TESIS DOCTORAL

Un ejemplo de teoría de homotopía en los grupos abelianos

Luis Javier Hernández Paricio

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

Un ejemplo de teoría de homotopía
en los grupos abelianos

Luis Javier Hernández Paricio

Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones
2008

Esta tesis doctoral, dirigida por el doctor D. José Luis Viviente Mateu, fue leída el 15 de octubre de 1980, y obtuvo la calificación de Sobresaliente Cum Laude

Edita: Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones

ISBN 978-84-691-3366-8

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

FACULTAD DE CIENCIAS

UN EJEMPLO DE TEORIA DE HOMOTOPIA EN LOS GRUPOS ABELIANOS

por

L. J. Hernández Paricio

Memoria presentada para
optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

DEPARTAMENTO DE GEOMETRIA Y TOPOLOGIA

JOSE LUIS VIVIENTE MATEU, Catedrático de Geometría 5º (Diferencial) de la Universidad de Zaragoza,

CERTIFICA: Que la presente Memoria sobre "Un ejemplo de Teoría de Homotopía en los Grupos Abelianos", ha sido realizada bajo su dirección en la Cátedra de Geometría 5º del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Zaragoza por el licenciado en Ciencias Matemáticas Luis Javier Hernández Paricio, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presenta y apadrina ante la Facultad de Ciencias, Sección de Matemáticas, de Zaragoza la referida Tesis, firmado el presente certificado en Zaragoza el 21 de Julio de mil novecientos ochenta.

El Catedrático

Este trabajo ha sido realizado en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, bajo la dirección del Prof. D. J.L. Viviente Mateu, al que quiero expresar mi agradecimiento por su orientación, aportación y ayuda, así como su continua atención que han hecho posible la realización del mismo.

También quiero agradecer a los profesores y compañeros que han contribuido con sus críticas y sugerencias a la elaboración de esta memoria, resaltando el interés que tuvo para mí el seminario que se realizó en este Departamento el curso 78-79.

El presente trabajo ha sido realizado disfrutando una beca del Plan de Formación del Personal Investigador.

Quiero, sobre todo, dar un especial reconocimiento a mis padres, cuya ilusión y confianza son para mí un especial y constante estímulo.

Finalmente, mi gratitud a las Srtas. Josefa y Nuria por su cuidada labor mecanográfica.

Zaragoza, Junio de 1980.

<u>INDICE</u>

CAPITULO III. SUCESIONES HOMOTOPICAS Y GRUPOS DE HOMOTOPIA

CAPITULO IV. HOMOTOPIA INDUCIDA POR ALGUNOS ANILLOS. CUBIERTAS

INTRODUCCION

En la categoria de los espacios (o bien espacios punteados), con el fin de estudiar problemas geométricos con métodos algebraicos se define la relación de homotopía y se introducen functores como los grupos de homotopía, homología y cohomología. Abstrayendo estos métodos, podemos pensar en estudiar una categoría $\mathcal{E}$, en la que se pueda definir una relación de homotopía, así como grupos de homotopía y (co) homología con propiedades similares a las que se verifican en los espacios. Una definición de homotopía abstracta, fue dada por Kan [19] para ello se apoya en un functor cilindro y en transformaciones naturales que son análogas a las del cilindro de los espacios. Kan define los grupos de homotopía y homología a partir de los complejos cúbicos y considera los siguientes ejemplos: Espacios topológicos, complejos cúbicos, complejos de cadenas, complejos de cadenas semisimpliciales, espacios relativos.

Eckmann y Hiltón ([5], [12], [13]) introducen teorías de homotopía en la categoría de los módulos sobre un anillo, definen homotopía proyectiva e inyectiva, así como los grupos de homotopía proyectivos e inyectivos. Kleisli [20] generaliza estas teorías de homotopía a categorías abelianas, podemos considerar como ejemplos, los complejos de módulos sobre un anillo, y la categoría de los pares de una categoría abeliana.

Para definir de un modo común los grupos de homotopía ya sea en espacios punteados o en los módulos sobre un anillo, Hubert

([17], [18]), prefiere utilizar como idea principal la del cono o dualmente los arcos de un espacio que arrancan de un punto dado, abstrayendo sus propiedades se define en una categoría general $\mathcal{C}$, una construcción standard dando un functor y transformaciones naturales que verifiquen propiedades análogas a las que verifica el functor "arcos", si tenemos un functor y transformaciones naturales que cumplen las propiedades que cumple el functor cono habremos dado en la categoría $\mathcal{C}$ una construcción standard dual. En una categoría $\mathcal{C}$ con una construcción standard, para definir los grupos de homotopía se construye un functor semisimplicial aplicando consecutivamente el functor arcos y el functor $\mathcal{C}(X,-)$, después se estudian los grupos de homotopía de Kan del complejo semisimplicial construido.

Dando construcciones standard adecuadas en las categorías de los espacios punteados y módulos sobre un anillo, aparecen los grupos de homotopía de espacios punteados y grupos de homotopía inyectivos y proyectivos.

Heller ([9], [10], [11]), introduce el concepto de h-c-categoría para estudiar teoría de homotopía, ahora la estructura adicional en una categoría $\mathcal{C}$ no consiste en un functor cilindro o cono, sino en una relación de homotopía y en una colección de cofibraciones (dadas a priori) satisfaciendo determinados axiomas. Como categorías en las cuales se puede dar una estructura de h-c-categoría, considera las siguientes: Espacios sobre un espacio fijo, fibraciones de Hurewicz sobre un espacio fijo, espacios con un grupo de operadores. Las h-c-categorías son un marco de trabajo adecuado para estudiar teoría de homología. Tambien Quillen en [24], [25] define el concepto de categoría modelo cerrada, dando en una categoría $\mathcal{C}$ familias de fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles, satisfaciendo adecuados axiomas.

Una manera más sencilla de estudiar teoría de homotopía es la que presentan Eckmann y Hillon en [6], únicamente requieren una categoría $\mathcal{C}$ con una relación de equivalencia para morfismos que sea compatible con la composición, definiendo entonces la categoría homotópica $\mathcal{C}h$. Definen cofibraciones como aquellos morfismos de $\mathcal{C}$ para los cuales si un problema de extensión tiene solución en la categoría homotópica $\mathcal{C}h$, también la tiene en $\mathcal{C}$ (dualmente definen fibraciones); los resultados que obtienen son aplicables a una categoría $\mathcal{C}$ con homotopía, en la que un morfismo se puede expresar como composición de una cofibración y una equivalencia de homotopía (de una equivalencia de homotopía y una fibración).

El trabajo que realizamos está en el orden de las ideas anteriores, más concretamente en el estudio de nuevas teorías de homotopía. En la categoría de los grupos abelianos $\mathcal{A}$ y para un anillo R con unidad (no nula), definimos una teoría de homotopía. Esta es distinta de la homotopía proyectiva e inyectiva que Eckmann y Hillon definen en $\mathcal{A}$, considerando los grupos abelianos como módulos sobre el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$; en el caso que el anillo R sea divisible existe una transformación natural suprayectiva de la homotopía asociada a el anillo R a la homotopía inyectiva. El interés de esta teoría radica en que nos analiza obstrucciones que presenta un grupo abeliano H a ser R-módulo. Si convenimos en llamar R-casimódulo (a derecha) a un grupo abeliano M con una operación externa $\cdot : M \times R \longrightarrow M$ que verifica las propiedades de R-módulo, exceptuando la asociativa $(m.r).s = m.(r.s)$, veremos que en la teoría de homotopía asociada al anillo R, los grupos abelianos contráctiles son exactamente los R-casimódulos. Después de un proceso natural de relativización, definimos en la categoría de los pares $\mathcal{A}(2)$ la homotopía inducida por el anillo R, aquí los objetos contráctiles son los homomorfismos de R-casimódulos. Ver (I-1.15) y (I-4.14).

En esencia, hemos asociado una teoría de homotopía a un problema de enriquecimiento de estructura; facilmente se puede definir en la categoría de los R-casimódulos una nueva teoría de homotopía en la que ahora los contráctiles son los R-módulos, o bien para un homomorfismo de anillos con unidad $R \longrightarrow S$, una relación de homotopía que tenga como contráctiles a los S-casimódulos.

Como la categoría en la que trabajamos es abeliana, para definir la relación de homotopía basta con dar los homomorfismos nulohomótopos, así no nos es preciso un functor cilindro como sugiere Kan, nos basta con dar un functor cono ó su dual un functor "arcos" como nos indica Hubert [17] (ver I-1.3). Para definir los grupos de homotopía, en vez de utilizar functores semisimpliciales, hemos preferido utilizar los métodos que Dieck, Kamps y Puppe desarrollan en su libro: Homotopietheorie [3], realizando un análisis de las fibraciones y cofibraciones (capítulo II) y la construcción de las sucesiones homotópicas (capítulo III). Este estudio se puede generalizar para una construcción standard (con construcción adjunta a izquierda) definida en una categoría abeliana.

El concepto de (co) fibración que utilizamos es el que definen Eckmann y Hilton en [6]. En la categoría de los grupos abelianos con la homotopía asociada al anillo R, un homomorfismo se puede poner como composición de una equivalencia de homotopía y una fibración (y dualmente), como se requiere en [6]. Con la relación de homotopía anterior y cofibraciones así definidas tenemos en la categoría $\mathcal{A}$, una estructura adicional que la hacen h-c-categoría, pudiendo utilizar todos los resultados obtenidos por Heller [9], [10], [11]. La categoría $\mathcal{A}$ constituye una categoría modelo cerrada (definida por Quillen) tomando como familias, las fibraciones, las cofibraciones y como equivalencias débiles las equivalencias de homotopía.

Hemos dividido esta memoria en cinco capítulos. El capítulo 0 es preliminar, en él recogemos las definiciones y propiedades de tipo categórico de los grupos abelianos, que utilizaremos posteriormente.

En el capítulo I, para un anillo con unidad (no nula) R, definimos relaciones de homotopía en la categoría de los grupos abelianos $\mathcal{A}$, grupos abelianos bajo A $\mathcal{A}^A$, grupos abelianos sobre B $\mathcal{A}_B$ y categorías de los pares $\mathcal{A}(2)$. Estudiamos los objetos contráctiles de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}(2)$, así como las leyes exponenciales en las correspondientes categorías homotópicas.

A continuación en el capítulo II, realizamos un estudio sistemático de las cofibraciones (fibraciones). Vemos en que condiciones una cofibración (fibración) es monomorfismo (epimorfismo) y recíprocamente. Cuando los homomorfismos adecuados son cofibraciones (fibraciones), estudiamos los temas siguientes: Algunas h-equivalencias de $\mathcal{A}$ que son h-equivalencias en $\mathcal{A}^A$ ($\mathcal{A}_B$), retractos (dilatados) por deformación; relación entre las h-equivalencias de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}(2)$. Después analizamos las cofibraciones (fibraciones) inducidas por cuadrados cocartesianos (cartesianos), probamos que si los homomorfismos inductores son homótopos, las cofibraciones inducidas son del mismo tipo de homotopía en la categoría relativa (dualmente para fibraciones).

En el capítulo III, construimos las sucesiones homotópicas asociadas a un homomorfismo g: La sucesión de Puppe con la propiedad de que el functor $[-,Y]$ la transforma en una sucesión exacta y la de Eckmann-Hillon, verificando lo mismo para el functor $[Y,-]$, en el caso que g sea monomorfismo e $Y = \mathbb{Z}$, obtenemos la sucesión exacta de los grupos de homotopía, también demostramos la exactitud de la sucesión de los grupos de homotopía asociados a una fibración.

Finalmente en el capítulo IV, estudiamos teorías de homotopía para anillos concretos. Probamos que todos los anillos divisibles y libres de torsión originan, la misma homotopía y mismos grupos de homotopía. Estudiamos los grupos de homotopía inducidos por el anillo de los enteros localizado con respecto un conjunto de primos P, en el caso particular de que el anillo R sea el de las racionales damos una caracterización de los homomorfismos nulohomótopos y de las cofibraciones.

Por último definimos el concepto de cubierta, damos un teorema de elevación en el que la condición de elevación viene dada por el grupo fundamental. Tambien vemos que si el anillo R es divisible todo grupo grupo abeliano tiene cubierta universal y clasificamos las cubiertas sobre grupos que admitan cubierta universal.

CAPITULO O

PRELIMINARES (GRUPOS ABELIANOS)

El ejemplo de teoría de homotopía que estudiamos, se desarrolla en la categoría de los grupos abelianos, para ello utilizamos las propiedades de esta categoría. En este capítulo preliminar, recordamos alguna de ellas: sumas directas, productos directos, cuadrados (co) cartesianos, producto tensorial, functores adjuntos, categoría de los pares, límites, propiedades de divisibilidad y torsión ...

(O-1) Núcleos, conúcleos, productos, sumas directas y Hom(–,–).

Denotaremos con $\mathcal{A}$, la categoría de los grupos abelianos. En esta categoría existen núcleos, conúcleos, productos y sumas directas. En este párrafo recogemos alguna de sus propiedades.

Para un homomorfismo de grupos abelianos $f : A \longrightarrow B$, llamaremos núcleo de f al siguiente subgrupo de A

$\operatorname{Ker} f = \{a \in A \mid fa = 0\}$ e imagen de f

$\operatorname{Im} f = \{b \in B \mid \exists\ a \in A \ \ni\ fa = b\}$ que también es subgrupo de B, denotaremos $\operatorname{Coker} f = B/\operatorname{Im} f$ y llamaremos conúcleo de f.

(1.1) Proposición

Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de grupos abelianos

i) Sea $K = \operatorname{Ker} f$ e $i : K \longrightarrow A$ la inclusión canónica, entonces para todo homomorfismo $g : X \longrightarrow A$ tal que $f.g = 0$, existe un único homomorfismo $\overline{g} : X \longrightarrow K$ tal que $i.\overline{g} = g$.

ii) Sea $C = \operatorname{Coker} f$ y $p : B \longrightarrow C$ la proyección natural, entonces para todo homomorfismo $h : B \longrightarrow Y$ tal que $h.f = 0$, existe un único homomorfismo $\overline{h} : C \longrightarrow Y$ tal que $\overline{h}p = h$.

Demostración: Es una comprobación.

Como consecuencia inmediata de esta proposición podemos enunciar el siguiente

(1.2) Lema

Sean los siguientes diagramas, siendo los cuadrados conmutativos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "="] & A' \arrow[d, "i'"] \\
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & X' \arrow[d, "p'"] \\
C \arrow[r, dashed, "h"] & C'
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "i"'] & K' \arrow[d, "i'"] \\
E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "="] & E' \arrow[d, "p'"] \\
B \arrow[r, "h"] & B'
\end{tikzcd}$$

i) Si $X \xrightarrow{p} C$ es conúcleo de i y $p'.i' = 0$, entonces $\exists \mid h : C \longrightarrow C'$ tal que $hp = p'.g$.

ii) Si $K' \xrightarrow{i'} E'$ es núcleo de p' y $p.i = 0$, entonces $\exists \mid f : K \longrightarrow K'$ tal que $i'.f = g.i$.

Si tenemos una familia de grupos abelianos $(A_i)\ i \in I$, definimos $\prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)\ i \in I \mid a_i \in A_i\}$ la suma se define del modo siguiente $(a_i)_{i \in I} + (b_i)_{i \in I} = (a_i + b_i)_{i \in I}$, para cada $i \in I$ definimos la proyección $p_i : \prod_{i \in I} A_i \longrightarrow A_i : (a_j)_{j \in I} \longrightarrow a_i$, que fácilmente se ve que es homomorfismo. En $\prod_{i \in I} A_i$, podemos considerar el siguiente subgrupo $\bigoplus_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid \exists\ F \subset I$ finito m $\forall\ i \in I\text{-}F\ a_i = 0\}$, para cada $i \in I$, definimos el homomorfismo $\varepsilon_i : A_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i : \varepsilon_i(a) = (a_j)_{j \in I}$, siendo $a_i = a$ y $a_j = 0$ para $j \neq i$.

$\prod_{i \in I} A_i$ es el producto directo de la familia $(A_i)_{i \in I}$ y $\bigoplus_{i \in I} A_i$ es la suma directa de dicha familia. Es inmediato que si I es finito el producto es isomorfo a la suma directa de dicha familia.

(1.3) Proposición

El producto directo de la familia $(A_i)_{i \in I}$ es el producto (en sentido categórico) de dicha familia en la categoría $\mathcal{A}$

y la suma directa es el coproducto (sentido categórico) de la familia en la categoría $\mathcal{A}$.

Demostración

Ver Hilton-Stammbach, proposiciones I-(3.2) y I-(3.3).

(1.4) Proposición

Sea una familia de grupos abelianos $(X_i)_{i \varepsilon I}$. Para cada $i \varepsilon I$, tenemos un subgrupo $A_i \longrightarrow X_i$, entonces existe el siguiente isomorfismo $\underset{i\varepsilon I}{\pi} X_i / \underset{i\varepsilon I}{\pi} A_i \cong \underset{i\varepsilon I}{\pi} (X_i/A_i)$ definido de modo natural.

Demostración

Sea $X_i \xrightarrow{p_i} X_i/A_i$ la proyección natural, que es sobre, entonces $\underset{i\varepsilon I}{\pi} X_i \xrightarrow{\pi p_i} \underset{i\varepsilon I}{\pi} (X_i/A_i)$ es tambien sobre y $\mathrm{Ker}\ \pi p_i = \pi A_i$ siguiendose el isomorfismo del enunciado. <>

Para A,B en $\mathcal{A}$, Hom(A,B) denota el conjunto de homomorfismos de A en B, como B es grupo abeliano si para $f,g \varepsilon \mathrm{Hom}(A,B)$ definimos $(f+g)(a) = fa + ga$, facilmente se comprueba que $f + g \varepsilon \mathrm{Hom}(A,B)$ y que Hom(A,B) con la suma así definida es grupo abeliano.

Sean $A \xrightarrow{\alpha} A'$ y $B \xrightarrow{\beta} B'$ homomorfismos en $\mathcal{A}$, de-

notaremos como $\mathrm{Hom}(\alpha,\beta) : \mathrm{Hom}(A',B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,B') :$
$: \mathrm{Hom}(\alpha,\beta)(f) = \beta f \alpha$ que es homomorfismo, si $A = A'$ y $\alpha = 1_A$ denotaremos $\mathrm{Hom}(1_A,\beta) = \beta_*$ y para $B = B'$ y $\beta = 1_B$ $\mathrm{Hom}(\alpha,1_B) = \alpha^*$. Definamos las correspondencias $\mathrm{Hom}(A,-)$, $\mathrm{Hom}(-,B) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que a $f : X \longrightarrow Y$ le asociamos $\mathrm{Hom}(A,X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(A,Y)$ y $\mathrm{Hom}(Y,B) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(X,B)$ respectivamente, observemos que las construcciones anteriores son functores. Recordemos las siguientes proposiciones.

<u>(1.5) Proposición</u>

Sea $0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\mu} X \xrightarrow{\varepsilon} X'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de grupos abelianos, entonces las siguientes sucesiones son exactas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,X') \xrightarrow{\mu_*} \mathrm{Hom}(A,X) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathrm{Hom}(A,X'')$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X'',A) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}(X,A) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Hom}(X',A)$$

<u>Demostración</u>

Ver Hilton-Stammbach, párrafo (I-2).

<u>(1.6) Proposición</u>

Sea una familia de grupos abelianos $\{X_i \mid i \in I\}$ y $\varepsilon_i : X_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} X_i$, $\prod_{i\in I} X_i \xrightarrow{p_i} X_i$ las inclusiones y proyecciones naturales entonces existen los siguientes isomorfismos

$$\varepsilon : \mathrm{Hom}(\bigoplus_{i\varepsilon I} X_i, A) \longrightarrow \pi_{i\varepsilon I} \mathrm{Hom}(X_i, A) \; : \; \varepsilon(f) = (f.\varepsilon_i)_{\; i \,\varepsilon\, I}$$

$$P : \mathrm{Hom}(A, \pi_{i\varepsilon I} X_i) \longrightarrow \pi_{i\varepsilon I} \mathrm{Hom}(A, X_i) \; : \; P(f) = (p_i.f)_{\; i \,\varepsilon\, I}$$

Demostración

Ver Hilton-Stammbach (I-3.4) y (I-3.5).

Sea R un anillo con unidad (no nula) y X un grupo abeliano, en la siguiente proposición vemos como de que R sea un R-módulo a izquierda, se sigue que Hom(R,X) es un R-módulo a derecha.

(1.7) Proposición

La operación $\; . : \mathrm{Hom}(R,X) \times R \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,X)$ $(f,r) \longrightarrow f.r : R \longrightarrow X : (f.r)s = f(r.s)$ dota a Hom(R,X) de una estructura de R-módulo a derecha. Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de grupos abelianos, entonces $f_* : \mathrm{Hom}(R,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,Y)$ es un homomorfismo de R-módulos a derecha.

Demostración

Es una simple comprobación. Ver Hilton-Stammbach, cap.I, párrafo 8.

(0-2) Producto tensorial

En este párrafo recordaremos la construcción del producto tensorial su propiedad universal y algunas propiedades.

(2.1) Definición

Sean K, G, H grupos abelianos y $f : K \times G \longrightarrow H$ una aplicación, diremos que f es bilineal si satisface

i) $f(k' + k'',g) = f(k',g) + f(k'',g)$

ii) $f(k,g' + g'') = f(k,g') + f(k,g'')$

para todo $k,k', k'' \in K$ y $g,g', g'' \in G$.

Consideremos $K \times G$ como un conjunto y sea $F(K \times G)$ el grupo abeliano libre sobre $K \times G$, y sea N el subgrupo generado por los siguientes elementos

$(k' + k'',g) - (k',g) - (k'',g)$, $(k,g' + g'') - (k,g') - (k,g'')$.

Entonces denotaremos $K \otimes G$ al grupo cociente $F(K \times G)/N$. Para $k \in K$ y $g \in G$, denotaremos $(k,g) + N = k \otimes g$, como (k,g) son un sistema generador de $F(K \times G)$ entonces $k \otimes g$ también son un sistema generador de $k \otimes G$, un elemento $x \in K \otimes G$ tal que $\exists\, k \in K$ y $\exists\, g \in G$ m $x = k \otimes g$ diremos que es un elemento descomponible. Notemos que la aplicación $e : K \times G \longrightarrow K \otimes G : (k,g) \longrightarrow k \otimes g$

es bilineal. Llamaremos al grupo $K \otimes G$ producto tensorial de K y G, además viene caracterizado por la siguiente propiedad universal.

(2.2) Proposición

Sean K y G grupos abelianos, existe un grupo $K \otimes G$ y una aplicación bilineal $e : K \times G \longrightarrow K \otimes G$ tal que para toda aplicación bilineal $f : K \times G \longrightarrow H$ existe un único homomorfismo $\phi : K \otimes G \longrightarrow H$ tal que $\phi e = f$. Esta propiedad determina $K \otimes G$ salvo isomorfismo.

Demostración

Ver Fuchs, cap.X, 59.1.

Sean $K \xrightarrow{\alpha} K'$ y $G \xrightarrow{\beta} G'$ homomorfismos en $\mathcal{A}$, consideremos el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
K \times G \arrow[r, "\alpha\times\beta"] \arrow[d, "e"] & K' \times G' \arrow[d, "e'"] \\
K \otimes G \arrow[r, dotted] & K' \otimes G'
\end{tikzcd}$$

Como $e'.(\alpha \times \beta)$ es bilineal, existe un único homomorfismo $\alpha \otimes \beta : K \otimes G \longrightarrow K' \otimes G'$ tal que $\alpha \otimes \beta.e = e'.(\alpha \times \beta)$. Si $K = K'$ y $\alpha = 1_K$ denotaremos $1_K \otimes \beta = \beta_*$, para $G = G'$ y $\beta = 1_G$ $\alpha \otimes 1_G = \alpha_*$. Si a $K \xrightarrow{\alpha} K'$ le asociamos

$K \otimes G \xrightarrow{\alpha_*} K' \otimes G$ fácilmente se comprueba que hemos definido un functor que denotaremos $-\otimes G$. Análogamente se define $K \otimes - : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que a $G \xrightarrow{\beta} G'$ le asociamos $K \otimes G \xrightarrow{\beta_*} K \otimes G'$. Denotemos por $\mathcal{A}^{op}$ la categoría opuesta a $\mathcal{A}$ y consideremos los siguientes functores

$Hom(- \otimes G, -)$, $Hom(-, (-)^G) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, sean $K' \xrightarrow{\alpha} K$, $H \xrightarrow{\beta} H'$ homomorfismos en $\mathcal{A}$, entonces (α^{op}, β) es un morfismo del tipo $(K,H) \longrightarrow (K',H')$ en $\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}$. Los functores anteriores actuan del modo siguiente:

$$Hom(- \otimes G, -)\ [(K,H) \xrightarrow{(\alpha^{op},\beta)} (K',H')] =$$
$$= [Hom(K \otimes G,H) \xrightarrow{Hom(\alpha_*,\beta)} Hom(K' \otimes G,H')]$$

$$Hom(-, (-)^G)\ [(K,H) \xrightarrow{(\alpha^{op},\beta)} (K',H')] =$$
$$= [Hom(K,H^G) \xrightarrow{Hom(\alpha,\beta_*)} Hom(K', (H')^G]$$

siendo $\alpha_* = \alpha \otimes 1_G$ y $\beta_* = Hom(1_G, \beta)$. Con las notaciones anteriores tenemos la siguiente proposición.

<u>(2.3) Proposición</u>

Existe una equivalencia natural de functores

$\eta : Hom(- \times G, -) \longrightarrow Hom(-, (-)^G) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ definida del modo siguiente: $\eta_{KH} : Hom(K \otimes G,H) \longrightarrow Hom(K,H^G)$:

$\eta_{KH}(f)(k)(g) = f(k \otimes g)$, $f : K \otimes G \longrightarrow H$ homomorfismo, $k \in K$ y $g \in G$.

Demostración

Ver Fuch, cap.X, pag.256.

También $X \otimes R$ adquiere de manera natural una estructura de R-módulo a derecha como vemos en la siguiente proposición.

(2.4) Proposición

La operación $. : (X \otimes R) \times R \longrightarrow X \otimes R$ tal que

$.\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes r_i , s\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes r_i.s$ está bién definida y dota a $X \otimes R$ de una estructura de R-módulo a derecha. Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de grupos abelianos $f \otimes 1_R : X \otimes R \longrightarrow Y \otimes R$ es un homomorfismo de R-módulos.

Demostración

Para cada $s \in R$, definimos $f_s : X \times R \longrightarrow X \otimes R :$ $(x,r) \longrightarrow x \otimes r.s$ que es bilineal, entonces $\exists \mid \overline{f}_s : X \otimes R \longrightarrow X \otimes R$ tal que $\overline{f}_s(x \otimes r) = x \otimes r.s$, por tanto $. : (x \otimes R) \times R \longrightarrow X \otimes R : .\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes r_i, s\right) =$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes r_i.s$ está bién definida, fácilmente se comprueba que verifica las condiciones necesarias para que $X \otimes R$ sea R-módulo a derecha.

Además $f[(\Sigma\ x_i \otimes r_i).s] = f(\Sigma\ x_i \otimes r_i.s) = \Sigma\ fx_i \otimes r_i.s =$

$= (\Sigma\ fx_i \otimes r_i).s$, entonces f es homomorfismo de R-módulos. <>

(0-3) Cuadrados cartesianos y cocartesianos

Sea una categoría $\mathcal{C}$, un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \big\downarrow f & = & \big\downarrow g \\ C & \xrightarrow{\beta} & D \end{array}$$

diremos que es un cuadrado cartesiano, si para todos morfismos $X \xrightarrow{r} C$ y $X \xrightarrow{s} B$ tal que $\beta.r = g.s$ existe un único $h : X \longrightarrow A$ tal que $f.h = r$ y $\alpha.h = s$, como h está univocamente determinado por r y s lo denotaremos por $h = r \wedge s$. Dualmente, diremos que es cocartesiano, si para todos morfismos $B \xrightarrow{\bar{s}} Y$ y $C \xrightarrow{\bar{r}} Y$ tal que $\bar{s}\alpha = \bar{r}f$ existe un único $\bar{h} : D \longrightarrow Y$ tal que $g.\bar{h} = \bar{s}$ y $\bar{h}.\beta = \bar{r}$, denotaremos $\bar{h} = \bar{s} \vee \bar{r}$.

Recordemos algunas de las propiedades de los cuadrados cartesianos y cocartesianos.

(3.1) Proposición

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y consideremos los diagramas (01), (02) y (03):

$$(01)\ \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \big\downarrow f & & \big\downarrow g \\ A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' \end{array} \qquad (02)\ \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & C \\ \big\downarrow g & & \big\downarrow h \\ B' & \xrightarrow{\beta'} & C' \end{array} \qquad (03)\ \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\beta\alpha} & C \\ \big\downarrow f & & \big\downarrow h \\ A' & \xrightarrow{\beta'\alpha'} & C' \end{array}$$

Entonces: (a) Si (01) y (02) son cocartesianos, (03) también es cartesiano.

(b) Si (01) y (02) son cartesianos, (03) también es cartesiano.

Demostración

No tiene dificultad (Ver Brown [1]).

(3.2) Proposición

Consideremos el siguiente cuadrado conmutativo en $\mathcal{E}$

$$(D)\quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C & \xrightarrow{\beta} & D \end{array}$$

(a) Si (D) es cartesiano y β monomorfismo, entonces α es monomorfismo.

(b) Si (D) es cocartesiano y α es epimorfismo, entonces β es epimorfismo.

Demostración

Para (a). Sean $h, h' : X \longrightarrow A$ tal que $\alpha h = \alpha h'$, entonces $\beta f h = g \alpha h = g \alpha h' = \beta f h'$ y β monomorfismo $\Longrightarrow$ $f h = f h'$, teniendo en cuenta que (D) es cartesiano se sigue que $h = h'$ y por tanto α es un monomorfismo.

(b) es dual a la anterior.

Vamos a ver la existencia de cuadrados cartesianos y cocartesianos en la categoría de los grupos abelianos.

<u>(3.3) Teorema (Construcción)</u>

Consideremos en $\mathcal{A}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "\beta"] & D \end{tikzcd} \qquad (01)$$

Entonces existen un grupo abeliano A y dos homomorfismos $A \xrightarrow{\alpha} B$, $A \xrightarrow{f} C$ bién determinados por (01), tal que el siguiente cuadrado es cartesiano

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "\beta"] & D \end{tikzcd} \qquad (02)$$

<u>Demostración</u>

Sea $A = \{(c,b) \in C \times B \mid \beta(c) = g(b)\}$, A es un subgrupo de $C \times B$, denotemos por i la inclusión natural $A \longrightarrow C \times B$; sean $p_1 : C \times B \longrightarrow C$ y $p_2 : C \times B \longrightarrow B$ las proyecciones naturales. Tomemos $f = p_1.i$ y $\alpha = p_2.i$, apoyándose en la propiedad universal del producto, fácilmente se comprueba que con estos morfismos el diagrama (02) del enunciado es cartesiano

(3.4) Teorema (Construcción)

Consideremos en $\mathcal{A}$ el diagrama

$$(01)\qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \Big\downarrow f & & \\ C & & \end{array}$$

Entonces existen un grupo abeliano D y dos homomorfismos $B \longrightarrow D$, $C \xrightarrow{\beta} D$ tal que el siguiente cuadrado es co-cartesiano

$$(02)\qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \Big\downarrow f & = & \Big\downarrow g \\ C & \xrightarrow{\beta} & D \end{array}$$

Demostración

Sea $E = \{ b - c \in B + C \mid \exists\ a \in A \quad f\,a = c \quad y \quad \alpha\, a = b \}$
E es un subgrupo de $B \oplus C$, podemos considerar el cociente $D := B \oplus C \mid E$, sea $p : B \oplus C \longrightarrow D$ la proyección natural y $j_1 : B \longrightarrow B \oplus C$, $j_2 : C \longrightarrow B \oplus C$ la inclusiones canónicas, tomemos $g = p.j_1$ y $\beta = p.j_2$, teniendo en cuenta las propiedades universales de la suma directa y del cociente, se prueba fácilmente que con el grupo y homomorfismos anterio-

res el diagrama (02) es cocartesiano. <>

(3.5) Proposición

Sean en $\mathcal{A}$ los siguientes cuadrados conmutativos

$$
(D)\quad
\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\alpha} & B \\
{\scriptstyle f}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle g} \\
C & \xrightarrow{\beta} & D
\end{array}
\qquad\qquad
(D\times X)\quad
\begin{array}{ccc}
A\otimes X & \xrightarrow{\alpha\otimes 1} & B\otimes X \\
{\scriptstyle f\otimes 1}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle g\otimes 1} \\
C\otimes X & \xrightarrow{\beta\otimes 1} & D\otimes X
\end{array}
$$

$$
(D^X)\quad
\begin{array}{ccc}
A^X & \xrightarrow{\alpha^X} & B^X \\
{\scriptstyle f^X}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle g^X} \\
C^X & \xrightarrow{\beta^X} & D^X
\end{array}
$$

Entonces: i) Si (D) es cocartesiano, $(D\otimes X)$ es cocartesiano.

ii) Si (D) es cartesiano, (D^X) es cartesiano.

Demostración

i) Sean $u : B \otimes X \longrightarrow Z$, $v : C \otimes X \longrightarrow Z$ homomorfismos tal que $u(\alpha \otimes 1) = v(f \otimes 1)$, recordemos la equivalencia natural de la proposición (2.3), y consideremos ahora $u : B \longrightarrow Z^X$ y $\eta v : C \longrightarrow Z^X$, como η es natural $\eta u.\alpha = \eta(u.\alpha \otimes 1) = \eta(v.f \otimes 1) = \eta v.f$ y (D) es cocartesiano, $\exists \mid \eta u \vee \eta v : D \longrightarrow Z^X$ tal que $(\eta u \vee \eta v).g = \eta u$ $(\eta u \vee \eta v).\beta = \eta v$, por ser η equivalencia natural $(\eta^{-1})(u \vee \eta v)).g \otimes 1) = u$ y $(\eta^{-1}(\eta u \vee \eta v).(\beta \otimes 1)) = v$. Si existe otro homomorfismo $\xi : D \otimes X \longrightarrow Z$ tal que $\xi.(g \otimes 1) = u$ y $\xi.(\beta \otimes 1) = v$ entonces $\eta\xi.g = \eta u$ y $\eta\xi.\beta = \eta v$ por tanto $\eta\xi = \eta u \vee \eta v$ y en consecuencia $\xi = \eta^{-1}(\eta u \vee \eta v)$.

ii) La demostración es dual a la de i).

<u>(3.6) Proposición</u>

Sea el siguiente cuadrado conmutativo en

$$(D) \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ \alpha\ } & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C & \xrightarrow{\ \beta\ } & D \end{array}$$

i) Si (D) es cartesiano y $K \xrightarrow{1} B$ es núcleo de g, entonces $\hat{o} \wedge 1 : K \longrightarrow A$ es núcleo de f.

ii) Si (D) es cocartesiano y $C \xrightarrow{p} E$ es conúcleo de f entonces $o \vee p : D \longrightarrow E$ es conúcleo de g.

<u>Demostración</u>

i) Desde luego $f.(o \wedge 1) = \hat{o}$. Sea $Z \xrightarrow{u} A$ tal que $f.u = \hat{o}$, $(g\alpha).u = \beta.f.u = \beta.o = \hat{o}$, entonces $\exists \mid \overline{\alpha u} : Z \longrightarrow K$ tal que $1.\overline{\alpha u} = \alpha.u$. Como $f.(o \wedge 1)\overline{\alpha.u} = \hat{o} = f.u$ y $\alpha.(o \wedge 1).\overline{\alpha.u} = 1.\overline{\alpha u} = \alpha u$ entonces $(o \wedge 1).\overline{\alpha.u} = u$ (por ser (D) cartesiano). Veamos que si existe $v : Z \longrightarrow K$ tal que $(o \wedge 1).v = u$ entonces $v = \overline{\alpha u}$.

Si $(o \wedge 1)v = u$ implica que $1v = \alpha(o \wedge 1)v = \alpha.u$, entonces $v = \overline{\alpha u}$ en consecuencia $o \wedge 1 : K \longrightarrow A$ es núcleo de f.

ii) Se demuestra de manera dual.

(0-4) Funtores adjuntos, categorías abelianas y la categoría $\mathcal{A}(2)$

Vamos a dar la definición de functores adjuntos y categorías abelianas; probaremos que $\mathcal{A}(2)$ es una categoría abeliana.

(4.1) Definición

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías y $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtores tales que existe una equivalencia natural

$$\eta_{XY} : \mathcal{D}(FX,Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X,GY)$$

de funtores $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \longrightarrow C$, siendo C la categoría de los conjuntos. Diremos que F es adjunto a izquierda de G (G es adjunto a derecha de F) y η es la adjunción.

Algunas veces tanto $\mathcal{D}(FX,Y)$ como $\mathcal{C}(X,GY)$ tienen una estructura algebraica determinada y η es un homomorfismo entre estas estructuras. Veamos el siguiente ejemplo:

(4.2) Ejemplo

Basta recordar la proposición (2.3) para ver que tomando $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathcal{A}$, $- \otimes G$ es adjunto a izquierda de $(-)^G$, además y es en este caso isomorfismo de grupos.

(4.3) Definición

Una categoría aditiva $\mathcal{C}$ es una categoría con objeto cero

y productos finitos, tal que para $A,B \in |\mathcal{C}|$, $\mathcal{C}(A,B)$ tiene estructura de grupo abeliano y la composición
$\mathcal{C}(A,B) \times \mathcal{C}(B,C) \longrightarrow \mathcal{C}(A,C)$ es bilineal.

(4.4) Definición

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías aditivas y $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un functor, diremos que es aditivo si para $A,B \in |\mathcal{C}|$
$F : \mathcal{C}(A,B) \longrightarrow \mathcal{D}(FA,FB)$ es un homomorfismo.

(4.5) Definición

Una categoría abeliana, es una categoría aditiva en la cual

i) Todo morfismo tiene núcleo y conúcleo.

ii) Todo monomorfismo es núcleo de su conúcleo y todo epimorfismo es conúcleo de su núcleo.

iii) Todo morfismo se puede descomponer como composición de un epimorfismo y un monomorfismo.

Desde luego la categoría de los grupos abelianos $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana. Apoyándonos en ello vamos a ver que $\mathcal{A}(2)$ es una categoría abeliana.

$\mathcal{A}(2)$ tiene como objetos homomorfismos de grupos abelianos y como morfismos pares (f,g) que hacen conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X' \arrow[d, "u'"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y' \end{tikzcd}$$

(4.6) Proposición

La categoría $\mathcal{A}(2)$ es aditiva.

Demostración

Sea el objeto $0 = (0 \xrightarrow{o} 0)$ entonces para todo $u = (X \xrightarrow{u} Y)$ existe un único morfismo $(o,o) : 0 \longrightarrow u$ y un único morfismo $(o,o) : u \longrightarrow 0$, así pues $\mathcal{A}(2)$ tiene objeto cero. Sea $u = (X \xrightarrow{u} Y)$ y $u' = (X' \xrightarrow{u'} Y')$, denotaremos $u \times u' = (X \times X' \xrightarrow{u \times u'} Y \times Y')$, supongamos que tenemos $v = (A \xrightarrow{v} B)$ y morfismos $(f,g) : v \longrightarrow u$, $(f',g') : v \longrightarrow u'$, entonces como $\mathcal{A}$ tiene productos, $\exists |$ $f \wedge f' : A \longrightarrow X \times X'$ tal que $p.(f \wedge f') = f$ y $p'.(f \wedge f') = f'$ (p y p' son las proyecciones canónicas) y $\exists |$ $g \wedge g' : B \longrightarrow Y \times Y'$ tal que $q(g \wedge g') = g$ y $q'(g \wedge g') = g'$ (q,q' proyecciones canónicas). Es inmediato que $(p,q) : u \times u' \longrightarrow u$ y $(p',q') : u \times u' \longrightarrow u'$ son morfismos en $\mathcal{A}(2)$. Por propiedades de productos en $\mathcal{A}$

$$(u \times u')\,(f \wedge f') = uf \wedge u'f' = gv \wedge g'v = (g \wedge g').v$$

Entonces $(f \wedge f', g \wedge g') \in \mathcal{A}(2)\,(v, u \times u')$ y se verifica que $(p,q).(f \wedge f', g \wedge g') = (f,g)$, $(p',q').(f \wedge f', g \wedge g')=$

$= (f', g')$.

Si otro $(k,l) : v \longrightarrow u \times u'$ verifica que $(p,q)\,(k,l) = (pk, ql) = (f,g)$ y $(p',q').(k,l) = (p'k, q'l) = (f', g')$ entonces $k = f \wedge f'$ y $l = g \wedge g'$. Por tanto $(u \times u', (p,q), (p',q'))$ es el producto de u y u' .

$\mathcal{A}(2)\ (u,u')$ tiene estructura de grupo de manera canónica $(f,g) + (\overline{f},\overline{g}) = (f + \overline{f}, g + \overline{g})$, verificandose que la composición $\mathcal{A}(2)\ (u,u') \times \mathcal{A}(2)\ (u',u'') \longrightarrow \mathcal{A}(2)\ (u,u'')$ es bilineal. Por tanto $\mathcal{A}(2)$ es una categoría aditiva.

<u>(4.7) Corolario</u>

Sea $1 \wedge 0 : u \longrightarrow u \times u'$ y $0 \wedge 1 : u' \longrightarrow u \times u'$ entonces $(u \times u' , 1 \wedge 0, 0 \wedge 1)$ es el coproducto de u y u' en $\mathcal{A}(2)$.

<u>Demostración</u>

Ver Hilton-Stammbach, cap.II, prop.(9.1).

<u>(4.8) Proposición</u>

$\mathcal{A}(2)$ es una categoría abeliana.

<u>Demostración</u>

Sea el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Kf \arrow[r, "i"] \arrow[d, "K(f,g)"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & X' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u'"] & Cf \arrow[d, "C(f,g)"] \\ Kg \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r, "g"] & Y' \arrow[r, "q"] & Cg \end{tikzcd}$$

Siendo $Kf \xrightarrow{i} X$, $Kg \xrightarrow{j} Y$ núcleos de $X \xrightarrow{f} X'$ e $Y \xrightarrow{g} Y'$ y $X \xrightarrow{p} Cf$, $Y' \xrightarrow{q} Cg$ sus conúcleos (respectivamente). Por el lema (1.2) $\exists|\ K(f,g) : Kf \longrightarrow Kg$ tal que $j.K(f,g) = u.i$ por el mismo lema también $\exists|\ C(f,g) : Cf \longrightarrow Cg$ tal que $C(f,g).p = q.u'$. Es una comprobación ver que $K(f,g) \xrightarrow{(i,j)} u$ es núcleo de $u \xrightarrow{(f,g)} u'$ y que $u' \xrightarrow{(p,q)} C(f,g)$ es su conúcleo. Entonces se verifica i) de la definición (4.5).

Veamos que si (f,g) es monomorfismo en $\mathcal{A}(2)$, entonces f y g son monomorfismos en $\mathcal{A}$. Si $r,s : Z \longrightarrow X$ tal que $f.r = f.s$, sea $z = (Z \xrightarrow{o} 0)$ entonces (r,o), (s,o) son morfismos en $\mathcal{A}(2)$ tal que $(f,g)\ (r,o) = (f,g)\ (s,o)$ y (f,g) monomorfismo implica que $(r,o) = (s,o)$, por tanto $r = s$. Análogamente para g. Por ser $\mathcal{A}$ abeliana f es núcleo de p y g es núcleo de q entonces $u \xrightarrow{(f,g)} u'$ es núcleo de (p,q). Dualmente se prueba que los epimorfismos son conúcleos de sus núcleos.

Notemos que por ser $\mathcal{A}$ abeliana $f = \overline{f}.P$ y $g = \overline{g}.Q$ siendo $P : X \longrightarrow X|Kg$ y $Q : Y \longrightarrow Y|Kg$ los epimorfismos naturales y $\overline{f}$ y $\overline{g}$ monomorfismos, entonces el morfismo $(f,g) : u \longrightarrow u'$ de $\mathcal{A}(2)$ se puede descomponer del modo siguiente

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(P,Q)}"'] & u' \\ u/K(f,g) \arrow[ur, "{(\overline{f},\overline{g})}"'] & \end{tikzcd}$$

Siendo $u/K(f,g) = (X/Kg \xrightarrow{u/K(f,g)} Y/Kg)$. (P,Q) es epimorfismo por serlo P y Q y $(\overline{f},\overline{g})$ es monomorfismo por serlo $\overline{f}$ y $\overline{g}$. <>

Para cada $G \in |\mathcal{A}|$, denotaremos también por G el objeto $G \xrightarrow{1G} G$ de $\mathcal{A}(2)$. Podemos construir los functores $- \otimes G, \ (-)^G : \mathcal{A}(2) \longrightarrow \mathcal{A}(2)$ de manera que a $u = (A \xrightarrow{u} B)$ le hacen corresponder $u \otimes G =$ $= (A \otimes G \xrightarrow{u \otimes 1_G} B \otimes G)$ y $u^G = (A^G \xrightarrow{u^G} B^G)$, sobre los morfismos actúan de forma natural. Estos funtores nos presentan un nuevo ejemplo de functores adjuntos.

(4.9) Proposición

$- \otimes G$ es adjunto a izquierda de $(-)^G$, como funtores del tipo $\mathcal{A}(2) \longrightarrow \mathcal{A}(2)$, además la adjunción $\eta : \mathcal{A}(2)\,(- \otimes G, -) \longrightarrow \mathcal{A}(2)\,(-, (-)^G)$ es homomorfismo.

Demostración

Sean $u = (A \xrightarrow{u} B)$, $v = (C \xrightarrow{v} D)$ objetos de

$\mathcal{A}(2)$.

Por la proposición (2.3) el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\,(A \otimes G,\, B) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "v_*"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathrm{Hom}\,(A, B^G) \arrow[d, "(v^G)_*"] \\
\mathrm{Hom}\,(A \otimes G,\, D) \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathrm{Hom}\,(A, D^G) \\
\mathrm{Hom}\,(B \otimes G,\, D) \arrow[r, "\eta"] \arrow[u, "(u\otimes 1_G)^*"] & \mathrm{Hom}\,(B, D^G) \arrow[u, "u^*"']
\end{tikzcd}$$

Sean $f : A \otimes G \longrightarrow B$, $g : B \otimes G \longrightarrow D$ tales que $v.f = g(u \otimes 1_G)$, entonces $\eta f.v^G = \eta(v.f) = \eta(g.u \otimes 1_G) = \eta g.u$, por tanto podemos definir $\eta : \mathcal{A}(2)\ (u \otimes G, v) \longrightarrow \mathcal{A}(2)\ (u, v^G)$ tal que $\eta(f,g) = (\eta f, \eta g)$. Se comprueba sin dificultad que η es una equivalencia natural del tipo

$$\mathcal{A}(2)\ (- \otimes G, -) \longrightarrow \mathcal{A}(2)\ (-, (-)^G) : \mathcal{A}(2)^{op} \times \mathcal{A}(2) \longrightarrow \mathcal{A}$$

siguiendose así la tesis del enunciado. <>

(0-5) Límites directos e inversos

Sea I un conjunto parcialmente ordenado, diremos que es dirigido si para $i,j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leqslant k$, $j \leqslant k$ podemos mirar a I como una categoría, en la que los objetos son sus elementos, si $i \leqslant j$ diremos que hay un morfismo de i a j $I(i,j) = \{\leqslant\}$ en otro caso $I(i,j) = \emptyset$. Un functor covariante $A : I \longrightarrow \mathcal{A}$ diremos que es un sistema directo de grupos abelianos y un functor contravariante $A : I \longrightarrow \mathcal{A}$ es un sistema inverso de grupos abelianos, denotaremos $A(i) = A_i$, si $i \leqslant j$ $A(\leqslant) = \pi_{i,j}$ en el caso covariante y $A(\leqslant) = \pi_{ji}$ en el contravariante.

Sea un sistema de homomorfismos $\pi_i : A_i \longrightarrow A_*$ para un grupo abeliano A_* , verificando que $\pi_j . \pi_{i,j} = \pi_i$, diremos que (A_*, π_i) es límite directo del sistema directo (A_i, π_{ij}), si para cualquier otra familia de homomorfismos $\sigma_i : A_i \longrightarrow G$ tal que $\sigma_j . \pi_{i,j} = \sigma_i$, existe un único homomorfismo $\sigma : A_* \longrightarrow G$ tal que $\sigma . \pi_i = \sigma_i$. Consideremos la siguiente proposición.

(5.1) Proposición

Sea $A_* = (\bigoplus_{i \in I} A_i)/B$ siendo B el subgrupo generado por los elementos de la forma $a_i - \pi_{ij} a_i$, sea $\pi_i = P.I_i$:

$A_i \longrightarrow A_*$ siendo I_i y P inclusión y proyección canónicas entonces (A_*, π_i) es el límite directo del sistema directo (A_i, π_{ij}) . El grupo A_* y los homomorfismos π_i estan unívocamente determinados salvo isomorfismo. Utilizaremos la notación $A_* = \underrightarrow{\lim}\, A_i$.

Demostración

Ver Fuchs, párrafo 11.

Dualmente dado un sistema de homomorfismos $\pi_i : A^* \longrightarrow A_i$ tal que $\pi_{i.j} . \pi_i = \pi_j$ diremos que (A^*, π_i) es límite inverso del sistema inverso (A_i, π_{ij}) si para cualquier otra familia de homomorfismos $\sigma_i : G \longrightarrow A_i$ tal que $\pi_{ij} . \sigma_i = \pi_j$, existe un único homomorfismo $\sigma : G \longrightarrow A^*$ tal que $\pi_i . \sigma = \sigma_i$.

(5.2) Proposición

Sea A^* el subgrupo de $\underset{i \varepsilon I}{\pi} A_i$ formado por los elementos $(a_i)_{i \varepsilon I}$ tal que $\pi_{ij} a_i = a_j$, sea $\pi_i = P_i . I$: : $A^* \longrightarrow A_i$ siendo I y P_i inclusión y proyección canónicas, entonces (A^*, π_i) es el límite inverso del sistema inverso (A_i, π_{ij}) . El grupo A^* y los homomorfismos π_i están unívocamente determinados salvo isomorfismo. Utilizaremos la notación $A^* = \underleftarrow{\lim}\, A_i$.

Demostración

Ver Fuchs, párrafo 12.

(5.3) Proposición

Sea (A_i, π_{ij}) un sistema directo de grupos abelianos y $\sigma_i : A_i \longrightarrow A$ una familia de homomorfismos verificando $\sigma_j . \pi_{ij} = \sigma_i$ y tal que:

i) $\forall$ $a \in A$ existe $i \in I$ y $b \in A_i$ tal que $\sigma_i(b) = a$.

ii) Sea $b \in A_i$ $\sigma_i(b) = 0$ si y sólo si existe $j \geqslant i$ tal que $\pi_{ij}(b) = 0$.

Entonces (A, σ_i) es límite directo del sistema directo (A, π_{ij}) .

Demostración

Ver Tennison [28] (1.3-18) .

(5.4) Proposición

Sea (A_i, π_{ij}) un sistema inverso de grupos abelianos y $\sigma_i : A \longrightarrow A_i$ una familia de homomorfismos verificando $\pi_{ij} . \sigma_i = \sigma_j$ y tal que

i) Para toda familia $(a_i)_{i \in I}$ tal que $\pi_{ij} a_i = a_j$, existe $a \in A$ tal que $\sigma_i(a) = a_i$.

ii) Sea $a \in A$, si $\sigma_i(a) = 0$ $\forall$ $i \in I$ entonces $a = 0$.

Entonces (A, σ_i) es el límite inverso del sistema inverso (A,π_{ij}) .

Demostración

Se sigue fácilmente de la proposición (5.2).

(5.5) Proposición

Sea (A_i,π_{ij}) un sistema directo de grupos abelianos y (A,σ_i) el límite directo del sistema anterior, sea $B \in |\mathcal{A}|$ entonces $(A_i \otimes B \ , \ \pi_{ij} \otimes 1_B)$ es un sistema directo de grupos abelianos y $(A \otimes B \ , \ \sigma_i \otimes 1_B)$ es el límite directo del sistema anterior.

Demostración

Como $- \otimes B$ es un functor $(A_i \otimes B \ , \ \pi_{ij} \otimes 1_B)$ es un sistema directo de grupos abelianos (composición de funtores).

Consideremos un $X \in |\mathcal{A}|$ y una familia homomorfismos $f_i : A_i \otimes B \longrightarrow X$ tal que $f_j.(\pi_{ij} \otimes 1_B) = f_i$, entonces por la proposición (2.3). La familia $\eta f_i : A_i \longrightarrow X^B$ verifica que $\eta f_j.\pi_{ij} = \eta f_i$ por tanto existe una única $\overline{f} : A \longrightarrow X^B$ tal que $\overline{f}.\sigma_i = \eta f_i$, si tomamos $(\eta^{-1})\overline{f} = f$ se verifica que $f.(\sigma_i \otimes 1_B) = f_i$. Supongamos que existe otra $g : A \otimes B \longrightarrow X$ tal que $g.(\sigma_i \otimes 1_B) = f_i$, entonces $\eta g.\sigma_i = \eta f_i$ y $\eta g = f$ o bién $g = \eta^{-1} f = \overline{f}$.

(0-6) Divisibilidad y torsión. Definiciones

En primer lugar, recordaremos que entendemos por grupos inyectivos y por grupos divisibles, viendo que ambos conceptos son equivalentes.

(6.1) Definición

Sea $D \in |\mathcal{A}|$, diremos que D es inyectivo si para todo diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "\alpha"] & D \\ B \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

donde α es monomorfismo, existe $\overline{f} : B \longrightarrow D$ tal que $\overline{f}.\alpha = f$.

(6.2) Definición

Sea $D \in |\mathcal{A}|$ y $n \in \mathbb{Z}$, diremos que D es n-divisible si para todo $d \in D$, existe $d' \in D$ tal que $nd' = d$. Tomemos un conjunto de primos P', diremos que D es P'-divisible si para todo $p \in P'$, D es p-divisible. En el caso que P' sean todos los primos de $\mathbb{Z}$, diremos que D es divisible o $\mathbb{Z}$-divisible.

(6.3) Teorema (Baer)

Para $D \in |\mathcal{A}|$ las siguientes condiciones son equivalentes:

i) D es divisible.

ii) D es inyectivo.

iii) D es sumando directo de todo grupo abeliano del que es subgrupo.

Demostración

Ver Fuchs, Theorem (24.5). <>

Recordemos el concepto dual de inyectivo y los grupos libres.

(6.4) Definición

Sea $P \varepsilon |\mathcal{A}|$, diremos que P es proyectivo si para todo diagrama:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "\beta"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\overline{g}"] \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

donde β es un epimorfismo, existe $\overline{g} : P \longrightarrow B$ tal que $\beta.\overline{g} = g$.

(6.5) Definición

Sea $F \varepsilon |\mathcal{A}|$, diremos que F es libre si existe un conjunto de índices I, tal que $F \cong \bigoplus_{i \varepsilon I} \mathbb{Z}_i$, donde $\mathbb{Z}_i$ es una copia de $\mathbb{Z}$.

(6.6) Teorema (Mac Lane)

Un grupo es proyectivo si y sólo si es libre.

Demostración

Ver Fuchs, Theorem (14.6).

(6.7) Definición

Sea $A \in |\mathcal{A}|$, diremos que A es un p-grupo o un grupo de p-torsión, si para todo $a \in A$ orden de a es una potencia de p. Tomemos un conjunto de primos P', diremos que A es un grupo de P'-torsión, si para todo $a \in A$ orden de a es un producto de potencias de primos de P', si P' son todos los primos de $\mathbb{Z}$ diremos que A es un grupo de torsión.

Diremos que A es libre de p-torsión, si para $a \in A$ $n \geqslant 1$ $p^n.a = 0$ implica que $a = 0$, diremos que es libre de P'-torsión si es libre de p-torsión para todo $p \in P'$; en el caso que P' sean todos los primos de $\mathbb{Z}$, diremos que A es libre de torsión.

(6.8) Definición

Sea $A \in |\mathcal{A}|$ diremos que A es plano si el functor $A \otimes -$ transforma monomorfismos en monomorfismos.

(6.9) Proposición

A es plano si y sólo si A es libre de torsión.

Demostración

=>] Basta aplicar A a la sucesión $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow$
$\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$.

<=] Ver Fuchs, Theorem (60.6).

(6.10) Definición

Sea $X \in |\mathcal{A}|$, llamaremos p-componente o subgrupo de p-torsión de X, a los elementos de X cuyo orden sea potencia de p, lo denotaremos por X^p .

(6.11) Definición

Sean $A,B \in |\mathcal{A}|$ y A subgrupo de B diremos que A es puro en B si se verifica la siguiente propiedad. Si para $n \geqslant 1$ y $a \in A$ existe $x \in B$ tal que $nx = a$, entonces existe $x' \in A$ tal que $n.x' = a$.

CAPITULO I

HOMOTOPIA INDUCIDA POR UN ANILLO CON UNIDAD R

Sea $\mathcal{C}$ una categoría, para $A,B \in |\mathcal{C}|$, podemos definir una relación de equivalencia $\simeq$, en $\mathcal{C}(A,B)$, esta deberá ser compatible con la composición de morfismos, es decir si $f,f' \in \mathcal{C}(A,B)$ y $g,g' \in \mathcal{C}(B,C)$, $f \simeq f'$, $g \simeq g'$ entonces $gf \simeq g'.f'$.

A partir de la relación $\simeq$, construimos la categoría cociente $\mathcal{C}/\simeq$, que denominaremos categoría homotópica y designaremos $\mathcal{C}h$. En este capítulo, para un anillo con unidad (no nulo) R, definiremos relaciones en la categoría de los grupos abelianos $\mathcal{A}$, grupos abelianos bajo $A, \mathcal{A}^A$, grupos abelianos sobre $B, \mathcal{A}_B$ y categoría de los pares $\mathcal{A}(2)$. Estudiaremos alguna propiedad de la categoría homotópica correspondiente. También veremos que la ley exponencial, tiene sentido en los grupos abelianos y categoría de los pares, respecto a la relación de homotopía definida.

(I-1) Homotopía en Grupos Abelianos

(1.1) Definición

Sean $K,H \in |\mathcal{A}|$, $f : K \longrightarrow H$ homomorfismo de grupos abelianos, diremos que f es nulohomótopa, $f \simeq 0$ si existe $\varphi : K \times R \longrightarrow H$ bilineal tal que $\varphi(x,1) = \varphi_1(x) = f(x)$.

(1.2) Lema

Los homomorfismos nulohomótopos forman un subgrupo de $\mathrm{Hom}(K,H)$. Lo denotaremos por $\mathcal{N}(K,H)$.

Demostración

Sean $f,g \in \mathcal{N}(K,H)$, existen $\varphi, \psi : K \times R \longrightarrow H$ bilineales tal que $\varphi_1 = f$, $\psi_1 = g$. Ahora bien $(\varphi + \psi)$ también es bilineal y verifica que $(\varphi + \psi)_1 = \varphi_1 + \psi_1 = f + g$, luego $(f + g) \in \mathcal{N}(K,H)$. También se verifica que $(-\varphi)_1 = -\varphi_1 = -f$ siendo $(-\varphi)$ bilineal.

(1.3) Proposición

Sean $K,H \in |\mathcal{A}|$, $H^R = \mathrm{Hom}(R,H)$, $K \otimes R$ el producto tensorial como grupos abelianos, $q_1 : H^R \longrightarrow H : q_1(\alpha) = \alpha(1)$ e $i_1 : K \longrightarrow K \otimes R : i_1(x) = x \otimes 1$, entonces i_1 y q_1 son homomorfismos de grupos, además son equivalentes las afirmaciones:

i) $f : K \longrightarrow H$ es nulohomótopa.

ii) Existe $\varphi : K \otimes R \longrightarrow H$ tal que $i_1 . \varphi = f$. Es decir el diagrama:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_1"'] & H \\ K \otimes R \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] \arrow[u, phantom, ""] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo (Extensión de f a $K \otimes R$).

iii) Existe $\varphi : K \longrightarrow H^R$ tal que $q_1 , \varphi = f$

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[d, "q_1"] \\ K \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[r, "f"'] & H \end{tikzcd}$$

Es decir podemos elevar f.

<u>Demostración</u>

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d, "I_1"'] \arrow[drr, "f"] & & \\ K \times R \arrow[rr, "\overline{\varphi}"] \arrow[d, "j"'] & & H \\ K \otimes R \arrow[urr, dashed, "\varphi"'] & & \end{tikzcd}$$

i) => ii). Sabemos $\exists\ \overline{\varphi} : K \times R \longrightarrow H$ bilineal de forma que $\overline{\varphi} . I_1 = f$, $I_1(x) = (x,1)$. Como $\overline{\varphi}$ es bilineal, y dada la propiedad universal del producto tensorial, existe $\varphi : K \otimes R \longrightarrow H$ tal que $\varphi . j = \overline{\varphi}$ $(j(a,b) = a \otimes b)$. Basta observar que $j . I_1 = i_1$, luego $\varphi . i_1 = f$.

ii) => i) Dada la correspondencia biyectiva que hay entre las bilineales de $K \times R$ en H y los homomorfismos de $K \otimes R$ en H, se sigue que $\varphi . j : K \times R \longrightarrow H$ es bilineal, además $(\varphi . j) . I_1 = \varphi (j . I_1) = \varphi . i_1 = f$.

i) <=> iii) Si $\overline{\varphi} : K \times R \longrightarrow H$ bilineal con $\varphi . I_1 = f$ induce un homomorfismo $\varphi : K \longrightarrow H^R$: : $\varphi(a)(b) = \overline{\varphi}(a,b)$. De que $\overline{\varphi} . I_1 = f$ se sigue que $q_1 . \varphi = f$. Recíprocamente dada $\varphi : K \longrightarrow H^R$ tal que $q_1 . \varphi = f$ induce $\overline{\varphi} : K \times R \longrightarrow H$ bilineal y tal que $\varphi . I_1 = f$. <>

<u>(1.5) Proposición</u>

$q_1 : (-)^R \longrightarrow I$ (I es el functor identidad en los grupos abelianos) e $i_1 : I \longrightarrow - \otimes R$ son transformaciones naturales.

<u>Demostración</u>

Es una comprobación.

<u>(1.6) Definición</u>

A la relación $\simeq$, inducida por $\mathcal{N}(K,H)$ en $\mathrm{Hom}(K,H)$ la llamaremos de homotopía. $[K,H]_R = \mathrm{Hom}(K,H)/\mathcal{N}(K,H)$ son las clases de equivalencia para $\simeq$, sus elementos diremos que son clases de homotopía. H^R es el <u>grupo de arcos de H</u> y $K \otimes R$ es el <u>cono de K</u>.

(1.7) Lema

Sea $G_0 \xrightarrow{f_0} G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3$ en $\mathcal{A}$. Si f_1 es nulohomótopa también lo son $f_1.f_0$ y $f_2.f_1$.

Demostración

$$\begin{tikzcd}
 & & G_2^R \arrow[d, "q_1"] & \\
G_0 \arrow[r, "f_0"] & G_1 \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[ur, phantom, "=", shift left=3] & G_2 \arrow[r, "f_2"] & G_3 \\
 & G_1 \otimes R \arrow[ur, "\varphi"'] \arrow[ur, phantom, "=", shift left=3] & &
\end{tikzcd}$$

Como $f_1 \simeq 0$, existen φ, ψ extensión y elevación de f_1. Entonces $f_2 \cdot \varphi$ es una extensión de $(f_2.f_1)$ y $\psi.f_0$ es una elevación de $(f_1.f_0)$.

<>

Veamos que la relación de homotopía es compatible con la composición de morfismos en la categoría $\mathcal{A}$.

(1.8) Proposición

Sean $f,f' : A \longrightarrow B$ $g,g' : B \longrightarrow C$ homomorfismos tales que $f \simeq f'$ y $g \simeq g'$ entonces $g.f \simeq g'.f'$.

Demostración

Si $f - f' \simeq 0 \Rightarrow f.g - f'g \simeq 0$, análogamente $g - g' \simeq 0 \Rightarrow f'g - f'g' \simeq 0$, luego $f.g \simeq f'.g'$. <>

A la categoría cociente $\mathcal{A}/\simeq \; = \mathcal{A}h$ la llamaremos, categoría homotópica.

<u>(1.9) Teorema</u>

Para cada $K,H \in |\mathcal{A}|$ se verifica

i) $[K,-]_R$, $[-,H]_R$ son functores $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$

ii) $[K,-]_R$, $[-,H]_R$ son functores $\mathcal{A}h \longrightarrow \mathcal{A}$

<u>Demostración</u>

i) Sea $f : H \longrightarrow H'$, induce $f_* : \mathrm{Hom}(K,H) \longrightarrow \mathrm{Hom}|K,H')$. Si $g : K \longrightarrow H$ es nulohomótopa => $f.g \simeq 0$ (lema (1.7)). Entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}(K,H) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathcal{M}(K,H') \arrow[d, tail] \\
\mathrm{Hom}\,(K,H) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathrm{Hom}\,(K,H') \arrow[d] \\
{[K,H]_R} \arrow[r, dashed, "f_*"] & {[K,H]_R}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, induciendo de forma natural $f_* : [K,H]_R \longrightarrow [K,H']_R$.

Fácilmente se comprueba que $(1_H)_* = 1_{[K,H]}$ $(f'.f)_* = f'_*.f_* . (f' : H' \longrightarrow H'')$.

Análogamente. Sea $f : K \longrightarrow K'$, induce $f^* : \mathrm{Hom}(K',H) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K,H)$. Si $g : K' \longrightarrow H$ es nulohomótopa entonces $g.f$ es nulohomótopa (lema (1.7)) luego el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{N}(K',H) & \xrightarrow{\;f^*\;} & \mathcal{N}(K,H) \\
\downarrow & = & \downarrow \\
\mathrm{Hom}\,(K',H) & \xrightarrow{\;f^*\;} & \mathrm{Hom}\,(K,H) \\
\downarrow & = & \downarrow \\
[K',H]_R & \overset{f^*}{- - - \to} & [K,H]_R
\end{array}$$

es conmutativo, e induce de forma natural, $f^* : [K',H]_R \longrightarrow [K,H]_R$ verificando las propiedades de functor.

ii) Si $g,g' : K \longrightarrow H$ y $g \simeq g' \Rightarrow f.g \simeq fg'$ (por prop. (1.8)) y $f_*[g] = f_*[g']$, donde $[g]$ indica la clase de homomorfismos relacionados con g, por la relación de homotopía. Análogamente para el functor $[-,H]_R$.

A partir de ahora denotaremos $[K,H]_R$ por $[K,H]$ subindicaremos con el anillo R, cuando queramos resaltar el anillo ó haya lugar a confusión.

<u>(1.10) Teorema</u>

$[K,-]$ conserva productos $([K, \prod_{i\in I} H_i] \cong \prod_{i\in I} [K,H_i])$.

Demostración

Dual a la anterior, hay que utilizar Hilton-Stammbach, cap.I, prop.(3.4). <>

(1.12) Corolario

$[K,-]$ $[-,H]$ son functores aditivos.

Demostración

Ver Hilton-Stammbach, cap.II, prop.(9.5). <>

Recordemos que la categoría homotópica $\mathcal{A}/\simeq$ la designamos por $\mathcal{A}h$, tiene como objetos los grupos abelianos y como morfismos las clases de homotopía. $[f] \in [K,H]$ denota la clase de homotopía de $f \in \mathrm{Hom}(K,H)$, $[f] = f + \mathcal{N}(K,H)$.

(1.13) Definición

Diremos que $f : K \longrightarrow H$ es una h-equivalencia, cuando $[f]$ es un isomorfismo en $\mathcal{A}h$. Es decir
$\exists$ $f' : H \longrightarrow K$ tal que $f'.f \simeq 1_K$ y $f.f' \simeq 1_H$.

$K \in |\mathcal{A}|$ diremos que es contractil y denotaremos $K \simeq 0$ cuando K es isomorfo en $\mathcal{A}h$ al 0 .

(1.14) Definición

Un grupo abeliano M , diremos que es un R-casimódulo, si existe una ley externa $. : M \times R \longrightarrow M \; ; \; \circ(m,r) = m.r$ tal que

$$(m + m').r = m.r + m'.r$$

$$m.(r + s) = m.r + m.s$$

$$m.1 = m \; .$$

(1.15) Teorema

Sea M grupo abeliano, son equivalentes

i) M es contractil.

ii) M es R-casimódulo.

iii) $[M,H] = 0$ para todo H.

iv) $[K,M] = 0$ para todo K.

Demostración

Es inmediata, basta observar que M es contractil si y sólo si $1_M \simeq 0$. <>

(1.16) Corolario

Todo R-módulo (ya sea a izquierda o derecha) es R-casimódulo y por tanto contractil.

(1.17) Corolario

H^R, $K \otimes R$ son contractiles.

Demostración

Como H^R y $K \otimes R$ son R-módulos a derecha (ver (0-1.7) y (0-2.4)), son contractiles. <>

(1.18) Proposición

Sea $f : K \longrightarrow H$, entonces $f \simeq o \iff \exists$ un grupo contractil G tal que f se factoriza a través de G. Es decir, existe un diagrama conmutativo con G contractil.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \arrow[d, phantom, "="] & H \\ & G \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración

Si $f \simeq o$, f se factoriza a traves de $K \otimes R$ que es contractil. Ver ii) de prop.(1.3) y el corolario anterior. Suponiendo que $f = g.h$ y $1_G \simeq o \Rightarrow f = g.1_G h \simeq g.o.h = o$. (Ver (1.8) prop.). <>

Vamos a estudiar ahora los funtores $- \otimes G, (-)^G :$ $: \mathcal{A}h \longrightarrow \mathcal{A}h$ y demostraremos que son adjuntos.

(1.19) Proposición

$- \otimes G, (-)^G$ son functores $\mathcal{A}h \longrightarrow \mathcal{A}h$.

Demostración

Sabemos que son functores de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$, y que son aditivos,

$(f+g)_* = f_* + g_*$. Por tanto bastará que veamos que si $f \simeq o \Rightarrow f_* \simeq o$.

(a) Para, $-\otimes G$. Consideremos el diagrama

(1.20)
$$\begin{tikzcd} & H_o \otimes G \arrow[dl, "\bar{i}_1"'] \arrow[d, "i_1 \otimes 1"] \arrow[dl, phantom, "=", shift left=4] \\ H_o \otimes G \otimes R & H_o \otimes R \otimes G \arrow[l, "T"'] \end{tikzcd}$$

Donde i_1 e $\bar{i}_1$ son naturales de H_o y $H_o \otimes G$ en sus conos. T intercambia G por R. Para ver que es conmutativo basta considerar los elementos descomponibles.

$T.(i_1 \otimes 1)\ (h \otimes g) = T\ (h \otimes 1 \otimes g) = h \otimes g \otimes 1 = \bar{i}_1(h \otimes g)$.

Sea $f : H_o \longrightarrow H_1$ tal que $f \simeq o$, entonces existe $F : H_o \otimes R \longrightarrow H_1$ tal que $F.i_1 = f$.

$$\begin{tikzcd} H_o \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, "=", shift left=2] & H_1 \\ H_o \otimes R \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

$T^{-1}.(F \otimes 1_G) : H_o \otimes G \otimes R \longrightarrow H_1 \otimes G$ verifica que $(T^{-1}.(F \otimes 1_G)).\bar{i}_1 = f \otimes 1_G$ luego $f \otimes 1_G \simeq o$.

(b) Análogamente para el caso dual. Basta observar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$(1.21)\qquad \begin{tikzcd} (K_1^R)^G \arrow[r, "\overset{T}{\cong}"] \arrow[d, "q_1^G"'] & (K_1^G)^R \arrow[dl, "\bar{q}_1"] \\ K_1^G & \end{tikzcd}$$

Se deduce fácilmente que $f : K_o \longrightarrow K_1$, $f \simeq o \Rightarrow f^G \simeq o$. <>

<u>(1.22) Proposición. Ley Exponencial</u>

$- \otimes G$ es adjunto a izquierda de $(-)^G$, como functores de $\mathcal{A}h$ en $\mathcal{A}h$. ($[K \otimes G, H] \cong [K, H^G]$).

<u>Demostración</u>

Sabemos que $- \otimes G$ y $(-)^G$ son adjuntos como functores de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$. (Ver (0-4.2)).

Veamos que esta propiedad se proyecta en $\mathcal{A}h$. Denominemos $\eta_{KH} : \mathrm{Hom}(K \otimes G, H) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K, H^G)$ la equivalencia natural que sabemos existe. Bastará probar que $f : K \otimes G \longrightarrow H$ es nulohomótopa si y sólo si lo es $\eta_{KH} f : K \longrightarrow H^G$.

Si $f \simeq o$, existe F tal que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& K \otimes G \arrow[dl, "i_1 \otimes 1_G"'] \arrow[d, "\bar{i}_1"] \arrow[r, "f"] & H \\
K \otimes R \otimes G \arrow[r, "T"] \arrow[ur, phantom, "="] & K \otimes G \otimes R \arrow[ur, "F"'] \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "="] &
\end{tikzcd}$$

El triángulo de la izquierda es el (1.20).

Atendiendo a la naturalidad de la equivalencia natural η el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\ (K \otimes G,\ H) \arrow[r, "\eta_{KH}"] & \mathrm{Hom}\ (K,\ H^G) \\
\mathrm{Hom}\ (K \otimes R \otimes G,\ H) \arrow[u, "(i_1 \otimes 1_G)^*"'] \arrow[r, "\eta_{K\otimes R,H}"'] \arrow[ur, phantom, "="] & \mathrm{Hom}\ (K \otimes R,\ H^G) \arrow[u, "(i_1)^*"']
\end{tikzcd}$$

$\eta_{K\ \otimes\ R,H}(F.T)$ verifica que $(i_1)^* \cdot \eta_{K\ \otimes\ R,H}(F.T) =$

$= \eta_{KH}(i_1 \otimes 1_G)^*(F.T) = \eta_{KH}(F.T).\ i_1 \otimes 1_G = \eta_{KH} f \Rightarrow \eta_{KH} f \simeq o$.

Razonamientos duales demuestran que $\eta_{KH} f \simeq o \Rightarrow f \simeq o$. Por tanto η induce una adjunción ε.

$\varepsilon_{KH} : [K \otimes G, H] \longrightarrow [K, H^G] : \varepsilon_{KH}[f] =$

$= [\eta_{KH} f] : \eta_{KH} f(k)(g) = f(k \otimes g)$.

Fácilmente se prueba que ε es una equivalencia natural.

Para $f : K \longrightarrow K'$ y $g : H' \longrightarrow H$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} [K \otimes G,\ H] & \xrightarrow{\varepsilon_{KH}} & [K,\ H^G] \\ \Big\uparrow [f \otimes 1_G, g] & = & \Big\uparrow [f, g^G] \\ [K' \otimes G,\ H'] & \xrightarrow{\varepsilon_{K',H'}} & [K',\ H'^G] \end{array}$$

Donde $[f \otimes 1_G,\ g]$ y $[f,\ g^G]$ vienen definidas de modo natural. <>

(1.23) Proposición

$K \otimes -$ es adjunto a izquierda de $(-)^K$ como functores de $\mathcal{A}h$ en $\mathcal{A}h$. ($[K \otimes G,\ H] \xrightarrow{\varepsilon_{GH}} [G,\ H^K]$) .

Demostración

Es totalmente análoga a la de la anterior proposición.

(1.24) Corolario

Sea el grupo $A = A_1 \otimes \dots \otimes A_i \otimes \dots \otimes A_n$. Basta que para un i, A_i sea contractil para que A también lo sea.

Demostración

$A_1 \otimes \dots \otimes A_i \otimes \dots \otimes A_n \cong A_i \otimes (A_1 \otimes \overset{\hat{i}}{\dots} \otimes A_n)$. Por la conmutatividad de producto tensorial.

$[A_i \otimes (A_1 \otimes \overset{\hat{i}}{\dots} \otimes A_n,\ B] \cong [A_i,\ B^{A_1 \otimes \overset{\hat{i}}{\dots} \otimes A_n}] = 0$. Por ser A_i contractil, además para todo B, luego

$A_i \otimes (A_1 \otimes \overset{\hat{i}}{\ldots} \otimes A_n)$ es contractil, por tanto también $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$ es contractil ($\hat{i}$ denota que hemos suprimido el término A_i). <>

A continuación veremos algun grupo que para determinados anillos R, no es contractil.

(1.25) Proposición

Si R es un anillo con algún entero $n = 1_R + \overset{n}{\ldots} + 1_R$ $n > 1$ inversible, entonces $\mathbb{Z}$ no es contractil.

Demostración

Si $\mathbb{Z}$ contractil $\exists$ $F : \mathbb{Z} \times R \longrightarrow \mathbb{Z}$ bilineal tal que $F(1,1) = 1$ $\quad 1 = F(1,1) = F(1, \frac{1}{n} + \overset{n}{\ldots} + \frac{1}{n}) =$ $= F(1, \frac{1}{n}) + \overset{n}{\ldots} + F(1, \frac{1}{n})$ pero en Z no existe ningún entero que sumado n veces resulte la unidad. $\frac{1}{n}$ denota el inverso de n . <>

(1.26) Proposición

Sea R un anillo con algún entero $n > 1$ inversible, $\mathbb{Z} \xrightarrow{i} R$. $i(1_{\mathbb{Z}}) = 1_R$ monomorfismo, entonces Coker i = $= R/\mathbb{Z} = S$ no es contractil.

Demostración

Si S es contractil, existe $F : S \times R \longrightarrow S$ bilineal con $F_1 = 1_S$. Entonces

$[\frac{1}{n}] = F([\frac{1}{n}], 1) = F([\frac{1}{n}], \frac{1}{n}) + \overset{n}{\ldots} + F([\frac{1}{n}], \frac{1}{n}) =$

$= F([1], \frac{1}{n}) = [o]$ si $[\frac{1}{n}] = [o] \Rightarrow \frac{1}{n} = i(m)$ $m \in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow i(n.m) = 1 \Rightarrow n.m = 1$, lo que no puede ser ya que suponemos $n > 1$. <>

(I-2) Categoría de Grupos Abelianos bajo A

Esta categoría tiene como objetos homomorfismos $A \xrightarrow{i} X$, para un grupo abeliano A fijo, como morfismos $f : i \longrightarrow i'$ homomorfismos $f : X \longrightarrow X'$ haciendo conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i'"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & {} & X' \end{tikzcd}$$

Dicha categoría, la designaremos por $\mathcal{A}^A$. Notemos que la categoría $\mathcal{A}^A$, no es aditiva ya que $\mathcal{A}^A(i,i')$ no es en general grupo abeliano, si definimos la suma en $\mathcal{A}^A(i,i')$ de forma natural.

(2.1) Definición

Sea $(A \xrightarrow{i} X) \in |\mathcal{A}^A|$ y $f : X \longrightarrow X'$ tal que $f.i = o$ diremos que f es nulohomótopa relativa a A ($f \simeq o$ (rel A) , $f \simeq o$ (bajo A) , $f \simeq o$ (rel i) , $f \simeq o$ (bajo i), $f \overset{i}{\simeq} o$, $f \overset{A}{\simeq} o$) si existe $F : X \longrightarrow (X')^R$ tal que conmuta el diagrama:

$$(2.2) \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "o"] \arrow[d, "i"'] & (X')^R \arrow[d, "q_1"] \\ X \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "f"'] & X' \end{tikzcd}$$

El enunciado dual debido a la ley exponencial en $\mathcal{A}h$ es el siguiente:

Diremos que $f \overset{A}{\simeq} o$, si existe $\overline{F} : X \otimes R \longrightarrow X'$ conmutando el diagrama

$$(2.3)\quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] & & X' \arrow[d, "o"] \\ X \otimes R \arrow[u, "i_1"] \arrow[urr, "F"] & & A \otimes R \arrow[ll, "i\times 1_R"'] \end{tikzcd}$$

Fácilmente se ve que las dos formas de definir cuando $f \overset{A}{\simeq} o$ son equivalentes.

(2.4) Proposición

Sea $(A \xrightarrow{i} X \in |\mathcal{A}^A|$ y $f : X \longrightarrow X'$ tal que $f.i = o$ sabemos que $\exists\,|\,:\hat{f} : X/i(A) \longrightarrow X'$ tal que $\hat{f}.p = f$, $p : X \longrightarrow X/i(A)$ es la proyección natural, entonces $f \simeq o$ (rel A) $\Leftrightarrow \hat{f} \simeq o$.

Demostración

=>) Supongamos $f \overset{A}{\simeq} o$, como el diagrama (2.2) es conmutativo $\exists\,|\,\hat{F} : X/i(A) \longrightarrow (X')^R$ tal que $\hat{F}.p = F$, veamos que el triángulo:

$$(2.5)\quad \begin{tikzcd} & (X')^R \arrow[d, "q_1"] \\ X/i\,A \arrow[ur, "\hat{F}"] \arrow[r, "\hat{f}"] & X' \end{tikzcd} \quad \text{conmuta.}$$

$(q_1\hat{F})p = q_1(\hat{F}p) = q_1F = f = \hat{f}.p$ y p epimorfismo $\Rightarrow q_1.\hat{F} = \hat{f}$.

<=) Si $\hat{f} \simeq o$ entonces existe un diagrama conmutativo

como (2.5). Basta tomar $\hat{F}.p$ y ver que conmuta el diagrama (2.2) para $F = \hat{F}.p$. <>

(2.6) Definición

Sean $(A \xrightarrow{i} X)$, $(A \xrightarrow{i'} X') \in |\mathcal{A}^A|$ $f,g : i \longrightarrow i'$. Diremos que $f \overset{A}{\simeq} g$ si $f-g \overset{A}{\simeq} o$. (Observemos que $(f-g)i = fi - gi = i'-i' = o)$.

La relación $\overset{A}{\simeq}$ es de equivalencia en $\mathcal{A}^A(i,i')$ que normalmente denotaremos por $\mathcal{A}^A(X,X')$. Al cociente $\mathcal{A}^A(X,X')/\overset{A}{\simeq}$ denotaremos por $[X,X']^A$. Para $f \in \mathcal{A}^A(X,X')$ $[f]^A$ es la clase de homotopía de f bajo A. Notemos que $[X,X']^0 = [X,X']$, en general $[X,X']^A$ no tiene una estructura de grupo privilegiada.

A continuación veremos que $\overset{A}{\simeq}$ es compatible con la composición en $\mathcal{A}^A$ con lo que podemos definir la correspondiente categoría homotópica $\mathcal{A}^A h$.

(2.7) Lema

Sea $i_o \xrightarrow{f_o} i_1 \xrightarrow{f_1} o_2 \xrightarrow{f_2} o_3$ en A, siendo o_2 (o_3) el homomorfismo $A \xrightarrow{o} X_2$ $(A \xrightarrow{o} X_3)$. Si $f_1 \overset{A}{\simeq} o$ entonces $(f_2.f_1) \overset{A}{\simeq} o$ y $(f_1.f_o) \overset{A}{\simeq} o$.

Demostración

Parecida a la del lema (1.7).

(2.8) Proposición

Sean $f, g : i \longrightarrow i'$ y $f', g' : i' \longrightarrow i''$ en $\mathcal{A}^A$, siendo $f \overset{A}{\simeq} g$ y $f' \overset{A}{\simeq} g'$ entonces $f'.f \overset{A}{\simeq} g'.g$.

Demostración

Como en la proposición (1.8).

(2.9) Definición

Sean $(A \xrightarrow{i} X)$, $(A \xrightarrow{i'} X') \in |\mathcal{A}^A|$ y sea $f : X \longrightarrow X'$ con $f.i = i'$. Diremos que f es una h-equivalencia bajo A si $[f]^A$ es un isomorfismo en $\mathcal{A}^A h$.

(I-3) Categoría de Grupos Abelianos sobre B

Este párrafo es la dualización del anterior, solo hay que cambiar el sentido de las flechas y sustituir los objetos por sus duales. Recordemos que las construcciones cono de un grupo, y grupo de arcos son duales. Tiene como objetos homomorfismos $P : Y \longrightarrow B$, como morfismos $f : p' \longrightarrow p$ homomorfismos $f : Y' \longrightarrow Y$ haciendo conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p'"'] & \arrow[d, phantom, "="] & Y \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Designaremos esta categoría $\mathcal{A}_B$, $\mathcal{A}_B$ en general no es aditiva, aunque lo sea para algún B.

(3.1) Definición

Sea $(Y \xrightarrow{p} B) \in |\mathcal{A}_B|$ y $f : Y' \longrightarrow Y$ tal que $p.f \simeq o$, diremos que $f \simeq o$ (sobre B) ($f \underset{B}{\simeq} o$, $f \underset{p}{\simeq} o$) cuando $\exists\ F : Y' \otimes R \longrightarrow Y$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, "=" near start] & Y \arrow[d, "p"] \\ Y' \otimes R \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "o"'] \arrow[ur, phantom, "=" near end] & B \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

El enunciado dual es el siguiente. Diremos que $f \underset{B}{\simeq} o$ cuando $\exists\ \overline{F} : Y' \longrightarrow Y^R$ tal que conmuta:

$$(3.3) \qquad \begin{tikzcd} B^R & Y^R \arrow[l, "p^R"'] \arrow[d, "q_1"] \\ Y' \arrow[u, "o"] \arrow[ur, "\bar{F}"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

(3.4) Proposición

Sea $Y' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} B$ $p.f = o$. Sabemos que existe una única $\hat{f} : Y' \longrightarrow \mathrm{Ker}p$ tal que $i.\hat{f} = f$ siendo $i : \mathrm{Ker}p \longrightarrow Y'$ la inclusión canónica. Entonces $f \underset{\bar{B}}{\simeq} o$ si y sólo si $\hat{f} \simeq o$.

Demostración

Totalmente dual a la de proposición (2.4).

(3.5) Definición

Sean $(Y \xrightarrow{p} B)$, $(Y' \xrightarrow{p'} B) \in |\mathcal{A}_B|$

$f,g : p' \longrightarrow p$. Diremos que $f \underset{\bar{B}}{\simeq} g$ si $f-g \underset{\bar{B}}{\simeq} o$.

$(p\,(f-g) = pf-pg = p'-p' = o)$. La relación $\underset{\bar{B}}{\simeq}$ es de equivalencia. Normalmente denotaremos $\mathcal{A}_B(p',p)$ como $\mathcal{A}_B(Y',Y)$ y el cociente $\mathcal{A}_B(Y',Y)/\underset{\bar{B}}{\simeq}$ por $[Y',Y]_B$. Para $f \in \mathcal{A}_B(Y',Y)$, $[f]_B$ es la clase de homotopía de f sobre B.

Como en $\mathcal{A}^A$, la relación $\underset{\bar{B}}{\simeq}$ es compatible con la composición de morfismos, verificándose la siguiente proposición, con lema previo. Denotaremos la correspondiente categoría homotópica por $\mathcal{A}_B h$.

(3.6) Lema

Sea $0_o \xrightarrow{f_o} 0_1 \xrightarrow{f_1} p_2 \xrightarrow{f_2} p_1$ en $\mathcal{A}_B$, siendo 0_o (0_1) el homomorfismo $Y_o \xrightarrow{o} B$ $(Y_1 \xrightarrow{o} B)$. Si $f_1 \underset{B}{\simeq} o$ entonces $(f_2.f_1) \underset{B}{\simeq} o$ y $(f_1.f_o) \underset{B}{\simeq} o$.

(3.7) Proposición

Sean $f'.g' : p'' \longrightarrow p'$ y $f,g : p' \longrightarrow p$ en $\mathcal{A}_B$, siendo $f' \underset{B}{\simeq} g'$ y $f \underset{B}{\simeq} g$ entonces $f.f' \underset{B}{\simeq} g.g'$.

(3.8) Definición

Sean $(Y' \xrightarrow{p'} B)$, $(Y \xrightarrow{p} B) \in |\mathcal{A}_B|$ y sea $f : Y' \longrightarrow Y$ con $p.f = p'$. Diremos que f es una h-equivalencia sobre B, si $[f]_B$ es un isomorfismo en $\mathcal{A}_B h$.

(3.9) Nota

También podemos considerar la categoría de Grupos Abelianos bajo A y sobre B $\mathcal{A}_B^A$, que tiene como objetos ternas $(A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} B)$ con A y B fijos y morfismos los definidos de forma natural. En esta categoría diremos que $f \underset{B}{\overset{A}{\simeq}} o$ si $f \overset{A}{\simeq} o$ y $f \underset{B}{\simeq} o$. Utilizaremos notaciones como $\mathcal{A}_B^A h$ para la categoría homotópica y $[X,X']^A_B$ para las clases de homotopía.

(I-4) Categoría de los pares $\mathcal{A}(2)$ y homotopía

Recordemos el párrafo (0-4) en el que hemos definido la categoría $\mathcal{A}(2)$, también hemos probado que es una categoría abeliana, en particular $\mathcal{A}(2)\ (u,u')$ tiene estructura de grupo abeliano, para $u = (X \xrightarrow{u} Y)$, $u' = (X' \xrightarrow{u'} Y')$ objetos de $\mathcal{A}(2)$.

(4.1) Definición

Sea $(f,g) : u \longrightarrow u'$, diremos que $(f,g) \simeq o$ si $\exists$ $F : X \times R \longrightarrow X'$ y $G : Y \times R \longrightarrow Y'$ bilineales tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "I_1"] \arrow[dd, "u"'] & & X' \arrow[dd, "u'"] \\
& X \times R \arrow[ur, "F"'] \arrow[dd, "u \times 1_R"] & \\
Y \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "I_1"] & & Y' \\
& Y \times R \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

A continuación, damos una serie de propiedades análogas a las del párrafo I. Su demostración es también análoga.

(4.2) Lema

Los morfismos nulohomótopos son un subgrupo de

$\mathcal{A}(2)\ (u,u')$ que denotaremos por $\mathcal{N}(2)\ (u,u')$.

(4.3) Proposición

Sean $u,u' \in |\mathcal{A}(2)|$, $u'^R = (X'^R \xrightarrow{u'^R} Y'^R)$, $q_1 : u'^R \longrightarrow u' : q_1 = (q_1^{X'}, q_1^{Y'})$, $u \otimes R = (X \otimes R \xrightarrow{u \otimes 1_R} Y \otimes R)$ e $i_1 : u \longrightarrow u \otimes R :$ $: i_1 = (i_1^X , i_1^Y)$, entonces q_1 e i_1 son morfismos de $\mathcal{A}(2)$, además son equivalentes las afirmaciones

i) $f = (f_1.f_2) : u \longrightarrow u'$ es nulohomótopo.

ii) $\exists\ F : u \otimes R \longrightarrow u'$ tal que $F.i_1 = f$.

iii) $\exists\ F : u \longrightarrow u'^R$ tal que $q_1.F = f$.

(4.4) Definición

A la relación $\simeq$, inducida por $\mathcal{N}(2)\ (u,u')$ en $\mathcal{A}(2)$ (u,u') la llamaremos de homotopía.

$[u,u']_R = \mathcal{A}(2)\ (u,u')/\mathcal{N}(2)\ (u,u')$, es el grupo de las clases de homotopía de u en u' . u'^R son los arcos de u' y $u \otimes R$ es el cono de u.

(4.5) Lema

Sea $u_o \xrightarrow{f_o} u_1 \xrightarrow{f_1} u_2 \xrightarrow{f_2} u_3$ en $\mathcal{A}(2)$. Si $f_1 \simeq o$ entonces también $(f_1.f_o) \simeq o$ y $(f_2.f_1) \simeq o$.

(4.6) Proposición

Sean $f, f' : u \longrightarrow v$ y $g, g' : v \longrightarrow w$ en $\mathcal{A}(2)$ tales que $f \simeq f'$ y $g \simeq g'$ entonces $g.f \simeq g'.f'$.

(4.7) Teorema

Para cada $u, v \simeq |\mathcal{A}(2)|$ se verifica

i) $[u,-]$, $[-,v]$ son functores $\mathcal{A}(2) \longrightarrow \mathcal{A}$

ii) $[u,-]$, $[-,v]$ son functores $\mathcal{A}(2)h \longrightarrow \mathcal{A}$.

(4.8) Teorema

$[u,-]$ conserva productos, $[u, \underset{i\varepsilon I}{\pi} v_i] \simeq \underset{i\varepsilon I}{\pi} [u, v_i]$.

(4.9) Teorema

$[-,v]$ transforma coproductos en productos, $[\underset{i\varepsilon I}{\oplus} u_i, v] \simeq \underset{i\varepsilon I}{\pi} [u_i, v]$.

(4.10) Corolario

$[u,-]$ $[-,v]$ son functores aditivos.

La categoría homotópica $\mathcal{A}(2)/\simeq$, la denotaremos por $\mathcal{A}(2)h$. Para $f \; \varepsilon \; \mathcal{A}(2)\;(u,v)$, $[f]$ es la clase de homotopía de f.

(4.11) Definición

Sea $\xi : u \longrightarrow v$, diremos que es h-equivalencia de pares si $[\xi]$ es isomorfo en $\mathcal{A}(2)h$.

Diremos que $u \in |\mathcal{A}(2)|$ es contractil ($u \simeq o$) si u es isomorfo a o en $\mathcal{A}(2)h$.

(4.12) Definición

Sean X e Y R-casimódulos, $u : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de R-casimódulos si $u(x + x') = u(x) + u(x')$ y $u(x.r) = u(x).r$.

(4.13) Teorema

$u : X \longrightarrow Y$ es contractil en $\mathcal{A}(2)$ si y sólo si X e Y admiten estructuras de R-casimódulos y u es un homomorfismo de X en Y como R-casimódulos.

Demostración

$u \simeq o$ si y sólo si $1_u \simeq o$, siendo $1_u = (1_X, 1_Y)$. $(1_X, 1_Y) \simeq o$ si y sólo si existen $F : X \times R \longrightarrow X$, $G : Y \times R \longrightarrow Y$ bilineales, y el siguiente diagrama es conmutativo. Ver definición (4.1).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "1_X"] \arrow[dr, "I_1"] \arrow[dd, "u"'] & & X \arrow[dd, "u"] \\
& X \times R \arrow[ur, "F"'] \arrow[dd, "u\times 1_R"] & \\
Y \arrow[rr, "1_Y"] \arrow[dr, "I_1"] & & Y \\
& Y \times R \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

De que F bilineal y el triángulo superior sea conmutativo se sigue que X es R-casimódulo (análogamente Y). Que $u.F = G.(u\times L)$ es decir que si es un homomorfismo de (X,F) en (Y,G). (X,F) indica que en X consideramos la estructura de R-casimódulo F (análogamente (Y,G)). <>

(4.14) Corolario

Si $u : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de R-módulos entonces u es contractil en $\mathcal{A}(2)$.

(4.15) Corolario

$X \otimes R \xrightarrow{u\otimes 1_R} Y \otimes R$, $X^R \xrightarrow{u^R} Y^R$ son contractiles en $\mathcal{A}(2)$.

Demostración

Como $u \otimes 1_R$ y u^R son homomorfismos de R-módulos (ver 0-1.7 y 0-2.4) también lo son de R-casimódulos. <>

Recordemos que para $G \xrightarrow{1_G} G$ hemos definido los functores $- \otimes G$, $(-)^G : \mathcal{A}(2) \longrightarrow \mathcal{A}(2)$ de forma que a $u = (X \xrightarrow{u} Y)$ le hacen corresponder $u \otimes G =$ $= (X \otimes G \xrightarrow{u \otimes 1_G} Y \otimes G)$ y $u^G = (X^G \xrightarrow{u^G} Y^G)$, hemos visto en (0-4.9) que $- \otimes G$ es adjunto a izquierda de $(-)^G$ como functores del tipo $\mathcal{A}(2) \longrightarrow \mathcal{A}(2)$. A continuación veremos que se pueden considerar como functores $\mathcal{A}(2)h \longrightarrow \mathcal{A}(2)h$, para luego ver que $- \otimes G$ es adjunto a izquierda de $(-)^G$ como functores $\mathcal{A}(2)h \longrightarrow \mathcal{A}(2)h$.

<u>(4.16) Proposición</u>

$- \otimes G$, $(-)^G$ son functores $\mathcal{A}(2)h \longrightarrow \mathcal{A}(2)h$. (Es decir $f,g : u \longrightarrow v$ con $f \simeq g$ entonces $f_* \simeq g_*$) .

<u>(4.17) Proposición. Ley Exponencial</u>

$- \otimes G$ es adjunto a izquierda de $(-)^G$ como funtores de $\mathcal{A}(2)h$ en $\mathcal{A}(2)h$. $([u \times G,v] \overset{\varepsilon uv}{\cong} [u,v^G])$.

<u>(4.18) Proposición</u>

$G \otimes -$ es adjunto a izquierda de $(-)^G$ como funtores de $\mathcal{A}(2)h$ en $\mathcal{A}(2)h$ $([G \times u,v] \overset{\xi uv}{\cong} [u,v^G])$.

Recordemos que $\mathcal{A}(2)$ es abeliana. Entonces $\mathcal{A}(2)\ (u,v) = v^u$ es un grupo abeliano. Estudiaremos unas nuevas equivalencias naturales que nos seran útiles posteriormente.

(4.19) Proposición

Existe una equivalencia natural
$\sigma_{uv} : \mathcal{A}(2)\,(G \otimes u,v) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G,v^u)$ entre los functores anteriores. Observemos que son del tipo
$(\mathcal{A}(2))^{op} \times \mathcal{A}(2) \longrightarrow \mathcal{A}$. En $\mathrm{Hom}(G,v^u)$ G es un grupo abeliano, en $\mathcal{A}(2)\,(G \times u,v)$ G es el objeto $G \xrightarrow{1_G} G$.

Demostración

Sea $u = (A \xrightarrow{u} B)$ y $v = (G \xrightarrow{v} D)$. Sea $(\alpha,\beta) : G \otimes u \longrightarrow v$, definimos $\sigma_{uv}(\alpha,\beta)g = (\alpha_g,\beta_g)$: $\alpha_g(a) = \alpha(g \otimes a)$, $\beta_g(b) = \beta(g \otimes b)$, fácilmente se comprueba que está bién definida. Si $\alpha_g = o$ y $\beta_g = o$ para todo g entonces $\alpha = o$ y $\beta = o$, luego σ_{uv} es inyectivo. Para $\gamma : G \longrightarrow v^u : g \longrightarrow \gamma_g = (\gamma_g^1, \gamma_g^2)$ definimos $(\gamma^1, \gamma^2) : G \otimes u \longrightarrow v$ como $\gamma^1(g \otimes a) = \gamma_g^1(a)$ y $\gamma^2(g \times b) = \gamma_g^2(b)$ γ^1 y γ^2 sobre los elementos no descomponibles se definen por linealidad. Se comprueba que (γ^1, γ^2) está bién definido y que $\sigma_{uv}(\gamma^1, \gamma^2) = \gamma$. La naturalidad es una mera comprobación. <>

(4.20) Proposición

Existe una equivalencia natural
$\overline{\sigma_{uv}} : \mathcal{A}(2)\,(u \otimes G,v) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G,v^u)$ definida como sigue, para $(\alpha,\beta) : u \otimes G \longrightarrow v$ $\overline{\sigma_{uv}}(\alpha,\beta)g = (\alpha_g,\beta_g)$:
$\alpha_g(a) = \alpha(a \otimes g)$, $\beta_g(b) = \beta(b \otimes g)$.

Demostración

Análoga a la anterior.

Veremos que las equivalencias anteriores se pueden trasladar a las categorías homotópicas.

(4.21) Proposición

Existe una equivalencia natural $\vartheta_{uv} : [G \otimes u, v] \longrightarrow [G, v^u]$ tal que $\vartheta_{uv}[(\alpha,\beta)] = [\sigma_{uv}(\alpha,\beta)]$.

Demostración

Bastará que probemos que $\mathfrak{Z} \simeq o \iff \sigma_{uv}(\mathfrak{Z}) \simeq o$ para $\mathfrak{Z} \in \mathcal{A}(2)(G \otimes u, v)$.

Si $\mathfrak{Z} \simeq o$ entonces $\exists\ F : G \otimes u \otimes R \longrightarrow v$ haciendo conmutativo el triángulo:

$$\begin{tikzcd} G \otimes u \arrow[r, "\mathfrak{Z}"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, "="] & v \\ G \otimes u \otimes R \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Para ver que $\sigma \mathfrak{Z} \simeq o$ basta observar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} v^u \otimes R \arrow[r, "\bar{\sigma}"] \arrow[dr, phantom, "="] & (v^u)^R \arrow[d, "q_1"] \\ G \arrow[u, "\sigma F"] \arrow[r, "\sigma \mathfrak{Z}"] & v^u \end{tikzcd}$$

Siendo σ y $\bar{\sigma}$ las equivalencias naturales de las proposiciones (4.19) y (4.20) ; $u = (A \xrightarrow{u} B)$ $v = (C \xrightarrow{v} D)$.

Supongamos que $\sigma \simeq o$, entonces $\exists F : G \otimes R \longrightarrow v^u$ tal que el triángulo:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\sigma\mathfrak{Z}"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, "="] & v^u \\
G \otimes R \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

El siguiente cuadrado conmuta; siendo T el homomorfismo que intercambia u por R.

$$\begin{tikzcd}
G \otimes u \arrow[r, "\mathfrak{Z}"] \arrow[d, "i_2"'] \arrow[dr, phantom, "="] & v \\
G \otimes u \otimes R \arrow[r, "T"] & G \otimes R \otimes u \arrow[u, "\sigma^{-1}F"']
\end{tikzcd}$$

Por tanto $\mathfrak{Z} \simeq o$. <>

(4.22) Proposición

Existe una equivalencia natural
$\bar{\theta}_{uv} : [u \otimes G, v] \longrightarrow [G, v^u]$ tal que $\bar{\theta}_{uv}[(\alpha,\beta)] =$
$= [\overline{\sigma_{uv}}(\alpha,\beta)]$.

Demostración

Análoga a la anterior.

CAPITULO II

COFIBRACIONES Y FIBRACIONES

En el capítulo I, hemos definido relación de homotopía en una categoría $\mathcal{C}$, construyendo la categoría cociente $\mathcal{C}h$, así como el functor proyección natural $P : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}h$. En $\mathcal{C}$ para un morfismo $A \xrightarrow{i} X$, podemos plantear el problema de extensión de un morfismo $A \xrightarrow{f} Y$ a través de i (Es decir: ¿existe $\bar{f} : X \longrightarrow Y$ tal que $\bar{f}.i = f$?). Si trasladamos el problema de la extensión a la categoría homotópica $\mathcal{C}h$, en general el hecho de que $P(f)$ sea extensible a traves de $P(i)$ no quiere decir que f sea extensible a traves de i. Las cofibraciones son aquellos morfismos i, para los cuales, si el problema de la extensión tiene solución en la categoría homotópica $\mathcal{C}h$ entonces también lo tiene en $\mathcal{C}$. Dualmente aparecen las fibraciones, como aquellos morfismos $E \xrightarrow{p} B$ tales que si el problema de la elevación a traves de p de un morfismo $X \xrightarrow{f} B$, tiene solución en la categoría homotópica $\mathcal{C}h$, también tiene solución en $\mathcal{C}$.

Los párrafos 1,2 y 3 se refieren a cofibraciones, los 4, 5 y 6 a fibraciones, siendo estos últimos la dualización de los primeros. Para dualizar una definición o una proposición, no hay sino que cambiar el sentido de las flechas (dualidad categórica) y sustituir los funtores y transformaciones naturales por sus duales (dualidad inducida por la ley exponencial). Recordemos que el functor cono y el functor arcos son duales, así como las transformaciones naturales i_1 y q_1 .

En el párrafo 1 (4), estudiamos productos y coproductos de cofibraciones (fibraciones); bajo que condiciones un monomorfismo (epimorfismo) es cofibración (fibración) y recíprocamente. También probamos que cualquier homomorfismo se puede poner como composición de una cofibración y una h-equivalencia (de una h-equivalencia y una fibración).

En el párrafo 2 (5), en la primera parte probamos el teorema (2.1) (teorema (5.1)) que nos dice en que condiciones una h-equivalencia $f : X \longrightarrow X'$ es h-equivalencia bajo A, para un homomorfismo $A \xrightarrow{i} X$ (una h-equivalencia $f : E' \longrightarrow E$ es h-equivalencia sobre B, para $E \xrightarrow{p} B$). A continuación se estudian retractos A de X, considerando el caso que la inclusión $A \xrightarrow{i} X$ sea cofibración. (Dilatados E de B, en los que la proyección $E \xrightarrow{p} B$ sea fibración). Finalmente relacionamos h-equivalencias en $\mathcal{A}(2)$, en las que los objetos son cofibraciones (fibraciones), con h-equivalencias en $\mathcal{A}$.

Por último en el párrafo 3, para un grupo abeliano A podemos considerar la subcategoría plena Cof^A de $\mathcal{A}^A$, tomando los objetos $A \xrightarrow{i} X$ de $\mathcal{A}^A$ tales que i es cofibración, y la correspondiente categoría homotópica $Cof^A h$. Un homomorfismo $A \xrightarrow{\alpha} B$ induce de modo natural funtores $\alpha_* : Cof^A \longrightarrow Cof^B$ y $\alpha_* : Cof^A h \longrightarrow Cof^B h$, asociando a una cofibración $A \xrightarrow{i} X$ el homomorfismo del lado contrario del cuadrado cocartesiano determinado por i y α. Probamos que si $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ tales que $\alpha \simeq \beta$ entonces los functores α_* , $\beta_* : Cof^A h \longrightarrow Cof^B h$ son equivalentes naturales. Dualmente (párrafo 6), para $\alpha : A \longrightarrow B$ se inducen functores $\alpha^* : Fib_B \longrightarrow Fib_A$ y $\alpha^* : Fib_B h \longrightarrow Fib_A h$, demostramos que si $\alpha \simeq \beta$ α^* y $\beta^* : Fib_B h \longrightarrow Fib_A h$ son equivalentes naturales.

(II-1) Problema de la extensión. Cofibraciones

Consideremos los siguientes diagramas en $\mathcal{A}$ y en $\mathcal{A}h$ respectivamente

(1.1)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "{[f]}"] \arrow[d, "{|i|}"'] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Diremos que f es extensible a traves de i, si existe $g : X \longrightarrow Y$ tal que $gi = f$. Vamos a considerar aquellos homomorfismos i, que verifiquen la siguiente propiedad: Sea f homomorfismo con dominio A entonces f es extensible a traves de i si y sólo si $[f]$ es extensible a traves de $[i]$, A estos homomorfismos i los llamaremos cofibraciones. El problema de extensión a traves de cofibraciones en $\mathcal{A}$, lo hemos trasladado a la categoría homotópica $\mathcal{A}h$.

Situación totalmente análoga se presenta en la categoría Top^{o} (espacios con punto base), en la que se estudian aplicaciones $i : A \longrightarrow X$ de modo que la extensión a traves de ellas se puede estudiar en la correspondiente categoría homotópica, una familia de aplicaciones continuas para la que se verifica esta propiedad son las h-cofibraciones. Estas se estudian detalladamente en el texto de Dieck-Kamps-Puppe Homotopietherorie |3|.

<u>(1.2) Definición</u>

Sean $A,X,Y \in |\mathcal{A}|$ e $i : A \longrightarrow X$ homomorfismo, diremos que i tiene la propiedad de extensión de homotopía (P.Ex.H) para Y, cuando para cualquier homotopía $F : A \longrightarrow Y^R$ existe $G : X \longrightarrow Y^R$ tal que $G.i = F$. Si i tiene la P.Ex.H para todo Y diremos que i es una cofibración.

<u>(1.3) Teorema</u>

Son equivalentes las afirmaciones

i) $A \xrightarrow{i} X$ es una cofibración

ii) Para todas $f : A \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Y$ tales que $g.i \simeq f$, existe $g' : X \longrightarrow Y$ tal que $g'.i = f$ y $g \simeq g'$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & Y \\ X \arrow[ur, "g"] \arrow[ur, dashed, bend right, "g'"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Demostración</u>

i) => ii) Como $gi - f \simeq o \Rightarrow \exists\ F : A \longrightarrow Y^R$ tal que $q_1.F = gi - f$ entonces $\exists\ G : X \longrightarrow Y^R$ con $Gi = F$ ya que i tiene la P.Ex H para Y . $g - q_1G \simeq g$ pues $q_1G \simeq o$, además $(g - q_1G)i = gi - q_1Gi = gi - q_1F = gi - gi + f = f$. Basta tomar $g' = g - q_1G$.

ii) => i) El siguiente triángulo conmuta salvo homotopía

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & Y^R \\ X \arrow[ur, "o"] & \end{tikzcd}$$

Recordemos que Y^R es contractil por I-1.17, entonces $\exists\ G : X \longrightarrow Y^R$ tal que $G.i = F$.

<u>(1.4) Teorema</u>

Sea $A \xrightarrow{i} X$ homomorfismo, son equivalentes

i) $A \xrightarrow{i} X$ es una cofibración.

ii) Para todo Y contractil $\mathrm{Hom}(-,Y)$ transforma i en una aplicación suprayectiva $i^* = \mathrm{Hom}(i,1_Y)$.

iii) Si $f : A \longrightarrow Z$ es tal que $f \simeq o$ existe $g : X \longrightarrow Z$ tal que $g.i = f$.

iv) Si $f : A \longrightarrow Z$ $f \simeq o$ existe $g : X \longrightarrow Z$ tal que $g \simeq o$ e $gi = f$.

Demostración

Evidentemente iv) => iii) => ii) => i) (Recordemos que Y^R es contractil). Veamos que i) => iv) .

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[d, "i"'] & Z^R \arrow[d, "q_1"] \\ X \arrow[ur, "G"'] & Z \end{tikzcd}$$

Si $f \simeq o \Rightarrow \exists\ F : A \longrightarrow Z^R$ $\overline{\text{m}}$ $q_1F = f$, como i es cofibración $\exists$ $G : X \longrightarrow Z^R$ $\overline{\text{m}}$ $G.i = F$ además $q_1Gi = q_1F = f$ luego q_1G es una extensión de f a traves de i y $q_1G \simeq o$. <>

(1.5) Proposición

Consideremos el siguiente triángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i'"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ X \arrow[rr, "h"'] & {} & X' \end{tikzcd}$$

Entonces si i' es cofibración también lo es i .

Demostración

Sea $f : A \longrightarrow Y$ $f \simeq o$ entonces $\exists$ $g : X' \longrightarrow Y$ con $gi' = f$ por ser i' cofibración y punto iii) del teorema anterior, además $ghi = i'g = f$ luego gh es una extension de f a traves de i y por el teorema anterior i es una cofibración. <>

(1.6) Proposición

La composición de cofibraciones es cofibración.

Demostración

Es inmediata.

(1.7) Proposición

Consideremos el siguiente cuadrado cocartesiano

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & A' \arrow[d, "i'"] \\ X \arrow[r, "g"] & X' \end{tikzcd}$$

Entonces si i es cofibración también lo es i'.

Demostración

Sea $A' \xrightarrow{h} Y$ y $h \simeq o \Rightarrow hf \simeq o$ e i cofibración $\Rightarrow$

Hilton-Stammbach [15] que nos da la sucesión Ext para grupos abelianos, en la primera variable inducida por la sucesión exacta corta $A \rightarrowtail X \twoheadrightarrow X/A$.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X/A,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}(A,Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}(X/A,Y) \longrightarrow \dots$$

Si X/A es libre es $\mathbb{Z}$-proyectivo y si Y es $\mathbb{Z}$-divisible es $\mathbb{Z}$-inyectivo, en ambos casos $\mathrm{Ext}(X/A,Y) = 0 \Rightarrow i^*$ es sobre y apartado ii) del teorema (1.4) $\Rightarrow A \xrightarrow{i} X$ es cofibración.
<>

En el siguiente teorema, veremos que la suma directa de cofibraciones es cofibración.

<u>(1.11) Teorema</u>

$\bigoplus_{i\in I} A_i \xrightarrow{\bigoplus_{i\in I} u_i} \bigoplus B_i$ es cofibración si y sólo si $A_i \xrightarrow{u_i} B_i$ es cofibración $\forall\, i \in I$.

<u>Demostración</u>

Teniendo en cuenta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "I_i"] \arrow[dr, phantom, "="] & B_i \arrow[d, "J_i"] \\
\bigoplus_{i\in I} A_i \arrow[r, "\bigoplus_{i\in I} u_i"] & \bigoplus_{i\in I} B_i
\end{tikzcd}$$

Donde I_i y J_i son las inclusiones canónicas. I_i es cofibración ya que admite retracción entonces $(\oplus u_i).I_i$ es cofibración por ser composición de cofibraciones y por prop.(1.5), u_i es cofibración.

Recíprocamente, supongamos u_i cofibración para todo $i \in I$ y sea Y contractil. Sea el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}\,(\oplus B_i,\ Y) & \xrightarrow{(\oplus u_i)^*} & \mathrm{Hom}\,(\oplus A_i,\ Y) \\ \Vert\wr & = & \Vert\wr \\ \pi\ \mathrm{Hom}\,(B_i,\ Y) & \xrightarrow{\pi\ u_i^*} & \pi\ \mathrm{Hom}\,(A_i,\ Y) \end{array}$$

Si u_i cofibración por apartado ii) del teorema (1.4), u_i^* es sobre para todo $i \in I$ por tanto $\pi\ u_i^*$ es sobre => $(\oplus u_i)^*$ es sobre => $\oplus u_i$ es cofibración. <>

<u>(1.12) Corolario</u>

$A_1 \times \ldots \times A_n \xrightarrow{u_1 \times \ldots \times u_n} B_1 \times \ldots \times B_n$ es cofibración si y sólo si $A_i \xrightarrow{u_i} B_i$ es cofibración $i = 1,\ldots,n$.

<u>(1.13) Teorema</u>

Si $A \xrightarrow{u} B$ es cofibración entonces $A \otimes C \xrightarrow{u \times 1_C} B \otimes C$ es cofibración $C \in |\mathcal{A}|$.

Demostración

Atendiendo a la naturalidad de la equivalencia natural η que aparece en la demostración de la proposición I-1.22, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}\,(B \otimes C,\ Y) \arrow[r, "\eta_{BX}"] \arrow[d, "(u \otimes 1_C)^*"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathrm{Hom}\,(B,\ Y^C) \arrow[d, "u^*"] \\ \mathrm{Hom}\,(A \otimes C,\ Y) \arrow[r, "\eta_{AY}"] & \mathrm{Hom}\,(A,\ Y^C) \end{tikzcd}$$

Sea $f : A \otimes C \longrightarrow Y$ y $f \simeq o \Rightarrow \eta_{AY} f \simeq o$ (Ver proposición (I-1.22)), si u cofibración $\exists\ g \in \mathrm{Hom}(B,\ Y^C)$ tal que $u^* g = \eta_{AY} f$. Entonces $\eta_{BY}{}^{-1} g$ es una extensión de f a traves de $u \otimes 1_C$. Por apartado iii) del teorema (1.4) se sigue que $u \otimes 1_C$ es cofibración. <>

(1.14) Corolario

Si $A \xrightarrow{u} B$, $C \xrightarrow{v} D$ son cofibraciones $A \otimes C \xrightarrow{u \otimes v} B \otimes D$ es cofibración.

Demostración

$u \otimes v = (1_D \otimes v) \cdot (u \otimes 1_C)$ y composición de cofibraciones es cofibración. <>

(1.15) Proposición

$A \xrightarrow{i} X$ es cofibración si y sólo si

$A \otimes R \xrightarrow{i \otimes 1_R} X \otimes R$ admite retracción.

Demostración

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Hom\ (A,\ (A \otimes R)^R) & \xrightarrow{\eta\ \simeq} & Hom\ (A \otimes R,\ A \otimes R) \\ \uparrow i^* & = & \uparrow (i \otimes 1_R)^* \\ Hom\ (X,\ (A \otimes R)^R) & \xrightarrow{\eta\ \simeq} & Hom\ (X \otimes R,\ A \otimes R) \end{array}$$

Es conmutativo por la naturalidad de η. Por ser $(A \otimes R)^R$ contractil e i cofibración, i^* es suprayectiva (apartado ii) del teorema (1.4)). Por ser η equivalencia natural $(i \otimes 1_R)^*$ es suprayectiva, luego $\exists\ r : X \otimes R \longrightarrow A \otimes R$ tal que $(i \otimes 1_R)^*(r) =$ $= r.(i \otimes 1_R) = 1_{A \otimes R}$.

Recíprocamente, sea la homotopía $F : A \longrightarrow Y^R$. Sea $r : X \otimes R \longrightarrow A \otimes R$ la retracción de $i \otimes 1_R$, entonces $\eta^{-1}_{XY}(r.(\eta_{AY}F))$ es una extensión de F a traves de i. <>

A continuación vamos a ver que cualquier homomorfismo $f : A \longrightarrow B$ se puede descomponer como composición de una cofibración y una h-equivalencia. El grupo a traves del cual factorizamos f es lo que llamamos cilindro de f y denotaremos Z_f.

(1.16) Teorema

Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo, $Z_f = B \oplus (A \otimes R)$ y $p^1 : B \oplus (A \otimes R) \longrightarrow B$ la proyección canónica. Entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f-i_1"'] & {} \arrow[d, phantom, "="] & B \\ & B\oplus(A\otimes R) \arrow[ur, "p'"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, $f-i_1$ es una cofibración y p^1 es una h-equivalencia.

Demostración

Utilizaremos las siguientes notaciones:
$j^1 : B \longrightarrow B \oplus (A \otimes R)$, $j^2 : A \otimes R \longrightarrow B \oplus (A \otimes R)$ son las inclusiones canónicas y $p^2 : B \oplus (A \otimes R) \longrightarrow A \otimes R$ la proyección canónica sobre la segunda componente.

Que el diagrama conmuta es inmediato. De que conmute el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f-i_1"] \arrow[dr, "i_1"'] & {} \arrow[d, phantom, "="] & B \oplus (A \otimes R) \arrow[dl, "-p^2"] \\ & A \otimes R & \end{tikzcd}$$

Como i_1 es cofibración $f-i_1$ también lo es por prop. (1.5). Desde luego $p^1.j^1 = 1_B$. Veamos que $j^1.p^1 \simeq 1_{Z_f}$.
Sea el triángulo

$$\begin{tikzcd}
B \oplus (A \otimes R) \arrow[rr, "1 - j^1 . p^1"] \arrow[dr, "p^2"'] & {=} & B \oplus (A \otimes R) \\
& A \otimes R \arrow[ur, "j^2"'] &
\end{tikzcd}$$

que conmuta, y como $A \otimes R$ contractil $\Rightarrow 1 - j^1 . p^1 \simeq o$. <>

En el teorema (1.10) hemos visto alguna condición que nos asegura cuando un monomorfismo es cofibración, en la siguiente proposición estudiamos algunos casos en los que una cofibración debe ser necesariamente monomorfismo.

(1.17) Proposición

Sea $A \xrightarrow{i} X$ cofibración y R de característica cero. Si A es contractil ó A es libre de torsión o $\mathbb{Z}$ es puro en R (ver 0-6.11) entonces i es monomorfismo.

Demostración

Como el diagrama siguiente es conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i_1"] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "i_1"] \\
A \otimes R \arrow[r, "i \otimes 1_R"] & X \otimes R
\end{tikzcd}$$

$i \otimes 1_R$ es monomorfismo (ver prop.(1.15) entonces si i_1 es monomorfismo i lo es también. Si A es contractil i_1 admite una retracción, luego es monomorfismo. Consideremos la sucesión Tor en la segunda variable, aplicada a la sucesión exacta corta $o \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} R \xrightarrow{p} S \longrightarrow o$, notemos que i es inyectiva ya que R es de característica cero. Ver Hilton-Stammbach, cap.IV, párrafo 11.

$$\ldots \longrightarrow \operatorname{Tor}(A,S) \longrightarrow A \otimes Z \xrightarrow{1_A \otimes i} A \otimes R \longrightarrow A \otimes S \longrightarrow 0$$

Como A es libre de torsión, A es plano y por tanto Tor (A,S) = 0 (Hilton-Stammbach, cap.III, ejercicios (8.1), (8.7)) entonces $1_A \otimes i$ es inyectiva. Como el triángulo

$$\begin{tikzcd} A \otimes Z \arrow[r, "1_A \otimes i"] & A \otimes R \\ A \arrow[u, "f"', "\wr"] \arrow[ur, "i_1"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, siendo $f(a \otimes z) = z.a$, y f isomorfismo => i_1 es monomorfismo.

Si $\mathbb{Z}$ es puro en R $1_A \otimes i : A \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow A \otimes R$ es monomorfismo (Ver Fuchs, cap.X, theorem 60.4), por tanto i_1 es monomorfismo. <>

<u>(1.18) Proposición</u>

Sea R de característica cero. Entonces $\mathbb{Z}$ es puro en R si y sólo si toda cofibración es monomorfismo.

Demostración

=>) Es consecuencia de la proposición anterior.

<=) $A \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{1_A \otimes i} A \otimes R$ es monomorfismo ya que $A \xrightarrow{i_1} A \otimes R$ es cofibración, para cualquier grupo abeliano A. Teniendo en cuenta Fuchs, Ejercicio 60.2, se sigue que $\mathbb{Z}$ es puro en R.

(II-2) h-equivalencias en $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^A$ y $\mathcal{A}(2)$. Retractos

(2.1) Teorema

Sea el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i'"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & X' \end{tikzcd}$$

Si i' cofibración y f h-equivalencia entonces f es h-equivalencia bajo A.

Primeramente probemos dos lemas previos.

(2.2) Lema

Sea el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ X \arrow[rr, "g"] & & X \end{tikzcd}$$

Si $g \simeq 1_X$ entonces existe $g' : i \longrightarrow i$ tal que $g'.g \overset{A}{\simeq} 1_X$.

Demostración

Denotaremos con 1, 1_X y con $2 = 1_X + 1_X$. Como $1 - g \simeq o$, $\exists$ $F : X \longrightarrow X^R$ tal que $q_1.F = 1 - g$, veamos que $g' = 2 - g$.

(a) $g'g - 1 = (2-g)g - 1 = g + g - g^2 -1 = (1-g)g - (1-g)$.

Bastará ver que $F.g - F : X \longrightarrow X^R$ es una homotopía bajo

A que lleva $g'g - 1$ al cero. Es decir que el siguiente diagrama conmuta:

(b)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "o"] \arrow[d, "i"'] & X^R \arrow[d, "q_1"] \\ X \arrow[r, "g'g-1"'] \arrow[ur, "Fg-F"] & X \end{tikzcd}$$

(c) $(g'g-1)i = g'gi-i = g'i-i = (2-g)i-1 = 2i-i-i = o =$
$= q_1 o$.

(d) $(Fg-F)i = Fgi-Fi = Fi-Fi = 0$.

(e) $q_1(Fg-F) = q_1Fg - q_1F = (1-g)g - (1-g) = g'g-1$ por (a), (c), (d), (e) nos prueban que el diagrama (b) conmuta. <>

<u>(2.3) Lema</u>

Sea el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i'"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & X' \end{tikzcd}$$

Si i' es cofibración y $[f]$ tiene inversa a izquierda en $\mathcal{A}h$ entonces $[f]^A$ tiene inversa a izquierda en $\mathcal{A}^Ah$.

<u>Demostración</u>

Ya que $[f]$ tiene inversa a izquierda en $\mathcal{A}h$, existe $f' : X' \longrightarrow X$ tal que $[f'].[f] = [f'.f] = [1_X]$ es decir

$f'.f \simeq 1_X \Rightarrow f'.fi \simeq i$ y $fi = i' \Rightarrow f'.i' \simeq i$, como i' cofibración por teorema (1.3), existe $f'' : X' \longrightarrow X$ tal que $f''.i' = i$ y $f'' \simeq f'$ entonces $f''.f \simeq 1_X$ y $f''fi = i$, estamos en condiciones del lema anterior, luego
$\exists\ g' : i \longrightarrow i$ tal que $g'.f''.f \overset{A}{\simeq} 1_X$. Tomaremos
$f''' = g'.f''$ que verifica que $f'''.f \overset{A}{\simeq} 1_X$ o bién
$[f''']^A.[f]^A = [1_X]^A$. <>

<u>Demostración del teorema (2.1)</u>:

$[f]$ tiene inversa a izquierda en $\mathcal{A}h$ e i' cofibración y lema (2.3) $\Rightarrow \exists\ f_1 : i' \longrightarrow i$ tal que
$[f_1]^A.[f]^A = [1_X]^A \Rightarrow f_1.f \overset{A}{\simeq} 1_X \Rightarrow f_1.f \simeq 1_X$ y f es h-equivalencia $\Rightarrow f_1$ es h-equivalencia $\Rightarrow |f_1|$ tiene inversa a izquierda en $\mathcal{A}h$ e i cofibración (ver prop. (1.5))
$\Rightarrow \exists\ f_2 : X \longrightarrow X'$ tal que $[f_2]^A[f_1]^A = [1_{X'}]^A$ (lema anterior) $[f_2]^A = [f_2]^A.[f_1]^A.[f]^A = [f]^A \Rightarrow [f]^A[f_1]^A = [1_{X'}]^A$.
Entonces f es h-equivalencia bajo A. <>

<u>(2.4) Teorema</u>

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i'"] \arrow[d, phantom, "="] & \\
X \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[d, "p"] & & X' \arrow[ll, shift left, "f'"] \arrow[d, "p'"] \\
X/i(A) \arrow[rr, shift left, "\bar{f}"] & & X'/i'(A) \arrow[ll, shift left, "\bar{f}'"]
\end{tikzcd}
$$

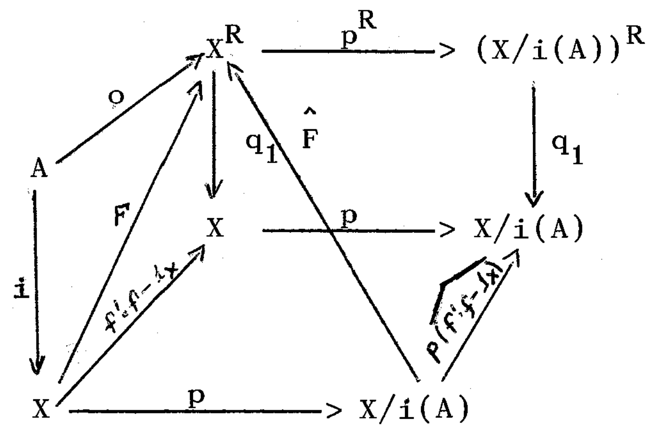
Sea el diagrama conmutativo de la izquierda:

f es h-equivalencia bajo A, f' su inversa homotópica bajo A, p y p' las proyecciones canónicas, $\bar{f}$, $\bar{f}'$ los homomorfismos inducidos por f y f'.

Entonces $\overline{f}$ es h-equivalencia con inversa homotópica $\overline{f}'$.

Demostración

Si f h-equivalencia con f' inversa homotópica, entonces $f'.f - 1_X \overset{A}{\simeq} o$ y $f.f' - 1_{X'} \overset{A}{\simeq} o$. Si $f'.f - 1_X \overset{A}{\simeq} o$, existe la homotopía $F : X \longrightarrow X^R$ que lleva $f'.f - 1_X$ a cero, bajo A. Utilizaremos la notación "^" para los homomorfismos inducidos al conúcleo de i. Es decir si $hi = o$ $\exists \mid \hat{h} \ni \hat{h}.p = h$. Podemos construir el siguiente diagrama conmutativo

(a) 

En el diagrama (a) conmuta la cara lateral izquierda porque $f'.f - 1_X \overset{A}{\simeq} o$, la cara de abajo por la propiedad universal de los conúcleos y la posterior por ser q_1 una transformación natural. Como $iF = o$ $\exists \mid \hat{F}$ tal que $\hat{F}p = F$. Fácilmente se comprueba que $p.\widehat{(f'.f - 1_X)} =$

$= \overline{f}'.\overline{f} - 1_{X/i(A)}$, veamos que una elevación de esta aplicación a traves de q_1 es $q_1.p^R.\hat{F}$.

$(q_1.p^R.\hat{F})p = p.q_1.\hat{F}.p = p.q_1.F = p.(f'f - 1_X) =$

$= (\overline{f}'.\overline{f} - 1_{X/i(A)}).p$.

Como p es epimorfismo $q_1 p^{R}\hat{F} = \overline{f'}.\overline{f} - 1_{X/i(A)}$. Luego $\overline{f'}.\overline{f} \simeq 1_{X/i(A)}$. Análogamente $\overline{f}.\overline{f'} \simeq 1_{X'/i'(A)}$. <>

<u>(2.5) Corolario</u>

Sea el diagrama conmutativo de la izquierda

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i'"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ X \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "p"] & & X' \arrow[d, "p'"] \\ X/i(A) \arrow[rr, "\overline{f}"] & & X'/i'(A) \end{tikzcd}$$

Siendo $\overline{f}$ la inducida por f a los conúcleos de i e i'. Si i' cofibración y f h-equivalencia, entonces $\overline{f}$ es también h-equivalencia.

<u>Demostración</u>

Por el teorema (2.1) f es h-equivalencia bajo A y por el teorema anterior $\overline{f}$ es h-equivalencia. <>

Ahora definiremos los diferentes tipos de retractos $A \subset X$ dando a continuación un teorema que los relaciona con el caso que $A \subset X$ sea cofibración.

<u>(2.6) Definición</u>

Sea $A \xrightarrow{i} X$ homomorfismo en $\mathcal{A}$.

(a) A es un <u>retracto débil</u> de X si existe $r : X \longrightarrow A$ tal que $r.i \simeq 1_A$.

(b) A es un retracto de X, si existe $r : X \longrightarrow A$ tal que $r.i = 1_A$.

(c) A es un retracto por deformación débil de X si existe $r : X \longrightarrow A$ tal que $r.i \simeq 1_A$ y $i.r \simeq 1_X$.

(d) A es un retracto por deformación de X si existe $r : X \longrightarrow A$ tal que $r.i = 1_A$ $i.r \simeq 1_X$.

(e) A es un retracto por deformación fuerte de X si existe $r : X \longrightarrow A$ tal que $r.i = 1_A$ $i.r \overset{A}{\simeq} 1_X$.

(2.7) Proposición

Sea $i : A \longrightarrow X$ cofibración entonces

i) A es retracto débil de X (a) <=> A es retracto de X (b)

ii) A es retracto por deformación débil (c) <=> A es retracto por deformación de X (d) <=> A es retracto por deformación fuerte de X (e) .

Demostración

Desde luego se verifica que (e) => (d) => (c) , (b) => (a) .

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "1_A"'] \arrow[dr, "i"] & \\ A & & X \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

En el diagrama de la izquierda, si $r.i \simeq 1_A$ como i cofibración existe $r' : X \longrightarrow A$ tal que $r'.i = 1_A$ y $r \simeq r'$ (ver teorema (1.3)), entonces (a) => (b) y (c) => (d).

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "1_A"'] \arrow[dr, "i"] & \\ A \arrow[rr, "i"] & & X \end{tikzcd}$$

Si se, verifica (d) i es h-equivalencia, i cofibración y teorema (2.1) => i es h-equivalencia bajo A, luego $\exists\ r : i \longrightarrow 1_A$ $(r.i = 1_A)$ tal que $i.r \overset{A}{\simeq} 1_X$. <>

Vamos a estudiar en $\mathcal{A}(2)$ cuando un morfismo $(f.g) : i \longrightarrow j$ es h-equivalencia, suponiendo que i y j son cofibraciones.

(2.8) Proposición

Sea el cuadrado conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Si i y j son cofibraciones, f y g h-equivalencias en $\mathcal{A}$, entonces $(f,g) : i \longrightarrow j$ es h-equivalencia en $\mathcal{A}(2)$.

Demostración

Veamos que $[(f,g)]$ tiene inversa a izquierda en $\mathcal{A}(2)h$. Sean $f' : B \longrightarrow A$ y $g' : Y \longrightarrow X$ inversas homotópicas de f y g . Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "j"'] \arrow[dr, "i.f'"] & \\ Y \arrow[rr, "g'"] & & X \end{tikzcd}$$

Probemos que conmuta salvo homotopía.

(a) $g'.j = g'.j.1_B \simeq g'.j.f.f' = g'.g.i.f' \simeq 1_X.i.f' = i.f'$

Como j es cofibración, existe $g'' : Y \longrightarrow X$ tal que

(b) $g''.j = i.f'$ y $g'' \simeq g'$ (Ver teorema (1.3)).

Sabemos que $f'.f - 1_A \simeq o$, luego existe $F : A \otimes R \longrightarrow A$ con

(c) $f'.f - 1_A = F.i_1$. $i \otimes 1_R$ admite retracción ya que i es cofibración (prop.(1.15), entonces $i.F$ se puede extender a traves de $i \otimes 1_R$, sea $\overline{F}$ dicha extensión. Hace conmutativo el siguiente cuadrado:

(d)
$$\begin{tikzcd} A \otimes R \arrow[r, "F"] \arrow[d, "i \otimes 1_R"] & A \arrow[d, "i"] \\ X \otimes R \arrow[r, "\overline{F}"] & X \end{tikzcd}$$

Sea $k = g''.g - \overline{F}.i_1$ k es h-equivalencia ya que $g''.g \simeq 1_X$ (si $g'' \simeq g'(b) \Rightarrow g''.g \simeq g'.g \simeq 1_X$) y $\overline{F}.i_1 \simeq o$. Además $ki = i$ como vamos a probar.

(e) $ki = g''.gi - \overline{F}.i_1 i = g''.j.f - \overline{F}.i\otimes 1_R.i_1 = i.f'.f - i.F.i_1 =$
$= i.f'.f - i(f'.f - 1_A) = i$.

Para probar (e), hemos tenido en cuenta que $gi = jf$,

$i_1 . i = i \otimes 1_R \cdot i_1$, (b), (d) y (c) . Por (e) el triángulo conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i"] \arrow[d, phantom, "="] & \\
X \arrow[rr, "k"] & {} & X
\end{tikzcd}$$

Puesto que k es h-equivalencia, e i cofibración por el teorema (2.1) k es h-equivalencia bajo A, sea $k' : X \longrightarrow X$ su inversa homotópica, entonces $k'.k \overset{A}{\simeq} 1_X$ es decir existe $G : X \otimes R \longrightarrow X$ conmutando el siguiente diagrama:

(f)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "k'.k - 1_X"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[r, phantom, "= \quad G"] & {} & X \\
X \otimes R \arrow[urr] & {} \arrow[u, phantom, "="] & A \otimes R \arrow[ll, "i \otimes 1_R"'] \arrow[u, "o"']
\end{tikzcd}$$
además $k'i = i$

Tomemos $g''' = k'g''$ es inmediato que $(f'.g''')$ es un morfismo de j en i. Para ver que $[(g'''.f')]$ es inversa a izquierda de $[(f.g)]$, basta ver que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f'f-1_A"] \arrow[dr, "i_1"] \arrow[dd, "i"'] & & A \arrow[dd, "i"] \\
 & A \otimes R \arrow[ur, "F"] \arrow[dd, "i \otimes 1_R"] & \\
X \arrow[rr, "g'''g-1_X"] \arrow[dr, "i_1"'] & & X \\
 & X \otimes R \arrow[ur, "k'.\bar{F} * G"'] &
\end{tikzcd}$$

Nos falta ver que conmutar el triángulo inferior y el cuadrado anterior derecho.

$(K'\overline{F}+G)i_1 = k'\overline{F}i_1 + Gi_1 = k'(g''g-k) + k'k-1_X =$

$= k'g''g-1_X = g'''g-1_X$.

Donde hemos tenido en cuenta, la definición de k, g''' y (f).

$(k'\overline{F}+G).(i\otimes 1_R) = k'.\overline{F}\ (i\otimes 1_R) = k'iF + 0 = iF$.

Hemos considerado (d) y (f).

Teniendo en cuenta que f' y g''' son h-equivalencias y j e i cofibraciones se sigue que $|(f'.g''')|$ tiene inversa a izquierda que por asociatividad de la composición, necesariamente tiene que ser $[(f,g)]$. Con lo que hemos probado que (f,g) es una h-equivalencia en $\mathcal{A}(2)$. <>

(2.9) Teorema

Sea $i : A \longrightarrow X$ cofibración y A contractil entonces la proyección natural $X \xrightarrow{p} X/i(A)$ es una h-equivalencia.

Demostración

Como A contractil $(1_A \simeq o)$ $\exists$ $F : A \longrightarrow A^R$ tal que $q_1.F = 1_A$. Por ser i cofibración existe una extensión de $i^R.F$ a traves de i, sea G dicha extensión. Podemos considerar el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & A^R \arrow[dr, "q_1"] \arrow[dd, "i^R"] & \\
A \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "1_A"] \arrow[dd, "i"] & & A \arrow[dd, "i"] \\
 & X^R \arrow[dr, "q_1"] \arrow[dd, "p^R"] & \\
X \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "q_1^G"] \arrow[dd, "p"] & & X \arrow[dd, "p"] \\
 & (X/i(A))^R \arrow[dr, "q_1"] & \\
X/i(A) \arrow[ur, dashed, "H"] \arrow[rr, dashed, "q_1^H"] & & X/i(A)
\end{tikzcd}
$$

Puesto que $p^R.G.i = p^R.i^R.F = (p.i)^R F = 0^R.F = 0$ existe una única $H : X/i(A) \longrightarrow (X/i(A))^R$ tal que $H.p = p^R.G$. Notemos que $q_1.Gi = i$ de donde $(1_X - q_1G).i = i-i = 0$, por tanto $\exists\, |\; f : X/i(A) \longrightarrow X$ tal que $f.p = 1_X - q_1G. \Rightarrow f.p \simeq 1_X$. Además

$p.f.p = p - pq_1G = p - 1_1.p^R.G = p - q_1.H.p = (1-q_1H)p$ y p epimorfismo $p.f = 1_{X/i(A)} - q_1H$ es decir $p.f \simeq 1_{X/i(A)}$.

Por tanto p es una h-equivalencia. <>

(II-3) Cofibraciones inducidas

Dado un diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"] & B \\ X & \end{tikzcd}$$

Entonces existe un diagrama

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "i_\alpha"] \\ X \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & X_\alpha \end{tikzcd}$$

de manera que el siguiente cuadrado es cocartesiano

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"] & B \arrow[d, "i_\alpha"] \\ X \arrow[r] & X_\alpha \end{tikzcd}$$

Ver (0-3.4)

Diremos que i_α es la inducida por i a traves de α.

Para $i, i' \in |\mathcal{A}^A|$ y $f : i' \longrightarrow i$, podemos considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i'"] \arrow[rrr, "\alpha"] & & & B \arrow[dl, "i_\alpha"'] \arrow[dr, "i'_\alpha"] & \\ X \arrow[rrr, "\bar{\alpha}"] \arrow[rr, "f"'] & & X' \arrow[rrr, "\bar{\alpha}'"'] & X_\alpha \arrow[rr, dashed, "f_\alpha"] & & X'_\alpha \end{tikzcd}$$

como $\bar{\alpha}'.f.i = \bar{\alpha}'.i' = i'_\alpha.\alpha$ $\exists \mid (i'_\alpha \vee \bar{\alpha}'.f) : X_\alpha \longrightarrow X'_\alpha$, $f_\alpha := i'_\alpha \vee \bar{\alpha}'.f$ tal que $f_\alpha.\bar{\alpha} = \bar{\alpha}'.f$ y $f_\alpha.i_\alpha = i_\alpha$. Por tanto f_α es morfismo $i_\alpha \longrightarrow i'_\alpha$.

(3.1) Proposición

La correspondencia $\alpha_* : \mathcal{A}^A \longrightarrow \mathcal{A}^B$ definida para $i \in |\mathcal{A}^A|$, $\alpha_*(i) = i_\alpha$ y para $f : i \longrightarrow i'$ $\alpha_*(f) = f_\alpha$ es un functor covariante.

Demostración

Notemos que α_* está bien definido, para $f : i \longrightarrow i'$ $f_\alpha : i_\alpha \longrightarrow i'_\alpha$ queda unívocamente determinado. Notemos que i_α e i'_α los obtenemos a traves de la construcción del teorema (0-3.4). Por la propiedad universal de los cuadrados cocartesianos, fácilmente se ve que

$$(1_X)_\alpha = 1_{X_\alpha} \quad \text{y} \quad (g.f)_\alpha = g_\alpha.f_\alpha \ . \quad <>$$

(3.2) Proposición

i) Existe una equivalencia natural $\tau : (1_A)_* \longrightarrow id_A$ tal que si $(A \xrightarrow{i} X) \in |\mathcal{A}^A|$ $\tau_i.\bar{1}_A = 1_X$.

ii) Existe una equivalencia natural $\pi : (\beta.\alpha)_* \longrightarrow \beta_*.\alpha_*$ tal que si $(A \xrightarrow{i} X) \in |\mathcal{A}^A|$

$\pi_i.\overline{\beta.\alpha} = \overline{\beta}.\overline{\alpha}$, además si $p : X \longrightarrow D$ es conúcleo de i, $(p_\alpha)_\beta$ y $p_{\alpha\beta}$ conúcleos de $(i_\alpha)_\beta$ e $i_{\alpha\beta}$ respectivamente, entonces $p_{\alpha\beta} = (p_\alpha)_\beta.\pi_i$.

Demostración

Basta observar que los siguientes cuadrados son cocartesianos. Para el de la derecha ver (0-3.1).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "i"] & A \arrow[d, "i"] \\ X \arrow[r, "1_X"] & X \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta.\alpha"] \arrow[d, "i"] & C \arrow[d, "(i_\alpha)_\beta"] \\ X \arrow[r, "\overline{\beta}.\overline{\alpha}"] & (X_\alpha)_\beta \end{tikzcd}$$

Entonces existen $\varepsilon_i : i_{1_A} \longrightarrow i$, $\pi : i_{\alpha\beta} \longrightarrow (i\alpha)_\beta$ tal que $\varepsilon_i.\overline{1}_A = 1_X$ y $\pi_i.\overline{\beta.\alpha} = \overline{\beta}.\overline{\alpha}$. Fácilmente se ve que son equivalencias naturales. Además por (0-3.6) prop. tenemos que $p_\alpha = o \vee p . X_\alpha \longrightarrow D$, $(p_\alpha)_\beta : o \vee p_\alpha : (X_\alpha)_\beta \longrightarrow D$ y $p_{\alpha\beta} = o \vee p : X_{\alpha\beta} \longrightarrow D$. Observemos que

$$(p_\alpha)_\beta.\pi_i.\overline{\beta\alpha} = (p_\alpha)_\beta.\overline{\beta}.\overline{\alpha} = p_\alpha.\overline{\alpha} = p = p_{\alpha\beta}.\overline{\alpha\beta}$$

$$(p_\alpha)_\beta.\pi_i.i_{\alpha\beta} = (p_\alpha)_\beta.(i_\alpha)_\beta = o = p_{\alpha\beta} . i_{\alpha\beta}$$

de donde deducimos que $p_{\alpha\beta} = (p_\alpha)_\beta.\pi_i$. <>

El functor $\alpha_* : \mathcal{A}^A \longrightarrow \mathcal{A}^B$ induce de modo natural un functor $\alpha_* : \mathcal{A}^A h \longrightarrow \mathcal{A}^B h$ que lo designamos con el mismo símbolo. Para esto probemos el siguiente teorema.

(3.3) Teorema

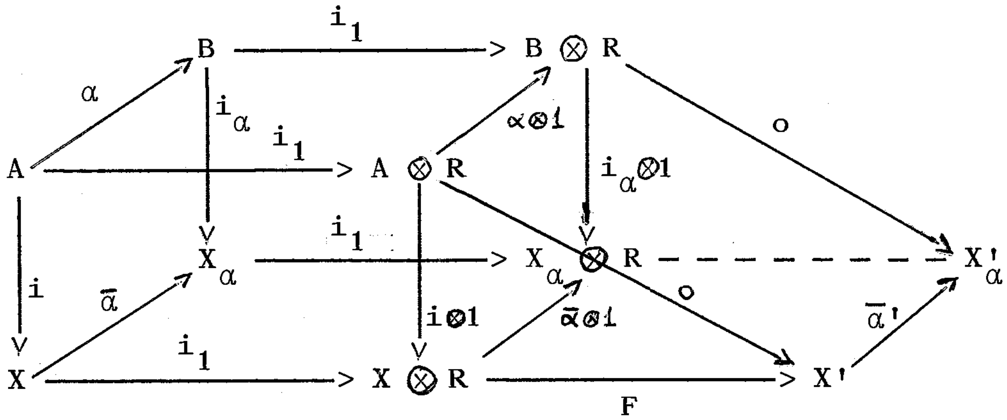
Sea $\alpha : A \longrightarrow B$, $i.i' \in \mathcal{A}^A$ y $f,g : i \longrightarrow i'$ tal que $f \overset{A}{\simeq} g$, entonces $f_\alpha \overset{B}{\simeq} g_\alpha$.

Demostración

Sean $i = (A \xrightarrow{i} X)$, $i' = (A \xrightarrow{i'} X')$. Si $f \overset{A}{\simeq} g$ entonces $f - g \overset{A}{\simeq} o \Rightarrow \exists\ F : X \otimes R \longrightarrow X'$ haciendo conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f-g"] \arrow[d, "i_1"] & X' \\ X \otimes R \arrow[ur, "F"] & A \otimes R \arrow[l, "i \otimes 1_R"] \arrow[u, "o"'] \end{tikzcd}$$

Consideremos el siguiente diagrama



Es conmutativo por definición de i_α , por ser i_1 es una transformación natural y F una homotopía bajo A. El cuadrado vertical de la derecha es cocartesiano, ya que el functor cono , conserva el carácter cocartesiano (ver (0-3.5)).

Entonces $\exists \mid o \vee \bar{\alpha}'.F : X_\alpha \otimes R \longrightarrow X'_\alpha$ tal que

(a) $(o \vee \bar{\alpha}'.F).(\bar{\alpha} \otimes 1_R) = \bar{\alpha}'.F$ y $(o \vee \bar{\alpha}'.F).(i_\alpha \otimes 1_R) = o$.

Veamos que $(o \vee \bar{\alpha}'.F).i_1 = f_\alpha - g_\alpha$.

(b) $(o \vee \bar{\alpha}'.F).i_1.\bar{\alpha} = (o \vee \bar{\alpha}' \otimes 1_R).i_1 = \bar{\alpha}'.F.i_1 =$

$= \bar{\alpha}'.(f - g) = \bar{\alpha}'.f - \bar{\alpha}'.g = f_\alpha.\bar{\alpha} - g_\alpha.\bar{\alpha} = (f_\alpha - g_\alpha).\bar{\alpha}$.

Por (a) y conmutatividad del diagrama.

(c) $(o \vee \bar{\alpha}'.F).i_1.i_\alpha = (o \vee \bar{\alpha}'.F).(i_\alpha \otimes 1_R)i_1 = o.i_1 = o =$

$= i'_\alpha - i'_\alpha = f_\alpha i_\alpha - g_\alpha.i_\alpha = (f_\alpha - g_\alpha).i_\alpha$.

De (b) y (c) por la propiedad universal del cuadrado cartesiano se sigue que $(o \vee \bar{\alpha}'.F).i_1 = f_\alpha - g_\alpha$ que junto con (a) nos dice que $f_\alpha - g_\alpha \overset{B}{\simeq} o$ o bién $f_\alpha \overset{B}{\simeq} g_\alpha$. <>

(3.4) Corolario

Sea el cuadrado co-cartesiano

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"] & B \arrow[d, "i_\alpha"] \\ X \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & X_\alpha \end{tikzcd}$$

Si A es un retracto por deformación fuerte de X, entonces B es un retracto por deformación fuerte de X_α .

Demostración

Notemos que un homomorfismo $A \xrightarrow{i} X$ se puede considerar como un objeto de $\mathcal{A}^A$, o bién como un morfismo $\hat{i} : 1_A \longrightarrow i$ en $\mathcal{A}^A$. Para distinguirlos, denotaremos i el objeto, e $\hat{i}$ el morfismo.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dl, "i"'] \arrow[dd, "1_A"] & & B \arrow[dl, "i_\alpha"'] \arrow[dd, "(1_A)_\alpha"] \arrow[dddr, "1_B"] & \\
X \arrow[rr] & & X_\alpha \arrow[dr, "(\hat{i})_\alpha"] & & \\
 & A \arrow[ul, "\hat{i}"] \arrow[rr, "\bar{\alpha}"] \arrow[drrr, "\alpha"'] & & A_\alpha & \\
 & & & & B \arrow[ul, dashed, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

Como los dos cuadrados anteriores son cocartesianos $\exists \mid \theta : 1_B \longrightarrow (1_A)_\alpha$ de manera que $\alpha.\theta = \bar{\alpha}$ y siendo θ isomorfismo en $\mathcal{A}^B$.

Además $(\hat{i})_\alpha \theta = \hat{i}_\alpha : 1_B \longrightarrow i_\alpha$.

Si A es un retracto por deformación fuerte de X es equivalente a que $\hat{i} : 1_A \longrightarrow i$, sea un isomorfismo en $\mathcal{A}^A h$, por el teorema anterior. $(\hat{i})_\alpha$ es un isomorfismo en $\mathcal{A}^B h \Rightarrow \hat{i}_\alpha : 1_B \longrightarrow i_\alpha$ es un isomorfismo en $\mathcal{A}^B h \Rightarrow$ B es un retracto por deformación fuerte de X_α . <>

Podemos considerar la subcategoría Cof^A de $\mathcal{A}^A$, tomando solo objetos $A \xrightarrow{i} X$ de $\mathcal{A}^A$ de manera que i sea cofibración. También podemos considerar la correspondiente categoría homotópica $\mathrm{Cof}^A h$. De la proposición (1.7) se sigue que los functores $\alpha_* : \mathcal{A}^A \longrightarrow \mathcal{A}^B$ y $\alpha_* : \mathcal{A}^A h \longrightarrow \mathcal{A}^B h$ inducen de modo natural functores $\alpha_* : \mathrm{Cof}^A \longrightarrow \mathrm{Cof}^B$ $\alpha_* : \mathrm{Cof}^A h \longrightarrow \mathrm{Cof}^B h$. A continuación probaremos que para $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ tal que $\alpha \simeq \beta$, los functores $\alpha_*, \beta_* : \mathrm{Cof}^A h \longrightarrow \mathrm{Cof}^B h$ son equivalentes. Para esto vamos a introducir las notaciones adecuadas, dos lemas y un corolario previos.

Sea $i : B \times B^R \longrightarrow Z$ un homomorfismo, consideremos los epimorfismos $l_o : B \times B^R \longrightarrow B : l_o(b,\alpha) = b$,
$l_1 : B \times B^R \longrightarrow B$ $l_2(b.\alpha) = b+\alpha(1)$.
$j : B \longrightarrow B \times B^R : j(b) = (b,o)$. Notemos que $l_k \cdot j = 1_B$
$k = o,1$. Consideremos el diagrama cocartesiano

$$\text{(D1)} \qquad \begin{tikzcd} B \times B^R \arrow[r, "l_k"] \arrow[d, "i"] & B \arrow[d, "i_{l_k}"] \\ Z \arrow[r, "\overline{l_k}"] & Z_{l_k} \end{tikzcd} \qquad k = o,1$$

Observemos que también conmuta el triángulo

(D2)
$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "i.j"'] \arrow[dr, "i_{1_k}"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ Z \arrow[rr] & & Z_{1_k} \end{tikzcd}$$

Asi podemos considerar $\bar{I}_k$ un morfismo del tipo $i.j \longrightarrow i_{1k}$.

<u>(3.5) Lema</u>

Si i es cofibración, $\bar{I}_o$, $\bar{I}_1$ son h-equivalencias bajo B según el anterior diagrama (D2).

<u>Demostración</u>

Veamos que $1_{B\times B^R} \underset{\bar{I}_k}{\overset{j}{\simeq}} j.1_k$ $\quad k = o,1$.

Para $k = o$, sea $G_o : B\times B^R \longrightarrow (B\times B^R)^R$: $\left[G_o(b,\alpha)\right](r) = (o,\alpha_r)$ $\quad \alpha_r(s) = \alpha(s.r)$, se comprueba que está bién definida, además se verifica que $q_1.G_o = 1_{B\times B^R} - j.1_o$ $\quad G_o.j = o$ $\quad 1_o^R.G_o = o$.

Para $k = 1$, sea $G_1 : B\times B^R \longrightarrow (B\times B^R)^R$: $(G_1(b.\alpha))(r) = (-\alpha(r),\alpha_r)$ que tambien esta bien definida y verifica que:

$q_1.G_2 = 1_{B\times B^R} - j.1_1$, $G_1.j = o$, $1_1^R.G_1 = o$. En resumen

(a) : $\mid G_k : B \times B^R \longrightarrow (B \times B^R)^R$ tal que

$q_1 . G_k = 1_{B \times B^R} - j . 1_k \qquad G_k . j = o \quad , \; 1_k^R . G_k = o$

Consideremos el siguiente diagrama:

(D3)
$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "o"] \arrow[dr, "j"'] & & (B\times B^R)^R \arrow[rrr, "1_k^R"] \arrow[dd, "i_R"] \arrow[dr] & & & B^R \arrow[dr] \arrow[dd] & & \\
& B\times B^R \arrow[ur, "G_k"] \arrow[rr, "1-j\cdot\ell_k"] \arrow[dd, "i"] & & B\times B^R \arrow[rrr, "1_k"] \arrow[dd, "i"] & & & B \arrow[dd] \arrow[dddr, "ij"] & \\
& & B^R \arrow[rrr] \arrow[dr] & & & (Z_{1_k})^R \arrow[dr] & & \\
& Z \arrow[ur, dashed, "H_k"] \arrow[rr, dashed, "h_k"] & & Z \arrow[rrr, "\overline{1}_k"] \arrow[drrrr, dashed] & & & Z_{1_k} & \\
& & & & & & & Z
\end{tikzcd}$$

En el cubo de la derecha, la cara vertical anterior es un cuadrado cocartesiano, por construcción. El cubo aparece al aplicarle a esta cara el functor "arcos" y la transformación natural q_1 . En la izquierda, la parte de arriba conmuta por (a).

Notemos que $i^R . G_k \simeq o$ y como i es cofibración $\exists \, H_k : Z \longrightarrow Z^R$ tal que

(b) $H_k.i = i^R.G_k$ definimos $h_k := q_1.G_k$.

Observemos que

$(1 - h_k)i = i - h_k i = i - i(1 - j.1_k) = i - i + ij1_k = ij1_k$

Como (D1) es cocartesiano $\exists \mid \phi_k = (ij \vee i - h_k)$:

$Z_{1_k} \longrightarrow Z$ tal que

(c) $\phi_k.\overline{1}_k = 1 - h_k = 1 - q_1.H_k$ $\quad \phi_k.i_{1_k} = ij$. Tambien

$H_k.ij = i^R G_k j = i^R o = o$.

De donde se deduce que ϕ_k es un morfismo del tipo

$i_{1_k} \longrightarrow i.j$ y que $\phi_k.\overline{1}_k \overset{ij}{\simeq} 1_Z$.

Notemos que $(\overline{1}_k)^R.H_k.i = (\overline{1}_k)^R\, i^R G_k = (i_{1_k})^R 1_k^R.G_k =$

$= (i_{1_k})^R.o = o = o.1_k$ por (a) . Como (D1) es cocartesiano

$\exists \mid \overline{H}_k = o \vee (\overline{1}_k)^R H_k : Z_{1_k} \longrightarrow (Z_{1_k})^R$ tal que

(d) $\overline{H}_k.\overline{1}_k = (\overline{1}_k)^R H_k$ y $\overline{H}_k.i_{1_k} = o$.

Recordemos que como 1_k es epimorfismo y (D1) cocartesiano entonces $\overline{1}_k$ tambien es epimorfismo (ver 0-3.2).

$q_1.\overline{H}_k.\overline{1}_k = q_1(\overline{1}_k)^R H_k = \overline{1}_k q_1 H_k = \overline{1}_k(1 - \phi_k\overline{1}_k) =$

$= (1 - \overline{1}_k\phi_k).\overline{1}_k$ y $\overline{1}_k$ epimorfismo $\Rightarrow q_1.\overline{H}_k = 1 - \overline{1}_k.\phi_k$

que junto con (d) nos dice que $\overline{1}_k.\phi_k \overset{i_{1_k}}{\simeq} 1_{Z_{1_k}}$. <>

(3.6) Lema

Sean $l : A \longrightarrow B$ y $j : B \longrightarrow A$ homomorfismos tal que $l.j = 1_B$. Podemos definir el siguiente functor $\hat{j} : \mathcal{A}^A \longrightarrow \mathcal{A}^B$ de modo que a $i \xrightarrow{f} i'$, se hace corresponder $ij \xrightarrow{f} i'j$. Entonces existe una transformación natural $\bar{I} : \hat{j} \longrightarrow l_* : \mathcal{A}^A \longrightarrow \mathcal{A}^B$.

Demostración

Sean $(A \xrightarrow{i} X)$, $(A \xrightarrow{i'} X') \in |\mathcal{A}^A|$ entonces por definición del functor l_*, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rr, "l"] \arrow[dl, "i"'] \arrow[dd, "i'"] & & B \arrow[dl, "i_1"'] \arrow[dd, "i'_1"] \\
X \arrow[rr, "\bar{I}_i"] \arrow[dr, "f"'] & & X_1 \arrow[dr, "f_1"] & \\
 & X' \arrow[rr, "\bar{I}_{i'}"] & & X'_1
\end{tikzcd}$$

Para $i \in |\mathcal{A}^A|$ defino $\bar{I}_i : i.j \longrightarrow i_1$ como la $\bar{I}_i$ del diagrama anterior. Notemos que está bien definida ya que

$$\bar{I}_i.i.j = i_1.l.j = i_1.1_B = i_1 .$$

Que el cuadrado inferior del diagrama anterior sea conmutativo nos dice que $\bar{I}$ es una transformación natural del tipo $\hat{j} \longrightarrow l_*$.

(3.7) Corolario

En las condiciones del lema anterior, el functor $\hat{j}$

induce de modo natural, functores $\hat{j} : \mathcal{A}^A h \longrightarrow \mathcal{A}^B h$ y $\hat{j} : \mathrm{Cof}^A h \longrightarrow \mathrm{Cof}^B h$. La transformación natural $\bar{I} : \hat{j} \longrightarrow 1_*$ del lema anterior, se puede considerar tomando $\hat{j}$ y 1_* como funtores del tipo $\mathrm{Cof}^A h \longrightarrow \mathrm{Cof}^B h$.

Demostración

Observemos que si $f,g : i \longrightarrow i'$ en $\mathcal{A}^A$ tal que $f \overset{A}{\simeq} g$ entonces $f.j \overset{B}{\simeq} g.j$, con esto podemos considerar $\hat{j}$ como funtor de $\mathcal{A}^B h$ en $\mathcal{A}^B h$. Por otro lado como j admite una retracción, j es cofibracion. Si i es cofibracion i.j tambien es cofibración (ver proposición (1.6)), luego podemos considerar $\hat{j}$ como functor de $\mathrm{Cof}^A h$ en $\mathrm{Cof}^B h$.

(3.8) Teorema

Sean $\alpha^o,\alpha^1 : A \longrightarrow B$ homomorfismos que inducen functores $\alpha^o_*,\alpha^1_* : \mathrm{Cof}^A h \longrightarrow \mathrm{Cof}^B h$. Si $\alpha^o \simeq \alpha^1$, entonces existe una equivalencia natural

$\Lambda : \alpha^o_* \longrightarrow \alpha^1_* : \mathrm{Cof}^A h \longrightarrow \mathrm{Cof}^B h$, que verifica las siguientes propiedades:

i) Sea $A \xrightarrow{i} X$ una cofibracion, entonces el siguiente diagrama conmuta en $\mathcal{A}h$.

$$\begin{tikzcd} & X_{\alpha^o} \arrow[dd, "\Lambda_i"] \\ X \arrow[ur, "{[\bar{\alpha}^o]}"] \arrow[dr, "{[\bar{\alpha}^1]}"'] & \\ & X_{\alpha^1} \end{tikzcd}$$

Donde Λ_i que es un morfismo de $Cof^B h$, se puede considerar de modo natural como un morfismo de $\mathcal{A} h$.

ii) Sea $p : X \longrightarrow C$ el conúcleo de i, $p_{\alpha^o} : X_{\alpha^o} \longrightarrow C$, $p_{\alpha^1} : X_{\alpha^1} \longrightarrow C$ los conúcleos de i_{α^o} e i_{α^1} respectivamente (notemos que por (0-3.6) prop. podemos tomar $p_{\alpha^o} = o \overset{o}{\vee} p$ y $p_{\alpha^1} = o \overset{1}{\vee} p$) entonces el siguiente diagrama es conmutativo en $\mathcal{A}^B h$.

$$\begin{tikzcd} X_{\alpha^o} \arrow[rr, "\Lambda_i"] \arrow[dr, "{[p_{\alpha^o}]^B}"'] & & X_{\alpha^1} \arrow[dl, "{[p_{\alpha^1}]^B}"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Demostración

Recordemos los homomorfismos $1_k : B \times B^R \longrightarrow B$ y $B \xrightarrow{j} B \times B^R$ que verifican que $1_k . j = 1_B$ y por tanto están en las condiciones del lema (3.6) y del corolario (3.7). Entonces existe una transformación natural $\bar{1}_k : \hat{j} \longrightarrow (1_k)_* : Cof^{B \times B^R} h \longrightarrow Cof^B h$. Ahora bien, si $B \times B^R \xrightarrow{i} X$ es una cofibración $\bar{1}_k : ij \longrightarrow i_{1_k}$ por el lema (3.5) es h-equivalencia bajo B. Por tanto en este caso $\bar{1}_k : \hat{j} \longrightarrow (1_k)_*$ es una equivalencia natural. Sean $j : B \longrightarrow B \times B^R$ y

$j' : B^R \longrightarrow B \times B^R$ las inclusiones canónicas. Como $\alpha^o \simeq \alpha^1$, existe $F : A \longrightarrow B^R$ tal que $q_1.F = \alpha^1 - \alpha^o$, definimos $\theta = j.\alpha^o + j'.F$ fácilmente se comprueba que $1_k.\theta = \alpha^k$ $k = o,1$.

Por la proposición (3.2), existe una equivalencia natural

$$\pi_k : (1_k.\theta)_* \longrightarrow (1_k)_*.\theta_*$$

Tambien podemos considerar la equivalencia natural

$$(\overline{1}_k)^{-1}.\theta_* : (1_k)_*.\theta_* \longrightarrow \hat{j}.\theta \ .$$

Definimos Λ como la composición de las equivalencias naturales

$$\Lambda : (\alpha^o)_* = (1_o.\theta)_* \xrightarrow{\pi_o} (1_o)_*.\theta_* \xrightarrow{(\overline{1}_o)^{-1}.\theta_*} \hat{j}.O_*$$

$$\hat{j}.\theta_* \xrightarrow{\overline{1}_1.\theta_*} (1_1)_*.\theta_* \xrightarrow{\pi_1^{-1}} (\alpha^1)_* \ .$$

Tambien por la proposición (3.2) sabemos que $\pi_k.\overline{1_k.\theta} = \overline{1}_k.\overline{\theta}$ $1_k.\theta = \alpha^k$. Entonces $\pi_o.\overline{\alpha^o} = \overline{1}_o.\theta$ y $\pi.\overline{\alpha^1} = \overline{1}_1.\theta$ y en $\mathcal{A}h$ $[\theta] = [\overline{1}_o]^{-1}.[\pi_o].[\alpha^o]$ y $[\overline{\alpha}^1] = [\pi_1]^{-1}.[\overline{1}_1].[\theta] = [\pi_1^{-1}].[\overline{1}_1].[\overline{1}_o]^{-1}.[\pi_o].[\overline{\alpha}^o] =$ $= \Lambda.[\alpha^o]$ como aseguramos en i).

Finalmente notemos que como consecuencia de ii) de (3.2) prop.

$(p_\theta)_{1_k} = p_{\theta 1_k} . \pi_k^{-1}$ y $p_\theta = (p_\theta)_{1_k} . \mathrm{I}_k$ entonces

$p_\theta = p_{\alpha o} . \pi_o^{-1} . \mathrm{I}_o$, $p_\theta = p_{\alpha 1}\ \pi_1^{-1}\ \mathrm{I}_1$, en $\mathcal{A}^B h$ podemos escribir

$$[p_{\alpha o}]^B = [p_\theta]^B . [1_o]^B . [\pi_o]^B =$$

$$= [p_{\alpha 1}]^B . [\pi_1^{-1}]^B . [\mathrm{I}_1]^B . ([\mathrm{I}_o]^B)^{-1} . [\pi_o]^B = [p_{\alpha 1}]^B . \mathcal{A}_i \ .$$

Con lo que hemos probado ii) . <>

(3.9) Corolario

Sea $\alpha : A \longrightarrow B$ con $\alpha \simeq o$

i) Sea $A \xrightarrow{i} X$ cofibración e $i_\alpha : B \longrightarrow X_\alpha$ la inducida por i a traves de α. Entonces i_α es h-equivalente bajo B a la inclusión $i_1 : B \longrightarrow B \oplus \mathrm{Coker}\ i$.

ii) Sea el triángulo conmutativo, e i' cofibración

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i'"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ X \arrow[rr, "f"] & \ & X' \end{tikzcd}$$

f induce de modo natural $\bar{f} : \mathrm{Coker}\ i \longrightarrow \mathrm{Coker}\ i'$. Si $\bar{f}$ es h-equivalencia, entonces $f_\alpha : i_\alpha \longrightarrow i'_\alpha$ es h-equivalencia bajo B.

Demostración

Notemos que si i' es cofibración también lo es i (proposición (1.5)).

i) Por el teorema anterior, como $\alpha \simeq o$, entonces existe una equivalencia natural $\Lambda : \alpha_* \longrightarrow o_*$:
: $Cof^A h \longrightarrow Cof^B h$. Fácilmente se comprueba que $o_*(i) = i_1$. Por tanto $\Lambda_i : i_\alpha \longrightarrow i_2$ es un isomorfismo en $Cof^B h$. O bien i_α es h-equivalente bajo B a i_1 .

ii) Por la naturalidad de el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} i_\alpha & \xrightarrow{\Lambda_i} & i_o = i_1 \\ \Big\downarrow f_\alpha & & \Big\downarrow f_o \\ i'_\alpha & \xrightarrow{\Lambda_{i'}} & i'_o = i'_1 \end{array}$$

$f_o : B \oplus \mathrm{Coker}\ i \longrightarrow B \oplus \mathrm{Coker}\ i'$ esta definida como $f_o = 1_B \oplus \overline{f}$. Sea $(\overline{f})'$ la inversa homotópica de $\overline{f}$ y $f'_o = 1_B \oplus (\overline{f})'$, fácilmente se comprueba que f'_o es inversa homotópica bajo B de f_o .

Como f_o , Λ_i, $\Lambda_{i'}$ son h-equivalencias bajo B y el anterior diagrama conmuta, f_α es h-equivalencia bajo B.

(3.10) Teorema

Sea el cuadrado cocartesiano

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i_\alpha} \\ X & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & X_\alpha \end{array}$$

Si i es cofibración y α h-equivalencia, entonces $\bar{\alpha}$ tambien es h-equivalencia.

<u>Demostración</u>

Si α es h-equivalencia $\exists\ \beta : B \longrightarrow A$ tal que $\beta\alpha \simeq 1_A$ y $\alpha.\beta \simeq 1_B$. Por el teorema (3.8), como $\beta.\alpha \simeq 1_A$, existe una equivalencia natural $\Lambda : (\beta.\alpha)_* \longrightarrow (1_A)_*$ tal que $\Lambda\cdot[\overline{\beta.\alpha}] = [\bar{1}_A]$.

Recordemos las equivalencias de la proposición (3.2) $\pi : (\beta.\alpha)_* \longrightarrow \beta_*.\alpha_*$ y $\tau : (1_A)_* \longrightarrow id_A$, resulta que $\pi.\overline{\beta.\alpha} = \bar{\beta}.\bar{\alpha}$ y $\tau.\bar{1}_A = 1_X$ con lo cual $\Lambda\ [\pi^{-1}]\,[\bar{\beta}].[\bar{\alpha}] = [\tau^{-1}]$ o bién $[\bar{\beta}].[\bar{\alpha}] = [\pi]\,\Lambda^{-1}[\tau^{-1}]$

Por tanto $[\bar{\alpha}]$ tiene inversa a izquierda en $\mathcal{A}h$, y $[\bar{\beta}]$ tiene inversa a derecha en $\mathcal{A}h$. Si intercambiamos los papeles de α y β, resulta que $[\bar{\beta}]$ tiene inversa a izquierda en $\mathcal{A}h$, y $[\bar{\alpha}]$ tiene inversa a derecha en $\mathcal{A}h$. De donde deducimos que $\bar{\alpha}$ es una h-equivalencia en $\mathcal{A}$.

(II-4) Problema de la elevación. Fibraciones.

En el párrafo (II-1) hemos planteado el problema de la extensión. Podemos enunciar el problema dual, simplemente cambiando el sentido de las flechas del diagrama II-(1.1).

(4.1)
$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & E \arrow[d, "{[p]}"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\beta"] \arrow[r, "{[f]}"'] & B \end{tikzcd}$$

Diremos que f es elevable a traves de p, si existe $g : X \longrightarrow E$ tal que $p.g = f$. Vamos a estudiar los homomorfismos p, que verifiquen la siguiente propiedad: Sea f homomorfismo con codominio B, entonces f es elevable a traves de p (en $\mathcal{A}$) si y sólo si $[f]$ es elevable a traves de $[p]$ en $\mathcal{A}h$.

(4.2) Definición

Sean $E,B,X \in |\mathcal{A}|$ y $p : E \longrightarrow B$ homomorfismo, diremos que p tiene la propiedad de elevación de homotopía PEl.H.) para X, cuando para cualquier homotopía $F : X \otimes R \longrightarrow B$ existe $G : X \otimes R \longrightarrow E$ tal que $p.G = F$. Si p tiene la P.ElH. para todo X, diremos que p es una fibración.

(4.3) Teorema

Son equivalentes las afirmaciones

i) $E \longrightarrow B$ es una fibración.

ii) Para todas $f : X \longrightarrow B$ y $g : X \longrightarrow E$ tal que $p.g \simeq f$ existe $g' : X \longrightarrow E$ tal que $p.g' = f$ y $g' \simeq g$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "g"] \arrow[ur, dashed, bend left, "g'"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

<u>Demostración</u>

i) => ii) Como $p.g - f \simeq o$ => $\exists$ $F : X \otimes R \longrightarrow B$ tal que $F.i_1 = pg - f$ entonces $\exists$ $G : X \otimes R \longrightarrow E$ con $p.G = F$ ya que p tiene la P.El.H para X, $g - Gi_1 \simeq g$ pues $G.i_1 \simeq o$, además $p.(g - G.i_1) = pg - pGi_1 = pg - Fi_1 =$ $= pg - pg + f = f$.

Basta tomar $g' = g - Gi_1$.

ii) => i) El siguiente triángulo conmuta salvo homotopía

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \otimes R \arrow[ur, "o"] \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Recordemos que $X \otimes R$ es contractil por I-1.17, entonces existe $G : X \otimes R \longrightarrow E$ tal que $p.G = F$. <>

<u>(4.4) Teorema</u>

Sea $E \xrightarrow{p} B$ homomorfismo, son equivalentes

i) $E \xrightarrow{p} B$ es una fibración.

ii) Para todo X contractil $\mathrm{Hom}(X,-)$ transforma p en una aplicación suprayectiva $p_* = \mathrm{Hom}(1_X, p)$.

iii) Si $f : X \longrightarrow B$ es tal que $f \simeq o$ existe $g : X \longrightarrow E$ tal que $p.g = f$.

iv) Si $f : X \longrightarrow B$ es tal que $f \simeq o$, existe $g : X \longrightarrow E$ tal que $g \simeq o$ y $p.g = f$.

<u>Demostración</u>

Evidentemente iv) => iii) => ii) => i) (Recordemos que $X \otimes R$ es contractil).

$$\begin{tikzcd} & & E \arrow[dd, "p"] \\ X \arrow[d, "i_1"'] \arrow[drr, "f"] & & \\ X \otimes R \arrow[uurr, "G"] \arrow[rr, "F"'] & & B \end{tikzcd}$$

Veamos que i) => iv). Si $f \simeq o$ => => $\exists\ F : X \otimes R \longrightarrow B$ tal que $p.G = F$ luego $G.i_1$ es una elevación de f a traves de p y $G.i_1 \simeq o$. <>

<u>(4.5) Proposición</u>

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p'"'] & {} \arrow[d, phantom, "="] & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Entonces si p' es cofibración también lo es p.

Demostración

Sea $f : X \longrightarrow B$ $f \simeq o$ entonces $\exists$ $g : X \longrightarrow E'$ con $p'g = f$ por ser p fibración y punto iii) del teorema anterior, además $ph.g = p'g = f$, luego hg es una elevación de f a traves de p y por el teorema anterior p es una cofibración.

(4.6) Proposición

La composición de fibraciones es fibración.

Demostración

Es inmediata.

Como casi todas las demostraciones son duales de las hechas para fibraciones, en muchas de ellas únicamente remitiremos a sus duales. Unicamente hay que cambiar el sentido de las flechas y sustituir los objetos por sus duales.

(4.7) Proposición

Consideremos el siguiente cuadrado cartesiano

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

Entonces si p es fibración también lo es p'.

Demostración

Dual a la de proposición (1.7).

Vamos a estudiar algunos ejemplos de Fibraciones. Desde luego $A \longrightarrow 0$ y $A \xrightarrow{f} B$ isomorfismo son fibraciones. Si $E \xrightarrow{p} B$ tiene una sección $s : B \longrightarrow E$ $p.s = 1_B$ p es fibración.

(4.8) Proposición

$B^R \xrightarrow{q_1} B$ es una fibración.

Demostración

Dual a la de proposición (1.8).

(4.9) Proposición

Sea $E \xrightarrow{p} B$ epimorfismo y sea $K = \text{Ker } p$ si K es $\mathbb{Z}$-divisible, entonces $E \xrightarrow{p} B$ es fibración.

Demostración

Si K es Z-divisible, K es sumando directo de E (ver Fuchs, Theorem (24.5)), entonces la sucesión exacta $0 \longrightarrow K \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow 0$ es escindible y por tanto $E \xrightarrow{p} B$ admite una sección, luego es fibración.

A continuación veremos un ejemplo de un homomorfismo que no es fibración para $R = \mathbb{Q}$.

(4.10) Ejemplo

Si el anillo que define la homotopía es el de los racionales $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q} \xrightarrow{p} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es la proyección natural entonces p no es una fibración.

Demostración

Sea $p_* : \mathrm{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ inducida por p. Supongamos que p sea fibración, como $\mathbb{Q}$ es contractil, p_* es sobre. Recordemos apartado ii) del teorema (4.4). Entonces

$$\mathrm{card}\ \mathrm{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \leqslant \mathrm{card}\ \mathrm{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \ .$$

En Hilton-Stammbach, cap. III, Ejercicio (6.2) se ve que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}$ lo que nos lleva a una contradicción ya que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$, sin embargo $\mathrm{card}\ \mathbb{Q} < \mathrm{card}\ \mathbb{R}$.

(4.11) Teorema

$\underset{i\varepsilon I}{\pi} A_i \xrightarrow[i\varepsilon I]{\pi u_i} \underset{i\varepsilon I}{\pi} B_i$ es fibración si y solo si $A_i \xrightarrow{u_i} B_i$ es fibración $\forall\ i\ \varepsilon\ I$.

Demostración

Es análoga a la del teorema (4.11), únicamente hay que considerar que $\underset{i\varepsilon I}{\pi} A_i \xrightarrow{p_i} A_i$ es fibracion, siendo p_i la proyección natural, y que $\mathrm{Hom}(X, \prod_{i\in I} A_i) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(X, A_i)$.

(4.12) Corolario

$A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \xrightarrow{u_1\oplus\ldots\oplus u_n} B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$ es fibración si y sólo si $A_i \xrightarrow{u_i} B_i$ es fibración $i = 1,\ldots,n$.

(4.13) Teorema

Si $E \xrightarrow{p} B$ es fibración $E^C \xrightarrow{p^C} B^C$ es fibración para $C \in |\mathcal{A}|$.

Demostración

Atendiendo a la naturalidad de la equivalencia natural η que aparece en la proposición I-1.22, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\,(X \otimes C,\, E) \arrow[r, "\eta_{XE}", "\cong"'] \arrow[d, "p_*"] & \mathrm{Hom}\,(X,\, E^C) \arrow[d, "(p^C)_*"] \\
\mathrm{Hom}\,(X \otimes C,\, B \arrow[r, "\eta_{XB}", "\cong"'] & \mathrm{Hom}\,(X,\, B^C)
\end{tikzcd}$$

Si X es contractil => $X \otimes C$ es contractil (ver corolario I-1.24) y p fibración => p_* es sobre y η equivalencia natural => $(p^C)_*$ es sobre => p^C es fibración (ver apartado ii) teorema (4.4)).<>

(4.14) Proposición

i) Si $A \xrightarrow{i} X$ es cofibración $C^X \xrightarrow{C^i} C^A$ es fibración.

ii) Si $A \xrightarrow{i} X$ es cofibración y $E \xrightarrow{p} B$ fibración, entonces $\mathrm{Hom}(X,E) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(i,p)} \mathrm{Hom}(A,B)$ es fibración.

Demostración

i) El siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\,(X, C^Y) \arrow[d, "i^*"] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathrm{Hom}\,(Y \otimes X, C) \arrow[l, "\bar{\eta}\ \cong"'] \arrow[r, "\cong\ \eta"] \arrow[d, "(1_Y \otimes i)^*"] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathrm{Hom}\,(Y, C^X) \arrow[d, "(C^i)_*"] \\
\mathrm{Hom}\,(A, C^Y) & \mathrm{Hom}\,(Y \otimes A, C) \arrow[l, "\bar{\eta}\ \cong"'] \arrow[r, "\cong\ \eta"] & \mathrm{Hom}\,(Y, C^A)
\end{tikzcd}$$

Sea Y contractil, $[Z, C^Y] \cong [Z \otimes Y, C] = 0$ por ser $Z \otimes Y$ contractil (ver corolario I-1.24) y esto para cualquier Z. Por el teorema I-1.15 C^Y es contractil y como i es cofibración i^* es sobre por apartado ii) del teorema (1.4). Entonces $(C^i)_*$ es sobre y por apartado ii) del teorema (4.4) C^i es fibración.

ii) $\mathrm{Hom}\,(i,p) = \mathrm{Hom}\,(i,1_B) \cdot \mathrm{Hom}\,(1_X,p) = B^i . p^X$

p^X es fibración por el teorema anterior y B^i por el apartado anterior, la composición de fibraciones es fibración.

(4.15) Proposición

$E \xrightarrow{p} B$ es fibración si y sólo si $E^R \xrightarrow{p^R} B^R$ admite sección.

Demostración

=>] p fibración => p^R es fibración (teorema (4.15)) y B^R contractil => p^R admite sección.

<=] Sea el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}\,(X \otimes R,\ E) & \xrightarrow{\ \simeq\ \eta\ } & \mathrm{Hom}\,(X,\ E^R) \\ \Big\downarrow p_* & & \Big\downarrow (p^R)_* \\ \mathrm{Hom}\,(X \otimes R,\ B) & \xrightarrow{\ \simeq\ \eta\ } & \mathrm{Hom}\,(X,\ B^R) \end{array}$$

si p^R admite sección, $(p^R)_*$ es sobre y p_* es sobre => p es fibración. <>

Vamos a considerar un homomorfismo $f : A \longrightarrow B$, lo vamos a factorizar a traves de un grupo que llamaremos cocilindro de f $f = p.j$ de manera que j es h-equivalencia y p fibración.

(4.16) Teorema

Sea $A \xrightarrow{f} B$ homomorfismo, consideremos $A \times B^R$ y las notaciones $j : A \longrightarrow A \times B^R$ $j(a) = (a,o)$, $p_1 : A \times B^R \longrightarrow A$ y $p_2 : A \times B^R \longrightarrow B^R$ las proyecciones naturales entonces

i) El triángulo
$$\begin{tikzcd} A \times B^R \arrow[drr, "fp_1 - q_1p_2"] & & \\ & = & B \\ A \arrow[uu, "j"] \arrow[urr, "f"'] & & \end{tikzcd}$$
es conmutativo.

ii) j es una h-equivalencia.

iii) $p = f.p_1 - q_1p_2$ es una fibración.

<u>Demostración</u>

i) Es inmediato.

ii) Consideremos el siguiente triángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \times B^R \arrow[rr, "j.p_1 - 1"] \arrow[dr, "p_2"'] & = & A \times B^R \\ & B^R \arrow[ur, "j'"'] & \end{tikzcd}$$

Donde $j'(\alpha) = (o,\alpha)$. Como B^R contractil $j.p_1 - 1 \simeq o$, luego $j.p_1 \simeq 1$ además $p_1.j = 1$. Luego j es h-equivalencia.

iii) El siguiente triángulo es conmutativo

$$\begin{tikzcd} B^R \arrow[rr, "j'"] \arrow[dr, "q_1"'] & = & A \times B^R \arrow[dl, "f.p_1 - q_1p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Como q_1 es fibración (proposición (4.8)) => $f.p_1 - q_1p_2$ es fibracion por proposición (4.5). <>

(4.17) Definición

Un grupo abeliano X diremos que es conexo por arcos (según el anillo R) si $\forall\ x \in X \quad \exists\ \alpha : R \longrightarrow X$ tal que $\alpha(1) = x$, también diremos que X es 0-conexo.

(4.18) Proposición

Sea $E \xrightarrow{p} B$ fibración, entonces

i) Si B es 0-conexo (para R) p es epimorfismo.

ii) Supongamos que R es de característica cero. Si B es $\mathbb{Z}$-divisible entonces p es epimorfismo.

Demostración

i)

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ B^R \arrow[ur, dashed, "\overline{q}_1"] \arrow[r, "q_1"'] & B \end{tikzcd}$$

Como p es fibración y B^R es contractil existe $\overline{q}_1 : B^R \longrightarrow E$ tal que $p.\overline{q}_1 = q_1$, q_1 es sobre por ser B 0-conexo y por tanto p es sobre

ii) Si R es de característica cero la siguiente sucesión es exacta corta $0 \longrightarrow Z \longrightarrow R \longrightarrow S \longrightarrow 0$. Consideremos la sucesión Ext en la primera variable. Recordemos

IV-(7.1)) y proposición IV-(7.2) del Hilton-Stammbach.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(S,B) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(R,B) \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},B) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \mathrm{Ext}(S,B) \arrow[r] & \dots \\ & & B^R \arrow[r, "q_1"'] & B & & \end{tikzcd}$$

Si B es Z-divisible $\mathrm{Ext}(S,B) = 0$ y q_1 es sobre. <>

(4.19) Definición

Sea $E \xrightarrow{p} B$ homomorfismo, diremos que es fibración de Serre, cuando existen elevaciones a traves de p de los homomorfismos $f : \otimes^q R \longrightarrow B \quad q \geq o \quad \otimes^o R = \mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ \otimes^q R \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad p.\overline{f} = f$$

(4.20) Consecuencias

i) Si p es fibración de Serre, p es sobre.

ii) Si p es fibración y sobre entonces p es fibración de Serre.

Demostración

Inmediata.

(II-5) h-equivalencias en $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_B$ y $\mathcal{A}(2)$. Dilatados

(5.1) Teorema

Sea el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p'"'] & \arrow[d, phantom, "="] & Y \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Si p' es fibración y f es h-equivalencia entonces f es h-equivalencia sobre B.

Probemos dos lemas previos.

(5.2) Lema

Sea el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "="] & Y \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Si $g \simeq 1_Y$ entonces $\exists\ g' : p \longrightarrow p$ tal que $g.g' \underset{B}{\simeq} 1_Y$.

Demostración

Denotaremos $1 = 1_Y$ y $2 = 1_Y + 1_Y$. Como $1 - g \simeq o$ $\exists\ F : Y \otimes R \longrightarrow Y$ tal que $F.i_1 = 1 - g$, veamos que $g' = 2 - g$.

(a) $gg' - 1 = g(2 - g) - 1 = g + g - g^2 - 1 =$

$= g(1 - g) - (1 - g)$.

Veamos que $gF - F : gg' - 1 \underset{\bar{B}}{\simeq} o$. Debe conmutar el diagrama:

(b)
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "gg' - 1"] \arrow[d, "i_1"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ Y \otimes R \arrow[ur, "gF-F"] \arrow[r, "o"] & B \end{tikzcd}$$

(c) $p(gg'-1) = pgg'-p = pg'-p = p(2-g)-p = p+p-p-p = o$

(d) $p(gF-F) = pgF-pF = pF - pF = o$

(e) $(gF-F)i_1 = gFi_1 - Fi_1 = g(1-g)-(1-g) = gg'-1$ por (a) .

(e), (d) y (c) nos prueban que (b) conmuta. <>

<u>(5.3) Lema</u>

Sea el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p'"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Si p' es fibración y $[f]$ tiene inversa a derecha en $\mathcal{A}h$ entonces $[f]_B$ tiene inversa a derecha en $\mathcal{A}_Bh$.

Demostración

Ya que $[f]$ tiene inversa a derecha en $\mathcal{A}h$, existe $f' : Y \longrightarrow Y'$ tal que $[f].[f'] = [1_Y]$ $f.f' \simeq 1_Y$ luego $p.ff' = p'f' \simeq p$, como p' es fibración por el teorema (4.3), existe $f'' : Y \longrightarrow Y'$ tal que $f'' \simeq f'$ y $p'f'' = p$, entonces $f.f'' \simeq 1_Y$ $p.f.f'' = p$, por el lema anterior existe $g' : p \longrightarrow p$ tal que $f.f''.g' \underset{B}{\simeq} 1_Y$.

Tomemos $f''' = f''.g'$ que verifica que $f.f''' \underset{B}{\simeq} 1_Y$ entonces $[f]_B[f''']_B = [f.f''']_B = [1_Y]_B$. Luego $[f]_B$ tiene inversa a derecha.

Demostración del teorema (5.1)

Es completamente dual a la del teorema (2.1). Aplicando dos veces el lema anterior.

(5.4) Teorema

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, p' \arrow[r, shift left, "\overline{f}"] \arrow[d, "i'"'] & \mathrm{Ker}\, p \arrow[l, shift left, "\overline{f}'"] \arrow[d, "i"] \\
Y' \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[dr, "p'"'] & Y \arrow[l, shift left, "f'"] \arrow[d, "p"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

Sea el diagrama conmutativo de la izquierda, siendo f h-equivalencia sobre B, f' su inversa homotópica sobre B, i e i' las inclusiones canónicas, $\overline{f}$ y $\overline{f}'$ homomorfismos inducidos por f y f' de modo natural. Entonces $\overline{f}$ es h-equivalencia con inversa homotópica $\overline{f}'$.

Demostración

Es dual a la de (2.4). Sabemos que $ff' = 1_X \underset{B}{\simeq} 0$, entonces existe $F : Y \otimes R \longrightarrow Y$ que lleva $f.f' - 1_X$ a cero sobre B. La notación "^" queda para los homomorfismos inducidos al nucleo de p. Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}\, p \arrow[rr, "i"] & & Y \arrow[dd, "p"] \\
\mathrm{Ker}\, p \arrow[ur, "\bar f.\bar f'-1"] \arrow[rr, "i"] \arrow[d, "i_1"] & & Y \arrow[ur, "f.f'-1_Y"] \arrow[d, "i_1"] & \\
\mathrm{Ker}\, p \otimes R \arrow[rr, "i\otimes 1_R"] \arrow[uur, phantom, "\hat F"] & & Y\otimes R \arrow[uur, "F"] \arrow[r, "0"] & B
\end{tikzcd}$$

La cara lateral derecha conmuta por ser $f.f' - 1_Y \underset{B}{\simeq} 0$, la anterior por ser i_1 transformación natural y la de arriba por la propiedad universal de los núcleos. De manera dual que en (2.4) se prueba que $f.f'-1_Y i = \bar f.\bar f'-1_{Kerp}$ y que $\hat F.(i \otimes 1_R)$ es una extensión de $\bar f.\bar f'-1_{Kerp}$ a traves de i_1 Luego $\bar f.\bar f' \simeq 1_{Kerp}$, análogamente $\bar f' f \simeq 1_{Kerp'}$.

(5.5) Corolario

Sea el diagrama conmutativo de la izquierda:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Kerp}' \arrow[rr, "\bar f"] \arrow[d, "i'"] & & \mathrm{Kerp} \arrow[d, "i"] \\
Y' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p'"'] & = & Y \arrow[dl, "p"] \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

Siendo p' fibración y f h-equivalencia, $\bar f$ inducida de forma natural por f.

Entonces $\bar f$ es también h-equivalencia.

Demostración

Por el teorema (5.1) f es h-equivalencia sobre B y por el teorema anterior $\bar{f}$ es h-equivalencia. <>

A continuación, dado un homomorfismo $p : E \longrightarrow B$ definiremos cuando es espacio E es dilatado del B, dando un teorema que nos relacione los diferentes tipos de dilatados en el caso que p sea una fibración. Es el concepto dual de los retractos.

(5.6) Definición

Sea $p : E \longrightarrow B$ un homomorfismo en $\mathcal{A}$.

(a) E es un dilatado débil de B, si existe $s : B \longrightarrow E$ tal que $p.s \simeq 1_B$.

(b) E es un dilatado de B, si existe $s : B \longrightarrow E$ tal que $p.s = 1_B$.

(c) E es un dilatado por deformación débil de B si existe $s : B \longrightarrow E$ tal que $p.s \simeq 1_B$ $s.p \simeq 1_B$ (si p es h-equivalencia).

(d) E es un dilatado por deformación de B si existe $s : B \longrightarrow E$ tal que $p.s = 1_B$ y $s.p \simeq 1_E$.

(e) E es un dilatado por deformación fuerte de B si existe $s : B \longrightarrow E$ tal que $p.s = 1_B$ y $s.p \underset{B}{\simeq} 1_E$.

(5.7) Proposición

Sea $p : E \longrightarrow B$ fibración entonces

i) E es un dilatado débil de B (a) <=> E es un dilatado de B (b) .

ii) E es un dilatado por deformación débil de B (c) <=> E es un dilatado por deformación de B (d) <=> E es un dilatado por deformación fuerte de B (e) .

Demostración

Dual a la de la proposición (2.7) .

(5.8) Proposición

Sea el cuadrado conmutativo en $\mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, phantom, "="] & F \arrow[d, "q"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Si p y q son fibraciones, f y g h-equivalencias en ,
entonces (f,g) es h-equivalencia en $\mathcal{A}(2)$.

Demostración

Es totalmente dual a la de la proposición (2.8).

(5.9) Teorema

Sea $p : E \longrightarrow B$ fibración y B contractil entonces la inclusión natural $i : \mathrm{Ker}\,p \longrightarrow E$ es una h-equivalencia.

Demostración

Dual de la proposición (2.9).

(II-6) Fibraciones inducidas

Este párrafo es completamente dual al párrafo (II-3). Así pues en muchas proposiciones no daremos la demostración, ya que de unas se obtienen las otras por procesos puramente mecánicos. Cambiando el sentido de las flechas y sustituyendo los funtores y transformaciones naturales por sus duales.

Dado un diagrama

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

Entonces existen $\overline{\alpha}$ y p_α , tal que el siguiente cuadrado es cartesiano

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[r, "\overline{\alpha}"] \arrow[d, "p_\alpha"] & E \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

Ver (0-3.3)

Diremos que p_α es inducida por p a traves de α.

Para $p.p' \in |\mathcal{A}_B|$ y $f : p' \longrightarrow p$, podemos considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & E_\alpha \arrow[rr, "\overline{\alpha}"] \arrow[dd, "p_\alpha"] & & E \arrow[dd, "p"] \\ E'_\alpha \arrow[ur, "f_\alpha"] \arrow[rr, "\overline{\alpha}'"] \arrow[dr, "p'_\alpha"'] & & E' \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "p'"] & \\ & A \arrow[rr, "\alpha"] & & B \end{tikzcd}$$

Como $p.f.\overline{\alpha}' = p'.\overline{\alpha}' = \alpha p'_\alpha$ entonces $\exists \mid (p'_\alpha \wedge f\,\overline{\alpha}') : E'_\alpha \longrightarrow E_\alpha$ $f_\alpha := (p'_\alpha \wedge f\overline{\alpha}')$ tal que $p_\alpha.f_\alpha = p'_\alpha$ y $\overline{\alpha}.f_\alpha = f.\overline{\alpha}'$. Por tanto f_α es un morfismo del tipo $p'_\alpha \longrightarrow p_\alpha$.

<u>(6.1) Proposición</u>

La correspondencia $\alpha^* : \mathcal{A}_B \longrightarrow \mathcal{A}_A$ definida para $p \in |\mathcal{A}_B|$, $\alpha^*(p) = p_\alpha$, y para $f : p' \longrightarrow p$ $\alpha^*(f) = f_\alpha$, es un functor covariante .

<u>Demostración</u>

Como proposición (3.1).

<u>(6.2) Proposición</u>

i) Existe una equivalencia natural

$\mathfrak{z} : id_{\mathcal{A}_B} \longrightarrow (1_B)_*$ tal que para

$p = (E \xrightarrow{p} B) \in |\mathcal{A}_B|$, $\overline{1}_B.\mathfrak{z}_p = 1_E$.

ii) Existe una equivalencia natural

$\pi : \beta^*.\alpha^* \longrightarrow (\alpha\beta)^*$ tal que si

$p = (E \xrightarrow{p} B) \in |\mathcal{A}_B|$ $\overline{\alpha\beta}\,\pi_p = \overline{\alpha}.\overline{\beta}$, además

$K \xrightarrow{i} E$ es el núcleo de p, $i_{\alpha\beta}$ e $(i_\alpha)_\beta$ núcleos de $p_{\alpha\beta}$ y $(p_\alpha)_\beta$ respectivamente, entonces

$\pi_p(i_\alpha)_\beta = i_{\alpha\beta}$.

Demostración

Dual a proposición (3.2).

El funtor $\alpha^* : \mathcal{A}_B \longrightarrow \mathcal{A}_A$ induce de modo natural un functor $\alpha^* : \mathcal{A}_B h \longrightarrow \mathcal{A}_A h$ que lo designaremos con el mismo símbolo. Para ello probemos el siguiente teorema.

(6.3) Teorema

Sea $\alpha : A \longrightarrow B$, $p, p' \in |\mathcal{A}_B|$ y $f, g : p' \longrightarrow p$ tal que $f \underset{\bar{B}}{\sim} g$, entonces $f_\alpha \underset{\bar{A}}{\sim} g_\alpha$.

Demostración

Dual a la del teorema (3.3). Recordemos que si un cuadrado D es cartesiano, el cuadrado D^R resultante de aplicarle al primero el functor "arcos", también es cartesiano. Ver (0-3.5) .

(6.4) Corolario

Sea el cuadrado cartesiano

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[d, "p_\alpha"] & E \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

Si E es un dilatado por deformación fuerte de B, entonces E_α es un dilatado por deformación fuerte de A.

Demostración

Dual a la de la proposición (3.4).

Designaremos por Fib_B la subcategoría plena de $\mathcal{A}_B$, formada por los objetos $E \xrightarrow{p} B$, tal que p es fibración. También podemos considerar la correspondiente categoría homotópica Fib_Bh. De la proposición (4.7), se sigue que los functores $\alpha^* : \mathcal{A}_B \longrightarrow \mathcal{A}_A$ y $\alpha^* : \mathcal{A}_Bh \longrightarrow \mathcal{A}_Ah$ inducen de modo natural functores $\alpha^* : Fib_B \longrightarrow Fib_A$ y $\alpha^* : Fib_Bh \longrightarrow Fib_Ah$. A continuación probaremos que para $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ tal que $\alpha \simeq \beta$ los functores $\alpha^*, \beta^* : Fib_Bh \longrightarrow Fib_Ah$ son equivalentes. Para ello introduciremos las notaciones adecuadas, dos lemas y un corolario previos.

Sea $p : F \longrightarrow A \oplus (A \otimes R)$ un homomorfismo, consideremos los monomorfismos $j_o : A \longrightarrow A + (A \times R)$: $j_o(a) = a \oplus o$ y $j_1 : A \longrightarrow A \oplus (A \otimes R) : j_1(a) = = a \oplus a \otimes 1$. $q : A + (A \times R) \longrightarrow A$ $q(a \oplus y) = a$. Notemos que $q.j_k = 1_A$ $k = o,1$. Consideremos el siguiente diagrama cartesiano:

(D1)
$$\begin{tikzcd} F_{j_k} \arrow[r, "\bar{j}_k"] \arrow[d, "p_{j_k}"] & F \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "j_k"'] & A \oplus (A \otimes R) \end{tikzcd} \qquad k = o,1$$

Observemos que también conmuta el triángulo

(D2)
$$\begin{tikzcd} F_{j_k} \arrow[rr, "\bar{j}_k"] \arrow[dr, "p_{j_k}"'] & & F \arrow[dl, "q.p"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Así podemos considerar $\bar{j}_k$ un morfismo del tipo $p_{j_k} \longrightarrow q.p$.

<u>(6.5) Lema</u>

Si p es fibración, $\bar{j}_o$ y $\bar{j}_1$ son h-equivalencias sobre A, segun el anterior diagrama (D2).

<u>Demostración</u>

Veamos que $1_{A \oplus (A \otimes R)} \underset{q}{\overset{j_k}{\simeq}} j_k.q$, $k = o,1$.

Para $k = o$, sea $G_o : [A \oplus (A \oplus R)] \otimes R \longrightarrow$ $\longrightarrow A \oplus (A \otimes R)$ tal que $G_o([a \oplus \Sigma(a_i \otimes r_i)] \otimes r) =$ $= o \oplus \Sigma\, a_i \otimes r_i.r$ verifica que

$G_o i_1 = 1 - j_o q$, $q.G_o = o$, $G_o.(j_o \otimes 1_R) = o$

Para $k = 1$, sea $G_1 : [A \oplus (A \otimes R)] \otimes R \longrightarrow$
$\longrightarrow A \oplus (A \otimes R)$ tal que $G_1([a \oplus \Sigma\, a_i \otimes r_i] \otimes r) =$
$= o \oplus \Sigma\, a_i \otimes r_i . r - a \otimes r$. Es fácil ver que G_1 está bién definida, verificando:

$G_1 . i_1 = 1 - j_1 q$, $q . G_1 = o$, $G_1 . (j_1 \otimes 1_R) = o$. En resumen:

(a) $\exists\ G_k : [A \oplus (A \otimes R)] \otimes R \longrightarrow A \oplus (A \otimes R)$ tal que
$G_k . i_1 = 1 - j_k q$, $q . G_k = o$, $G_k . (j_k \otimes 1_R) = o$.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[drrr, dashed, "1-h_k"] \arrow[ddr, "q.p"'] & & & & & & \\
& F_{j_k} \arrow[rr, "\bar{j}_k"] \arrow[dr, "i_1"] \arrow[dd, "p_{j_k}"'] & & F \arrow[rr, dashed, "h_k"] \arrow[dr, "i_1"] \arrow[dd, "p"] & & F \arrow[dd, "p"] & \\
& & F_{j_k} \otimes R \arrow[rr, "\bar{j}_k \otimes 1"] \arrow[dd, "p_{j_k} \otimes 1"] & & F \otimes R \arrow[ur, dashed, "H_k"] \arrow[dd, "p \otimes 1"] & & \\
(D3) & A \arrow[rr] \arrow[dr, "i_1"] & & A \oplus (A \otimes R) \arrow[rr, "1-j_k q"] \arrow[dr, "i_1"] & & A \oplus (A \otimes R) \arrow[dr, "q"] & \\
& & A \otimes R \arrow[rr, "j_k \otimes 1"'] & & {[A \oplus (A \otimes R)] \otimes R} \arrow[ur, "G_k"] \arrow[rr, "o"] & & A
\end{tikzcd}
$$

En el cubo de la izquierda, la cara vertical posterior es un cuadrado cartesiano por construcción. El cubo aparece al aplicarle a esta cara el functor cono y la transformación natural i_1 . En la derecha la parte de abajo conmuta por (a).

Notemos que $G_k.(p \otimes 1_R) \simeq o$ y p es fibración, $\exists\ H_k : F \otimes R \longrightarrow F$ tal que

(b) $p.H_k = G.(p \otimes 1_R)$, definamos $h_k := H_k.i_1$.

Observemos que :

$p.(1 - h_k) = p - ph_k = p - (1 - j_kq)p = p - p + j_kqp = j_k.qp$

como (D1) es cocartesiano $\exists\ |\ \emptyset_k = qp \wedge (1 - h_k)$: $F \longrightarrow F_{j_k}$ tal que

(c) $\bar{j}_k.\emptyset_k = 1 - h_k = 1 - H_k.i_1$, $p_{j_k}.\emptyset_k = q.p$, también

$qpH_k = qG_k\ p \otimes 1_R = o$ (por (a)). De donde deducimos que $\emptyset_k$ es un morfismo del tipo $q.p \longrightarrow p_{j_k}$ y que

$\bar{j}_k.\emptyset_k \underset{q.p}{\simeq} 1_F$.

Notemos que $p.H_k.(\bar{j}_k \times 1_R) = G_k.(p \otimes 1_R)(\bar{j}_k \times 1_R) =$

$= G_k.(j_k \otimes 1_R).(p_{j_k} \otimes 1_R) = o.(p_{j_k} \otimes 1_R) = o = j_k.o$,

por (a) .

Como (D1) es cartesiano $\exists\ |\ \bar{H}_k := o \wedge H_k(j_k \times 1_R)$: $F_{j_k} \otimes R \longrightarrow F_{j_k}$

(d) tal que $p_{j_k}.\bar{H}_k = o$ y $\bar{j}_k.\bar{H}_k = H_k.(\bar{j}_k \otimes 1_R)$.

Recordemos que como j_k es monomorfismo y (D1) es cartesiano entonces $\bar{j}_k$ también es monomorfismo (ver 0-3.2)

$\overline{j}_k.\overline{H}_k.i_1 = H_k(\overline{F}_k \otimes 1_R)i_1 = H_k.i_1\,\overline{j}_k \overset{(*)}{=} (1-\overline{j}_k.\phi_k)\overline{j}_k =$
$= \overline{j}_k - \overline{j}_k\phi_k\overline{j}_k = \overline{j}_k(1 - \phi_k.\overline{j}_k)$, (*) es por (c). Como $\overline{j}_k$ es monomorfismo se sigue que $\overline{H}_k.i_1 = 1 - \phi_k.\overline{j}_k$ que junto con (d) nos dice que $\phi_k\overline{j}_k \underset{p_{j_k}}{\simeq} 1_{F_{j_k}}$. <>

(6.6) Lema

Sean $j : A \longrightarrow B$ y $q : B \longrightarrow A$ homomorfismos tal que $q.j = 1_A$. Podemos considerar el siguiente functor $\hat{q} : \mathcal{A}_B \longrightarrow \mathcal{A}_A$ de modo que a $p' \xrightarrow{f} p$, le hace corresponder $q.p' \xrightarrow{f} q.p$. Entonces existe una transformación natural $\overline{j} : j^* \longrightarrow \hat{q} : \mathcal{A}_B \longrightarrow \mathcal{A}_A$.

Demostración

Dual a la del lema (3.6).

(6.7) Corolario

En las condiciones del lema anterior el functor $\hat{q}$ induce de modo natural, functores $\hat{q} : \mathcal{A}_B h \longrightarrow \mathcal{A}_A h$ y $\hat{q} : \mathrm{Fib}_B h \longrightarrow \mathrm{Fib}_A h$. La transformación natural, $\overline{j} : j^* \longrightarrow \hat{q}$ del lema anterior, se puede considerar tomando j^* y $\hat{q}$ como functores del tipo

$\mathrm{Fib}_B h \longrightarrow \mathrm{Fib}_A h$.

<u>(6.8) Teorema</u>

Sean $\alpha_o, \alpha_1 : A \longrightarrow B$ homomorfismos que inducen functores $\alpha_o^*, \alpha_1^* : Fib_B h \longrightarrow Fib_A h$. Si $\alpha_o \simeq \alpha_1$ entonces existe una equivalencia natural Λ , entre dichos functores $\Lambda : \alpha_o^* \longrightarrow \alpha_1^* : Fib_B h \longrightarrow Fib_A h$, que verifica las siguientes propiedades:

i) Sea $(E \xrightarrow{p} B) \in |Fib_B h|$ entonces el siguiente diagrama conmuta en $\mathcal{A}h$

$$\begin{tikzcd} E_{\alpha_o} \arrow[drr, "{[\bar{\alpha}_o]}"] \arrow[dd, "\Lambda_p"'] & & \\ & & E \\ E_{\alpha_1} \arrow[urr, "{[\bar{\alpha}_1]}"'] & & \end{tikzcd}$$

Donde Λ_p que es un morfismo en $Fib_A h$, se puede considerar de modo natural como un morfismo en $\mathcal{A}h$.

ii) Sea $K \xrightarrow{i} E$ el núcleo de p e

$i_{\alpha_o} : K \longrightarrow E_{\alpha_o}$, $i_{\alpha_1} : K \longrightarrow E_{\alpha_1}$ núcleos

de p_{α_o} y p_{α_1} respectivamente, entonces el siguiente diagrama es conmutativo en $\mathcal{A}_A h$.

$$\begin{tikzcd} E_{\alpha_o} \arrow[rr, "\Lambda_p"] & & E_{\alpha_1} \\ & K \arrow[ul, "{[i_{\alpha_o}]_A}"] \arrow[ur, "{[i_{\alpha_1}]_A}"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración

Dual a la del teorema (3.8).

(6.9) Corolario

Sea $\alpha : A \longrightarrow B$ con $\alpha \simeq o$.

i) Sea $E \xrightarrow{p} B$ fibración y $E_\alpha \xrightarrow{p_\alpha} A$ la inducida por p a traves de α. Entonces p_α es h-equivalente sobre A a la proyección $p_1 : A \times \mathrm{Ker}p \longrightarrow A$.

ii) Sea el triángulo conmutativo, p' fibración

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p'"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

f induce de modo natural $\bar{f} : \mathrm{Ker}\, p' \longrightarrow \mathrm{Ker}\, p$. Si $\bar{f}$ es h-equivalencia, entonces $f_\alpha : p'_\alpha \longrightarrow p_\alpha$ es h-equivalencia sobre A.

Demostración

Dual a la del corolario (3.9).

(6.10) Teorema

Sea el cuadrado cartesiano

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[r, "\overline{\alpha}"] \arrow[d, "p_\alpha"] & E \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

Si p es fibración y α h-equivalencia, entonces $\overline{\alpha}$ también es h-equivalencia.

<u>Demostración</u>

Dual a la del teorema (6.10).

CAPITULO III

SUCESIONES HOMOTOPICAS Y GRUPOS DE HOMOTOPIA

En el párrafo 1(2) definimos (co) fibra homotópica de un homomorfismo g, en la prop.(1.8) (prop.(2.8)) vemos que todo homomorfismo g tiene (co) fibra homotópica $g^1(g_1)$ que es (co) fibración, a esta (co) fibra la llamaremos canónica, para distinguirla de otras posibles (co) fibras homotópicas de g. Ahora consideremos la (co) fibra homotópica de $g^1(g_1)$ y la llamamos $g^2(g_2)$, de este modo procediendo inductivamente obtenemos la sucesión canónica de (co) fibras homotópicas asociadas a g. Ver prop.(1.15) (prop.(2.15)). Esta sucesión así como sus h-equivalentes tienen la propiedad de que el functor $[Z,-]$ ($[-,Z]$) las transforma en sucesiones exactas de $\mathcal{A}$. Nuestro propósito es encontrar sucesiones h-equivalentes a la canónica, que sean más sencillas. En (1.15) ((2.15)) definimos la sucesión de Eckmann-Hilton (Puppe) y en el teorema (1.16) (teorema 2.16) probamos que es h-equivalente a la sucesión canónica de (co) fibras homotópicas. Si el homomorfismo g de partida es ya (co) fibración entonces en este mismo teorema probamos que la sucesión de Eckmann-Hilton (Puppe) asociada a g es h-equivalente a la sucesión de (co) fibras homotópicas asociadas a la (co) fibración g.

En el párrafo 3, para $A \varepsilon |\mathcal{A}|$, $B \varepsilon |\mathcal{A}|$ y $(Y \xrightarrow{g} B) \varepsilon |\mathcal{A}(2)|$ definimos $\pi_n^A(B)$ $n \geqslant o$ y $\pi_n^A(g)$ para $n \geqslant 1$, en el caso particular que $A = \mathbb{Z}$ y g monomorfismo, diremos que $\pi_n(B) = \pi_n^{\mathbb{Z}}(B)$ es el n-ésimo grupo de homotopía de B y $\pi_n(B,Y) = \pi_n^Z(g)$ es el n-ésimo grupo de homotopía del par (B,Y) . Después demostramos la exactitud y naturalidad de la sucesión de los grupos de homotopía asociada a un par (B,Y) y de la sucesión de grupos de homotopía asociados a una fibración.

(III-1) Sucesión de fibras homotópicas consecutivas

En este párrafo para un homomorfismo $g : Y \longrightarrow B$ construimos una sucesión:

$$\dots \longrightarrow \Omega^2 B \xrightarrow{\Omega K} \Omega F_g \xrightarrow{\Omega g^1} \Omega Y \xrightarrow{\Omega g} \Omega B \xrightarrow{k} F_g \xrightarrow{g^1} Y \xrightarrow{g} B$$

tal que para cualquier grupo abeliano Z la siguiente sucesión es exacta

$$\dots \longrightarrow [Z,\Omega^2 B] \xrightarrow{(\Omega k)_*} [Z,\Omega F_g] \xrightarrow{(\Omega g^1)_*} [Z,\ Y] \xrightarrow{(\Omega g)_*}$$

$$\xrightarrow{(\Omega g)_*} [Z,\Omega B] \xrightarrow{k_*} [Z,F_g] \xrightarrow{g^1_*} [Z,Y] \xrightarrow{g_*} [Z,B] \ .$$

Empezaremos definiendo fibra homotópica, núcleo homotópico y sucesión de fibras homotópicas consecutivas.

(1.1) Definición

Sea $K \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{g} B$ en $\mathcal{A}$, diremos que i es fibra homotópica de g si $gi \simeq o$ y para todo $f : X \longrightarrow Y$ homomorfismo de grupos abelianos tal que $g.f \simeq o$, existe $\overline{f} : X \longrightarrow K$ tal que $i.\overline{f} \simeq f$. Cuando además $\overline{f}$ sea única salvo homotopía verificando $i\,\overline{f} \simeq f$ (Es decir si $\hat{f} : X \longrightarrow K$ es tal que $i.\hat{f} \simeq f \Rightarrow \overline{f} \simeq \hat{f}$) diremos que i es núcleo homotópico de g.

(1.2) Definición

Sea en $\mathcal{A}$ la siguiente sucesión

$$\cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{g^{n+1}} X_n \xrightarrow{g^n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \quad \text{con} \quad n \geq 1$$

Diremos que es una sucesión de fibras homotópicas consecutivas, si para todo $n \geq 1$ g^{n+1} es fibra homotópica de g^n .

(1.3) Definición

Sean en $\mathcal{A}$ las sucesiones, $n \geq 1$

$$\mathbb{X} \qquad \cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{f^{n+1}} X_n \xrightarrow{f^n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\mathbb{Y} \qquad \cdots \longrightarrow Y_{n+1} \xrightarrow{g^{n+1}} Y_n \xrightarrow{g^n} Y_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

y sea $h_n : X_n \longrightarrow Y_n$ homomorfismo de grupos abelianos tal que $h_{n-1}.f^n \simeq g^n h_n$, diremos de $h = (h_n)$: $\mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ es un homomorfismo de sucesiones salvo homotopía, si además cada h_n es una h-equivalencia, diremos que h es una h-equivalencia de sucesiones.

(1.4) Proposición

Sea el siguiente diagrama en $\mathcal{A}$, conmutativo salvo homotopía

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & B \arrow[d, "\gamma"] \\ K' \arrow[r, "i'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & B' \end{tikzcd}$$

Supongamos que i es fibra homotópica de g y α, β y γ son h-equivalencias entonces i' es fibra homotopica de g' .

Demostración

Sean $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ las inversas homotópicas de α,β y γ . Como $\beta i \simeq i'\alpha$ y $\gamma g \simeq g'\beta$ entonces $g\bar{\beta} \simeq \bar{\gamma}g'$, $\gamma g.\bar{\beta} \simeq g'$ y $\beta i\bar{\alpha} \simeq i'$. Veamos que $g'.i' \simeq o$.

$g'.i' \simeq \gamma.g.\bar{\beta}.\beta.i\,\bar{\alpha} \simeq \gamma.g.i.\bar{\alpha} \simeq \gamma.o.\bar{\alpha} \simeq o$.

Sea $f : Z \longrightarrow Y'$ tal que $g'.f \simeq o \Rightarrow g\bar{\beta}.f \simeq$ $\simeq \bar{\gamma}.g'.f \simeq o$ luego $\exists\ h : Z \longrightarrow K$ m $i.h \simeq \bar{\beta}.f \Rightarrow$ $\Rightarrow i'\alpha h \simeq \beta.i.h \simeq f$. Por tanto i' es fibra homotópica de g' .

(1.5) Proposición

Sea $K \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{g} B$ en $\mathcal{A}$, entonces i es fibra homotópica de g si y sólo si para todo Z de $\mathcal{A}$ la sucesión

$$[Z,K] \xrightarrow{i_*} [Z,Y] \xrightarrow{g_*} [Z,B]$$ es exacta.

Demostración

$\Rightarrow$) Desde luego $g_*.i_* = (g.i)_* = o_* = o$.

Sea $f : Z \longrightarrow Y$ si $g_*[f] = [g.f] = o \Rightarrow g.f = o$ pero por ser i fibra homotópica de g $\exists\ \bar{f} : Z \longrightarrow K$ m $i.\bar{f} \simeq f$ entonces $i_*[\bar{f}] = [f]$ y la sucesión es exacta.

$\Leftarrow$) Tomemos $Z = K$, $g_*.i_*[1_Z] = [g.i] = o \Rightarrow g.i \simeq o$.

Para $f : Z \longrightarrow Y$ tal que $gf \simeq o \Rightarrow g_*|f| = o$ y por ser la sucesión exacta, existe $[\bar{f}] \in [Z,K]$ tal que

$i_*[\overline{f}] = [i.\overline{f}] = [f]$ por tanto $i.\overline{f} \simeq f$.

(1.6) Corolario

Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ sucesiones decrecientes de grupos abelianos (en el sentido anterior). Si $\mathbb{X}$ es h-equivalente a $\mathbb{Y}$ y $\mathbb{X}$ es una sucesión de fibras homotópicas consecutivas, también lo es $\mathbb{Y}$.

Demostración

Consecuencia inmediata de la proposición (1.4).

(1.7) Corolario

Sea $\mathbb{X}$ la siguiente sucesión:

$$n \geqslant 1 \qquad \cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{h^{n+1}} X_n \xrightarrow{h^n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$\mathbb{X}$ es una sucesión de fibras homotópicas consecutivas si y sólo si la siguiente sucesión es exacta, para cualquier Z de $\mathcal{A}$.

$$\cdots \longrightarrow [Z,X_{n+1}] \xrightarrow{h_*^{n+1}} [Z,X_n] \xrightarrow{h_*^n} [Z,X_{n-1}] \longrightarrow \cdots$$

Demostración

Es consecuencia inmediata de la proposición (1.5).

(1.8) Proposición

Sea $g : Y \longrightarrow B$ homomorfismo de grupos abelianos, entonces existe un grupo abeliano F_g y una fibración $F_g \xrightarrow{g^1} Y$ tal que g^1 es fibra homotópica de g.

$F_g = \{(y,\alpha) \in Y \times B^R \mid g(y) = \alpha(1)\}$ y $g^1 : F_g \longrightarrow B$ es la restricción a F_g de la primera proyección, $Y \times B^R \longrightarrow Y$. Diremos que g^1 es la fibra homotópica canónica de g.

Demostración

Consideremos el siguiente cuadrado cartesiano

$$(D) \qquad \begin{tikzcd} F_g \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g^1"] \arrow[dr, phantom, "="] & B^R \arrow[d, "q_1"] \\ Y \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

Por proposición II-(4.8) q_1 es una fibración, como (D) es cartesiano, la proposición II-(4.7) nos asegura que g^1 es fibración.

Por ser (D) conmutativo, $g\,g^1 \simeq o$ (ver I-(1.3)).

Sea $Z \xrightarrow{f} Y$ tal que $g.f \simeq o$ implica que existe $F : Z \longrightarrow B^R$ tal que $q_1.F = g.g'$ y por ser (D) cartesiano $\exists \mid f \wedge F : Y \longrightarrow F_g$ tal que $g^1(f \wedge F) = f$ y $r.(f \wedge F) = F$. Entonces $f \wedge F$ es una elevacion de f a traves de g^1 y g^1 es fibra homotópica de g.

Por la construcción del cuadrado cocartesiano (D) (ver 0-3.3) se ve que $F_g \xrightarrow{g^1} B$ es como en el enunciado.

<u>(1.9) Teorema</u>

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
F_g \arrow[rr, "I"] \arrow[dd, "k"'] \arrow[ddrr, "g^1"] & & Y \times B^R \arrow[dd, "j"'] \arrow[dr, "gp_1 - q_1 \cdot p_2"] & \\
 & & \arrow[r, phantom, "="] & B \\
K \arrow[rr, "i"] & & Y \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

El triángulo de la derecha es el que aparece en el teorema (II-4.16) que sabemos que es conmutativo, j es un h-equivalencia y $g.p_1 - q_1.p_2$ es una fibración. g^1 es la fibra homotópica de g que aparece en el teorema anterior, $K \xrightarrow{i} Y$ es un núcleo de g e I es la inclusión natural, entonces:

i) I es el núcleo de $g.p_1 - q_1.p_2$ y $\exists$ $k : K \longrightarrow F_g$ tal que $I.k = j.i$ y $g^1.k = i$.

ii) Si g es fibración k es h-equivalencia.

<u>Demostración</u>

i) Basta observar que $(g\ p_1 - q_1\ p_2)\ (y,\alpha) = $ $= g(y) - \alpha(1) = o \iff g(y) = \alpha(1)$. Como K es núcleo de g y F_g es núcleo de $g\ p_1 - q_1 p_2$ y j aplica fibras en fibras, fácilmente se ve que k no es sino la inducida de j en los núcleos y por tanto $I.k = j \cdot i$. Además para $x \in K$ $g^1.k(x) = g^1(x.o) = x = i(x) \Rightarrow g^1.k = i$.

ii) Es consecuencia inmediata del corolario II-(5.5), y del apartado i) ya demostrado.

Notemos que la fibra homotópica canónica $F_g \xrightarrow{g^1} Y$ de $Y \xrightarrow{g} B$ es fibración entonces podemos aplicarle la construcción realizada en el teorema anterior, para ello calcularemos el núcleo de g^1.

(1.10) Lema

Sea $F_g \xrightarrow{g^1} Y$ la fibra homotópica canónica de $Y \xrightarrow{g} B$. Entonces $\Omega B \xrightarrow{i^1} F_g$ es núcleo de $F_g \xrightarrow{g^1} Y$, siendo $\Omega B = \mathrm{Hom}(S, B)$ $S = \mathrm{Coker}\ 1$, $1 : \mathbb{Z} \longrightarrow R : 1(1_{\mathbb{Z}}) = 1_R$ e $i^1(v) = (o, vp)$ siendo $p : R \longrightarrow S$ la proyección canónica. Notemos que $i^1 = o \wedge p^*$.

Demostración

Veamos que en $B \xrightarrow{p^*} B^R \xrightarrow{q_1} B$, p^* es núcleo de q_1 .

Sea $\alpha : R \longrightarrow B$ entonces $q_1(\alpha) = \alpha(1_R) = o \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha.1 = o$ y $S = \mathrm{Coker}\ 1$ implica que $\exists \mid \bar{\alpha} : S \longrightarrow B$

m $\overline{\alpha}.p = p^*(\overline{\alpha}) = o$. Por tanto p^* es inyectiva. Por otra parte si $v \,\varepsilon\, \Omega B$, $p^*v = v.p$ es tal que $q_1(v.p) = o$.

Como el cuadrado (D) de la proposición (1.8) es cartesiano y p^* es núcleo de q_1 se sigue que

$\Omega B \xrightarrow{o \wedge p^*} F_g$ es núcleo de g^1. (ver 0-3.6) .

(1.11) Corolario

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, dashed, "k^1"'] \arrow[dr, "i^1"] \arrow[d, phantom, shift left=6, "="] & & \\ F_{g^1} \arrow[r, "g^2"] & F_g \arrow[r, "g^1"] & Y \end{tikzcd}$$

Siendo i_1 el del lema anterior y g^2 la fibra homotópica canónica de g^1. Entonces $\exists\ k^1 : \Omega B \longrightarrow F_{g^1}$: $v \,\varepsilon\, \Omega B$ $k^1(v) = ((o\ vp),o)$ además $g^2.k^1 = i^1$ y k^1 es h-equivalencia.

Demostración

F_{g^1} se obtiene en el siguiente cuadrado cartesiano

$$\begin{tikzcd} F_{g^1} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g^2"] & Y^R \arrow[d, "q_1"] \\ F_g \arrow[r, "g^1"] & Y \end{tikzcd}$$

$F_{g^1} = \{((y,\alpha),\beta) \in (Y \times B^R) \times Y^R \mid g(y) = \alpha(1)$
$y = g^1(y,\alpha) = \beta(1)\} \subset Y \times B^R \times Y^R$, $\Omega B \xrightarrow{i^1} F_g$ es núcleo de g^1 por el lema anterior, y por i) del teorema (1.9)
$\exists\ k^1 : \Omega B \longrightarrow F_{g^1}$ tal que $g^2.k^1 = i^1$ y
$I.k^1 = j.i^1 \Rightarrow I\ k^1(v) = k^1(v) = j\ i^1(v) = j(o,vp) =$
$= ((o,vp),o)$. Por ser g^2 la fibra homotópica canónica de g^1, g^2 es fibración (ver prop.(1.8)) y por ii) del teorema (1.9) k^1 es h-equivalencia . <>

De nuevo vamos a reiterar el proceso para
$F_{g^1} \xrightarrow{g^2} F_g$ que es la fibra homotópica canónica de
$F_g \xrightarrow{g^1} Y$.

<u>(1.12) Consecuencia</u>

Sea $F_{g^1} \xrightarrow{g^2} F_g$ la fibra homotópica canónica de $F_g \xrightarrow{g^1} Y$. Entonces $\Omega Y \xrightarrow{i^2} F_{g^1}$ es núcleo de $F_{g^1} \xrightarrow{g^2} F_g$ para $w \in \Omega Y$, $i^2(w) = (o_{F_{g^1}}, w.p) =$
$= ((\hat{o}_B, \hat{o}_{B^R}) , w.p)$.

<u>Demostración</u>

Inmediata a partir del lema (1.10).

(1.13) Consecuencia

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Omega Y \arrow[d, dashed, "k^2"'] \arrow[dr, "i^2"] & & \\ F_{g^2} \arrow[r, "g^3"] & F_{g^1} \arrow[r, "g^2"] & F_g \end{tikzcd}$$

Siendo i^2 el de la consecuencia anterior y g^3 la fibra homotópica canónica de g^2. Entonces $\exists\ k^2 : \Omega Y \longrightarrow F_{g^2}$ tal que $g^3.k^2 = i^2$ y k^2 es h-equivalencia.

Demostración

Se sigue de la consecuencia anterior y del corolario (1.11).

(1.14) Proposición

Con las notaciones anteriores, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \Omega Y \arrow[r, "\Omega g"] \arrow[d, "i^2"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & \Omega B \arrow[d, "(-1)"] \\ F_{g'} \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

conmuta salvo homotopía (Ωg = Hom $(1_S,g)$)

Demostración

Veamos quién es el homomorfismo $(i^2-k^1.(-1).\Omega g)$.

Sea $w \in \Omega Y$, $(i^2-k^1.(-1)\Omega g)w = i^2(w)-k^1.(-1)\Omega g(w) =$

$= i^2(w)-k^1.(-1).(gw) = i^2(w)-k^1(-gw) =$

$= ((o,o),w.p) - ((o,-gwp),o) = ((o,gwp,wp)$.

Hemos utilizado la definición de k^1 e i^2 que vienen en el enunciado del corolario (1.11) y consecuencia (1.12), respectivamente.

Utilizaremos la siguiente notación, para $\alpha : R \longrightarrow X$ homomorfismo $\alpha_t : R \longrightarrow X$ denota el homomorfismo definido así $\alpha_t(s) = \alpha(t.s)$. Definiremos la siguiente homotopía $F : \Omega Y \times R \longrightarrow F_{g^1}$:

$F(w,t) = ((wp(t),(gwp)_t),(wp)_t)$. Esta bién definida, ya que $g[(wp)_t(1)] = g(wp(t)) = (gwp)_t(1)$ recordemos que

$F_{g^1} = \{((y,\alpha),\beta) \in [(Y \times B^R) \times Y^R] \mid g(y) = \alpha(1) \quad \beta(1) = y\}$.

La bilinealidad es una mera comprobación y

$F(w,1) = ((wp(1),(gwp)_1),(wp)_1) = ((o,gwp),wp) =$

$= (i^2-k^1(-1)\Omega g)w$. Por tanto $i^2-k^1(-1)\Omega g \simeq o$ y

$i^2 \simeq k^1(-1)\Omega g$.

<u>(1.15) Proposición - Definición</u>

Dado un homomorfismo $g : Y \longrightarrow B$ por la proposición (1.8) existe $g^1 : F_g \longrightarrow Y$, g^1 es la fibra homotópica canónica de g. Pero g^1 también tiene su fibra homotópica

$g^2 : F_{g^1} \longrightarrow F_g$. Por inducción podemos construir la siguiente sucesión:

$$\cdots \longrightarrow F_{g^2} \xrightarrow{g^3} F_{g^1} \xrightarrow{g^2} F_g \xrightarrow{g^1} Y \xrightarrow{g} B$$

Es la sucesión canónica de fibras homotópicas asociada a g.

Por otra parte consideremos la sucesión

$\Omega B \xrightarrow{i^1} F_g \xrightarrow{g^1} Y \xrightarrow{g} B$, donde i^1 y g^1 estan definidos en lema (1.10) y proposición (1.8), respectivamente. Si le aplicamos el funtor $\Omega = \mathrm{Hom}(S,-)$, obtenemos $\Omega^2 B \xrightarrow{i^1} F_g \xrightarrow{g^1} Y \xrightarrow{g} B$, así por inducción tenemos $\cdots \longrightarrow \Omega^2 B \xrightarrow{\Omega i^1} \Omega F_g \xrightarrow{\Omega g^1} \Omega Y \xrightarrow{\Omega g} \Omega B \xrightarrow{i^1} F_g \xrightarrow{g^1}$ $\xrightarrow{g^1} Y \xrightarrow{g} B$.

Esta sucesión la llamaremos de Eckmann-Hilton. (asociada a g).

(1.16) Teorema

Sea $g : Y \longrightarrow B$ homomorfismo

i) La sucesión canónica de fibras homotópicas consecutivas asociada a g es h-equivalente a la sucesión de Eckmann-Hilton asociada a g.

ii) Si además $g : Y \longrightarrow B$ es una fibración la sucesión de Eckmann-Hilton es h-equivalente a la siguiente sucesión

$$\cdots \longrightarrow \Omega^2 B \xrightarrow{\Omega\Delta} \Omega F \xrightarrow{\Omega i} \Omega Y \xrightarrow{\Omega g} \Omega B \xrightarrow{\Delta} F \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{g} B$$

Siendo $F \xrightarrow{i} Y$ el núcleo de g y $\Delta = \overline{k}.i^1$, $i^1 : B \longrightarrow F_g : i^1(v) = (o,v.p)$, $\overline{k}$ es una inversa homotópica de $k : F \longrightarrow F_g$. $k(x) = (x,o)$, $x \in F$. Diremos que esta es la sucesión de fibras homotópicas asociada a una fibración g.

<u>Demostración</u>:

En el diagrama (D1), tenemos en la base la sucesión canónica de fibras homotópicas consecutivas. Por el corolario (1.11) y teniendo en cuenta como construimos dicha sucesión resulta que todos los triángulos que tienen como base la flecha g^n son conmutativos. Si $n \geqslant 3$ es impar, entonces $g^n.k^{n-1} = i^{n-1}$, si $n \geqslant 2$ es par, como $g^n.k^{n-1} = i^{n-1}$ implica que $g^n.k^{n-1}.(-1) = i^{n-1}.(-1)$. Además $k^n.(-1)^n$ es h-equivalencia $n \geqslant 1$, también por el corolario (1.11). Por otra parte por la proposicion (1.14)

$$i^n \simeq (k^{n-1})(-1)(\Omega g^{n-2}) \quad n \geqslant 2 \text{ , si n es impar}$$

$$-i^n = i^n(-1) \simeq (k^{n-1})(-1)(\Omega g^{n-2})(-1) = k^{n-1}(-1)^2(\Omega g^{n-2}) =$$
$$= k^{n-1}\Omega g^{n-2} .$$

Con esto queda probado que la parte del diagrama (D1) que designamos con (a), conmuta salvo homotopía.

$$
\text{(D1)}\qquad
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \Omega^2 Y \arrow[r, "\Omega^2 g"] \arrow[d, "\Omega k^2"'] \arrow[dr, "\Omega i^2"] \arrow[dr, phantom, "="', shift right=3] & \Omega^2 B \arrow[d, "\Omega(k^1.(-1))"'] \arrow[dr, "\Omega(i^1.(-1))"] \arrow[dr, phantom, "="', shift right=3] & & & & & & \text{(b)} \\
\cdots \arrow[r] & \Omega F_{g^2} \arrow[r, "\Omega g^3"] \arrow[d, "k^5.(-1)"'] \arrow[dr, "i^5(-1)", "\simeq"'] & \Omega F_{g^1} \arrow[r, "\Omega g^2"] \arrow[d, "k^4"'] \arrow[dr, "i^4", "\simeq"'] & \Omega F_g \arrow[r, "\Omega g^1"] \arrow[d, "k^3.(-1)"'] \arrow[dr, "i^3(-1)", "\simeq"'] & \Omega Y \arrow[r, "\Omega g"] \arrow[d, "k^2"'] \arrow[dr, "i^2", "\simeq"'] & \Omega B \arrow[d, "k^1.(-1)"'] \arrow[dr, "i^1.(-1)"] & & & \text{(a)} \\
\cdots \arrow[r] & F_{g^5} \arrow[r, "g^6"] & F_{g^4} \arrow[r, "g^5"] & F_{g^3} \arrow[r, "g^4"] & F_{g^2} \arrow[r, "g^3"] & F_{g^1} \arrow[r, "g^2"] & F_g \arrow[r, "g^1"] & Y \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}
$$

Como el functor Ω es de la forma Hom(S,–) , en la demostración del teorema (I-1.9) se ve que si $f \simeq g$ entonces $\Omega f \simeq \Omega g$. Además si f es h-equivalencia Ωf es también h-equivalencia. Despues de estas observaciones, notemos que si aplicamos el functor Ω a la parte (a) del diagrama (D1) obtenemos la parte (b), que por tanto conmuta salvo homotopía, además las flechas verticales siguen siendo h-equivalencias. Así por inducción obtenemos que la sucesión canónica de fibras homotópicas consecutivas es h-equivalente a la sucesión:

$$\cdots \to \Omega^2 B \xrightarrow{\Omega(i^1.(-1))} \Omega F_g \xrightarrow{\Omega g^1} \Omega Y \xrightarrow{\Omega g} \Omega B \xrightarrow{(i^1.(-1))} F_g$$

$$\xrightarrow{(i^1.(-1))} F_g \xrightarrow{g^1} Y \xrightarrow{g} B$$

Observemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \Omega^2 B \arrow[r, "\Omega(i^1.(-1))"] \arrow[d, "1"] \arrow[rd, phantom, "="] & \Omega F_g \arrow[r, "\Omega g^1"] \arrow[d, "(-1)"] \arrow[rd, phantom, "="] & \Omega Y \arrow[r, "\Omega g"] \arrow[d, "(-1)"] \arrow[rd, phantom, "="] & \Omega B \arrow[d, "(-1)"] \\
\cdots \arrow[r] & \Omega^2 B \arrow[r, "\Omega(i^1)"] & \Omega F_g \arrow[r, "\Omega g^1"] & \Omega Y \arrow[r, "\Omega g"] & \Omega B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Omega B \arrow[r, "i^1.(-1)"] \arrow[d, "(-1)"] \arrow[rd, phantom, "="] & F_g \arrow[r, "g^1"] \arrow[d, "1"] \arrow[rd, phantom, "="] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1"] \arrow[rd, phantom, "="] & B \arrow[d, "1"] \\
\Omega B \arrow[r, "i^1"] & F_g \arrow[r, "g^1"] & Y \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd} \qquad \text{(D2)}$$

Con esto queda probado i) ya que la sucesión inferior de (D2) es la sucesión de Eckmann-Hilton asociada a g. (Fácilmente se comprende que si $\mathbb{X}$ es h-equivalente a $\mathbb{Y}$ e $\mathbb{Y}$ es h-equivalente a $\mathbb{Z}$ entonces $\mathbb{X}$ es h-equivalente a $\mathbb{Z}$).

Para probar ii) construyamos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \Omega^2 B \arrow[r, "\Omega\Delta"] \arrow[d, "1"] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & \Omega F \arrow[r, "\Omega i"] \arrow[d, "\Omega k"] \arrow[dr, phantom, "="] & \Omega Y \arrow[r, "\Omega g"] \arrow[d, "1"] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & \Omega B \arrow[d, "1"] \\
\cdots \arrow[r] & \Omega^2 B \arrow[r, "\Omega i^1"] & \Omega F_g \arrow[r, "\Omega g^1"] & \Omega B \arrow[r, "\Omega g"] & \Omega B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Omega B \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "1"] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & F \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k"] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_Y"] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "1_B"] \\
\Omega B \arrow[r, "i^1"] & F_g \arrow[r, "g^1"] & Y \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd} \qquad (D3)$$

Como g es fibracion por el teorema (1.9) se sigue que $g^1.k = i$ y k es h-equivalencia. Hemos definido $\Delta = \bar{k}.i^1$. Entonces los tres primeros cuadrados conmutan salvo homotopía y las flechas verticales son h-equivalencias. Si a estas les aplicamos el functor Ω obtenemos los tres siguientes. El functor Ω conserva la conmutatividad salvo homotopía y las h-equivalencias. Procediendo inductivamente queda probado ii).

<u>(1.17) Proposición</u>

Consideremos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Y_o \arrow[r, "g_o"] \arrow[d, "\beta"] & B_o \arrow[d, "\alpha"] \\
Y_1 \arrow[r, "g_1"] & B_1
\end{tikzcd}$$

Entonces:

i) α y β inducen de modo natural el siguiente homomorfismo entre las sucesiones de Eckmann-Hilton asociadas a g_o y a g_1 .

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \Omega F_{g_o} \arrow[r, "\Omega g_o^1"] \arrow[d, "\Omega 1"] & \Omega Y_o \arrow[r, "\Omega g_o"] \arrow[d, "\Omega\beta"] \arrow[dr, phantom, "="] & \Omega B_o \arrow[r, "i_o^1"] \arrow[d, "\Omega\alpha"] \arrow[dr, phantom, "="] & F_{g_o} \arrow[r, "g_o^1"] \arrow[d, "1"] \arrow[dr, phantom, "="] & Y_o \arrow[r, "g_o"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "="] & B_o \arrow[d, "\alpha"] \\
\cdots \arrow[r] & \Omega F_{g_1} \arrow[r, "\Omega g_1^1"] & \Omega Y_1 \arrow[r, "\Omega g_1"] & \Omega B_1 \arrow[r, "i_1^1"] & F_{g_1} \arrow[r, "g_1^1"] & Y_1 \arrow[r, "g_1"] & B_1
\end{tikzcd}$$

Siendo $1 = \beta . g_o^1 \wedge \alpha^R r_o$.

ii) Si además g_o y g_1 son fibraciones, α y β inducen de modo natural un homomorfismo salvo homotopía entre las sucesiones de fibras homotópicas asociadas a g_o , g_1 .

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \Omega F_o \arrow[r, "\Omega i_o"] \arrow[d, "\Omega\overline{\beta}"] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & \Omega Y_o \arrow[r, "\Omega g_o"] \arrow[d, "\Omega\beta"] \arrow[dr, phantom, "="] & \Omega B_o \arrow[r, "\Delta_o"] \arrow[d, "\Omega\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & F_o \arrow[r, "i_o"] \arrow[d, "\overline{\beta}"] \arrow[dr, phantom, "="] & Y_o \arrow[r, "g_o"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "="] & B_o \arrow[d, "\alpha"] \\
\cdots \arrow[r] & \Omega F_1 \arrow[r, "\Omega i_1"] & \Omega Y_1 \arrow[r, "\Omega g_1"] & \Omega B_1 \arrow[r, "\Delta_1"] & F_1 \arrow[r, "i_1"] & Y_1 \arrow[r, "g_1"] & B_1
\end{tikzcd}$$

$\overline{\beta}$ es la restricción de β a los núcleos.

Demostración

i) Observemos que en el siguiente diagrama, el cuadrado sobre g_1 es cartesiano

$$\begin{tikzcd}
F_{g_0} \arrow[rr, "r_0"] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd, "g_0^1"'] & & B_0^R \arrow[dr, "\alpha^R"] \arrow[dd] & \\
& F_{g_1} \arrow[rr, "r_1"] \arrow[dd, "g_1^1"] & & B_1^R \arrow[dd] \\
Y_0 \arrow[rr, "g_0"] \arrow[dr, "\beta"'] & & B_0 \arrow[dr, "\alpha"] & \\
& Y_1 \arrow[rr, "g_1"] & & B_1
\end{tikzcd}$$

entonces $\exists \mid 1 = \beta g_o^1 \wedge \alpha^R r_o : F_{g_o} \longrightarrow F_{g_1}$ tal que $g_1^1 1 = \beta g_o$ y $r_1 1 = \alpha^R r_o$ ya que $q_1 \alpha^R r_o = g_1 \beta g_o^1$, para $(y_o, v_o) \in F_{g_o}$ $1(y_o, v_o) = (\beta y_o, \alpha v_o)$. Fácilmente se comprueba que $1.i_o^1 = i_1^1 \Omega\alpha$. Despues aplicando consecutivamente el functor Ω, obtenemos por inducción el homomorfismo deseado.

ii) Analicemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & F \arrow[d, "k_o"] \arrow[dr, "\bar{\beta}"] \arrow[drr, "i_o"] & & & & & \\
B_o \arrow[urr, "\Delta_o"] \arrow[rr, "i_o^1"] \arrow[dr, "\Omega\alpha"'] & & F_{g_o} \arrow[r] \arrow[dr, "1"] & F_1 \arrow[r, "g_o^1"] \arrow[d, "k_1"] \arrow[drr, "i_1"] & Y_o \arrow[rr, "g_o"] \arrow[dr, "\beta"] & & B_o \arrow[dr, "\alpha"] & \\
& B_1 \arrow[urr, "\Delta_1"] \arrow[rr, "i_1^1"] & & F_{g_1} \arrow[rr, "g_1^1"] & & Y_1 \arrow[rr] & & B_1
\end{tikzcd}$$

Recordemos que $\Delta_o = \bar{k}_o . i_o^1$, $\Delta_1 = \bar{k}_1 . i_1^1$

$$1\, k_o(x) = 1(x,o) = (\beta(x),o) = (\overline{\beta}(x),o) = k_1\overline{\beta}(x) \quad \forall\ x \in F\ .$$

Por tanto $1\, k_o = k_1\ \overline{\beta} \Rightarrow \overline{k}_1\ 1 \simeq \overline{\beta}\ \overline{k}_o$ y por tanto

$$\overline{\beta}.\Delta_o = \overline{\beta}\ \overline{k}_o\ i^1_o \simeq \overline{k}_1\ 1\ i^1_o = \overline{k}_1 i^1_1 \Omega\alpha \simeq \Delta_1 \Omega\alpha\ .$$

Aplicando inducción fácilmente obtenemos el homomorfismo (salvo homotopía) de ii).

(1.18) Teorema

En el siguiente cuadrado cartesiano, supongamos que p es una fibración y g_1 un monomorfismo

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "g_o"] \arrow[d, "p'"'] \arrow[dr, phantom, "="] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "g_1"] & B \end{tikzcd}$$

Entonces F_{g_o} es un dilatado por deformación fuerte de F_{g_1} a traves de $1 : F_{g_o} \longrightarrow F_{g_1} : 1 = p'\ g^1_o \wedge p^R r_o$. Por tanto 1 y $\Omega^n 1$ son h-equivalencias en el homomorfismo inducido por p y p' en las sucesiones de Eckmann-Hilton asociadas a g_o y g_1 .

Demostración

Construyamos el siguiente cubo conmutativo

$$\begin{tikzcd}
F_{g_0} \arrow[rr, "r_0"] \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, "g_0^1"'] \arrow[drr, phantom, "D3"] & & F^R \arrow[dr, "p^R"] \arrow[dd] & \\
& F_{g_1} \arrow[rr, "s"] \arrow[dd, "g_1^1" near start] & & B^R \arrow[dd] \\
E' \arrow[rr, "g_0" near end] \arrow[dr, "p'"'] \arrow[r, phantom, "D2" near end, shift right=3ex] & & E \arrow[dr, "p"] \arrow[r, phantom, "D1"] & \\
& B' \arrow[rr, "g_1"'] & & B
\end{tikzcd}$$

Notemos que el cuadrado frontal anterior D1, frontal posterior D3 y horizontal inferior D2 son cartesianos, teniendo en cuenta que el diagrama es conmutativo y g_1 es monomorfismo resulta que el cuadrado horizontal superior D es cartesiano. Es una comprobación rutinaria, observemos que g_0 también es monomorfismo (ver (0-3.2).

Por ser p fibración, existe $t : B^R \longrightarrow E^R$ tal que $p^R.t = 1_{B^R}$ (ver proposición II-4.15) además p^R por admitir una sección es fibración y por ser E^R contractil $s.p^R \simeq 1_{E^R}$ entonces E^R es un dilatado por deformación de B^R, recordando la proposición II-5.7 deducimos que E^R es un dilatado por deformación fuerte de B^R a traves de p^R, como D es cartesiano por el corolario II-(6.4) se sigue que F_{g_0} es un dilatado por deformación fuerte de F_{g_1} a traves de 1 .

(III-2) Sucesión de cofibras homotópicas consecutivas

Este párrafo es la dualización del anterior, para un homomorfismo $A \xrightarrow{g} X$ construimos una sucesión

$$A \xrightarrow{g} X \xrightarrow{g_1} C_{g^1} \xrightarrow{k} A \otimes S \xrightarrow{g \otimes 1_S} X \otimes S$$

$$X \otimes S \xrightarrow{g_1 \otimes 1_S} C_{g_1} \otimes S \xrightarrow{k \otimes 1_S} A \otimes S \otimes S \longrightarrow \dots$$

tal que para cualquier grupo abeliano Z la siguiente sucesión es exacta

$$\dots \longrightarrow [A \otimes S \otimes S, Z] \longrightarrow [C_{g_1} \otimes S, Z] \longrightarrow [X \otimes S, Z] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow [A \otimes S, Z] \longrightarrow [C_{g_1}, Z] \longrightarrow [X, Z] \longrightarrow [A, Z] \ .$$

Al functor $A \rightsquigarrow A \otimes S$ lo llamaremos functor suspensión y lo denotaremos $SA = A \otimes S$, $S^2A = A \otimes S \otimes S$. En algunas proposiciones no daremos su demostración, dado que son duales a las del párrafo anterior.

(2.1) Definición

Sea $A \xrightarrow{g} X \xrightarrow{p} C$ en $\mathcal{A}$, diremos que p es una cofibra homotópica de g si $p.g \simeq o$ y para todo homomorfismo $X \xrightarrow{f} Z$ tal que $f.g \simeq o$ existe $\overline{f}: C \longrightarrow Z$ tal que $\overline{f}.p \simeq f$. Cuando además $\overline{f}$ sea única salvo homotopía verificando $\overline{f}.p \simeq f$ diremos que p es núcleo homotópico de g.

(2.2) Definición

Sea en $\mathcal{A}$ la siguiente sucesión

$$\ldots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{g^{n-1}} X_n \xrightarrow{g^n} X_{n+1} \longrightarrow \ldots \qquad n \geqslant 1 .$$

Diremos que es una sucesión de cofibras homotópicas, si para todo $n \geqslant 1$ g^n es cofibra homotópica de g^{n-1} .

(2.3) Definición

Sean en $\mathcal{A}$ las sucesiones, $n \geqslant 1$.

$$\mathbb{X} \qquad \ldots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} X_n \xrightarrow{f^n} X_{n+1} \longrightarrow \ldots$$

$$\mathbb{Y} \qquad \ldots \longrightarrow Y_{n-1} \xrightarrow{g^{n-1}} Y_n \xrightarrow{g^n} Y_{n+1} \longrightarrow \ldots$$

y sea $h_n : X_n \longrightarrow Y_n$ homomorfismo de grupos abelianos tal que $h_{n+1}f^n \simeq g^n h_n$, diremos que $h = (h_n) : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ es un homomorfismo de sucesiones salvo homotopía, si además cada h_n es una h-equivalencia, diremos que h es una h-equivalencia de sucesiones.

(2.4) Proposición

Sea el siguiente diagrama en , conmutativo salvo homotopía

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
A' \arrow[r, "g'"'] & X' \arrow[r, "p'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

Supongamos que p es cofibra homotópica de g y α, β y γ son h-equivalencias entonces p' es cofibra homotópica de g' .

(2.5) Proposición

Sea $A \xrightarrow{g} X \xrightarrow{p} C$ en $\mathcal{A}$, entonces p es cofibra homotópica de g si y sólo si para todo Z de $\mathcal{A}$ la sucesión

$[C,Z] \xrightarrow{p^*} [X,Z] \xrightarrow{g^*} [A,Z]$ es exacta

(2.6) Corolario

Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ sucesiones crecientes de grupos abelianos (en el sentido anterior). Si $\mathbb{X}$ es h-equivalente a $\mathbb{Y}$ y $\mathbb{X}$ es una sucesión de cofibras homotópicas consecutivas, también lo es $\mathbb{Y}$.

(2.7) Corolario

Sea $\mathbb{X}$ la siguiente sucesión:

$n \geqslant 1 \quad \ldots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow[h_{n-1}]{} X_n \xrightarrow[h_n]{} X_{n+1} \longrightarrow \ldots$

$\mathbb{X}$ es una sucesión de cofibras homotópicas consecutivas si y sólo si para cualquier Z de $\mathcal{A}$ la siguiente sucesión es exacta

$$\ldots \longrightarrow [X_{n+1},Z] \xrightarrow{h_n^*} [X_n,Z] \xrightarrow{h_{n-1}^*} [X_{n-1},Z] \longrightarrow \ldots$$

(2.8) Proposición

Sea $g : A \longrightarrow X$ homomorfismo de grupos abelianos entonces existe un grupo abeliano C_g y una cofibración $X \xrightarrow{g_1} C_g$ tal que g_1 es cofibra homotópica de g. $C_g = X \oplus (A \otimes R)/N$ siendo $N = \{ga - a \otimes 1 \mid a \in A\}$, denotaremos $\pi : X \oplus (A \otimes R) \longrightarrow C_g$ a la proyección natural $g_1(x) = \pi(x \oplus o)$. Diremos que g_1 es la cofibra homotópica canónica de g.

Demostración

Dualmente a la proposición (1.8) consideremos el cuadrado cocartesiano

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i_1} & = & \Big\downarrow{\scriptstyle g_1} \\ A\otimes R & \xrightarrow{r} & C_g \end{array}$$

En II-(1.8) vemos que i_1 es una cofibración, como el diagrama es cocartesiano II-(1.7) nos dice que g_1 es cofibración. Como el diagrama es conmutativo se sigue que $g_1 g \simeq o$. Sea $f : X \longrightarrow Z$ tal que $f\, g \simeq o$, entonces existe $F : A \otimes R \longrightarrow Z$ tal que $F.i_1 = f.g$ y como el diagrama es cartesiano $\exists \mid f \quad F : C_g \longrightarrow Z$ tal que $(f \vee F).r = F$ y $(f \vee F).g_1 = f$. <>

(2.9) Teorema

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "\rho"] \arrow[ddr, "g_1"] & C \\
A \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "g-i_1"'] \arrow[r, phantom, "="] & & \\
 & X\oplus(A\otimes R) \arrow[uu, "p'"'] \arrow[r, "\pi"] & C_g \arrow[uu, "k"']
\end{tikzcd}$$

El triángulo de la izquierda es el que aparece en el teorema II-(1.16) que es conmutativo, p' es una h-equivalencia y $g-i_1$ es una cofibración g_1 es la cofibra homotópica canónica de g , $X \xrightarrow{\rho} C$ es el conúcleo de g y π la proyección natural entonces:

i) π es el conúcleo de $g-i_1$ y $\exists$ $k : C_g \longrightarrow C$ tal que $\rho.p' = k.\pi$ y $k.g_1 = \rho$.

ii) Si g es cofibración k es h-equivalencia.

<u>Demostración</u>

i) Notemos que $\mathrm{Ker}\pi = \{ga - a \otimes 1 \mid a \in A\} =$ $= \mathrm{Im}\ (g-i_1)$.

Como $\rho.p'(g-i_1) = \rho.g = o$, $\exists \mid k : C_g \longrightarrow C$ tal que $k\pi = \rho.p'$ $kg_1(x) = k\pi(x\oplus o) = \rho p'(x\oplus o) = \rho(x)$, entonces $k.g_1 = \rho$.

ii) Es consecuencia de i) y del corolario (II-2.5). <>

Puesto que g_1 la cofibra homotópica de g es cofibración, podemos aplicarle la construccion realizada en el teorema anterior, para ello calculemos el conúcleo de g_1.

(2.10) Lema

Sea $X \xrightarrow{g_1} C_g$ la cofibra homotópica canónica de $g : A \longrightarrow X$. Entonces $C_g \xrightarrow{\rho_1} A \otimes S$ es el conúcleo de g_1, siendo $\rho_1 : C_g \longrightarrow A \otimes S : \rho_1\pi(x \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes r_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes p(r_i)$, $p : R \longrightarrow S$ es el conúcleo de $\mathbb{Z} \xrightarrow{i} R : i(1_{\mathbb{Z}}) = 1_R$.

Demostración

Es bién conocido que si $B' \xrightarrow{\beta'} B \xrightarrow{\beta''} B'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de grupos abelianos entonces para A grupo abeliano, la sucesión $A \otimes B' \xrightarrow{\beta'_*} A \otimes B \xrightarrow{\beta''_*} A \otimes B'' \longrightarrow 0$ es también exacta (ver Hilton-Stammbach, cap.III, proposición (7.3)). Entonces β''_* es conúcleo de β'_* . Como la sucesión $\mathbb{Z} \xrightarrow{i} R \xrightarrow{p} S \longrightarrow 0$ es exacta, tenemos que $A \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} A \otimes R \xrightarrow{p_*} A \otimes S \longrightarrow 0$ es exacta, como el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \otimes \mathbb{Z} \arrow[rr, "i_*"] \arrow[d, "\theta"', "\wr\|"] & & A \otimes R \\ A \arrow[urr, "i_1"'] \arrow[ur, phantom, "="] & & \end{tikzcd}$$

Siendo θ el isomorfismo canónico $\theta(a \otimes z) = a.z$, se sigue que p_* es conúcleo de i_1 .

Como el cuadrado que aparece en la proposición (2.8) es cocartesiano, y p_* es el conúcleo de i_1 , entonces por

(0-3.6) $\rho_1 = o \vee p_* : C_g \longrightarrow A \otimes S$ es el conúcleo de g_1,

notemos que $\rho_1 \pi(x \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes r_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes p(r_i)$.

(2.11) Corolario

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & A \otimes S \\ X \arrow[r, "g_1"] & C_g \arrow[ur, "\rho_1"] \arrow[r, "g_2"] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "="] & C_{g_1} \arrow[u, "k_1"'] \end{tikzcd}$$

Siendo ρ_1 el del lema anterior y g_2 la cofibra homotópica canónica de g_1 . Entonces existe $k_1 : C_{g_1} \longrightarrow A \otimes S$ tal que $k_1 . \pi[\pi(x \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes r_i) \oplus (\sum_{j=1}^{m} x_j \otimes s_j)] = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes p(r_i)$

además $k_1 . g_2 = \rho_1$ y k_1 es una h-equivalencia.

Demostración

C_{g_1} aparece en la construcción del siguiente cuadrado cocartesiano:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "i_1"] \arrow[dr, phantom, "="] & C_g \arrow[d, "g_2"] \\ X \otimes R \arrow[r, "r"] & C_{g_1} \end{tikzcd}$$

Entonces $C_{g_1} = \{\pi[\pi(x \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes r_i) \oplus \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes s_j] \mid$

$\mid \pi(ga - a \otimes 1) = o$, $\forall a \in A$ y $\pi[\pi(x \oplus o) - x \otimes 1] = o$ $\forall x \in X\}$. Por el lema anterior $C_g \xrightarrow{\rho_1} A \otimes S$ es el conúcleo de g_1 , por la parte i) del teorema (2.9) $\exists\ k_1 : C_{g_1} \longrightarrow A \otimes S$ tal que $k.\pi = \rho_1.p'$ y $k_1.g_2 = \rho_1$

Entonces $k_1.\pi[\pi(x \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes r_i) \oplus \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes s_j] =$

$= \rho_1.p'\ [\pi(x \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes r_i) \oplus \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes s_j] =$

$= \rho_1 \pi(x \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes r_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes p(r_i)$.

Por ser g_2 la cofibra homotópica canónica de g_1, g_2 es cofibración (ver proposición (2.8)). Y por ii) del teorema (2.9) k_1 es h-equivalencia. <>

De nuevo vamos a reiterar el proceso para $C_g \xrightarrow{g_2} C_{g_1}$

<u>(2.12) Consecuencia</u>

Sea $C_g \xrightarrow{g_2} C_{g_1}$ la cofibra homotópica canónica de $X \xrightarrow{g_1} C_g$. Entonces $C_{g_1} \xrightarrow{\rho_2} X \times S$ es el conúcleo de g_2, siendo $\rho_2 \pi[\pi(x \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes r_i) \oplus \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes s_j] =$

$= \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes p(s_j)$.

(2.13) Consecuencia

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & & X \otimes S \\ C_g \arrow[r, "g_2"] & C_{g_1} \arrow[urr, "\rho^2"] \arrow[rr, "g_3"'] & & C_{g_2} \arrow[u, dashed, "k_2"'] \end{tikzcd}$$

Siendo ρ_2 el de la consecuencia anterior y g_3 es la cofibra homotópica canónica de g_2 . Entonces

$\exists$ $k_2 : C_{g_2} \longrightarrow X \otimes S$ tal que $k_2 . g_3 = \rho_2$ y k_2 es h-equivalencia.

(2.14) Proposición

Con las notaciones anteriores, el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \otimes S \arrow[r, "\rho \otimes 1_S"] & A \otimes S \\ C_{g_1} \arrow[u, "\rho_2"] \arrow[r, "k_1"] \arrow[ur, phantom, "\simeq"] & A \times S \arrow[u, "(-1)"'] \end{tikzcd}$$

conmuta salvo homotopía.

Demostración

Veamos quien es $\rho_2 - g \times 1_S . (-1) . k_1$

$$\rho_2 - (g \times 1_S).(-1).k_1(\pi[\pi(x \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes r_i) \oplus \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes s_j]) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes p(s_j) - g \otimes 1_S(-1) \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes p(r_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes p(s_j) + \sum_{i=1}^{n} ga_i \otimes p(r_i) .$$ Sea la homotopía

$$F : C_{g_1} \times R \longrightarrow X \otimes S \qquad F(\pi[\pi(x \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes r_i) \oplus \sum_{j=1}^{m} x_i \otimes s_j],t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes p(s_j.t) + \sum_{i=1}^{n} ga_i \otimes p(r_i.t) + x \otimes p(t) .$$

Notemos que C_{g_1} es el cociente inducido por las identificaciones que ya hemos expresado en demostración del corolario (2.11). Para ver que F está bién definida, hemos de probar que es compatible con dichas identificaciones. En efecto:

$$F(\pi[\pi(ga - a \otimes 1) \oplus o],t) = -ga \otimes p(t) + g(a) \otimes p(t) = o$$

$$F(\pi[\pi(x \oplus o) - x \otimes 1],t) = -x \otimes p(t) + x \otimes p(t) = o .$$

Fácilmente se comprueba que es bilineal y

$$F(\pi[\pi(x \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes r_i) \oplus \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes s_j],1) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes p(s_j) + \sum_{i=1}^{n} ga_i \otimes p(r_i) + x \otimes o .$$

Por tanto $\rho_2 - g \otimes 1_S.(-1).k_1 \simeq o$. <>

Al functor que a X le hace corresponder $X \otimes S$, lo llamaremos functor suspensión. Denotaremos $SX = X \otimes S$, $S^n(X) = X \otimes S \otimes S \overset{n}{\ldots} \otimes S$, $S^oX = X$.

(2.15) Proposición. Definición

Dado un homomorfismo $g : A \longrightarrow X$ sabemos que existe $g_1 : X \longrightarrow C_g$, g_1 es la cofibra homotópica canónica de g. Pero g_1 también tiene su cofibra homotópica canónica $g_2 : C_g \longrightarrow C_{g_1}$. Por induccion podemos construir la siguiente sucesión:

$$A \xrightarrow{g} X \xrightarrow{g_1} C_g \xrightarrow{g_2} C_{g_1} \xrightarrow{g_3} C_{g_2} \longrightarrow \cdots$$

Es la sucesión canónica de cofibras homotópicas asociada a g.

Por otra parte consideremos la sucesión

$A \xrightarrow{g} X \xrightarrow{g_1} C_g \xrightarrow{\rho_1} SA$ donde g_1 y ρ_1 estan definidos en el lema (2.10) y proposición (1.8). Si le aplicamos a dicha sucesión el functor suspensión S obtenemos

$SA \xrightarrow{Sg} SX \xrightarrow{Sg_1} SC_g \xrightarrow{S\rho_1} S\,A$, asi por inducción tenemos

$$A \xrightarrow{g} X \xrightarrow{g_1} C_g \xrightarrow{\rho_1} SA \xrightarrow{Sg} SX \xrightarrow{Sg_1} SC_g \xrightarrow{S\rho_1} S^2A \longrightarrow \cdots$$

Es la sucesión de Puppe asociada a g .

(2.16) Teorema

Sea $g : A \longrightarrow X$ homomorfismo

i) La sucesión canónica de cofibras homotópicas consecutivas asociada a g es h-equivalencia a la sucesión de Puppe asociada a g.

ii) Si además $g : A \longrightarrow X$ es una cofibración la sucesión de Puppe es h-equivalente a la siguiente sucesión

$$A \xrightarrow{g} X \xrightarrow{\rho} C \xrightarrow{\nabla} SA \xrightarrow{Sg} SX \xrightarrow{S\rho} SC \xrightarrow{S\nabla} S^2A \longrightarrow \dots$$

Siendo $X \xrightarrow{\rho} C$ el conúcleo de g y $\nabla = \rho_1 . \bar{k}$, $\bar{k}$ es una inversa homotópica de $k : C_g \longrightarrow C$

$$k\ \pi(x \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes r_i) = \rho(x) \quad y \quad \rho_1 : C_g \longrightarrow SA\ ,$$

$\rho_1\ \pi(x \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes r_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes p(r_i)$. Diremos que esta es la sucesión de cofibras homotópicas asociada a una cofibración g.

<u>Demostración</u>

Es totalmente dual a la de (1.16).

<u>(2.17) Proposición</u>

Consideremos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A^o & \xrightarrow{g^o} & X^o \\ \Big\downarrow \alpha & = & \Big\downarrow \beta \\ A^1 & \xrightarrow{g^1} & X^1 \end{array}$$

Entonces:

i) α y β inducen de modo natural el siguiente homomorfismo entre las sucesiones de Puppe asociadas a g^o y a g^1 .

$$\begin{tikzcd}
A^o \arrow[r, "g^o"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X^o \arrow[r, "g_1^o"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "="] & C_{g^o} \arrow[r, "\rho_1^o"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "="] & SA^o \arrow[r, "Sg^o"] \arrow[d, "S\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "="] & SX^o \arrow[r, "Sg_1^o"] \arrow[d, "S\beta"'] \arrow[dr, phantom, "="] & SC_{g^o} \arrow[r] \arrow[d, "S1"] & \cdots \\
A^1 \arrow[r, "g^1"] & X^1 \arrow[r, "g_o^1"] & C_{g^1} \arrow[r, "\rho_1^1"] & SA^1 \arrow[r, "Sg^1"] & SX^1 \arrow[r, "Sg_1^1"] & SC_{g^1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

siendo $1 = g_1^1 . \beta \vee r^1 . (\alpha \otimes 1_R)$.

ii) Si además g^o y g^1 son cofibraciones, α y β inducen de modo natural un homomorfismo salvo homotopía entre las sucesiones de cofibras homotópicas asociadas a g^o y g^1 .

$$\begin{tikzcd}
A^o \arrow[r, "g^o"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X^o \arrow[r, "\rho^o"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "="] & C^o \arrow[r, "\nabla^o"] \arrow[d, "\overline{\beta}"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & SA^o \arrow[r, "Sg^o"] \arrow[d, "S\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "="] & SX^o \arrow[r, "S\rho^o"] \arrow[d, "S\beta"'] \arrow[dr, phantom, "="] & SC^o \arrow[r] \arrow[d, "S\overline{\beta}"] & \cdots \\
A^1 \arrow[r, "g^1"] & X^1 \arrow[r, "\rho^1"] & C^1 \arrow[r, "\nabla^1"] & SA^1 \arrow[r, "Sg^1"] & SX^1 \arrow[r, "S\rho^1"] & SC^1 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

siendo $\overline{\beta}$ el homomorfismo inducido a los conúcleos.

<u>Demostración</u>

Dual de la proposición (1.17).

<u>(2.18) Teorema</u>

En el siguiente cuadrado cocartesiano, supongamos que i es una cofibración y g^o un epimorfismo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g^o"] \arrow[d, "i"] & A' \arrow[d, "i'"] \\ X \arrow[r, "g^1"] & X' \end{tikzcd}$$

Entonces C_{g^o} es un retracto por deformación fuerte de C_{g^1} a traves de $1 = g_1^1.i'$ v $r_1.(i \otimes 1_R)$.

<u>Demostración</u>

Dual a la del teorema (1.18).

(III-3) Grupos de homotopía

En este párrafo definiremos los grupos de homotopía, (inducida por el anillo R) tanto en el caso absoluto como en el relativo, estudiaremos algunas de sus propiedades tales como la sucesión exacta de los grupos de homotopía.

(3.1) Definición

Sea A grupo abeliano, denotaremos $S^nA = A \otimes S^n$ siendo $S^n = \otimes^n S$, $S^oA = A$, si $A = \mathbb{Z}$ tomaremos $S^n\mathbb{Z} = S^n$ observemos que $\mathbb{Z} \otimes S^n \cong S^n$. Para B grupo abeliano denotaremos $\pi_n^A(B) = [S^nA, B]$ para $n \geq o$, si $A = \mathbb{Z}$ denotaremos $\pi_n^{\mathbb{Z}}(B) = \pi_n(B) = [S^n, B] = [\otimes^n S, B]$, diremos que $\pi_n(B)$ es el n-ésimo grupo de homotopía de B.

(3.2) Definición

Sea A en $\mathcal{A}$ y $Y \xrightarrow{g} B$ en $\mathcal{A}(2)$ para $n \geq 1$ definimos $\pi_n^A(g) = [i_{S^{n-1}A}, g]$ siendo $i_{S^{n-1}A}$:

: $S^{n-1}A \longrightarrow S^{n-1}A \otimes R$ $i_{S^{n-1}A}(x) = x \otimes 1_R$, si g es monomorfismo diremos que (B,Y) es un par y denotaremos $\pi_n^A(g) = \pi_n^A(B,Y)$, para $A = \mathbb{Z}$, entonces $\pi_n(g) = [i_{S^{n-1}}, g]$

y cuando g sea monomofismo $\pi_n(g) = \pi_n(B,Y)$ diremos que $\pi_n(B,Y)$ es el n-ésimo grupo de homotopía relativo al par (B,Y).

(3.3) Proposición

Para $n \geqslant o$ y $n \geqslant k \geqslant o$ existe un isomorfismo canónico $\pi_n(X) \cong \pi_{n-k}(\Omega^k X)$.

Demostración

Observemos que la proposición (I-1.22), tomando $G = S$ nos dice que el functor suspensión S es adjunto a izquierda del functor lazos Ω , por tanto

$\pi_n(X) = [\otimes^n S, X] \cong [\otimes^{n-1} S, \Omega X] \cong \ldots \cong [S, \Omega^{n-1} X] \cong [\mathbb{Z}, \Omega^n X] =$
$= \pi_o(\Omega^n X)$.

(3.4) Proposición

Existe una equivalencia natural $\theta : \pi_1^A \longrightarrow [A, F_-]$ considerandolos como funtores del tipo $\mathcal{A}(2) \longrightarrow \mathcal{A}$. Para $g : Y \longrightarrow B$ y $(u,v) : i_A \longrightarrow g$ $(v.i_A = gu)$ $\theta_g[(u,v)] = [u \wedge \overline{v}]$, siendo $\overline{v}$ la adjunta de $A \otimes R \xrightarrow{v} B$ $(\overline{v}(a)(r) = v(a \otimes r))$.

Demostración

Veamos primero que $F_g \overset{1}{\cong} \mathcal{A}(2)\ (i,g)$ siendo $i : \mathbb{Z} \longrightarrow R : i(1_{\mathbb{Z}}) = 1_R$. Para $(y,\alpha) \in F_g$ $1(y,\alpha) = (\hat{y},\alpha)$ siendo $\hat{y} : \mathbb{Z} \longrightarrow Y$ tal que $\hat{y}(1_{\mathbb{Z}}) = y$, fácilmente se comprueba que es un isomorfismo.

Consideremos la siguiente sucesión de equivalencias naturales

$$\pi_1^A(g) = [A \xrightarrow{i_A} A \otimes R\ ,\ Y \xrightarrow{g} B] \cong$$

$$\cong [A \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{1_A \otimes i} A \otimes R\ ,\ Y \longrightarrow B] \cong$$

$$\cong [A, \mathcal{A}(2)\ (i,g)] \cong [A, F_g]\ .$$

La primera proviene de sustituir i_A por $1_A \otimes i$ que son objetos isomorfos en $\mathcal{A}(2)$, la segunda es la que viene en la proposición (I-4.21), la tercera al hecho de que $\mathcal{A}(2)(i,g)$ es isomorfo a F_g de modo natural. Fácilmente se comprueba que la composición de estas equivalencias naturales es la $\theta : \pi_1^A \longrightarrow [A, F_-]$ que aparece en el enunciado.

<u>(3.5) Teorema</u>

Sea $Y \xrightarrow{g} B$ homomorfismo entonces la siguiente sucesión es exacta, $n \geqslant 1$

$$\ldots \longrightarrow \pi_n^A(Y) \xrightarrow{g_*} \pi_n^A(B) \xrightarrow{p^*} \pi_n^A(g) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}^A(Y) \xrightarrow{g_*}$$

$$\xrightarrow{g_*} \pi_{n-1}^A(B) \longrightarrow \ldots$$

Si $\alpha : A \otimes S^n \longrightarrow Y$ $g_*[\alpha] = [g.\alpha]$, para $\beta : A \otimes S^n \longrightarrow B$ $p^*[\beta] = [(0, \beta p)]$ siendo $p : A \otimes S^{n-1} \otimes R \longrightarrow A \otimes S^n$ tal que $p(a \otimes x \otimes r) = a \otimes x \otimes p(r)$. Para $(\alpha, \beta) : i_{S^{n-1}A} \longrightarrow g$ $\partial[(\alpha,\beta)] = [\alpha]$. Como caso particular para $A = \mathbb{Z}$ y g monomorfismo, obtenemos la sucesión $n \geq 1$

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(Y) \xrightarrow{g_*} \pi_n(B) \xrightarrow{p^*} \pi_n(B,Y) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(Y) \xrightarrow{g_*}$$

$\xrightarrow{g_*} \pi_{n-1}(B) \longrightarrow \cdots$ que llamaremos sucesión exacta de los grupos de homotopía del par (B,Y) .

Sea el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Y_o \arrow[r, "g_o"] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, phantom, "="] & B_o \arrow[d, "v"] \\
Y_1 \arrow[r, "g_1"] & B_1
\end{tikzcd}$$

Es decir $(u,v) : g_o \longrightarrow g_1$ en $\mathcal{A}(2)$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo, $n \geq 1$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_n^A(Y_o) \arrow[r, "(g_o)_*"] \arrow[d, "u_*"] \arrow[dr, phantom, "="] & \pi_n^A(B_o) \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "v_*"] \arrow[dr, phantom, "="] & \pi_n^A(g_o) \arrow[d, "(u,v)_*"] \\
\cdots \arrow[r] & \pi_n^A(Y_1) \arrow[r, "(g_1)_*"] & \pi_n^A(B_1) \arrow[r, "p^*"] & \pi_n^A(g_1)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_n^A(g_o) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "(u,v)_*"] & \pi_{n-1}^A(Y_o) \arrow[r, "(g_o)_*"] \arrow[d, "u_*"] \arrow[dr, phantom, "="] & \pi_{n-1}^A(B_o) \arrow[r] \arrow[d, "v_*"] & \cdots \\
\pi_n^A(g_1) \arrow[r, "\partial"] & \pi_{n-1}^A(Y_1) \arrow[r, "(g_1)_*"] & \pi_{n-1}^A(B_o) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Para $A = \mathbb{Z}$, g_o y g_1 monomorfismos resulta el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow \pi_n(Y_o) & \xrightarrow{(g_o)_*} & \pi_n(B_o) & \xrightarrow{p^*} & \pi_n(B_o,Y_o) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(Y_o) \\
\downarrow u_* & = & \downarrow v_* & = & \downarrow ((u,v))_- & = & \downarrow u_* \\
\cdots \longrightarrow \pi_n(Y_1) & \xrightarrow{(g_1)_*} & \pi_n(B_1) & \xrightarrow{p_*} & \pi_n(B_1,Y_1) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(Y_1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_{n-1}(Y_o) & \xrightarrow{(g_o)_*} & \pi_{n-1}(B_o) & \longrightarrow & \cdots \\
= \ \downarrow u_* & & = \ \downarrow v_* & & \\
\pi_{n-1}(Y_1) & \xrightarrow{(g_1)_*} & \pi_{n-1}(B_1) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Demostración

Analicemos el diagrama (D). Por el teorema (1.16) y Corolario (1.6), la sucesión de Eckmann-Hilton asociada a g es de fibras homotópicas consecutivas, y por el corolario (1.7), la sucesión (a) del diagrama (D) es exacta. Para ver que la sucesión (a) es equivalente a la sucesión (b), veamos que D_A es conmutativo, ya que, por la proposición (3.4) ϑ es una equivalencia natural, y se define como $\partial = g^!_*.\vartheta$ y los demás diagramas son conmutativos ya que el funtor suspensión es adjunto a izquierda del functor lazos.

Sea

$$\alpha: SA \longrightarrow B, \quad \vartheta\, p^*[\alpha] = [(o,\alpha p)] = [o \wedge \overline{\alpha p}] ,$$
$$i^1_*\varepsilon[\alpha] = i^1{}_*\,[\alpha] = [i^1.\alpha]$$

$$g^1(i^1\alpha) = g^1.i^1)\alpha = o.\alpha = o$$
$$r.(i^1.\alpha) = (r.i^1)\overline{\alpha} = B^p.\overline{\alpha} \quad ,$$

veamos que $B^{p}.\bar{\alpha} = \overline{\alpha.p}$

$\overline{\alpha p}(a)(r) = \alpha.p(a \otimes r) = \alpha(a \otimes p(r)) = \bar{\alpha}(a)\ (p(r)) = B^{p}.\bar{\alpha}(a)(r)$

Por tanto $i^{1}.\alpha = o\wedge\alpha p$ y $\vartheta.p^{*} = i^{1}_{*}.\varepsilon$.

Veamos como actua ∂ : Sea $(\alpha,\beta): i_{A} \longrightarrow g$,

$\partial[(\alpha,\beta)] = g'_{*}\vartheta[\alpha\wedge\beta] = g'_{*}[\alpha\wedge\bar{\beta}] = [g'(\alpha\wedge\beta)] = [\alpha].$

Hemos probado que la sucesión (a) es equivalente a la sucesión (b) , para pasar de la sucesión (b) a la (c) , basta observar que el diagrama D_{A} es conmutativo para todo A , en particular lo será para SA . Podemos así completar por inducción la demostración, quedando probada la exactitud de la sucesión, del enunciado.

Para probar la naturalidad, tengamos en cuenta que tanto ε como ϑ son equivalencias naturales, además por la proposición (1.17), hay naturalidad al construir las sucesiones de Eckmann-Hilton asociadas a g_{o} y g_{1} .

$$
\begin{tikzcd}
(a) & \cdots \arrow[r] & {[A,\Omega^2 B]} \arrow[r] \arrow[d, "\wr\|"] \arrow[dr, phantom, "="] & {[A,\Omega F_g]} \arrow[r] \arrow[d, "\wr\|"] \arrow[dr, phantom, "="] & {[A,\Omega Y]} \arrow[r] \arrow[d, "\wr\|"] \arrow[dr, phantom, "="] & {[A,\Omega B]} \arrow[r, "i_*^!"] \arrow[d, "\wr\|\varepsilon"] \arrow[dr, phantom, "D_A"] & {[A,F_g]} \arrow[r, "g_*^!"] \arrow[d, "\wr\|"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "="] & {[A,Y]} \arrow[r, "g_*"] & {[A,B]} \\
(b) & \cdots \arrow[r] & {[SA,\Omega B]} \arrow[r, "i_*^!"] \arrow[d, "\wr\|\varepsilon"] \arrow[dr, phantom, "D_{SA}"] & {[SA,F_g]} \arrow[r] \arrow[d, "\wr\|\theta"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "="] & {[SA,Y]} \arrow[r, "g_*"] & {[SA,B]} \arrow[r, "p^*"] & {[i_A,g]} \arrow[ur, "\partial"'] & & \\
(c) & \cdots \arrow[r] & {[S^2 A,B]} \arrow[r, "p^*"] & {[i_{SA},g]} \arrow[ur, "\partial"'] & & & & &
\end{tikzcd}
$$

(D)

Bastará que probemos que para cualquier A el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
{[SA,B_o]} \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "v_*"] & {[i_A,g_o]} \arrow[d, "(u,v)_*"] \\
{[SA,B_1]} \arrow[r, "p^*"] & {[i_A,g_1]}
\end{tikzcd}$$

Para $\alpha : SA \longrightarrow B_o$,

$$(u,v)_* . p^*[\alpha] = (u,v)_* \; [(o,\alpha p)] = [(o,v\alpha p)]$$

$$p^* v_* [\alpha] = p^*[v\alpha] = [(o,v\alpha p)]$$

Con esto queda probada la naturalidad, de la sucesión exacta de los grupos de homotopía.

<u>(3.6) Teorema</u>

Sea $y \xrightarrow{g} B$ una fibración entonces la siguiente sucesión es exacta $n \geq 1$

$$\ldots \longrightarrow \pi_n^A(Y) \xrightarrow{g_*} \pi_n^A(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}^A F \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}^A Y$$

$$\pi_{n-1}^A Y \xrightarrow{g_*} \pi_{n-1}^A B \longrightarrow \ldots$$

siendo $F \xrightarrow{i} Y$ el núcleo de g , y ∂ la composición

$$[S^n A,B] \xrightarrow{\varepsilon} [S^{n-1}A, B] \xrightarrow{\Delta^*} [S^{n-1}A,F]$$

es el homomorfismo de conexión que aparece en ii) del teorema (1.16). Tomando $A = \mathbb{Z}$, obtenemos la sucesión exacta de los grupos de homotopía asociada a una fibración.

Además para el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Y_o & \xrightarrow{g_o} & B_o \\ \downarrow u & = & \downarrow v \\ Y_1 & \xrightarrow{g_1} & B_1 \end{array}$$

donde g_o y g_1 son fibraciones, el siguiente diagrama es conmutativo, para $n \geq 1$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_n^A Y_o & \xrightarrow{(g_o)_*} & \pi_n^A B_o & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}^A F_o \\ & & \downarrow u_* & = & \downarrow v_* & = & \downarrow \bar{u}_* \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_n^A Y_1 & \xrightarrow{(g_1)_x} & \pi_n^A B_1 & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}^A F_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{n-1}^A F_o & \xrightarrow{(i_o)_*} & \pi_{n-1}^A Y_o & \xrightarrow{(g_o)_*} & \pi_{n-1}^A B_o & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow \bar{u}_* & = & \downarrow u_* & = & \downarrow v_* & & \\ \pi_{n-1}^A F_1 & \xrightarrow{(i_1)_*} & \pi_{n-1}^A Y_1 & \xrightarrow{(g_1)_*} & \pi_{n-1}^A B_1 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

siendo $F_o \xrightarrow{i_o} Y_o$ y $F_1 \xrightarrow{i_1} Y_1$ núcleos de g_o y g_1 respectivamente y $\bar{u}$ la restricción de u a los núcleos.

Demostración

Basta aplicar a la sucesión de fibras homotópicas asociada a una fibración (ver ii) del teorema (1.16) el functor $[A,-]$ y tener en cuenta que el functor suspensión es adjunto a izquierda del functor lazos, para la naturalidad hasta tener en cuenta lo anterior y la parte ii) de la proposición (1.17). <>

(3.7) Corolario

Sea $p:E \longrightarrow B$ una fibración, B' subgrupo de B, $E' = p^{-1}B'$ y $p':E \longrightarrow B'$ la fibración inducida por p. $(p,p'):(E,F') \longrightarrow (B,B')$ es un morfismo natural de pares, entonces $(p,p')_*:\pi_n(E,E') \longrightarrow \pi_n(B,B')$ es isomorfismo, para $n \geq 1$.

Demostración

Observemos que el siguiente cuadrado es cartesiano

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "g_o"] \arrow[d, "p'"'] \arrow[dr, phantom, "="] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "g_1"] & B \end{tikzcd}$$

Donde g_o y g_1 son las inclusiones naturales, entonces por el teorema (1.18) F_{g_o} es un dilatado por deformación fuerte de F_{g_1}, a través de $1 = p'.g_o' \wedge p^R r_o$. Por la proposición (3.4), el siguiente diagrama es conmutativo. $n \geq 1$

$$\begin{tikzcd} {[i_{S^{n-1}}, g_o]} \arrow[r, "\theta_o"] \arrow[d, "(p',p)_*"'] \arrow[dr, phantom, "="] & {[S^{n-1}, F_{g_o}]} \arrow[d, "1_*"] \\ {[i_{S^{n-1}}, g_1]} \arrow[r, "\theta_1"] & {[S^{n-1} F_{g_1}]} \end{tikzcd}$$

siendo ϑ_o, ϑ_1 y 1_* isomorfismos (1 es h-equivalencia) por tanto $(p,p')_*:\pi_n(E,E') \longrightarrow \pi_n(B,B')$ es isomorfismo para $n \geq 1$. Recordemos como definimos en (3.2) el grupo n-ésimo de homotopía de un par.

(3.8) Corolario

Sea B_o el máximo subgrupo o-conexo de B , entonces la inclusión canónica $i:B_o \longrightarrow B$ induce isomorfismos en los correspondientes grupos de homotopía para $n \geq 1$

$$\pi_n B_o \xrightarrow{i_*} \pi_n B \ .$$

Demostración

En primer lugar tiene sentido hablar del máximo subgrupo o-conexo ya que la suma de subgrupos o-conexos es subgrupo o-conexo, el máximo es la suma de todos ellos. Observemos la siguiente sucesión

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(E) \xrightarrow{(1_E)_*} \pi_n(E) \longrightarrow \pi_n(E,E)$$

$$\pi_n(E,E) \longrightarrow \pi_{n-1}(E) \xrightarrow{(1_E)_*} \pi_{n-1}(E)$$

Como $(1_E)_*$ es isomorfismo y la sucesión es exacta, entonces $\pi_n(E,E) = 0$ para $n \geq 1$.

Fácilmente se comprende que $\operatorname{Im} q_1 = B_o$ para $q_1 : B^R \longrightarrow B : q_1(\alpha) = \alpha(1)$, también sabemos que q_1 es fibración, entonces por el corolario anterior

$\pi_n(B,B_o) = \pi_n(B^R,B^R) = 0 \quad n \geq 1$.

Como la siguiente sucesión es exacta

$$\longrightarrow \pi_n(B,B_o) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(B_o) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(B) \longrightarrow \pi_{n-1}(B,B_o) \longrightarrow$$

entonces $i_* : \pi_n(B_o) \longrightarrow \pi_n(B)$ es isomorfismo para $n \geq 1$.

<>

<u>(3.9) Corolario</u>

Sea X grupo abeliano, $\pi_o X = 0 \Longleftrightarrow X$ es conexo por arcos.

<u>Demostración</u>

$\pi_o(X) = [Z,X]$. Sea $x \in X$ $\hat{x}:\mathbb{Z} \longrightarrow X$ tal que $\hat{x}(1) = x$ como $x \simeq o$, $\tau_x : R \longrightarrow X$ tal que $\tau_x(1) = x$ y por tanto X es conexo por arcos. Recíprocamente, para $f : \mathbb{Z} \longrightarrow R$ $\quad f = \widehat{f(1)}$, como X es conexo por arcos existe $\tau : R \longrightarrow X$ tal que $\tau(1) = f(1)$, entonces $f \simeq o$.

CAPITULO IV

HOMOTOPIA INDUCIDA POR ALGUNOS ANILLOS. CUBIERTAS .

En este capítulo estudiamos algunos ejemplos interesantes. En primer lugar demostramos que si R y R' son anillos $\mathbb{Z}$-divisibles y libres de torsión, inducen la misma teoría de homotopía y mismos grupos de homotopía, para anillos de este tipo tomaremos como modelo $\mathbb{Q}$. A continuación damos un teorema de clasificación de estructuras de R-casimódulo y otro que nos da condiciones suficientes para que un grupo abeliano M , admita estructura de R-módulo. Seguidamente estudiamos la teoría de homotopía inducida por el anillo de los enteros localizado con respecto un conjunto de primos P , calculando los grupos de homotopía. Con este tipo de anillos $\pi_n(X) = 0$ para $n > 1$, además si $\pi_o(X) = \pi_1(X) = 0$ X es contráctil. Un caso particular es cuando $P = \emptyset$ que nos da la homotopía inducida por $\mathbb{Q}$, finalmente para este anillo damos una caracterización de los homomorfismos nulohomótopos, y otra de las cofibraciones.

Finalmente definimos el concepto de cubierta en los grupos abelianos, dependiendo del anillo R que consideremos. Vemos que las cubiertas son fibraciones, estudiamos los grupos de homotopía de una cubierta y probamos un teorema de elevación en el que la condición de elevación viene determinada por el anill fundamental. En el caso de que el anillo R sea divisible, probamos que todo grupo abeliano tiene una cubierta universal y damos un teorema de clasificación de cubiertas sobre grupos que admitan cubierta universal.

(IV-1) Anillos $\mathbb{Z}$-divisibles y libres de torsión

Demostraremos que si R y R' son dos anillos $\mathbb{Z}$-divisibles y libres de torsión, entonces R y R' inducen la misma teoría de homotopía, además aunque las "n-esferas" que inducen R y R' son distintas, definen los mismos grupos de homotopía. Para estos anillos tomaremos como modelo, el anillo de los números racionales $\mathbb{Q}$.

(1.1) Teorema

Sea A $\mathbb{Z}$-divisible y libre de torsión, entonces A es R-contractil para cualquier anillo R de característica cero.

Demostración

Sabemos que $A \xrightarrow{i_1} A \otimes R$ es cofibración, por prop. II-1.17 como A es libre de torsión y R es de característica cero i_1 es monomorfismo. Sea el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "i_1"'] & A \\ A \otimes R \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Como A es $\mathbb{Z}$-divisible A es inyectivo en $\mathcal{A}$, luego existe $F: A \otimes R \longrightarrow A$ tal que $F.i_1 = 1_A$, por tanto A es R-contráctil.

(1.2) Teorema

Si R y R' son $\mathbb{Z}$-divisibles y libres de torsión sea $f: A \longrightarrow B$ entonces $f \simeq_R o \iff f \simeq_{R'} o$, por tanto $[A,B]_R = [A,B]_{R'}$.

Demostración

Como R' es libre de torsión, es de característica cero y por teorema anterior R es R'-contractil, entonces existe $F: R \times R' \longrightarrow R$ tal que $F(r,1) = r$

$f' = F(1,-): R' \longrightarrow R$ es homomorfismo de grupos y $f'(1) = 1$.

Sea $f: A \longrightarrow B$ y supongamos que $f \simeq_R o$, entonces existe $G: A \otimes R \longrightarrow B$ tal que $G.i_1 = f$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_1'"'] \arrow[dr, "i_1"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "="] & B \\ A \otimes R' \arrow[r, "1_A \otimes f'"'] & A \otimes R \arrow[u, "G"'] \end{tikzcd}$$

Como el diagrama anterior es conmutativo $G.1_A \otimes f'.i_1' = f$ por tanto $f \simeq_{R'} o$. Análogamente

$f \simeq_{R'} o \Longrightarrow f \simeq_{R} o$.

(1.3) Teorema

Si R es $\mathbb{Z}$-divisible y libre de torsión, entonces $R/\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son del mismo tipo de homotopía (notemos que $\mathbb{Q}$-homotopía coincide con R-homotopía).

Demostración

Como R $\mathbb{Z}$-divisible y libre de torsión y $\mathbb{Q}$ es de característica cero por (1-1) teorema, R es $\mathbb{Q}$-contráctil, por tanto existe $F:R \times \mathbb{Q} \longrightarrow R$ tal que $F(r,1) = r$ $f = F(1,-):\mathbb{Q} \longrightarrow R$ es tal que $f(1) = 1$. Entonces el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z} \arrow[dl, "i_{\mathbb{Q}}"'] \arrow[dr, "i_R"] & \\ \mathbb{Q} \arrow[rr, "f"] & & R \end{tikzcd}$$

Notemos que como $f \simeq_{\mathbb{Q}} o \Longleftrightarrow f \simeq_R o$ por el teorema anterior, R-cofibraciones coinciden con $\mathbb{Q}$-fibraciones R-contráctil con $\mathbb{Q}$-contráctil, etc.

Como $\mathbb{Q}$ y R son contractiles f es una h-equivalencia además i_R es cofibración y por el corolario II-2.5, el homomorfismo inducido $f:\mathbb{Q}/Z \longrightarrow R$ también es h-equivalencia (para R y $\mathbb{Q}$). <>

(IV-2) Clasificación de estructuras de R-casimódulo sobre M

Sea M un grupo abeliano, si existe una aplicación $F:M \times R \longrightarrow M$ bilineal y tal que $F(m,1) = m$, diremos F es una estructura de R-casimódulo para M .

(2.1) Teorema

Sea M R-casimódulo, entonces el conjunto de las diferentes estructuras de R-casimódulo sobre M es biyectivo con $\mathrm{Hom}\,(M \otimes S,M)$.

Demostración

Sea $F:M \otimes R \longrightarrow M$ una estructura fija de R-casimódulo. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M\otimes\mathbb{Z} \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[dr, "1\otimes i"'] & M \arrow[d, "i_1"] & \\
& M\otimes R \arrow[r, "G-F"] \arrow[d, "1\otimes p"] & M \\
& M\otimes S \arrow[ur, dashed, "\overline{G-F}"'] &
\end{tikzcd}$$

Como p es conúcleo de i , $1 \otimes p$ es conúcleo de $1 \otimes i$ ya que $M \otimes -$ transforma conúcleos en conúcleos. Como $F\, i_1 = 1_M = G.i_1 \Longrightarrow (F-G).i_1 = o$, entonces existe una única $\overline{F-G} : M \otimes S \longrightarrow M$ tal que $(\overline{F-G})(1 \otimes p) = F-G$. Entonces a G le asociamos $\overline{F-G}$, si $\overline{F-G} = \overline{F-G'}$ implica

$F-G = F-G'$ y por tanto $G = G'$. Recíprocamente si $\alpha \in \operatorname{Hom}(M \otimes S, M)$ $G = F + \alpha(1 \otimes p):M \times R \longrightarrow M$ tal que $G.i_1 = F.i_1 + \alpha(1 \otimes p).i_1 = F.i_1 = 1_M$, además $\overline{G-F} = \alpha$. <>

Sea $F:M \times R \longrightarrow M$ una estructura de R-casimódulo en M , consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times R \times R \arrow[r, "1\times."] \arrow[d, "F\times 1_R"] & M \times R \arrow[d, "F"] \\ M \times R \arrow[r, "F"] & M \end{tikzcd}$$

si es conmutativo, diremos que F es asociativa y por tanto M es un R-módulo. Sea $\vartheta(F) = F(1\times.) - F.(F \times 1)$ notemos que $\vartheta(F)$ es lineal en las tres variables, entonces existe una única $\overline{\vartheta(F)} : M \otimes R \otimes R \longrightarrow M$ tal que $\overline{\vartheta(F)}(m \otimes r \otimes s) =$ $= \vartheta F(m,r,s)$. Sea $1 \otimes p \otimes p: M \otimes R \otimes R \longrightarrow M \otimes S \otimes S$ siendo $p:R \longrightarrow S$ la proyección natural, estudiemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \otimes R \otimes R \arrow[d, "1\otimes p\otimes p"] \arrow[dr, "\overline{\vartheta(F)}"] & \\ M \otimes S \otimes S \arrow[r, dashed, "A(F)"] & M \end{tikzcd}$$

Observemos que $1 \otimes p$ y p son epimorfismos, por tanto $1 \otimes p \otimes p$ es epimorfismo y su núcleo está generado por los elementos de la forma, $k \otimes r$, $k \in \operatorname{Ker} 1 \otimes p.$ $r \in R$ y

$x \otimes k \quad x \in M \otimes R \quad k \in \text{Ker } p.$, además $\text{Ker } 1 \otimes p$, está generado por elementos de la forma $m \otimes k$, $m \in M$ $k \in \text{Ker } p.$. Ver Hu, S-T [16] , Chapter I, Theorem 7.7 . Veamos que $\overline{\theta(F)}$ se anula en $\text{Ker } 1 \otimes p \otimes p$.

$\overline{\theta(F)}(m \otimes k \otimes s) = \theta(F)(m,k,s) = F(m,ks)-F(F(m,k),s) =$
$= F(m,s).k - F(m,s)k = o$.

$\overline{\theta(F)}(m \otimes r \otimes k) = \theta(F)(m,r,k) = F(m,r.k)-F(F(m,r),k) =$
$= F(m,r).k-F(m,r).k = o$

siendo $k = 1_R + \ldots + 1_R$ (k veces).

Por tanto $\exists |\ A(F): M \otimes S \otimes S \longrightarrow M$ tal que $A(F).(1 \otimes p \otimes p) = \overline{\theta(F)}$, $A(F)$ diremos que es la obstrucción de F a ser asociativa. Podemos enunciar la siguiente proposición.

<u>(2.2) Proposición</u>

Sea $F:M \times R \longrightarrow M$ una estructura de R-casimódulo sobre M entonces F es asociativa si y sólo si $A(F) = 0$.

<u>(2.3) Proposición</u>

Sea M conexo por arcos (para R) y $\text{Hom}(S,M) = 0$ entonces M admite una y sólo una, estructura de R-casimódulo F que es asociativa y por tanto (M,F) es también la única estructura de R-módulo sobre M .

Demostración

Para cada $m \in M$, existe un único $\sigma_m : R \longrightarrow M$ tal que $\sigma_m(1) = m$, ya que si $\tau : R \longrightarrow M$ verifica que $\tau(1) = m$ $(\tau - \sigma_m)(1) = o$, entonces $\exists | : \overline{\tau - \sigma_m} : S \longrightarrow M$ tal que $(\overline{\tau - \sigma_m}).p = \tau - \sigma_m$, pero $\overline{\tau - \sigma_m} = 0$, entonces $\tau = \sigma_m$.

Definimos $F : M \times R \longrightarrow M : (m,r) \longrightarrow \sigma_m(r)$, veamos que es lineal en la primera variable; sean m y $m' \in M$, el homomorfismo $\sigma_m + \sigma_{m'} : R \longrightarrow M$ verifica que $(\sigma_m + \sigma_{m'})(1) = m + m'$ por tanto $\sigma_m + \sigma_{m'} = \sigma_{m+m'}$, es decir $\sigma_m(r) + \sigma_{m'}(r) = (\sigma_{m+m'})(r)$. Es inmediato que es lineal en la segunda variable, además $\sigma_m(1) = m$. Recordemos que por proposición (2.3) y $\mathrm{Hom}(S,M) = 0$

$$\mathrm{Hom}(M \otimes S \otimes S, M) = \mathrm{Hom}(M \otimes S, \mathrm{Hom}(S,M)) = 0$$

Como $A(F) \in \mathrm{Hom}(M \otimes S \otimes S, M)$, $A(F) = o$ y por la proposición anterior F es asociativa, entonces F da a M estructura de R-módulo, si G es otra estructura de R-módulo sobre M , G es estructura de R-casimódulo y $F = G$.

(IV-3) El anillo $\mathbb{Z}(n)$

Llamemos $\mathbb{Z}(n)$, el anillo de los enteros módulo n , $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sea para un grupo abeliano A , el homomorfismo $\hat{n}:A \longrightarrow A$ tal que $\hat{n}(a) = n.a$ para $n \in \mathbb{Z}$, denotaremos $A[n] = \mathrm{Ker}\ \hat{n}$ y $n.A = \mathrm{Im}\ \hat{n}$. Como la sucesión $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\hat{n}} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}(n) \longrightarrow 0$ es exacta y $A \otimes -$ transforma epimorfismos en epimorfismos

$A \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{\hat{n}_*} A \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{p_*} A \otimes \mathbb{Z}(n) \longrightarrow 0$ es también exacta.

Es decir $A \otimes \mathbb{Z}(n) \cong A/nA$, que nos dice quien es el functor cono para este anillo. También tenemos el isomorfismo canónico $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(n),A) = A[n]$ que nos dice quien es el functor arcos.

Sea $f:A \longrightarrow B$ $f \simeq o$ si y sólo si $f(na) = n.fa = o$ $\forall a \in A$. Notemos que si A es n-divisible, o bien en B se verifica que si $n.b = o \Longrightarrow b = o$, entonces $f \simeq o$ si y sólo si $f = o$, en estos casos $[A,B] = \mathrm{Hom}\ (A,B)$.

Como Coker $(Z \longrightarrow Z(n)) = 0$, el único grupo de homotopía que tiene sentido es π_o . Notemos que si $\pi_o(A) = A|A[n] = 0$, entonces $A = A[n]$, es decir A es n-acotado $(n.A = 0)$, además A es $\mathbb{Z}(n)$-contráctil.

Recordando las proposiciones (II-1-15)) y (II-(1-15)), vemos que $A \xrightarrow{i} X$ es $\mathbb{Z}(n)$-cofibración si y sólo si el homomorfismo inducido $A|n.A \xrightarrow{\bar{i}} X|nX$ admite retracción, $E \xrightarrow{p} B$ es $\mathbb{Z}(n)$-fibración si y sólo si $E[n] \xrightarrow{p} B[n]$ admite sección. Finalmente, diremos que $f:A \longrightarrow B$ es h-equivalencia (para $\mathbb{Z}(n)$) si existe $f':B \longrightarrow A$ tal que $f'f(na) = na \quad \forall a \in A$ y $f.f'(nb) = n.b \quad \forall b \in B$.

(IV-4) Homotopía local

Sea P un conjunto de primos de $\mathbb{Z}$, denotaremos con P' el complemento de P en los primeros de $\mathbb{Z}$. El anillo de los enteros P-locales Z_P es el subanillo de los racionales de $\mathbb{Q}$ expresables como a/b , donde si p/b entonces $p \notin P$. Notemos que si $P = \emptyset$, $\mathbb{Z}_P = \mathbb{Q}$ y si P son todos los primos de $\mathbb{Z}$, entonces $\mathbb{Z}_P = \mathbb{Z}$, en el caso que $P' = \{p\}$, denotaremos $\mathbb{Z}_P = \mathbb{Q}^p$. Utilizaremos las siguientes notaciones $\mathbb{Z}_P/\mathbb{Z} = S_P$, $\mathbb{Q}^p/\mathbb{Z} = S^p$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = S$. Notemos que para $\mathbb{Z}_P$ el functor cono es la P-localización de un grupo abeliano : $A_P = A \otimes \mathbb{Z}_P$.

A continuación vamos a estudiar los grupos de homotopía, cuando tomamos como anillo $R = \mathbb{Z}_P$. Sea X un grupo abeliano. Sea $X_o = \{x \in X \mid \exists\, \tau : Z_P \longrightarrow X$ tal que $\tau(1) = x\}$ X_o es el máximo subgrupo de X o-conexo, entonces $\pi_o(X) = X/X_o$, enunciemos la siguiente proposición.

(4.1) Proposición

$\pi_o(X) = 0 \implies X$ es P'-divisible.

Demostración

Si $\pi_o(X) = 0$, $X_o = X$ si $p \in P'$ y $x \in X$, existe $\tau : Z_P \longrightarrow X$ tal que $\tau(1) = x$ $p.(\tau(\frac{1}{p})) = \tau(1) = x$, entonces X es p-divisible para todo $p \in P'$, es decir X es P'-divisible.

(4.2) Proposición

Sea X grupo abeliano, entonces $\pi_1(X) = \mathrm{Hom}\ (S_P, X)$ y $\pi_n(X) = 0$ para $n > 1$.

Demostración

Basta observar que $S_P \otimes \mathbb{Z}_P = 0$ y que $S_P \otimes S_P = 0$. Designemos $[\frac{a}{b}]$ los elementos de S_P con $\frac{a}{b} \in Z_P$, donde suponemos que si p/b $p \notin P$, entonces $[\frac{a}{b}] \otimes x =$ $= [\frac{a}{b}] \otimes \frac{b.x}{b} = [\frac{b.a}{b}] \otimes \frac{x}{b} = [a] \otimes \frac{x}{b} = [o] \otimes \frac{x}{b} = o$. Análogamente se ve que $S_P \otimes S_P = 0$.

Sea $f: S_P \longrightarrow X$ si $f \simeq o$ se factoriza a través de $S_P \otimes \mathbb{Z}_P = 0$, entonces $f = o$, por tanto $\mathcal{N}(S_P, X) = 0$ y $\pi_1(X) = \mathrm{Hom}(S_P, X)/\mathcal{N}(S_P, X) = \mathrm{Hom}(S_P, X)$.

(4.3) Corolario

Sea $X \in |\mathcal{A}|$ X es $\mathbb{Z}_P$-módulo si y sólo si $\pi_o(X) = \pi_1(X) = 0$.

Demostración

Desde luego si X es $\mathbb{Z}_P$-módulo es $\mathbb{Z}_P$-contráctil (I-1.16) y por tanto $\pi_o(X) = 0 = \pi_1(X)$. Si $\pi_o(X) = 0$ entonces X es $\mathbb{Z}_P$-conexo por arcos (III.3.9) y $\pi_1(X) =$ $= \mathrm{Hom}\ (S_P, X) = 0$ (proposición anterior) entonces por la proposición (3-2) X es $\mathbb{Z}_P$-módulo. < >

Tomemos ahora P de forma que $P' = \{p\}$, damos a continuación un teorema que nos calcula, para el anillo $\mathbb{Q}^p$ el primer grupo de homotopía $\pi_1(A) = \mathrm{Hom}(S^p,A)$. Sea $\bar{p}:A \longrightarrow A$ el homomorfismo inducido por el primo p , denotemos $\bar{p}^n = p \circ \ldots \circ p = \overline{p^n}$ si $n = o$ $p^n = 1_A$. Denotaremos por $Ap^n = \mathrm{Ker}\ p^n$ son los elementos de A que se anulan por p^n .

(4.4) Proposición

Sea A un grupo abeliano y $Ap^n = \{a \in A \mid p^n a = o\}$ entonces $Ap^n \hookrightarrow Ap^{n+1}$ y $\lim\limits_{\to} Ap^n = A^p$ siendo A^p el subgrupo de p-torsión de A .

Demostración

Evidentemente $Ap^n \hookrightarrow Ap^{n+1}$, y $Ap^n \hookrightarrow A^p$ además si $a \in A^p \Longrightarrow$ existe n tal que $p^n a = o \Longrightarrow a \in Ap^n$. (ver prop. (0-5.3)). <>

(4.5) Proposición

Sea $S^p = \mathbb{Q}^p/\mathbb{Z}$ y para $z \in \mathbb{Q}^p$ designemos por $[\ ] : \mathbb{Q}^p \longrightarrow S^p$ la proyección canónica $z \longrightarrow [z]$, entonces $(S^p)_{p^n} = \{[\frac{1}{p^n}], [\frac{2}{p^n}], \ldots, [\frac{p^n-1}{p^n}]\} = C_{p^n}$ que es un grupo cíclico de orden p^n , además como S^p es un grupo de p-torsión $\lim\limits_{\to} C_{p^n} = S^p$.

Demostración

Recordemos que $\bar{p} : \mathbb{Q}^p \longrightarrow \mathbb{Q}^p$ es una biyección ($\mathbb{Q}^p$ es p-local), además $\mathbb{Z} \hookrightarrow (\bar{p})^{-1}\mathbb{Z} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow (\bar{p}^n)^{-1}\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}^p$. Es claro que $\bigcup_n (\bar{p}^n)^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}^p$. Notemos que por ser $\bar{p}$ biyección $\bar{p}^n : (\bar{p}^n)^{-1}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ es un isomorfismo de grupos fácilmente se comprende que $(\bar{p}^n)^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ es un grupo cíclico de orden p^n, además es claro que $(\bar{p}^n)^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} = (S^p)p^n$. <>

(4.6) Teorema

Sea X un grupo abeliano.

i) Si X_o es el máximo subgrupo $\mathbb{Q}^p$-conexo de X e $i:X_o \longrightarrow X$ es la inclusión canónica $\mathrm{Hom}(S^p,X_o) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}(S^p,X)$ es un isomorfismo.

ii) Si X^p es el subgrupo de p-torsión de X y $j: X^p \longrightarrow X$ la inclusión canónica $\mathrm{Hom}(S^p,X^p) \xrightarrow{j_*} \mathrm{Hom}(S^p,X)$ es un isomorfismo.

iii) Sea $\bar{p}:X \longrightarrow X$ el homorfismo canónico inducido por el primo p, y $\ker \bar{p}^n = Xp^n$ es claro que $pXp^n \subset Xp^{n-1}$ y puedo considerar $\bar{p}:Xp^n \longrightarrow Xp^{n-1}$ entonces $\mathrm{Hom}(S^p,X) = \varprojlim Xp^n$.

Demostración

i) Es consecuencia del teorema (3.8) y de la prop. (4.2).

ii) Se debe al hecho que si $f \in \mathrm{Hom}(S^p, X)$, $\mathrm{Im}\, f \subset X^p$.

iii) Notemos que por el apartado ii) podemos suponer que X es un grupo de p-torsión, además por las proposiciones (4·4) y (4·5) $X = \varinjlim Xp^n$, $S^p = \varinjlim Cp^n$, sea $\mathcal{X}$ la sucesión $(Xp^n \hookrightarrow Xp^{n+1})_n$ y $\mathbb{C}$ la sucesión $(Cp^n \hookrightarrow Cp^{n+1})_n$. Entonces los homomorfismos de sucesiones tienen estructura de grupo de modo natural, definimos:

$$\varphi : \mathrm{Hom}(S^p, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathcal{X}) : \varphi(f) = (f|_{Cp^n})_n$$

Notemos que si $s \in S^p$ y $p^n s = o$ $p^n fs = o$

$$\psi : \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S^p, X),\ \psi(h_n)_n = \varinjlim h_n$$

No es difícil probar que tanto φ, como ψ son homomorfismos y que $\varphi . \psi = id$, $\psi . \varphi = id$. Denotemos con $\mathbb{C}^m$ y $\mathcal{X}^m$ las sucesiones $\mathbb{C}$ y $\mathcal{X}$ pero sólo hasta el lugar m. y $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{X}^m)$ denota los homorfismos naturales entre las sucesiones finitas $\mathbb{C}^m$ y $\mathcal{X}^m$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{m+1}, \mathcal{X}^{m+1}) \arrow[r, "\rho_{m+1,m}"] & \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{X}^m) \\
\mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathcal{X}) \arrow[u, "\rho_{m+1}"] \arrow[ur, "\rho_m"'] &
\end{tikzcd}$$

Donde $\rho_{m+1,m}(h_i)_{i=o}^{m+1} = (h_i)_{i=o}^{m}$ y $\rho_k(h_i) = (h_i)_{i=o}$, es inmediato que $\rho_{m+1,m} \cdot \rho_{m+1} = \rho_m$, si $\rho_m(h_i) = 0$

$\forall m \implies h_i = 0 \ \forall i$, y para cada sucesión $x_m \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{X}^n)$ tal que $\rho_{m+1,m}(x_{m+1}) = x_m$, existe $x \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{X})$ de modo que $\rho_m(x) = x_m$. Entonces $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{X}) = \varprojlim \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{X}^m)$ (0-5.4). Veamos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{m+1}, \mathbb{X}^{m+1}) & \xrightarrow{\rho_{m+1,m}} & \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{X}^m) \\ \downarrow \vartheta_{m+1} & = & \downarrow \vartheta_m \\ Xp^{m+1} & \xrightarrow{\bar{p}} & Xp^m \end{array}$$

siendo $\vartheta_m (h_i)_{i=o}^{m} = h_m([\frac{1}{p^m}])$

$$\vartheta_m \cdot \rho_{m+1,m}(h_i)_{i=o}^{m+1} = \vartheta_m (h_i)_{i=o}^{m} = h_m([\tfrac{1}{p^m}])$$

$$\bar{p} \cdot \vartheta_{m+1}(h_i)_{i=o}^{m+1} = \bar{p} \cdot h_{m+1}([\tfrac{1}{p^{m+1}}]) = h_{m+1}([\tfrac{p}{p^{m+1}}]) = h_m([\tfrac{1}{p^m}])$$

Además teniendo en cuenta que Cp^n es un grupo cíclico de orden p^n, y que si $x \in Xp^n$ $p^n . x = o$, se sigue que ϑ_n es isomorfismo. Entonces $\mathrm{Hom}(S^p, X) = \varprojlim Xp^n$.

(4.7) Corolario

$\pi_1(S^p) = \mathrm{Hom}(S^p, S^p) = J_p$, siendo J_p el grupo de los enteros p-ádicos.

Demostración

$$\mathrm{Hom}\,(S^p, S^p) \cong \varprojlim (S^p)_{p^n} = \varprojlim C_{p^n} = J_p \ .$$

La primera igualdad es consecuencia del teorema anterior, la segunda de (4.5) y para la tercera ver Fuchs, cap. II, Theorem (12.1), Example 2. (Ver también cap. VIII, 43, Example 3).

(4.8) Corolario

Sea P un conjunto de primos, entonces respecto el anillo Z_P, $\pi_1^P(X) = \mathrm{Hom}(S_P, X) = \mathrm{Hom}(\bigoplus_{p \notin P} S^p, X) = \prod_{p \notin P} \mathrm{Hom}(S^p, X) = \prod_{p \notin P} \pi_1^p(X)$.

Demostración

En Fuchs, Theorem (8.4) se prueba que un grupo de torsión es suma directa de sus p-componentes y por tanto $S_P = \bigoplus_{p \notin P} S^p$.

(4.9) Proposición

Sea P un conjunto de primos, entonces respecto al anillo Z_P, $\pi_1^P(X) = \mathrm{Hom}(S_P, X)$ es libre de P'-torsión.

Demostración

Como $Z_P \xrightarrow{p} S_P$ es epimorfismo $\mathrm{Hom}(S_P, X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Hom}(Z_P . X)$ es monomorfismo, $\mathrm{Hom}(Z_P, X)$ es Z_P-módulo, por tanto es libre de P'-torsión, entonces $\mathrm{Hom}(S_P, X)$ es libre de P'-torsión por ser subgrupo de un libre de P'-torsión. <>

Ahora consideraremos el caso particular que $P = \emptyset$, en este caso como $\mathbb{Z}_{\emptyset} = \mathbb{Q}$ denominaremos a la homotopía asociada homotopía racional.

(IV-5) Homotopía racional

En este párrafo entenderemos que el anillo R es el anillo de los racionales $\mathbb{Q}$. Empezaremos estudiando que significa ser conexo por arcos.

(5.1) Proposición

X es conexo por arcos si y sólo si X es $\mathbb{Z}$-divisible.

Demostración

$\Longrightarrow]$ Es consecuencia de (4.1) prop. para $P = \emptyset$.

$\Longleftarrow]$ Sea $x \in X$ y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\hat{x}"] \arrow[d, "i"'] & X \\ \mathbb{Q} \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Siendo $\hat{x}(1) = x$ e i la inclusión natural, si X es $\mathbb{Z}$-divisible es $\mathbb{Z}$-inyectivo y por tanto existe $f: \mathbb{Q} \longrightarrow X$ tal que $f(1) = x$, entonces X es conexo por arcos. <>

A continuación damos una caracterización de los homomorfismos nulohomotopos.

(5.2) Teorema

Sea $f: A \longrightarrow B$ homomorfismo de grupos abelianos, $T(A)$ es subgrupo de torsión de A , y B_o el máximo subgrupo conexo por arcos de B entonces $f \simeq o$ si y sólo si $T(A) \subset Ker\ f$ e $Im\ f \subset B_o$.

<u>Demostración</u>

$\Longrightarrow$] Si $f \simeq 0$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & B^{\mathbb{Q}} \arrow[d, "q_1"] \\
A \arrow[ur, "F"] \arrow[r] \arrow[d, "i_1"] & B \\
A \otimes \mathbb{Q} \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

Por tanto $Im\ f \subset Im\ q_1 = B_o$. Si $a \in T(A)$, existe $n \geq 1$ tal que $na = o$, $i_1(a) = a \otimes 1 = a \otimes \frac{n}{n} = na \otimes \frac{1}{n} =$ $= o \otimes \frac{1}{n} = o$ entonces $f(a) = G\ i_1(a) = o$.

$\Longleftarrow$] Estudiemos el siguiente diagrama, $T = T(A)$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "i_1"'] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "f"] & \\
A\otimes\mathbb{Q} \arrow[dr, "p\otimes 1_{\mathbb{Q}}"'] & A/T \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] \arrow[d, "i_1"] & B \\
 & (A/T)\otimes\mathbb{Q} \arrow[ur, dashed, "\bar{\bar{f}}"'] &
\end{tikzcd}$$

De que $T(A) \subset \mathrm{Ker}\ f \implies \exists | \bar{f}: A/T \longrightarrow B$ tal que $\bar{f}p = f$ notemos que $\mathrm{Im}\ \bar{f} = \mathrm{Im}\ f \subset B_o$, como B_o es conexo por arcos, por la proposición anterior B_o es $\mathbb{Z}$-divisible (inyectivo). $A|T$ es libre de torsión, por la prop (II-1.17), i_1 es monomorfismo como $\mathrm{Im}\ f \subset B_o$ y B_o es inyectivo, existe $\bar{\bar{f}}: (A/T) \times \mathbb{Q} \longrightarrow B$ tal que $\bar{\bar{f}}.i_1 = \bar{f}$, entonces $\bar{\bar{f}}.(p \otimes 1_{\mathbb{Q}}).i_1 = f$ y $f \simeq o$.

(5.3) Corolario

Si A es de torsión o B es tal que $B_o = 0$ $f \simeq o$ si y sólo si $f = o$, en estos casos $[A,B] = \mathrm{Hom}\ (A,B)$.

Demostración

Es inmediata, aun sin tener en cuenta el teorema anterior. En el siguiente teorema damos una caracterización de las cofibraciones.

(5.4) Teorema

Sea $A \xrightarrow{i} X$ homorfismo de grupos abelianos, i es cofibración si y sólo si $\mathrm{Ker}\ i \subset T(A)$, donde $T(A)$ es el subgrupo de torsión de A .

Demostración

$\implies]$ Sea la siguiente sucesión exacta corta $0 \longrightarrow T \longrightarrow A \longrightarrow A/T \longrightarrow 0$, como el functor $- \otimes \mathbb{Q}$ es exacto a derecha obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i_1"] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "i_1"] & A/T \arrow[r] \arrow[d, "i_1"] & 0 \\
 & T \otimes \mathbb{Q} \arrow[r, "i\otimes 1"] & A\otimes\mathbb{Q} \arrow[r, "p\otimes 1"] & (A/T)\otimes\mathbb{Q} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $T \otimes \mathbb{Q} = 0$, entonces $p \otimes 1$ es un isomorfismo, además por ser (A/T) libre de torsión $i_1 : A/T \longrightarrow (A/T) \otimes \mathbb{Q}$ es monomorfismo, entonces tenemos que

$$\mathrm{Ker}\ (A \xrightarrow{i_1} A \otimes \mathbb{Q}) = \mathrm{Ker}\ i_1 = \mathrm{Ker}\ (p \otimes 1).i_1 =$$
$$= \mathrm{Ker}\ (i_1.p) = \mathrm{Ker}\ p = T$$

Sea el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i"] & A \otimes \mathbb{Q} \\
X \arrow[ur, dashed, "\overline{i}_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Por ser $A \otimes \mathbb{Q}$ contractil, e i cofibración existe $\overline{i}_1 : X \longrightarrow A \otimes \mathbb{Q}$ tal que $\overline{i}_1.i = i_1$ entonces $\ker i \subset \ker i_1 = T$.

<==] Estudiemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"] \arrow[ddr, "i"'] & & B \\
 & i(A) \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"] \arrow[d, "1"] & \\
 & X \arrow[uur, dashed, "\overline{\overline{f}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Sea $i = 1.\hat{i}$ la descomposición canónica de i en un epimorfismo $\hat{i}$ y un monomorfismo 1. Supongamos que $f:A \longrightarrow B$ es nulohomotopa, entonces por el teorema anterior $T(A) \subset \mathrm{Ker}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f \subset B_o$, como $\mathrm{Ker}\, i \subset T \subset \mathrm{Ker}\, f$ existe un único $\bar{f}:i(A) \longrightarrow B$ tal que $\bar{f}.\hat{i} = f$. Sabemos que $\mathrm{Im}\, \bar{f} = \mathrm{Im}\, f \subset B_o$, B_o $\mathbb{Z}$-divisible y 1 monomorfismo entonces existe $\bar{\bar{f}}:X \longrightarrow B$ tal que $\bar{\bar{f}}.1 = \bar{f}$, es claro que $\bar{\bar{\bar{f}}}.i = f$, así toda $f \simeq o$ se puede extender a través de i, por tanto i es cofibración.

(IV-6) Cubiertas

Para un anillo R definiremos el concepto de cubierta como los homorfismos que elevan de un modo único los arcos, veremos que para cubiertas y grupos abelianos o-conexos, el problema de la elevación queda determinado por π_1. Finalmente probaremos para anillos R divisibles la existencia de cubierta universal y otras posibles cubiertas.

(6.1) Definición

Sea $q:E \longrightarrow B$ homomorfismo de grupos abelianos, diremos que q es una cubierta si se verifica

i) E es o-conexo.

ii) Sea un arco $\alpha:R \longrightarrow B$, entonces $\exists|\tilde{\alpha}:R \longrightarrow E$ tal que $q.\tilde{\alpha} = \alpha$.

(6.2) Definición

Sea $K \in |\mathcal{A}|$ diremos que K es totalmente desconexo si $Hom(R,K) = 0$. Observemos que esto ocurre si y sólo si $\pi_o(K) = K$.

(6.3) Proposición

Sea $q:E \longrightarrow B$ una cubierta y $F:X \otimes R \longrightarrow B$ una homotopía, entonces existe una única homotopía $\tilde{F}: X \otimes R \longrightarrow E$ tal que $q.\tilde{F} = F$.

Demostración

Para cada $x \in X$ pode os definir el siguiente arco $F_x:R \longrightarrow B : F_x(r) = F(x \otimes r)$ entonces por ser q cubierta existe un único $\tilde{F}_x:R \longrightarrow E$ tal que $q.\tilde{F}_x = F_x$. Para $x,y \in X$, $F_{x+y} = F_x + F_y \Longrightarrow \tilde{F}_{x+y} = \tilde{F}_x + \tilde{F}_y$. Por lo que la siguiente aplicación es bilineal

$\tilde{F}:X \times R \longrightarrow E : \tilde{F}(x,r) = \tilde{F}_x(r)$, y define un único homomorfismo $\tilde{F}:X \otimes R \longrightarrow E$ tal que $\tilde{F}(x \otimes r) = \tilde{F}_x(r)$, $q.\tilde{F}(x \otimes r) = q.\tilde{F}_x(r) = F_x(r) = F(x \otimes r)$ entonces $q.\tilde{F}=F$. Si existe otro $G: X \otimes R \longrightarrow E$ tal que $q.G = F$

$q.G_x = F_x = q\,\tilde{F}_x \Longrightarrow G_x = \tilde{F}_x \Longrightarrow G = \tilde{F}$.

(6.4) Corolario

Si $E \xrightarrow{q} B$ es una cubierta, q es una fibración.

(6.5) Proposición

Sea $E \xrightarrow{q} B$ un homomomorfismo de grupos abelianos y $K = Ker\, q$.

i) Si q es cubierta, K es totalmente disconexo.

ii) Si K totalmente disconexo, q fibración y $\pi_o E = 0$, q es una cubierta.

iii) Si K totalmente disconexo, $Ext\,(R,K) = 0$ y $\pi_o(E) = 0$, q es una cubierta.

iv) Si R divisible y q cubierta, $Ext\,(R,K) = 0$.

Demostración

Consideremos la sucesión Ext asociada a la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} E \xrightarrow{q} B \longrightarrow 0$ y a R

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(R,K) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}\,(R,E) \xrightarrow{q_*} \mathrm{Hom}\,(R,B)$$

$$\mathrm{Hom}(R,B) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}\,(R,K) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Ext}\,(R,E) \longrightarrow \ldots$$

Si q es una cubierta q_* es monomorfismo y por tanto Hom $(R,K) = 0$. En el caso que q sea fibración, q_* es epimorfismo, si además Hom $(R,K) = 0$ q_* es isomorfismo y por tanto q es cubierta. También q_* será isomorfismo cuando Hom $(R,K) = 0$ y Ext $(R,K) = 0$. Por último si R es divisible y E es o-conexo, E es también divisible, entonces Ext $(R,F) = 0$, si q es cubierta, q_* es epimorfismo y en este caso Ext $(R,K) = 0$. <>

En el siguiente teorema la primera parte, se puede demostrar más fácilmente teniendo en cuenta la sucesión exacta de los grupos de homotopía de una fibración, aunque lo haremos directamente para poner de manifiesto las propiedades de las cubiertas.

(6-6) Teorema

Sea $E \xrightarrow{q} B$ una cubierta con núcleo K .

i) La siguiente sucesión es exacta corta, donde $[\alpha] = \widehat{\alpha.}\,p(1)$

$$0 \longrightarrow \pi_1 E \xrightarrow{q_*} \pi_1 B \xrightarrow{\theta} K \longrightarrow 0$$

ii) El siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_1 E \arrow[r, "q_*"] & \pi_1 B \arrow[r, "-\partial"] & \pi_o K \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_1 E \arrow[r, "q_*"] \arrow[u, "id"] & \pi_1 B \arrow[r, "\theta"] \arrow[u, "id"] & K \arrow[r] \arrow[u, "1"] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $1:K \longrightarrow \pi_o K$ $\quad 1(k) = [\hat{k}]$ $\quad \hat{k}:Z \longrightarrow K$ $\quad k(1) = k$ es isomorfismo .

iii) $q_*:\pi_n(E) \longrightarrow \pi_n(B)$ es isomorfismo para $n \geq 2$.

<u>Demostración</u>

i) Veamos en primer luegar que si $\alpha \in \mathrm{Hom}\,(S,B)$ y $\alpha \simeq o$, entonces $\widetilde{\alpha p}(1) = o$ y $\overline{\overline{\alpha p}}:S \longrightarrow E$ tal que $\overline{\overline{\alpha p}}.p = \widetilde{\alpha.p}$ es también homótopo a cero. Para ello, sea el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & & E \arrow[d, "q"] \\
R \arrow[r, "p"] \arrow[d, "i_1"] & S \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "i_1"] & & B \\
R \otimes R \arrow[r, "p\otimes 1"] & S \otimes R \arrow[rruu, "\widetilde{F}"] \arrow[rru, "F"'] & &
\end{tikzcd}$$

Si $\alpha \simeq o$, existe $F:S \otimes R \longrightarrow B$ tal que $F.i_1 = \alpha$, como q es fibración (corolario (6.4)), $\exists\ \widetilde{F}:S \otimes R \longrightarrow E$ tal que $q.\widetilde{F} = F$.

$q.\widetilde{F}.i_1.p = F.i_1.p = \alpha.p = q(\widetilde{\alpha.p})$, entonces $\widetilde{\alpha.p} = \widetilde{F}.i_1.p$

$\widetilde{\alpha.p}(1) = \widetilde{F}.i_1.p(1) = \widetilde{F}.i_1(o) = o$, luego

$\exists \mid \overline{\widetilde{\alpha.p}}:S \longrightarrow E \qquad \overline{\widetilde{\alpha.p}}.p = \widetilde{\alpha.p}$

$\overline{\widetilde{\alpha.p}}.p = \widetilde{\alpha.p} = \tilde{F}.i_1.p \Longrightarrow \overline{\widetilde{\alpha.p}} = F.i_1$ es decir $\overline{\widetilde{\alpha.p}} \simeq o$.

Estudiemos la siguiente composición:

φ: $Hom(S,B) \xrightarrow{p^*} Hom(R,B) \xleftarrow{q_*} Hom:(R,E)$

$Hom:(R,E) \xrightarrow{q_1} E$: $\varphi(\alpha) = \widetilde{\alpha p}(1)$.

Es claro que si $\alpha \in Hom(S,B)$, $\widetilde{\alpha p}(1) \in K$, recíprocamente si $k \in K$, existe $\tau: R \longrightarrow E$ con $\tau(1) = k$, $q\tau(1)=o$ entonces $\exists \mid \overline{q.\tau}: S \longrightarrow B$ con $\overline{q.\tau}.p = q.\tau$, además $\widetilde{\overline{q.\tau}.p} = \tau$, podemos asegurar que $Im\,\varphi = K$, pensemos entonces en φ como un homomorfismo del tipo $\Omega B \longrightarrow\!\!> K$, como ya hemos probado si $\alpha \in \Omega B$ y $\alpha \simeq o \Longrightarrow \varphi(\alpha) = o$, entonces $\exists \mid \theta: \pi_1 B \longrightarrow\!\!> K \quad \theta[-] = \varphi$.

Ahora veamos que $Ker\,\theta = Im\,q_*$

$[\tau] \in \pi_1 E$, $\theta.q_*[\tau] = \theta[q.\tau] = \widetilde{q.\tau.p}(1) = \tau.p(1) = o$

Si $[\alpha] \in \pi_1 B$, $\theta[\alpha] = \widetilde{\alpha.p}(1) = o \Longrightarrow \exists \mid \overline{\widetilde{\alpha.p}}:S \longrightarrow E$

$\overline{\widetilde{\alpha.p}}.p = \widetilde{\alpha.p} \qquad q_* [\overline{\widetilde{\alpha.p}}] = [q.\overline{\widetilde{\alpha.p}}] = [\alpha]$ ya que

$q.\overline{\widetilde{\alpha p}}.p = q.\widetilde{\alpha p} = \alpha p$.

Con esto queda probada la exactitud en $\pi_1 B$. Para ver que q_* es monomorfismo, basta observar que si $q.\tau \simeq o$ $\tau = \widetilde{\overline{q.\tau}.p} \simeq o$ según hemos visto ya.

ii) Probemos que el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[d, "k"] \\ B \arrow[ur, "-\varphi"] \arrow[r, "i^1"'] & F_q \end{tikzcd}$$

$i^1-(k(-\varphi))\ (\alpha) = (i^1+k.\varphi)(\alpha) = (\widetilde{\alpha p}(1),\alpha.p)$, definimos la siguiente homotopía $F:\Omega B \times R \longrightarrow F_q : F(\alpha,r) =$ $= (\widetilde{\alpha.p}(r),(\alpha.p)_r)$. Es inmediato comprobar que está bien definida y es bilineal, además $F(\alpha,1) = (i^1+k\varphi)(\alpha)$. Por tanto $k.(-\varphi) \simeq i^1$, $\Longrightarrow$ $-\varphi \simeq i^1.\bar{k} = \Delta$, recordemos como definimos Δ en ii) del teorema (III-1.16), y en (III-3.6) definimos $\partial = \Delta_*\varepsilon$. En nuestro caso $-\partial = \varphi_*.\varepsilon$ sea $[\alpha] \in \pi_1 B$ $\quad -\partial[\alpha] = \varphi_*.\varepsilon[\alpha] = \varphi_*[\hat{\alpha}] = [\varphi.\alpha] = [\widehat{\varphi(\alpha)}] =$ $= [\widehat{\widetilde{\alpha p}(1)}]$ por otra parte $1\theta[\alpha] = 1[\widetilde{\alpha p}(1)] = [\widehat{\widetilde{\alpha p}(1)}]$, y $-\partial = 1.\theta$. Si X es un grupo abeliano y $x \in X$, denotamos con $\hat{x}:\mathbb{Z} \longrightarrow X$ tal que $x(1) = x$.

iii) Como q es fibración, K es totalmente disconexo (6.5) entonces K_o subgrupo o-conexo de K es nulo, $K_o = 0$, por III-(3.8) Corolario $\pi_i(K_o) = \pi_i(K)$ $i \geq 1$, es decir $\pi_i K = 0$ $i \geq 1$. Recordando la sucesión exacta asociada a una fibración, queda probado iii). <>

A continuación damos un teorema de elevación para cubiertas, en la que la condición de elevación, viene determinada por el grupo fundamental, es similar al correspondiente teorema para espacios punteados.

(6-7) Teorema

Sea $q:E \longrightarrow B$ una cubierta, Z conexo por arcos y $\alpha:Z \longrightarrow B$ un homomorfismo, entonces existe $\tilde{\alpha}:Z \longrightarrow E$ tal que $q.\tilde{\alpha} = \alpha$ si y sólo si $\alpha_*\pi_1 Z \subset q_*\pi_1 E$, **además si existe es único.**

Demostración

Desde luego si existe $\tilde{\alpha}$, $\alpha_*\pi_1 Z = q_*\tilde{\alpha}_*\pi_1 Z \subset q_*\pi_1 E$. Supongamos ahora que $\alpha_*\pi_1 Z \subset q_*\pi_1 E$, sea el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(R,Z) & \xrightarrow{\alpha_*} & \mathrm{Hom}\ (R,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\ (R,E) \\ \Big\downarrow q_1 & & & & \Big\downarrow q_1 \\ Z & & \overset{\tilde{\alpha}}{- - - - - - \dashrightarrow} & & E \end{array}$$

Como Z , es conexo por arcos q_1 es un epimorfismo, veamos que $q_1.\sim.\alpha_*$ es compatible con q_1 . Sea $\sigma:R \longrightarrow Z$ con $\sigma(1) = o$ entonces $\exists|\ \bar{\sigma}:S \longrightarrow Z$ $\bar{\sigma}.p = \sigma$,

$\alpha_*|\bar{\sigma}| = |\alpha.\bar{\sigma}| \ \varepsilon\ \alpha_*\pi_1 Z \subset q_*\pi_1 E$, entonces $\tau:\ S \longrightarrow E$

$|\alpha.\bar{\sigma}| = |q.\tau|$, por i) del teorema anterior.

$q_1.\sim.\alpha_*(\sigma) = \widetilde{\alpha.\sigma}(1) = \widetilde{\alpha.\bar{\sigma}.p}(1) = \theta\,|\alpha.\bar{\sigma}| = \theta\,|q.\tau| =$
$= \widetilde{q.\tau.p}(1) = \tau p(1) = o$.

Por tanto, es compatible y existe $\tilde{\alpha}:Z \longrightarrow E$, $\tilde{\alpha}(z) = \widetilde{\alpha.\sigma_z}(1)$ siendo $\sigma_z:R \longrightarrow Z$ $\sigma_z(1) = z$. Es claro que $q.\tilde{\alpha}(z) = \alpha.\sigma_z(1) = \alpha z$. Unicidad: Si $\beta,\gamma:Z \longrightarrow E$ tal que $q\beta = q\gamma = \alpha$, sea $z\ \varepsilon\ Z$ y $\sigma:R \longrightarrow Z$ tal que

$\sigma(1) = z$, $q\beta\sigma = q\gamma\sigma \Longrightarrow \beta\sigma = \sigma$ y por tanto

$\beta(z) = \beta.\sigma(1) = \gamma\sigma(1) = \gamma(z)$, para todo $z \Longrightarrow \beta = \gamma$.

<>

(6.8) Definición

Una cubierta $q:E \longrightarrow B$ diremos que es universal si $\pi_1 E = 0$. Notemos que como consecuencia del teorema anterior, si B tiene una cubierta universal, esta es única salvo isomorfismo, en este sentido podemos hablar de la cubierta universal de B .

(6.9) Teorema

Para R divisible, todo grupo abeliano B tiene cubierta universal $q:\tilde{B} \longrightarrow B$.

Demostración

Si demostramos que existe, cubierta universal del subgrupo o-conexo de B , esta cubierta es también cubierta universal para B . Supondremos sin ninguna restricción que B es o-conexo. Estudiemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{N}(S,B) & \xrightarrow{i} & \mathrm{Hom}(S,B) & \xrightarrow{P} & \pi_1 B \\
\downarrow 1 & = & \downarrow p^* & = & \downarrow I \\
\mathcal{N}(S,B) & \xrightarrow{p^*.i} & \mathrm{Hom}(R,B) & \xrightarrow{Q} & \tilde{B} \\
\downarrow & = & \downarrow q_1 & = & \downarrow q \\
0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{1} & B
\end{array}$$

siendo i la inclusión natural, P,Q proyecciones naturales donde hemos definido $\tilde{B} = \mathrm{Coker}\ p^*.i$, I y q están definidas de modo natural. Por el lema de los (3×3) (ver Fuchs lema (2.4)) la sucesión

$0 \longrightarrow \pi_1 B \longrightarrow \tilde{B} \xrightarrow{q} B \longrightarrow 0$ es exacta.

Por definición de homomorfismo nulohomótopo

$\mathrm{Hom}(S \otimes R,B) \xrightarrow{i_1^*} \mathcal{N}(S,B)$ es un epimorfismo, $\mathrm{Hom}(S \otimes R,B)$ es contráctil y por tanto divisible, entonces también $\mathcal{N}(S,B)$ es divisible. Por tanto la sucesión exacta corta de la primera fila es escindida y P admite sección. Veamos que $\pi_1 B$ es totalmente disconexo:

Sea $\beta: R \longrightarrow \pi_1 B$, como P admite sección, existe $\gamma: R \longrightarrow \mathrm{Hom}(S,B)$ tal que $P.\gamma = \beta$. Recordemos el isomorfismo $\bar{\eta} : \mathrm{Hom}(R,B^S) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S \otimes R,B)$, y para $r \in R$ sea $\rho_r(s) = s.r$. El siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\gamma(r)} & B \\ \downarrow i_1 & = & \downarrow \bar{\eta}\gamma \\ S\otimes R & \xrightarrow{1\times\rho_r} & S\otimes R \end{array}$$

es conmutativo.

$$\bar{\eta}\gamma.(1\otimes\rho_r).i_1(s) = \bar{\eta}\gamma.(1\otimes\rho_r)(s\otimes 1) = \bar{\eta}\gamma(s\otimes r) = \gamma(r)(s)$$

Luego $\mathrm{Im}\,\gamma \subset \mathcal{N}(S,B) \Longrightarrow \beta = P.\gamma = o$

Sabemos que q_1 es una fibración, por proposición II-4.5 q es fibración, además $\tilde{B}$ es o-conexo, entonces por ii) de la prop. (6,5) q es una cubierta. Finalmente, veamos que $\pi_1\tilde{B} = 0$. Por i) del teorema (6.6) la siguiente sucesión es exacta corta

$$0 \longrightarrow \pi_1\tilde{B} \longrightarrow \pi_1 B \xrightarrow{\theta} \pi_1 B \longrightarrow 0$$

Sea $\sigma: R \longrightarrow B$ y busquemos una elevación de σ a través de q_1, denotemos por $\varepsilon: R\otimes R \longrightarrow R$ el producto $\varepsilon(r\otimes s) = r.s$ y $\eta: \mathrm{Hom}(R\otimes R,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,B^R)$ la adjunción (sin permutar), $\sigma.\varepsilon: R\otimes R \longrightarrow B$ sea $\eta(\sigma.\varepsilon): R \longrightarrow B^R$. Veamos que $\eta(\sigma.\varepsilon)$ es una elevación de σ a través de q_1.

$$q_1.\eta(\sigma.\varepsilon)(r) = \eta(\sigma.\varepsilon)(r)(1) = \sigma.\varepsilon(r\otimes 1) = \sigma(r).$$

$$\eta(\sigma.\varepsilon)(1)(r) = \sigma.\varepsilon(1\otimes r) = \sigma(r) \Longrightarrow \eta(\sigma.\varepsilon)(1) = \sigma$$

Sea $\alpha: S \longrightarrow B$, entonces $\widetilde{\alpha.p} = Q\eta(\alpha.p.\varepsilon)$

$$\widetilde{\alpha.p}(1) = Q\eta(\alpha.p.\varepsilon)(1) = Q(\alpha.p) = Q.p^*.\alpha = \mathrm{IP}(\alpha) = I[\alpha]$$

De donde deducimos que $\theta[\alpha] = [\alpha]$, es decir $\theta = id$.
Como la sucesión anterior es exacta entonces $\pi_1\tilde{B} = 0$.

<>

La siguiente propiedad justifica el nombre de cubierta universal.

(6.10) Proposición

Sea $B \in |\mathcal{A}|$ y supongamos que B tenga cubierta universal $\tilde{B} \xrightarrow{q} B$, y sea $E \xrightarrow{\pi} B$ otra cubierta entonces existe un único $\bar{q}:B \longrightarrow E$ tal que $\bar{q}.\pi = q$. Además $\pi_0 B = Q$ ~~cubierta~~ y epimorfismo. ($\tilde{B}$ es cubierta universal de E).

Demostración

Como $q_*\pi_1\tilde{B} \subset \pi_*\pi_1 E$ ya que $\pi_1\tilde{B} = 0$, y $\pi_0\tilde{B} = 0$ existe un único $\bar{q}:B \longrightarrow E$ verificando $\pi.\bar{q} = q$ (por el teorema (6.7). Probemos que $\bar{q}$ es cubierta:

Sea $\tau:R \longrightarrow E$, $\pi.\tau:R \longrightarrow B$ y q cubierta, existe $\widetilde{\pi.\tau}: R \longrightarrow \tilde{B}$ tal que $q.\widetilde{\pi.\tau} = \pi.\tau$, $\pi.\bar{q}.\widetilde{\pi.\tau} = q.\widetilde{\pi.\tau} =$ $= \pi\tau$, por ser π cubierta $\Longrightarrow$ $\bar{q}.\widetilde{\pi\tau} = \tau$, luego τ tiene una elevación, si τ tuviera dos elevaciones α,β $\sigma = \alpha-\beta$ verifica que $\bar{q}.\sigma = o$, entonces $\mathrm{Im}\,\sigma \subset \mathrm{Ker}\,\bar{q} \subset \mathrm{Ker}\,q$, como $\mathrm{Ker}\,q$ es totalmente disconexo por ser q cubierta, $\sigma = o$ y $\alpha = \beta$. Debido a que E es conexo por arcos $\bar{q}$ es epimorfismo. <>

El siguiente teorema da una clasificación de las cubiertas para grupos abelianos que tengan cubierta universal.

(6.11) Teorema

Sea $B \in |\mathcal{A}|$ y supongamos que B tiene cubierta universal $q: \tilde{B} \longrightarrow B$, entonces existe una correspondencia biunívoca entre cocientes totalmente disconexos de $\pi_1 B$ y cubiertas de B. Notemos que por i) del teorema (6.6) podemos considerar $I: \pi_1 B \xrightarrow{\vartheta} K \hookrightarrow \tilde{B}$ como núcleo de q. La correspondencia, utilizando las notaciones del párrafo (II-3) viene definida del siguiente modo:

Dada una sucesión exacta corta

$0 \longrightarrow F \longrightarrow \pi_1 B \xrightarrow{\mu} D \longrightarrow 0$

siendo D totalmente disconexo, le hacemos corresponder $\pi = \operatorname{Coker} I_\mu : B_\mu \longrightarrow B$, además $\pi_1 B_\mu \cong F$.

Demostración

Sea el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "i"] \arrow[d, "id"] & \pi_1 B \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "I"] & D \arrow[d, "I_\mu"] \\
F \arrow[r, "I.i"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\bar{\mu}"] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "\pi"] \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "id"] & B
\end{tikzcd}$$

Dados los homomorfismos μ e I , hemos construido el cuadrado cocartesiano inducido, como $q.I = o = o.\mu$, podemos considerar $\pi = ovq$, $I_\mu = \ker \pi$. Por ser q fibración y $q = \pi.\bar{\mu}$ π es fibración (II-4.5), $\bar{\mu}$ es epimorfismo ya que lo es μ (0-3.2) , entonces $\tilde{B}_\mu$ es o-conexo, además D es totalmente discontinuo entonces π es una cubierta (ii-prop. (6.5)). Ahora bién, por la proposición anterior $\bar{\mu}$ es una cubierta, y por i) del teorema (6.6) , $\vartheta:\pi_1 B \longrightarrow F$ es un isomorfismo.

Recíprocamente, para una cubierta $\pi:E \longrightarrow B$, por la proposición anterior, existe un epimorfismo $\bar{q}:\tilde{B} \longrightarrow E$ siendo conmutativo el triángulo:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1 B \arrow[r, twoheadrightarrow, "\mu"] \arrow[d, "I"] & \ker \pi \arrow[d] \\
\tilde{B} \arrow[r, twoheadrightarrow, "q"] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, phantom, "="] & E \arrow[dl, "\pi"] \\
B &
\end{tikzcd}$$

$\bar{q}$ induce de modo natural un epimorfismo $\mu:\pi_1 B \twoheadrightarrow \ker \pi$ y como π es una cubierta $\ker \pi$ es totalmente discontinuo. (i) de prop (6.5)). Notemos que el cuadrado del diagrama anterior es cocartesiano, que junto con la condición de que $I_\mu = \ker \pi$, nos demuestra que las correspondencias anteriores son inversas. <>

El siguiente teorema nos dice como una cubierta $E \xrightarrow{\pi} B$ y un homomorfismo $f:B' \longrightarrow B$ nos induce una cubierta sobre B' .

(6.12) Teorema

Sea $\pi:E \longrightarrow B$ una cubierta con núcleo $K \xrightarrow{i} E$ y sea $\pi':E' \longrightarrow B'$ la fibración inducida a través de un homomorfismo $f:B' \longrightarrow B$, con núcleo $K \xrightarrow{o\wedge i} E$ (ver párrafo (II-6) y (0-3.6)), denotemos por E'_o la componente o-conexa del neutro y $K_o = \mathrm{Im}(o \wedge i) \cap E'_o$. Entonces

i) $\pi'_o = \pi'/E'_o : E'_o \longrightarrow B'$ es una cubierta con núcleo K_o.

ii) Si $\pi_o(B') = 0 = \pi_1 B' \Longrightarrow K_o = 0$ y $E' = E'_o \oplus K$

iii) Si $(f_*\pi_1 B') + \pi_*\pi_1 E) = \pi_1 B$ y $\pi_o B' = 0$ entonces $E'_o = E'$.

Demostración

i) Por (6.4), π es fibración y por (II-4-7) , $\pi':E' \longrightarrow B'$ es fibración, si $g:M \longrightarrow B'$ es un homomorfismo con M contráctil y $h:M \longrightarrow E'$ tal que $\pi'.h=g$, como M es o-conexo $\mathrm{Im}\, h \subset E'_o$, de donde deducimos que una elevación de g a través de π' , tiene su rango en E'_o y por tanto $E'_o \xrightarrow{\pi'_o} B'$ es una fibración, su núcleo es ker $\pi' \cap E'_o$, es decir Im $(o\wedge i) \cap E'_o = K_o$, como K es totalmente disconexo, K_o también lo es y por ii) de la proposición (6.5) π'_o es una cubierta.

ii) Sea $I: E'_o \longrightarrow E'$ la inclusión, canónica. Si $\pi_o(B') = 0 = \pi_1 B'$, $B' \xrightarrow{id} B'$ es la cubierta universal de B' , según i) del teorema (1.6) la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow \pi_1 E'_o \longrightarrow \pi_1 B' \longrightarrow K_o \longrightarrow 0$$

como $\pi_1 B' = 0$, se deduce que $\pi_1 E'_o = 0$ y $K_o = 0$, además $\pi'_o : E'_o \longrightarrow B'$ es también cubierta universal, entonces π'_o es un isomorfismo y $I.(\pi'_o)^{-1}$ una sección de π', en consecuencia la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{o\wedge i} E' \xrightarrow{\pi'} B' \longrightarrow 0$$

es escindida , y $E' = K \oplus B' = K \oplus E'_o$.

iii) Consideremos el siguiente morfismo entre cubiertas

$$\begin{array}{ccc} E'_o & \xrightarrow{\bar{f}.I} & E \\ \downarrow{\scriptstyle \pi'_o} & = & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Según las naturalidades expresadas en (III-3.6) y en ii) de (6.6) el siguiente diagrama es conmutativo (j es una inclusión)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d, dash] & & 0 \arrow[d, dash] \\
\pi_1 E'_o \arrow[rr, "(\bar{f}.I)_*"] \arrow[d, "(\pi'_o)_*"] & & \pi_1 E \arrow[d, "\pi_*"] \\
\pi_1 B' \arrow[rr, "f_*"] \arrow[d, "\vartheta"] & = & \pi_1 B \arrow[d, "\vartheta"] \\
K_o \arrow[rr, "j"] \arrow[d] & & K \arrow[d] \\
0 & & 0
\end{tikzcd}$$

Las sucesiones verticales son exactas por ((i)-(6.6)). Veamos que $\vartheta . f_*$ es epimorfismo, si $x \in K$ $\exists$ $y \in \pi_1 B$ tal que $\vartheta(y) = x$ $y = f_* z + \pi_* u$ y $\vartheta(y) = \vartheta f_* z + \pi_* u = f_* z = x$. Entonces j es tambien epimorfismo, en este caso isomorfismo, así podemos poner que $K \subset E'_o$. Veamos que $E' \subset E'_o$. Sea $x \in E'$ $\pi' x \in B'$, como B' es o-conexo, π'_o es epimorfismo y existe $y \in E'_o$ tal que $\pi' y = \pi' x$, entonces $x = y+x-y$ con $y \in E'_o$ y $x-y \in K \subset E'_o$, por tanto $x \in E'_o$ <>

BIBLIOGRAFIA

[1] Brown, R.: Elements of Modern Topology. Mc Graw-Hill, London (1968).

[2] Cartan, H, Eilemberg, S.: Homological Algebra. Princeton University Press (1956).

[3] Dieck, T.tom, Kamps, K.H., Puppe, D.: Homotopictheorie. Lecture Notes in Mathematics. No. 157. Springer-Verlag (1970).

[4] Dold, A.: Lectures on Algebraic Topology. Springer-Verlag (1972).

[5] Eckmann, B.: Homotopie et dualité, Colloque de Topologie Algébrique (1956), Centre Belge de Recherches Mathématiques, 41-53.

[6] Eckmann, B, Hilton, P.J.: Unions and intersections in Homotopy Theory. Comment. Math. Helv. 38 (1964), 293-307.

[7] Fuchs, L.: Infinite Abelian Groups. Academic Press (1970).

[8] Gray, B.: Homotopy Theory, and Introduction to Algebraic Topology. Academic Press (1975).

[9] Heller, A.: Abstract homotopy in categories of fibrations and the spectral sequence of Eitenberg

Moore. Illinois J. Math. 16 (1972), 454-474.

[10] --------- : Completions in Abstract Homotopy Theory Trans. Amer. Math. Soc., vol. 147, 573-602 (1970).

[11] --------- : Stable Homotopy Categories. Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 28-63.

[12] Hilton, P.J.: Homotopy Theory and Duality. Gordon and Breach (1965).

[13] --------- : Homotopy Theory of Modules and Duality. International Symposium on algebraic topology (1958), Universidad Nacional Autónoma de México, 273-281.

[14] Hilton, P.J., Pressman, I.S.: A generalization of certain homological functors. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 71 (1966) 321-349.
Hilton, P.J., Stam

[15] Hilton, P.J., Stammbach, U.: A course in Homological Algebra. GTM 4, Springer-Verlag. (1971).

[16] Hu, S.T.: Introduction to Homological Algebra. Holden-Day, Inc (1968).

[17] Huber, J.H.: Homotopy Theory in General Categories. Math. Annalen 144, 361-385 (1961).

[18] ---------- : Standard Constructions in Abelian Categories. Math. Annalen 146, 321-325 (1962).

[19] Kan, D.M.: Abstract homotopy II. Proc. Nat. Acad.

Sci. U.S.A. 42 (1956) , 255-258.

[20] Kleisli, H.: Homotopy Theory in Abelian Categories. Canad. J. Math. 14, 139-169 (1962).

[21] Massey, W.S.: Introducción a la Topología Algebraica. Editorial Reverté (1972).

[22] Mitchell, B.: Theory of Categories. Academic Press (1965).

[23] Moore, J.C.: Seminar on Algebraic Homotopy Theory. Lecture Notes. Princeton University (1955-56).

[24] Quillen, D.G.: Homotopical Algebra. Lectures notes in mathematics. Springer-Verlag. (1967).

[25] ------------ : Rational Homotopy Theory. Annals of Maths. (2) 90, (1969), 205-295.

[26] Spanier, E.H.: Algebraic Topology. Mc Graw-Hill (1966).

[27] Switzer, R.M.: Algebraic Topology-Homotopy and Homology. Springer-Verlag (1975).

[28] Tennison, B.R.: Sheaf Theory. Cambridge University Press (1975).