+1)^2+7$ às coordenadas do vértice $V(-1,7)$ e ao sentido da concavidade, como $a=-2<0$ a concavidade está voltada para baixo, permite responder às questões do exemplo. Dada a importância destes dois elementos da parábola, Esmeralda escreve-os no quadro e é com eles que todas as características pedidas são deduzidas. Pela observação deste episódio, ou mesmo pela leitura da sua transcrição, se constata que o gráfico da função nunca foi esboçado no quadro, pelo que, como se disse, se pode analisar a forma como a transparência relaciona a faceta simbólica com a faceta geométrica do conceito de função.
Tal como o termo transparência é intuitivamente compreendido como a capacidade que a expressão tem para *mostrar* alguma coisa, também o seu antónimo, opacidade, deve ser intuitivamente entendido como a incapacidade para *mostrar* essa coisa. O exemplo acima também é um exemplo de opacidade. A expressão $f(x)=-2x^2-4x+5$, embora

transparente ao sentido da concavidade, é opaca às coordenadas do vértice, o que obriga à passagem de uma expressão do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ para uma equivalente na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ se quisermos efectuar um estudo com as características que foram pedidas.

Mas transparência também pode ser usada para relacionar, ao invés, a faceta geométrica com a faceta simbólica. Isto é, se conhecermos as características suficientes da parábola, no caso da função quadrática, poderemos facilmente escrever a expressão analítica da função que define essa parábola. Esmeralda também explorou este sentido da transparência da expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$ às coordenadas do vértice, mas agora em sentido contrário, proporcionou as coordenadas do vértice para os alunos escreverem a expressão analítica da função que define a parábola.
O uso de uma sequência de exemplos como o que acabámos de descrever pode ser lido na transcrição do Episódio 34 (16 de Fevereiro):

1. Escreva uma equação da parábola conhecendo:
    1.1 o vértice $V(2;5)$ e um dos seus pontos $A(1;8)$;
    1.2 o vértice $V(3;-10)$ e um dos seus zeros $x = 5$
    1.3 os zeros $x = 2$ e $x = 6$, e o valor máximo 8.

Esmeralda, em cada um dos três casos, usa estes exemplos para relacionar a faceta geométrica com a faceta simbólica recorrendo à transparência do modo que se descreveu. Com o uso desta sequência, e do exemplo anterior, os alunos podem relacionar diferentes aspectos do conceito de função sem recorrer ao gráfico da função, sendo para eles um aprofundamento no conceito numa perspectiva analítica, afastando a necessidade sentida até este momento do recurso à faceta geométrica.

v. Escolha de Exemplos
A escolha que Esmeralda faz dos seus exemplos pode ser melhor apreciada no quadro que segue. Propositadamente, ordenou-se o quadro de forma que facilmente se leia quais as orientações mais contempladas do uso dos exemplos durante estas aulas a que assistimos, pelas referências que foram registadas nas análises de cada episódio.

Uso do Exemplo

Ampliação do Espaço de Exemplos dos Alunos	**30+1**
Dimensão de Variação Possível	**24**
Amplitude de Mudança Permitida	**23**
Faceta Geométrica	**17**
Faceta Simbólica	**16**
Transparência + Opacidade	**13+1**
Variação + Invariância	**10+2**
Relação entre a Faceta Simbólica e a Faceta Geométrica	**11**
Exemplo Resolvido	**8**
Dê Exemplo de… com restrições	**6**
Faceta Numérica	**5**
Imagem do Conceito	**5**

Experiências Prévias dos Alunos	**4**
Generalidade + generalização	**2+2**
Exemplo Fulcral e exemplo Ponte	**4**
Experiências Prévias dos alunos	**3**
Faceta Simbólica: Cálculo e Rotinas	**2**
Delimitação do Espaço de Exemplos + só Espaço Exemplos	**1+1**
Não-exemplo	**2**
Exemplo Genérico	**1**
Exemplo Referência	**1**
Concepção Alternativa e Evolução Conceptual	**1**

Figura 30: A forma como Esmeralda usou os exemplos

Assim, pode-se afirmar que o uso dos exemplos por parte de Esmeralda se destina a ampliar os espaços de exemplos dos seus alunos, utiliza as dimensões de variação, e respectivas amplitudes de mudança permitidas, das sequências de exemplos para que os alunos possam generalizar e abstrair o conceito de função. Mostra muito cuidado na utilização das várias facetas do conceito de função e escolhe muitos exemplos em função da transparência que estes apresentam à noção que esteja em estudo. Na realidade esta caracterização do uso do exemplo é demasiado genérica, mas pode ser considerada como um primeiro esboço de uma caracterização que terá os seus pormenores melhor evidenciados no Capítulo VI, Discussão dos Resultados.
Os aspectos que têm directamente relação com o "uso de exemplos" no sentido dado pela bibliografia (cf. Cap. II, 4.2.2) são salientados nas linhas que se seguem.

A exemplificação de Esmeralda é, como vimos, constituída maioritariamente por exemplos planeados e escolhidos do manual adoptado. Ainda assim, podíamos estar perante escolhas aleatórias de exemplos e, devido a tal, perante alguma escolha deficiente de exemplos (Rowland, Thwaites e Huckstep, 2003a). Essa debilidade não foi observada nas aulas que gravámos. Pudemos observar como a professora escolhia do manual os exemplos para tratar em aula e como indicava outros para os alunos trabalharem autonomamente em casa, como dos grupos de exercícios semelhantes escolhia um para resolver em aula e como deixava os restantes para trabalho de casa, como alterou a ordem das sequências de exemplos do manual com vista a graduar o nível de dificuldade ou a melhorar a variação de alguma dimensão de variação, como alternava entre a faceta geométrica e a faceta simbólica para melhor ajudar os alunos a superarem as suas dificuldades, para somente referir alguns de entre tantos casos.

Pudemos observar a utilização de *exemplos passivos* e de *exemplos activos* (Karagaç, 2005). A grande maioria de exemplos foi utilizada na perspectiva passiva. Os exemplos surgiram como materialização de uma definição que foi apresentada antes do trabalho com exemplos, de forma que o conceito seja estruturado de forma dedutiva baseando a sua boa compreensão pelos alunos. Porém, existiram episódios onde Esmeralda preferiu utilizar exemplos activos, introduzindo primeiro os exemplos, para que os alunos os trabalhassem, e só depois a definição do conceito. Veja-se o episódio 12 (19 de Janeiro) onde a professora apresenta gráficos de funções contínuas e descontínuas num ponto antes de definir (ainda que intuitivamente) o que é uma função contínua num ponto do domínio. A escolha da faceta geométrica revelou-se particularmente útil, pois a definição intuitiva de função contínua assenta no aspecto visual da abordagem. Neste exemplo, pretende-se que o aluno estruture a sua imagem do conceito de forma indutiva, a apresentação de vários exemplos onde a variação (ou invariância) aliada ao significado dos termos na linguagem natural faz sobressair o aspecto a generalizar através da definição.

Nos sessenta episódios que estudámos também foram usados casos de exemplo *Ponte*, *Genérico*, de *Referência* e *Não-exemplo.*
Exemplos Ponte puderam ser observados quatro casos, nos episódios 18, 38, 45 e 50. Pudemos observar um exemplo no episódio 6 que foi simultaneamente considerado de referência e genérico. Por fim, dois não-exemplos foram identificados nos episódios 12 e 25.
O uso destes exemplos foi muito pouco observado. No entanto o uso que deles foi feito enquadra-se perfeitamente no uso que é descrito na bibliografia e, por isso, não deve surpreender o baixo número de observações já que é justificado pelas respectivas especificidades.

Não é possível ensinar, estudar e aplicar o conceito de função e o que com ele está relacionado sem ser através das suas representações ou facetas. As facetas do conceito de função foram elementos fundamentais no uso dos exemplos da professora Esmeralda. Esta afirmação é bem suportada pelo número de referências que encontramos nas análises dos episódios: 17 para a faceta geométrica, 16 para a faceta simbólica e 11 para a relação entre as duas. A faceta numérica só é referida 5 vezes.
Este facto é coerente com as sugestões de David Tall e colaboradores (cf. Cap. II, 2.2), o conceito de função é melhor aprofundado, abstraído e generalizado se as várias facetas forem relacionadas umas com as outras e o conceito de função é melhor encapsulado quanto melhor forem desenvolvidas as várias facetas no sentido de transformar cognitivamente a função como processo na função como objecto.

3.3 O uso de Exemplos na Entrevista

O uso dos exemplos por parte da professora, e que se explora nesta entrevista, deve ser enquadrado no âmbito do conceito de função. Mais especificamente, nos aspectos do conceito de função que são tratados no programa oficial do Ministério da Educação para o 10º ano de escolaridade (alunos de 15-16 anos de idade).
Tendo em consideração o guião da entrevista (cf. Cap. III, 3.), pode-se observar que apenas as últimas três questões versam directamente sobre o tema das Funções. Mas, além destas três, nas pequenas precisões que se fazem nas outras questões, muitas vezes o tema é suportado neste conceito. No entanto, podemos notar que a professora também aborda e indica como exemplos outros conteúdos que constam nas programações dos três anos do Ensino Secundário (15-18 anos de idade).
Nas linhas que se seguem queremos apontar e enfatizar as referências indirectas e directas que são feitas a conceitos tratados na bibliografia específica sobre funções e, maioritariamente, sobre exemplos e exemplificação. Relembramos que a professora, à data da entrevista, não tinha lido qualquer material bibliográfico sobre o Conhecimento Profissional do professor ou sobre Exemplificação do Conceito de Função no ensino da matemática.

Relativamente ao conceito de função, a professora está bem consciente que o uso dos exemplos neste âmbito se podem ancorar nas diversas facetas do Conceito de Função (DeMarois e Tall, 1996; 1999). À questão sobre a forma mais adequada de ensinar o conceito de função, a resposta contempla quase todas as facetas referidas na bibliografia, "*Por exemplo a representação de uma função através de um gráfico, de uma tabela, de um diagrama, uma expressão para dar início ao tema Funções.*" (E68), que corresponde, respectivamente, às facetas *geométrica*, *numérica*, *coloquial* e *simbólica* (DeMarois e Tall, 1996, 1999). Em outra ocasião da entrevista mostra como é importante começar o estudo pela definição, " (…) *estivemos a tratar do tema funções, então a sequência lógica terá que começar pela noção de função. O que é uma função.*" (E58), seguindo posteriormente pela construção da estrutura do conceito (Watson e Mason, 2005), "*Primeiro que tudo: noção de função. Depois domínio de uma função, ahh, que eles saibam distinguir entre conjunto de chegada e contradomínio, cálculo de imagens de funções, de objectos de objectos através de uma função, não é? A representação gráfica de funções também é importante, (...) este ano também é dado a injectividade de funções, é portanto depois para o cálculo da inversa precisam de saber…*" (E61), dando a primazia à faceta geométrica para uma construção do conceito adequada ao 10º ano de escolaridade. E, por fim, indica todos os aspectos que podem ser estudados na faceta geométrica e que, na sua perspectiva, são imprescindíveis ao aluno deste ano de escolaridade para a correcta utilização do conceito, "*Porque muitas vezes, muitos problemas são dados com gráficos e os alunos depois têm que saber interpretar. Não é? Então, se eles souberem traçar o gráfico correctamente sabem tudo o que há que saber sobre uma função. Porque quando se traça o gráfico de uma função tem-se atenção a quê? Domínio, contradomínio, aos zeros, aos máximos, aos mínimos, onde ela é crescente, onde ela é decrescente, onde ela é constante. Portanto, todo o estudo de uma função … se ela é injectiva… também se via graficamente. Portanto eles conseguem visualizar tudo isso. Se eu lhes dou um gráfico e lhes peço todos estes conteúdos e eles me souberem responder, então eu concluo que o aluno conseguiu entender plenamente o conteúdo Funções. E, a partir daí, está preparado para…*" (E67).

Quanto ao uso de exemplos, propriamente dito, a professora usa-os para mostrar aos alunos casos de aplicação dos conteúdos matemáticos, "*Então, os exemplos são situações particulares da aplicação.*" (E7) e distingue entre exemplo e exercício. Assim, o exemplo é visto como a primeira vez que o conteúdo ou o processo é apresentado ao aluno pela professora, enquanto que os exercícios são as aplicações, porventura idênticas ao exemplo, que os alunos abordam de forma autónoma, "*Se percebo que é um conteúdo que eles até entenderam logo com o primeiro exemplo, pois então acho que não há necessidade e passamos logo à resolução de exercícios do livro sem eu estar a pensar em mais exemplos práticos, pode ser depois que entretanto com os exercícios do livro vão surgindo novas situações e eles vão ver.*" (E9). Outra forma como o exemplo é distinguido do exercício vincula-se com a diferença entre a teoria e a prática, uma vez que o exemplo materializa a teoria e os exercícios constituem a prática. Aquilo que está separado entre as definições e os teoremas por um lado, e, por outro, a sua aplicação em situações que podem ser tratadas pelos alunos, "*Porque, normalmente, os alunos acabados de ouvir uma explicação teórica têm dificuldade em pô-la logo em prática.*" (E10).

Quando a primeira aplicação da teoria – o exemplo – é apresentada aos alunos a professora espera que os alunos possam seguir o processo e resolver de forma autónoma os exercícios que são posteriormente propostos, "*Então, se vêem a primeira resolução, eles entretanto os outros exercícios vão resolvê-los à mesma imagem e semelhança do primeiro.*" (E10). Esta descrição enquadra-se no que se designa por *exemplo resolvido*, podendo retirar-se da frase que a professora reconhece a existência de exemplos que cumprem esta função e que os utiliza na sua prática lectiva. A ideia deste tipo de exemplos só tem aplicabilidade no que mais à frente (E22) é designado por *exercícios tipo*, cujo significado todos conhecemos e que se refere a exemplos do mesmo género e que se resolvem dentro do mesmo esquema. Além disso, a professora adiciona mais um pormenor, na resposta E23 a professora dá indicações que com um conjunto significativo deste tipo de exemplos se pode tratar todo o espectro de variação de determinado tema, "*Podem em determinados conteúdos. Por exemplo, se for no cálculo de limites, esses exercícios tipo exemplificam quase tudo aquilo que eles têm que saber. Não é?*" (E23).

Como foi referido, a professora utiliza os exemplos como aplicação de conteúdos. Mas, confrontada com a questão 6, exemplificar antes ou depois de definir, a professora destaca o caso das sucessões como sendo um tema em que a exemplificação apresentada antes da definição pode ser um método adequado que proporciona aos alunos a possibilidade de procederem a generalizações (Watson e Mason, 2002a; Rowland et al., 2003b): " (…) *estou-me a lembrar por exemplo das sucessões, se nós lhes dermos dois ou três exemplos práticos, eles normalmente quando têm que chegar ao termo geral da sucessão conseguem reconhecer, por exemplo, a razão, e como é que se forma o termo geral, como é que se escreve o termo geral.*" (E16). E nesta resposta, ainda sobre este conteúdo, pode constatar-se que a professora menciona o uso dos exemplos também com o propósito de os levar a encontrar generalizações, "*A partir de exemplos, não é, eles deduzem depois a definição.*" (E16). No entanto, a professora tem bem nítido que existem conteúdos onde não é conveniente proceder desta forma, sendo mais razoável apresentar os exemplos após as definições: "*Agora, há situações e há definições que mesmo que lhes dês antes um exemplo prático antes eles não conseguem chegar ao geral.* (…) *Então nesse caso eu dou-lhes primeiro a definição e depois é que particularizo.*" (E13 e E14), deixando claro que existem conteúdos mais propícios a um *método dedutivo* e outros a um *método indutivo* (Watson e Mason, 2002a).

Um outro aspecto do uso de exemplos que foi evidenciado nesta entrevista prende-se com o uso de exercícios diversificados, "*Procuro exercícios que… diversificados.*" (E44) e não de casos que sejam uma variação do mesmo esquema mental, como acontece no manual adoptado: "*Se houver dois exercícios que se resolvam da mesma maneira e que só haja ali uma diferença, sei lá, de um número, por exemplo, então aqueles dois exercícios são iguais só faço um.*" (E44); "*Ainda que, por exemplo, os da Porto Editora tenham muitos exercícios repetidos. Ainda que se preocupem na diversidade, seja, ter um vasto leque, todos diferentes, mas também há muita repetição.*" (E48); "*Exactamente iguais, mudando um sinal ou mudando um número, depois a forma de resolver é exactamente a mesma.*" (E50). Nestas afirmações depreende-se que a ausência de diversidade nos exemplos propostos aos alunos é, para a professora, um método desadequado de uso dos exemplos.

Da mesma forma que rejeita os exercícios que envolvem o mesmo esquema mental, a professora dá primazia a um uso generalizado de situações que sejam realmente diversas e que cubram um amplo espectro de aplicação do conteúdo, como se pode concluir das frases: "*Procuro fazer um número de exercícios de forma a abranger toda a matéria. (...) todas as aplicações daquele conteúdo.*" (E44); "*Não, eu escolho aqueles que eu acho que são diferentes.*" (E51); "*Mas naqueles de margem não há essa repetição. Então aí faço todos, são todos diferentes, faço todos.*" (E52). A procura de diversidade é coerente com o conceito de *Variação* apontado por Mason e Watson (2005) e por Marton e Booth (1997). Quando a professora refere a necessidade de abranger toda a matéria, essa abrangência inclui todas as *Dimensões de Variação Possíveis* e as respectivas *Amplitudes de Variação Permitidas* (Mason e Watson, 2005). A ideia que a professora transmite neste conjunto de respostas é de que o importante é diversificar, trabalhar com os alunos o que existe de diferente nos exemplos que se lhes apresentam e, depois, deixar aqueles que envolvem os esquemas mentais já utilizados – as dimensões de variação já tratadas – para trabalho individual que o aluno deve desenvolver em casa, "*Talvez aí seja para que o professor seleccione o que ache mais importante e os outros ficarem para o aluno praticar em casa.*" (E50); "*Então aí faço todos, são todos diferentes, faço todos. Se há alguns repetidos, pois então tenho o cuidado de dizer que 'olhe este é igual a este, a maneira de resolver é a mesma, então este vocês resolvem em casa, se houver problemas nós depois…' ou então até posso mandar para trabalho de casa e na aula seguinte corrigir. Não é? Mas procuro que não haja repetição.*" (E52).
No uso dos exemplos, na procura da diversidade (Variação) de exemplos que se propõem aos alunos, a professora usa com racionalidade as sequências de exemplos incluídos no manual. A escolha de sequências, se os conteúdos o justificam, quando se pretende trabalhar determinada rotina ou processo, não é aleatória e a professora escolhe os exemplos com critérios que se prendem com a diversidade (Variação) pretendida, "*Não, eu escolho aqueles que eu acho que são diferentes.*" (E51) e, quando questionada se a escolha poderia ser aleatória, a resposta é peremptória: "*Não, Não. Depende da forma como os exercícios estejam estruturados. Porque há sequências de exercícios, em conteúdo, há sequências que são todos diferentes em que não há um único que se repita.*" (E52). Mas, diga-se, numa resposta anterior, a professora já tinha salvaguardado as más utilizações de rotinas em número excessivo, porquanto pode levar a uma mecanização e à habituação a situações ausentes da necessidade de raciocínio, "*Levar os alunos a ter uma maior destreza no cálculo. Ou, muitas vezes, porque eles gostam muito e é um método errado, mecanizar a resolução.*" (E28).

Como já foi referido, a professora distingue entre exemplo e exercício. O exemplo emana especialmente do professor de forma ilustrativa após a exposição do tema/procedimento/definição e o exercício é uma instância que se destina primordialmente ao trabalho autónomo do aluno.
Porém, existem alguns matizes sobre o exercício que a professora faz, particularmente, em contraposição ao problema. Como também já referimos atrás, o exercício é desejavelmente aplicado quando se pretende trabalhar uma rotina ou processo, "*Se for um exercício prático serve para a mecanização.*" (E30), enquanto que o problema determina um trabalho que preveja novas situações, incluídas as que surgirão em situação de exame, " (…) *para ajudar os alunos a melhor interpretar os futuros*

problemas. (E32) (…) *aí já leva o aluno a desenvolver várias capacidades. E a conseguir interpretar esses problemas e equacioná-los de maneiras diferentes.* (E29) (…) *quantos mais problemas* (…) *o aluno resolver, melhor compreende a terminologia e melhor consegue associar as ideias para os outros problemas. Não é? Situações novas, o caso de uma situação de exame. Não é?*" (E33).

Por fim, a professora indica um propósito bem definido ao uso dos exemplos: "*Se eu vejo que um conteúdo tem várias aplicações, eu procuro mostrar aos meus alunos as várias aplicações daquele conteúdo, que é para quando surgir uma situação nova eles lembrarem-se das situações práticas que eu lhes dei e saberem aplicar.*" (E8). Repare-se que a professora preconiza a construção, por parte do aluno, de uma reserva de exemplos que lhes permitam, face a uma nova situação, enfrentar o desafio de forma mais preparada, transformando e reorganizando o conhecimento pela comparação entre as experiências prévias relacionadas com aquele conteúdo. Esta ideia vai ao encontro dos conceitos de *Espaço de Exemplos* e *Ampliação dos Espaços de Exemplos* dos alunos apontados por Watson e Mason (2005): "***Eles são frequentemente exemplos clássicos ou convencionais que os professores apresentam aos seus alunos e que são úteis se, e só se, conseguirem familiarizar-se com eles, interiorizá-los e integrá-los suficientemente nos seus espaços de exemplos de forma a serem relembrados em diferentes situações*** (p. 45)". Mais à frente a professora particulariza essas futuras novas situações ao caso do exame, e como a utilização dos espaços de exemplos que foram construindo se pode mostrar útil e proveitoso nessa situação: "*Quantos mais exercícios, quantos mais problemas – exercícios em termos de problemas – o aluno resolver, melhor compreende a terminologia e melhor consegue associar as ideias para os outros problemas. Não é? Situações novas, o caso de uma situação de exame. Não é? Um aluno vê um problema pela primeira vez, e aí tem que se lembrar que enquanto esteve na sala de aula resolveu este, e aquele e o outro e o outro por determinado processo, que ali a linguagem é semelhante, então terá que usar aqueles processos para resolver, então, o problema.*" (E33). A ideia de *Espaço de Exemplos* referido ao professor também está bem presente na entrevista na resposta E7: "*Logo, procuro ter um vasto leque de exemplos onde aquele conteúdo ou aquela matéria que estivemos a dar possa ser aplicável.*"

As ideias da professora no que respeita à construção do *Espaço de Exemplos*, reestruturação e reorganização do conhecimento e, finalmente, a sua aplicação traduzem integralmente o que Watson e Mason descrevem. O que é notável.

A fonte de exemplos da qual a professora se socorre para trabalhar os exemplos com os alunos é, fundamentalmente, o manual adoptado pela escola. Na entrevista é apontada, até, a percentagem que a professora considera traduzir a relação entre exemplos retirados do manual e os que são originalmente criados por si: "*Ehh, não sei. Mas… mais, portanto 90%, por aí.*" (E41); "*Só faço fichas quando eu acho que aquilo que o manual tem é insuficiente. Então, como complemento, utilizo fichas.*" (E37), afirmação que é totalmente suportada pelas análises dos episódios que foram gravados. Outra coerência, entre o que preconiza na entrevista e que é visto na prática de sala de aula, que deve ser apontada vincula-se com o uso da calculadora. Se bem que a professora dá toda a atenção ao tratamento analítico do conceito de função, particularmente nas aulas respeitantes ao fim do tema, a focagem do conceito de função no momento da sua introdução é feita principalmente na faceta geométrica. Quer pela análise gráfica dos exemplos tratados na calculadora gráfica, quer pelos exemplos apresentados directamente nesta forma. Afirma isso de forma clara: "*Exactamente, através da calculadora.*" (E65) e não considera fundamental o tratamento analítico do conceito de função no início do seu estudo, ao nível do 10º ano de escolaridade, "*Analiticamente não.*" (E66).

No que se reporta ao uso de exemplos quanto ao objectivo podemos encontrar referências a todas as categorias.

A 1ª categoria, *Definição*, é referida quando Esmeralda afirma que um dos objectivos dos exemplos é servirem como apresentação dos conceitos e dos processos: "*Então, se vêem a primeira resolução, eles entretanto os outros exercícios vão resolvê-los à mesma imagem e semelhança do primeiro.*", quando servem para induzir uma generalidade: "*há situações que se nós lhes dermos um exemplo particular antes [...] conseguem chegar eles sozinhos à definição.*" ou quando proporcionam particularizações das generalidades: "*Então nesse caso eu dou-lhes primeiro a definição e depois é que particularizo.*"

Quando os exemplos têm como objectivo que os alunos trabalhem com os conceitos e procedimentos matemáticos de modo a que surjam dúvidas e que assim possam, com as explicações, aprofundar no conceito e rotinar o cálculo, então, estamos perante exemplos que se incluem na 2ª categoria, *Abordagem Inicial Autónoma*. Esmeralda refere-se a este tipo de exemplos na entrevista quando considera que um exemplo, "*se for um exercício prático, serve para a mecanização*", isto é, para rotinar os procedimentos matemáticos. No entanto, as referências a exemplos deste tipo não são isoladas, combinam-se com referências a outro tipo de exemplos. "*Se percebo que é um conteúdo que eles até entenderam logo com o primeiro exemplo, [...] passamos logo à resolução de exercícios...*" é uma referência a exemplos de 1ª Categoria e de 2ª Categoria, o primeiro exemplo introduz o aluno no conceito/processo e os segundos na prática. Referência idêntica é aquela em que a professora diz que "*se [os alunos] vêem a primeira resolução, eles entretanto os outros exercícios vão resolvê-los à mesma imagem e semelhança do primeiro.*" Também se podem observar combinações de referências entre a 2ª e a 3ª categoria, exemplos que visam a prática e outros que pretendem esclarecer as dúvidas dos alunos: *"...quando reparo que os alunos não perceberam com aqueles exemplos tento arranjar outros de forma que chegue ao nível dos alunos e eles compreenderam o conteúdo."*; *"...no início da abordagem do tema Funções, eu começo por utilizar coisas que eles já conhecem. [...] A partir dali vejo o que é que eles sabem."*; *"...eu vejo como é que... e como é que eles fazem a interpretação gráfica, se eles sabem verificar a imagem através do gráfico, ou se dada a imagem sabem identificar o objecto através do gráfico. E depois, a partir daí, começamos a explorar problemas."*; "*Primeiro fazer uma sondagem para ver o que é que o aluno sabe e a partir daí explorando, e aprofundando e completando os saberes...*"; no fundo, o que Esmeralda transmite é que com exemplos que têm como objectivo a prática e o surgimento de dúvidas (2ª Categoria) se abrem oportunidades de usar exemplos que promovem o aprofundamento no conceito (3ª categoria). Porém, são feitas referências exclusivas aos exemplos que se incluem na 3ª categoria: "*normalmente quando dou exemplos, e se dou mais que um, e o processo de resolução é o mesmo, é porque houve alunos que não perceberam a primeira resolução ou o primeiro exemplo. Então procuro arranjar outros, de forma que os alunos tenham mais*

elementos práticos."; "*Se eu lhes dou um gráfico e lhes peço todos estes conteúdos e eles me souberem responder, então eu concluo que o aluno conseguiu entender plenamente o conteúdo Funções.*"; "*Então, se ele fizer esta pergunta, ou colocar esta dúvida, eu vou responder desta, ou daquela maneira, ou apresentando este ou aquele exemplo.*"; nestas referências é óbvio o sentido de esclarecer os alunos nas suas dúvidas.
As referências explícitas à 4ª e à 5ª categoria não são observáveis na entrevista. Mas, indirectamente, a professora refere-se a problemas e a exercícios mais exigentes: *"... e passamos logo à resolução de exercícios do livro sem eu estar a pensar em mais exemplos práticos, pode ser depois que entretanto com os exercícios do livro vão surgindo novas situações*"; "*…e a partir daí explorando, e aprofundando e completando os saberes…*" e um problema serve "*... para ajudar os alunos a melhor interpretar os futuros problemas.*" Note-se que, na escola onde Esmeralda lecciona, o termo "problemas" serve para os professores designarem a utilização de conceitos em contexto interno à matemática e à modelação de situações da vida real e doutras ciências.
Estas referências às categorias próprias do primeiro instrumento de análise, onde se distinguem os exemplos pelo seu objectivo, permitem afirmar que, para a professora Esmeralda, o uso dos exemplos destina-se a introduzir os conceitos, a rotinar procedimentos e o cálculo e, fundamentalmente, a tirar as dúvidas dos alunos. Esta utilização complexa dos exemplos persegue um objectivo bem definido: preparar os alunos para a resolução de problemas (situações novas) que os alunos devem resolver em situação de avaliação sumativa. São os testes que ela própria apresenta e o exame final do ensino secundário, que é fundamental para completar este ciclo e ingressar na universidade.

3.4 Notas finais sobre a exemplificação de Esmeralda

Após a transcrição dos episódios gravados em vídeo procedeu-se à classificação dos exemplos que neles constam segundo o sistema de categorias que utilizámos.
Tal como descrevemos no capítulo relativo à metodologia, o sistema de categorias foi criado com base em dois sistemas que fundimos, o de Figueiredo *et al.* (2005, 2006, 2007) e o de Zodik e Zaslavsky (2007), e utilizámo-lo para classificar os exemplos em três vertentes de forma simultânea. A classificação dos exemplos com recurso a este sistema de categorias revelou-se simples e útil, porque permite incluir o exemplo numa categoria que nos indica em que fase do aprofundamento do conceito de função o aluno está a trabalhar, a natureza e o objectivo do exemplo e, simultaneamente, o grau de planeamento com que a professora o apresenta. O exemplo tratado no episódio 38 (23 de Fevereiro) foi classificado como *Exemplo Planeado de Processo* para *Esclarecimento e Aprofundamento* do conceito de função, isto é, relativamente ao conteúdo em questão os alunos encontram-se já numa fase adiantada da construção do conceito, tratando aspectos relativos a processo e que o fazem com um exemplo planeado para o efeito.

Quanto ao uso que é feito dos exemplos e que se descreveu episódio por episódio, gostaríamos de salientar o facto de facilmente termos *encaixado* o uso que Esmeralda deu aos seus exemplos nos casos descritos na bibliografia específica.
Também foi simples balizar o uso dos exemplos no âmbito da bibliografia relativa ao conceito de função. Cabe esclarecer que, deste âmbito, utilizámos fundamentalmente a

sua terminologia e menos o modelo de aprofundamento no conceito de função pelo aluno, dado que os objectivos da investigação estão mais ligados ao papel da professora que à aprendizagem dos alunos.
Foi à forma como Esmeralda escolheu e usou os exemplos que dedicámos a nossa atenção. E, nesse campo, a bibliografia não é dedicada apenas ao conceito de função, é bastante mais genérica. Todavia, os pontos de contacto que a prática de Esmeralda teve com os casos descritos na bibliografia dedicada à exemplificação foram constantes e não existiu episódio onde o uso do exemplo não pudesse ser enquadrado.

4. O Conhecimento Didáctico do Conteúdo de Esmeralda

Nos capítulos onde descrevemos o enquadramento teórico e a metodologia do estudo fez-se a primeira, e completa, apresentação do segundo instrumento de análise (Chick 2007) e justificámos a forma como o aplicámos à professora Esmeralda no o intuito de descrevermos o seu Conhecimento Didáctico do Conteúdo. Nesta secção não iremos repetir pormenorizadamente as suas características e condicionantes da aplicação, contudo faremos uma breve resenha dos seus aspectos que melhor descrevem o conhecimento didáctico do conteúdo de Esmeralda no que toca, especificamente, ao ensino e à aprendizagem do conceito de função através dos exemplos que apresentou aos seu alunos.

É no plano da escolha e do uso dos exemplos no ensino e na aprendizagem do conceito de função que nos devemos posicionar e, simultaneamente, quais as características do Conhecimento Didáctico do Conteúdo (CDC) envolvidas neste processo.
Em termos cronológicos, relembramos que o estudo do conceito de função feito por Esmeralda com os seus alunos começa pela definição de função, passa ao estudo das suas características e, por fim, aplica a situações de problema ou de modelação. Por isso, nas três vertentes em que o conhecimento didáctico do conteúdo foi dividido – claramente CDC, Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico e Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo – são apresentados os quadros em que a informação que contêm se refere a blocos de dez episódios ordenados cronologicamente. Desta forma, e pela observação dos elementos do CDC assinalados e da respectiva frequência, é possível contrastar quais e como estiveram em campo durante o ensino e aprendizagem do conceito de função, enquanto se progredia na planificação da professora. O último quadro apresenta o total relativo aos sessenta episódios.

4.1 O Conhecimento Didáctico do Conteúdo pelos exemplos

Nos exemplos propostos aos alunos e no uso que lhes deu, Esmeralda revelou as seguintes características relativamente à primeira vertente do Conhecimento Didáctico do Conteúdo com as frequências que se assinalam com barras:

4.1.1 Claramente Conhecimento Didáctico do Conteúdo

Aquilo a que se referem as categorias claramente sobre o conhecimento didáctico do conteúdo relaciona-se com tudo o que o professor faz na sala de aula: implementar a planificação, corresponder a todas as situações que emirjam e interagir com os alunos.

Tudo isto requer o conhecimento de várias abordagens para os mesmos conteúdos e o que elas podem oferecer, adaptá-las aos alunos que tem em frente, diferenciar os vários níveis de capacidades dos alunos, desenvolver as explicações adequadas e responder aos alunos segundo as suas dúvidas no intuito de que superem as suas dificuldades.

Episódios: Totais do 1º ao 10º

<table>
<tr><td>Estratégias de Ensino</td><td>| | | | | | | | |</td></tr>
<tr><td>Pensamento do Estudante</td><td>| | | | |</td></tr>
<tr><td>Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas</td><td>| | | |</td></tr>
<tr><td>Exigências Cognitivas de uma Tarefa</td><td>| | | |</td></tr>
<tr><td>Representações Detalhadas e Apropriadas Dos Conceitos</td><td>| | | | |</td></tr>
<tr><td>Explicações</td><td>| | | | | | |</td></tr>
<tr><td>Conhecimento de Exemplos</td><td>| |</td></tr>
<tr><td>Conhecimento de Recursos</td><td></td></tr>
<tr><td>Conhecimento do Curriculum</td><td></td></tr>
<tr><td>Objectivo do Conhecimento do Conteúdo</td><td></td></tr>
</table>

Episódios: Totais do 11º ao 20º

<table>
<tr><td>Estratégias de Ensino</td><td>| | | | |</td></tr>
<tr><td>Pensamento do Estudante</td><td>| | | | | |</td></tr>
<tr><td>Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas</td><td>| | |</td></tr>
<tr><td>Exigências Cognitivas de uma Tarefa</td><td>| | | | |</td></tr>
<tr><td>Representações Detalhadas e Apropriadas Dos Conceitos</td><td>| |</td></tr>
<tr><td>Explicações</td><td>| | | | |</td></tr>
<tr><td>Conhecimento de Exemplos</td><td>|</td></tr>
<tr><td>Conhecimento de Recursos</td><td>|</td></tr>
<tr><td>Conhecimento do Curriculum</td><td></td></tr>
<tr><td>Objectivo do Conhecimento do Conteúdo</td><td>|</td></tr>
</table>

Episódios: Totais do 21º ao 30º

<table>
<tr><td>Estratégias de Ensino</td><td>| | | | | |</td></tr>
<tr><td>Pensamento do Estudante</td><td>| | |</td></tr>
<tr><td>Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas</td><td>|</td></tr>
<tr><td>Exigências Cognitivas de uma Tarefa</td><td>| |</td></tr>
<tr><td>Representações Detalhadas e Apropriadas Dos Conceitos</td><td>| | |</td></tr>
<tr><td>Explicações</td><td>| | | | | |</td></tr>
<tr><td>Conhecimento de Exemplos</td><td>|</td></tr>
<tr><td>Conhecimento de Recursos</td><td>| | | |</td></tr>
<tr><td>Conhecimento do Curriculum</td><td></td></tr>
<tr><td>Objectivo do Conhecimento do Conteúdo</td><td></td></tr>
</table>

Episódios: Totais do 31º ao 40º

<table>
<tr><td>Estratégias de Ensino</td><td>| | | | | | | |</td></tr>
<tr><td>Pensamento do Estudante</td><td>| | | | | | | | | |</td></tr>
<tr><td>Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas</td><td>| | |</td></tr>
<tr><td>Exigências Cognitivas de uma Tarefa</td><td>| | | | | |</td></tr>
<tr><td>Representações Detalhadas e Apropriadas Dos Conceitos</td><td>| | | |</td></tr>
<tr><td>Explicações</td><td>| | | | | | | |</td></tr>
<tr><td>Conhecimento de Exemplos</td><td>| | | |</td></tr>
<tr><td>Conhecimento de Recursos</td><td>| |</td></tr>
<tr><td>Conhecimento do Curriculum</td><td>|</td></tr>
<tr><td>Objectivo do Conhecimento do Conteúdo</td><td>| |</td></tr>
</table>

Episódios: Totais do 41º ao 50º

Estratégias de Ensino	||||||||||
Pensamento do Estudante	|||||||||
Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas	|||
Exigências Cognitivas de uma Tarefa	|||||||
Representações Detalhadas e Apropriadas Dos Conceitos	|||||
Explicações	|||||||
Conhecimento de Exemplos	|||
Conhecimento de Recursos	||
Conhecimento do Curriculum	
Objectivo do Conhecimento do Conteúdo	

Episódios: Totais do 51º ao 60º

Estratégias de Ensino	|||||||
Pensamento do Estudante	||||||||
Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas	||
Exigências Cognitivas de uma Tarefa	|||||||
Representações Detalhadas e Apropriadas Dos Conceitos	||||||
Explicações	|||||||||
Conhecimento de Exemplos	|
Conhecimento de Recursos	|||
Conhecimento do Curriculum	|||
Objectivo do Conhecimento do Conteúdo	

A observação das frequências nas várias categorias do Conhecimento Didáctico do Conteúdo (CDC) de Esmeralda mostra que, ao longo do tema das funções, a forma de tratar o conceito de função não sofreu alterações significativas. Isto é, com os exemplos que usou nas diversas etapas da programação do tema – definição de função, características e aplicação – a professora manteve uma homogeneidade nas características de CDC postas em campo. Existem três ou quatro categorias que são sempre as mais observadas em cada um dos seis blocos de dez episódios e que mantêm idênticas as frequências absolutas. Por outro lado, também nas categorias menos observadas se comprova que as frequências absolutas apresentam os mesmos valores.
As categorias mais observadas foram: **Estratégias de Ensino**, **Pensamento do Estudante**, **Exigências Cognitivas de uma Tarefa** e **Explicações**. Estas categorias mais observadas correspondem às características de CDC que Esmeralda privilegia no uso dos exemplos sobre o conceito de função e procedimentos a ele dependentes, dando importância à forma como transmite os conteúdos, considerando as potencialidades e debilidades dos seus alunos, as dificuldades inerentes aos conteúdos e põe a tónica na sua explicação.

Obviamente, se são as mesmas categorias que se mantêm mais observadas nos seis blocos, então serão essas mesmas categorias as mais observadas considerando a totalidade dos episódios.

Episódios: Totais do 1º ao 60º

Estratégias de Ensino	**45**
Pensamento do Estudante	**41**
Pensamento do Estudante: Concepções Alternativas	**16**
Exigências Cognitivas de uma Tarefa	**31**
Representações Detalhadas e Apropriadas Dos Conceitos	**25**

Explicações	**42**
Conhecimento de Exemplos	**12**
Conhecimento de Recursos	**12**
Conhecimento do Curriculum	**4**
Objectivo do Conhecimento do Conteúdo	**3**

As categorias mais observadas no total dos episódios são as quatro já apresentadas. Estas quatro categorias representam quatro fortes características no CDC apresentado por Esmeralda quando usa exemplos do conceito de função.
Mas as outras categorias, as menos observadas, também foram contempladas na actuação da professora no ensino deste tema do 10º ano. A menor observação destas categorias não as diminui na importância que terão tido na leccionação, na construção da estrutura conceito de função ou na ampliação do espaço de exemplos dos alunos, apenas são elementos do CDC cuja visibilidade ou aparição está condicionada por outras especificidades associadas ao tema ou às características pessoais da professora. É natural que a observação da categoria **Conhecimento de Exemplos** seja menos observada dado que Esmeralda prefere planear os seus exemplos e apenas apresenta exemplos espontâneos quando a situação a isso a obriga. Já a categoria **Conhecimento de Recursos**, terá sido pouco observada devido ao facto de estarmos perante um único conteúdo – funções – ser um conteúdo para estudantes de 15-16 anos e em que o principal recurso (e o mais adequado ao conteúdo) é a máquina de calcular gráfica. As categorias **Conhecimento do Curriculum** e **Objectivo do Conhecimento do Conteúdo** são categorias que cuja evidencia se manifesta mais em entrevistas à professora do que quando ela está a leccionar.

As Categorias mais observadas

a) *Estratégias de Ensino*. Deve-se ter em consideração que toda a actuação de Esmeralda tem como pano de fundo o conceito de Função e, concretamente, para alunos de 15-16 anos. Assim, não surpreende que esta categoria seja a mais observada, e também não deve surpreender que todas as acções estratégicas de ensino que identificámos visem o ensino e aprendizagem deste conceito. Outro facto importante é que a observação das aulas de Esmeralda se centraram no seu uso dos exemplos e, por isso, é natural que o uso do exemplo ou das sequências de exemplos se confunda com a própria estratégia para o ensino de determinado conteúdo. Por isso podem ser observadas estratégias que se prendem com o uso da máquina de calcular, com a rotina de algum procedimento, com uso de sequências com vista à generalização, com a aplicação à vida real ou com a apresentação de um não-exemplo para delimitar um conceito. A observação desta categoria é tão frequente que se escolhermos ao acaso um dos sessenta episódios o mais provável é que nele encontremos uma estratégia com um objectivo bem determinado.
b) *Pensamento do Estudante*. Pelo elevado número de observações deste elemento do CDC podemos afirmar que Esmeralda conhece bem a turma com que trabalha e que, por isso, pauta a sua actuação considerando as potencialidades e as debilidades dos seus alunos. Esse conhecimento dos seus alunos, dos seus conhecimentos prévios, das características do conceito de função em que estão mais ou menos seguros, da facilidade ou da dificuldade que o cálculo possa envolver, da profundidade que puderam atingir no conceito de função ou do que

para eles é conceptualmente mais exigente, permite à professora adaptar o uso que faz dos exemplos que propõe às características dos alunos e aos objectivos que persegue. Nos episódios em que aspectos desta categoria foram observados, eles podem ser identificados por perguntas específicas que dirige aos alunos, pelo apontar de aspectos específicos com que orienta os alunos, no esboçar de um gráfico que permite aos alunos identificar as características a realçar, entre os muitos elementos do CDC que apontámos em cada um dos episódios.

c) *Exigências Cognitivas de uma Tarefa.* A identificação de evidências deste elemento do CDC envolve a identificação dos elementos do conceito de função, ou com alguma noção com ele directamente relacionado, que promove a sua complexidade. O elevado número de evidências mostra que a professora conhece bem os aspectos do conceito de função dos quais depende uma boa aprendizagem do aluno. Isto pode ser avaliado ao longo dos sessenta episódios, pois a professora identifica os elementos de exigência, tanto antes como depois de os alunos demonstrarem as suas dificuldades com algum conteúdo, ao longo de todo o tema relacionado com as Funções. As exigências identificadas nas aulas, ou antecipadas na sua preparação, estão relacionadas com aspectos específicos do conceito de função, designadamente com as ligações entre as várias representações do conceito, com o cálculo, com a aplicação e com a modelação.

d) *Explicações*. Naturalmente, este elemento do CDC deve ser bastante evidenciado quando se leccionam temas relacionados com o conceito de função. Esmeralda evidenciou as suas capacidades de explicar quando leccionou os tópicos, os procedimentos e as noções que integram a programação do tema "Funções". Também este elemento do CDC foi amplamente evidenciado pela professora, basta verificar que quarenta e dois dos sessenta episódios incluem a observação de momentos em que Esmeralda explica algo aos alunos. Os exemplos que estão classificados como "*tratados pela professora*" são aqueles onde se verifica quase sempre a observação deste aspecto do CDC e são aqueles em que a professora privilegia a explicação de tópicos, procedimentos ou noções associadas ao conceito de função. Os exemplos classificados como "*tratado pelos alunos*" não têm tantos registos da existência de explicações por parte da professora. Este padrão ilustra e demonstra um uso orientado do exemplo para um objectivo concreto, aquele que é usado para explicar e aquele que é usado para os alunos praticarem procedimentos, aplicarem o conceito de função ou resolverem situações problema.

As Categorias menos observadas

a) *Conhecimento do curriculum.* Embora Esmeralda se refira apenas quatro vezes à forma como determinados conteúdos se integram na programação, qual o seu papel ou a relativa importância na programação, isso não revela que este elemento não conste do seu CDC mas sim que não o refere aos seus alunos de forma frequente. Recorde-se que a frequência das observações de evidências relativas às categorias do CDC que os quadros registam se referem aos sessenta episódios recolhidos em situação de aula. Mas, se nos reportarmos à situação de entrevista (5 de Janeiro), Esmeralda refere-se a este aspecto por seis vezes. Seis vezes numa única entrevista. Por isso, este elemento do CDC da professora não é tão evidente em situação de aula com os alunos mas manifesta-se mais na entrevista em que discutiu a utilização dos exemplos.

b) *Objectivo do Conhecimento do Conteúdo*. Analogamente à anterior categoria do CDC, também as evidências que caracterizam esta categoria não fazem o seu aparecimento quando Esmeralda trabalha com os seus alunos, mas sim quando responde na entrevista sobre a forma como exemplifica. Respectivamente, três episódios sinalizados contra quatro referências na entrevista.

c) *Conhecimento de Exemplos*. Os doze episódios referenciados com o conhecimento de exemplos são aqueles em que Esmeralda exemplificou de forma espontânea ou quando modificou algum exemplo. Pela análise de todos os episódios, e como já tínhamos referido anteriormente, constatamos que a professora prefere trabalhar com exemplos planeados e apenas exemplifica de forma não planeada, ou modifica o exemplo em causa, quando a situação assim o obriga. O que explica a pouca observação de evidências desta categoria.
Como foi anteriormente explicado, a menor observação deste tipo de evidências apenas evidencia uma característica pessoal da forma de trabalhar de Esmeralda, não indicando qualquer debilidade do CDC a este nível.

d) *Conhecimento de Recursos*. Considerando o tema e a faixa etária dos alunos, não seria de esperar o uso de uma grande diversidade de recursos como auxiliar da leccionação. Assim, os recursos pelos quais assinalámos os doze episódios referem-se, sobre tudo, ao uso da máquina de calcular gráfica que é um instrumento de trabalho fundamental e obrigatório e o seu uso é uma característica do CDC tecnológico.

4.1.2 Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

A categorização do Conhecimento Didáctico do Conteúdo de Chick (2007), no que respeita ao Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico não contempla as evidências relativas ao rigor de linguagem e na notação que um professor possa apresentar. Por isso, incluímos uma nota nos episódios em que a professora se referiu ao rigor de linguagem verbal ou da notação. Por pensarmos que o rigor da linguagem oral (metalinguagem) e da notação (linguagem simbólica) se incluem no conhecimento do conteúdo, optámos por incluir estas notas nesta sub-categorização.
Não acrescentámos esta categoria à categorização original por dois motivos. Primeiro, para que o instrumento fosse aplicado na sua forma original dada por Chick; segundo, para que esse aspecto, cuja falta notámos, fosse tratado como um aspecto identificado no âmbito desta investigação e não como uma categoria mais da categorização original.

Episódios: Totais do 1º ao 10º

Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental	|
Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave	|||||||||
Estrutura Matemática e Conexões	|||||
Conhecimento Procedimental	
Métodos de Solucionar	

Rigor de Linguagem Verbal e Notação	Inclui nota: não ||||||||||

Episódios: Totais do 11º ao 20º

<table>
<tr><td>Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental</td><td>|</td></tr>
<tr><td>Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave</td><td>| | | | | | |</td></tr>
<tr><td>Estrutura Matemática e Conexões</td><td>| | | | |</td></tr>
<tr><td>Conhecimento Procedimental</td><td></td></tr>
<tr><td>Métodos de Solucionar</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Rigor de Linguagem Verbal e Notação</td><td>Inclui nota: não | | | | | | | | | |</td></tr>
</table>

Episódios: Totais do 21º ao 30º

<table>
<tr><td>Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental</td><td></td></tr>
<tr><td>Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave</td><td>| | | |</td></tr>
<tr><td>Estrutura Matemática e Conexões</td><td>| |</td></tr>
<tr><td>Conhecimento Procedimental</td><td>|</td></tr>
<tr><td>Métodos de Solucionar</td><td>| |</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Rigor de Linguagem Verbal e Notação</td><td>Inclui nota: não | | | | | | | | | |</td></tr>
</table>

Episódios: Totais do 31º ao 40º

<table>
<tr><td>Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental</td><td>|</td></tr>
<tr><td>Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave</td><td>| | | | | | | |</td></tr>
<tr><td>Estrutura Matemática e Conexões</td><td>| | | |</td></tr>
<tr><td>Conhecimento Procedimental</td><td>| | |</td></tr>
<tr><td>Métodos de Solucionar</td><td>| | |</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Rigor de Linguagem Verbal e Notação</td><td>Inclui nota: não | | | | | | sim | | | | | | |</td></tr>
</table>

Episódios: Totais do 41º ao 50º

<table>
<tr><td>Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental</td><td>| | |</td></tr>
<tr><td>Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave</td><td>| | | | | | | | | |</td></tr>
<tr><td>Estrutura Matemática e Conexões</td><td>| | |</td></tr>
<tr><td>Conhecimento Procedimental</td><td>| |</td></tr>
<tr><td>Métodos de Solucionar</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Rigor de Linguagem Verbal e Notação</td><td>Inclui nota: não | | | | | | | sim: | | |</td></tr>
</table>

Episódios: Totais do 51º ao 60º

<table>
<tr><td>Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental</td><td>| | | |</td></tr>
<tr><td>Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave</td><td>| | | | | | | |</td></tr>
<tr><td>Estrutura Matemática e Conexões</td><td>| | | | | |</td></tr>
<tr><td>Conhecimento Procedimental</td><td></td></tr>
<tr><td>Métodos de Solucionar</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Rigor de Linguagem Verbal e Notação</td><td>Inclui nota: não | | | | | | | | sim: | |</td></tr>
</table>

Tal como nas frequências observadas na sub-categorização anterior, não encontrámos nesta sub-categorização mudanças significativas nas frequências no desenrolar cronológico ao longo do tema em estudo, "Funções"; pelo menos no que respeita às primeiras três categorias. Já as evidências próprias das duas últimas categorias, Conhecimento Procedimental e Métodos de Solucionar, são observáveis apenas entre os episódios 21 e 50. Esta circunstância é explicada pelo o facto de ter sido nestes episódios onde a professora mais propôs aos alunos a resolução de situações problema,

seja tratando exemplos de aplicação interna, seja com o tratamento de exemplos de aplicação externa e modelação. Isto aconteceu porque os primeiros conteúdos do tema, onde se introduzem as primeiras noções e os primeiros aspectos do conceito de função, não são propícios à resolução de situações problema, como os exemplos de aplicação interna ou externa (ver planificação do tema Funções seguida por Esmeralda).
Quanto ao rigor de linguagem e ao rigor na notação que referimos, a preocupação que notámos em Esmeralda poderia ter passado desapercebido com qualquer outro informante e, com isso, não identificaríamos a "falta" de uma *categoria* no instrumento que utilizámos. Na observação das aulas de Esmeralda nota-se que esta preocupação é muito vincada, eventualmente a constante preocupação poderá ser uma característica pessoal, mas acreditamos que a capacidade de transmitir aos alunos o sentido do rigor deve ser elemento do conhecimento didáctico do conteúdo de qualquer professor de Matemática.

Episódios: Totais de 1 a 60

Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental	**10**
Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave	**46**
Estrutura Matemática e Conexões	**25**
Conhecimento Procedimental	**6**
Métodos de Solucionar	**5**

Rigor de Linguagem Verbal e Notação	**Inclui nota: não-51 sim-11**

As Categorias mais observadas

a) *Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave.* No conjunto de categorias relativas ao Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico a categoria mais observada é "Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave". A frequência com que evidências desta categoria ocorrem denota o cuidado que Esmeralda tem em mostrar aos alunos os elementos mais importantes dos aspectos do conceito de função. A frequência relativa é de quarenta e cinco em sessenta episódios, quer isto dizer que em quase todos os episódios a professora se preocupou em chamar a atenção dos alunos para os pormenores importantes dos exemplos que propôs e que foram trabalhados em aula; por ela, pelos alunos ou por todos em conjunto.
Se atendermos aos quadros relativos à descrição individual dos sessenta episódios podemos notar que a relação entre a categoria "Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave", deste grupo de categorias, e a categoria "Explicações", do grupo de categorias anterior, é quase perfeita. Isto é, em quase todos os episódios onde foi observada uma evidência relativa à categoria "Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave" também é observada alguma evidência relativa à categoria "Explicações". Esta relação entre as duas categorias descreve bem a forma como Esmeralda trabalha os exemplos com os seus alunos, aponta os pontos-chave de cada exemplo e explica-os aos alunos.

b) *Estrutura Matemática e Conexões.* A frequência com que se observaram evidências desta categoria não é tão elevada como a frequência relativa à categoria anterior. Ainda assim, as conexões entre tópicos e noções do conceito de função, ou mesmo entre outros conceitos matemáticos, foram manifestadas em quase metade dos sessenta episódios. Estas referências a outros conteúdos, já leccionados ou por leccionar, indicam que Esmeralda se preocupa em mostrar aos alunos que a Matemática é uma rede de interligações e, assim, tenta que as ideias matemáticas que apresenta façam mais sentido ao constituírem um todo.

As Categorias menos observadas

a) *Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental*. Sem diminuir todo o conhecimento sobre o conceito de função que Esmeralda revela ao longo destes sessenta episódios, apenas marcámos como evidência desta categoria os acontecimentos que, de algum modo, saíram fora do desenrolar normal da aula. Para ilustrar dois destes acontecimentos, remetemos para os Episódios 54 e 57. No Episódio 54, Esmeralda opta por tratar um exemplo da forma escolhida pela a aluna em vez de o fazer da forma que ela própria havia preparado por julgar ser a mais adequada para os seus alunos, mostrando possuir capacidades de inflectir e poder, assim, explicar de formas diferentes um mesmo exemplo. O Episódio 57 retrata como, no final do desenvolvimento de um exemplo, a professora apresenta aos alunos duas formas diferentes de obter a equação de uma recta, permitindo-lhes desta forma que escolham aquela que melhor se adapte à sua imagem do conceito e de estrutura do conceito de função.

b) *Conhecimento Procedimental* e *Métodos de Solucionar*. A razão pela qual se observaram em poucos episódios evidências destas duas categorias já foi anteriormente explicado, prende-se com o facto de as situações de aplicação do conceito de função a situações que envolvem apenas conteúdos matemáticos, a situações de modelação da vida real e a situações de resolução de problemas, fazerem a sua aparição somente na segunda metade da programação do tema "Funções" do 10º ano de escolaridade.

4.1.3 Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo

Os quadros seguintes retratam como, nos sessenta episódios, Esmeralda evidenciou aspectos das três categorias relativas ao Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo. Como já referimos, são apresentados em grupos de 10 episódios para podemos apreciar o seu aparecimento numa perspectiva cronológica.

Episódios: Totais do 1º ao 10º

Objectivos da Aprendizagem	||||
Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno	|||||||
Técnicas de Sala de Aula	|||||||

Episódios: Totais do 11º ao 20º

Objectivos da Aprendizagem	||
Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno	|||||||
Técnicas de Sala de Aula	|||||||

Episódios: Totais do 21º ao 30º

Objectivos da Aprendizagem	
Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno	||||
Técnicas de Sala de Aula	|||||||

Episódios: Totais do 31º ao 40º

Objectivos da Aprendizagem	| | |
Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno	| | | | | | | | | |
Técnicas de Sala de Aula	| | | | | | | | | |

Episódios: Totais do 41º ao 50º

Objectivos da Aprendizagem	| | | | | | |
Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno	| | | | | | | | | |
Técnicas de Sala de Aula	| | | | | | | | | |

Episódios: Totais do 51º ao 60º

Objectivos da Aprendizagem	| | | | |
Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno	| | | | | | | | |
Técnicas de Sala de Aula	| | | | | | | | |

Facilmente se reconhece que ao longo do tema "Funções" as evidências relativas às três categorias foram observadas de forma regular. A uniformidade que se observa de quadro para quadro permite deduzir que a professora mostra um ritmo, ou um padrão, de comportamento em aula no que se refere ao conhecimento pedagógico em contexto de conteúdo.

Episódios: Totais de 1 a 60

Objectivos da Aprendizagem	**21**
Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno	**47**
Técnicas de Sala de Aula	**50**

Esmeralda preocupa-se, habitualmente, em indicar ao seus alunos quais os objectivos que pretende alcançar e quais as competências que pretende que eles adquiram; sejam estes objectivos relacionados com os conteúdos específicos que lecciona no momento, seja com outros que já leccionou ou que pretende leccionar. A frequência absoluta da categoria *Objectivos da Aprendizagem* é de vinte e um, e é semelhante à frequência absoluta da categoria *Estrutura Matemática e Conexões* da sub-categorização anterior. Esta semelhança de frequências não é coincidência, já que, num grande número de episódios, quando a professora faz referência a objectivos de aprendizagem também refere as conexões dentro da estrutura matemática.

Se a preocupação em manter os alunos esclarecidos quanto ao rumo das aprendizagens é habitual, a preocupação em os conservar focados e concentrados no trabalho é constante. A frequência da categoria *Obtenção e Conservação da Atenção do Aluno* é quarenta e sete, nos sessenta episódios. A forma como Esmeralda mantém os seus alunos atentos e envolvidos no trabalho recai no diálogo que mantém com eles. Esmeralda não transmite conhecimentos que os alunos recebem, não fala enquanto os alunos ouvem, não assume um papel activo contra um papel passivo por parte dos alunos, por isso o diálogo que se estabelece, quase que constantemente, envolve todos na mesma actividade. Os alunos progridem nos conteúdos pelas suas próprias respostas que dão às perguntas, sugestões e desafios da professora e os dois papéis são igualmente activos. Diferentes, é certo, mas simultaneamente activos.

A forma como Esmeralda lecciona assenta num conjunto muito variado de técnicas que ela aplica. A maior parte delas pôde ser transcrita das gravações de vídeo, mas algumas

apenas são observáveis nas gravações; a expressão corporal e vocal, a preocupação em não voltar as costas para os alunos enquanto fala, as pausas, a organização adequada do quadro, são algumas das que não se podem transcrever; mas, ao contrário, puderam-se observar algumas técnicas que foram transcritas tais como a apresentação e explicação dos exemplos propostos, as sínteses dos principais resultados que se obtiveram do uso dos exemplos, a utilização profusa de apoios gráficos, o recurso à colaboração dos alunos, o uso de perguntas de controlo para a avaliação das aprendizagens. Porém, a técnica que Esmeralda mais usa, e que se prende com a obtenção da atenção do aluno, é o diálogo que constantemente mantém com os seus alunos. Algumas vezes este diálogo inclui uma que outra repreensão, ironia ou chamada de atenção quando os alunos não estão suficientemente envolvidos no trabalho.
Mas, mais do que cada técnica em si, importa registar que em todos os episódios foram registadas evidências desta categoria.

4.2 O Conhecimento Didáctico do Conteúdo pela Entrevista

O guião da entrevista é baseado, principalmente, na forma como a professora faz uso dos exemplos – situações, objectivos e o seu papel no processo de ensino e aprendizagem – no âmbito do conceito de função. Todavia, simultaneamente, podemos ao longo da entrevista encontrar inúmeras referências às Categorias relativas ao **Conhecimento Didáctico do Conteúdo** do instrumento desenvolvido por Chick (2007).

Para que o leitor se possa situar melhor na entrevista as respostas foram numeradas. Assim, a última resposta – *E74: Foi rápido!* – é a 74ª resposta enquanto a quinta resposta foi codificada com E5 e corresponde a - *E5: Sim*.

Claramente CDC:

- **Estratégias de Ensino**
  Visto estarmos perante uma transcrição de uma entrevista, não podemos esperar ver a utilização de qualquer estratégia como aconteceu nas transcrições de episódios. Nessas situações as transcrições retratavam a professora em acção numa conjuntura de ensino e aprendizagem. Poderemos, isso sim, identificar referências às estratégias que a professora considera correctas.
  Como exemplo de estratégias diversificadas que a professora usa podemos apontar a distinção que faz entre exercícios e problemas (E28 a E36). Nesta sequência de perguntas e respostas, a professora refere como exercícios os exemplos que visam a interiorização de *rotinas* e *processos* por parte dos alunos e os problemas são exemplos que se destinam a ajudar os alunos a preparar futuras *novas situações*. Por isso, destas respostas podemos concluir que a utilização de sequências de exercícios em que "*Procuro fazer um número de exercícios de forma a abranger toda a matéria. Ou melhor, todas as aplicações daquele conteúdo.*" (E44) se destinam a rotinar processos e, por outro lado, os problemas visam preparar os alunos para o uso de determinada linguagem (E36) e para novas situações, em particular, as situações de exame nacional (E33).
  Mais à frente a professora descreve a forma como são as suas aulas e o modo como ensina: "*Eu procuro ter a aula organizada, seguindo uma determinada*

sequência, não é? Este, ou então, se por acaso chego à aula e começo a falar no conteúdo e, lá está, os alunos até o conhecem, até o dominam, e as coisas começam a fluir. Então aí, tudo bem, falamos, resolvemos, chegamos a conclusões mas depois eu procuro, se aquilo, pronto… se falado só assim muitas vezes é esquecido, que eu procuro que depois com uma sequência lógica aquilo fique registado no caderno.” (E57)

- **Pensamento do Estudante**
  Na entrevista podem-se identificar referências à necessidade de estabelecer com os alunos formas de pensar sobre o conceito de função ou sobre níveis típicos de compreensão dos alunos sobre este conceito:
  “(…) *quando reparo que os alunos não perceberam com aqueles exemplos tento arranjar outros de forma que chegue ao nível dos alunos e eles compreenderam o conteúdo.*” (E2)
  “*Levar os alunos a compreenderem melhor a aplicação prática dos conteúdos teóricos.*” (E4)
  “*Se eu chegar à aula e começar a explicar o conteúdo desta maneira, os alunos vão chegar a esta conclusão. Muitas vezes isto não acontece, eu começo por explicar e eles até chegam a um patamar muito superior daquilo que eu estava à espera.*” (E22)
  “*E isso para os alunos é muito mais difícil de compreender aquilo que o professor lhes está a querer transmitir.*” (E57)

- **Exigências Cognitivas de uma Tarefa**
  A professora identifica, em determinados conteúdos, aspectos que são cognitivamente exigentes para os alunos e, por isso, afirma que adapta e escolhe os exemplos em função disso:
  “*Na interpretação, no equacionar os problemas, até na própria resolução, estou-me a lembrar das Probabilidades. Quantos mais exercícios, quantos mais problemas – exercícios em termos de problemas – o aluno resolver, melhor compreende a terminologia e melhor consegue associar as ideias para os outros problemas.*” (E33)
- **Representações Detalhadas e Apropriadas dos Conceitos**
  A professora refere-se por várias vezes às representações gráficas do conceito de função e à importância que estas representações têm na aprendizagem deste conceito:
  “*A representação gráfica de funções também é importante* (…)” (E61)
  “*Deve saber identificar o que é que é uma função. Tanto graficamente como analiticamente. Bom, mais graficamente… porque analiticamente, quando tu lhe dás a expressão geral já é função.*” (E64); “ (…) *através da calculadora.*” (E65)
  “*Porque importante é um aluno saber interpretar um gráfico. Porque muitas vezes, muitos problemas são dados com gráficos e os alunos depois têm que saber interpretar. Não é? Então, se eles souberem traçar o gráfico correctamente sabem tudo o que há que saber sobre uma função.*” (E67)
- **Explicações**
  A professora indica, em quase toda a extensão da entrevista, como se utilizam os exemplos para explicar noções do conceito de função, bem como processos e rotinas a ele ligados. Em particular:

"*Se eu vejo que um conteúdo tem várias aplicações, eu procuro mostrar aos meus alunos as várias aplicações daquele conteúdo,* (…)" (E8)

"*Porque, normalmente, os alunos acabados de ouvir uma explicação teórica têm dificuldade em pô-la logo em prática.*" (E10)

"*Se eu chegar à aula e começar a explicar o conteúdo desta maneira, os alunos vão chegar a esta conclusão.*" (E22)

"*Então, se ele fizer esta pergunta, ou colocar esta dúvida, eu vou responder desta, ou daquela maneira, ou apresentando este ou aquele exemplo.*" (E27)

- **Conhecimento de Exemplos**

  Também nesta categoria, por estarmos perante uma entrevista, não é de esperar que a professora apresente exemplos de alguma definição, processo ou conceito. No entanto, a referência ao uso de exemplos e ao seu papel em situação de aula é bem visível.

  "*Então, os exemplos são situações particulares da aplicação. Logo, procuro ter um vasto leque de exemplos onde aquele conteúdo ou aquela matéria que estivemos a dar possa ser aplicável.*" (E7)

  "*O que me faz utilizar um e não outro… normalmente quando dou exemplos, e se dou mais que um, e o processo de resolução é o mesmo, é porque houve alunos que não perceberam a primeira resolução ou o primeiro exemplo.*" (E9)

  "*Há situações em que se eu lhes der um exemplo prático, um ou dois ou três exemplos práticos que eles costumam ver,* (…)" (E16)

  "*Então, se ele fizer esta pergunta, ou colocar esta dúvida, eu vou responder desta, ou daquela maneira, ou apresentando este ou aquele exemplo.*" (E27)

- **Conhecimento de Recursos**

  Considerando que os conteúdos programáticos presentes na entrevista são apenas sobre o conceito de função no 10º ano (alunos de 15-16 anos), é natural que as referências a recursos utilizáveis na leccionação apontem apenas a utilização da máquina de calcular gráfica e não a quaisquer outros materiais:

  "*Exactamente, através da calculadora.*" (E65)

  " (…) *para o aluno traçar o gráfico, ou pode-se dar a expressão da função e pede-se para eles representarem na calculadora e depois passar para o papel e depois fazer a sua interpretação* (…)" (E70)

- **Conhecimento do Currículo**

  Em determinados momentos da entrevista a professora descreve a forma como determinados conteúdos integram o programa de 10º ano relativo às funções:

  "*Por exemplo, estivemos a tratar do tema funções, então a sequência lógica terá que começar pela noção de função. O que é uma função.*" (E58)

  "*este ano também é dado a injectividade de funções, é portanto depois para o cálculo da inversa precisam de saber* (…) *verificar se a função é injectiva ou não* (…) *porque depois no 11º precisam para a inversa e no 12º exactamente a mesma coisa.*" (E61, E62 e E63)

  "*Deve saber identificar o que é que é uma função. Tanto graficamente como analiticamente. Bom, mais graficamente… porque analiticamente, quando tu lhe dás a expressão geral já é função. Que eles saibam calcular o domínio, saibam calcular a imagem de um dado objecto e a injectividade. Domínio, contradomínio, esse tipo de coisas, os zeros de uma função, onde a função é* *crescente e decrescente, portanto… pronto, crescente e decrescente graficamente… máximos e mínimos…*” (E64)

“*Até ao 9º ano. Que o conteúdo Funções é dado, salvo erro, no 7º e no 8º ano, onde eles têm essa noção da representação de uma função, se a aplicação é função ou não é função, se é injectiva, se é sobrejectiva, o que é o domínio, o que é o contradomínio, o que é o objecto, o que é a imagem.* (…) *como é que eles fazem a interpretação gráfica, se eles sabem verificar a imagem através do gráfico, ou se dada a imagem sabem identificar o objecto através do gráfico.*” (E70)

- **Objectivo do Conhecimento do Currículo**

  Enquanto na categoria anterior a professora refere como os vários aspectos do conceito de função integram o programa, esta categoria inclui as razões dessa inclusão:

  “*Por exemplo, estivemos a tratar do tema funções, então a sequência lógica terá que começar pela noção de função. O que é uma função.*” (E58)

  “*Porque importante é um aluno saber interpretar um gráfico. Porque muitas vezes, muitos problemas são dados com gráficos e os alunos depois têm que saber interpretar.*” (E67)

  “*Porque quando se traça o gráfico de uma função tem-se atenção a quê? Domínio, contradomínio, aos zeros, aos máximos, aos mínimos, onde ela é crescente, onde ela é decrescente, onde ela é constante. Portanto, todo o estudo de uma função ... se ela é injectiva… também se via graficamente. Portanto eles conseguem visualizar tudo isso.*” (E67)

  “*Pronto, eles têm essas noções e eu vejo como é que… e como é que eles fazem a interpretação gráfica,* (...) *E depois, a partir daí, começamos a explorar problemas. Que podem ser problemas dados através de uma representação gráfica ou dado um problema pede-se o gráfico… para o aluno traçar o gráfico, ou pode-se dar a expressão da função e pede-se para eles representarem na calculadora e depois passar para o papel e depois fazer a sua interpretação…*” (E70)

Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico

- **Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental**

  A professora demonstra um conhecimento profundo do conceito de função, suas ligações e aspectos mais importantes dentro do programa de 10º ano. Por isso, a professora tem uma ideia clara de quais desses aspectos o aluno deve conhecer e dominar melhor. Por isso, a professora elabora as suas próprias fichas quando considera que os exemplos constantes no manual adoptado não os aprofundam de forma satisfatória: “ (…) *para complementar.* (…) *Pois. Que há deficiência em termos de exercícios, ou até de conteúdo teórico, que eu ache que seja necessário complementar.*” (E39 e E40)

- **Desmonta o Conteúdo em Componentes Chave**

  Relativamente ao conceito de função, a professora aponta os elementos matemáticos críticos que são fundamentais para a compreensão e aplicação do conceito:

  “*Primeiro que tudo noção de função, depois domínio de uma função, ahh, que eles saibam distinguir entre conjunto de chegada e contradomínio, cálculo de*

imagens de funções, de objectos de objectos através de uma função, não é? A representação gráfica de funções também é importante, (…) *a injectividade de funções, é portanto depois para o cálculo da inversa precisam de saber* (…) *verificar se a função é injectiva ou não…*" (E61 e E62)
"*Deve saber identificar o que é que é uma função. Tanto graficamente como analiticamente.* (…) *Que eles saibam calcular o domínio, saibam calcular a imagem de um dado objecto e a injectividade. Domínio, contradomínio, esse tipo de coisas, os zeros de uma função, onde a função é crescente e decrescente, portanto… pronto, crescente e decrescente graficamente… máximos e mínimos…*" (E64)

- **Estrutura Matemática e Conexões**
  Enquanto explica a forma como usa os exemplos quando lecciona o conceito de função, a professora faz conexões entre noções, aspectos e conteúdos relacionados com este conceito. Além disso, vinca essas conexões e realça as interdependências entre vários aspectos do conceito de função:
  "*E até muitas vezes procuro exercícios que, onde se possa aplicar aquele conteúdo. Como os conteúdos de um modo geral estão interligados se possa aplicar aquele e outros. Que estejam para trás, que já tenham sido leccionados.*" (E46)
  " (…) *este ano também é dado a injectividade de funções, é portanto depois para o cálculo da inversa precisam de saber* (…) *verificar se a função é injectiva ou não.* (…) *no 10º dão essa noção, porque depois no 11º precisam para a inversa e no 12º exactamente a mesma coisa.* " (E61, E62 e E63)
  "*Até ao 9º ano. Que o conteúdo Funções é dado, salvo erro, no 7º e no 8º ano,* (…) *E depois, a partir daí, começamos a explorar problemas.*" (E70)
- **Conhecimento Procedimental**
  As evidências comportamentais incluídas nestas duas categorias não são observáveis nesta entrevista. A habilidade e método de resolução de problemas são evidências que são mais facilmente observadas quando a professora está a leccionar. Porém, pode ser encontrada nesta entrevista uma referência a esses aspectos da sua actuação em aula:
  "*Na interpretação, no equacionar os problemas, até na própria resolução, estou-me a lembrar das Probabilidades. Quantos mais exercícios, quantos mais problemas – exercícios em termos de problemas – o aluno resolver, melhor compreende a terminologia e melhor consegue associar as ideias para os outros problemas.*" (E33)
- **Métodos de Solucionar**
  (Idêntico ao anterior)

Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo

- **Objectivos da Aprendizagem**
  A professora refere-se a objectivos da aprendizagem do conceito de função. Indica que, para que o aluno possa compreender o conceito de função, tem que começar pela definição "*Por exemplo, estivemos a tratar do tema funções, então a sequência lógica terá que começar pela noção de função. O que é uma*

função." (E58), e à questão "***Então tens estipulado os objectivos que queres que eles atinjam.***" a resposta é imediata "*Exactamente*" (E59).

Mais à frente, a professora dá indicações precisas dos objectivos que pretende ver atingidos pelos alunos para que ela considere que o conceito está a ser compreendido:

"*Primeiro que tudo: noção de função. Depois domínio de uma função, ahh, que eles saibam distinguir entre conjunto de chegada e contradomínio, cálculo de imagens de funções, de objectos de objectos através de uma função, não é? A representação gráfica de funções também é importante, ahh, e 10º ano, basicamente, creio que… depois, entretanto, no 11º, também vem um conteúdo que é importante, tem a ver com… não, este ano também é dado a injectividade de funções, é portanto depois para o cálculo da inversa precisam de saber…*" (E61)

"*Porque importante é um aluno saber interpretar um gráfico. Porque muitas vezes, muitos problemas são dados com gráficos e os alunos depois têm que saber interpretar. Não é? Então, se eles souberem traçar o gráfico correctamente sabem tudo o que há que saber sobre uma função. Porque quando se traça o gráfico de uma função tem-se atenção a quê? Domínio, contradomínio, aos zeros, aos máximos, aos mínimos, onde ela é crescente, onde ela é decrescente, onde ela é constante. Portanto, todo o estudo de uma função ... se ela é injectiva… também se via graficamente. Portanto eles conseguem visualizar tudo isso. Se eu lhes dou um gráfico e lhes peço todos estes conteúdos e eles me souberem responder, então eu concluo que o aluno conseguiu entender plenamente o conteúdo Funções.*" (E67)

Mas a professora ainda inclui outra variante nos objectivos da aprendizagem. A situação de exame é um caso referido e que se reveste de importância: "*Quantos mais exercícios, quantos mais (…) o aluno resolver, melhor compreende a terminologia e melhor consegue associar as ideias para os outros problemas. Não é? Situações novas, o caso de uma situação de exame. Não é?*" (E33)

- **Técnicas de Sala de Aula**

  A professora, dentro do possível, tenta prever as reacções dos alunos a determinados conteúdos ou a determinados exemplos. A preparação das aulas, os exemplos a usar são escolhidos em função destas antecipações:

  "*Dentro do tipo de alunos que em determinada altura, nós que conhecemos os alunos, temos na frente, temos que pensar assim: aquele aluno, sobre este conteúdo, vai-me fazer esta pergunta. Então, se ele fizer esta pergunta, ou colocar esta dúvida, eu vou responder desta, ou daquela maneira, ou apresentando este ou aquele exemplo.*" (E27)

  Por outro lado, ciente da importância que o caderno diário tem no estudo dos alunos, também tem cuidado em estabelecer quais as informações que são importantes para que devam ser registadas no caderno diário, "*Ou seja, resolvo os exercícios vejo o que é importante, o que é que os alunos precisam de saber, o que é que eu devo ditar para o caderno para ficar registado…*" (E56); em termos de actuação de sala de aula, os cuidados também são referidos, "*Quando estou a planificar a minha aula, ou seja, quando estou a resolver, quando estou a tomar notas daquilo que lhes devo dizer a eles, para não me esquecer, como é óbvio, porque eu acho que se não houver uma orientação muitas vezes nós* *sabemos as coisas, sim senhora, mas chegamos à aula e largamo-las soltas. E isso para os alunos é muito mais difícil de compreender aquilo que o professor lhes está a querer transmitir. Eu procuro ter a aula organizada, seguindo uma determinada sequência, não é?*” (E57)

4.3 Notas finais sobre o Conhecimento Didáctico do Conteúdo de Esmeralda

Ao contrário do que aconteceu relativamente ao sistema de categorias para classificação dos exemplos quanto ao objectivo utilizados por Esmeralda para ensinar o conceito de função, o sistema de categorias que permite examinar o conhecimento didáctico do conteúdo de Esmeralda enquanto ensinou os conteúdos relativos àquele conceito não sofreu qualquer alteração. Assim, o sistema de categorias é o mesmo que Chick (2007) propõe e não encontrámos, ao início, qualquer razão para o modificar ou adaptar à nossa investigação. Tal como foi descrito no capítulo relativo à metodologia desta investigação, este sistema de categorias não foi aplicado pela sua autora a qualquer professor que ensinasse o conceito de função. Todavia, a especificidade do tema que Esmeralda leccionou não foi obstáculo à aplicação do instrumento. Aliás, uma das boas características do instrumento é a capacidade de se adaptar à leccionação do Conceito de Função e às várias formas de o representar através dos exemplos que a professora propõe aos alunos em situação de aula.

Notámos, é certo, alguma pequena carência no que se refere à categorização do Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico e, também, no Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo. Como comentámos, notámos a falta de uma categoria onde pudéssemos incluir todos os elementos do conhecimento do conteúdo de Esmeralda que se prendiam com o rigor da linguagem e com o rigor da notação. Por outro lado, também ficámos com a sensação de que a forma como Esmeralda controla a efectividade do seu ensino e a correspondente avaliação, em tempo real, das aprendizagens dos alunos não ficou totalmente enquadrada.

Mas estes serão dois assuntos a desenvolver mais à frente, no capítulo que segue que é dedicado à discussão dos resultados.

VI DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

1. Introdução

A aplicação dos dois instrumentos revelou a sua utilidade no que respeita à ***classificação dos Exemplos*** quanto ao seu objectivo e quanto à ***análise do Conhecimento Didáctico do Conteúdo*** (CDC) de Esmeralda. Por outro lado, as situações tipificadas na bibliografia específica do uso de exemplos ajudam a perceber melhor bastantes ***aspectos do uso de exemplos***.
Foi possível estudar a exemplificação da professora Esmeralda segundo estas três perspectivas que, no nosso entender, caracterizam bem o seu CDC relativamente ao conceito de função. A forma como as três perspectivas se complementam é assinalável, a escolha isolada de cada uma delas deixaria a caracterização do conhecimento de Esmeralda sobre como ensinar o conceito de função bastante empobrecida: catalogar somente os exemplos quanto ao objectivo deixaria de fora tudo sobre a forma como a professora usa os exemplos e os conhecimentos didácticos deste conteúdo; tipificar apenas o uso dos exemplos deixaria por esclarecer o objectivo do exemplo proposto aos alunos e a forma como a professora implementa os seus conhecimentos do conteúdo e didácticos sobre este conteúdo; por fim, analisar exclusivamente o CDC de Esmeralda deixaria por explicar a escolha, o objectivo e o uso do veículo dos seus conhecimentos sobre o conteúdo e a sua didáctica, os exemplos.

Julgamos que o sistema de categorias para a classificação dos exemplos quanto ao objectivo obtido de Figueiredo (2005) ficou substancialmente mais rico com a introdução dos aspectos relativos ao grau de planeamento do exemplo (Zodik e Zaslavsky, 2007b) – exemplos planeados, modificados ou espontâneos – e quanto à natureza da exemplificação – exemplos de conceito, de procedimento ou de teorema – (Zodik e Zaslavsky, 2007b). No que se refere ao conceito de função, distinguir entre exemplo de conceito e exemplo de processo faz todo o sentido; não é idêntico utilizar um exemplo onde se pretende materializar o conceito de função quadrática e utilizar um exemplo onde se demonstra o procedimento para encontrar as raízes de uma dessas funções. Quanto à diferenciação do exemplo de teorema, nas aulas videogravadas, não foi possível observar nenhum destes exemplos no âmbito das funções pois os conteúdos nelas gravadas não incluem o tratamento de qualquer teorema, embora no fim do tema das funções se tenha tratado o Teorema do Resto. Todavia, se a classe onde pudemos gravar as aulas não fosse de alunos de 15-16 anos mas antes de 17-18 anos, então poderíamos ter observado algum exemplo sobre o Teorema de Bolzano (ou dos valores intermédios), que também se inclui no tema das funções.

No decorrer da investigação deparámo-nos com situações inesperadas, pois não estavam descritas na bibliografia específica. Tais situações, e sua resolução, levaram à descrição de novos casos de exemplificação, constituindo por isso produtos originais desta investigação. Referimo-nos à secção 2.1, onde propomos duas novas categorias ao sistema de Chick (2007); à secção 3.2, onde se juntam dois novos aspectos à noção de transparência; à secção 4., no qual se descreve um conhecimento muito particular sobre o uso de exemplos e, também, à secção 5., que unifica os vários instrumentos utilizados na investigação num único modelo descritor do conhecimento sobre a exemplificação do conceito de função.

2. Discussão do Conhecimento Didáctico do Conteúdo de Esmeralda

Não há dúvida que a melhor forma de recolher informação sobre o conhecimento de um professor é assistindo às suas aulas (e.g. McDonough e Clarke, 2002) e, no caso de Esmeralda, pudemos aprender bastante sobre o seu conhecimento didáctico do conteúdo (coerente com Chick e Harris, 2007) assim como da sua forma de exemplificar.
De todas as conceptualizações e modelos que estudámos, de todas as divisões do Conhecimento do Professor que estes modelos apresentam, pudemos constatar nas aulas de Esmeralda evidências de todos estes conhecimentos que, conjuntamente, formam o seu conhecimento matemático para o ensino de funções. Vimos como Esmeralda conhece os conteúdos sobre funções e também os seus alunos (Hill, Ball e Schilling, 2008), como prevê as dificuldades deles e as debela, como encara as dificuldades e dúvidas imprevistas e como recorre aos seus conhecimentos para ajudar os alunos a ultrapassá-las. Vimos como Esmeralda conhece o currículo, como dá ênfase a certos tópicos, utilizando estratégias a eles dirigidas, por saber que serão importantes nos conteúdos que se seguirão (Magnusson, Krajcik e Borko, 1999). Vimos como a professora sabe avaliar o nível de dificuldade das situações que apresenta e se se adequam aos propósitos da matéria que pretende ensinar. Vimos como se movimentava no contexto do tema funções, dos níveis individuais de desenvolvimento dos alunos neste tema e na sala de aula (Friedrichsen *et al.*, 2009). Vimos como os propósitos de ensino visavam a construção sólida do conceito de função através da utilização das diversas representações (De Marois e Tall, 1999) e pela escolha criteriosa de exemplos (Chick, 2007), mas também observámos uma preparação para um exame nacional à disciplina que ocorre no fim do ciclo de estudos. Mas, fundamentalmente, pudemos explorar o CDC de Esmeralda, pois o sistema de categorias proporcionou-nos umas lentes através das quais pudemos observar este conhecimento (coerente com Chick, Baker, Pham e Cheng, 2006).
Existiram outros aspectos do conhecimento do professor que não pudemos observar nas aulas de Esmeralda, como seja a reflexão sobre a sua própria prática (Blanco,

Mellado e Ruiz, 1995), evolução do seu CDC (Blanco, 2004) ou conhecimentos específicos sobre pedagogia geral (Shulman, 1987; Grossman, 1990). Este facto não deve surpreender, considerando que nem o escopo da investigação nem a sua estrutura visavam esses objectivos.

2.1 Duas novas categoria do Conhecimento Didáctico do Conteúdo identificadas nesta investigação

O sistema de categorias, inicialmente apresentado em Chick *et al.* (2006) e Baker e Chick (2006) que foi ligeiramente modificado em Chick (2007) e Chick e Harris (2007), foi aplicado em pelo menos quatro situações (cf. Cap. II, 3.2). Nos artigos de 2006 que dão conta destas investigações, justamente no que se refere às conclusões, são expostas as preocupações dos investigadores sobre a suficiência das categorias para bem caracterizar o conhecimento dos professores nos conteúdos em questão.
Em Chick *et al.* (2006) pode-se ler no final das conclusões: "*Nem todas as categorias ocorreram neste contexto* (números decimais) *mas no momento não existe evidência que nos constranja a juntar categorias adicionais. Seria de todo o interesse testar este enquadramento teórico noutros contextos matemáticos e em outras situações, tais como lições em sala de aula, para verificar se se mostra adequado.*"
No caso de Baker e Chick (2006), as conclusões terminam com o parágrafo: "*Finalmente, o sistema de categorias do CDC mostrou ser um instrumento útil para explorar o CDC dos professores. Houve em simultâneo alguma sobreposição nos exemplos usados nas diferentes categorias, esta sobreposição não foi supérflua, enquanto cada categoria providenciou uma focagem diferente na análise das ideias dos professores. A estrutura de categorias deverá ser ensaiada, usando-a para analisar professores em sala de aula, porque é aí que o CDC se revela essencial."*
Nos dois artigos de 2007, Chick (2007) e Chick e Harris (2007), onde o sistema de categorias já é aplicado em situação de aula (e não apenas a entrevistas), já não existe qualquer menção à suficiência do número de categorias, se seria ou não necessária a adição de alguma categoria para algum aspecto que não tivesse sido, ainda, contemplado.
Na verdade, como dissemos, pode-se apreciar alguma diferença entre as categorias dos primeiros artigos e as dos últimos. Mas, pela ausência de qualquer comentário, permite-nos julgar que no pensamento das investigadoras o instrumento estaria apto a aplicar a qualquer professor. Este também poderia ser o nosso entendimento. Contudo, duas características muito próprias da forma de leccionar de Esmeralda apontaram a ausência de indicadores de dois aspectos do CDC que, embora muito marcados em Esmeralda, deverão estar presentes em qualquer professor.

2.1.1 O rigor na linguagem e na notação

É uma característica que deveria ser bastante cuidada, principalmente em professores de ciências (neste caso de uma ciência exacta), mas que muitos mostram tendência para descuidar. Não foi o caso de Esmeralda.
O episódio, 15 em 26 de Janeiro, tem um caso que demonstra o cuidado que Esmeralda tem com o rigor na notação:

Esmeralda: *Quem? Inês, vá lá fazer se faz favor.*

*(*a Inês levanta-se, vai ao quadro, mas não apaga os cálculos anteriores porque alguém ainda não passou e calcula $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ no canto superior direito do quadro*)*

$$g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2-x}{3x} \Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2+\frac{1}{2}}{3\left(-\frac{1}{2}\right)} \Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}}$$

Esmeralda*: Então e sem papel? Não consegue fazer? (*refere-se ao caderno diário que a aluna levou para o quadro e de onde copia os cálculos*)*

Inês*: Consigo. (*põe o caderno atrás das costas e **escreve** $\Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{5}{2}}{-\frac{3}{2}}$ **mas com as fracções desalinhadas com o sinal de** " = "*)*

Esmeralda*: Então vá.*

Olhe, eu não gosto desse tipo de indicações assim. Já devia saber. Ora nem mais! Este traço de fracção é o que divide as duas fracções. Não é? É divisão de divisão, portanto deve fazê-lo correctamente.

*(*a aluna apaga e escreve as expressões de forma correcta, com os traços de fracção principais alinhados com os sinais de " = "*)*

Esmeralda*: Sim senhor.*

O que se passou neste pequeno caso foi que a aluna não teve o cuidado de manter alinhados os traços de fracção principais e o sinal de igual (=). A aluna alinha com o sinal de igual a fracção do numerador, o que faz com que a escrita tenda a descer, não mantendo a horizontalidade. A intervenção da professora tem o intuito de, através da notação, evidenciar qual é o traço de fracção principal, a fracção do numerador e a fracção do denominador, de modo a não provocar enganos no cálculo e manter a escritura horizontal.

Noutra ocasião, no Episódio 37 de 23 de Fevereiro, podemos apreciar a preocupação de Esmeralda com o rigor na linguagem:

Esmeralda*: Então colocaram a em evidência, como é que ficou?*

Aluno*: a, abre parênteses, x ao quadrado mais bx sobre a, mais 4.*

Esmeralda*: a, ...*

(a professora escreve no quadro o que os alunos lhe ditam: $y=ax^2+bx+4=a(x^2+\frac{b}{a}x)+4$ *)*

Esmeralda*: Exactamente. E agora?*

Aluno*: Metade do x…*

Esmeralda*: Metade do* ***coeficiente*** *do x. Quanto é o coeficiente do x?*

Alunos*: b sobre ... (confuso)*

Neste pequeno extracto é observável a pertinência de Esmeralda corrigir o aluno. Esmeralda corrige "metade do *x*" para "metade do coeficiente do *x*". Em bom rigor, metade do *x* seria $\frac{x}{2}$ e metade do coeficiente do monómio *x* é $\frac{1}{2}$.

A leitura de todos os 60 episódios revela inúmeros destes *casos*. É certo que nem todos estão assinalados nos quadros que se apresentaram relativamente a cada episódio, somente assinalámos aqueles em que esta característica está muito vincada. O *caso* do episódio 15 não está assinalado, enquanto que o *caso* do episódio 37 está, efectivamente, assinalado.
Ainda assim, estejam todos os casos que revelam a preocupação de Esmeralda com o rigor de linguagem e/ou notação assinalados ou não, esta característica que é reveladora de um aspecto do seu CDC deve ser acolhida por uma categoria específica. A área que deve acolher a categoria é a área do Conhecimento do Conteúdo num Contexto Pedagógico, evidentemente porque o conhecimento da notação e da linguagem são específicos do conhecimento da matéria disciplinar e, por acontecer em aula, é num contexto pedagógico.

2.1.2 A avaliação do processo de aprendizagem em aula

Todos os professores, de alguma forma, controlam a evolução do processo de aprendizagem dos alunos relativamente aos conteúdos programados para a aula que estão a leccionar. Por outras palavras, os professores possuem mecanismos que lhes permitem avaliar se os alunos estão ou não a acompanhar, entender e a progredir nos trabalhos específicos da aula. Outras vezes, verificam se as aprendizagens prévias de um determinado dia podem ser convenientemente aplicadas pelos alunos em situações específicas de outra aula.
Esta avaliação das aprendizagens não deve ser entendida no sentido da avaliação que os professores fazem das aprendizagens dos alunos, seja nos sentidos geralmente designados por avaliação formativa ou sumativa. Estas duas formas de os professores avaliarem os alunos são feitas em finais de períodos mais ou menos alargados, avaliam as aprendizagens ao fim de unidades didácticas ou de ciclos de ensino e destinam-se a proporcionar informação relativa a esses ciclos tanto aos alunos como aos professores.
Precisando o anterior sentido de avaliação, seria uma avaliação no sentido de um controlo imediato; a actuação de Esmeralda em aula, enquanto ensina o conceito de função aos seus alunos, evidencia *casos* que denotam este controlo, esta avaliação do evoluir dos trabalhos. A professora controla a forma como a aula se desenrola, além do seu próprio rendimento, através das aprendizagens que os alunos devem demonstrar para que a professora possa avançar nos trabalhos.
Esta característica que a professora evidencia em quase todos os episódios é comum a qualquer professor com alguma experiência. Diz-nos a prática que os professores perguntam frequentemente se todos os alunos perceberam, ou então, se há alguém que não esteja a perceber. Outras vezes, este controlo é feito de forma mais subtil perguntando a algum aluno, ou à classe em geral, determinado ponto que apenas poderão responder aqueles alunos que estejam a acompanhar os trabalhos. No Episódio 25 de 2 de Fevereiro, o diálogo que Esmeralda estabelece com os alunos dá-lhe a indicação de como eles estão a abordar o exemplo proposto:

> ***Esmeralda****: Ora o exercício 2. pede para dizerem se essa função g é ou não uma função quadrática. E porquê.*
> *Eu pergunto: E o que é que teremos que fazer?*
> ***Aluna****: Desenvolver o quadrado.*
> ***Esmeralda****: Desenvolver o quadrado, sim senhora. Então, vamos a isso.*
> *(pausa)*

> ***Esmeralda***: *Atenção que, vocês aí na função* $g(x)$*, têm o quadrado de uma soma. Vejam muito bem como é que o vão desenvolver, porque vocês costumam dizer que é o quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo, e não é.*
> ***Aluno***: *É o quadrado do primeiro, mais o dobro do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.*
> ***Esmeralda***: *Exactamente. É o quadrado do primeiro, mais o dobro do primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo.*

No Episódio 31 de dia 16 de Fevereiro, enquanto explica aos alunos uma situação nova contida num exemplo que propôs, Esmeralda avalia o entendimento dos alunos através de perguntas que se reportam às situações anteriores já estudadas pelos alunos:

> ***Esmeralda***: *Exactamente. Estamos na página 101. O coeficiente do x quadrado não é 1, o coeficiente do x ao quadrado é -2. Então prestem todos muita atenção e depois passam.*
> *Portanto, se o coeficiente do x quadrado não é -1… oh não é -1, não é 1, nós vamos ter que colocar aquele factor em evidência. Como? Para eu colocar o -2 em evidência, significa que vou ter que dividir todos os outros termos… estou-me a fazer entender? … todos os outros termos por -2. Então fica: x ao quadrado, porque -2 a dividir por -2 dá 1, isto vou indicar e este 5 vou deixá-lo fora dos parênteses.*
> *(escreve no quadro:* $f(x) = -2x^2 - 4x + 5 = -2\left(x^2 - \dfrac{4x}{-2}\right) + 5 =$***)***
> *Ora, -2, x ao quadrado, mais dois x, mais 5*
> *(completa no quadro:* $= -2\left(x^2 + 2x\right) + 5$
> *Até aqui há alguma dúvida?*
> ***Alunos***: *Não.*
> ***Esmeralda***: *Se eu coloco, ou sempre que eu tenho que colocar algum factor em evidência eu tenho que dividir todos os outros termos por esse factor. Entendido? Pronto. E agora, se eu olhar para dentro dos parênteses tenho ali uma coisa que vocês já viram. Um x quadrado com coeficiente 1, vou ter que me preocupar com o passo seguinte. Qual é o passo seguinte?*
> *Alunos: O termo em x.*
> ***Esmeralda***: *E o que é que penso sobre o coeficiente do x?*
> ***Aluna***: *Ver a metade.*
> ***Esmeralda***: *Quanto é metade. Metade de 2 é 1. Então vamos ter de…*
> *Alunos: Elevar ao quadrado.*
> ***Esmeralda***: *Elevar o 1 …*
> *Alunos: Elevar o 1 ao quadrado e acertar…*
> ***Esmeralda***: *Exactamente. Portanto, -2, x quadrado mais 2 x, mais 1 ao quadrado, menos 1 ao quadrado, mais cinco.*

No Episódio 34 de 16 de Fevereiro este tipo de avaliação de como os alunos estão a acompanhar a lição pode ser encontrada no caso que segue:

> ***Esmeralda***: *Dão o vértice duma parábola e um ponto dessa parábola e pedem-me para eu escrever a equação. Ora pois bem, a equação que eu me lembro é* $y = a(x-h)^2 + k$ *(escreve a equação no quadro), lembram-se doutra? Não.*
> *Então, se me fornecem as coordenadas do vértice, dizem que o vértice é o ponto de coordenadas (2;5). Na minha fórmula onde está o 2 e onde é que está o 5? Onde é que vai ficar o 2, onde é que vai ficar o 5?*
> ***Alunos***: *o 2 no lugar do h e o 5 no k.*
> ***Esmeralda***: *Portanto, o h é quanto?*

***Alunos**: 2.*
***Esmeralda**: E o k?*
***Alunos**: 5.*

Mas, no final dos episódios, a professora dirige muitas vezes uma pergunta curta, muito clássica, para saber se todos compreenderam ou se há dúvidas:
Final do Episódio 52 em 9 de Março: *O que é que faz o módulo? Fica tudo positivo ou zero. Logo já não são iguais. Certo?*
Final do Episódio 57 em 16 de Março: *Percebido ou há dúvidas?*
Final do Episódio 60 em 13 de Abril: *Fiz-me entender?*

Esta preocupação que a professora tem em verificar como os seus alunos estão a acompanhar as suas explicações ou o desenrolar dos trabalhos é, a nosso ver, um traço do seu Conhecimento de Pedagogia que, por ser aplicado ao ensino de conteúdos relativos ao tema das Funções, deverá figurar numa categoria própria da área Conhecimento Pedagógico num Contexto de Conteúdo.

2.2 Sobre o Conhecimento Didáctico do Conteúdo Tecnológico

Em linha com Davis e Krajcik (2005), citado em Friedrichsen e colegas (2009), Esmeralda apresenta características do CDC que são específicas da disciplina de Matemática: o uso da máquina de calcular. Estas características específicas não estão especificamente contempladas em Chick (2007), apenas na categoria "conhecimento de recursos", o que é bastante ambíguo. Muitas vezes o conhecimento dos conteúdos e de pedagogia geral são vistos como conhecimentos separados do conhecimento tecnológico, o que pode ser prejudicial ao ensino das ciências. Por isso, o conhecimento da tecnologia deve associar-se aos outros dois conhecimentos de forma que haja um conhecimento comum aos três conhecimentos (Unwin, 2007; Mishra e Koehler, 2006). Esse conhecimento deve ser evidenciado pelos professores de ciências e, em particular, os de matemática. Como foi descrito no Cap. II, secção 3.1, este conhecimento foi designado por Mishra e Koehler (2006) como Conhecimento Didáctico do Conteúdo Tecnológico e designa uma pequena parte do CDC, mas é muito especial porque envolve o conhecimento da tecnologia digital (McCrory, 2008).

Para que um professor de matemática possa ser eficiente, nos dias de hoje, ele tem que saber mais do que a mera utilização a máquina de calcular gráfica. Ao nível do ensino de alunos de 15-18 anos, a utilização da máquina de calcular gráfica é obrigatória na programação do Ensino Secundário em Portugal. No final deste ciclo de ensino, o exame nacional a que os alunos portugueses de 17 ou 18 anos são obrigados a submeter-se obriga à utilização da calculadora gráfica; mais, alguma das situações que os alunos devem resolver neste exame só podem ser resolvidas através deste meio tecnológico. Assim, Esmeralda, além de ter que saber as matérias disciplinares relacionadas com a calculadora gráfica, e de como as ensinar, também tem que saber como ensinar os alunos a trabalhar com esta tecnologia. Isto é, a professora tem que dominar as técnicas apropriadas para estes conteúdos, tópicos ou conceitos em particular. É aqui que entra este conhecimento tão específico que é o CDC-Tecnológico, que é o conhecimento da tecnologia, de como a usar e de como ensinar a usá-la (Mishra e Koehler, 2006).

No Episódio 11, em 19 de Janeiro, o exemplo tratado faz apelo específico ao uso da máquina de calcular gráfica.

> 1. Considere a função *f* definida por $f(x)=x\left(\frac{x^2}{12}-1\right)$.
>
> 1.1 Com a ajuda da calculadora gráfica represente a função graficamente.
>
> 1.2 Construa a tabela de variação para a função.

Um dos elementos que Esmeralda considera necessários é o cálculo das raízes da função:

> ***Esmeralda****: Estou a ouvir muito barulho e ainda ninguém respondeu à minha pergunta. Ainda sabem procurar os zeros?*
> ***Aluno****: Sim. Não é no Root?*
> ***Esmeralda****: Diga. É isso, é. (dá mais indicações ao aluno de como obter os zeros na calculadora gráfica TEXAS TI84)*
> *(fala para os alunos que possuem CASIO como determinar as raízes)*
> ***Esmeralda****: Já encontraram algum zero, ou não?*
> ***Alunos****: Já. -3,…*
> ***Esmeralda****: Quanto?*
> ***Aluna****: -3,46…*
> ***Esmeralda****: A alguém dá um número exacto?*
> ***Esmeralda****: Pronto. Aproximadamente -3,46? (marca esse valor no eixo dos xx no quadro) Então, mais ou menos aqui, temos um zero. E depois, acho que na origem também temos um zero. Não? É?*

Nesta pequena passagem pode-se ver que o conhecimento da tecnologia é necessário para poder responder às solicitações do exemplo. Todavia isso não é suficiente, é preciso saber enquadrar os resultados obtidos no contexto do exemplo. Além disso, não basta saber obter a informação numa calculadora gráfica, é preciso conhecer o funcionamento de várias, ou de vários modelos. Neste caso observa-se como a professora instrui os alunos possuidores de máquinas de calcular de marca TEXAS INSTRUMENTS e depois os que possuem máquinas CASIO. Outras vezes, a professora deve esclarecer os alunos que têm calculadoras de outras marcas que não são tão comuns como aquelas duas; nesses casos Esmeralda funciona como se fosse um manual de instruções ao qual se pode expor as dúvidas.

O Episódio 27, de dia 2 de Fevereiro, inclui um caso em que a professora faz referência às definições do *Display*. Este é, talvez, um dos aspectos mais importantes sobre a visualização de gráficos de funções na calculadora gráfica. Se as definições dos valores máximos e mínimos das abcissas e das ordenadas não foram adequadas, então a visualização do gráfico não será correcta, por vezes nem sequer aparece no *Display*.

> 1. Represente graficamente a função *f* definida por:
>
> 1.1 $f(x)=x^2, x<0$

> ***Esmeralda**:* Represente graficamente a função f definida por: *f de x igual a x quadrado, e depois atenção, temos uma condição, x menor que zero. Vocês nas vossas calculadores têm duas hipóteses para ver o x menor que zero, ou vão ao window e definem o x menor que zero, ou então, quando estão a escrever a vossa função, fazem: (escreve no quadro)* $(x^2)(x<0)$ *. Este menor, nas* TEXAS*, vocês vão buscar ao Test, eu acho que já cá tinha dito. Vão buscar à opção* Test *que têm na calculadora, e depois pedem o gráfico e a função dá-vos o gráfico só naquele intervalo pretendido. De menos infinito a zero.*
> ***Aluno**: E nas* CASIO*, professora, como é?*
> ***Esmeralda**: Ora boa. Nas* CASIO*… talvez nas opções…*
> *(a professora com alguns alunos fazem por encontrar a forma de restringir o domínio nas calculadores* CASIO*)*
> ***Esmeralda**: Já toda a gente viu? Temos que passar para o caderno, é o que pedem, para nos fazermos a representação gráfica.*
> *Então minha função* $f(x)$ *vai ter este aspecto…*

Repare-se como a professora dá mostras de conhecer melhor o funcionamento da máquina de marca TEXAS. Esmeralda, na segunda fala, mostra a sua insegurança com a frase "… *talvez nas opções*…". No entanto não deixa de assistir os alunos, conseguindo com mais ou menos rapidez resolver a situação.

No Episódio 29, também de 2 de Fevereiro, o exemplo a resolver é uma situação da vida real através de um processo analítico. No entanto, um aluno que não conseguiu resolver a situação por processos analíticos decidiu fazê-lo através da calculadora gráfica. Repare-se como a professora dá seguimento à decisão do aluno, introduzindo uma palavra de motivação:

> ***Esmeralda**: Estou aqui a olhar para a calculadora do Simão. O Simão analiticamente não fez nada, mas foi à calculadora, e foi bem pensado, colocou a expressão da nossa função e pediu os zeros. E pensou muito bem. O primeiro zero é zero, porque a minha bala é lançada a um metro e meio, é a altura do canhão, e depois faz aquela trajectória e vai cair a quantos metros?*
> ***Aluno**: 401,49 metros.*

Neste mesmo episódio surge a necessidade de resolver uma equação de 2º grau. Os alunos que possuem uma máquina CASIO resolvem com a máquina de calcular. Os alunos que têm uma calculadora TEXAS não o podem fazer porque a máquina não inclui essa funcionalidade. Mas uma aluna, que pôde obter um programa anteriormente, chama a atenção para o facto de que existe esse programa que resolve equações de 2º grau:

> ***Esmeralda**: Nas CASIO vocês têm aí a formula resolvente para equações de 2º grau, é só colocarem o valor de a, o valor de b e o valor de c, e ela dá-vos os zeros.*
> *Quem tem essas TEXAS TI-84, hão-de ir ver ao manual Se faz favor, porque eu não tenho, qual é a forma que nós temos de chegarmos à fórmula resolvente, porque alguém me comentou…*
> *(uma aluna informa a professora que isso está nos programas)*
> ***Esmeralda**: Espere, deixe ver, mas a calculadora já traz isso de origem? Ou foi você que meteu?*
> ***Aluna**: Não, fui eu que meti.*
> ***Esmeralda**: E onde é que vocês foram [buscar] esse programa?*
> ***Aluna**: À calculadora de um colega.*

> ***Esmeralda****: Copiou de outra calculadora para essa? Mas o que me foi dito… foi uma aluna que comentou, mas já não se lembrava, que já tinha feito mas já não se lembrava. Que na própria calculadora vem um programa que permite… ela acha que dá muitas voltas, mas eu estive no manual e … ela disse que não sabe. É uma aluna do 12º ano. E… para se ver onde é que está, porque eu acho que elas trazem mesmo. Porque não faz muito sentido estas calculadoras mais novas não trazerem a fórmula resolvente.*
> *Então quais foram os valores para os zeros que vocês obtiveram?*

Consciente de que não possui todo o conhecimento sobre as máquinas de calcular, Esmeralda está convicta que pode ter algo a aprender com os alunos, porque muitas vezes eles dominam melhor as novas tecnologias do que os adultos mais velhos. Isto pode ser observado na última fala da professora quando refere uma conversa sobre esta funcionalidade das calculadoras gráficas que teve anteriormente com uma aluna de 12º ano (17-18 anos).

Em termos da aprendizagem das funções, o Episódio 33, de 16 de Fevereiro é um em que o papel da calculadora gráfica é preponderante. Esmeralda trata com os alunos uma sequência de exemplos onde, através do gráfico, se pretende observar a função dos parâmetros *a*, *h* e *k* na equação da função quadrática:

2. Reflexão /Discussão

2.1 Seja $a = 2$ e $h = 3$.

Represente no mesmo referencial $f(x) = a\left(x-h\right)^2 + k$ para $k = -3$, $k = 0$ e $k = 4$.

Explique o efeito no gráfico de *f* devido à alteração de *k* na fórmula que define a função.

2.2 Seja $a = 3$ e $k = -2$.

Represente no mesmo referencial $f(x) = a\left(x-h\right)^2 + k$ para $h = -2$, $h = 0$ e $h = 5$.

Explique o efeito no gráfico de *f* devido à alteração de *h* na fórmula que define a função.

2.3 Seja $h = 1$ e $k = -3$.

Represente no mesmo referencial $f(x) = a\left(x-h\right)^2 + k$ para $a = -2$, $a = -1$ e $a = 0,5$.

Explique o efeito no gráfico de *f* devido à alteração de *a* na fórmula que define a função.

Primeiro aspecto importante: sem a calculadora gráfica esta sequência de exemplos seria morosa, trabalhosa e poderia pôr em causa o rigor do traçado dos gráficos.
Segundo aspecto importante: do ponto de vista da didáctica da matemática, o trabalho excessivo que suporia fazer todos estes gráficos sem a máquina de calcular gráfica poderia desviar a atenção dos alunos para a feitura dos gráficos em si e não para as alterações que as mudanças de valores dos parâmetros *a*, *h* e *k* provocam nas características dos gráficos.
Assim, pelo trabalho desenvolvido com a máquina de calcular gráfica, os alunos puderam centrar-se no que realmente é importante na sequência de exemplos. Neste exemplo pode observar-se que os alunos operam já com a máquina de calcular gráfica e que esta não é fonte de preocupação, o que deixa a atenção virada apenas para os aspectos importantes dos exemplos. De alguma forma, o papel da calculadora gráfica é

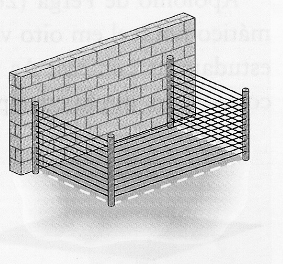
tão mais eficaz quanto mais desapercebida ela passar. E, se for esse o caso, é por força dos resultados conseguidos pela professora através do seu conhecimento de como utilizar a máquina e da capacidade que tem de ensinar os alunos a utilizá-la.

Outro episódio onde é visível o efeito directo do conhecimento didáctico do conteúdo tecnológico é o Episódio 35 de dia 16 de Fevereiro. Neste episódio a professora e os alunos resolvem uma situação da vida real ligada ao aspecto da optimização sem a utilização de derivadas. Com efeito, determina-se o extremo de uma função recorrendo à calculadora gráfica. Por outras palavras, a professora mostra aos alunos como se resolve uma situação não por processos analíticos (que serão leccionados somente dois anos mais tarde) mas sim por processos numéricos:

1. O Sr. Joaquim tem 100 metros de rede e pretende utilizá-la para construir uma vedação com a forma rectangular. Um dos lados do rectângulo dispensa a utilização da rede, uma vez que tem como suporte um muro, como se mostra na figura.

Determine, utilizando a calculadora gráfica como suporte, a área máxima do rectângulo que ele pode formar com os 100 metros de rede.

Apresente o gráfico da função que introduziu na calculadora, indicando o domínio, o contradomínio e o extremo.



Este exemplo é bastante ilustrativo de como o CDC-Tecnológico do professor pode ajudar os alunos a resolver problemas de modelação e, por analogia, problemas da vida quotidiana.

Por outro lado, a calculadora gráfica pode ser útil para visualizar representações gráficas de funções, sem que tenham qualquer relação com outras ciências ou situações da vida real. São exemplos puramente matemáticos e estritamente ligados ao tema funções; ou seja, de uma representação simbólica de função passar a uma representação gráfica:

Episódio 47, de 9 de Março

1. Use a calculadora gráfica para representar graficamente a função *g* definida por:

1.1 $g(x) = |x-3|$ de domínio $[-3;2]$

1.2 $g(x) = \begin{cases} |x-3|-1 & \text{se } x > 1 \\ x^2 & \text{se } -2 \le x \le 1 \end{cases}$

Ou para resolver inequações que, por envolverem funções com as quais os alunos não conseguem operar analiticamente, só podem ser resolvidas através da calculadora gráfica. Também neste tipo de exemplo, não basta à professora saber trabalhar com os meios tecnológicos, é também necessário que os saiba utilizar como ferramenta didáctica eficaz na resolução de situações estritamente matemáticas:

Episódio 60, de 13 de Abril

2. Sejam *f* e *g* duas funções polinomiais definidas por: $f(t) = t^3 - t - 21$ e $g(t) = (t-2)^4 - 2$.

Utilizando a calculadora gráfica, determine *t* de modo que:

2.1 $f(t) = g(t)$. 2.2 $f(t) > g(t)$.

A utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação é relativamente recente nas aulas de matemática no ciclo de ensino frequentado pelos alunos de 15-18 anos. Em particular, o uso das calculadoras gráficas em aulas de matemática fez o seu surgimento há cerca de 15 ou 20 anos e nesses anos eram utilizadas muitas vezes como forma de motivação dos alunos em aula, uma vez que o seu uso em situação de avaliação não era permitido. Como dissemos, o seu uso no Ensino Secundário em Portugal só se tornou obrigatório por volta do ano de 1997 e só a partir de então se pode considerar que o seu uso se esteja a generalizar. No entanto, nos primeiros anos, a adaptação dos professores a um instrumento que passa de proibido a obrigatório não foi fácil e a aprendizagem que os professores vêm fazendo tem sido no sentido de desenvolverem um conhecimento que, para muitos, não lhes foi transmitido na formação inicial.
Hoje, independentemente da tecnologia usada ou dos tópicos que se ensinem, o objectivo pode ser o de equipar os professores com um conhecimento, técnicas e aptidões para experimentar novas tecnologias e que aprendam com as suas próprias experiências; para antecipar os problemas que se possam levantar e para persistirem no uso das tecnologias, de forma a estarem aptos a apoiar as aprendizagens dos alunos (McCrory, 2008). No final, o conceito de CDC-Tecnológico pode ser usado para esquematizar estratégias pedagógicas e umas lentes analíticas para estudar as mudanças nos conhecimentos dos professores sobre um ensino eficaz baseado na tecnologia (Mishra e Koehler, 2006).

3. Discussão sobre o uso dos exemplos por Esmeralda

No Capítulo V, Apresentação de Resultados, foi feita uma descrição qualitativa da exemplificação da professora Esmeralda por intermédio da aplicação dos dois instrumentos criados e pelo uso que fez dos exemplos. Foram destacados exemplos (e uso de exemplos) apresentados por Esmeralda que se inserem nas tipificações descritas na bibliografia e pudemos constatar que foram usados nas mesmas circunstancias que essas descrições apresentadas na bibliografia, sendo que produziram os mesmos efeitos. No entanto, destacam-se quatro grandes áreas que enquadram a utilização dos exemplos e que não são conjuntos de exemplos, propriamente ditos, nem situações específicas de exemplificação. Podemos referir essas áreas como sendo âmbitos da exemplificação de conceitos. São elas:

- A Transparência
- A Variação
- A Ampliação de Espaços de Exemplos
- A Aquisição do Conceito de Função

Estes quatro âmbitos são tratados no Capítulo II, Fundamentação Teórica, e destacados no Capítulo V, Apresentação de Resultados.
A investigação que desenvolvemos mostrou que estando estes quatro âmbitos separados nas várias bibliografias, na prática da professora Esmeralda eles estão, várias vezes, relacionados dois a dois. Assim pudemos observar episódios onde a Variação e a Transparência se conjugam de forma perfeita e, também, pudemos observar outros onde a Ampliação de Espaços de Exemplos se combinava

particularmente bem com a construção da Imagem do Conceito de Função. Além de termos observado que a Variação e a Transparência se complementam, identificámos dois tipos de transparência com características bem distintas.
As discussões destes dois temas ocupam as duas secções que seguem.

3.1 Variação e Transparência. Transparência Imediata e Transparência Mediata

Dos muitos exemplos e sequências de exemplos que foram utilizados pela professora nas doze aulas, escolhemos uma sequência de exemplos que Esmeralda utilizou para ilustrar a combinação da Variação com a Transparência.
A escolha desta sequência de exemplos, em particular, deve-se à conjunção de cinco razões:

1. Toda a sequência foi tratada na sala de aula.
2. Toda a sequência foi tratada conjuntamente pela professora e alunos.
3. O tratamento de cada exemplo envolve simultaneamente dois tipos de enfoque, um de carácter procedimental e outro de carácter conceptual.
4. Após modificação, todos os exemplos são representações transparentes aos aspectos da função quadrática que se pretendem estudar.
5. A sequência ilustra um caso de variação inserida num ambiente invariante.

A sequência foi retirada do manual adoptado pela escola (Neves e Guerreiro 2003, p. 101) e proposta pela professora aos alunos no dia 16 de Fevereiro, episódios 31 e 32:

1. Escreva cada uma das funções *f* na forma $f(x)=a(x-h)^2+k$ e indique

   a. o domínio;
   b. o contradomínio;
   c. o eixo de simetria e o vértice da parábola que representa o gráfico;
   d. o intervalo de crescimento;
   e. o intervalo de decrescimento;
   f. o máximo ou o mínimo da função.

   1.1 $f(x)=x^2-4x$
   1.2 $f(x)=-2x^2-4x+5$
   1.3 $f(x)=-2x^2+3x-2$
   1.4 $f(x)=2x^2+4x+5$

O exemplo 1.1 foi tratado na aula anterior e na aula deste dia foram tratados os restantes exemplos da sequência.

Os quatro exemplos da sequência que a professora apresenta aos seus alunos são opacos relativamente aos aspectos que o exercício questiona. Por isso é pedido que se escreva, previamente, cada uma das funções numa forma em que todos os aspectos que são pedidos possam ser indicados de modo quase imediato pelos alunos.
A forma em que todas as funções são inicialmente apresentadas é a forma $f(x)=ax^2+bx+c$, que não é transparente ao contradomínio, ao vértice, ao eixo de

simetria, aos intervalos de monotonia nem ao extremo da função. Para os alunos, esta forma apenas é transparente ao sentido da concavidade. Ao contrário, a forma $f(x)=a(x-h)^2+k$ é transparente ao sentido da concavidade, pelo sinal do parâmetro *a*, e também às coordenadas do vértice.

A forma geral $f(x)=a(x-h)^2+k$ é a invariância que constituirá o pano de fundo à variação que é dada pela a sequência de quatro exemplos. O que realmente varia, de forma gradual, quando se transita de um exemplo para o outro, são os valores dos parâmetros *a*, *h* e *k*. A influência que a modificação que cada um destes parâmetros tem nos aspectos de cada parábola e, consequentemente, nos aspectos que são questionados sobre cada uma das funções quadráticas é a variação que se pretende seja discernida pelos alunos.
Os parâmetros *a*, *h* e *k* são *Dimensões de Variação Possíveis* e a cada uma vêm associadas as respectivas *Amplitudes de Variação Permitidas*, o conjunto dos números reais no caso de dos parâmetros *h* e *k*. Mas a dimensão *a*, que também é real, não pode tomar o valor 0 (zero).

Embora o tratamento da sequência esteja toda transcrita, nesta secção apenas apresentamos os diálogos que evidenciam a importância que a professora dá à transparência da representação $f(x)=a(x-h)^2+k$, aos aspectos da função quadrática e, também, às possibilidades de generalização do conceito de função quadrática pelos alunos que são veiculadas pela Variação que a sequência envolve.
Relembramos que a professora Esmeralda não está familiarizada com as noções de Variação e de Transparência.

Para evidenciar a transparência das representações, indicam-se as mesmas funções, da sequência de exemplos apresentada, mas na forma $f(x)=a(x-h)^2+k$:

1. $f(x)=x^2-4x \Leftrightarrow f(x)=(x-2)^2-4$
2. $f(x)=-2x^2-4x+5 \Leftrightarrow f(x)=-2\left(x+1\right)^2+7$
3. $f(x)=-2x^2+3x-2 \Leftrightarrow f(x)=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{7}{8}$
4. $f(x)=2x^2+4x+5 \Leftrightarrow f(x)=2\left(x+1\right)^2+3$

Nesta forma também é melhor observável a Variação contida na sequência, apreciam-se facilmente as Dimensões de Variação Possíveis e quais os valores usados dentro das Amplitudes de Mudança Permitidas.

Transcrevemos apenas partes do tratamento de toda a sequência para que melhor se perceba o papel da Transparência e da Variação. Sublinhámos as referências à transparência da representação ás coordenadas do vértice e ao sentido da concavidade da parábola para melhor se encontrarem no texto.

Antes de apresentarmos as transcrições, deve ficar bem explicito que no tratamento destes quatro exemplos **nunca** foi esboçado qualquer gráfico ou parábola. O objectivo do uso desta sequência é que os alunos possam indicar aspectos da função sem recorrer à faceta geométrica da função promovendo, assim, o aprofundamento no conceito de função quadrática. Ao realçar aspectos da função, esta não é tratada como relação entre duas quantidades nem como processo, antes como objecto, de forma a encapsular o conceito de função.

Esmeralda: Portanto, domínio igual a R (escreve no quadro: $D = \mathbb{R}$). E depois o que é que pede a seguir, na *b*? O contradomínio. Então qual é o contradomínio da minha função?
Aluna: De menos infinito a 7.
E: Como é que pensou?
Aluna: <u>Como a concavidade está voltada para baixo</u>, o y é 7, o máximo.
E: Exactamente. Quando temos a concavidade voltada para baixo o y, a segunda…
<u>Ainda não escrevemos</u> [no quadro], vamos escrever… Aqui <u>as coordenadas do vértice</u>, são -1 e 7 (escreve no quadro: $V \to \left(-1,7\right)$).
Portanto, tínhamos vindo a verificar que, <u>quando a concavidade é voltada para baixo, o contradomínio vem de menos infinito até ao máximo</u>. Se a concavidade fosse voltada para cima o contradomínio ia do mínimo para mais infinito. Certo? Então… eu vou fazer isto assim na horizontal senão depois vocês aí detrás não vêem. Contradomínio vai ser de menos infinito a 7, fechado (escreveu no quadro: $D' =]-\infty; 7]$). O que é que pede mais?
Alunos: Eixo de simetria.
E: Qual é a <u>equação do eixo de simetria</u>?
Alunos: $x = -1$.
E: <u>Que é igual sempre à primeira coordenada do vértice</u>.
Portanto, eixo de simetria é x igual a menos um (escreveu no quadro: "Eixo de Simetria $x = -1$").
Olhem, passem lá para depois nós escrevermos onde a função é…
Aluno: professora, porque é que é -1… e não é +1?
Aluna: Porque na fórmula está…
E: Porque é que é -1 e não +1. Então eu pergunto, porque é que nas coordenadas do vértice são -1 e não +1? <u>Olhe lá para a fórmula</u> (aponta para $f(x) = a(x-h)^2 + k$), *x* menos *h*. O que é que eu tenho aqui? *x* mais 1, isso significa que o meu *h* é, positivo ou negativo? Negativo, para aparecer lá o mais. Daqui (aponta para $f(x) = a(x-h)^2 + k$) sai sempre o simétrico. Certo?
Então passem lá o que fizemos até aqui para depois apagarmos.
….
E: Ora então vamos lá a acabar. Faltam o intervalo de crescimento… ora então eu vou apagar qualquer coisa aqui. <u>De onde a onde é que a minha função cresce</u>?
(silencio)
E: Não ouvi nada.
Alunos: de menos infinito…
E: (verbaliza enquanto escreve no quadro) De menos infinito…
Alunos: … até 7.
E: Crescente! O crescimento é lido no eixo dos xx.
Alunos: …até -1.
E: Menos um (escreveu no quadro, "Crescimento: $]-\infty; -1]$").
Pede decrescimento, certo?
Alunos: De -1 até mais infinito.
E: Sim senhora (escreve no quadro: Decrescimento: $[-1; +\infty[$).
O que é que nos falta?
Alunos: <u>O mínimo ou o máximo</u>.
E: Então o que é que tem a nossa função?

Alunos: Um máximo, $y = 7$
E: Tem máximo $y = 7$, sim senhor.

Esmeralda: … Já passou as coordenadas do vértice?
Aluna: Não.
E: Então tem que passar para a seguir escrever o contradomínio. (…) Pois é minha querida. Mas como é que a menina sabe essas coisas todas sem passar por ali (indica as coordenadas do vértice $V \to \left(\frac{3}{4}; -\frac{7}{8}\right)$ que estão escritas no quadro). Qual é o contradomínio?
Alunos: De menos infinito até sete oitavos. ($D' = \left]-\infty; -\frac{7}{8}\right]$)
E: Exactamente. Estamos perante uma parábola com a concavidade voltada para baixo, portanto o contradomínio é: intervalo aberto, de menos infinito até menos sete oitavos, fechado.
Eixo de simetria?
Alunos: x igual a três quartos. ($x = \frac{3}{4}$)
E: x igual a três quartos, sim senhora.
E onde é que a nossa função é crescente?
Alunos: De menos infinito até três quartos. ($\left]-\infty; \frac{3}{4}\right]$)
E: De menos infinito, aberto, até três quartos, fechado.
E decrescente?
Alunos: De três quartos, fechado, até mais infinito. ($\left[\frac{3}{4}; +\infty\right[$
E: Certíssimo. De três quartos, fechado, até mais infinito, aberto.
E agora, que tipo de extremo temos?
Alunos: Máximo.
E: Máximo ou mínimo? Máximo. Quanto é que é o máximo?
Alunos: Menos sete oitavos.

Esmeralda: Certíssimo. Quais são as coordenadas do vértice?
Miguel quais são as coordenadas do vértice?
Miguel: Menos um e três.
E: Ah! Já percebeu que é sempre o simétrico.
Ora, domínio é R (escreveu no quadro: $D = \mathbb{R}$). As coordenadas do vértice são…
Aluna: Menos um e três.
(a professora escreve no quadro: $V \to (-1; 3)$)
E: Menos um e três. Contradomínio?
Aluna: De três a mais infinito.
E: Portanto, tenho uma parábola com a concavidade voltada para cima, logo, de três a mais infinito (escreveu no quadro: $D' = [3; +\infty[$). O que falta?
Alunos: Eixo de simetria.
E: Eixo de simetria?
Ana e João: x igual a um.
E: Diz a Ana e o João, x igual a um. Um…?
Alunos: Menos um.
E: Ah! (escreveu no quadro: *eixo de simetria:* $x = -1$
O que é que falta mais?
Alunos: Onde a função é crescente.
E: …crescente. E onde é que ela é crescente?

Alunos: De menos um a mais infinito.
E: De…? Desculpem.
Alunos: De menos um a mais infinito.
E: Portanto, ela tem a concavidade voltada para cima, ela vai ser crescente de menos um a mais infinito (escreveu: *crescente*: $[-1;+\infty[$).
E decrescente…?
Alunos: De menos infinito a menos um.
E: (escreveu no quadro: *Decrescente:* $[-\infty;-1[$) E falta mais alguma coisa.
(confuso, mas na generalidade falam de máximos e mínimos)
E: E o que é que viram, mínimo ou máximo?
Alunos: Mínimo.
(a professora escreve: *mínimo:* $y=3$)
E: y igual a três. Sim senhora.

Como se pode ler, a referência à transparência da representação $f(x)=a(x-h)^2+k$ às coordenadas do vértice e ao sentido da concavidade é constante nos três exemplos. No início do 3º episódio essa importância é bastante explícita quando a professora observa que a aluna ainda não escreveu as coordenadas do vértice e lhe diz: "*Pois é minha querida. Mas como é que a menina sabe essas coisas todas sem passar por ali* [vértice]".
A transparência desta representação às coordenadas do vértice e ao sentido da concavidade é directa, contudo, indirectamente, também é transparente aos outros aspectos da função quadrática que integram o exemplo: o contradomínio, o eixo de simetria, os intervalos de monotonia e o valor extremo.
A relação entre a faceta simbólica e a faceta geométrica é muito marcada. Os aspectos relativos à faceta gráfica são utilizados para evidenciar os aspectos relativos à faceta simbólica e, desta maneira, os alunos respondem facilmente sobre o eixo de simetria, o contradomínio, os intervalos de monotonia e o valor extremo da função quadrática (faceta simbólica) baseando-se na parábola (faceta geométrica) sem nunca esboçar este gráfico. Mesmo quando a professora diz, no 3º exemplo "*Estamos perante uma parábola com a concavidade voltada para baixo*" essa parábola não foi esboçada no quadro nem nas calculadoras gráficas dos alunos, todavia os alunos respondem a todas as questões que se seguiram mostrando, por isso, que se cumpriu o objectivo da sequência de exemplos que a professora apresentou.

Na transcrição que relata o tratamento de toda a sequência apenas se identifica uma referência directa da professora à variação: "*Então, tentem lá fazer o 1.3 que é dentro do género*". Esta frase inclui todo o sentido da imagem de Mason (2003) sobre a Teoria da Variação de Marton e Booth (1997), a *invariância no centro da mudança*. É claro que todos os exemplos são diferentes mas existe algo invariante ao longo da sequência, é a essa invariância que Esmeralda se refere quando afirma que o exemplo 1.3 é do mesmo género dos anteriores.
Ao contrário da Transparência, a Variação não é tratada de forma explícita com os alunos. Isto é, a professora é consciente do papel que a Variação desempenha no tratamento da sequência de exemplos, trata as diversas Dimensões de Variação Possíveis dentro das Amplitudes de Mudança Permitidas de forma que os alunos se apercebam do que muda ainda que, genericamente, todos os exemplos exemplifiquem o mesmo conceito e destaquem os mesmos aspectos.

Discussão

Para que se possam discutir os resultados da análise do uso da sequência que apresentámos é necessário recuar um pouco no tempo. A transcrição que foi apresentada refere-se ao uso de uma sequência onde se pode constatar que os alunos já identificam as coordenadas do vértice pela simples apreciação da equação da função quando ela é definida pela representação $f(x)=a(x-h)^2+k$. Quer isto dizer que os alunos compreendem a generalidade desta equação e usam a transparência que ela apresenta relativamente às coordenadas do vértice e ao sentido da concavidade da parábola por ela definida. Esta capacidade dos alunos foi conseguida por um trabalho prévio que a professora desenvolveu com os seus alunos.

Assim, antes de apresentarmos os resultados obtidos pela análise da sequência que tratámos neste trabalho, expomos primeiro um breve relato sobre esse trabalho prévio. No fim, identificamos e analisamos em detalhe dois aspectos importantes da Transparência que descobrimos no uso da sequência de exemplos que Esmeralda propôs aos seus alunos.

i) Sobre as aprendizagens prévias:

De modo aos seus alunos poderem identificar a transparência da equação $f(x)=a(x-h)^2+k$ às coordenadas do vértice, a professora trabalhou de forma consistente as transformações do plano que estão associadas aos parâmetros *h* e *k* que, como é bem sabido, privilegia o uso da faceta geométrica. Nesse trabalho prévio, os alunos puderam passar da expressão $f(x)=x^2$ para a expressão $f(x)=a(x-h)^2+k$ relacionando a alteração das coordenadas do vértice de $V(0,0)$ para $V(h,k)$, através de translações do plano. A máquina de calcular gráfica foi um suporte fundamental para que este trabalho fosse rápido e permitisse elevar o número de exemplos trabalhados. Neste trabalho prévio já é observável a relação próxima entre a *faceta simbólica* e a *faceta geométrica* (DeMarois e Tall, 1996; 1999)

As transformações do plano que permitiram que os alunos generalizassem a partir das equações do tipo, $f(x)=x^2-4$, $f(x)=\left(x+3\right)^2$, $f(x)=\left(x+3\right)^2-4$, no que respeita às coordenadas do vértice, foi um conjunto de exemplos cuja variação permitiu a observação da mudança das coordenadas do vértice em qualquer parábola cuja equação fosse do mesmo género. A generalização tem que ver com notar padrões e propriedades comuns a várias situações (Mason, 1999, citado em Zazkis, Liljedahl e Chernoff, 2008). Só depois disso a professora apresentou a equação $f(x)=a(x-h)^2+k$ e deu a oportunidade aos alunos de serem eles a explicar o significado de cada um dos parâmetros. Em suma, expôs a transparência da representação. De facto, tudo isto foi conseguido com um conjunto de exemplos maior que apenas os três que figuram acima e controlando de forma muito cuidadosa a variação envolvida. O reconhecimento do sentido da concavidade das parábolas foi trabalhado logo no início do estudo da função quadrática, episódio 24 em 2 de Fevereiro.

Esta forma de conduzir os alunos à generalidade da equação $f(x)=a(x-h)^2+k$ partindo de casos particulares – indução do conceito – descrita na Fundamentação

Teórica (e.g. Rowland *et al.*, 2003b; Zazkis, Liljedahl e Chernoff, 2008), a transparência e a variação são constructos mais recentes que também estão descritos no Capítulo II.

O que não encontrámos na bibliografia específica foi a relação entre estes três elementos, a) *a generalização por indução*, b) *a variação* e c) *a transparência*, para descrever o ensino de um tópico matemático.

Em esquema:

Conjunto de Exemplos

$y = x^2$; $y = x^2 + 3$

$y = (x-3)^2$; $y = -(x-3)^2$

$y = -(x-3)^2 + 4$, etc.

(variação)

$\longrightarrow$ Indução $\longrightarrow$

- **Generalidade**
- **Transparência** de $f(x) = a(x-h)^2 + k$ às coordenadas do vértice, $V(h,k)$

Figura 31: Relação entre Variação, Transparência e Generalização

ii) Sobre a sequência de exemplos:
O uso de cada um dos quatro exemplos que constituem a sequência apresentada aos alunos é em tudo semelhante. Por isso, a atenção sobre o uso destes exemplos deve ser visto em termos de toda a sequência, a análise do todo é mais elucidativa que a análise de cada uma das partes. Em termos gerais, há dois momentos em cada exemplo da sequência com dois objectivos bem precisos. Um momento em que a primazia é dada ao cálculo e outro em que a primazia é dada aos aspectos da função quadrática facultados pelas coordenadas do vértice e pelo sentido da concavidade.

- No primeiro momento percorre-se um processo de transformação da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ para a forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Este momento desenvolve no aluno habilidades, competências e fluência ao nível do cálculo, sendo alguns dos passos cognitivamente bastante exigentes do ponto de vista do aluno.
- O segundo momento prende-se com a exploração da *Transparência* da forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ relativamente às coordenadas do vértice $V \to (h;k)$ e do sentido da concavidade da parábola.

Relativamente à parte dedicada ao cálculo, a sequência pode ser considerada de *Exemplos de Procedimento* (e. g. Zodik e Zaslavsky 2007b). A *Faceta Simbólica* é a única utilizada e todo o cálculo utilizado para escrever a equação do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ numa do tipo $f(x) = a(x-h)^2 + k$, utilizando o desenvolvimento do quadrado do binómio, pode ser mecanizada pelo aluno se ele interiorizar os passos fundamentais do processo.

A segunda parte, a que é dedicada à exploração da *Transparência* da equação $f(x) = a(x-h)^2 + k$ relativamente às coordenadas do vértice, não envolve cálculo mas

diz bastante da parábola associada e, consequentemente, dos aspectos ligados à função quadrática.
A transparência da forma $f(x)=a(x-h)^2+k$ às coordenadas do vértice e ao sentido da concavidade, se bem explorada, evita a necessidade de acudir à *faceta geométrica* da parábola associada para determinar aspectos relacionados com o conceito de função quadrática, podendo o aluno fazer toda análise do exemplo mantendo-se estritamente na *faceta simbólica*. Assim, identificando as coordenadas do vértice e o sentido da concavidade pode transitar, de forma quase imediata, dos aspectos gráficos da parábola associada e produzir resultados ao nível do contradomínio, monotonia, eixo de simetria e natureza do extremo (máximo ou mínimo). Para que estes resultados surjam de forma natural, a professora faz o apelo à *faceta geométrica* sempre de forma implícita.

O uso destes quatro exemplos em sequência permite trabalhar de forma controlada a *Variação*. A forma como a professora explora a variação proporcionada pelos exemplos desta sequência é feita ao nível das três *Dimensões de Variação Possíveis*: o parâmetro *a*, o parâmetro *h* e o parâmetro *k*, respectivamente, ao nível do sentido da concavidade, da translação horizontal e da translação vertical do vértice relativamente à origem das coordenadas. A sequência trabalha também as *Amplitudes de Variação Permitidas*, que se ficaram pelos números inteiros e fraccionários nunca aparecendo qualquer parâmetro de valor irracional. Um dos valores que incorpora a amplitude de variação permitida está relacionado com a paridade do coeficiente do termo em *x*. Isto é, como o terceiro elemento do desenvolvimento do quadrado do binómio se obtém a partir do quadrado da metade deste coeficiente, se o coeficiente é par a metade será inteira ou, sendo impar, a metade será fraccionária, influenciando o tipo e a dificuldade do cálculo. É por isso que o 4º exemplo apresenta elementos fraccionários. No entanto, o que se pretende é que a aprendizagem se efective fazendo com que o aluno se torne capaz de trabalhar os conceitos de uma forma diferente da que fazia previamente (Marton e Booth, 1997). Por outras palavras, anteriormente os alunos recorriam à calculadora gráfica para observarem os diversos aspectos gráficos das funções e, a partir de agora, já não sentirão essa necessidade no que respeita às funções quadráticas definidas pela representação $f(x)=a(x-h)^2+k$.
Finalmente, nesta sequência retirada do manual, ficou por explorar uma *Dimensão de Variação Possível*. A própria letra identificativa da variável independente poderia ter variado não criando, assim, a sensação no aluno que todas as parábolas são definidas à custa de equações em que esta variável é sempre o *x*. Não consideramos a letra que indica a função seja uma dimensão de variação, mas poderiam ter sido usadas outras letras que não sempre a *f*.

O esquema que se segue, figura 32, ilustra as etapas que a professora seguiu para conseguir os seus objectivos. O primeiro quadro ilustra todo o trabalho prévio desenvolvido pela professora com os seus alunos antes da utilização da sequência de exemplos do manual cujo uso estamos a analisar. É todo o trabalho prévio que professora e alunos desenvolveram e que já foi descrito.
O segundo quadro ilustra a utilização em aula da sequência de exemplos retirada do manual e como a variação nela contida trabalha as várias dimensões de variação possíveis, nas coordenadas do vértice e no sentido da concavidade do gráfico. A forma como os alunos respondem aos sucessivos casos mostra como cada exemplo funciona

como uma nova experiência que prepara a nova experiência seguinte e traduz, em síntese, uma aprendizagem efectiva sobre os aspectos envolvidos do conceito de função quadrática.

Enquanto a transparência só se observa no segundo quadro, o papel da variação é visível em ambos os quadros. No primeiro quadro, em cada exemplo que se apresenta apenas se modifica um aspecto da equação, isto é, apenas se modifica uma das dimensões de variação possíveis. Em cada sucessivo exemplo, em cada sucessiva mudança, o aluno discerne apenas uma mudança na equação e a respectiva translação no gráfico. Será no último exemplo que o aluno deverá aperceber-se como todas e cada uma das dimensões existentes nos exemplos anteriores estão presentes numa única expressão, percebendo a generalidade da expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$.

Trabalho prévio

Dimensões de Variação Possíveis	Uso dos exemplos		Faceta utilizada	Conceito de Função Quadrática
Três Dimensões (respectivas Amplitudes de Mudança Permitida)	Sequências de Exemplos $y = x^2$ $y = x^2 + 3$ $y = (x-3)^2$ $y = -(x-3)^2$ $y = -(x-3)^2 + 4$		**Faceta geométrica**: (translações verticais/horizontais do gráfico) Calculadora Gráfica	
Influência da **Variação**	**VISUALIZAÇÃO** →		**Características das Parábolas**: • Vértice • Eixo de simetria • Contradomínio • Monotonia	**Conceito de função quadrática:** Imagem do conceito construída com base na visualização dos gráficos

GENERALIZAÇÃO

Uso da sequência de exemplos

Dimensões de Variação Possíveis	Uso dos exemplos		Faceta utilizada	Conceito de Função Quadrática
EXPRESSÃO GENÉRICA $y = (x-h)^2 + k$ Contém as três dimensões	Sequência de Exemplos $f(x) = (x-2)^2 - 4$ $f(x) = 2(x+1)^2 + 3$ $f(x) = -2(x+1)^2 + 7$ $f(x) = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{7}{8}$ **TRANSPARÊNCIA às coordenadas do vértice e ao sentido da concavidade**		**Faceta simbólica** (equação da quadrática)	
Influência da **Variação**	**NÃO VISUALIZAÇÃO** → $V(2,-4)$; $V(-1,3)$ $V(-1,7)$ e $V(3/4, -7/8)$		**Características das Parábolas**: • Vértice • Eixo de simetria • Contradomínio • Monotonia Determina características da função através da transparência da equação	**Conceito de função quadrática:** Imagem do conceito construída com base no estudo da equação

Figura 32: A Transparência e a Variação na generalização do conceito

O interessante desta forma de apresentação da função quadrática, $f(x)=a(x-h)^2+k$, é que ela apela à faceta geométrica (a parábola) sem que esta tenha que ser visualizada em papel ou na calculadora gráfica, a simples obtenção das coordenadas do vértice e o sentido da concavidade é suficiente para que o aluno consiga visualizar mentalmente o gráfico definido pela equação apresentada.
Com a exploração desta sequência de exemplos, e outras semelhantes, os alunos obtêm uma nova forma de ver a função quadrática, contribuindo, desta forma, para reestruturar o conceito de função quadrática e remodelar a respectiva imagem que dele tenham. Seja na faceta simbólica, na gráfica ou, como se pretende, na interligação entre as duas.

No âmbito da Teoria da Variação de Marton e Booth (1997), aprender é tomar consciência das variações que são possíveis e que, antes, ainda não nos tínhamos apercebido (Mason e Watson, 2005). A aprendizagem analisada segundo esta perspectiva pode ser observada no tratamento da sequência que aqui se descreveu. Os alunos de Esmeralda aperceberam-se das mudanças, seja do sentido da concavidade ou da posição do vértice, mas isso não os impediu de responder correctamente se o extremo era um máximo ou um mínimo, ou de dar a equação correcta do eixo de simetria. De facto, os alunos aprenderam ao discernir as variações apresentadas e, ao experimentarem todas as variações da sequência, a sua aprendizagem foi influenciada pela variação incluída na sequência. A sequência de exemplos apresentada aos alunos teve em consideração as dimensões de variação da representação $f(x)=a(x-h)^2+k$, tendo sido correcto o seu uso segundo as recomendações de Watson e Mason (2006) (cf. Cap. II, 4.4).

A Transparência Imediata (directa) e a Transparência Mediata (indirecta):
Analisado o papel da variação nas aprendizagens prévias, verificámos que quando se variou aquilo que é particular (as transformações do plano) os alunos perceberam a generalidade contida na representação $f(x)=a(x-h)^2+k$ que é a transparência que esta apresenta às coordenadas do vértice e ao sentido da concavidade. Como atrás dissemos, este processo indutivo, do particular para o geral, onde os exemplos têm um papel fundamental, é um assunto que está bem descrito na bibliografia existente (e.g. Rowland *et al*., 2003; Rowland, 2008).

Todavia, ao analisarmos o papel da variação contida na sequência de exemplos que apresentámos, podemos ver que ele é substancialmente diferente daquele que descrevemos acima, nas aprendizagens prévias. Enquanto que o papel da variação contida nos exemplos prévios é de conduzir os alunos à generalidade contida na transparência da equação $f(x)=a(x-h)^2+k$, na sequência de exemplos apresentada a variação nela contida destina-se a fazer a conexão das coordenadas do vértice e o sentido da concavidade da parábola com os aspectos próprios da função quadrática. Isto é, como as alterações das coordenadas do vértice e do sentido da concavidade fazem mudar a natureza do extremo e o contradomínio, as equações do eixo de simetria e os intervalos de monotonia. Isto nota-se na forma como os alunos respondem, as coordenadas do vértice e o sentido da concavidade são identificadas de forma imediata enquanto que os aspectos relativos à função quadrática são obtidos mediante um raciocínio simples.

Digamos que a expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$ é *imediatamente transparente* às coordenadas do vértice e ao sentido da concavidade da parábola e, posteriormente, é *mediatamente transparente* aos aspectos próprios da função quadrática: contradomínio, intervalos de monotonia, tipo de extremo e eixo de simetria. Não se podendo *ver* os segundos sem *ver* antes os primeiros.
Assim, pudemos distinguir entre aspectos que são identificáveis de forma imediata através da equação $f(x) = a(x-h)^2 + k$ e os aspectos que, não sendo imediatamente identificáveis, se podem reconhecer num segundo momento, por via dos primeiros.
Logo, fazendo esta separação, podemos distinguir entre duas transparências, a **Transparência Imediata** (directa) e a **Transparência Mediata** (indirecta).
Tome-se como exemplo a equação $f(x) = 2(x-1)^2 - 3$. Esta representação da função quadrática é *Imediatamente Transparente* às coordenadas do vértice: $V(1;-3)$; e ao sentido da concavidade da parábola: voltada para cima. Por outro lado, esta mesma representação é *Mediatamente Transparente* ao tipo de extremo que a função quadrática possui, um mínimo, e que tem duas raízes reais (visto que tem o extremo negativo e a concavidade voltada para cima) e o primeiro intervalo de monotonia é decrescente e o segundo intervalo de monotonia é crescente.

O papel da variação foi, pelo que expusemos, a forma apresentada pela professora para que os alunos se apercebessem como, a partir dos aspectos que são directamente identificáveis pela Transparência Imediata, se pode chegar aos aspectos indirectamente reconhecíveis pela Transparência Mediata.
Em esquema:

Transparência Imediata

- Vértice
- Sentido da concavidade

$\longrightarrow$ Variação $\longrightarrow$

Transparência Mediata

- Contradomínio
- Eixo de Simetria
- Extremo
- Intervalos de monotonia

Figura 33: Transparência Imediata e Transparência Mediata

A observação de vários exemplos permite aos alunos identificar o que se mantém invariante, permitindo aos alunos identificar a partir deste ponto todas as características obtidas pela transparência mediata.

3.2 A Exemplificação de Conceitos e a construção da Imagem do Conceito

A análise dos episódios e dos exemplos neles tratados por Esmeralda, pelos alunos ou por todos, evidenciaram aspectos sobre a forma de exemplificar da professora e, por outro lado, deixa antever as implicações que essa exemplificação tem na aquisição e estruturação do conceito de função por parte dos seus alunos. Obviamente, Esmeralda exemplifica com o objectivo de que os seus alunos aprendam. Usando e aplicando a terminologia específica que apresentámos na Fundamentação Teórica desta

investigação, o tratamento que Esmeralda fez dos exemplos que apresentou aos alunos, o trabalho que ela e os alunos fizeram com os exemplos que classificámos dentro das várias categorias, bem como todo o conhecimento que empregou, centrou-se e destinou-se a que cada um dos seus alunos desenvolvesse, estruturasse e aprofundasse o conceito de função.
Se a aprendizagem deste conceito fosse perspectivada na óptica da Exemplificação, podíamos afirmar que os alunos aprendem se ampliam os seus *Espaços de Exemplos* relativamente ao conceito de função (Watson e Mason, 2002a; Mason e Watson, 2005). Por outro lado, se a aprendizagem fosse perspectivada segundo o ponto de vista da construção do conceito de função, podíamos dizer que os alunos aprendem se constroem a sua *Imagem do Conceito* bem articulada com a *Definição do Conceito* (Tall e Vinner, 1981). Em contraste, de um lado temos que o *Espaço de Exemplos* é um conjunto de exemplos que um aluno constrói e ao qual acede de modo a superar uma situação e, do outro, que a *Imagem do Conceito* é uma estrutura cognitiva que o aluno utiliza para lidar com uma situação. Mas, como se percebe, ambos cumprem o mesmo objectivo.

A análise da exemplificação de Esmeralda pôs em evidência que estas duas perspectivas podem ser coincidentes numas situações e complementares noutras. Maioritariamente, optámos por indicar o objectivo da professora como sendo a ampliação dos espaços de exemplos dos alunos e, muito poucas, por referir a construção da imagem do conceito. Esta escolha foi intencional. A investigação que se relata é sobre a exemplificação que uma professora põe em campo para ensinar os seus alunos e, neste âmbito da exemplificação, cabe melhor a perspectiva de Mason e Watson (2005) que a de Tall e Vinner (1981) mais inserida no âmbito da aquisição conceptual.
No entanto, a citação dos trabalhos de Tall e Vinner (1981) e de Vinner (1983) na bibliografia referida ao uso, tratamento e natureza dos exemplos é constante. Quando se fala em aprender conceitos através da exemplificação é comum que os termos *Imagem do Conceito* e *Definição do Conceito* sejam utilizados como forma de explicar a estruturação cognitiva e aprofundamento no conceito que se verifica nos alunos pela acção do ensino.
O trabalho de análise dos episódios que fizemos à luz da bibliografia deu-nos a oportunidade de utilizar o material que pudemos recolher sobre a utilização de exemplos. A descrição do uso de exemplos por parte de Esmeralda permitiu-nos observar como duas noções que são distintas na bibliografia podem, na verdade, ser tão idênticas na prática. Referimo-nos, como já se adivinha, a duas visões de como os alunos aprendem. Para Tall e Vinner (1981) os alunos aprendem à medida que vão construindo a sua Imagem do Conceito e esta lhes permite superar situações mais exigentes. Para Watson e Mason os alunos aprendem quando exploram, reorganizam, ganham fluência e ampliam os seus espaços de exemplos, bem como as ligações entre e dentro deles.

O trabalho seminal de Tall e Vinner (1981), relativamente às noções de Imagem do Conceito e Definição do Conceito, contém em si todas as ligações aos aspectos mais importantes da exemplificação em geral e à ampliação dos espaços de exemplos em particular. Além de ter sido um trabalho marcante para a época, ainda hoje são publicados muitos trabalhos onde este artigo em particular é citado (e.g. Sela, 2008; Zazkis e Leikin, 2008; Asghari, 2007; Bills e Bills, 2005; Sangwin, 2002). É por isto que pensamos que este artigo é um marco na literatura referida à aquisição e aprendizagem de conceitos e, assim, pudemos revisitá-lo à luz da bibliografia sobre exemplificação de conceitos com base nos exemplos que Esmeralda utilizou para leccionar o conceito de função.

"*Usaremos o termo* Imagem do Conceito *para descrever toda a estrutura cognitiva que está associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais e as propriedades e processos que lhe estão associadas. É construída ao longo dos anos através de todo o tipo de experiências, modificando-se à medida que o individuo experimenta novos estímulos e amadurece."* (Tall e Vinner, 1981).

Por outro lado, o espaço de exemplos é apresentado como sendo:

"*…a colecção de exemplos de um conceito ou técnica aos quais o aluno tem acesso em qualquer momento, incluindo a riqueza das interconexões entre esses exemplos que têm uma papel da maior importância sobre o sentido que os alunos podem obter das tarefas que lhes são propostas, das actividades em que se envolvem e como idealizam o que o livro diz ou o professor faz*. […] *Os espaços de exemplos podem se ampliados procurando novos exemplos que sejam especiais e bem enquadrados.* "(Bills *et al.,* 2006). (1) "*Os espaços de exemplos são dinâmicos, i.e., mudam e desenvolvem-se; (2) têm uma estrutura interna própria; (3) essa estrutura é pessoal e depende da situação.*" (Watson e Mason, 2005).
A última descrição de espaço de exemplos que encontrámos diz-nos que "espaço de exemplos *é a experiência que se tem ao ocorrer-nos uma ou mais classes de objectos matemáticos unidos por métodos de construção e associações. Pode existir uma estrutura interna na forma como se ligam os objectos ou como se ligam as classes, e podem existir elos associativos com conceitos, teoremas e procedimentos* (Goldenberg e Mason, 2008).
As afinidades entre as descrições de Imagem do Conceito e de Espaço de Exemplos são evidentes.

Tall e Vinner (1981) continuam dizendo que " *por exemplo, o conceito de subtracção é, usualmente, introduzido como um processo envolvendo números inteiros positivos*". Esta forma de introduzir o conceito é, claramente, através de exemplos; e repare-se, precisa um tipo de exemplos apropriado, aqueles que se destinam a ser entendidos por crianças ainda com uma desenvoltura incipiente no conhecimento matemático.
Mas a forma de introduzir o conceito de diferença apenas através de inteiros positivos provoca na criança a aceitação que "*a diferença reduz o resultado*" e mais tarde " … *será fruto de problemas com a subtracção de números relativos. Por esta razão todos os atributos mentais associados ao conceito, sejam eles conscientes ou inconscientes, devem ser incluídos na imagem do conceito; eles podem conter as sementes de um futuro conflito cognitivo*"; os conflitos surgem quando partes da imagem do conceito conflituam, *são os factores de conflito potenciais*, que se forem evocados simultaneamente (por exemplos com que se esteja a trabalhar) estabelecem de facto um conflito cognitivo, são os *factores de conflito cognitivo* (Tall e Vinner, 1981).

Repare-se que o conflito cognitivo joga um papel importante, que ocorre com base em exemplos. Assim, os espaços de exemplos podem conter casos que são *potencialmente conflituantes* mas que, de facto, só produzem um conflito real se confrontados simultaneamente. Esse conflito pode muito bem ser provocado pelo que descrevemos no Capítulo II, secção 4.7.6 como sendo Exemplos Fulcrais (Zazkis e Chernoff, 2008). A apresentação dos exemplos fulcrais, são aqueles que dão origem à situação de conflito, é que está na base da afirmação de Tall e Vinner "*Apenas quando aspectos conflituantes são evocados simultaneamente é que realmente o sentimento de conflito ou confusão*" e é a superação destes conflitos que reorganizam a imagem do conceito, sendo que, os exemplos que desencadeiam este progresso – evolução conceptual – são aqueles exemplos a que Zazkis e Chernoff (2008) chamam Exemplos Ponte.
Na análise dos episódios pudemos observar o aparecimento de um conflito cognitivo e a forma como ele foi resolvido. Este caso pode ser totalmente revisto na análise do Episódio 38, mas pensamos ser interessante repetir neste momento:

> No uso do exemplo 5.2 surge um micro-episódio ao qual deve ser dado destaque. Para melhor se perceber vamos isolá-lo do texto.
> A mudança de variável foi efectuada e resolvida a equação de 2ª grau que resultou. Conhecidas as soluções da equação de segundo grau, os alunos compreenderam o regresso à variável inicial e restam duas equações de 2º grau por resolver, $x^2 = 4\sqrt{3} \vee x^2 = 2\sqrt{3}$.
> Vejamos o diálogo:
> **Aluna:** *Se elevássemos tudo ao quadrado, como o x já está ao quadrado, elevávamos o quatro ao quadrado e para tirar a raiz do três.*
> **Esmeralda:** *Ah, então elevando tudo ao quadrado como é que ficava?*
> (um aluno ia responder, e a professora impede-o de o fazer)
> **Esmeralda:** *Shhh! Shhh! Como é que ficava?*
> **Aluna:** *Quatro ao quadrado vezes três.*
> **Esmeralda:** *Ah! E o x?*
> **Aluna:** *Ficava só x.*
> **Esmeralda:** *Ai era? Ah! Então quer dizer, se eu tiver dois ao quadrado, que dá quatro* (escreve no quadro $2^2 = 4$) *e se eu fizer dois ao quadrado ao quadrado dá dois?* (escreveu $\left(2^2\right)^2 = 2$)
> **Aluna:** *Não.*
> **Esmeralda:** *Ah! Então?*
> **Aluna:** *Não vai dar!*
>
> No início pode-se perceber o erro da aluna. A aluna eleva ao quadrado o segundo membro da equação $x^2 = 4\sqrt{3}$ e obtinha ***Quatro ao quadrado vezes três***. Contudo, em vez de elevar, também, o primeiro membro da equação ao quadrado e obter x^4, baixa o grau de dois para um, pela raiz quadrada, e obtém apenas *x*, ***Ficava só x***.
> É neste momento que, espontaneamente, a professora apresenta um exemplo à aluna. Introduz a igualdade $2^2 = 4$ e aplica o mesmo processo, um membro é elevado ao quadrado e o outro é-lhe aplicada a raiz quadrada. A igualdade que se obtém, por um processo idêntico ao utilizado pela aluna, $\left(2^2\right)^2 = 2$ é falsa.
> Como é óbvio, a professora utilizou um *contra-exemplo* para mostrar à aluna a incorrecção do seu raciocínio. Depois, à pergunta … ***se eu fizer dois ao quadrado ao quadrado dá dois?*** A aluna responde negativamente e apercebe-se que o processo não é válido.
> Com o uso do contra-exemplo a professora provoca o *conflito cognitivo* na aluna que reconhece não existir uma igualdade verdadeira. Este contra-exemplo deve ser considerado um *Exemplo Fulcral* (Zazkis, Chernoff) e, porque a aluna se apercebe que a falsidade

> proveio de um processo incorrecto, "***Não vai dar***", também funcionou como *Exemplo Ponte* (Zazkis, Chernoff) porque a aluna reconhece uma razão para abandonar aquele processo e tomar a operação inversa, a raiz quadrada, como o adequado.

Tall e Vinner "*chamam à porção da imagem do conceito que é activada numa ocasião em particular a* Imagem do Conceito Evocada" que tem paralelo com o que Watson e Mason (2005, p. 76) chamam *Espaços de Exemplos Pessoais* (individual) *e Situados* (local), que são espaços de exemplos desencadeados por uma tarefa, pista e envolvente, ou bem por uma experiência recente.
Para Tall e Vinner (1981) a Definição do Conceito " *... é a uma formulação de palavras que é usada para especificar o conceito. [...] pode ser decorado [...] e também pode ser uma reconstrução pessoal do aluno. Assume então a formulação de palavras que o aluno usa para a sua própria explicação da sua imagem (evocada) do conceito.*" As semelhanças com o *Espaço Pessoal de Exemplos* (Watson e Mason 2002a) são novamente evidentes, que é "*O que ocorre na mente de cada aluno quando trabalha com um conceito familiar, ou quando lhe são pedidos exemplos sobre algum objecto matemático, relaciona-se com uma imagem central ou com uma imagem dominante sobre o tópico (que pode ser um exemplo representativo de toda a classe), mas que pode também ser influenciada pelas experiências prévias, preferências, interpretações sobre o que se pretende e pelo que é valorizado*".
A Definição do Conceito, segundo Tall e Vinner, "… *seja dada ao aluno ou por ele construída*", isto é, a definição é apresentada por uma autoridade que pode ser o professor ou o livro de texto (seguida de exemplos) ou, então, é construída pelo aluno com base numa abstracção e generalização obtida a partir de uma exemplificação adequada. Por outras palavras, a apropriação da definição do conceito pode ser feita de forma dedutiva ou indutiva (Rowland *et al.*, 2003b).
"*Quer a definição do conceito seja dada ao aluno ou por ele construída, ela pode variar de tempos em tempos. Neste sentido, a definição do conceito* pessoal *pode diferir de uma definição do conceito* formal, *sendo a última uma definição do conceito que é aceite pela comunidade de matemáticos em geral*" (Tall e Vinner, 19981). Em termos de espaços de exemplos, o que se lê aproxima-se à distinção entre o *Espaço Pessoal de Exemplos* e os *Espaços de Exemplos Convencionais*, que é um espaço tal e qual é compreendido pelos matemáticos e vem apresentado nos livros de texto, nos quais o professor pretende induzir os seus alunos (Watson e Mason, 2002a).
Watson e Mason (2002a) consideram que aprender consiste em aumentar e adaptar, naquele tema, os espaços pessoais de exemplos dos alunos, em alguns alunos serão amplos e ricos e noutros mais pobres e mais vazios; o que é coerente com as afirmações de Tall e Vinner (1981). Segundo estes últimos, "*Para cada aluno a definição do conceito gera a sua* própria *imagem do conceito. Esta será, com certeza, parte da Imagem do Conceito. Em alguns indivíduos poderá estar vazia, ou virtualmente não existente. Noutros pode estar, ou não, coerentemente relacionada com outras partes da imagem do conceito."*
Para ilustrar a afirmação anterior, Tall e Vinner (1981) referem o caso do conceito de função. A definição do conceito é "*a relação entre dois conjuntos A e B nos quais cada elemento de A está relacionado com precisamente um elemento de B.*" Os autores realçam que sempre que alguém trata com este conceito não o faz sempre com a consciência desta (ou outra) definição: "*Mas os indivíduos que estudaram funções podem ou não lembrar-se da definição do conceito e a imagem do conceito pode*

incluir muitos outros aspectos, tais como a ideia da função dada por uma regra ou uma fórmula, ou talvez por várias fórmulas diferentes que podem ser usadas em várias partes do domínio A. Podem ainda existir outras noções, por exemplo o conceito de função pode ser ensinado como sendo uma acção *que mapeia* a *de A em* $f(a)$ *de B, ou como um gráfico, ou como uma tabela de valores. Todos, ou nenhum destes aspectos podem estar na imagem do conceito de um indivíduo. Mas um professor pode dar a definição formal e trabalhar com a noção geral por pouco tempo antes de passar longos períodos onde todos os exemplos são apresentados por fórmulas.*" Repare-se que nesta passagem os autores referem-se àquilo que usualmente se consideram as representações do conceito de função que, mais tarde, DeMarois e Tall (1999) designaram como facetas do conceito de função (cf. Cap. II, 2.2.1) e como os exemplos dependem das representações com que os professores trabalham o conceito com os alunos. Segundo os autores, a exemplificação pode condicionar a construção da imagem do conceito, ou a ampliação dos espaços de exemplos, quando alertam para os perigos de passar longos períodos trabalhando apenas uma representação: "*a imagem do conceito pode desenvolver-se até a uma noção mais restrita, envolvendo apenas fórmulas, enquanto que a definição do conceito fica longamente inactiva na estrutura cognitiva.*"

Esta situação, infelizmente muito vulgar na prática, verifica-se quando vemos os nossos alunos a resolver com muita destreza situações que envolvem apenas a representação simbólica mas, perante situações equivalentes, em que a representação utilizada seja outra, a faceta geométrica ou a faceta numérica, apresentam sérias dificuldades.

Como já foi referido no Capítulo II, a própria imagem do conceito do professor pode influenciar a forma como os alunos irão construir a sua. Muitas vezes são os próprios professores que não construíram a sua imagem do conceito de função de forma totalmente correcta, muitas vezes derivado à sua própria educação matemática.

No caso de Esmeralda, no Episódio 28, pudemos observar um momento em que parece existir uma confusão entre o que é o conceito de função e o que são as suas representações. A professora e os alunos estão a tratar um exemplo que envolve uma situação de modelação.

> 2. O CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO
>
> Um estudo conduzido pelo departamento estatístico de uma Câmara concluiu que a população da sua cidade nos próximos dois anos cresceria de acordo com a fórmula:
>
> $$P(x) = 30000 + 20x^2 + 20x$$
>
> onde $P(x)$ representa a população, x meses a partir da data em que foi feito o estudo. Quantas pessoas habitavam a cidade na época em que foi feito o estudo?

Veja-se o diálogo:

> **Esmeralda**: Então vamos passar à função do exercício 2.
> Qual é o problema Filipa?
> **Filipa**: É o gráfico, eu não consigo fazer (imperceptível).
> **Esmeralda**: Oh filha, mas porquê?
> **Filipa**: Não sei.

Esmeralda: Eu há bocado cheguei aí e escrevi-lhe a função de 1.2 e não consegue escrever x? Onde está a função?
Filipa: Aqui.
Esmeralda: Não filha, isto não é uma função, isto é uma representação gráfica. A função, em si, que não consegue escrever, onde é que está? Você tem o valor mínimo 1, e eu disse que era -10 e o máximo era zero. Eu não sei onde é que vocês estão quando eu estou a falar. Sinceramente. Estão sempre na Lua.

Quando Esmeralda pergunta onde está a função está a referir-se à equação que a aluna deveria ter introduzido na sua calculadora gráfica.
De certo que Esmeralda se queria referir à equação da função, a representação algébrica. Mas, como se vê, é muito comum que alunos, e incluso professores, identifiquem as funções pela sua equação, passando os gráficos a serem representações do conceito, isto é, os gráficos representam as equações.
Situações como esta podem querer indicar que o (sub) espaço de exemplos de funções se restringe, como afirmam Tall e Vinner, apenas às suas equações; enquanto que, as representações poderão estar, eventualmente, noutro (sub) espaço de exemplos. É de destacar que no artigo que se tem citado (Tall e Vinner, 1981) os autores empregam, maioritariamente, o termo “indivíduo” e não “aluno”. Será que isto é propositado, de forma a englobar mais que apenas os alunos?

Por todas as semelhanças que encontrámos durante a investigação entre a ampliação dos Espaços de Exemplos e o seu papel na aprendizagem de conceitos e a construção da Imagem do Conceito e o seu papel na construção de estruturas cognitivas, fudamentalmente enquanto se analisaram todos os episódios, julgámos tal facto demasiado importante para que não fosse referido na discussão sobre a exemplificação de Esmeralda. A duplicidade encontrada, a possibilidade de explicar o trabalho feito com o recurso aos exemplos entre a professora e os seus alunos tanto pela ampliação de espaços de exemplos como pela construção e aprofundamento de estruturas cognitivas, levou-nos a pensar que as duas teorias teriam muito de equivalentes e, quando não, de complementares.

3.3 A exemplificação na avaliação dos alunos

A bibliografia específica sobre exemplificação não refere, sistematicamente, o uso de exemplos na avaliação. Principalmente na avaliação que se destina a classificar os conhecimentos dos alunos; nesta situação, os casos que se apresentam aos alunos não são, em geral, considerados exemplos. Mas, no sentido dado ao termo “exemplo” que consideramos nesta tese, incluso em situação de avaliação os casos propostos com o sentido de avaliar as aprendizagens dos alunos são considerados exemplos.
A exemplificação é sempre apresentada como forma de materializar os conceitos, mostrar processos ou como aplicar teoremas. O papel da exemplificação é explicado na bibliografia no âmbito da aprendizagem da matemática, como resolve conflitos, auxilia o aluno na superação de dificuldades e na estruturação/construção de conceitos.
Por vezes, muito raramente, o tema da avaliação é aflorado. Na fundamentação teórica (cf. Cap. II) existem apenas duas referências ao uso de exemplos na avaliação, sendo as duas referências verdadeiramente superficiais: Watson e Mason (2002b) e Bratina (1986).
Porém, se aceitamos que é através dos exemplos que os conceitos adquirem significado e que eles têm um papel central no ensino e aprendizagem da matemática

(e.g. Zazkis e Leikin, 2008), não os podemos desligar da avaliação dessas mesmas aprendizagens. Por assim dizer, os exemplos fecham o ciclo: se é através dos exemplos que os professores ensinam e os alunos aprendem, também é através deles que os professores avaliam as aprendizagens dos seus alunos. Assim, podemos também afirmar que o conhecimento do professor inclui o uso dos exemplos numa vertente avaliativa, como forma de verificar as aprendizagens dos alunos e, também, a sua própria performance como professor.

Na ausência de enquadramento teórico da exemplificação em situação de avaliação a discussão será feita num enquadramento teórico de Avaliação em geral. Contudo, apenas consideraremos os aspectos deste enquadramento que de alguma forma se liguem directamente à nossa investigação.

Parece-nos importante ressaltar a necessidade de coerência entre os métodos de ensino e os de avaliação. A este respeito, devemos considerar os objectivos do currículo para que possamos estabelecer uma relação entre o que se pretende e o que se conseguiu, no intuito de determinar as falhas do processo que nos permitam propor medidas correctivas, evidenciar a evolução que houve e, finalmente, servir para orientar a fase seguinte da aprendizagem.
No processo de avaliação há que considerar os objectivos, os conteúdos e a metodologia próprias de cada tópico e do seu nível de ensino, o que implica a consideração de procedimentos diferentes em cada um deles. Os conteúdos dos diferentes temas matemáticos podem ter naturezas diferentes, o que condiciona os seus processos de avaliação. A partir da nossa experiência e dos resultados das investigações, assumimos que a metodologia de ensino e os processos de aprendizagem variam de uns tópicos para outros (geometria, análise, estatística) e, também, segundo os níveis de escolaridade. Consequentemente, devemos considerar que na avaliação das aprendizagens dos alunos e na investigação sobre avaliação em educação matemática, o tópico também deveria ser um elemento básico diferenciador.
Entre os muitos aspectos sobre os quais a avaliação deve recair (Zabalza, 1987), queremos destacar os três que se ligam directamente com os exemplos na avaliação: os **testes escritos**, a sua **representatividade** – que integrem significativamente os conteúdos/tarefas e operações mentais que foram tratadas – e a sua **significação** – que incluam aqueles aspectos que foram considerados importantes e definidos como prioritários.

A Matemática adquire sentido para os alunos quando eles conseguem assimilar os conceitos e entender os seus significados e interpretações. Para avaliar o grau de desenvolvimento na aquisição do conceito deverão ter-se em conta os diferentes aspectos que condicionam a sua aprendizagem, como a capacidade de reconhecer as condições e propriedades que determinam esse conceito; de determinar exemplos válidos e não válidos do conceito; a capacidade de aplicá-lo às situações que o requeiram e de criar conexões com outros conceitos. Isto afasta a utilização exclusiva, na avaliação de um tipo de conteúdos, de casos em que os alunos tenham que demonstrar uma mera memorização de definições e de aplicação de rotinas; isto é, o seu simples reconhecimento nos exemplos comuns. A avaliação dos conhecimentos procedimentais não deve limitar-se à valoração da desenvoltura com que os alunos

executam os procedimentos. O que se deve avaliar, além das destrezas na sua aplicação, é a sua capacidade para determinar o quando e o como aplicar esses procedimentos e a razão porque funcionam, bem como entender os conceitos nos quais se apoiam e a lógica que os sustentam.
O *conhecimento procedimental* está intimamente ligado ao *conhecimento conceptual*. Desta maneira será necessária a realização de actividades de avaliação em que os alunos tenham que aplicar distintas estratégias de uma forma não rotineira, dando sentido ao ao processo e ao resultado obtido.

Como se sabe, é usual diferenciar os vários tipos de avaliação: avaliação sumativa, avaliação formativa e avaliação diagnostica.
A **avaliação sumativa** é aquela que tem por objecto o controlo e a ratificação das aprendizagens produzidas. Os instrumentos que se utilizam para este tipo de avaliação são normalmente os exames clássicos, que normalmente abarcam apenas uma parte representativa dos conteúdos que os alunos estudaram. Este tipo de avaliação é periódico e abarca unidades de ensino, sendo aplicada em fins de ciclo que podem ser mais ou menos dilatados. Em linhas gerais, esta avaliação coincide com a avaliação tradicional e, segundo diversas opiniões, é a que menos tem que ver com a acção educativa – pode perfeitamente ser levada a cabo por agentes externos aos protagonistas do processo – e, não em vão, costuma ser uma fonte de tensões para alunos e professor.
A **avaliação formativa** consiste num "Meio que procura interpretar e compreender os processos desenvolvidos pelo aluno na construção do seu saber" (Jorro, 2000). A avaliação formativa tem como objectivo o aperfeiçoamento do objecto avaliado, neste caso a aprendizagem dos alunos. Significa possuir, de forma permanente, informação sobre a situação dos alunos em relação à unidade didáctica em estudo com propósito de detectar os problemas no momento em que surgem, antes que enquistem ou dêem lugar a atitudes negativas difíceis de modificar. Para levar este tipo de avaliação a bom termo é necessária uma subdivisão detalhada dos níveis de destreza que pretendemos que os alunos alcancem em relação aos conteúdos. Este tipo de avaliação não tem que ter associada uma classificação – inclusivamente há quem a desaconselhe – se bem que é imprescindível proporcionar aos alunos uma retroalimentação informativa (sobre acertos e falhas) e correctiva, se possível com um pendor individualizado. Dada a sua função, a avaliação formativa deve ser efectuada de uma forma contínua e os instrumentos, a aplicar frequentemente, são muito específicos: perguntas nas aulas, observação e análise das actividades dos alunos, questões por escrito, etc.
A **avaliação diagnóstica** tem como objectivo conhecer o estado dos alunos no início de uma dada unidade didáctica, daí que também se designe de **inicial**, ainda que, na realidade, os termos se apliquem a classificações distintas. Em determinadas ocasiões identifica-se com o diagnóstico de dificuldades, embora, em certos momentos, a atenção deva ser dada às potencialidades dos alunos. Por via dos saberes cumulativos da actividade matemática, esta avaliação reveste-se de especial importância no ensino/aprendizagem da Matemática. As actividades das quais resultará a avaliação diagnóstica devem versar sobre os conhecimentos e destrezas prévias à unidade cujo estudo irá ser iniciado, e que são essenciais para a entender.

A avaliação diagnóstica, formativa e sumativa são três tipos complementares de avaliação que não deveriam anular-se. Actualmente, a função de ratificação da avaliação está a anular a função formativa, o que produz, simultaneamente, uma rejeição [dos alunos] relativamente aos conteúdos e um tratamento superficial dos erros [dos alunos] na avaliação (Rico e outros, 1997) e a correcção e a classificação de testes e de quaisquer outras tarefas avaliativas dão, em geral, poucas ou nenhumas orientações aos alunos para melhorar, reforçando as suas baixas expectativas e o baixo nível das aprendizagens (Fernandes, 2006, p. 30).

Nesta secção pretende-se analisar o papel dos exemplos na Avaliação Sumativa e estabelecer relações entre a exemplificação-avaliação e a exemplificação-ensino. Para isso, socorremo-nos da terminologia tratada no Capítulo II, Fundamentação Teórica, na secção 2.2 Terminologia da investigação sobre funções.

A professora apresentou aos seus alunos três testes durante o período em que leccionou o Tema funções. Para cada uma das questões que integraram os testes e que se inserem no tema das funções, Esmeralda explicou-nos os vários aspectos de cada uma segundo a orientação que lhe sugerimos:

Primeira Parte: questões de escolha múltipla.

Para cada questão
1. Indica a fonte.
2. A que apela, ou faz referência, cada uma das opções tendo em conta o enunciado dessa questão.
3. Das opções que são incorrectas, indica porque motivo pode ser aceitável (apelativo) para o aluno.
4. A questão está incluída num âmbito de objectivo mínimo ou mais complexo? Qual é esse objectivo?
5. Razão da escolha dessa questão (em particular) e não outra.

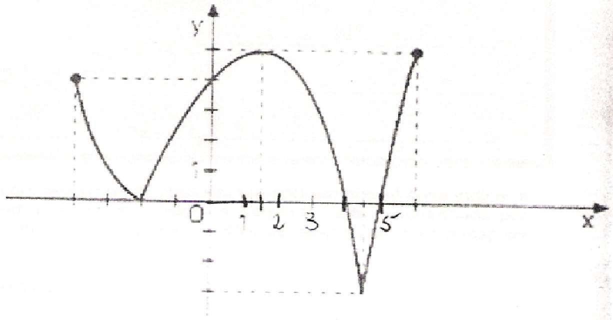
Segunda Parte: questões de resposta aberta.

Para cada questão/item dessa questão
1. Indica a fonte.
2. Razão da escolha dessa questão (em particular) e não outra.
3. A questão está incluída num âmbito de objectivo mínimo ou mais complexo? Qual é esse objectivo?
4. Porque razão, dado o objectivo indicado em 3., escolheste o aspecto gráfico/analítico/numérico?

Teste de 10º ano da Esmeralda.

A única pergunta deste teste sobre funções, a que Esmeralda nos respondeu, foi a questão 10. (resposta aberta).

10. Relativamente à função **f** representada no gráfico, indique:



10.1 O domínio.

10.2 O contradomínio.

10.3 Os zeros.

10.4 Os extremos absolutos e relativos.

10.5 Um intervalo o mais amplo possível onde a função seja crescente.

10.6 Os intervalos onde a função é positiva.

Cujas respostas ao questionário foram:

“ *1. Na questão 10. fui buscar o gráfico a um livro de exercícios e as questões foram criadas por mim.*
2. Escolhi cada uma das alíneas da questão 10., por pensar serem importantes no contexto.
3. Objectivo mínimo
4. Por estar no início do estudo das funções e pensar ser importante os alunos saberem interpretar gráficos. “

Este exemplo é em tudo semelhante a outros exemplos propostos aos alunos e trabalhados em conjunto com a professora ou autonomamente. Vejam-se os exemplos dos episódios 7 e 8 de 19 de Janeiro e episódios 17, 19 e 20 de 26 de Janeiro.
Este exemplo situa-se no estudo introdutório das características das funções quando estas se apresentam na sua faceta geométrica (DeMarois e Tall, 1999).
Pela primeira resposta, Esmeralda dá-nos a indicação das suas intenções na apresentação deste exemplo. Quer avaliar exactamente os mesmos aspectos, da mesma forma que os trabalhou com os seus alunos e ao mesmo nível de exigência.
A importância do contexto, que é referido na segunda resposta, relaciona-se precisamente com o estudo da representação gráfica do conceito de função na sua fase introdutória, portanto, ao nível dos aspectos elementares.

A professora classifica esta questão ao nível de "objectivo mínimo", ou seja, numa fase cognitivamente pouco exigente e em que o aluno não necessita de uma estrutura, ou imagem do conceito (Vinner e Tall, 1986), especialmente complexa para indicar os aspectos elementares que se perguntam. A sequência de exemplos semelhantes tratada no episódio 19, semelhante a esta questão, foi inserida na 2ª Categoria, Abordagem Inicial Autónoma, por isso, verifica-se uma coincidência entre a nossa classificação de exemplos semelhantes e esta questão que Esmeralda considera como de "objectivo mínimo".

A quarta resposta é uma confirmação de tudo o que foi referido anteriormente. Estamos no início do estudo da representação gráfica das funções, ao nível de aspectos elementares e que os alunos devem conhecer (estar incluídos na sua imagem do conceito).

Teste de 10º ano da Esmeralda.
Data: 20 de Março de 2007.

1ª Parte

Questão nº 2 (Escolha Múltipla).

2. Uma função par com contradomínio $[-2, +\infty[$ tem necessariamente:
(A) Pelo menos, dois zeros.
(B) Um máximo relativo.
(C) Domínio IR.
(D) Um ponto no eixo dos yy.

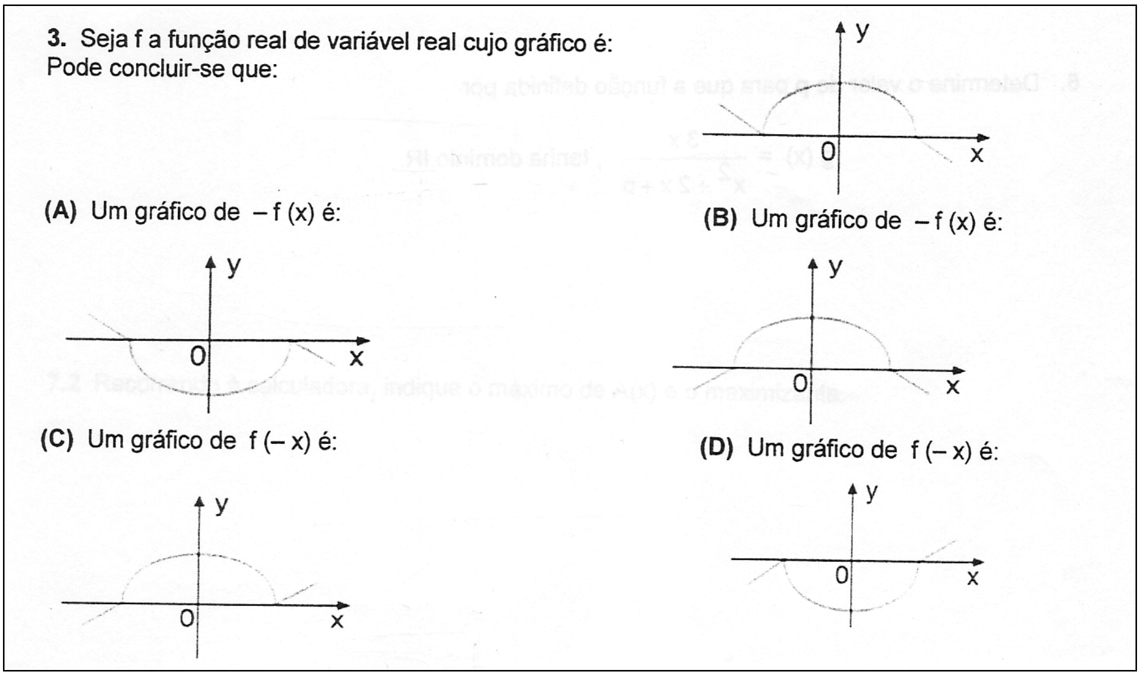
"*1. Retirada de um livro.*
2. (A) Apela aos zeros de uma função
(B) Apela aos extremos de uma função
(C) Apela ao Domínio de uma função
(D) Apela à intersecção do gráfico da função com o eixo OY
3. (B) Esta opção só é aceitável para um aluno que não saiba associar a noção de extremo ao contradomínio.
(C) Se o aluno não tiver atenção ao facto de que uma função com o contradomínio dado pode, ou não, ter domínio |R. *Esta opção é aceitável.*
(D) Esta opção é aceitável, se o aluno não souber que uma função com estas características pode apenas passar na origem do referencial, sem intersectar necessariamente o eixo dos yy.
4. Esta questão está incluída num âmbito de objectivo mais complexo. Pretende verificar se o aluno aplica a noção de função par num contexto onde, nem o gráfico, nem a expressão (analítica) da função lhe são dados, é ele que deve imaginar como será.
5. Nenhuma razão em particular, apenas me pareceu uma questão interessante."

Não existe nenhum exemplo semelhante a esta questão nos episódios que analisámos. No entanto encontrámos alguns semelhantes nos cadernos diários das alunas cujas aulas sobre funções fotocopiámos.

As várias hipóteses de resposta desta pergunta de escolha múltipla fazem referência a outros tantos aspectos da representação gráfica do conceito de função. Esta situação enquadra-se bem no âmbito da Variação de Marton e Booth (1997) e nas Dimensões de Variação Possíveis de Watson e Mason (2005). Cada uma das respostas explora uma dimensão de variação relativamente à representação gráfica de uma função que verifica as condições dadas. Por outro lado, esta questão também pode ser considerada segundo a perspectiva "*Dê exemplo de ... com restrições*" (Hazzan e Zazkis, 1997), em que as restrições dadas devem ser coerentes com a terceira restrição contida nas possíveis respostas.

Esmeralda inclui esta questão num âmbito de dificuldade mais exigente. É natural que tal aconteça, este exemplo inclui aspectos da representação gráfica e um possível gráfico deve ser considerado pelo aluno. Como o gráfico da função deve ser hipoteticamente considerado pelo aluno segundo as duas condições dadas, o aluno deve saber relacionar bem a faceta gráfica de uma função com todos os seus aspectos; sendo os dados apenas dois deles, mas que são determinantes para a natureza dos outros. O que está em causa neste exemplo envolve o nível de complexidade e estruturação da imagem do conceito (Vinner e Tall, 1986) no que se refere aos elementos da faceta geométrica e ao nível de seu aprofundamento (DeMarois e Tall, 1999), em que o aluno deve tratar o conceito de função como objecto (com características) e não de processo.

Questão nº 3 (Escolha Múltipla).


3. Seja f a função real de variável real cujo gráfico é:
Pode concluir-se que:

(A) Um gráfico de $-f(x)$ é:

(B) Um gráfico de $-f(x)$ é:

(C) Um gráfico de $f(-x)$ é:

(D) Um gráfico de $f(-x)$ é:

"*1. O gráfico foi retirado de um manual. As questões foram formuladas por mim.*
2. Todas as opções fazem referência a transformações do gráfico dado.
3. (A) Será aceitável para o aluno esta opção se, ele não tiver atenção ao facto de que o gráfico manteve uma parte igual ao dado (ver figura), apenas mudou o sentido da concavidade.

(B) pode ser aceitável, porque há uma parte do gráfico que é simétrica (ver figura) mas o restante manteve igual. Se não dominar esta transformação, pode ser esta a opção correcta.

(D) Se o aluno não dominar as transformações dos gráficos pode confundir o gráfico de f(-x) com o de –f(x), logo esta opção estará certa.

4. A questão está incluída num âmbito de objectivo mínimo.

5. Verificar se o aluno sabe relacionar as transformações do gráfico de uma função."

Não existe nenhum exemplo semelhante nos episódios que analisámos nem nos exemplos existentes nos cadernos diários das duas alunas. No entanto, o tema da paridade de uma função foi tratado tanto com recurso à faceta geométrica como à faceta geométrica (DeMarois e Tall, 1999). Todas as hipóteses de resposta incluem transformações do gráfico da função dada por meio de $f(-x)$ e de $-f(x)$ o que foi tratado em vários exemplos apresentados por Esmeralda aos seus alunos.

Esmeralda inclui esta questão num âmbito de "objectivo mínimo", isto é, num nível de exigência cognitiva baixa. Estamos de acordo com a professora, tratar este exemplo correctamente apenas envolve processos, facilmente rotináveis, relativos a duas transformações elementares do plano ao nível da faceta geométrica.

A razão da escolha desta questão prende-se com questões exclusivas da faceta geométrica, não obstante, as transformações do plano pretendidas serem apresentadas na faceta simbólica ($f(-x)$ e $-f(x)$) requerendo que o aluno entenda a mensagem que a simbologia transporta.

Questão nº 4 (escolha Múltipla).

4. Se *f* é uma função decrescente no intervalo [-2; 5], então:

A	$f(-2) \leq f(0)$	B	$f(0) \geq f(3)$
C	$f(5) \geq f(0)$	D	$f(2) \geq f(-2)$

"*1. Esta questão foi fruto da minha imaginação.*

2. Todas as opções desta questão apelam às relações entre vários valores do intervalo dado no enunciado. Para resolver esta questão, os alunos devem ter atenção ao facto de que a função é decrescente.

3. Se o aluno não dominar a noção de função decrescente todas as opções são aceitáveis.

4. A questão está incluída num âmbito de objectivo mínimo.

Não encontrámos nenhum exemplo semelhante a esta questão nem nos episódios nem nos cadernos diários das duas alunas. A questão incide apenas sobre um aspecto do conceito de função e embora seja apresentada na sua faceta simbólica apela à faceta geométrica. Os alunos não tratam a monotonia de uma função de outra maneira que não seja através da abordagem geométrica.

O nível de aprofundamento do conceito de função é baixo pois o aluno deve tratar a função como sendo um processo (DeMarois e Tall, 1999) na faceta geométrica, pois pretende-se que o aluno relacione os valores das imagens de objectos dados dentro da

condição da função ser decrescente. Relativamente à exigência cognitiva desta questão, a apreciação que a professora faz coincide com a nossa, ela é classificada como sendo de "objectivo mínimo".
Resta referir que Esmeralda recorre à elaboração de uma questão que "encaixe" exactamente na aprendizagem que pretende avaliar: "*Verificar se o aluno sabe associar as imagens à noção de função decrescente.*"

2ª Parte

Questão nº 6.

6. Determine o valor de **p** para que a função definida por

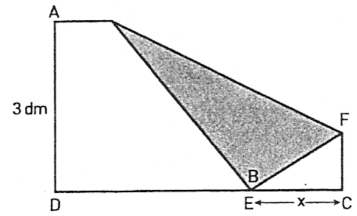
$$g(x) = \frac{3x}{x^2 + 2x + p}$$, tenha domínio IR.

"*1. Inventada por mim.*
2. Entender se os alunos dominam ou não a noção de Domínio e que $b^2 - 4ac < 0$ *para que esta função tenha domínio* |R.
3. Objectivo mais complexo, visto os alunos terem de associar a noção de que o domínio desta função seria |R *se o polinómio* $x^2 + 2x + p$ *não se anular.*
4. Escolhi o aspecto analítico por ser o que melhor se adaptava a esta situação."

Não encontrámos exemplos semelhantes a esta questão nos cadernos das alunas. Encontrámos, isso sim, exemplos onde se trata directamente o domínio de uma função racional na faceta simbólica, episódio 4. Por outro lado, também foram tratados exemplos de funções quadráticas quanto às raízes, episódio 30 em 2 de Fevereiro, e quanto ao sinal nas aulas seguintes.
Como a professora indica, esta questão envolve vários aspectos do conceito de função e também dois tipos de função, a função racional e a função quadrática, que o aluno tem que integrar para indicar o que lhe foi pedido. Por isso a enquadra num "objectivo mais complexo". De facto o aluno deve tratar esta função tanto como objecto e como processo (DeMarois e Tall, 1999), como objecto quando considera a função $g(x)$ da qual pretende conhecer uma sua característica – o domínio – e como processo quando trata a função quadrática $x^2 + 2x + p$ da qual pretende saber qual o elemento do domínio cuja imagem é zero, sempre na faceta simbólica. A imagem do conceito (Vinner e Tall, 1986) do aluno que inclui todos estes elementos terá que os relacionar de modo a obter a informação que procura.
Efectivamente, este exemplo faz mais sentido se for tratado na faceta simbólica, a dependência de um parâmetro para verificar a restrição imposta é melhor tratada nesta faceta.

Questão nº 7.1

7. Considere uma folha de papel rectangular, com 3 dm de largura, dobra-se o canto B de modo que coincida com o ponto E do lado oposto , como mostra a figura.



7.1 Mostre que a área A(x) do triângulo rectângulo [ECF] é dada por:

$$A(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{12}x^3$$

"*1. Retirada de um livro de exercícios.*
2. Entender até onde vai a capacidade de dedução e de demonstração dos alunos.
3. Objectivo mais complexo. Verificar se os alunos sabem fazer deduções, isto é, aplicar os seus conhecimentos a novas situações.
4. Escolhi esta figura e pedi a sua área em função da incógnita x, por ser um exercício tipo exame."

Esta questão é um exemplo que se enquadra na 4ª categoria, Aplicações Internas. Embora pareça ser uma aplicação à vida real (5ª categoria) porque se trata de uma folha de papel, na realidade é um problema puramente geométrico.
Para a professora, este é um caso a que se costuma chamar "situação nova" e, como tal, não existe nenhum exemplo tratado nas aulas que lhe seja semelhante.
O que Esmeralda chama de "*capacidade de dedução e de demonstração*" é, na realidade, a capacidade que os alunos tenham adquirido de aplicar o conceito de função a um problema estritamente matemático. A professora enquadra esta questão como sendo de "objectivo mais complexo". Realmente, para que um aluno possa chegar ao resultado pretendido terá que envolver a sua capacidade de visualização à situação geométrica, fundamentalmente que $\overline{BF} + \overline{FC} = 3$. O conceito de função integra este problema a partir do teorema de Pitágoras, em que $\overline{FC} = \frac{3}{2} - \frac{x^2}{6}$ é a altura do triângulo. Note-se que o conceito de função funciona como um elemento algébrico necessário ao cálculo da área e, nesse sentido, não pode ser considerado um processo mas sim um objecto (DeMarois e Tall, 1999), tendo assim que estar perfeitamente encapsulado (Sfard, 1992).

Questão nº 7.2

7.2 Recorrendo à calculadora, indique o máximo de A(x) e o maximizante.

"1. *Idem, ibidem.*

2. Escolhi esta questão para saber se os alunos sabem utilizar a calculadora gráfica e as suas potencialidades.
3. Objectivo mínimo.
4. Respondido atrás."

Esta questão, embora dependente da anterior, tem um nível de exigência totalmente diferente. Esta questão faz a ligação entre a faceta simbólica e a faceta geométrica (DeMarois e Tall, 1999), é apresentada na primeira e tratada na segunda. É uma questão parecida a muitos exemplos tratados em aula em que através da representação gráfica se identificam características da função, veja-se o episódio 35 de 16 de Fevereiro. No fundo é uma situação rotineira de uso da máquina de calcular para uma situação da vida real não muito exigente do ponto de vista cognitivo, nela se faz a aplicação de um aspecto elementar do conceito de função, o máximo e respectivo maximizante. A própria professora identifica esta questão como de "objectivo mínimo", contudo a função já não é tratada em termos de processo mas sim de objecto (DeMarois e Tall, 1999) onde se pretende conhecer uma das suas características.
Ainda assim, o exemplo do episódio 35, que é semelhante, e esta própria questão são tão idênticos que o exemplo pode ser considerado um exemplo resolvido (Renkl, 2002) que inclui todos os passos necessários para resolver esta questão.

Questão nº 8.

8. Estude a paridade das seguintes funções reais de variável real definidas por:

8.1 $f(x) = x - 4x^2$.

8.2 $g(x) = 1 - x^4$.

"*1. Inventada por mim.*
2. Verificar se os alunos dominam o estudo da paridade de uma função.
3. Objectivo mínimo.
4. Escolhi o aspecto analítico pelo facto de já o haver tratado em sede de aula."

Esta sequência de duas questões é semelhante aos exemplos de 2ª categoria, Abordagem Inicial Autónoma, propostos pela professora no episódio 23 em 2 de Fevereiro. São exemplos rotineiros de baixo nível cognitivo a que Esmeralda indicou como de "objectivo mínimo", coerentemente com a nossa categorização.
A paridade de uma função é normalmente abordada segundo as representações gráfica ou simbólica. No primeiro caso, a paridade pode ser verificada de forma imediata através da simetria do gráfico. No segundo caso, a paridade tem de ser estudada com base na definição que está suportada pela faceta simbólica. A faceta escolhida por Esmeralda foi esta última que explora, também, a fluência no cálculo.

Não esquecendo que a paridade de uma função não está directamente relacionada com o conceito de função como processo que relaciona duas quantidades, antes como um objecto em que se estuda uma das características (DeMarois e Tall, 1999), e, por esse motivo, encontra-se num nível mais profundo da aquisição do conceito. Contudo, não nos parece que o encapsulamento do conceito (Sfard, 1992) seja essencial para resolver esta questão, um processo de cálculo rotineiro é suficiente. Por isso, situámos esta questão (e os exemplos do episódio 23) na 2ª categoria e Esmeralda como "objectivo mínimo". O que afirmámos é corroborado pela razão de inclusão da questão no teste pela professora, foi um processo rotinado em aula à custa de exemplos resolvidos.

Questão nº 9.

9. Resolva, em IR, as seguintes condições e apresente o respectivo conjunto - solução:

9.1 $|-5x+1|>3$

9.2 $|7x-3|=3\left|x-\frac{3}{2}\right|$

"*1. Criada por mim.*
2. Escolhi estas duas alíneas para verificar se os alunos sabem resolver inequações e equações com módulo.
3. Objectivo mínimo.
4. Escolhi o aspecto analítico por ser o que melhor se adaptava a esta questão."

Esta sequência de duas questões é semelhante à sequência tratada no episódio 46 em 2 de Março, a professora ao criar estas questões fê-lo de forma que fossem semelhantes aos exemplos tratados em aula. São exemplos que se tratam de forma rotineira e que se prestam a tal com muita naturalidade. O conceito de função não está explicito de forma clara, para os alunos é mais um exemplo de cálculo.
A professora explorou uma Dimensão de Variação Possível (Watson e Mason, 2005) nesta questão. Uma das condições tem um só módulo enquanto a outra tem dois. A professora não considerou tal facto como uma dificuldade, pois considerou esta questão como de "objectivo mínimo".

Questão nº 10.

10. Seja g a função definida por $g(x) = -3x^2 + 6x + 2$.

10.1 **Sem usar a calculadora** indique as coordenadas do vértice da parábola.

"*1. Criada por mim.*

2. Escolhi esta questão para testar o domínio dos alunos no cálculo analítico do vértice de uma parábola.
3. Objectivo mais complexo. Verificar se os alunos sabem tratar os casos notáveis da multiplicação, neste contexto.
4. Processo analítico, por ser o mais adequado."

A forma de obter as coordenadas do vértice, quando a quadrática é dada pela sua equação geral, pode ser efectuada na faceta gráfica ou na faceta simbólica (DeMarois e Tall, 1999). A primeira forma, como já dissemos atrás, é rotineira quando feita com a máquina de calcular. Se a forma de obter o vértice da parábola for através da faceta simbólica a tarefa torna-se mais difícil, não por razões vinculadas ao conceito de função quadrática mas por questões de cálculo.
Se porventura, a quadrática fosse dada pela sua equação, mas que fosse na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, então seria um caso muito simples dado que esta equação é transparente (por exemplo Zaslavsky, 2005) às coordenadas do vértice.

Questões10.2; 10.3; 10.4

10.2 Escreva uma equação do eixo de simetria do gráfico.

10.3 Indique o contradomínio de g.

10.4 Indique o intervalo do domínio onde g é crescente.

"*1. Criada por mim.*
2. Escolhi cada uma delas para ver qual o domínio dos alunos em relação
- *À equação do eixo de simetria*
- *Do contradomínio*
- *Intervalos de crescimento*

3. Objectivo mínimo.
4. O aspecto escolhido (analítico) é o mais adequado à situação."

Obtidas as coordenadas do vértice, além de se saber determinar o sentido da concavidade da parábola associada à função *g,* as respostas às três questões são imediatas se o aluno já possuir uma estrutura do conceito de função quadrática que relacione os aspectos simbólicos com os aspectos geométricos. Esta questão é semelhante ao exemplo do episódio 36 de 23 de Fevereiro que foi categorizado na 3ª categoria, Esclarecimento e Aprofundamento, isto é, um exemplo que se destina a esclarecer alguma dúvida que surja nos alunos, a ampliar os espaços de Exemplos dos alunos (Watson e Mason, 2005) e a construir a Imagem do Conceito de função (Vinner e Tall, 1986).

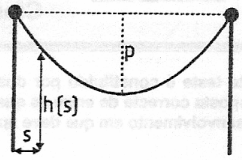
Teste de 10º ano da Esmeralda.
Data: 29 de Maio de 2007.

2ª Parte (resposta aberta)

Questão nº 5

5. Um cabo estava suspenso por dois pilares com a mesma altura e fazia uma curva com forma de parábola. A fórmula $h(s) = \frac{1}{2}s^2 - 4s + 10$

Permite calcular altura (em metros) do cabo em função de s, em que s é a distância (em metros) a que nos encontramos do pilar mais à esquerda.



5.1 Qual a altura dos pilares?

5.2 Determine a que distância se encontram os pilares e a profundidade máxima do cabo, p.

5.3 Sem recorrer à calculadora determine os valores de s para os quais a altura do cabo é inferior a 8 metros.

"*1. Esta questão foi retirada de um manual escolar.*
2. Com este problema, pretendia testar a capacidade de compreensão dos alunos face ao estudo das funções em situações reais.
3. Objectivo mínimo.
4. Escolhi o aspecto analítico, por ser o que melhor se adaptava a esta situação."

Existe um exemplo parecido a esta questão nos episódios que foram analisados, é o exemplo contido no episódio 54 de 16 de Março. Aquele exemplo foi categorizado na 5ª categoria, Aplicações Externas por o exemplo não ser uma aplicação directa do conceito de função quadrática.
Esta questão foi classificada pela professora como sendo de "objectivo mínimo", por outras palavras, é um caso em que o conhecimento sobre a função quadrática envolvido se mantém no nível elementar e básico. Na questão 5.1, também concordamos com a professora. Na realidade o conceito de função é aplicado a uma situação da vida real, contudo a aplicação verifica-se ao nível dos aspectos mais elementares do conceito. Assim, embora relacionando as facetas simbólica e geométrica, a questão é apresentada já com as facetas relacionadas, podendo a informação pedida ser obtida pela análise do gráfico da função. Por outro lado, a

função aparece nesta questão na sua fase de aprofundamento inicial, a fase de processo, para calcular a altura dos poste basta encontrar a imagem do objecto “zero”.
Nas questões 5.2 e 5.3 já não concordamos com a professora quanto à exigência cognitiva e quanto ao nível de aprofundamento do conceito pelo aluno para poder determinar a informação pedida nas duas questões. Veja-se: para encontrar a distância entre os dois postes, na questão 5.1, é necessário encontrar os dois objectos que determinam uma mesma imagem, imagem que é $h(0)$. Portanto será “0” e outro objecto que dará a distância (porque o primeiro é zero). Por outro lado, a imagem do conceito (Vinner e Tall, 1986) do aluno deve incluir que o mínimo é obtido no ponto médio de dois objectos com a mesma imagem, poderão ser as distâncias “0” e do segundo poste. Neste caso, o conceito de função não é aplicado como processo mas sim como objecto apresentado nas facetas simbólica e geométrica (DeMarois e Tall, 1999) cujas características permitem obter a informação pedida e, para isso, o conceito deverá estar encapsulado (Sfard, 1992) pelo aluno. O mesmo se passa para a questão 5.2.
Também não se pode concordar com a professora quando esta afirma que o aspecto analítico é o que melhor se adapta à situação. De facto a questão vem apresentada nas facetas simbólica e geométrica, sendo necessário que a imagem do conceito inclua a relação entre facetas e que o conceito de função esteja aprofundado no aluno até ao nível de objecto ou mesmo de proceito (DeMarois e Tall, 1999).

Questão nº 6

6. Considere a função definida por $f(x) = |x+3| - 1$.

6.1 Defina a função f sem usar o símbolo de módulo e represente-a graficamente.

6.2 Descreva as transformações sofridas pela função f, comparando-a com a função $g(x) = |x|$.

6.3 Sem recorrer à calculadora resolva a inequação $f(x) > 3$.

“*1. Esta questão foi fruto da minha imaginação.*
2. Com este exercício, pretendia verificar se os alunos sabiam:
-desdobrar a função módulo
-representar graficamente uma função módulo
-descrever as transformações sofridas por uma função
3. Objectivo mínimo.
4. O aspecto analítico. Era o que melhor se adaptava a esta situação.”

A questão 6.1 é idêntica à questão incluída no episódio 41 de 2 de Março e a 6.3 a algumas das questões dos episódios 44, 45 e 46 de 2 de Março. Quanto à questão 6.2, não se encontra nenhuma semelhante nos episódios, mas pudemos encontrar alguns exemplos idênticos nos cadernos diários das duas alunas, nas lições em que a professora introduziu as transformações do plano aplicadas à função módulo.

As duas primeiras questões, 6.1 e 6.2, são exemplos em que o aluno deve relacionar a faceta simbólica e a geométrica (DeMarois e Tall, 1999). A questão 6.1 é claramente um exemplo de procedimento e idêntico a outros tantos que a professora proporcionou aos alunos, não dependendo a sua resolução de outro processo que não seja a aplicação da rotina; neste âmbito, concordamos com Esmeralda ao inclui-la ao nível do objectivo mínimo, pois os exemplos idênticos foram incluídos na 2ª categoria, Abordagem Inicial Autónoma. Ao contrário de Esmeralda, não estimamos que a questão 6.2 seja de objectivo mínimo, a relação entre a faceta simbólica e a faceta geométrica é feita através de duas translações simples (ou uma translação diagonal) e a identificação das translações na equação e consequente transporte para o gráfico não é um processo totalmente rotineiro. Ainda assim, voltamos a concordar com a professora no que toca à questão 6.3, pois a resolução da equação é um processo que qualquer aluno consegue interiorizar com algum trabalho de rotina.
A faceta simbólica que Esmeralda escolheu nas duas primeiras questões não obsta que a faceta geométrica seja implicitamente utilizada. A terceira questão apenas pode ser tratada na faceta simbólica dado que os alunos devem resolver uma inequação.
No conjunto, estas três questões têm um papel de estruturação do conceito de função módulo. As duas primeiras questões relacionam as duas facetas e a segunda envolve as transformações do plano, sendo que esta é uma situação que obriga o aluno a tratar a função $f(x)$ como objecto e não como processo (DeMarois e Tall, 1999) promovendo o processo de encapsulamento do conceito (Sfard, 1992).

As questões que Esmeralda apresenta aos alunos nos testes e que, para ela, funciona como avaliação sumativa estão maioritariamente enquadrados nos mesmos esquemas que os exemplos que proporcionou aos alunos durante as aulas. As respostas que Esmeralda pretende dos alunos, os conhecimentos e as rotinas que eles devem utilizar e as características do conceito de função que subjazem a essas rotinas são, em tudo, coerentes com o que Esmeralda trabalhou durante as aulas com os exemplos que propôs.
Esta coerência pode orientar os alunos no seu trabalho e nas referências sobre a importância relativa dos vários conteúdos. A avaliação determina o *quê*, o *como* e o *quando* os alunos aprendem, porque, "Em geral, os alunos consideram importantes os aspectos das lições que os professores enfatizam e avaliam regularmente" (Lester e Kroll, 1991, p. 277) e consideram mais importante aquilo que os professores avaliam; consequentemente, as decisões que tomam dirigem-se àquilo a que se deve dedicar mais atenção. Assim, o que o professor avalia condiciona as aprendizagens dos alunos (Lester e Kroll, 1991). Além disso, "Para os alunos, a avaliação é a forma mais clara e directa de conhecerem as autenticas intenções dos seus professores, intenções através das quais os estudantes vão construindo, pouco a pouco, a sua própria imagem daquilo que deles se pretende." (Goñi, 2000, p. 6).

No que respeita à forma e ao conteúdo dos testes que Esmeralda apresentou aos seus alunos, estritamente nas questões que se referem ao conceito de função, é interessante comprovar que encaixa no perfil que Rochera, Colomina e Berberà (2001) apresentaram como descrição dos testes e exames tradicionais:

- Os testes são compostos por um elevado número de tarefas, habitualmente independentes entre si, e que avaliam prioritariamente conteúdos procedimentais.
- Os testes estão formados por tarefas que remetem, maioritariamente, a níveis baixos de exigência cognitiva (desde a aplicação directa de algoritmos ou técnicas de identificação do algoritmo a aplicar e desde a recordação de informação factual até à exemplificação directa de conceitos).
- Os testes estão formados por tarefas de natureza maioritariamente intra-matemática, que oferecem como ponto de partida todos os dados necessários – e apenas esses – para a sua resolução, de resposta única e em que não se solicita a justificação da resposta nem o uso de distintos processos de resolução.
- Os testes estão maioritariamente formados por tarefas apresentadas num suporte verbal-numérico e podem responder-se também, maioritariamente, de forma verbal ou exclusivamente numérica.

Seguindo estas autoras, os tipos de conteúdos avaliados nos testes são de natureza conceptual ou procedimental e a exigência cognitiva das tarefas pode agrupar-se da forma que segue.

No caso dos conteúdos conceptuais:

- Recordação directa dos conteúdos conceptuais.
- Identificação e exemplificação de conceitos.
- Estabelecimento de relações entre conceitos.
- Explicação/Modelação de um fenómeno complexo mediante o uso integrado de uma rede de conceitos interrelacionados.

No caso dos conteúdos procedimentais:

- Aplicação directa de algoritmos ou técnicas.
- Interpretação/Tradução entre linguagens ou formas de representação.
- Identificação do algoritmo/técnica a aplicar e aplicação da mesmo/a.
- Identificação do conjunto de algoritmos a aplicar e aplicação encadeada dos mesmos.
- Delimitação e concisão da formulação do problema e/ou utilização de algum tipo de heurística para a sua resolução.

Evidentemente, um ou outro aspecto dos referidos poderão ser questionáveis no que se refere às questões que Esmeralda apresentou aos alunos e que estão listadas acima, contudo é a forma que Esmeralda usa para classificar os seus alunos e está dentro da linha de uma avaliação que Fernandes (2006, p. 25) indica como sendo uma avaliação "*… que, genericamente, se caracteriza por dar mais ênfase aos processos de classificação, de selecção e de certificação, aos resultados obtidos pelos alunos, à utilização sumativa dos resultados dos testes ou à prestação de contas.*" Mas, se por um lado, esta forma de avaliar pode levantar algumas críticas em termos de educação matemática, o certo é que os alunos de Esmeralda pretendem seguir os seus estudos na universidade e, para isso, devem sujeitar-se a um exame que, simultaneamente, influi na sua classificação final na disciplina de Matemática e na classificação com que concorrerão a um lugar no ensino superior. Assim, um objectivo de Esmeralda (e de centenas de professores de Matemática) é que os alunos tenham um bom desempenho nesse exame nacional. Nesta ordem de ideias têm sentido as conclusões de Leonor Santos (2004):

> "…não podemos deixar de salientar que parece haver um elevado grau de coerência entre os diversos resultados obtidos em provas externas de âmbito nacional e uma prática mais tradicional desenvolvida na sala de aula. Note-se que, quer nas provas de aferição, quer nos exames do 12º ano, os alunos obtêm melhores resultados nas questões que fazem apelo ao conhecimento de conceitos e procedimentos. Poder-se-á dizer que qualquer que sejam as experiências de aprendizagem vividas pelos alunos tal é o que habitualmente acontece, dado que o que está em causa neste tipo de questões é a capacidade de reprodução, em detrimento de uma capacidade cognitiva mais exigente." (p. 366)

Por fim, cabe referir que as categorias relativas à classificação de exemplos (Figueiredo, Blanco e Contreras, 2006; cf. Capítulo III, 5.2) são perfeitamente aplicáveis às questões apresentadas nos testes de Esmeralda, o que reforça a nossa assumpção de que não existem exemplos próprios da leccionação e exemplos próprios da avaliação. Isto é, qualquer das questões que Esmeralda apresentou em teste poderia ter sido usada em aula e vice-versa.

4. Como exemplificar o conteúdo: um Conhecimento do Professor

Esta secção deve ser vista como uma síntese do que é o conhecimento de um professor no que concerne à exemplificação, aquilo que quotidianamente um professor põe em campo para criar, escolher e tratar os exemplos que apresenta aos alunos. Se esta síntese for tomada de forma isolada, poderá constituir uma forma de enquadrar e categorizar este conhecimento do professor.

A categorização de Figueiredo (2005), cuja investigação foi embrionária desta, está baseada na construção e aprofundamento do conceito de função e **distingue os exemplos pelo objectivo**; por assim dizer, no processo de aquisição do conceito distingue-se o exemplo pelo objectivo que persegue no processo cognitivo de apreensão do conceito. Naquela investigação, a construção do sistema de categorias estava ligada de forma muito próxima à aquisição e aprofundamento do conceito de função.

O conjunto de aspectos relativos ao conhecimento do professor sobre exemplificação vincula-se com o conhecimento que o professor emprega na escolha e no tratamento do exemplo, em qualquer fase do aprofundamento do conceito/processo/teorema, e **distingue os exemplos pelas características e pelo uso**. Por isso, o conhecimento do professor sobre a exemplificação utilizada em aula pode ser agrupado em seis grandes áreas:

- *Introdução do Conteúdo Matemático*
- *Variação*
- *Espaço de Exemplos*
- *Aprofundamento Conceptual*
- *Transparência*
- *Grau de Planificação*

Por sua vez, cada uma destas áreas está subdividida em aspectos perfeitamente identificáveis aquando do uso de qualquer exemplo e que já foram descritos.

Introdução do Conteúdo Matemático

A forma de introduzir o tópico matemático deve ser adequado à sua própria natureza. Isto é, existem conteúdos matemáticos com os quais os alunos contactam melhor apresentando-se-lhes primeiro os exemplos, deixando a seu cargo a indução da generalidade (definição ou processo) e, ao invés, existem outros conteúdos em que pode ser aconselhável apresentar-se-lhes primeiro a generalidade (definição ou processo) e depois particularizar aos exemplos (Rowland, Thwaites, Huckstep, 2003b). O uso de não-exemplos ajuda os alunos a delimitarem os conceitos. Isto é, através de um não-exemplo os alunos constatam a fronteira do conceito: a partir de que característica os exemplos que a possuem deixam de estar abrangidos pela definição do conceito.

- **Indução:** no episódio 34 pode observar-se como os alunos a partir das coordenadas do vértice e de um ponto podem determinar a equação da função quadrática cuja parábola inclui os pontos dados. Na lição anterior, observado nos cadernos diários das alunas, a professora apresentou aos alunos vários exemplos de funções quadráticas pelas suas equações e, com o auxílio da calculadora gráfica, puderam ver quais as coordenadas dos respectivos vértices das parábolas associadas. Os exemplos do tipo, $y=x^2$, $y=(x-3)^2$, $y=(x+4)^2$, $y=x^2+7$, $y=x^2-5$ e $y=(x-3)^2+1$ permitiram aos alunos afirmar que as funções quadráticas apresentadas na forma $y=(x-h)^2+k$ definem parábolas cujo vértice tem coordenadas $V(h;k)$. O facto das funções deste tipo definirem parábolas cujas coordenadas do vértice são conhecidas não foi apresentado aos alunos, foram eles que, pela observação dos gráficos dos exemplos propostos, puderam induzir essa generalidade. Um objectivo semelhante pode ser observado no episódio 33.
- **Dedução**: o episódio 21 ilustra claramente o processo dedutivo. A professora definiu (lição anterior não gravada, mas registado nos cadernos das alunas) o que são funções pares e impares e apresenta posteriormente exemplos deste tipo de funções. O conceito de paridade de uma função é trabalhado nas facetas geométrica e simbólica. Note-se que a noção de paridade de uma função não pode ser "descoberta" pelos alunos, é uma noção que só pode ser transmitida aos alunos através da definição; não é uma característica que possa ser observada (mesmo na faceta geométrica) como característica comum a todos os exemplos de uma sequência, mesmo que numerosa, de exemplos.
- **Não-Exemplo:** os episódios 12 e 25 dão boa ilustração do uso do não-exemplo. No episódio 12, do caso de uma função que não é contínua e, no episódio 25, o caso de uma função que embora contenha monómios de 2º grau não é uma função quadrática.

O caso dos exemplos de processo é bastante diferente dos casos de conceito. Nos casos de processo não é aplicável a forma indutiva ou dedutiva de introdução. Os tópicos matemáticos constituídos por processos, resolução de equações ou passar a equação

$f(x)=ax^2+bx+c$ para $f(x)=a(x-h)^2+k$, podem ser introduzidos através de um exercício resolvido. Como se viu, este tipo de exemplo pretende mostrar ao aluno quais os passos a efectuar para se conseguir um dado resultado. É espectável que, em todos os exemplos daquele processo, se obtenham os mesmos resultados se o aluno replicar exactamente os mesmos passos.

- **Exercício resolvido**: No episódio 10, a professora apresenta um gráfico de uma função e a respectiva tabela de variação para mostrar aos alunos como do primeiro de obtém a segunda. No episódio 31 pode ver-se o processo de passar a equação de uma função quadrática da forma $f(x)=ax^2+bx+c$ à forma $f(x)=a(x-h)^2+k$. O episódio 38 mostra a resolução de uma equação de 2º grau com coeficientes irracionais e, por último, o episódio 43 ilustra a forma como Esmeralda demonstra aos alunos como resolver uma equação com módulos.

Variação

Como ficou expresso no Capítulo II, Secção 4.4, só faz sentido falar em variação quando é posto em campo um número apreciável de exemplos. Não terão que ser em determinado número em concreto, mas deverão ser suficientes para que aquilo que não varia se destaque do que variou ou, ao contrário, para que seja apreciável o que muda sob o pano fundo do que não variou (Marton e Booth, 1997; Watson e Mason, 2005; Bills *et al*. 2006; Mason e Johnston-Wilder, 2006; Watson e Mason, 2006; Mason, 2008). O objectivo do uso da variação é a tomada de consciência de uma generalidade e o desenvolvimento da capacidade de abstrair por parte dos alunos (Watson e Mason, 2005).

O uso da variação apenas será eficaz se se combinarem convenientemente os seus dois elementos, as dimensões de variação possíveis e as respectivas amplitudes de mudança permitidas. Para que o tópico que pretendemos ensinar seja totalmente desenvolvido não basta que todas as dimensões possíveis sejam consideradas, também é necessário que essas dimensões sejam abordadas em toda a sua potencialidade através da exploração de toda a amplitude de mudança permitida associada a cada dimensão.

- **Dimensões de Variação Possível:** o objectivo do uso da variação é perfeitamente identificável na sequência constituída pelos três exemplos apresentada aos alunos no episódio 33. Por via destes exemplos, pede-se ao aluno que visualize na calculadora gráfica o gráfico da função $y=a(x-h)^2+k$ quando os valores dos parâmetros *a*, *h* e *k* tomam os valores dados. Para dar apenas um caso desta sequência veja-se o exemplo

Seja $a=2$ e $h=3$. Represente no mesmo referencial $y=a(x-h)^2+k$ para $k=-3$, $k=0$ e $k=0$.
Explique o efeito no gráfico de f devido à alteração de k na fórmula que define a função.

Repare-se que dos três parâmetros cujos valores poderiam ser modificados, apenas se variou o valor do parâmetro *k*. Este exemplo explora apenas essa dimensão de variação possível (e.g. Watson e Mason, 2005).

O objectivo deste exemplo é que o aluno discirna a variação da posição da posição da parábola apenas por translações verticais quando todos os outros aspectos da parábola se mantiveram iguais. É esta a mudança num fundo invariante que Watson e Mason (2006) e os restantes investigadores se referem. No final, este exercício em particular e toda a sequência em geral visam a generalização do significado de cada parâmetro da fórmula $y = a(x-h)^2 + k$ e, também, a abstracção desta expressão como elemento gerador de famílias de funções.

- **Amplitude de Mudança Permitida:** tomando a mesma sequência, e em particular o exemplo acima, pode-se observar que são utilizados três valores inteiros. De facto poderiam ser utilizados quaisquer valores reais, é essa a amplitude de mudança permitida. Isto é, *k* pode tomar qualquer valor de $\mathbb{R}$, pois todos os gráficos obtidos seriam, ainda, exemplos que diferiam uns dos outros apenas pela translação vertical.

Espaço de Exemplos

O conceito de Espaço de Exemplos é uma ideia central na exemplificação em educação matemática. Utiliza-se o termo *Espaço de Exemplos* quando nos referimos à colecção, que inclui não só o primeiro exemplo que nos vem à mente sobre um dado tópico, mas também todos aqueles que nos surgem como resultado de posterior reflexão (Watson e Mason, 2002a, 2005). Segundo estes dois investigadores, relativamente a um dado tópico matemático, quantos mais exemplos o espaço de exemplos de um aluno possuir mais preparado estará o aluno para tratar uma situação nova que envolva esse tópico. Como foi referido no Capítulo III, os tópicos matemáticos podem ser separados, quanto à natureza do conteúdo que se exemplifica, em três grandes entidades: os conceitos, os processos e os teoremas (Zodik e Zaslavsky, 2007b). Por tal, quando se aborda um tópico matemático através dos exemplos, deve-se proporcionar ao aluno uma diversidade apreciável de exemplos da entidade em causa de forma que o espaço de exemplos que os vá conter se amplie de forma rica e variada.

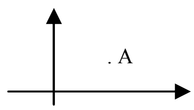
- **Exemplo Conceptual:** os exemplos contidos nos episódios gravados são todos sobre o conceito de função. A forma de ampliar os espaços de exemplos do conceito de função relaciona-se com as representações deste conceito. Os alunos devem abordar este exemplo através das representações, todas elas têm igual importância embora se dê mais ênfase às representações gráfica e algébrica.
- **Exemplo Procedimental:** os exemplos sobre procedimentos são frequentes nos episódios gravados. Podemos observar a utilização destes exemplos nos episódios 31 e 32, onde os exemplos trabalham o processo de passar da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ para a forma $y = a(x-h)^2 + k$; no episódio 39, onde se trabalha o processo conhecido por "método dos coeficientes indeterminados" para determinar a igualdade de polinómios. O objectivo dos exemplos propostos pela professora visa a fluência dos alunos em todos os processos de cálculo que figuram na planificação oficial.

- **Exemplo de Teorema:** de todos os episódios gravados, apenas um descreve a forma como foi usado o teorema de Pitágoras num exemplo de aplicação à vida real no episódio 40.

Uma das formas de ampliar os espaços de exemplos dos alunos consiste na apresentação directa de exemplos. Porém, Watson e Mason (2005) propuseram uma forma diferente de se ampliar os espaços de exemplos dos alunos através de uma actividade de exemplificação do próprio aluno. Segundo os autores a produção de exemplos por parte dos alunos obriga-os a estruturar melhor o conceito (ou procedimento) que subjaz à actividade. Esta actividade será orientada pelo professor, pedindo ao aluno que produza exemplos que observem determinadas restrições.

- **Dê exemplo de … (com restrições):** este tipo de actividade do aluno pode ser observada nos episódios 9, 34 e 51. Estas tarefas podem gerar, no início, certa confusão aos alunos porque a ordem dos passos da actividade está invertida, por assim dizer. Usualmente, é o professor que apresenta o exemplo e os alunos determinam as suas características; neste caso é ao contrário, o professor proporciona as características e pede um exemplo que as verifique. A título de exemplo apresenta-se o caso do episódio 9, relativo ao conceito de função

2. Observe a figura.



2.1 Desenhe o gráfico de uma função que contenha o ponto A e seja crescente. Quantas soluções tem o problema?

2.2 Desenhe o gráfico de uma função que contenha o ponto A e seja decrescente. Quantas soluções tem o problema?

2.3 Desenhe o gráfico de uma função que contenha o ponto A e seja constante. Quantas soluções tem o problema?

2.4 Desenhe o gráfico de uma função que contenha o ponto A e não seja monótona.

Aprofundamento Conceptual

Por vezes são apresentados aos alunos exemplos que, pela sua generalidade, podem enquadrar outros exemplos da mesma natureza. Neles, aquilo que é geral é visível no exemplo em particular (Mason e Pimm, 1984) e este exemplo serve em muitas ocasiões como exemplo de referência (Michener, 1978) ao qual os alunos poderão recorrer.

O aprofundamento conceptual também tem no conflito cognitivo um dos seus principais motores. Como se viu, do conflito cognitivo e da sua resolução obtém-se uma mudança conceptual pela construção de novos significados sobre o conceito (Tall, 1977; Tsamir e Tirosh, 1999; Watson, 2002; Sela, 2008). No contexto da exemplificação, este processo fica bem descrito por dois tipos de exemplos muito concretos, o exemplo fulcral e o exemplo ponte (Zazkis e Chernoff, 2008).

O conflito cognitivo pode ser estabelecido pela confrontação de dois exemplos, aquele com que professor e aluno trabalham, o que chama a atenção do professor para a concepção errónea do aluno e aquele que o professor coloca ao aluno para que conflitue com o primeiro e com a concepção do aluno.

Além da situação anterior, o conflito cognitivo pode ter por base um exemplo que, na situação em causa, funciona como contra-exemplo às afirmações do aluno, sejam falsas conjecturas ou falsas generalizações. Por isso, o uso de contra-exemplos é fundamental para o desencadear de um conflito e é suposto ser clara para o aluno a contradição em que o contra-exemplo o colocou.

- **Exemplo Genérico**: este tipo de exemplo pode ser observado no episódio 6. A professora apresentou aos alunos um exemplo que, na sua perspectiva, é um caso geral ao qual os alunos podem recorrer para trabalharem exemplos de cálculo do domínio de uma função, já que a função apresentada inclui características de função racional e irracional simultaneamente.
- **Exemplo Fulcral**: os episódios 18 e 38 ilustram duas situações onde a apresentação de um exemplo assumiu uma forma de confrontar os alunos com conhecimentos seus que eram conflituantes, ainda que disso os alunos não se tivessem apercebido. No episódio 18, quando um aluno demonstrou uma falsa concepção no cálculo do domínio de uma função e no episódio 38, quando uma aluna fica em conflito quando pretende conciliar um princípio de equivalência de equações com uma regra da multiplicação de potências. Nos dois casos foram os exemplos apresentados pela professora que desencadearam o conflito.
- **Exemplo Ponte:** em ambos os episódios, os exemplos que a professora apresentou, porque resolveram os conflitos e proporcionaram uma evolução conceptual, foram também exemplos ponte por terem permitido a construção de significados novos e coerentes com as novas aprendizagens.
- **Contra-Exemplo**: nos episódios 18 e 38, que já foram referidos, o conflito cognitivo é estabelecido pela apresentação de contra-exemplos.

Transparência

A transparência é uma das características dos exemplos que mais sobressai e que pode ser explorada pelo professor. Há tópicos matemáticos cujos exemplos são propícios a que esta característica possa ser utilizada de modo a tornarem a exemplificação mais eficaz. Um exemplo transparente a uma dada noção matemática é um dos melhores veículos de ensino que o professor dispõe e é, por outro lado, um dos meios mais eficazes de aprendizagem do aluno (Zazkis e Gadowsky, 2001; Zazkis e Liljedahl, 2004; Zaslavsky e Lavie; 2005).

- **Transparência Imediata:** é uma característica do exemplo que permite ler de forma imediata determinada informação. A consciência de que os exemplos em causa são transparentes a alguma informação facilita a aprendizagem dos alunos, considerando que podem procurar de forma imediata ou directa no exemplo a informação que necessitam. O uso deste tipo de exemplos é descrito no episódio 34

Escreva uma equação da parábola conhecendo: o vértice $V(2;5)$ e um dos seus pontos $A(1;8)$

  É a transparência da equação $y = a(x-h)^2 + k$ às coordenadas do vértice, e a consciência deste facto, que vai permitir ao aluno escrever $y = a(x-2)^2 + 5$. Depois, as coordenadas do ponto *A* vai permitir encontrar o valor do parâmetro a.

- **Transparência Mediata:** esta característica dos exemplos está dependente da característica anterior. A transparência mediata, ou indirecta, permite ler informação que não está directamente acessível através do exemplo, mas que se relaciona com a informação que é imediatamente transmitida por ele. Veja-se, por exemplo o episódio 32. Este episódio ilustra a forma como foi tratada uma sequência de funções quadráticas e, em cada uma delas, é pedido ao aluno que depois de as escrever na forma $y = a(x-h)^2 + k$ indique as características da função tais como o domínio, contradomínio, intervalos de monotonia, eixo de simetria e tipo de extremo. É claro que a forma $y = a(x-h)^2 + k$ não é imediatamente transparente a estes aspectos, somente às coordenadas do vértice, mas o conhecimento destas coordenadas permite ao aluno determinar a informação pedida.

Grau de Planificação

No seu trabalho quotidiano, os exemplos que o professor apresenta aos seus alunos podem ter sido antecipadamente planeados ou podem ter que ser construídos de forma espontânea para dar resposta a uma determinada exigência (Zodik e Zaslavsky, 2007b). Se o trabalho for planeado antecipadamente o professor pode ter em consideração todos os aspectos que quer tratar com os alunos e escolher cuidadosamente os exemplos. Esta forma de exemplificar assenta em todas as categorias anteriores. Pode-se explorar a variação e a transparência, usar exemplos que possam suscitar conflitos cognitivos e preparar a sua resolução com exemplos ponte, aprofundar conceitos e ampliar os espaços de exemplos dos alunos. Todavia, na aula, surgem frequentemente situações que não são esperadas pelo professor e às quais o professor deve dar resposta. De facto, a experiência do professor ditará a qualidade com que essa situação será resolvida. Seguramente que um professor experiente dará melhor resposta e de forma mais rápida e natural, certamente por já ter vivido situações semelhantes. A experiência do professor está relacionada com o espaço de exemplos do professor, a uma maior experiência corresponderá um maior número de espaços de exemplos e de maior riqueza, diversidade e interligados em rede. Segundo Zodik e Zaslavsky (2007b) existem vários graus de planeamento/espontaneidade na forma de apresentar um exemplo, entre os totalmente planeados (integralmente tratados segundo o estipulado) e os totalmente espontâneos podemos encontrar os que são modificados. Isto é, o exemplo que deveria ser tratado de uma maneira acaba por ser abordado de uma outra, em resposta a um estímulo inesperado. Ou então, seguindo a abordagem planeada, é o próprio exemplo que é modificado.

- **Exemplo Planeado:** a maioria dos exemplos tratados por Esmeralda é planeada. São os exemplos do livro de texto e são escolhidos antecipadamente para auxílio do processo de ensino e aprendizagem; nesta investigação, do conceito de função.
- **Modificado:** nos episódios 3 e 46 pode-se observar-se a modificação de exemplos. No episódio 3 a professora apaga o domínio que consta na formulação do exemplo passando a tratar a mesma função mas com outro domínio e, no segundo caso, porque a sequência de exemplos não foi totalmente satisfatória para as intenções da professora, alterou um dos exemplos de forma que este satisfizesse os objectivos.

- **Espontâneo:** no episódio 6, a professora combina na função apresentada características de uma função racional com outras de uma função irracional, desta forma pretende que os alunos entendam melhor as restrições a fazer na determinação do domínio de funções deste tipo. No episódio 43, Esmeralda introduz um exemplo construído no momento para melhor explicar o processo de resolução de equações com módulos, este exemplo tem características que os do livro de texto não tinham e sobre os quais os alunos apresentaram dificuldades em entender.

Toda a informação pode ser condensada num quadro. Note-se que as categorias não são mutuamente exclusivas, quando se apresenta um exemplo, este pode ser enquadrado em uma ou, simultaneamente, em mais que uma categoria.

Aspectos do Conhecimento Sobre Exemplificação	**Evidente quando o professor…**
Introdução do Conteúdo Matemático	
Indução	Apresenta aos alunos os exemplos antes de generalizar para a definição do conceito.
Dedução	Apresenta os exemplos aos alunos depois da definição do conceito.
Não-exemplo	Usa não-exemplos para que os alunos possam estabelecer os limites do conceito.
Exercício resolvido	Apresenta os vários passos de um procedimento para que sejam posteriormente repetidos pelos alunos.
Variação	
Dimensões de Variação Possível	Apresenta sequências de exemplos onde se distinguem as Dimensões de Variação Possíveis.
Amplitude de Mudança Permitida	Explora, dentro de cada Dimensão, a mudança na Amplitude que é permitida.
Espaço de Exemplos	
Exemplo Conceptual	Propõe exemplos de um conceito anteriormente definido visando ampliar o espaço de exemplos dos alunos.
Exemplo Procedimental	Propõe exemplos de um procedimento anteriormente exposto, visando ampliar o espaço de exemplos dos alunos.
Exemplo de Teorema	Propõe exemplos de um teorema anteriormente apresentado, visando ampliar o espaço de exemplos dos alunos.
Dê exemplo de … (com restrições)	Pede aos alunos que apresentem um exemplo de um dado tópico matemático, condicionando-o com sucessivas restrições.
Aprofundamento Conceptual	
Exemplo Genérico	Usa um exemplo genérico para que os alunos possam obter generalizações.
Contra-Exemplo	Usa um contra-exemplo com o objectivo de contrariar uma afirmação, conjectura ou concepção.
Exemplo Fulcral	Usa um contra-exemplo com o objectivo de se obter uma *viragem* na percepção cognitiva do aluno confrontando-o com as suas contradições.
Exemplo Ponte	Usa o Exemplo Fulcral para promover uma evolução conceptual.
Transparência	
Transparência Imediata	Chama a atenção dos alunos para as informações que dado objecto matemático apresenta.
Transparência Mediata	Mostra aos alunos como, a partir das informações imediatas que o objecto matemático apresenta, se podem obter outras que não são imediatas.

Grau de Planificação	
Exemplo Planeado	Apresenta aos (ou trabalha com os) alunos um exemplo escolhido antecipadamente.
Modificado	Modifica um exemplo planeado de forma que este se adeqúe a uma situação imprevista, ou dê resposta a uma solicitação inesperada.
Espontâneo	Cria no momento um exemplo que se adequa a uma situação imprevista, ou dá resposta a uma solicitação inesperada.

Figura 34: Categorização do Conhecimento Exemplificativo do Conteúdo

5. Novo modelo de construção do Conceito de Função

O conhecimento de como exemplificar é na realidade uma simbiose entre o conhecimento da matéria disciplinar e o conhecimento de como ensinar essa matéria utilizando exemplos. É um conhecimento exemplificativo do conteúdo. Portanto, o Conhecimento Exemplificativo do Conteúdo (CEC) é, claramente, um conhecimento que se integra no Conhecimento Didáctico do Conteúdo.

Os aspectos do CEC de Esmeralda não encaixam totalmente no modelo inicial de Figueiredo (2005). Este modelo tem uma categoria inicial, 1-Definição, e uma categoria final, 5-Aplicações Externas, que se pode ajustar à programação que Esmeralda seguiu nas aulas que foram gravadas. No entanto, se observarmos os quadros de frequências absolutas totais nas diversas categorias (cf. Cap. V, 2.1), vê-se que existem muitos exemplos de 3ª categoria (esclarecimento de dúvidas e contornos), mais que em qualquer das outras. Por outras palavras, o trabalho com uns exemplos – sejam de 2ª Categoria, sejam já da 4ª ou da 5ª – provoca o surgimento de dúvidas sobre o conceito, o que provoca um regresso a exemplos com objectivos próprios da 3ª categoria. Assim, o que parecia ser o final de um percurso, com exemplos da 5ª categoria, transforma-se num renovar de exemplos da 3ª Categoria onde qualquer aspecto do CEC pode fazer a sua aparição.

Esta constatação faz repensar o modelo, deixando de ter um início e um final, para passar a ter um ciclo entre as 4ª e 5ª categorias e, de novo, a terceira categoria. É em todo este processo que se pode observar o CEC do professor.

Categorias considerando o **OBJECTIVO** do uso de Exemplos (Figueiredo, 2005):

- 1ª Categoria (Definição)
- 2ª Categoria (Representação)
- 3ª Categoria (Características)
- 4ª Categoria (Aplic. Internas)
- 5ª Categoria (Aplic. Externas)

ASPECTOS do Conhecimento Exemplificativo do Conteúdo:

- Introdução do Conteúdo Matemático
- Variação
- Espaço de Exemplos
- Aprofundamento Conceptual
- Transparência
- Grau de Planificacão

Figura 35: Objectivos e Aspectos do uso de exemplos

No modelo apresentado na figura 35 pode perceber-se como se conjugam as categorias relativas ao objectivo da utilização dos exemplos e os aspectos relativos ao CEC.

Enquanto observámos as aulas de Esmeralda pudemos observar esta forma de utilizar os exemplos para ensinar o conceito de função: Introduzir o conceito e respectiva definição; dar oportunidade aos alunos de trabalhar o conceito através dos primeiros exemplos para que se apercebam dos contornos do conceito e de aparecerem as primeiras dúvidas; uso de exemplos para o esclarecimento das dúvidas; aplicar a outras situações (da Matemática, das outras ciências ou da vida real) onde podem surgir novas dúvidas; o que promove o regresso a exemplos que possam esclarecer as dúvidas. Foi com este processo que Esmeralda ajudou os seus alunos a construir o conceito de função e, por sua vez, foi com ele que se pôde observar o conhecimento didáctico do conteúdo evidenciado por Esmeralda através do sistema de categorias de Chick (2007).

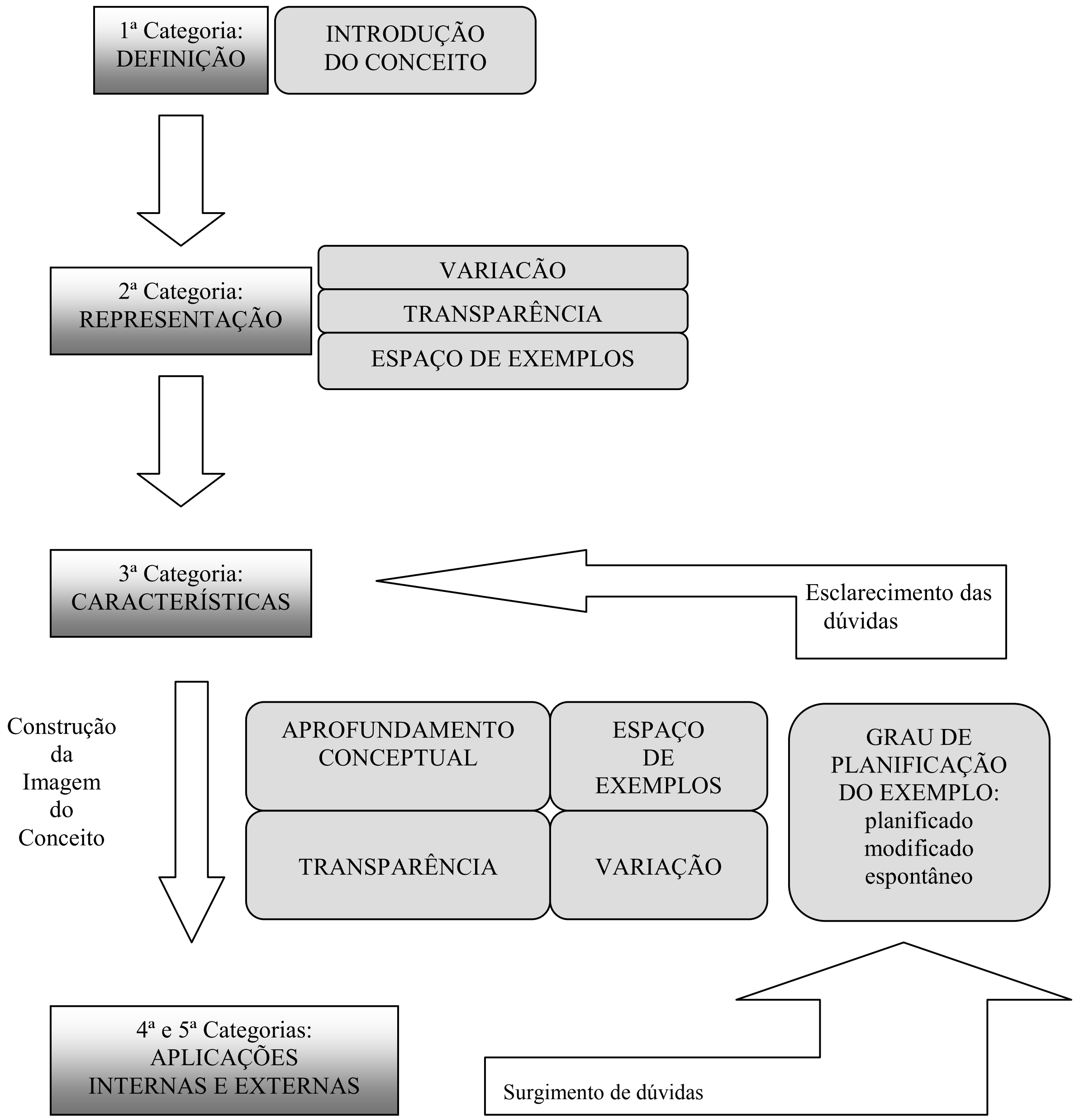


Figura 35: O CEC e os objectivos do uso dos exemplos

Esta forma de utilizar os exemplos, com as suas características e com os seus objectivos, integra-se dentro do CDC do professor. Na categorização de Chick (2007) o uso de exemplos tem a sua categoria própria, "Conhecimento de Exemplos" integrada no grupo "Claramente CDC" e que se torna evidente quando o professor "Usa um…"

… no entanto, por tudo o que se observou, analisou e escreveu, julgamos que o Conhecimento Exemplificativo do Conteúdo é bastante mais do que *usar um exemplo*.

VII CONCLUSÕES E IMPLICAÇÕES

O tema da exemplificação como parte do conhecimento do professor surgiu-nos como subproduto da observação de estudantes para professores. No âmbito da formação inicial de professores, particularmente na observação de aulas, os exemplos que os professores inexperientes apresentam aos alunos e a forma como ensinam com esses exemplos é objecto de análise e de profunda reflexão entre todos os protagonistas na formação de professores, os estudantes para professores e os seus tutores. No sistema de ensino português são designados por professores estagiários e por professores orientadores. Foi com o aprofundamento na forma de exemplificar dos professores estagiários, no âmbito da obtenção do Diploma de Estudios Avanzados entre 2003 e 2005, que se iniciou todo um trabalho de investigação sobre a escolha e uso dos exemplos como parte do conhecimento do professor. Na dissertação de DEA elaborada por Figueiredo (2005) já existem algumas conclusões e sugestões sobre este assunto, embora estejam todas ancoradas na análise dos exemplos de quatro professores de matemática sem experiência. Dando seguimento àquele estudo iniciou-se um outro no ano de 2006 em que o informante é uma professora de matemática com 10 anos de experiência e do qual se dará conhecimento neste capítulo das conclusões a que se chegaram.

Ao longo destes seis anos levantaram-se algumas questões sobre a escolha e o uso de exemplos nas aulas de Matemática, no que se prende com a experiencia do professor e, consequentemente, como a exemplificação se relaciona com o conhecimento do professor. Especificamente, com o seu conhecimento didáctico do conteúdo. Assim, as conclusões estão relacionadas com todas essas questões e que se condensaram nas linhas onde se expôs o interesse e os objectivos desta investigação. De uma forma mais aprofundada, as questões referidas foram apontadas no enquadramento teórico, tratadas na apresentação dos resultados e discutidas posteriormente.

No que respeita á metodologia seguida, não se utilizou o esquema mais clássico que consiste na apresentação de um questionário e da subsequente entrevista à professora, com vista a matizar aspectos do seu conhecimento. Aliás, a entrevista realizou-se anteriormente no intuito de se recolher primeiro as concepções declaradas quanto à escolha e papel dos exemplos. Depois, pela análise da prática, pudemos analisar o uso e o papel real dos exemplos no processo de ensino de Esmeralda.

Os dois instrumentos de análise permitiram obter os resultados ligados aos objectivos do estudo que dependiam directamente deles. São os objectivos que dependem directamente da análise dos exemplos e do conhecimento da professora que se observa através deles. Além disso, também, permitiram obter os elementos necessários à construção do perfil da professora Esmeralda.

As conclusões não fazem qualquer avaliação do trabalho da professora, não se concorda ou discorda da sua escolha e uso dos exemplos de uma forma abrangente, não se fazem considerações valorativas sobre o seu conhecimento didáctico do conteúdo e, sobre tudo, não se avaliam as capacidades da professora. As conclusões que se apresentam incidem sobre aspectos da exemplificação em geral, da sua relação com o conhecimento do professor que se mobiliza para tornar a exemplificação num instrumento de ensino eficaz e de como pudemos constatar todos esses aspectos na exemplificação da professora Esmeralda em particular.

Não se pretendeu fazer qualquer tipo de generalização. O que se ambicionou foi aplicar no terreno, num estudo de caso, os aspectos sobre a exemplificação contidos em toda a bibliografia que pudemos recolher, reunir e relacionar. Para que isto fosse possível, foi necessário fazer uma revisão exaustiva da bibliografia que suporta a teorização do exemplo como ferramenta de uso quotidiano de qualquer professor de matemática. Esta revisão bibliográfica também inclui muitos aspectos sobre o conhecimento do professor e sobre o conceito de função. Integrando todos estes elementos, que estavam dispersos ou que são de natureza díspar, foi possível conceber instrumentos de análise capazes de produzir a descrição do conhecimento de Esmeralda e da prática de ensino que ele determina, através da análise dos exemplos que ela propôs aos seus alunos.

Recorde-se que as razões que nos compeliram a realizar este trabalho prendem-se com questões relativas ao conhecimento do professor e de como a aplicação diária desse conhecimento se traduz em aprendizagens dos alunos. O presente caso incide no conhecimento didáctico da matemática, dissecando um só tema de reconhecida importância – as funções – pela utilização de um meio que, sendo tão comum, não pode correr o risco de ser banalizado – o exemplo. Assim, dirigimos ao exemplo e ao seu uso um olhar atento, um olhar divergente daquele que tende a ser indiferente por o exemplo ser algo diário e corriqueiro. É justamente a qualidade diária e persistente do uso do exemplo que o torna digno de um olhar cuidado, particular e especial. Se o tema do conhecimento do professor ainda é um dos mais abordados e actuais em investigação sobre educação matemática, a escolha e uso dos exemplos como elemento deste conhecimento é um assunto recente e que ainda apresenta um vasto terreno a explorar e descobrir.

Pela nossa parte, tal como justificámos anteriormente, cingimos o nosso interesse aos seguintes objectivos:

- Fazer uma revisão das investigações existentes sobre a exemplificação que os professores aplicam nas suas aulas.
- Descrever a natureza dos exemplos em função do seu papel na aprendizagem do conceito de função.

- Estudar aspectos do Conhecimento Didáctico do Conteúdo através dos exemplos.
- Avaliar as potencialidades da exemplificação do professor na caracterização do seu conhecimento profissional.
- Obter um instrumento de análise da criação, escolha e uso dos exemplos pelo professor.
- Estruturar um perfil do professor baseado na sua exemplificação.
- Apresentar sugestões concretas para a formação contínua de professores.

Cada um destes objectivos será indicado individualmente em itálico e antecederá as conclusões que lhe dizem directamente respeito.

1. O Conhecimento Didáctico do Conteúdo de Esmeralda quando ensina o conceito de função

Estudar aspectos do Conhecimento Didáctico do Conteúdo através dos exemplos.
O segundo instrumento de análise (Chick, 2007) que aplicámos mostrou-se eficaz e adequado no que respeita à análise do conhecimento que a professora emprega no ensino do conceito de função. Recordemos que este instrumento foi utilizado sem qualquer adaptação a este estudo e que, segundo os seus autores (Chich, Baker, Pham e Cheng, 2006, Chich, 2007; Chick e Harris, 2007), era aconselhável a sua aplicação em situação de aula e sobre conteúdos diferentes daqueles que foram por eles utilizados, de forma a serem encontradas carências ou aspectos a melhorar. E assim sucedeu. Em conformidade com a discussão dos resultados, foi possível melhorar um instrumento que de si já se mostrou muito capaz no trabalho para o qual foi idealizado.
As novas categorias que identificámos, e que devem ser introduzidas no esquema de Chick e colegas, relacionam-se com o rigor de linguagem e com o controlo em tempo real das aprendizagens dos alunos que qualquer professor de matemática deve cuidar na sua actividade de ensino. Estes dois elementos, um marcadamente sobre conteúdo e o outro claramente sobre didáctica, incluem-se sem dúvida no conhecimento didáctico do conteúdo da professora que observámos, sendo que as evidências destes dois aspectos puderam ser bem observadas enquanto os exemplos eram trabalhados.
Contudo, mais importante do que as alterações que introduzimos, deve ser evidenciada a forma como este instrumento permite uma simbiose entre a exemplificação e o conhecimento didáctico do conteúdo. Os exemplos revelaram ser um excelente veículo do conhecimento didáctico do conteúdo do professor e o seu uso espelha esse conhecimento que, através da categorização que integra, permite conhecer detalhadamente o professor ao qual ele seja aplicado, permitindo identificar matizes daquele conhecimento próprios de cada professor que se observe. No caso de Esmeralda, ele permitiu elaborar uma imagem que revela bastante da professora e do seu conhecimento enquanto ensinou o conceito de função. Através das categorias que mais (ou menos) se observaram, foi possível elaborar uma imagem com pormenores bem definidos nas três perspectivas incluídas neste instrumento de análise, relativamente ao que é *claramente conhecimento didáctico do conteúdo,* ao que é *conhecimento do conteúdo num contexto pedagógico* e, finalmente, o que é *conhecimento pedagógico num contexto de conteúdo*.

2. O uso dos exemplos quando Esmeralda ensina o conceito de função

Fazer uma revisão das investigações existentes sobre a exemplificação que os professores aplicam nas suas aulas.

Da revisão biográfica foi possível retirar resultados de outros estudos que se revelaram muito importantes para esta investigação. Estudar a acção de escolher um exemplo e trabalhá-lo com os alunos não é um processo que tenha sido alvo da atenção de muitos investigadores. É certo que existe já um número considerável de estudos no âmbito de temas que se relacionam com a exemplificação, tais como o conflito cognitivo, a evolução conceptual, a aquisição e estruturação de conceitos e a aprendizagem do conceito de função, mas sobre a escolha e uso de exemplos o número de investigadores é bastante reduzido. Ainda assim, o material teórico e prático que foi acumulado permitiu fazer frente à tarefa que empreendemos e constituir uma base teórica suficientemente sólida onde basear e construir o nosso trabalho.

O material teórico-prático que se reuniu e integrou alude a temas que, dentro da exemplificação do professor de matemática, abrange um leque bastante alargado de subtemas. Os assuntos tratados na bibliografia, dentro do tema da exemplificação, incidem sobre a escolha de exemplos, a variação, a transparência, os espaços de exemplos (do professor e do aluno), a criação de exemplos (pelo professor e pelo aluno), os exemplos resolvidos, entre outros. Todos eles foram relacionados e estruturados de forma a originar um corpo teórico coerente capaz de enquadrar a prática do professor na aptidão de exemplificar.

Ora, foi toda esta recompilação teórica e prática que permitiu alcançar o objectivo que segue e que, a nosso ver, constitui um dos mais importantes deste trabalho. A recolha bibliográfica capacitou-nos com uma visão muito mais abrangente do que constitui a exemplificação do professor e que permitiu, por um lado, os ajustamentos no instrumento de análise que já possuíamos e, por outro, criar um novo instrumento de análise global das escolhas dos exemplos e do seu uso.

Obter um instrumento de análise da criação, escolha e uso dos exemplos pelo professor:

(I) Ajustamento de um instrumento de análise da criação, escolha e uso dos exemplos pelo professor quanto ao objectivo

No início da investigação foi sentida a necessidade de modificar o instrumento de análise dos exemplos quanto ao objectivo (Figueiredo, 2005; Figueiredo, Blanco e Contreras, 2006, 2007). Aquela categorização revelou-se, à altura, suficiente para analisar a exemplificação de quatro estudantes para professores, mas no caso de Esmeralda apresentava limitações ao nível da natureza do exemplo – conceito, processo ou teorema – e do grau de planificação. Colmatadas as lacunas, este primeiro instrumento de análise cumpriu o objectivo que directamente lhe dizia respeito.

Este primeiro instrumento de análise permitiu elaborar um perfil da professora quanto ao objectivo com que usa os exemplos, o seu grau de planeamento e a frequência com recorre a sequências de exemplos ou a exemplos singulares.

No que diz respeito ao objectivo do uso dos exemplos Esmeralda declara na entrevista que a exemplificação se destina sobretudo a que os alunos aprofundem os conceitos.

Segundo a professora, podemos utilizá-los também para introduzir os conceitos, mas a importância que atribui a este fim é menor. Esmeralda refere-se mais vezes ao papel que os exemplos têm no esclarecimento de dúvidas e para preparar os alunos para situações de teste e de exame. Estas declarações são coerentes com a prática da professora nas aulas que gravámos. A aplicação do primeiro instrumento de análise mostra que, no início do tema das funções, os exemplos que propôs aos seus alunos enquadravam-se nas duas primeiras categorias, depois, à medida que progredia no tema verificou-se que o uso de exemplos da 3ª categoria se tornou predominante.
Através da aplicação deste instrumento pudemos observar que, na segunda metade da unidade didáctica das funções, existe uma coexistência entre exemplos da 3ª categoria e exemplos das 4ª e 5ª categorias. A rotatividade entre exemplos destas categorias determinou a alteração do modelo de aquisição e aprofundamento do conceito de função proposto em Figueiredo (2005) e Figueiredo, Blanco e Contreras (2006, 2007) como se explicou no Capítulo IV, onde se faz a discussão de resultados.

(II) Construção de um instrumento de análise global da criação, escolha e uso dos exemplos pelo professor
No entanto, para além da modificação de um modelo existente para obtenção do primeiro instrumento de análise, esta investigação permitiu conceber um modelo teórico composto por uma série de categorias que serve para caracterizar a escolha e o uso dos exemplos pelos professores de forma abrangente, e não apenas quanto ao objectivo. Este modelo foi concebido através da integração, estruturação e categorização de toda a informação disponível, todavia dispersa, sobre a utilização de exemplos e abarca quase toda a teoria e resultados que se recolheram. Este novo modelo tem como função descrever aquilo que, no capítulo onde se discutem os resultados, se designou por Conhecimento Exemplificativo do Conteúdo. Este conhecimento é um conhecimento extremamente específico e que faz parte do conhecimento do professor, mas que envolve apenas o conhecimento que o professor mobiliza e emprega para escolher e utilizar eficazmente os exemplos no ensino da matemática.

Descrever a natureza dos exemplos em função do seu papel na aprendizagem do conceito de função.
Esta descrição conseguiu-se através do primeiro instrumento de análise e, também, através dos casos tipificados na bibliografia. No caso da escolha e uso dos exemplos por parte de Esmeralda, podemos discriminar a natureza dos exemplos por intermédio do objectivo que perseguem e a forma como cumprem esse objectivo. A distinção do papel do exemplo é melhor entendida pela tipificação apresentada no enquadramento teórico deste trabalho. Dois exemplos podem diferir pelo objectivo que perseguem, neste caso a sua caracterização é obtida pelo primeiro instrumento de análise, a natureza de um pode promover a prática no cálculo (2ª categoria) e outro pode servir para esclarecer a dúvida de um aluno (3ª categoria). Contudo, dois exemplos que tenham como objectivo esclarecer uma dúvida do aluno, por isso se incluem na mesma categoria, podem ter naturezas diferentes segundo casos típicos diferentes. Assim, um *Exemplo Ponte* (cf. Cap. II, 4.7.6) esclarece um aluno através da superação de um conflito cognitivo e, por seu lado, um *Não-Exemplo* (cf. Cap. II, 4.1 e 4.2) estabelece os limites de uma dada definição. Ambos os casos perseguem o mesmo objectivo, por isso se incluem ambos na

3ª categoria do primeiro instrumento de análise, mas são totalmente diferentes na natureza, porque se destinam a situações diferentes.
Todos os exemplos que Esmeralda usou puderam ser descritos quanto ao objectivo através do primeiro instrumento de análise e, por sua vez, pudemos encontrar nos 60 episódios exemplos que materializaram todos os casos típicos descritos na bibliografia. Por isso, por se compreender o papel que dado exemplo proposto por Esmeralda teve no ensino do conceito de função, foi possível indicar o objectivo de cada exemplo e a sua natureza. No fundo a natureza dos exemplos que observámos na prática de ensino da professora.

Avaliar as potencialidades da exemplificação do professor na caracterização do seu conhecimento profissional.
As potencialidades são várias. Através do primeiro instrumento de análise e do modelo que caracteriza o que se designou por Conhecimento Exemplificativo do Conteúdo (CEC), já que integra os aspectos teóricos e práticos descritos na bibliografia, pode-se enquadrar teoricamente e entender melhor a exemplificação de qualquer professor de matemática.
É espectável que a exemplificação de um professor espelhe toda a sua experiência e capacidades que foi adquirindo ao longo da sua vida profissional; por isso, deve ser pela escolha e uso dos exemplos que o seu conhecimento enquanto professor deve ser analisado e caracterizado. No caso de Esmeralda isso pôde ser feito com o material teórico-prático disponível, pudemos encontrar na prática de Esmeralda a totalidade dos casos tipificados na bibliografia e, com isso, o seu conhecimento profissional pode ser caracterizado no que respeita ao processo de exemplificação.
Assumindo que existe uma relação entre o conhecimento do professor e a sua prática, de tal forma que o conhecimento do professor se manifesta na sua prática, então a caracterização do seu conhecimento obtém-se pela análise da sua prática. As potencialidades da exemplificação têm aí um papel primordial, sendo que esse papel se observa a vários níveis:

- O grau de espontaneidade dos exemplos. A exemplificação espontânea que o professor exibe é um bom indicador do seu conhecimento do conteúdo. Somente um conhecimento sólido do conteúdo disciplinar permite ao professor apresentar exemplos, contra-exemplos ou não-exemplos adequados à situação de forma espontânea.
- O grau de planeamento dos exemplos e o objectivo da escolha/criação. A criação e a escolha de exemplos de forma planeada e o objectivo pretendido revela mais sobre o conhecimento pedagógico do professor, através deles podemos avaliar as suas crenças e as suas concepções no âmbito da pedagogia e da didáctica.
- A forma de usar os exemplos é esclarecedora quanto ao conhecimento didáctico do conteúdo do professor. A diversidade de situações tipificadas encontradas na sua prática, o uso da variação, a aplicação de exemplos transparentes, a ampliação dos espaços de exemplos dos alunos, a promoção de conflitos cognitivos e consequente desenvolvimento conceptual, entre tantos outros aspectos da exemplificação, são espelho do conhecimento que o professor adquiriu sobre como ensinar e a melhor maneira de o fazer.

3. A relação entre o uso dos exemplos e o Conhecimento Didáctico do Conteúdo quando Esmeralda ensina o conceito de função

Estruturar um perfil do professor baseado na sua exemplificação.
As opções metodológicas, os dois instrumentos de análise e o enquadramento teórico adoptados aplicados à informação disponível produziram um perfil da professora Esmeralda de duas faces. Uma que se refere à escolha e uso dos exemplos e outra que se refere ao seu conhecimento didáctico do conteúdo. Mas não se interprete esta dualidade como uma divisão, no fundo são os dois lados do mesmo perfil.
Todo o Capítulo V, Apresentação dos Resultados, pode ser visto como o perfil de Esmeralda enquanto professora que ensina o tema "Funções" a alunos de 15-16 anos. A relação entre as duas faces deste perfil quase que pode ser considerado de equivalência; se por um lado o uso dos exemplos implica um determinado conhecimento didáctico do conteúdo, também o conhecimento didáctico do conteúdo implicará uma determinada forma de exemplificar. Assim, basta ler aquele capítulo, não podemos afirmar que seja a exemplificação que espelha o conhecimento didáctico do conteúdo nem que seja o conhecimento didáctico do conteúdo que determina uma determinada forma de propor e aplicar os exemplos aos alunos. O que podemos retirar do quinto capítulo, e da discussão desses resultados que se seguiu, é que o perfil de Esmeralda não é uma das faces ou outra, mas sim a relação entre as duas e a sua complementaridade.
Este perfil que se delineou assenta na exemplificação do conceito de função. É um perfil bastante objectivo visto que se pode focalizar a atenção na escolha e no uso do exemplo em aula, que é algo bastante objectivo e tangível e evita a dispersão da atenção do investigador por outros aspectos da aula que são, porventura, menos importantes. Essa objectividade permite concluir que a relação entre a exemplificação e o conhecimento didáctico do conteúdo é um *saber como usar os exemplos*, e este saber chamou-se no sexto capítulo o conhecimento exemplificativo do conteúdo; o perfil de Esmeralda que se obteve relaciona-se fortemente com ele.

As concepções de Esmeralda sobre o uso dos exemplos declaradas na entrevista são coerentes com o uso que deu aos exemplos nas aulas, para ensinar o conceito de função aos seus alunos. Os traços mais marcantes do perfil de Esmeralda são sintetizados nos seguintes pontos:

- Assenta a sua forma de exemplificar em casos que se integram na 3ª categoria, Esclarecimento e Aprofundamento, e os exemplos das outras categorias são usados para desencadear casos desta categoria.
- Identifica a importância do conhecimento didáctico do conteúdo tecnológico no uso dos exemplos e como este conhecimento atravessa todos os âmbitos assinalados do conhecimento sobre o uso dos exemplos.
- A sua exemplificação visa a preparação dos alunos para o exame do final do Ensino Secundário, a entrevista e os episódios têm inúmeras referências ao exame de 12º ano.

4. Implicações desta investigação

Tal como se afirmou, a exemplificação de Esmeralda baseia-se maioritariamente em exemplos que se incluem na 3ª categoria (Esclarecimento e Aprofundamento). Este resultado contrasta com aqueles que foram obtidos em Figueiredo (2005) onde se concluiu que os quatro estudantes para professores usaram, também para exemplificar o conceito de função, fundamentalmente exemplos integrados na 2ª categoria (Abordagem Inicial Autónoma). Dito por outras palavras, a exemplificação dos professores inexperientes promovia a construção do conceito nos alunos com base em exemplos simples e de baixo nível cognitivo, onde o conceito se encontrava fraccionado. Estes professores consideravam que os alunos eram capazes de juntar as partes simples e, com essa soma, obter o todo mais complexo. O número de exemplos da 3ª, 4ª (Aplicações Internas) e da 5ª (Aplicações Externas) categoria era substancialmente inferior ao número de exemplos da 2ª categoria. O mesmo não acontece com a professora Esmeralda, os exemplos de 1ª, 2ª são significativamente menos numerosos (um total de 26), sendo mais numerosos os exemplos de 3ª, 4ª e 5ª categoria (um total de 39). E, dentro dos exemplos destas três últimas categorias, os exemplos da 3ª categoria parecem ter um papel central e centralizador. Os exemplos das outras categorias proporcionam as oportunidades de uso de exemplos da 3ª categoria, aqueles que permitem esclarecer as dúvidas e aprofundar no conceito de função, num processo circular de re-alimentação entre as 3ª, 4ª e 5ª categorias (cf. Cap. VI, 5.). No caso dos estudantes para professores o processo parecia ter um início e um fim ao longo das cinco categorias, começavam nos exemplos da 1ª categoria e acabavam nas de 4ª e 5ª. E uma vez que se começasse a trabalhar com exemplos da 4ª e da 5ª categoria raramente se regressava aos exemplos da 3ª categoria.

Esta diferença de exemplificar entre quatro professores sem experiência e uma professora com dez anos de experiência obriga, obviamente, a pôr as questões:

- "O apoio em exemplos da 2ª categoria para ensinar o conceito de função aconteceu apenas naqueles quatro estudantes para professores? Ou será característico dos professores inexperientes?"
- "O apoio em exemplos da 3ª categoria para ensinar o conceito de função aconteceu apenas nesta professora? Ou será característico dos professores experientes?"

Apresentar sugestões concretas para a formação contínua de professores.
A forma de exemplificar dos quatro professores sem experiência de ensino apoiada em exemplos próprios da 2ª categoria (Figueiredo, 2005; Figueiredo, Blanco e Contreras, 2006, 2007) e a forma de exemplificar da professora Esmeralda apoiada em exemplos característicos da 3ª categoria mostram que existem formas diferentes de usar os exemplos, quando se ensina o conceito de função, no que respeita ao objectivo. Eventualmente, poderão existir outras formas de utilizar os exemplos. O mesmo se poderá dizer sobre a frequência com que se utiliza a Transparência ou a Variação nos exemplos que propomos aos alunos, ou se recorre ao Exemplo Ponte, ou utilizamos qualquer outra forma tipificada de usar os exemplos. Todavia o conhecimento mais

profundo sobre os vários tipos de exemplos, nos objectivos e na natureza, e a forma de exemplificar diferenciada que esse conhecimento pode promover, deve ser objecto de reflexão ao nível da educação matemática e da formação contínua de professores.
Além das implicações ao nível da formação contínua, com a partilha de experiências no âmbito da exemplificação entre professores com graus de experiência diferentes, a reflexão sobre a escolha e uso de exemplos deve ser objecto de reflexão por parte dos professores que se iniciam na carreira (Rowland *et al.*, 2003 a,b,c,d). A escolha e uso dos exemplos é um aspecto fundamental da vida do professor e a evolução deste conhecimento é demasiado importante para ser deixada a cargo do próprio professor, o que dá oportunidade de promoção de trabalho colaborativo entre colegas de uma qualquer escola onde se ensine matemática. A capacidade de bem utilizar os exemplos adquire-se com a prática e é um processo que se prolonga por muito tempo (Zodik e Zaslavsky, 2007b); o que se propõe é que este período de tempo que se demora a conseguir alguma maestria seja encurtado por intermédio de uma formação contínua focalizada neste assunto. Seria benéfica a inclusão do Conhecimento Exemplificativo do Conteúdo no âmbito do conhecimento do professor, se possível com um certo grau de identidade própria pois contém um número significativo de aspectos que lhe proporciona coesão, e que deve ser tido em boa conta no trabalho diário com os conceitos matemáticos.

Em última análise, pretende-se a consciencialização do professor sobre a importância da exemplificação na sua prática de ensino como instrumento chave de trabalho quotidiano. É por ser tão utilizado quotidianamente que o papel da exemplificação corre o risco de se banalizar e, por isso, não se lhe dar a atenção que ele merece.

5. Contribuições desta investigação à Educação Matemática

Chegados ao fim do trabalho, será importante salientar quais as contribuições originais que esta investigação produziu. Estas contribuições incluem-se, fundamentalmente, no âmbito do conhecimento do professor. Com elas, é possível entender melhor um conhecimento muito específico que se vincula com o trabalho quotidiano do professor de matemática: o uso dos exemplos e a sua escolha ou a sua criação. Esta linha de investigação é bastante recente e só a partir do ano de 2006 é que se constituiu como uma teoria independente com características próprias. No presente, pode-se assistir a uma integração e sistematização dos resultados que têm sido obtidos de uma forma algo dispersa. A nossa contribuição é, em larga medida, neste sentido.

Como primeira contribuição deixamos a prova de que é possível construir um perfil de uma professora no que se refere à sua forma de escolher, criar e usar os exemplos. Com os instrumentos de análise que se aplicaram foi possível observar aspectos da prática e do conhecimento da professora neste domínio em particular e, com isso, dar uma outra perspectiva àquele que é um conhecimento particular do professor.
A existência de um instrumento capaz de produzir um perfil do professor quanto ao seu conhecimento exemplificativo do conteúdo é importante, no sentido em que se torna possível melhorar o seu conhecimento. Sendo importante obter este tipo de perfil, tal

não deve ser destinado a uma catalogação ou forma de avaliação, antes como elemento de desenvolvimento e de melhoria profissional.

Ao longo da investigação pudemo-nos aperceber de como alguns aspectos da exemplificação estavam intimamente ligados. É o caso da Transparência e da Variação. Como pôde ser lido no capítulo referente à discussão dos resultados, Esmeralda usou estes dois aspectos de uma forma concomitante. Com recurso à variação contida nas sequências de exemplos levou os seus alunos à generalidade que a transparência encerra.
A utilização simultânea daqueles dois aspectos visa a generalização e a abstracção do conceito de função, promovendo neles um aprofundamento no conceito e a construção e estruturação da imagem do conceito de função na mesma medida em que são capazes de ampliar os seus espaços de exemplos pessoais.

A recolha bibliográfica e a forma como a utilizamos para enquadrar o conhecimento de Esmeralda permitiu-nos, também, contribuir para o aperfeiçoamento de dois instrumentos de análise já existentes. Um deles ao nível da constatação do objectivo da escolha/criação de exemplos e o seu uso e, o outro, ao nível da compreensão do conhecimento didáctico do conteúdo de um professor enquanto usa, justamente, os exemplos.

A aplicação de toda a teoria e resultados sobre exemplificação que foi mobilizada para o caso da professora Esmeralda fomentou um enquadramento teórico bem estruturado e coerente. A constatação deste facto motivou uma real integração dos aspectos relativos à exemplificação que pudemos identificar na prática da professora e, desse modo, associá-los num único instrumento que possa ser aplicado à forma como qualquer outro professor usa os exemplos. Este instrumento está desenhado especificamente para o conhecimento que os professores colocam no terreno e que lhes permite escolher, criar e utilizar os exemplos. A este conhecimento chamámos Conhecimento Exemplificativo do Conteúdo do professor e integrámo-lo no Conhecimento Didáctico do Conteúdo.

No que concerne à transparência, a través da análise do uso dos exemplos pela professora, foi possível identificar duas particularidades deste aspecto que alguns exemplos detêm. Assim, porque foi notório em vários exemplos, vimos como Esmeralda e os seus alunos podiam determinar de forma imediata aspectos do conceito de função através das equações das funções. Depois, também pudemos observar que, através dos elementos imediatamente determinados, havia outros que podiam ser determinados através deles. Estas duas constatações permitiram-nos identificar dois tipos de transparência diferentes, a Transparência Imediata e a Transparência Mediata. A primeira permite determinar, directamente, certos elementos do conceito e a outra permite determinar, de forma indirecta, outros elementos do conceito.

De forma muito breve chamámos à colação dois aspectos do dia-a-dia do professor e que ainda não estão integrados no que usualmente se designa como exemplificação do professor. Outra contribuição deste estudo foi, precisamente, destacar a importância que a Avaliação das aprendizagens e o Conhecimento Didáctico do Conteúdo Tecnológico têm no âmbito da escolha e uso dos exemplos. A forma como os exemplos são escolhidos no âmbito da avaliação das aprendizagens, bem como a escolha e uso de exemplos que incluem uma componente TIC, são aspectos da exemplificação que merecem ser estudados em futuros estudos.

6. Limitações e continuidade

Este trabalho, tendo as características de um estudo de caso, pretendeu unicamente dar conta da forma de exemplificar de uma professora quando ensina o conceito de função a alunos de 15-16 anos. Assim sendo, não se pode retirar qualquer tipo de generalização. Tendo-se explicitado anteriormente a diferença de exemplificar entre Esmeralda e quatro estudantes para professores, não pretendemos afirmar que todos os professores inexperientes exemplificam da mesma forma que eles nem que todos os professores com experiência exemplificam da mesma forma que a professora Esmeralda. As limitações do estudo que impedem estas generalizações – o estabelecimento de padrões – são óbvias e não carecem de grandes explicações. As limitações situam-se ao nível do número de informantes (apenas um), a quantidade de informação que se recolheu, a não aplicação dos mesmos instrumentos de análise a mais que um professor, a complexidade do tema considerando o número de variáveis, o primeiro instrumento de análise que aplicámos à professora Esmeralda não ter sido exactamente o mesmo que aplicámos aos quatro estudantes para professores e o limite de tempo estabelecido para a conclusão da redacção desta tese.

Como se constata, existe bastante trabalho ainda por realizar. Desde logo a aplicação dos dois instrumentos de análise a outros professores e, mais tarde, verificar a sua adequação a outros conceitos matemáticos que não o conceito de função. Aplicar, também, o instrumento que se concebeu para caracterização do Conhecimento Exemplificativo do Conteúdo. O conceito de Conhecimento Exemplificativo do Conteúdo e o instrumento que se concebeu para o caracterizar são os aspectos originais mais importantes desta investigação e são, portanto, os resultados que, a serem levados para o terreno, poderiam suscitar mais interesse.
Propõe-se mais investigação de forma a averiguar se o padrão que se descreveu entre professores inexperientes e professores mais experientes se verifica na prática. Esse estudo, com um número significativo de professores inexperientes e experientes, afigura-se muito difícil pelos meios que teria que envolver. Ainda assim, é possível fazê-lo contando com o envolvimento de uma universidade que faça formação inicial de professores de matemática, no que respeita aos professores sem experiência.

Como dissemos, utilização dos exemplos ao nível da avaliação das aprendizagens dos alunos é uma linha que merece ser explorada. A ligação entre a Exemplificação e a Avaliação é um aspecto da educação matemática que se impôs neste trabalho mas que, infelizmente, não pudemos dar seguimento. O aspecto mais interessante que se percebe nesta relação entre a exemplificação e a avaliação radica no facto de que não há diferença entre um exemplo e uma questão de exame, a não ser na situação em que o aluno se encontra. Deixamos como assunto a ser investigado a ligação que existe entre os exemplos que são escolhidos para ensinar os alunos e aqueles que são utilizados para os avaliar, assim como se essa ligação influi tanto na forma de ensinar do professor como na forma de aprender dos alunos.

O conhecimento didáctico sobre tecnologia no âmbito da exemplificação foi aflorado mas necessita ser aprofundado. A relação entre a Exemplificação e as Tecnologias de Informação e Comunicação é outra linha a explorar, cada vez mais o trabalho com exemplos é feito com recurso à calculadora gráfica, computadores e software específico. Investigar situações de ensino onde os exemplos integram actividades com software educativo tais como o GeoGebra®, o Geometer's Sketchpad® ou as calculadoras gráficas são totalmente novas e, para os tempos que se avizinham, fundamentais no ensino e na aprendizagem da matemática.

A exemplificação, como facilmente se reconhece por tudo o que se viu, é um campo deveras amplo e ainda com muito que explorar. Com este trabalho contribuímos, de alguma forma, com aspectos pouco conhecidos e que ainda não obtiveram grande notoriedade na investigação em educação matemática.
Pela nossa parte podemos testemunhar o interesse que nos despertou.
Esperamos ter despertado, também, alguma curiosidade pelo tema a todos aqueles que connosco tomaram conhecimento do que é criar e usar um exemplo e do muito que isso envolve.

> "***Nós argumentamos que dar atenção aos exemplos proporciona uma perspectiva simultaneamente útil na prática e teoricamente importante na criação de actividades lectivas, na análise da prática dos alunos e no desenvolvimento profissional dos professores de matemática.***"
>
> (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson e Zaslavsky, 2006)

REFERÊNCIAS

Abdul-Rahman, S. (2006). Probing Understanding Through Example Construction: The Case of Integration. In Hewitt, D. (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *26*(2).

Abell, S. K. (2007). Research on science teacher knowledge. In S. K. Abell & N. G. Lederman (Eds.), *Handbook of research on science education* (pp. 1105-1149). Mahwah, New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum.

Acevedo, J. A. (2009). Conocimiento Didáctico del Contenido para la enseñanza de la naturaleza de la ciencia (i): el marco teórico. *Revista Eureka Enseñanza Divulgación y Ciencia, 6*(1), 21-46.

Akkoc, H., & Tall, D. (2002). The simplicity, complexity and complication of the function concept. In Anne D. Cockburn & Elena Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 2, pp. 25-32). University of East Anglia. Norwich, UK: PME.

Akkoç, H., & Tall, D. (2005). A mismatch between curriculum design and student learning: the case of the function concept. In D. Hewitt & A. Noyes (Eds.), *Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education* (pp. 1-8). University of Warwick. England.

Alcock, L. (2006). Uses of example objects in proving. In M. J. Høines & A. B. Fugelstad, (Eds.) *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 2, pp. 17-24). Bergen, Norway: Bergen University College. PME.

Alcock, L., & Simpson, A. (2002). Two components in Learning to Reason Using Definitions. *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics*. Hersonissos, Crete.

Al-Murani, T. (2006). Teachers' awareness of dimensions of variation: A mathematics intervention project. *Proceedings of the 26th Conference of the British Society of Research in Learning Mathematics* (Volume 1, pp. 1-6). Warwick, U.K., BSRLM.

Andrews, P., Carrillo, J., & Climent, N. (2005). Proyecto "METE" (mathematics education traditions of Europe): el foco matemático. In A. Maz, B. Gómez & M. Torralbo (Eds.) *Investigación en Educación Matemática* (pp. 131-137). IX Simposio de la SEIEM. Córdoba, España: Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Asghari, A. (2007). Examples, a missing link. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.), *Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 2, pp. 25-32). Seoul, Korea: *PME*.

Askew, M., & Wiliam, D. (1995). *Recent research in mathematics education*. London, England: HMSO.

Askew, M., Brown, M., Rhodes, V., Johnson, D., & Wiliam, D. (1997). *Effective teachers of numeracy. Final report*. King's College, London.

Atkinson, R., Derry, S., Renkl, A., & Wortham, D. (2000). Learning from Examples: Instructional principles from the worked examples research. *Review of Educational Research, 70*(2), 181-214.

Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación. *Uno, 4*, 53-61.

Azcárate, C. (1997). Si el eje de coordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *Suma, 25*, 23-30.

Baker, M., & Chick, H. (2006). Pedagogical Content Knowledge for Teaching Primary Mathematics: A case Study of Two Teachers. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, Cultures and Learning Spaces, Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 60-67). Sydney, Australia: MERGA.

Balacheff, N. (1988). Aspects of Proof in Pupils' Practice of School Mathematics. In D. Pimm, (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2),132-144.

Ball, D. L. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject-matter knowledge part of the equation. In J. Brophy (Ed.), *Advances in Research on teaching* (Volume 2, pp. 1-48). Connecticut, USA: Jai Press Inc.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*(3), 241-247.

Ball, D., Bass, H., Sleep, L., & Thames, M. (2005). *A Theory of mathematical knowledge for teaching.* Work-Session presented at the 15th ICMI study conference: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. Águas de Lindóia, Brasil.

Barnes, M. (1988) Understanding the Function Concept: Some Results of Interviews with Secondary and Tertiary Students. *Research on Mathematics Education in Australia*, 24-33.

Baumert, J., Blum, W., & Neubrand, M. (2004). Drawing the lessons from PISA-2000. Long term research implications: Gaining a better understanding of the relationship between system inputs and learning outcomes by assessing instructional and learning processes as mediating factors. In D. Lenzen, J. Baumert, R. Watermann, & U. Trautwein (Eds.), *PISA und die Konsequenzen für die erziehungswissenschaftliche Forschung,* (Suppl. 3-2004, pp. 143-157).

Behr, M., & Harel, G. (1990). Students' errors, misconceptions, and cognitive conflict in application of procedures. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 12*(3-4), 75-84.

Bereiter, C., & Scardamalia, M. (1987). An attainable version of high literacy: Approaches to teaching higher-order skills in reading and writing. *Curriculum Inquiry*, *17*(1), 9-30.

Bills, L. (1995). Teachers' use of generic examples. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 15*(1), 5-8.

Bills, L. (1996). The Use of Examples in the Teaching and Learning of Mathematics. In Puig L. & Gutierres A. (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 2, pp. 81–88). Valencia, Spain: PME.

Bills, L., & Rowland, T. (1999). Examples, Generalisation and Proof. In L. Brown (Ed.) *Making Meaning in Mathematics. Advances in Mathematics Education 1* (pp. 103-116). York, UK: QED.

Bills, C., & Bills, L. (2005). Experienced and Novice Teachers' Choice of Examples. In Clarkson, P., Downton, A., Gronn, D., Horne, M., McDonough, A., Pierce, R. & Roche, A (Eds.), *Proceedings of Twenty eighth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Volume 1, pp. 146-153). Melbourne, Australia: MERGA Inc.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in Mathematics Education. In J. Novotna, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 1, pp. 126-154). Prague, Czech Republic: PME

Bills, L., & Watson, A. (2008). Editorial introduction. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 77-79.

Blanco, L. J. (2004). Problem solving and the initial practical and theoretical education of teachers in Spain. *Mathematics teacher education & development, 6*, 37-48.

Blanco, L. J., Mellado, V., & Ruiz, C. (1995). Conocimiento didáctico del contenido en matemáticas y ciencias. *Revista de educación*, *307*, 427-446.

Blanco L. J., Figueiredo, C. A., & Contreras, L. C. (2010). The use and classification of examples in learning the concept of function: A case study. In Nata R. V. (Ed.), *Progress in Education 9.* New York, USA: Nova Publishers.

Bolivar, A. (2005). Conocimiento Didáctico del Contenido y didácticas específicas. *Profesorado. Revista de Currículo y formación del profesorado, 9*(2).

Borasi, R. (1984). Some reflections On and Criticisms of the Principle of Learning Concepts by Abstraction. *For the Learning of Mathematics, 4*, 14-18.

Boyer, C. (1974). *História da Matemática*. (Tradução de Elza F. Gomide). São Paulo, Brasil: Edgard Blücher.

Braga, E. (2009). *A compreensão dos conceitos de Função Afim e Quadrática no Ensino Fundamental com recurso da planilha*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Bratina, T. A. (1986). Can your students give examples? *Mathematics Teacher, 79*(7), 524-526.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 247-285.

Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S., Klusmann, U., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Dubberke, T., Jordan, A., Löwen, K., & Tsai, Y.-M. (2006). Die professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften: Konzeptualisierung, Erfassung und Bedeutung für den Unterricht. Eine Zwischenbilanz des COACTIV-Projekts [Mathematical teachers' professional competence: Conceptions, assessment and impact on instruction. Interim results of the COACTIV-Project]. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Eds.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (pp. 54-82). Münster, Deutchland: Waxmann.

Carlson, M., & Oehrtman, M. (2005). Key Aspects of Knowing and Learning the concept of Function. *Mathematical Association of America Research Sampler*, 9.

Carlson, M. P. (1998). A Cross-Sectional Investigation of the Development of the Function Concept. In A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (Volume 7, pp. 114-162). Providence, USA: American Mathematical Association.

Carroll, W. M. (1992). The Use of Worked Examples in Teaching Algebra. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association*. S. Francisco, California, USA.

Carroll, W. M. (1994). Using Worked Examples as Instructional Support in the Algebra Classroom. *Journal of Educational Psychology, 86*(3), 360-367.

Chandler, P., & Sweller, J. (1991). Cognitive Load Theory and the Format of Instruction. *Cognition and lnstruction, 8*, 293-332.

Charles, R. I. (1980). Exemplification and Characterization Moves in the Classroom Teaching of Geometry Concepts. *Journal for Research in Mathematics Education, 11*(1), 10-21.

Chernoff, E. (2006). Examples that change minds. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the Twenty Eighth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 2, pp. 756-758). Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

Chi, M. T. H., Bassok, M. W., Lewis, P., Reiman, P., & Glasser, R. (1989). Self-explanations: How Students Study and Use Examples in Learning to Solve Problems. *Cognitive Science, 13*, 145-182.

Chick, H. (2007). Teaching and Learning by Example. In K. Beswick & J. Watson (Eds.) *Mathematics: Essential Research, Essential Practice.* Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Research Group of Australasia (pp. 3-21). Hobart, Australia: MERGA.

Chick, H.L., Baker, M., Pham, T., & Cheng, H. (2006) Aspects of teachers' pedagogical content knowledge for decimals. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N.Stehlíková (Eds.), *Proc. 30th conference e International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 2, pp. 297-304). Prague, Check Republic: PME.

Chick, H., & Harris, K. (2007). Pedagogical content knowledge and the use of examples for teaching ratio. *AARE Conference-FREEMANTLE, Association for Active Educational Researchers.*

Climent, N., & Carrillo, J. (2007). El uso del video para el análisis de la práctica en entornos colaborativos. *Investigación en la escuela*, *61*, 23-35.

Cochran-Smith, M., & Lytle, S. L. (1990). Research on teaching and teacher research: the issues that divide. *Educational Researcher*, *19*(2), 2-10.

Cooke, R. (1974). *História da Matemática*. São Paulo, Brasil: Edgard Blücher Lda.

Corleis, A., Schwarz, B., Kaiser, G., & Leung, I. (2008). Content and pedagogical content knowledge in argumentation and proof of future teachers: a comparative case study in Germany and Hong Kong. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 40*(5), 813–832.

Correia, J. M. (1999). *A evolução do conceito de função na segunda metade do século XVIII.* Tese de mestrado não publicada, Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Portugal.

Cuoco, A. A. (1994). Multiple Representations of Functions. In Kaput, J. & Dubinsky, E. (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning* (pp. 121–140). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

Dahlberg, R., & Housman, D. (1997). Facilitating learning events through example generation. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 283-299.

De Jong, O., Van Driel, J., & Verloop, N. (2005). Preservice Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Using Particle Models in Teaching Chemistry. *Journal of Research in Science Teaching , 42*(8), 947–964.

Demana, F., & Waits, B. (1990). The role of technology in teaching mathematics. *Mathematics Teacher*, *83*(1), 27-31.

DeMarois, P., & Tall, D. O. (1996). Facets and layers of the function concept. In Puig, L & Gutierrez, A. (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 2, pp. 297–304). Valencia, Spain: PME.

DeMarois, P., & Tall, D. O. (1999), Functions: Organizing principle or cognitive root. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of of the 23th Conference e International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 2, pp. 257–264). Haifa, Israel: PME.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction: entering the field of qualitative research. In N. Denzin. & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-17). Thousand Oaks, USA: Sage Publications.

Derry, G. N. (1999). *What science is and how it works*. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In D. O. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T., & Vinner, S. (1982). Some aspects of the function concept in college students and junior high school teachers. *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp.12-17). Antwerp, The Netherlands: PME.

Dreyfus, A., Jungwirth, E., & Eliovitch, R. (1990). Applying the "Cognitive Conflict" Strategy for Conceptual Change – Some Implications, Difficulties, and Problems. *Science Education, 74*(5), 555-569.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, in D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Dordecht, The Netherlands: Kluwer, Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación universitária. *Educación Matemática, 8*(3), 24-41.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. (MAA Notes no. 25, pp. 85-106), Washington DC, USA: Mathematical Association of America.

Dubinsky, E., & McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education. In: Holton, D. (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 275-282). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. In T. Nakahara & M. Koyama, (Eds.), *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 1, pp. 55-69). Hiroshima University, Japan: PME.

Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 153-174). Washington, DC: MAA.

Eisner, E., & Peshkin, A. (Eds.). (1990). *Qualitative inquiry in education*. New York, USA: Teachers College Press.

Eley, M., & Cameron, N. (1993). Proficiency in the explanation of procedures: A test of the intuitive understanding of teachers of undergraduate mathematics. *Higher Education*, *26,* 355-386.

Ericsson, F. (1992). Ethnographic Microanalysis of Interaction. In M. D. LeCompte, M. L. Millroy & J. Preissle (Eds.), *The handbook of qualitative research in education* (pp. 201-225). New York, USA: Academic Press Inc.

Erlandson. D. A., Harris, E. L., Skipper, B. L., & Allen, S. D. (1993). *Doing naturalistic inquiry*. Newbury Park, California, USA: Sage Publications.

Escudero, I., & Sánchez, V. (2007a). A Mathematic Teachers' Perspective and its Relationship to Practice. *International Journal of Science and Mathematics Education, 6*, 87-116.

Escudero, I., & Sánchez, V. (2007b). How do domains of knowledge integrate into mathematics teachers' practice? *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 312-326.

Even, R. (1988). *Prospective secondary mathematics teachers' knowledge and understanding about mathematical function.* Tese de doutoramento não publicada, Michigan State University, USA.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(2), 94-116.

Fernandes, D. (2006). Para uma teoria da avaliação formativa. *Revista Portuguesa de Educação 19*(2), 21-50.

Figueiredo, C. A. (2005). *Os exemplos utilizados por professores estagiários quando ensinam o conceito de Função.* Memoria de Proyecto de Investigación de Doctorado, Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Universidada de Extremadura, España.

Figueredo, C. A., Blanco, L. J., & Contreras, L. C. (2006). A Exemplificação do Conceito de Função em Professores Estagiários. *Revista Unión*, *8*, 23-39.

Figueiredo, C. A., Blanco, L. J., & Contreras, L. C. (2007). La ejemplificación del concepto de función en estudiantes para profesores de Matemáticas en Secundaria. *Investigación en la Escuela, 61*, 53-67.

Figueiredo, C. A., Contreras, L. C., & Blanco, L. J. (2009). A transparência e a variação dos exemplos utilizados na aprendizagem de conceitos matemáticos. *Zetetiké*, *32*(17), 29-60.

Firestone, W. (1990). Toward a paradigmpraxis dialectic. In: E. Guba (Ed.), *The paradigm dialog* (pp. 105-124). Newbury Park, California, USA: Sage Publications.

Friedrichsen P., Abell S., Pareja E., Brown P., Lankford D., & Volkmann, M. (2009). Does Teaching Experience Matter? Examining Biology Teachers' Prior Knowledge for Teaching in an Alternative Certification Program. *Journal of Research in Science Teaching, 46*(4), 357–383.

Garcia, M. M., & Llinares, S. (1996). El concepto de función a través de los textos escolares: reflexión sobre una evolución. *Qurriculum*, *10-11*,103-115.

Gavilán, J. M., García, M. M., & Llinares, S. (2007a). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(2), 157-170.

Gavilán, J. M., García, M. M., & Llinares, S. (2007b). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje potencial en los estudiantes. *Educación Matemática*, *19*(2), 5-39.

Gelbaum, B. R., & Olmsted, J. M.H. (1964). *Counterexamples in Analysis*. San Francisco, USA: Holden-Day.

Gess-Newsome, J., & Lederman, N. G. (2001). Examining Pedagogical Content Knowledge: The Construct and its Implications for Science Education. *Contemporary Trends and Issues in Science Education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gibson, J. J. (1977). The theory of affordances. In R. Shaw & J. Bransford, (Eds.), *Perceiving, acting and knowing: Toward an ecological psychology* (pp. 67-82). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid, España: Morata.

Goldenberg, P., & Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 183-194.

Goñi, J. M. (2000). La evaluación en matemáticas. *Aula de Innovación educativa, 93-94*, 6-9.

Gray, E. (2002). Research Forum on Abstraction. *PME News, November 2002.*

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "Proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), 116–140.

Grevholm, B. (2008). Concept maps as research tool in mathematics education. In A. J. Cañas, P. Reiska, M. Åhlberg & J. D. Novak, (Eds.), *Concept Mapping: Connecting Educators Proeedings of the Third Int. Conference on Concept Mapping*. Tallinn, Estonia & Helsinki, Finland.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York, USA: Teachers College Press.

Gudmundsdottir, S., & Shulman, L. (1987). Pedagogical content knowledge in social studies. *Scandinavian Journal of Educational Research, 31*, 59-70.

Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract and the generic in advanced mathematics. *For the learning of Mathematics*, *11*, 38-42.

Hazzan, O. (1994). Students' belief about the solutions of the equation $x = x^{-1}$ in a group. *18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 49-55). Lisbon, Portugal: PME.

Hazzan, O., & Zazkis, R. (1997) Constructing knowledge by constructing examples for mathematical concepts. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Voluma 4, pp. 299-306). Lahti, Finland: PME.

Hazzan, O., & Zazkis, R. (1999). A perspective on "give an example" tasks as opportunities to construct links among mathematical concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 21*(4), 1-14.

Hilbert, T., Schworm, S., & Renkl, A. (2004). Learning from worked-out examples: The transition from instructional explanations to self-explanation prompts. In P. Gerjets, J. Elen, R. Joiner, & P. Kirschner (Eds.), *Instructional design for effective and enjoyable computer-supported learning* (pp. 184-192). Tübingen, Germany: Knowledge Media Research Center.

Hill, H.C., Schilling, S.G., & Ball, D.L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal, 105*, 11-30.

Hill, H.C., Rowan, B., & Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371– 406.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. (2008). Unpacking "pedagogical content knowledge": Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Houssart, J., & Evens, H. (2005). Giving examples and making general statements: 'two odds always make an even (in maths)'. In D. Hewitt & A. Noyes (Eds.), *Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education* (pp. 65-72). University of Warwick, UK.

Huckstep, P., Rowland, T., & Thwaites, A. (2002). Primary Teachers' Mathematics Content Knowledge: What does it look like in the Classroom*? Proceedings of BERA Conference*, University of Exeter, UK.

Huckstep, P., Rowland, T., & Thwaites, A. (2003). Observing subject knowledge in primary mathematics teaching. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 23*(Volume 1, pp. 37-42).

Huntley, R. (2008). Researching Primary Trainees' Choice of Examples: Some early analysis of data. Joubert, M. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 28*(Volume 3, pp. 42-46).

Inglis, M., & Simpson, A. (2008). Conditional inference and advanced mathematical study. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 187-204.

Jones, M. (2006). Demystifying Functions: The Historical and Pedagogical Difficulties of the Concept of the Function. *Undergraduate Math Journal*, *7*(2), 1-20.

Jorro, A. (2000). *L'enseignant et l'évaluation. Des gestes évaluatifs en question.* Bruxelles, Belgique: De Boeck.

Juter, K. (2005). Limits of functions - How do students handle them? *Pythagoras*, *61*, 11-20.

Karaağaç, M. K. (2005). Differences in teachers' selection and use of examples in classrooms: an institutional perspective on teacher practice. Hewitt, D. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 25*(2).

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *College Mathematics Journal, 20*(4), 282-300.

Klymchuk, S. (2001). Counterexamples and conflicts as a remedy to eliminate misconceptions and mistakes. In Marja van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference for Psychology in Mathematics Education* (Volume 1, 326). Utrecht, The Netherlands: PME.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., & Jordan, A. (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology, 100*(3), 716-725.

Lakoff, G. (1987). *Woman, fire and dangerous things: What Categories Reveal about the Mind*, Chicago, USA: University of Chicago Press.

Lange, K., Kleickmann, T., & Moeller, K. (2009). Measuring primary school teachers' Pedagogical Content Knowledge in science education with open-ended and multiple-choice items. *Proceedings of the European Science Education Research Association Conference.* Istanbul, Turkey.

Lederman, N.G., Gess-Newsome, J., & Latz, M.S. (1994). The nature and development of preservice science teachers' conceptions of subject matter and pedagogy. *Journal of Research in Science Teaching*, *31*, 129–146.

Leinhardt, G. (1989). Math lessons: A contrast of novice and expert competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(1), 52–57.

Leinhardt, G. (2001). Instructional explanations: A commonplace for teaching and location for contrast. In V. Richardson (Ed.). *Handbook of research on teaching (*4th Ed. pp. 333-357*.)*. Washington, DC, USA: American Educational Research Association.

Leinhardt, G., Putnam, R. T., Stein, M. K., & Baxter, J. (1991). Where subject knowledge matters. In J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching: Teachers' knowledge of subject matter as it relates to their teaching practice* (Voluma 2, pp. 87-113). Greenwich, Connecticut, USA: Jai Press, Inc.

Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987). Rational number relations and proportions. In Claude Janvier (Ed), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum.

Lester, F. K., & Kroll, D. L. (1991). Evaluation: A new vision. *Mathematics Teacher, 84*, 276-284.

Lewis, M. W., & Dehler, G. E. (2000). Learning Through Paradox: A Pedagogical Strategy for Exploring Contradictions and Complexity. *Journal of Management Education*, *(24)*6, 708-725.

Lincoln, Y., & Guba, E. (1991). *Naturalistic inquiry*. New York, USA: Sage.

Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. In J. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina & C. Loureiro (Eds.), *Desenvolvimento profissional dos professores de Matemática: Que formação?*(pp. 47-82). Lisboa: SPCE.

Loyd, G.M., & Wilson M. (1998). Supporting innovation: The impact of a teacher's conception of function on his implementation of a reform curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(3), 248-274.

Lucus, C. A. (2006). Is subject matter knowledge affected by experience? The case of composition of functions. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 4, pp. 97-104). Prague, Czech Republic: PME

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

MacHale, D. (1980). The predictability of counterexamples. *American Mathematical Monthly 87*, 752.

Magnusson, S., Krajcik, L., & Borko, H. (1999). Nature, sources and development of pedagogical content knowledge. In J. Gess-Newsome & N.G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge* (pp. 95-132). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Makin, V. S., & Ross, H. B. (1999). Prototype versus Exemplar Models in Cognition. In R. J. Sternberg (Ed.), *The Nature of Cognition* (pp. 205–243). Massachusetts: MIT Press.

Marcelo, Carlos (2009). Desenvolvimento Profissional Docente: passado e futuro. *Sísifo. Revista de Ciências da Educação 08*, 7-22.

Markovits Z., Eylon B., & Bruckheimer M. (1988). Difficulties Students have with the Function Concept. *The Ideas of Algebra, K-12, N.C.T.M. 1988 Yearbook*, 43-60.

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and Awareness.* Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum.

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B. M. (2004). The Space of Learning. In F. Marton & A. B. M. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning*. (pp. 3-40). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Mason, J. (2002). What makes an example exemplary?: Pedagogical and research issues in transitions from numbers to number theory. In A.D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 1, pp. 224-229). Norwich, UK: PME

Mason, J. (2003). Structure of Attention in the Learning of Mathematics. In J. Novotná (Ed.) *Proceedings, International Symposi um on Elementary Mathematics Teaching* (pp. 9-16). Charles University, Prague, Czech Republic.

Mason, J. (2006). What makes and example exemplary: Pedagogical and didactical issues in appreciating multiplicative structures. In R. Zazkis & S.R. Campbell (Eds.), *Number Theory in mathematics education: Perspectives and prospects* (pp. 41–68). New York: Lawrence Erlbaum Press.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57–94). New York: Lawrence Erlbaum Press.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular, *Educational Studies in Mathematics, 15*, 277-289.

Mason, J., & Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics, 38,* 135-161.

Mason, J., & Watson, A. (2001). Getting students to create boundary examples. *MSOR Connections*, *1*(1), 9-11.

Mason, J., & Watson, A. (2005). Mathematical Exercises: what is exercised, what is attended to, and how does the structure of the exercises influence these? *Invited Presentation to SIG on Variation and Attention*. Nicosia, Greece: EARLI

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks* (2nd ed.). St. Albans, UK: Tarquin.

Mavarech Z., & Kramarsky B. (1997). From Verbal Descriptions to Graphic Representations: Stability and Change in Students' Alternative Conceptions. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 229-263.

McCrory, R. (2008). Technology ***PCK in Science***. In Colbert, J., Boyd, K., Clarke, K., Guan, S., Harris, J., Kelly, M., & Thompson, A. (Eds.). *The Handbook of Technological Pedagogical Content Knowledge for Educators.* London, UK: Routledge.

McDonough, A., & Clarke, D. (2002). Describing the practice of effective teachers of mathematics in the early years. In N. A. Pateman, B. J. Doherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of 27th Conf. of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 3, pp. 261-268). Honolulu, USA: PME.

McGowen, M., DeMarois, P., & Tall, D. (2000). Using the function machine as a cognitive root. *Proceedings of the 22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 247-254). Tucson, USA: PME.

Meehan, M. (2007). Student generated examples and the transition to advanced mathematical thinking. In Pitta-Pantazi, P. & Philippou, G.(Eds.*), Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2349-2358). Larnaca, Cyprus.

Mellado, V. (1994). *Análisis del conocimiento didáctico del contenido, en profesores de primaria y secundaria en formación inicial*. Tese de doutoramento inédita, Universidad de Sevilla, España.

Ministério da Educação (2001). *Programas de Matemática A* dos 10º e 11º anos dos Cursos Gerais de Ciências Naturais, Ciências e Tecnologias, Ciências Socio-Económicas. Departamento do Ensino Secundário, Lisboa, Portugal.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record 108*, 1017- 1054.

Monk, S., & Nemirovsky, R. (1994). The case of Dan: Student construction of a functional situation through visual attributes. *CBMS Issues in Mathematics Education, 4*, 139-168.

Morine-Dershimer, G., & Kent, T. (1999). The complex nature and sources of teachers' pedagogical knowledge. In J. Gess-Newsome & N. G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge: the construct and its implications for science teaching* (pp. 21-50). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Moura, M., & Moretti, V. (2003). Investigando a aprendizagem do conceito de função a partir dos conhecimentos prévios e das interacções sociais. *Ciência & Educação, 9*(1), 67-82.

Movshovitz-Hadar, N. (1993). The False Coin Problem, Mathematical Induction and Knowledge Fragility. *Journal of Mathematical Behavior, 12*, 253-268.

Muir, T. (2007). Setting a good example: Teachers' choice of examples and their contribution to effective teaching of numeracy. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice. Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 513-522). Hobart, Australia: MERGA.

Mulhall, P., Berry, A., & Loughran, J. (2003). Frameworks for representing science teachers' pedagogical content knowledge. *Asia-Pacific Forum on Science Learning and Teaching, 4*(2), Article 2.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA, USA: NCTM.

Neubrand, M. (2006). The TIMSS 1995 and 1999 Video Studies: In Search for Appropriate Units of Analysis. In F.K.S Leung, K.-D. Graf & F.J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions: A Comparative Study of East Asia and the West. - The 13th ICMI Study* (Volume 9, pp. 291-318), *(New ICMI Study Series),* Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Neubrand, M. (2008). Knowledge of Teachers – Knowledge of Students: Conceptualizations and outcomes of a Mathematics Teacher Education Study in Germany. *Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICM, Working Group 2: The professional formation of teachers.* Roma, Italia.

Neves, M. A., & Guerreiro, L. (2003). *Funções I. Matemática A · 10.º Ano, Volume II.* Porto, Portugal: Porto Editora.

Nicol, C., & Crespo, S. (2004). Learning to see in mathematics classrooms. In M. Høines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 2004 International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 3, pp. 417-424). Bergen, Norway: Bergen University College.

Norman, A. (1992). Teacher's mathematical knowledge of the concept of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.). *The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 215-232). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

Novak, J. (1985). Meta-learning and meta-knowledge strategies to help students learn how to learn. In West, L. & Pines, L. (Eds.), *Cognitive Structure and Conceptual Change* (pp. 189–209). Orlando, FL, USA: Academic Press.

Novak, J. (1990). Concept Mapping: A Useful Tool for Science Education. *Journal of Research in Science Teaching, 27*(10), 937–949.

Novak, J., & Gowin, D. (1984). *Learning how to learn*. New York, USA: Cambridge University Press.

Palaro, L. A. (2008). Leonhard Euler e o Conceito de Função. *Seminário Educação 2008: 20 anos de Pós Graduação em Educação, avaliação e perspectivas.* Cuiabá, Brasil.

Park, S., & Oliver, J. S. (2008). Revisiting the conceptualization of Pedagogical Content Knowledge (PCK): PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research in Science Education, 38*(3), 261-284.

Peled, I., & Zaslavsky, O. (1997). Counter-examples that (only) prove and Counter-examples that (also) explain. *FOCUS on Learning Problems in mathematics, 19* (3), 49-61.

Peterson, P.L., Fennema, E., Carpenter, T.P., & Loef, M. (1989). Teachers' pedagogical content beliefs in mathematics. *Cognition and Instruction*, *6*(1), 1-40.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving.* New York, USA: John Wiley and Sons, Inc.

Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Revista Educação e Matemática*, *15*, 3-9.

Ponte, J. P. (2000). A investigação sobre o professor de matemática. Problemas e perspectivas. *Conferência realizada no 1º SIPEM promovido pelo SBEM-Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, Serra Negra, São Paulo, Brasil.

Porlán, R., & Rivero, A. (1998). *El conocimiento de los profesores. Una propuesta formativa en el área de ciencias*. Sevilla: Díada.

Reed, S. Dempster, A., & Ettinger, M. (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition, 11,* 106-125.

Reimann, P., & Schult, T. J. (1996). Turning examples into cases: Acquiring knowledge structure for analogical problem solving. *Educational Psychologist, 31*, 123-132.

Renkl, A. (2002). Worked-out examples: instructional explanations support learning by self-explanations. *Learning and Instruction 12*, 529-556.

Rico, L., Castro, E., Castro, E., Fernández, F., & Segovia, I. (1997). Cuestiones abiertas sobre evaluación en matemáticas. *Uno, 11*, 7-23.

Riese, J., & Reinhold, P. (2009). Measuring Physics Student Teachers‘ Pedagogical Content Knowledge as an Indicator of their Professional Action Competence. *Proceedings of the European Science Education Research Association Conferenc*. Istanbul, Turkey.

Rissland-Michener, E. (1978). Understanding Understanding Mathematics. *Cognitive Science, 2,* 361-383.

Rochera, M. J., Colomina, R., & Barberà, E. (2001). Utilizando los resultados de la evaluación en matemáticas para optimizar el aprendizaje de los alumnos. *Investigación en la escuela, 25* , 33-44.

Rowland, T. (1998). Conviction, explanation and generic examples. *Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 4, pp. 65-72). University of Stellenbosch, S. Africa: PME.

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 149-163.

Rowland, T., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2003a). Novices' Choice of Examples in the Teaching of Elementary Mathematics. In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International Conference on the Decidable and the Undecidable in Mathematics Education* (pp. 242-245). Brno, Czech Republic.

Rowland, T., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2003b). Elementary Teachers' Mathematics Content Knowledge and Choice of Examples. *Paper given at CERME3*, Bellaria, Italy.
http://www.dm.unipi.it/%7Edidattica/CERME3/proceedings/Groups/TG12/TG12_Rowland_cerme3.pdf

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2003c). The choice of examples in the teaching of mathematics: what do we tell the trainees? *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 23* (Volume 2, pp. 85-90).

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2003d). The knowledge quartet. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 23* (Volume 3, pp. 97-103).

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2004). Reflecting on prospective elementary teachers' mathematics content knowledge: the case of Laura. In M. J. Høines & A. B. Fugelstad, (Eds.) *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*(Volume 4, pp. 121-128). Bergen University College, Norway: PME.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary Teachers' Mathematical Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 255-281.

Rowland, T., & Zaslavsky, O. (2005). *Pedagogical Example-Spaces*. Notes for the mini-conference on Exemplification in Mathematics, Oxford University, June 2005.

Runesson, U., & Mok, I. A. C. (2004). Discernment and the Question, "What can be learned?" In F. Marton & A. B. M. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 63-87). Mahwah, New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Ryan, J. (1994). The Function Concept: Making connections within and between representations. In R. Killen (Ed.), Educational Research: Innovation and Practice. *Proceedings of the Annual Australian Association for Research in Education Conference.*

Salazar, S. F. (2005). El conocimiento pedagógico del contenido como categoría de estudio de la formación docente. *Actualidades investigativas en educación, 5*(2).

Sanders, L.R., Borko, H., & Lockard, J.D. (1993). Secondary science teachers' knowledge base when teaching science courses in and out of their area of certification. *Journal of Research in Science Teaching, 30*, 723–736.

Sangwin, C. J. (2002). Teacher generated examples of mathematical objects. Obtido na Net em 2006 no endereço:
http://web.mat.bham.ac.uk/C.J.Sangwin/Publications/ExamplesObjects.pdf

Sangwin, C. J. (2006). Mathematical questions spaces. In: Danson, M. (ed.). 10th CAA International Computer Assisted Assessment Conference: *Proceedings of the Conference on 4th and 5th July 2006 at Loughborough University* (pp. 377-386). Loughborough, UK: Lougborough University.

Santos, L. (2004). O ensino e a aprendizagem da matemática em Portugal: Um olhar através da avaliação. *Actas del octavo simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática (S.E.I.E.M.)* (pp. 127-151). Coruña, España: Universidade da Coruña.

Schoenfeld, A. (1994). A discourse on methods. *Journal for Research in Mathematics Education, 25* (6), 697-710.

Schön, D. (1983). *The Reflective Practitioner: how professionals think in action*. London, England: Temple Smith.

Schwartz, J., & Yerushalmy, M. (1992). Getting students to function in and with algebra. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. (MAA Notes no. 25, pp. 261-289), Washington DC, USA: Mathematical Association of America.

Schwarz B., Leung I. K. C., Buchholtz N., Kaiser G., Stillman G., Brown J., & Vale C. (2008) Future teachers' professional knowledge on argumentation and proof: a case study from universities in three countries. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 40*(5), 791-811.

Sela, H. (2008). Coping with mathematical contradictions with peers. *Apresentação ao International Congress on Mathematical Education*. Monterrey, Mexico.

Sela, H.. & Zaslavsky, O. (2007). Resolving cognitive conflict with peers - does it matter how many? In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume, 4, pp. 169-176). Seoul, Korea: *PME*.

Selden, A., & Selden, J. (1992). Research perspectives on conceptions of function summary and overview. In Guershon Harel & Ed Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 1-16). Washington, USA: Mathematical Association of America.

Selden, A., & Selden, J. (1998). The role of examples in learning mathematics. *MAA Online,* obtido na Net em 2004 do endereço http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_5.html.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - the case of function. Em Guershon Harel e Ed Dubinsky (Ed.), *The concept of function* (pp. 59-84).Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Shílov, G. E. (2004). ¿Qué es una función? *Sigma, 25*, 137-147.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand, knowledge growth in teaching. *Educational Researcher 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Sierpinska, A. (1988). Epistemological Remarks on Functions. *Proceedingsof the Twelfth International Conference for the Psychological of Mathematics Education* (pp. 568-575). Vesprem, Hungary.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London, England: The Falmer Press.

Silverman, J. & Thompson, P. W. (2005). Investigating the relationship between mathematical understanding and teaching mathematics. In S. Wilson (Ed.), *Proceedings of the Twenty-seventh Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Roanoke, VA. Vicksburg, VA, USA: Virginia Tech, PME.

Simon, M. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*, 233-254.

Sinclair, N., Watson, A., & Zazkis, R. (2004). *Learner-generated examples* (pp. 45-54). Working group report. Laval, Quebec, Canada.

Skemp, R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Middlesex, England: Penguin.

Sowder, L. (1980). Concept and Principle Learning. In R. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education* (pp. 244-285). Reston, VA, USA: NCTM.

Stake, R.E. (1994). Case studies. In: N. Denzin e Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). Thousand Oaks, CA, USA: Sage Publications.

Stake, R. E. (1995). *The arte of case research*. Thousand Oaks, CA, USA: Sage Publications.

Stake R. E. (2000). Case studies. In: Denzin N. K., Lincoln Y. S. (Eds). *Handbook of qualitative research*. London, England: Sage.

Staub. F., & Stern. E. (2002). The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: Quasi-experimental evidence from elementary mathematics. *Journal of Educational Psychology, 93*, 344–355.

Stein, M.K., Baxter J.A., & Leinhardt G. (1990). Subject matter knowledge and elementary instruction: A case from functions and graphing. *American Educational Research Journal, 27*, 639-663.

Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research*. London, England: Sage.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2008). *'Cognitive conflict' as a mechanism for supporting developmental progressions in students' knowledge about proof*. Article presented at, and available at the website of, the 11th International Congress on Mathematical Education, under Topic Study Group 18 (Reasoning, proof and proving in mathematics education) (http://tsg.icme11.org/tsg/show/19). Monterrey, Mexico.

Swan, M. (1983). *Teaching decimal place value: A comparative study of "conflict" and "positive only" approaches*. Nottingham, England: University of Nottingham, Shell Centre for Mathematical Education.

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science, 12*, 257-285.

Sweller, J. (1989). Cognitive technology: some procedures for facilitating learning and problem-solving in mathematics and science. *Journal of Educational Psychology, 65* (1), 93-102.

Sweller, J., & Cooper, G. A. (1985). The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning algebra. *Cognition and Instruction, 2*, 59–89.

Tall, D. (1977). *Cognitive conflict and the learning of mathematics.* Paper presented at the first conference of the international group for the psychology of mathematics education. Utrecht, Netherlands.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. In Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495–511). New York, USA: Macmillan Publishing Company.

Tall D., & Vinner S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*, 151-169.

Tall D., & Thomas M. (1989). Versatile Learning and the Computer. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(2), 117-125.

Tall, D., & Bakar, M. (1992). Students' prototypes for functions e graphs. *International Journal of Mathematics Education in Science & Tecnology, 23*(1), 39-50.

Tall, D., McGowen, M., & DeMarois,P. (2000). The function machine as a cognitive root for the function concept. *Proceedings of PME-NA 22* (pp.255-261). Tucson, Arizona, USA.

Tamir, P. (1988). Subject Matter and Related Pedagogical Knowledge in Teacher Education. *Teaching and teacher education: an internal journal of research and studies*, *4*, 99-110.

Thompson, P. (1994a). Students, Functions and Curriculum. In Dubinsky, E., Schoenfeld, A., & Kaput, J. J. (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education*, I (pp. 21–44). Providence, USA: American Mathematical Society.

Thompson, P. (1994b). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 229-274.

Tirosh, D., & Graeber, A. O. (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teachers' thinking about division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 98–108.

Tirosh, D., Hadass R., & Movshovich-Hadar N. (1991). Overcoming overgeneralizations: The case of commutativity and associativity. In F. Furinguetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 3, pp. 310-315). University of Assisi, Italy: PME.

Tirosh, D., & Tsamir, P. (2004). What can mathematics education gain from the conceptual change approach? And what can the conceptual change approach gain from its application to mathematics education? *Learning and Instruction 14*, 535-540.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 213–219.

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 81-95.

Tsamir, P. (2003). From “easy” to “difficult” or vice versa: The case of infinite sets. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 25*, 1-16.

Turner, F. (2005). “I wouldn’t do it that way”: trainee teachers’ reaction to observations of their own teaching. Hewitt, D. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 25*(3).

Unwin, A. (2007). Technological Pedagogical Content Knowledge (TPCK), a conceptual framework for an increasingly technology driven higher education? *Bulgarian Journal of Science and Education Policy*, *1* (1), 231-236.

Van Driel, J. H., Verloop, N., & De Vos, W. (1998). Developing science teachers' pedagogical content knowledge. *Journal of Research in Science Teaching, 35*(6), 673-695.

Van Driel, J.H., De Jong, O., & Verloop, N. (2002). The development of preservice chemistry teachers’ PCK. *Science Education, 86*, 572–590.

Vidakovic, D. (1996). Learning the concept of inverse function. *Journal for Computers in Mathematicsand and Science Teaching, 15*(3), 295-318.

Vinner, S. (1983) Concept definition, concept image and the notion of function. *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*, 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning of mathematics. In Tall, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, The Nederlands: Kluver.

Vinner, S. (1992). The Function Concept as a Prototype for Problems in Mathematics Learning. In Harel, G., & Dubinsky, E. (Eds.)*, The Concept of Function – Aspects of epistemology and Pedagogy*, (MAA Notes, no 25, pp. 195- 214). Washington DC, USA: Mathematical Association of America.

Von Frank, V. (2008). *Professional Learning for School Leaders*. Oxford, Ohio, USA: National Staff Development Council.

Vosniadou, S. & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction, 14*(5), 445–451.

Wamba, A. M. (2001). *Modelos didácticos personales y obstáculos para el desarrollo profesional: Estudios de caso con profesores de Ciencias experimentales en Educación Secundaria.* Tese de Doutoramento inédita, Universidad de Huelva, España.

Watson, J. M. (2002). Inferential reasoning and the influence of cognitive conflict. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 225–256.

Watson, A., & Mason, J. (2001). Getting students to create boundary examples. *MSOR Conections 1* (1), 9-11.

Watson, A., & Mason, J. H. (2002a). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 4, pp. 377). University of East Anglia, Norwich, UK: PME

Watson, A., & Mason, J.H. (2002b), Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education 2*(2), 237-249.

Watson, A., & Mason, J. (2004). The Exercise as Mathematical Object: Dimension of Possible Variation in Practice. *Proceedings of the 24th Conference of the British Society of Research in Learning Mathematics*, (Volume 2, pp. 107-112). Leeds, U.K.: BSRLM.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples.* Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Watson, A., & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: using variation to structure sense-making. *Mathematics Thinking and Learning, 8*(2), 91-111.

Watson, A., & Shipman, S. (2008). Using learner generated examples to introduce new concepts. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 97-109.

Zabalza, M. A. (1987). *Diseño y desarrollo curricular*. Madrid, España: Narcea.

Zaslavsky, O. (2005). Transparent Objects and Processes in Learning Mathematics. *An international conference to review research on science, technology and mathematics education December 13-17*. Goa, India**:** International Centre, Dona Paula.

Zaslavsky, O. (2008). *What knowledge is involved in choosing and generating useful instructional examples?* Paper submitted to WG2 of the Symposium for celebration of the centennial of ICMI, Rome, March 2008.
Obtido na Net no endereço:
http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG2/Papers/ZASLAV.pdf

Zaslavsky, O. (2010). The explanatory power of examples in mathematics. Challengs for teaching. In M. K. Stein, & L. Kucan (Eds.), *Instructional explanations in the disciplines.* New York, USA: Springer.

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student-teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 67-78.

Zaslavsky, O., & Ron, G. (1998). Students' understanding of the role of counter-examples. *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1* (pp. 225-232). Stellenbosch, South Africa: PME.

Zaslavsky, O., & Lavie, O. (2005). *Teachers' use of instructional examples*. Paper presented at the 15th ICMI study conference: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. Águas de Lindóia, Brazil.

Zaslavsky, O. Harel, G., & Manaster, A. (2006). A teacher's treatment of examples as reflection of her knowledge-base. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 5, pp. 457–464). Prague, Czech Republic: PME.

Zaslavsky, O., & Zodik, I. (2007). Mathematics teachers' choices of examples that potentially support or impede learning. *Research in Mathematics Education, 9*, 143–155.

Zazkis, R. (2005) Representing numbers: prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36* (2-3), 207-217.

Zazkis, R., & Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In A. Cuoco (Ed.), *NCTM 2001 Yearbook: The roles of representation in school mathematics* (pp. 41-52). Reston, VA, USA: NCTM.

Zazkis, R., Liljedahl, P.0, & Gadowsky, K. (2003). Translation of a function: Coping with perceived inconsistency. In N. Pateman, B. Dougherty & J. Ziliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA* (Volume 4, pp. 459-466). University of Hawaii, Honolulu, USA: PME.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(3), 164–186.

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: focusing on representation. In Hoines, M. J. & Fuglestad, A. B. (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 4, pp. 497-504). Bergen University College, Norway: PME.

Zazkis, R., & Chernoff, E. (2006). Cognitive conflict and its resolution via pivotal/bridging example. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the Thirtieth annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 5, pp. 465-472). Charles Univeristy, Prague, Czech Republic: PME.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2007). Generating examples: from pedagogical tool to research tool. *For the Learning of Mathematics, 27*(2), 15–21.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of squares. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 131-148.

Zazkis, R., & Chernoff, E. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics*, *68*, 195-208.

Zazkis R., Liljedahl, P., & Chernoff E. J (2008) The role of examples in forming and refuting generalizations. **ZDM The International Journal on Mathematics Education, 40**, 131-141.

Zhu, X., & Simon, H. A. (1987). Learning mathematics from examples and by doing. *Cognition and Instruction*, *4*, 137 – 166.

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2004). Characteristics of mathematical problem solving tutoring in an informal setting. In Hoines, M. J. & Fuglestad, A. B. (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 4, pp. 489-496). Bergen, Norway: Bergen University College. PME.

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2007a). Is a visual example in geometry always helpful? In Woo, Jeong-Ho (Eds.) et al., *Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 4, pp. 265-272). Seoul, Korea: PME.

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2007b). Exemplification in the mathematics classroom: what is it like and what does it imply? *Paper presented at the 5th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME5), Larnaka, Cyprus.

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, **69**(2), 165-182.

Zuffi, E. (2001). Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. *Educação Matemática em Revista*, *8*(9), 10-16.

Yamada, A. (2000). Two patterns of progress of problem-solving process: From a representational perspective. In T. Nakahara & M. Koyana (Eds.), *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 4, pp. 289-296). Hiroshima University, Japan: PME.

Yerushalmy, M., & Schwartz, J. L. (1993). Seizing the opportunity to make algebra mathematically and pedagogically interesting. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 41–68). Hillsdale, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Yin, R. K. (2003). *Case Study Research: Design and Methods*, (3rd Edition). Thousand Oaks, CA, USA: Sage Publications.

Youschkevitch, A. P. (1976). The Concept of Function. *Archive for History of Exact Ciencies* (Volume 16, no1, pp. 37-85). New York, USA: Springer.

Youschkevitch, A. P. (1981). Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXe siècle. *Fragments d'histoire des mathématiques* (Volume 41, pp. 7-68). Paris, France: Brochure A.P.M.E.P.