TESIS DOCTORAL

Relaciones entre la estructura de un álgebra de Lie y el retículo de sus ideales

Pilar Benito Clavijo

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

Relaciones entre la estructura de un álgebra de Lie y el retículo de sus ideales

Pilar Benito Clavijo

Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones
2008

Esta tesis doctoral, dirigida por el doctor D. Vicente Ramón Varea Agudo, fue leída el 25 de septiembre de 1989, y obtuvo la calificación de Sobresaliente Cum Laude .

Edita: Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones

ISBN 978-84-691-1313-4

RELACIONES ENTRE LA ESTRUCTURA DE UN ALGEBRA DE LIE Y EL RETICULO DE SUS IDEALES

por

Mª del Pilar Benito Clavijo

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

COLEGIO UNIVERSITARIO DE LA RIOJA

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Memoria presentada para
optar al grado de doctor en
Ciencias Matemáticas.

RELACIONES ENTRE LA ESTRUCTURA DE UN ALGEBRA DE LIE Y EL RETICULO DE SUS IDEALES

Resumen. El retículo de ideales de un álgebra de Lie está estrechamente relacionado con la estructura del álgebra. En el primer Capítulo, se eligen clases de álgebras de Lie y se estudia hasta qué punto están determinadas por su retículo de ideales. En el segundo Capítulo, se estudian dos tipos concretos de retículos: los complementados y los lineales. Se consigue clasificar las álgebras de Lie con retículo de de ideales complementado. Como consecuencia de esto se obtiene la determinación reticular de las álgebras de Lie reductivas. También han sido clasificadas las álgebras de Lie superresolubles con retículo lineal.

RELATIONS BETWEEN THE STRUCTURE OF A LIE ALGEBRA AND ITS LATTICE OF IDEALS

Abstract. The lattice of ideals of a Lie algebra is closely related with the structure of the algebra. In the first Chapter, some classes of Lie algebras are selected. It is studied if their lattices of ideals can determinate their algebraic structures. In the second Chapter, two classes of lattices are studied: the complemented lattices and the lattices such that their elements are in line. We characterize the Lie algebras of complemented lattice of ideals. As a consequence, it is obtained the reticular determination of the reductive Lie algebras. Finally, we characterize the supersolvable Lie algebras whose ideals are in line.

AMS classification: 17B05, 06B99

Key words and phrases: Nonassociative rings and algebras, Lie algebras, lattices.

La presente Tesis Doctoral fue defendida en Zaragoza el día 25 de Septiembre de 1989, estando el Tribunal compuesto por:

Presidente: Dr. D. Juan Sancho San Román

Vocal: Dr. D. Alfredo R.-Grandjean y L.-Valcarcel

Vocal: Dr. D. Jose Luis Gómez Pardo

Vocal: Dr. D. Juan Tena Ayuso

Secretaria: Dra. Dña Consuelo Martínez López

y obtuvo la calificación de *Apto " Cum Laude"*

Quiero agradecer al Profesor Vicente Ramón Varea Agudo la ayuda que me ha prestado durante estos últimos años, sin la cual no hubiera sido posible la realización de esta Memoria.

Mi gratitud también a mis profesores y compañeros y a todos aquellos que han tenido que sufrir mis frecuentes malos humores durante todos estos años.

Logroño, Noviembre de 1989

A mis padres y

a los padres de mis padres.

INDICE

INTRODUCCION

En el estudio de muchas estructuras algebraicas ha jugado un importante papel el retículo de subestructuras ya que las consideraciones en teoría reticular han simplificado a menudo los problemas. Fue Dedekind quien consideró por primera vez el sistema de ideales en un anillo de enteros algebraicos desde el punto de vista de la teoría reticular y descubrió y usó la ley modular en sus cálculos de ideales. Es importante notar que la teoría reticular ha permitido por una parte caracterizar anillos ya conocidos y por otra señalar nuevas clases de anillos. Un ejemplo de lo primero es la caracterización de los anillos de Prüfer como los dominios íntegros con retículo de ideales distributivo (ver [8]). El estudio de los anillos regulares fue iniciado por von Neumann alrededor de 1936 a fin de estudiar ciertos retículos de proyecciones. Cada retículo modular complementado de base homogénea de orden mayor o igual que cuatro es isomorfo al retículo de ideales principales a derecha de un anillo regular von Neumann, el cual es único salvo isomorfismos. Los llamados anillos aritméticos es otro ejemplo de anillos definidos mediante el retículo, se definen como anillos conmutativos con retículo de ideales distributivo y están caracterizados por la siguiente propiedad: un anillo A es aritmético si y sólo si para cada ideal maximal $\mathbf{m}$, el retículo de ideales del anillo local $A_{\mathbf{m}}$ es lineal (ver [21]). En teoría de grupos ya en 1956 Suzuki [33] recogió en una monografía los muchos resultados existentes relativos a la relación entre la estructura de un grupo y la estructura de sus subgrupos además de dar numerosas ideas que han servido en estudios posteriores.

En un camino inverso citemos que muchos retículos de estas estructuras algebraicas han suministrado ideas en la propia Teoría general de retículos, como un ejemplo de este proceso mostramos [28].

Animados por los éxitos obtenidos en estos campos, Barnes y Kolman comenzaron a utilizar la teoría reticular en álgebras de Lie a mediados de los años 60. A partir de aquí han sido publicados numerosos trabajos que muestran la relación existente entre la estructura de un álgebra de Lie y la estructura del retículo de sus subálgebras. Barnes y Kolman abrieron dos vías distintas de investigación en el campo de la teoría reticular de álgebras de Lie: Barnes [2],[5] se preocupa de estudiar las propiedades de las álgebras de Lie que se conservan por isomorfismos de retículos de subálgebras, mientras que Kolman [22],[23] se ocupa de la clasificación de álgebras de Lie tales que el retículo de subálgebras cumpla determinadas propiedades provenientes de la teoría reticular. A pesar de la existencia de una rica estructura lineal en álgebras de Lie, los primeros resultados fueron obtenidos sólo para cuerpos algebraicamente cerrados y de característica cero. Así Barnes [2] probó en 1964 que, en este tipo de cuerpos, la resolubilidad y la semisimplicidad se conservan por isomorfismos de retículos de subálgebras, aún más, que dos álgebras de Lie semisimples con el mismo retículo de subálgebras son isomorfas. Por su parte Kolman [22],[23] determinó las álgebras de Lie sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero tales que su retículo de subálgebras es semimodular inferior, superior ó relativamente complementado.

Sobre cuerpos no algebraicamente cerrados pueden existir álgebras de Lie simples 3-dimensionales no escindibles (sobre el cuerpo de los números reales sólo hay una y sobre los racionales existen infinitas). Estas álgebras solamente tienen subálgebras 1-dimensionales, luego, si el cuerpo es infinito, tienen el mismo retículo de subálgebras que cualquier 2-dimensional sobre el mismo cuerpo. Este ejemplo muestra que ni la dimensión, ni la simplicidad, ni la resolubilidad ni los ideales están determinados por el retículo de subálgebras. No obstante, en característica cero éstas son las únicas álgebras de Lie no resolubles con el mismo retículo de subálgebras que una resoluble. Los siguientes resultados del tema se obtuvieron sobre cuerpos de característica cero (Goto [16] en el caso del cuerpo real y Gein [11], Towers [36] y Völklein [44] ,entre otros, sobre cuerpos arbitrarios). Se ha llegado a probar que la resolubilidad no sólo se conserva por isomorfismos de retículos, salvo en el caso mencionado antes, sino que además está determinada por el retículo de subálgebras (Gein [15]) y se han logrado detectar reticularmente ideales especiales como el radical resoluble (Varea-Varea [43]). Un punto especialmente importante es la información que suministran los elementos modulares del retículo para la reconstrucción del álgebra (Amayo-Schwarz [1], Gein [15], Towers [38], Varea [39]). También han sido tratadas cuestiones relativas al estudio de las subálgebras que quedan invariantes por el grupo de automorfismo del retículo y otros diversos problemas que demuestran la estrecha relación que existe entre el retículo de subálgebras de un álgebra de Lie de característica cero y la estructura del álgebra.

La mayor dificultad en este tema está actualmente en el caso de cuerpos de característica positiva, aunque sean algebraicamente cerrados. Por una parte debido a que los métodos de la Teoría clásica de las álgebras de Lie de característica cero no son válidos sobre cuerpos de característica prima (aún no se ha conseguido la clasificación de las álgebras de Lie simples) y por otra parte a que sobre estos cuerpos aparecen retículos de subálgebras que no pueden ser retículos de subálgebras de ningún álgebra de Lie de característica cero y recíprocamente. Sólo muy recientemente se han obtenido éxitos en este campo, por ejemplo se han clasificado las álgebras de Lie con retículo de subálgebras modular (Lashi [24], Varea [41]), las que tienen longitud 2 y 3 (Premet [27], Gein y Varea). El efecto de los elementos modulares no está todavía determinado, no obstante hay algunos resultados sobre ellos (Gein y Varea [42]) que son suficientes para reconstruir el álgebra sl(2,F) y las álgebras simples de tipo Cartan y determinar la superresolubilidad con el retículo de subálgebras (Varea [41]).

El objetivo de la presente Memoria es el estudio del retículo de ideales de un álgebra de Lie de característica cero y la relación que éste tiene con la estructura del álgebra. Para mostrar esta relación hemos elegido unas cuestiones que están en la línea establecida por Barnes y otras que lo están en la establecida por Kolman. Nada hemos encontrado en la literatura sobre este tema. Solamente en el libro de Belifante y Kolman [6] de 1972 se cita la posibilidad de que la estructura de un álgebra de Lie pueda ser estudiada mediante la investigación de propiedades de su retículo de ideales. Esto contrasta con la abundante literatura que hay sobre el retículo de subálgebras y con el hecho de que tanto en teoría de anillos como en teoría de grupos se hayan tratado intensamente los retículos de ideales y los de subgrupos normales respectivamente. Naturalmente los métodos seguidos en una y otra estructura son radicalmente distintos.

Notemos que el retículo de ideales de un álgebra de Lie es un subretículo del retículo de subálgebras, luego en principio con "menos" datos intentamos obtener información sobre el álgebra. No obstante, dado que los ideales no pueden ser determinados en el retículo de subálgebras, con nuestro planteamiento se añade la condición de que el subretículo que tomamos es el de los ideales. La principal dificultad con que nos hemos encontrado, en comparación con las técnicas usadas en el retículo de subálgebras, es que la no transitividad de los ideales impide que el intervalo [0:K] del retículo de ideales de un álgebra de Lie sea isomorfo al retículo de ideales del álgebra K. Este hecho hace que las técnicas utilizadas en el tratamiento de estos retículos sean totalmente diferentes a las existentes para el retículo de subálgebras. Además hay que tener en cuenta la "escasez" de álgebras de Lie en las que la propiedad de ser un ideal sea transitiva (Gein y Muhin [14], Stewart [29] y Varea [40]).

La Memoria está dividida en dos Capítulos que siguen las vías establecidas por Barnes y Kolman de las que hablabamos al principio. En el Capítulo I se eligen clases de álgebras de Lie y se estudia hasta qué punto están determinadas por el retículo de ideales. Así, en el párrafo primero se prueba que la clase de las abelianas está determinada por el retículo de ideales salvo en el caso 1-dimensional. Los párrafos 2 y 3 están dedicados a una clase especial de álgebras de Lie: las que se construyen como extensión escindible de un espacio vectorial por un conjunto Σ de transformaciones semisimples. El interés de esta construcción está en que, por el teorema de Towers [34] y Stitzinger [31], toda álgebra de Lie resoluble tiene una imagen homomorfa que se puede construir de esta manera. Se llega a probar que esta clase de álgebras está determinada por su retículo de ideales en los siguientes casos: 1º) Σ formado por transformaciones singulares, 2º) Σ contiene alguna transformación no singular y dim $\Sigma = 2n + 1 > 1$, 3º) Σ contiene alguna transformación no singular y $\bigcap_{f \in \Sigma} L_1(f) = 0$. En el párrafo 4 se prueba que las álgebras de Lie resolubles con más de un ideal maximal están determinadas por su retículo de ideales. Además, se obtienen condiciones necesarias para que un álgebra de Lie tenga el mismo retículo de ideales que una de los tipos anteriores. También se estudian isomorfismos entre retículos de ideales y algunos métodos de construcción de tales isomorfismos (ver [§2, Sección 2ª]). Sobre el cuepo de los números reales aparecen a lo más dos retículos, salvo isomorfismos, entre todos los retículos de ideales de las álgebras de Lie que son extensión escindible de algún espacio vectorial y alguna aplicación lineal sobre él con polinomio mínimo irreducible y un número fijado de divisores elementales.

En el Capítulo II se eligen dos tipos concretos de retículos: los complementados y los lineales. En el párrafo primero de este capítulo se obtiene la clasificación de las álgebras de Lie con retículo de ideales complementado. Como consecuencia de esto se obtiene la determinación reticular de las álgebras de Lie reductivas. En el párrafo segundo se clasifican las álgebras de Lie superresolubles con retículo lineal. También se realiza un estudio del caso no superresoluble, en particular se clasifican las álgebras de Lie con retículo de longitud 3 en los siguientes casos: 1º) álgebras de Lie reales resolubles , 2º) álgebras no resolubles de centro no trivial. Es de notar el gran número y complejidad de retículos de ideales distributivos que existen mientras que sólamente el álgebra de Lie 1-dimensional tiene retículo de subálgebras distributivo.

LISTA DE SIMBOLOS

$\dot{+}$	Suma directa de subálgebras
$\oplus$	Suma directa de ideales
$\otimes$	Producto tensorial
$\leq$	Subálgebra
F(S)	Subespacio vectorial engendrado por S
$[A,B]$	Subespacio vectorial engendrado por los elementos de la forma [a,b] con a en A y b en B
Socle(L)	Suma de los ideales minimales de L
Zsocle(L)	Suma de los ideales minimales abelianos de L
Z(L)	Centro de L
Rad(L)	Radical resoluble de L
Nil(L)	Radical nilpotente de L
J(L)	Radical de Jacobson de L (intersección de los ideales maximales de L)
$\Phi(L)$	Subálgebra de Frattini de L (intersección de las subálgebras maximales de L)
gl(V)	Algebra de Lie de aplicaciones lineales sobre el espacio vectorial V
Der(L)	Conjunto de derivaciones de L
L^∞	$\bigcap_{i=1}^{\infty} L^i$
$C_L(x)$	Centralizador de x ($C_L(x)=\{y\in L:[y,x]=0\}$)
$\mathfrak{I}(L)$	Retículo de ideales de L
I_n	Matriz identidad n-dimensional
$L_{\mathbb{C}}$	$L\otimes\mathbb{C}$
L(n)	Algebra de Lie *casi-abeliana (n+1)-dimensional*
H(2n+1)	Algebra de Heisenberg generalizada (2n+1)-dimensional

sl(2,F)	Algebra de Lie simple escindible 3-dimensional
V(m)	sl(2,F)-módulo irreducible (m+1)-dimensional
$V(m)^{(n)}$	sl(2,F)-módulo suma directa de n copias de V(m)
$L(V(m)^{(n)},sl(2,F))$	Algebra de Lie extensión escindible del módulo $V(m)^{(n)}$ por el álgebra sl(2,F)
sp(2n,F)	Algebra de Lie simple simplética
C_n	Algebra de Lie simple escindible del tipo C_n
B_2	Algebra de Lie simple escindible del tipo B_2
$\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Naturales, Racionales, Reales y Complejos
$(\mathfrak{I}, \wedge, \vee)$	Retículo
$J(\mathfrak{I})$	Radical de Jacobson de $\mathfrak{I}$ (intersección de todos los co-átomos de $\mathfrak{I}$)
$Socle(\mathfrak{I})$	Zócalo de $\mathfrak{I}$ (unión de todos los átomos de $\mathfrak{I}$)

CAPITULO 0

PRELIMINARES

§1. Definiciones y primeras propiedades

Un álgebra de Lie es un álgebra cuyo producto verifica las identidades

$$[x,x]=0$$

$$[[x,y]z]+[[y,z]x]+[[z,x]y]=0$$

para cualesquiera x, y, z en el álgebra. La segunda identidad es llamada *Identidad de Jacobi.* Además, en cuerpos de característica distinta de 2, la primera identidad es equivalente a $[x,y]=-[y,x]$ (ver [19], p.3).

Si L es un álgebra de Lie sobre un cuerpo F y x un elemento de L, la aplicación lineal de L en sí misma que a cada elemento y de L le asigna el elemento [y,x] se denotará por $ad_L x$. Se dice que una aplicación lineal $D:L \to L$ es derivación si

$$D([x,y])=[D(x),y]+[x,D(y)]$$

para cualesquiera x, y, z en L. Es inmediato probar que $ad_L x$ es derivación. Al conjunto de todas las derivaciones sobre un álgebra de Lie L lo denotaremos por Der(L).

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F. Denotaremos por $End_F(V)$ el conjunto de todas las aplicaciones lineales de V en sí mismo. Es conocido que $End_F(V)$ tiene estructura de álgebra asociativa. Dados $A, B \in End_F(V)$ si en $End_F(V)$ cambiamos el producto habitual AB por

$$[A,B]=AB-BA$$

entonces obtenemos un álgebra de Lie que denotaremos por gl(V) y que es llamada álgebra de Lie de transformaciones lineales.

A lo largo de toda la Memoria supondremos que las álgebras de Lie son de dimensión finita y que el cuerpo base tiene característica cero salvo mención explícita de lo contrario.

Resolubilidad

Dada un álgebra de Lie L, se define su serie derivada de modo recurrente como $L^{(1)}=L$, $L^{(n+1)}=[L^{(n)},L^{(n)}]$. Se dice que L es *resoluble* si existe un número natural n tal que $L^{(n)}=0$. Las subálgebras de la serie derivada son ideales.

Existe un ideal resoluble maximal, llamado radical resoluble, que se denotará por Rad(L). Además se verifica que L es resoluble si y sólo si L^2 nilpotente (ver [19], p. 51). Si el cuerpo es algebraicamente cerrado se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.1.(Lie, [19], p.52) Sea L un álgebra de Lie resoluble sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces existe una cadena de ideales

$$0<L_1<L_2<\dots<L_{n-1}<L_n=L$$

tal que $\dim L_i=i$. ♦

Se dice que un álgebra de Lie L es *superresoluble* si existe una cadena de ideales de L, $0=L_0<L_1<L_2<\dots<L_n=L$, tal que $\dim L_i/L_{i-1}=1$ para $1\leq i\leq n$. Barnes y Newell [4] probaron que esto es equivalente a que L^2 sea nilpotente y $ad_L x$ sea escindible para todo $x\in L$.

Nilpotencia

Sea L un álgebra de Lie y sea Z(L) el centro del álgebra. Se definen sus *series centrales descendente* (s.c.d.) y *ascendente* (s.c.a.) de modo recurrente como

s.c.d.: $L^1=L$, $L^{n+1}=[L^n,L]$.

s.c.a.: $Z_1(L)=Z(L)$, $Z_{n+1}(L)$ es tal que $Z(L/Z_n(L))=Z_{n+1}(L)/Z_n(L)$

Los elementos de ambas series son ideales. Además las series se estacionan. A los elementos en los que la s.c.d. y la s.c.a. se estacionan lo denotaremos por L^{∞} y $Z_{\infty}(L)$ respectivamente.

Existe un ideal nilpotente maximal, llamado nilradical, que se denotará por Nil(L).

Se dice que L es *nilpotente* si existe un número natural n tal que $L^n = 0$. Esto es equivalente a que $Z_{\infty}(L) = L$. Además, L^{∞} es el menor ideal tal que L/L^{∞} es nilpotente. Si L es nilpotente, llamaremos *orden de nilpotencia* de L al menor número natural n tal que $L^n = 0$.

Semisimplicidad

Se dice que un álgebra de Lie L es *semisimple* si $Rad(L) = 0$. Si L es un álgebra de Lie semisimple que no tiene ideales propios, entonces se dice que L es *simple*. Se tiene el siguiente teorema de estructura:

Teorema 1.2.([19], p.71) Un álgebra de Lie L es semisimple si y sólo si $L=L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n$ donde los L_i son ideales simples. ♦

Además, si L es un álgebra de Lie semisimple, $L^2=L$ y cada ideal de L es semisimple (ver [19], p.72).

Teorema de Levi

Las subálgebras semisimples y el radical resoluble son elementos básicos en el conocimiento de un álgebra de Lie ya que:

Teorema de Levi 1.3.([19], p.91) Si L es un álgebra de Lie, existe una subálgebra semisimple S tal que $L = Rad(L) \dotplus S$. ♦

A una subálgebra S verificando la descomposición de (1.3) se le denomina *factor de Levi* de L.

Radical de Jacobson y subálgebra de Frattini

Llamaremos *radical de Jacobson* de un álgebra de Lie a la intersección de todos los ideales maximales de L y lo denotaremos por J(L). Si el álgebra de Lie L es resoluble, entonces $J(L)=L^2$ (ver [25]). En álgebras de Lie no resolubles $J(L)=[\mathrm{Rad}(L),S]$ donde S es cualquier factor de Levi del álgebra L (ver [25]).

Llamaremos *subálgebra de Frattini* de L a la intersección de todas las subálgebras maximales de L y la denotaremos por $\Phi(L)$. La subálgebra de Frattini es un ideal nilpotente (ver [34]). Además, L es nilpotente si y sólo si $\Phi(L)=L^2$ (ver [34]) Diremos que un álgebra de Lie L es *Φ-libre* si $\Phi(L)=0$ (ver [34] y [31]).

Representaciones

Sea L un álgebra de Lie sobre un cuerpo F y V un F-espacio vectorial. Una aplicación $\rho:L\to gl(V)$ se dice *representación* si el espacio vectorial $V\dot{+}L$ dotado del producto

$$[v_1+l_1,v_2+l_2]=\rho(l_1)(v_1)-\rho(l_2)(v_2)+[l_1,l_2]$$

es un álgebra de Lie. Se verifica entonces que V es un ideal abeliano de $V\dot{+}L$ y L una subálgebra de $V\dot{+}L$. En esta situación V se dice *módulo* sobre L ó *L-módulo.*

La aplicación $ad_L:L\to gl(L)$ que a cada x le asigna la aplicación $ad_L x$ es una representación llamada *representación adjunta.*

Si un L-módulo V tiene estructura de álgebra de Lie y ρ es una representación tal que $\rho(L)\leq \mathrm{Der}(V)$, entonces el espacio vectorial $V\dot{+}L$ dotado del producto

$$[v_1+l_1,v_2+l_2]=[v_1,v_2]+\rho(l_1)(v_1)-\rho(l_2)(v_2)+[l_1,l_2]$$

es un álgebra de Lie. Es inmediato que L es subálgebra y que V es un ideal. Se dice que el álgebra de Lie $V \dot{+} L$ es *extensión escindible* de L por V.

Se dice que un conjunto de transformaciones Σ sobre un espacio vectorial V es *completamente reducible* si el retículo de subespacios Σ-invariantes de V es complementado. Se tienen los siguientes resultados:

Teorema 1.4.([19], p.79) Si L es un álgebra de Lie semisimple, entonces cada L-módulo es completamente reducible. ♦

Teorema 1.5.([19], p.81) Sea L un álgebra de Lie de transformaciones lineales sobre un espacio vectorial V. Entonces L es completamente reducible si y sólo si $L=L_1 \oplus Z(L)$ donde L_1 es un ideal semisimple de L, y los elementos de Z(L) son semisimples. ♦

Subálgebras de Cartan

Las subálgebras de Cartan tienen una importancia decisiva en el estudio de las álgebras de Lie. Una subálgebra H de un álgebra de Lie L se dice *subálgebra de Cartan* de L si cumple las siguientes condiciones:

(1) H es nilpotente

(2) H es autonormalizadora, es decir, $N_L(H) = \{ x \in L : [x,H] \leq H \} = H$.

Dada $f \in End_F(V)$, el lema de Fitting asegura que $V = V_0(f) \dot{+} V_1(f)$ donde $V_0(f)$ y $V_1(f)$ son respectivamente

$$V_1(f) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^i(V) \quad \text{y} \quad V_0(f) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Ker}(f^i)$$

Entonces, se tienen los siguientes resultados:

Proposicición 1.6.([19], p.39) Sea V un espacio vectorial y L un álgebra de Lie nilpotente de gl(V) y sea $V_0(L)=\bigcap_{f\in L} V_0(f)$ y $V_1(L)=\sum_{f\in L} V_1(f)$. Entonces $V_i(f)$ son L-invariantes y $V=V_0(L)\dotplus V_1(L)$. ♦

Proposición 1.7.([19], p.57) Sea H un álgebra de Lie nilpotente de L. Entonces H es subálgebra de Cartan de L si y sólo si $H=L_0(ad_L H)$. ♦

Proposición 1.8.([19], p.58) Sea H subálgebra nilpotente de L. Entonces $L_0(ad_L H)$ es subálgebra de L y $[L_0(ad_L H),L_1(ad_L H)]\leq L_1(ad_L H)$. ♦

§2. Algebras de Heisenberg generalizadas

Un *álgebra de Heisenberg* es un álgebra de Lie 3-dimensional tal que posee una base $\{a_1,f_1,z\}$ con la siguiente tabla de productos no nulos

$$[a_1,f_1]=z$$

A esta álgebra de Lie la denotaremos por H(3). Se cumple que H(3) es nilpotente y además $Z(H(3))=H(3)^2=F(z)$.

A las álgebras de Lie tales que su centro sea 1-dimensional y coincida con L^2 las llamaremos *álgebras de Heisenberg generalizadas* y las denotaremos por H(2n+1). Para cada $n\in\mathbb{N}$ existe, salvo isomorfismos, una única álgebra de Heisenberg generalizada la cual posee una base $\{a_1,f_1,\ldots,a_n,f_n,z\}$ con la siguiente tabla de productos no nulos

$$[a_i,f_j]=\delta_{ij}z$$

A la base anterior la llamaremos *base estándar* de H(2n+1).

Notemos que estas álgebras de Lie son **nilpotentes** y que además $\dim H(2n+1)/H(2n+1)^2$ es **par**.

CAPITULO I

DETERMINACION DE PROPIEDADES DE UN ALGEBRA DE LIE EN TERMINOS DEL RETICULO DE SUS IDEALES

Dada un álgebra de Lie L, es claro que el conjunto de todos los ideales de L tiene estructura de retículo. A este retículo lo denotaremos por $\mathfrak{I}(L)$.

En este capítulo analizaremos los retículos de ideales de las álgebras de Lie abelianas, casi-abelianas, resolubles y del tipo $L=V\dot{+}\Sigma$ donde V es un espacio vectorial y Σ una subálgebra abeliana de gl(V) formada por transformaciones semisimples. Esta última clase de álgebras tiene un interés especial debido a que cualquier álgebra de Lie resoluble puede ser proyectada homomórficamente sobre una de ellas (Towers [34] y Stitzinger [31]). El retículo de ideales de un álgebra de Lie nilpotente ha sido estudiado en [7].

El principal objetivo es la determinación reticular de estas clases de álgebras. El problema ha sido totalmente resuelto en los siguientes casos:

1) Abelianas de dimensión mayor que 1.

2) Resolubles con $\dim L/L^2>1$.

3) $L=V\dot{+}\Sigma$ con Σ formado por transformaciones singulares ó Σ conteniendo algún isomorfismo y el ideal $\bigcap_{f\in\Sigma} L_1(f)$ nulo y, en cuerpos algebraicamente cerrados, con $\dim\Sigma>1$.

En particular las clases de álgebras de Lie (1), (2) y (3) son cerradas por isomorfismos de retículos (aplicaciones biyectivas $\alpha:\mathfrak{I}(L)\rightarrow\mathfrak{I}(M)$ tal que $\alpha(P\vee Q)=\alpha(P)\vee\alpha(Q)$ y $\alpha(P\wedge Q)=\alpha(P)\wedge\alpha(Q)$ para todo P y $Q\in\mathfrak{I}(L)$).

El segundo objetivo es la determinación de condiciones necesarias para que un álgebra de Lie tenga el mismo retículo de ideales que una abeliana, casi-abeliana, resoluble etc. En algunos casos se consigue determinar completamente la estructura de estas álgebras. Por ejemplo, se clasifican las álgebras de Lie con retículo isomorfo al de las casi-abelianas de dimensiones 2 y 3 y, en cuerpos algebraicamente cerrados, las álgebras con retículo isomorfo al de $L=V\dot{+}\Sigma$ con $\Sigma=F(f)$ y f singular.

El tercer objetivo es el estudio de isomorfismos entre retículos de ideales. Se han determinado isomorfismos en algunos casos particulares. Para las casi-abelianas se da un método de construcción de isomorfismos por medio de aplicaciones lineales y, en general, se obtienen condiciones para que los isomorfismos de retículos de ideales puedan ser definidos.

A lo largo de todo el capítulo F representará un cuerpo de característica cero y, salvo que se diga lo contrario, las álgebras de Lie que aparecen serán álgebras de Lie sobre el cuerpo base F.

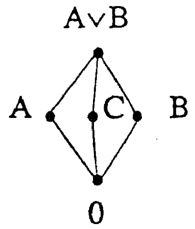
§1. Retículos de ideales de álgebras de Lie abelianas

Encontraremos en términos de teoría reticular: 1º) una definición de las álgebras de Lie abelianas de dimensión mayor que 1, 2º) un criterio para detectar la subálgebra derivada y 3º) un criterio para saber si un ideal es abeliano.

Definición 1.1. Diremos que un retículo $\mathfrak{I}$ es **abeliano** si

1) $\mathfrak{I}$ es complementado.

2) Para cada par de átomos A, B de $\mathfrak{I}$ existe otro átomo C distinto de A y B tal que $A\vee B=A\vee C=B\vee C$. En este caso se dice que el subretículo $\{0,A,B,C,A\vee B\}$ de $\mathfrak{I}$ es un **diamante**:



Es claro que las álgebras de Lie con retículo de ideales abeliano de longitud 1 son la abeliana 1-dimensional y las simples. Para longitud mayor que 1 se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.2. Sea $\mathfrak{I}$ un retículo de longitud $\mathbf{n}>1$ y L un álgebra de Lie sobre un cuerpo arbitrario tal que $\mathfrak{I} \cong \mathfrak{I}(L)$. Entonces, L es **abeliana** si y sólo si $\mathfrak{I}$ es un retículo **abeliano**. Además en este caso, $\mathbf{dim L = n}$.

Demostración. Supongamos primero que $\mathfrak{I}$ es un retículo abeliano. Entonces, por ser de longitud mayor que 1, L posee ideales propios. Sea N un ideal minimal simple de L. Por ser $\mathfrak{I}$ complementado, podemos tomar otro ideal minimal K de L. El ideal $N \cap K$ debe ser cero por la minimalidad de N. Ahora por la condición 2ª de la definición de retículo abeliano, tenemos en L un otro ideal minimal C tal que $N \oplus C = K \oplus C = N \oplus K$. Se tiene que N, K y C son álgebras de Lie isomorfas. Luego K y C son simples. Pero por otra parte resulta que $[C, N] \leq C \cap N = 0$ y $[C, K] = 0$, luego $[C, C] \leq [C, N \oplus K] = 0$ y por tanto C es abeliano lo cual es una contradición. Concluimos entonces que todos los ideales minimales de L son abelianos.

Consideremos ahora la suma S de todos los ideales minimales de L. Por el párrafo anterior, tenemos que S es abeliana. De $\mathfrak{I}$ complementado se sigue $S = L$. Luego L es abeliana.

Suponer ahora que L es abeliana. Entonces, claramente $\mathfrak{I}$ es abeliano. Pero además notemos que la longitud de $\mathfrak{I}$ coincide con la dimensión de L. ♦

El teorema (1.2) muestra que el álgebra de Lie abeliana de dimensión $n>1$ está determinada por su retículo de ideales. Además, nos permite detectar la subálgebra derivada L^2 de cualquier álgebra de Lie L en el retículo $\mathfrak{I}(L)$, siempre que $\dim L/L^2>1$.

Teorema 1.3. Sea L un álgebra de Lie arbitraria. Si en $\mathfrak{I}(L)$ hay un elemento K tal que el intervalo $[K:L]$ es un retículo abeliano de longitud mayor que 1, entonces $\dim L/L^2>1$ y L^2 es el único elemento de $\mathfrak{I}(L)$ minimal respecto a ser el intervalo $[L^2:L]$ un retículo abeliano. ♦

Corolario 1.4. Sean L y M dos álgebras de Lie. Supongamos que $\dim L/L^2>1$. Sea $\alpha:\mathfrak{I}(L)\rightarrow\mathfrak{I}(M)$ un isomorfismo de retículos. Entonces, $\alpha(L^2)=M^2$. ♦

En particular, el caracter abeliano se conserva por isomorfismos de retículos de ideales excepto en el caso 1-dimensional.

Corolario 1.5. Sea L abeliana de dimensión mayor que 1. Entonces, $\mathfrak{I}(M)\cong\mathfrak{I}(L)$ si y sólo si $M\cong L$. ♦

También la definición de retículo abeliano nos permite dar un criterio para que un ideal de L sea abeliano:

Corolario 1.6. Sea N un ideal de L. Si el intervalo $[0:N]$ de $\mathfrak{I}(L)$ es abeliano de longitud mayor que 1, entonces N es abeliano y contenido en el zócalo abeliano de L.

Demostración. Como N no es un ideal minimal de L, podemos tomar un ideal minimal K de L debajo de N. Por ser $[0:N]$ complementado, existe otro ideal minimal de

L debajo de N. Igual que en la demostración del teorema (1.2) se sigue que todo ideal minimal de L debajo de N es abeliano. Ahora otra vez por la complementación se sigue que N es abeliano y contenido en el zócalo abeliano de L. ♦

Notemos que si L es un álgebra de Lie con centro de dimensión mayor que 1, el intervalo $[0:Z(L)]$ de $\mathfrak{I}(L)$ está en las condiciones de (1.6). Entonces se tiene el siguiente resultado:

Corolario 1.7. Sea L un álgebra de Lie con centro de dimensión mayor que 1. Sea $\alpha:\mathfrak{I}(L)\to\mathfrak{I}(M)$ un isomorfismo de retículos. Entonces, $\alpha(Z(L))\leq Z\mathrm{socle}(M)$. ♦

§2. Retículos de ideales de álgebras de Lie casi-abelianas

El método más simple de construción de álgebras de Lie consiste en tomar la suma semi-directa de un espacio vectorial V por una transformación lineal $f:V\to V$. Esta construcción se realiza de la siguiente manera: Tomar una base $\{a_1,\dots,a_n\}$ de V, entonces el espacio vectorial de dimensión n+1 engendrado por $a_1,\dots,a_n,f$ es un álgebra de Lie con el producto dado por $[a_i,a_j]=0$, $[a_i,f]=f(a_i)$, $i,j=1,\dots,n$. Así las álgebras de Lie abelianas se obtendrían como suma semi-directa de un espacio vectorial por una transformación nula. Para obtener álgebras de Lie con producto no trivial basta con tomar una transformación lineal no nula.

Para cada $n\in\mathbb{N}$ denotamos por L(n) el álgebra de Lie construida como suma semi-directa de un espacio vectorial n-dimensional V por la transformación identidad f=1. Entonces, dada $\{e_1,\dots,e_n\}$ base de V se tiene que $\{e_1,\dots,e_n;f\}$ es una base de L(n) con la siguiente tabla de productos no nulos

$$[e_i,f]=e_i \qquad 1\leq i\leq n \qquad (2.0)$$

Es fácil ver que todas las transformaciones escalares no nulas producen la misma álgebra de Lie L(n). Al álgebra de Lie **L(n)** la llamaremos **casi-abeliana** de dimensión **n+1**.

Los objetivos del presente párrafo son los siguientes. En primer lugar estudiaremos cuál ha de ser la estructura de un álgebra de Lie que tenga retículo de ideales isomorfo al de un álgebra de Lie casi-abeliana (Sección 1ª). Después daremos una construcción de isomorfismos entre los retículos de algunas de estas álgebras por medio de aplicaciones lineales (Sección 2ª). En los casos n=1,2, obtendremos todas las álgebras de Lie con el mismo retículo que las casi-abelianas L(1) y L(2). Además para cada $n \in \mathbb{N}$ construiremos un isomorfismo de retículos entre L(n) y un álgebra de Lie no resoluble. Por último analizaremos estos retículos en el caso de álgebras de Lie reales probando que para álgebras resolubles aparecen a lo sumo dos tipos de retículos diferentes (Sección 3ª).

SECCION1ª: Algebras de Lie con retículo de ideales isomorfo a $\mathfrak{I}(L(n))$

Para analizar la estructura de las álgebras de Lie con retículo de ideales isomorfo a $\mathfrak{I}(L(n))$ precisamos del siguiente conocido lema:

Lema 2.1. Sea V un espacio vectorial sobre F y $f \in End_F(V)$. Si el retículo $\mathcal{A}_f$ de subespacios f-invariantes de V es abeliano, entonces f ha de ser una transformación de polinomio mínimo irreducible.

Demostración. Por ser el retículo de los subespacios f-invariantes complementado se sigue que f es semisimple (ver [17], p.426). Sea $\pi_1 \dots \pi_k$ la factorización en irreducibles del polinomio mínimo de f. Supongamos $k>1$, entonces consideramos los subespacios cíclicos $\{v_1\}$ y $\{v_2\}$ correspondientes a los divisores elementales π_1 y π_2. Sean P y Q subespacios f-irreducibles tales que $P \leq \{v_1\}$ y $Q \leq \{v_2\}$. Es claro que los únicos subespacios f-irreducibles contenidos en $P \dotplus Q$ son P y Q, lo que contradice el hecho de ser $\mathcal{S}_f$ abeliano. ♦

Ahora estamos en condiciones de ver qué tipo de álgebras tienen retículo de ideales isomorfo a $\mathfrak{I}(L(n))$. Observar que si $\mathfrak{I}(L(n)) \cong \mathfrak{I}(L(m))$ entonces $n=m$.

Definición 2.2. Diremos que un retículo $\mathfrak{I}$ es **casi-abeliano** si

1) $\mathfrak{I}$ posee un sólo co-átomo J.

2) El intervalo $[0:J]$ es abeliano.

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ el retículo de ideales de L(n) es casi-abeliano.

Teorema 2.3. Sea L un álgebra de Lie. Entonces $\mathfrak{I}(L)$ **es casi-abeliano** de longitud **n+1** si y sólo si L es de uno de los siguientes tipos:

(i) L es una extensión escindible de un espacio vectorial V por una transformación f no singular de polinomio mínimo irreducible y **n** divisores elementales.

(ii) L es una extensión escindible de un espacio vectorial W por un álgebra de Lie simple S siendo W la suma directa de **n** copias de un S-módulo irreducible y fiel.

Demostración. Tenemos que L posee un único ideal maximal J=J(L). Por tanto L/J(L) es 1-dimensional ó simple. Notemos además que J(L) es nilpotente (ver [25], sección 3). Si el intervalo $[0:J(L)]$ de $\mathfrak{I}(L)$ tiene longitud 1, entonces J(L) es un ideal minimal de L, luego J(L) es abeliano por ser nilpotente. Si la longitud de $[0:J(L)]$ es mayor que 1 entonces por el corolario (1.6), J(L) es también abeliano. Supongamos en primer lugar que $L=J(L)\dotplus(x)$. Por ser J(L) abeliano, el intervalo $[0:J(L)]$ de $\mathfrak{I}(L)$ es precisamente el retículo de subespacios del espacio vectorial J(L) invariantes por $ad_L x$.

Por el lema (2.1) se tiene que la acción de $ad_L x$ sobre J(L) ha de ser de polinomio mínimo irreducible. Además, por [25] se tiene que $L^2=J(L)=[J(L),x]$ y por tanto $ad_L x$ actúa no singularmente sobre J(L). Como la longitud de $\mathfrak{I}(L)$ es n+1 es claro que la acción de $ad_L x$ sobre J(L) tiene n divisores elementales. Luego L es del tipo (i).

Sea ahora $L=J(L)\dot{+}S$ donde S es un álgebra de Lie simple. Por el teorema de Weyl (ver [18], p.28), podemos escribir $J(L)=W_1\dot{+}\ldots\dot{+}W_m$ donde W_i es un S-módulo irreducible. Además, como $J(L)=[J(L),S]$ (ver [25], sección 3), W_i es un S-módulo fiel. Por ser J(L) abeliano el intervalo $[0:J(L)]$ de $\mathfrak{I}(M)$ es el retículo de S-módulos de J(L). Como m+1 es la longitud de $\mathfrak{I}(L)$, resulta que $m=n$. Además por la condición 2ª de la definición de retículos abelianos, dados W_i,W_j con $i\neq j$ tenemos que existe un S-módulo irreducible W tal que $W_i\oplus W_j=W\oplus W_i=W\oplus W_j$. Luego $W_i\cong W_j$ y por tanto M es del tipo (ii).

Supongamos ahora que L es del tipo (i) ó (ii). En el primer caso por ser f no singular se tiene que $V=f(V)=[V,f]=L^2$. Luego L resoluble y por tanto V es el único ideal maximal de L. Como f es semisimple, el intervalo $[0:V]$ de $\mathfrak{I}(L)$ es complementado (ver [17], p.426). Sean ahora A, B ideales minimales de L. Entonces A, B son subespacios cíclicos de V para f con el mismo polinomio mínimo. Sean $\{a_1,\ldots,a_m\},\{b_1,\ldots,b_m\}$ bases de A y B respectivamente de forma que la matriz asociada de f en las bases anteriores es la forma canónica racional. Entonces $C=F(a_1+b_1,\ldots,a_m+b_m)$ es un ideal de L tal que $A\oplus B=C\oplus A=C\oplus B$. Por tanto $\mathfrak{I}(L)$ es casi-abeliano. Notemos además que dada $V=\{v_1\}\oplus\ldots\oplus\{v_n\}$ una descomposición de V en subespacios cíclicos, la cadena

$$0<\{v_1\}<\{v_1\}\oplus\{v_2\}<\ldots<\{v_1\}\oplus\ldots\oplus\{v_n\}<L$$

es una cadena maximal de ideales. Luego la longitud de $\mathfrak{I}(L)$ es n+1.

Sea ahora L del tipo (ii). Por ser W un S-módulo irreducible y fiel se tiene que $[W^{(n)},S]=W^{(n)}$. Luego por [25], se tiene que $W^{(n)}$ es el radical de Jacobson de L y por tanto el único ideal maximal de L. Por ser S simple, el intervalo $[0:W^{(n)}]$ de $\mathfrak{I}(L)$ es complementado (ver [19], p.81). Por último, si W_1, W_2 son ideales minimales de L se tiene que W_1, W_2 son S-módulos irreducibles isomorfos a W. Sean $\{a_1,\ldots,a_m\}$, $\{b_1,\ldots,b_m\}$ bases de W_1, W_2 de forma que la acción de S sobre ellas sea la misma. Tomando el módulo $P=F(a_1+b_1,\ldots,a_m+b_m)$ se tiene que $W_1\oplus W_2=P\oplus W_1=P\oplus W_2$. Por tanto $\mathfrak{I}(L)$ es casi-abeliano. Además, se tiene la siguiente cadena maximal de ideales: $0<W<W\oplus W<\ldots<W^{(n)}<L$. Luego la longitud de $\mathfrak{I}(L)$ es n+1. ♦

Corolario 2.4. Si un álgebra de Lie L tiene el mismo retículo de ideales que el álgebra casi-abeliana de dimensión n+1, entonces L debe ser como en (i) ó en (ii) del teorema anterior. ♦

En algunos casos particulares de álgebras de Lie resolubles el retículo de ideales determina si son ó no casi-abelianas.

Corolario 2.5. Sea M un álgebra de Lie superresoluble. Entonces $\mathfrak{I}(M)$ es casi-abeliano de longitud n+1 si y sólo si $M\cong L(n)$. ♦

Corolario 2.6. Sea F algebraicamente cerrado y L un álgebra de Lie resoluble. Entonces, L es casi-abeliana de dimensión n+1 si y sólo si $\mathfrak{I}(L)$ es casi-abeliano de longitud n+1. ♦

Entonces en cuerpos algebraicamente cerrados L(n) está determinada por su retículo de ideales y el hecho de ser resoluble. Notemos además que el número natural **n** que define L(n) es un **invariante** en el retículo que indica que la longitud de cualquier cadena maximal de ideales de L(n) es **n+1**.

De acuerdo con el teorema (2.3), las álgebras de Lie con retículo de ideales isomorfo a $\mathfrak{I}(L(n))$ han de construirse de la siguiente forma:

(2.7.1) Caso resoluble.

Tomar $\pi(\lambda)=\lambda^k-t_{k-1}\lambda^{k-1}-\ldots-t_1\lambda-t_0$ polinomio irreducible sobre F y un subespacio vectorial V sobre F de dimensión nk. Sea A la matriz compañera de $\pi(\lambda)$ y A* la suma diagonal de A n veces. El álgebra de Lie suma semi-directa de V por la transformación lineal cuya matriz asociada en alguna base de V es A* será denotada por $L_{\pi,n}$. Entonces $L_{\pi,n}$ posee una base $\{a_1^1,\ldots,a_k^1;\ldots;a_1^n,\ldots,a_k^n;x\}$ con tabla de productos no nulos

$$[a_j^i,x]=a_{j+1}^i \quad \text{para } 1\leq j\leq k-1$$
$$[a_k^i,x]=t_0a_1^i+t_1a_2^i+\ldots+t_{k-1}a_k^i \quad \text{para } 1\leq i\leq n$$

Notemos que $L(n)\cong L_{\lambda-1,n}\cong L_{\lambda-c_0,n}$ donde c_0 es un escalar no nulo.

(2.7.2) Caso no resoluble.

Tomar un álgebra de Lie simple S y un S-módulo irreducible y fiel W. Sea $W^{(n)}$ el S-módulo copia de n veces W. Denotaremos $L(W^{(n)},S)$ el álgebra de Lie extensión escindible de $W^{(n)}$ por S (ver [19], p.18). Entonces si σ es la representación de W, $\{a_1,\ldots,a_k\}$ una base de W y $\{s_1,\ldots,s_r\}$ una base de S, se tiene que el álgebra de Lie $L(W^{(n)},S)$ posee una base $\{a_1^1,\ldots,a_k^1;\ldots;a_1^n,\ldots,a_k^n;s_1,\ldots,s_r\}$ donde $a_j^i\equiv a_j$ y la tabla de productos de $L(W^{(n)},S)$ es

$$[a_j^i,s_m]=\sigma(s_m)(a_j^i)$$
$$[a_j^i,a_q^p]=0$$

siendo los productos $[s_i,s_j]$ los correspondientes al álgebra de Lie S.

SECCION 2ª: Isomorfismos de retículos

Notemos que si dos álgebras de Lie son isomorfas, en particular tienen retículos de ideales isomorfos. Entonces el primer problema a resolver en esta sección será determinar cuáles de las álgebras construidas en (2.7.1) y (2.7.2) son isomorfas. Ahora bien, los retículos de ideales de álgebras no isomorfas pueden ser isomorfos. En el caso de retículos casi-abelianos de longitud 2 ó 3 probaremos en esta sección que los isomorfismos se reducen a una simple biyección entre los conjuntos de ideales minimales. Sin embargo en el caso de longitud mayor que 3 no es tan simple como mostrará la construcción que en (2.10) haremos de un isomorfismo entre los retículos de ideales de $L(n)$ y $L(V(m)^{(n)},sl(2,F))$. Para álgebras de Lie resolubles construiremos isomorfismos de retículos de ideales mediante adecuadas aplicaciones lineales. Pero, como veremos en (2.13), no todo isomorfismo entre retículos de ideales se puede construir por medio de una transformación lineal.

Comenzamos entonces por estudiar los isomorfismos entre las álgebras de Lie construidas en (2.7.1) y (2.7.2). Observar que las álgebras de Lie $L(W^{(n)},S)$ y $L(W_1^{(m)},S_1)$ son isomorfas si y sólo si $n=m$, $S \cong S_1$ y W, W_1 son S-módulos isomorfos. Veamos ahora cuándo $L_{\pi,n}$ y $L_{\omega,m}$ son isomorfas como álgebras de Lie.

Proposición 2.8. Sean los polinomios irreducibles sobre el cuerpo F siguientes: $\pi(\lambda)=\lambda^k-t_{k-1}\lambda^{k-1}-\dots-t_1\lambda-t_0$ y $\omega(\lambda)=\lambda^r-c_{r-1}\lambda^{r-1}-\dots-c_1\lambda-c_0$. Entonces, $L_{\pi,n}$ es isomorfa con $L_{\omega,m}$ si y sólo $r=k$, $n=m$ y $c_{k-i}=(1/\alpha^i)t_{k-i}$ $1\le i\le k$ para algún α escalar no nulo.

Demostración. Sean $\{a_1^1,\dots,a_k^1;\dots;a_1^n,\dots,a_k^n;x_1\}$ y $\{b_1^1,\dots,b_r^1;\dots;b_1^m,\dots,b_r^m;x_2\}$ las bases de $L_{\pi,n}$ y $L_{\omega,m}$ respectivamente definidas en (2.7.1). Supongamos en primer lugar que $L_{\pi,n}$ es isomorfa con $L_{\omega,m}$. Entonces existe $0 \neq x \in L_{\omega,m}$ tal que la acción de $ad_{L_{\omega,m}}x$ sobre $Nil(L_{\omega,m})$ es cíclica de polinomio mínimo $\pi(\lambda)$. Es claro que $x=\alpha x_2+a$ siendo α un escalar no nulo y $a \in Nil(L_{\omega,m})$. Una simple comprobación lleva a que el polinomio mínimo de $ad_{L_{\omega,m}}x_2$ es $\lambda^k - (t_{k-1}/\alpha)\lambda^{k-1} - \ldots - (t_1/\alpha^{k-1})\lambda - (t_0/\alpha^k)$. Por tanto el resultado es cierto.

Probemos ahora el recíproco. Tomamos en $L_{\omega,n}$ la base $\{(1/\alpha^{k-1})b_1^1, (1/\alpha^{k-2})b_2^1, \ldots, (1/\alpha)b_{k-1}^1, b_k^1; \ldots; (1/\alpha^{k-1})b_1^n, \ldots, b_k^n; \alpha x_2\}$. La aplicación lineal $\Phi: L_{\pi,n} \to L_{\omega,n}$ definida por $\Phi(x_1)=\alpha x_2$, $\Phi(a_j^i)=(1/\alpha^{k-j})b_j^i$ es un isomorfismo. ♦

Métodos de construcción de isomorfismos

El objetivo que perseguimos en la presente sección es poder responder a la cuestión de qué álgebras de Lie del tipo $L_{\pi,n}$ ó $L(W^{(n)},S)$ tienen el mismo retículo de ideales. En el caso $n=1$, es una comprobación inmediata que

$$\mathfrak{I}(L_{\pi,1}) \cong \mathfrak{I}(L(W^{(1)},S)) \cong$$  $$\cong \mathfrak{I}(L(1))$$

independientemente del cuerpo de característica cero sobre el que construyamos las álgebras. En el caso $n=2$, la respuesta la da el siguiente teorema:

Teorema 2.9. Sea M un álgebra de Lie sobre un cuerpo K tal que $Card(K)=Card(F)$. Entonces, $\mathfrak{I}(M) \cong \mathfrak{I}(L(2))$ si y sólo si

(i) $M \cong L_{\pi,2}$ para algún $\pi \in Irr(K)$.

(ii) $M \cong L(W^{(2)},S)$ para algún álgebra de Lie simple S y algún S-módulo irreducible y fiel W.

Demostración. Si M y L(2) tienen el mismo retículo de ideales, aplicando el teorema (2.3) el resultado es inmediato.

Ahora probaremos el recíproco. Denotamos $L_{\pi,2}=V\dot{+}(x)$. Para demostrar el resultado es suficiente con ver que los intervalos $[0:V]$ de $\mathfrak{I}(L_{\pi,2})$ y $[0:W^{(2)}]$ de $\mathfrak{I}(L(W^{(2)},S))$ tienen el mismo número de ideales minimales. Ahora bien, los conjuntos $\mathcal{A}_V=\{$ideales minimales de $L_{\pi,2}\}$ y $\mathcal{A}_W=\{$ideales minimales de $L(W^{(2)},S)\}$ cumplen $Card(\mathcal{A}_V)=Card(\mathcal{A}_W)=Card(K)=Card(F)$. De aquí el resultado se sigue de forma inmediata. ♦

Notemos que en (2.9) la condición *Card(K)=Card(F)* no puede ser eliminada.

El problema de determinar cuándo las álgebras de Lie $L_{\pi,n}$ y $L(W^{(n)},S)$ tienen el mismo retículo de ideales se reduce a determinar para qué π, W y S se tiene que los intervalos $[0:(L_{\pi,n})^2]$ y $[0:L(W^{(n)},S)^2]$ son isomorfos. En el caso n=2 ha podido darse una respuesta satisfactoria al problema gracias a que el isomorfismo entre estos retículos se reduce a una biyección entre los conjuntos de ideales minimales. En el caso general no es tan simple, como muestra la siguiente construcción del isomorfismo entre $\mathfrak{I}(L(n))$ y $\mathfrak{I}(L(V(m)^{(n)},sl(2,F)))$.

Sea $\{e,f,h\}$ una base de sl(2,F) con la siguiente tabla de productos

$$[e,f]=h \qquad [h,e]=2e \qquad [h,f]=-2f$$

Es bien conocido (ver [18], p.31) que para cada $m\in N$ existe un único sl(2,F)-módulo irreducible, que denotaremos por V(m), con una base $\{x_0,\dots,x_m\}$ de forma que, si llamamos σ a la representación de V(m), se tiene la siguiente tabla:

$$\sigma(h)(x_i)=(m-2i)x_i \qquad \text{para } 0\le i\le m$$

$$\sigma(f)(x_i)=(i+1)x_{i+1} \qquad \text{para } 0\le i\le m-1 \qquad \sigma(f)(x_m)=0$$

$$\sigma(e)(x_i)=(m-i+1)x_{i-1} \quad \text{para } 1\leq i\leq m \quad \sigma(e)(x_0)=0$$

A la base $\{x_0,\ldots,x_m\}$ la llamaremos *base estándar* del módulo V(m). Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.10. Para cada par $(n,m)\in \mathbb{N}^2$, los retículos $\mathfrak{S}(L(n))$ y $\mathfrak{S}(L(V(m)^{(n)},sl(2,F)))$ son isomorfos.

Demostración. De acuerdo con (2.7.2), tenemos que $L(V(m)^{(n)},sl(2,F))$ posee una base $\{x_0^1,\ldots,x_m^1;\ldots;x_0^n,\ldots,x_m^n;e,f,h\}$ con tabla de productos no nulos

$$[x_j^i,h]=(m-2j)x_j^i \quad \text{para} \quad 1\leq i\leq n,\ 0\leq j\leq m$$

$$[x_j^i,f]=(j+1)x_{j+1}^i \quad \text{para} 1\leq i\leq n,\ 0\leq j\leq m-1 \qquad [x_m^i,f]=0$$

$$[x_j^i,e]=(m-j+1)x_{j-1}^i \qquad \text{para} \quad 1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m \qquad [x_0^i,e]=0$$

$$[e,f]=h \qquad [h,e]=2e \qquad [h,f]=-2f$$

Veamos en primer lugar qué forma tienen los ideales minimales del álgebra anterior. Sea N ideal minimal de $L(V(m)^{(n)},sl(2,F))$. Es claro que $N\cong V(m)$ por Jordan-Hölder. Entonces sea $\{b_0,\ldots,b_m\}$ una base estándar de N. Como $N\leq V(m)^{(n)}$ tenemos que

$$b_0=\sum_{i=1}^{n} \lambda_0^i x_0^i+\ldots+\lambda_m^i x_m^i$$

Ahora bien, como $[b_0,e]=0$ se tiene que $b_0=\lambda_0^1x_0^1+\ldots+\lambda_0^nx_0^n$ y aplicando reiteradamente f llegamos a que $b_i=\lambda_0^1x_i^1+\ldots+\lambda_0^nx_i^n$.

Sea ahora $\{e_1,\ldots,e_n;f\}$ la base de L(n) dada en (2.0). Los ideales minimales de L(n) son de la forma $F(\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_ne_n)$ donde $\lambda_i\in F$. Denotamos por $\mathfrak{A}(L(n))=\{$ideales minimales de $L(n)\}$ y por $\mathfrak{A}(L(V(m)^{(n)},sl(2,F)))=\{$ideales minimales de $L(V(m)^{(n)},sl(2,F))\}$. Es una mera comprobación ver que la aplicación $\Phi:\mathfrak{A}(L(n))\rightarrow\mathfrak{A}(L(V(m)^{(n)},sl(2,F)))$ definida por

$$\Phi(F(\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_ne_n))=F(\lambda_1x_i^1+\ldots+\lambda_nx_i^n:0\leq i\leq m)$$

está bien definida y es biyectiva. Definimos ahora $\Phi^*:\mathfrak{I}(L(n))\to\mathfrak{I}(L(V(m)^{(n)},sl(2,F)))$ de la siguiente forma. Sea Q un ideal propio de L(n), entonces $Q=F(u_1)\dot{+}\ldots\dot{+}F(u_s)$ siendo

$$(u_1,\ldots,u_s)=(e_1,\ldots,e_n)\begin{bmatrix}\lambda_1^1 & \lambda_1^2\cdots & \lambda_1^s\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \lambda_n^1 & \lambda_n^2\cdots & \lambda_n^s\end{bmatrix}=(e_1,\ldots,e_n)P\lambda$$

Notemos que $\Phi(F(u_i))=F(b_0^i,\ldots,b_m^i)$ donde

$$(b_0^i,\ldots,b_m^i)=(x_0^1,\ldots,x_0^n;\ldots;x_m^1,\ldots,x_m^n)\begin{bmatrix}\boxed{\lambda_i} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\lambda_i}\end{bmatrix}\ \text{con } \lambda_i=\begin{bmatrix}\lambda_1^i\\ \vdots\\ \lambda_n^i\end{bmatrix}$$

Es claro que

$$(b_0^1,\ldots,b_0^s;\ldots;b_m^1,\ldots,b_m^s)=(x_0^1,\ldots,x_0^n;\ldots;x_m^1,\ldots,x_m^n)\begin{bmatrix}\boxed{P\lambda} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{P\lambda}\end{bmatrix}$$

y como $\{u_1,\ldots u_s\}$ es un sistema libre, tenemos que $\{b_0^1,\ldots,b_m^1;\ldots;b_0^s,\ldots,b_m^s\}$ es un sistema libre. Entonces definimos

$$\Phi^*(Q)=\Phi(F(u_1))\dot{+}\ldots\dot{+}\Phi(F(u_s))$$

Ahora tenemos que comprobar que Φ^* está bien definida. Sea $Q=F(z_1)\dot{+}\ldots\dot{+}F(z_s)$ otra descomposición de Q en irreducibles. Entonces $(z_1,\ldots,z_s)=(u_1,\ldots,u_s)C$ siendo C una matriz regular. Por otro lado

$$(z_1,\ldots,z_s)=(e_1,\ldots,e_n)\begin{bmatrix}\mu_1^1 & \mu_1^2\cdots & \mu_1^s\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \mu_n^1 & \mu_n^2\cdots & \mu_n^s\end{bmatrix}=(e_1,\ldots,e_n)P\mu$$

$\Phi(F(z_1))\dot{+}\ldots\dot{+}\Phi(F(z_s))=F(c_0^1,\ldots,c_m^1;\ldots;c_0^s,\ldots,c_m^s)$ donde

$$(c_0^1,\ldots,c_0^s;\ldots;c_m^1,\ldots,c_m^s)=(x_0^1,\ldots,x_0^n;\ldots;x_m^1,\ldots,x_m^n)\begin{bmatrix} \boxed{P\mu} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{P\mu} \end{bmatrix}$$

Ahora bien, como $P_\mu = P_\lambda C$ tenemos que

$$(c_0^1,\ldots,c_0^s;\ldots;c_m^1,\ldots,c_m^s)=(b_0^1,\ldots,b_0^s;\ldots;b_m^1,\ldots,b_m^s)\begin{bmatrix} \boxed{C} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{C} \end{bmatrix}$$

y por tanto Φ^* está bien definida. La aplicación Φ^* es además inyectiva, para probarlo se hace un razonamiento análogo al anterior, y es claramente sobre. Luego Φ^* es una biyección. Además como Φ^* y $(\Phi^*)^{-1}$ conservan contenidos, entonces Φ^* es un isomorfismo. ♦

Los isomorfismos construidos hasta el momento han sido dados mediante procedimientos que solamente pueden ser aplicados en esos casos concretos. Veamos ahora un método más general de construcción de isomorfismos entre retículos casi-abelianos de resolubles. Este procedimiento nos permitirá probar en la siguiente sección que en el caso de álgebras de Lie reales y resolubles para cada $n>2$ existen, a lo más, dos retículos casi-abelianos distintos.

Recordemos el siguiente resultado del álgebra lineal:

Teorema 2.11. Sean f y g dos automorfismos de un espacio vectorial V, cuyos polinomios mínimos son irreducibles del mismo grado. Supongamos que α es una aplicación lineal de V tal que lleva subespacios f-invariantes en subespacios g-invariantes. Entonces, α es biyectiva. Luego f y g tienen retículo de subespacios invariantes isomorfos.

Por tanto α induce de forma natural un isomorfismo α^* entre los retículos $\mathfrak{S}(V\dot{+}(f))$ y $\mathfrak{S}(V\dot{+}(g))$.

Demostración. Sea k el grado de los polinomios mínimos de f y g. Pongamos $\dim V = m = kn$. Probemos que α es biyectiva. Si α no es biyectiva podemos tomar $0 \neq x \in V$ tal que $\alpha(x)=0$. Sea $S=F(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{k-1}(x))$. Por ser f semisimple, se tiene que $\dim S = k$. Es claro que $\alpha(S)=F(\alpha(f(x)), \alpha(f^2(x)), \ldots, \alpha(f^{k-1}(x)))$ y por tanto $\dim \alpha(S) \leq k-1$ lo cual es una contradición con la semisimplicidad de g. Luego α ha de ser biyectiva.

Consideremos las álgebras de Lie $L_{\pi,n}=V\dot{+}(f)$ y $L_{\omega,n}=V\dot{+}(g)$ donde π, ω son los polinomios mínimos de f y g respectivamente. Notemos que los ideales propios de estas álgebras son exactamente los subespacios no nulos de V invariantes bajo el correspondiente endomorfismo. Por tanto la transformación α induce de forma natural una aplicación α^* entre los retículos $\mathfrak{I}(L_{\pi,n})$ y $\mathfrak{I}(L_{\omega,n})$. ♦

Ahora bien, este tipo de aplicaciones lineales no siempre existen como probaremos en (2.13). El siguiente resultado da una condición necesaria y suficiente para su existencia.

Proposición 2.12. Sean f y g dos automorfismos de un espacio vectorial V, no cíclicos y cuyos polinomios mínimos son irreducibles del mismo grado. Entonces, existe una transformación lineal α de V que lleva subespacios f-invariantes en subespacios g-invariantes si y sólo si existe un polinomio P(X) sobre F tal que f y P(g) son semejantes.

Demostración. Sea $\alpha \in \mathrm{End}_F(V)$ tal que lleva subespacios f-invariantes en subespacios g-invariantes y sea $a \in V$ un elemento no nulo arbitrario. Observar que, por el teorema (2.11), α es no singular. Sea k el grado de los polinomios mínimos de f y g. Definimos $S_a=F(a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{k-1}(a))$. Claramente S_a es f-irreducible, luego

$$\alpha(S_a)=F(\alpha(a), \alpha(f(a)), \alpha(f^2(a)), \ldots, \alpha(f^{k-1}(a)))$$

ha de ser g-invariante y $\dim S_a = \dim \alpha(S_a)$ por ser α no singular. Entonces $\alpha(S_a)$ es g-irreducible y por tanto $\alpha(S_a)=F(\alpha(a), g(\alpha(a)), \ldots, g^{k-1}(\alpha(a)))$. Luego para cada $a \in V$ no nulo tenemos

$$\alpha(f(a)) = \lambda_0(a)\alpha(a)+\lambda_1(a)g(\alpha(a))+\ldots+\lambda_{k-1}(a)g^{k-1}(\alpha(a))$$

donde $\lambda_i(a) \in F$. Entonces para cada $0 \leq i \leq k-1$ tenemos definidas unas aplicaciones $\lambda_i : V \setminus \{0\} \to F$. Veamos que λ_i son constantes para todo i. Sean $a, b \in V$ no nulos tales que $S_a \neq S_b$. Entonces $S_a \cap S_b = 0$ y $\alpha(S_a) \cap \alpha(S_b) = 0$. Por tanto $\{\alpha(a), g(\alpha(a)), \ldots, g^{k-1}(\alpha(a)); \alpha(b), g(\alpha(b)), \ldots, g^{k-1}(\alpha(b))\}$ es una familia de vectores linealmente independientes. Tomamos el vector $a+b$. Se tiene que

$$\alpha(f(a+b))=\lambda_0(a+b)\alpha(a+b)+\lambda_1(a+b)g(\alpha(a+b))+\ldots+\lambda_{k-1}(a+b)g^{k-1}(\alpha(a+b)) =$$
$$\lambda_0(a+b)\alpha(a)+\ldots+\lambda_{k-1}(a+b)g^{k-1}(\alpha(a))+\lambda_0(a+b)\alpha(b)+\ldots+\lambda_{k-1}(a+b)g^{k-1}(\alpha(b))$$

Por otro lado también es cierta la siguiente igualdad

$$\alpha(f(a+b))=\lambda_0(a)\alpha(a)+\ldots+\lambda^{k-1}(a)g^{k-1}(\alpha(a))+\lambda_0(b)\alpha(b)+\ldots+\lambda^{k-1}(b)g^{k-1}(\alpha(b))$$

Comparando ambas igualdades llegamos a

$$\lambda_i(a+b)=\lambda_i(a)=\lambda_i(b) \qquad \text{para} \qquad 0 \leq i \leq k-1$$

Sea ahora $c \in V$, $c \neq a$ tal que $S_c = S_a$. Llamemos n al número de divisores elementales de f. Notemos que $2 \leq n$. Entonces existe $b \in V$ no nulo tal que $S_a \neq S_b$. Aplicando ahora el párrafo anterior llegamos a que $\lambda_i(c)=\lambda_i(a)=\lambda_i(b)$ y por tanto las aplicaciones λ_i son constantes.

De todo lo anterior se deduce que

$$\alpha f=\lambda_0\alpha+\lambda_1 g\alpha+\ldots+\lambda_{k-1}g^{k-1}\alpha$$

para algunos $\lambda_i \in F$. Por tanto el automorfismo f es semejante al automorfismo

$$\lambda_0+\lambda_1 g+\ldots+\lambda_{k-1}g^{k-1}$$

Probemos ahora el recíproco. Sea α un automorfismo lineal tal que $f=\alpha^{-1}P(g)\alpha$ donde $P(g) = \lambda_0+\lambda_1 g+\ldots+\lambda_{k-1}g^{k-1}$. Por ser f semisimple se tiene que V es completamente reducible (ver [17], p.426). Entonces basta con probar que α

conserva subespacios f-irreducibles. Sea entonces $S=F(x,f(x),f^2(x),\ldots,f^{k-1}(x))$. Claramente

$$\alpha(S)=F(\alpha(x),\alpha(f(x)),\alpha(f^2(x)),\ldots,\alpha(f^{k-1}(x)))$$

y por tanto $\alpha(S)=F(\alpha(x),g(\alpha(x)),g^2(\alpha(x)),\ldots,g^{k-1}(\alpha(x))$. Luego $\alpha(S)$ es g-irreducible. ♦

Notemos que, con los notaciones de (2.12), si α es un automorfismo tal que $f=\alpha^{-1}P(g)\alpha$, entonces α es una transformación que lleva subespacios invariantes de f en subespacios invariantes de g. Por tanto α **no es única**.

Veamos ahora que este tipo de aplicaciones no siempre existen.

Ejemplo 2.13. Sea el espacio vectorial $\mathbb{Q}^{2n}$ y sean $\lambda^2+\lambda+1$, λ^2-2 polinomios irreducibles sobre $\mathbb{Q}$. Consideramos las transformaciones lineales f, g que en la base canónica de $\mathbb{Q}^{2n}$ tienen por matrices coordenadas la suma diagonal n veces de las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad\qquad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

respectivamente. Entonces no existe ninguna transformación lineal sobre $\mathbb{Q}^{2n}$ que lleve subespacios invariantes de f en subespacios invariantes de g.

En efecto: Veamos que ninguna polinomial en g, P(g), es semejante con f. Notemos que al ser $g^2=2$, las polinomiales en g son de la forma

$$P(g)=\lambda_0+\lambda_1 g \qquad \text{para algunos } \lambda_0,\ \lambda_1\in\mathbb{Q}$$

Supongamos que f es semejante a P(g). Entonces f y P(g) tienen el mismo polinomio mínimo y por tanto

$$P(g)^2+P(g)+1=0$$

o lo que es igual

$$(\lambda_1)^2g^2+(\lambda_1+2\lambda_0\lambda_1)g+((\lambda_0)^2+\lambda_0+1)=0$$

Entonces se tiene que λ_0 y λ_1 cumplen las siguientes relaciones

$$2(\lambda_1)^2+(\lambda_0)^2+\lambda_0+1=0$$
$$\lambda_1+2\lambda_0\lambda_1=0$$

Como la ecuación $(\lambda_0)^2+\lambda_0+1=0$ no tiene solución en $\mathbb{Q}$, entonces $\lambda_1\neq 0$. Por tanto $\lambda_0=-1/2$. Entonces $2(\lambda_1)^2+1/4+1/2=0$ y esta ecuación tampoco tiene solución en $\mathbb{Q}$ lo cual es una contradición.

Luego f no es semejante a ninguna polinomial en g y ahora aplicando el proposición (2.12) se sigue el resultado. ♦

Notemos que en el caso n=2 el teorema (2.9) prueba que $\mathfrak{I}(L_{\lambda^2+\lambda+1,2})\underset{\alpha}{\equiv}\mathfrak{I}(L_{\lambda^2-2,2})\equiv\mathfrak{I}(L(2))$. En el caso de que éstas álgebras sean álgebras sobre el cuerpo de los racionales, el isomorfismo α no puede ser definido a través de una transformación lineal que conserve subespacios invariantes.

SECCION 3ª: Aplicaciones en el caso de álgebras de Lie reales

En esta sección probaremos que si L es un álgebra de Lie real y resoluble tal que $\mathfrak{I}(L)$ es casi-abeliano de longitud n+1, entonces ó bien $\mathfrak{I}(L)\equiv\mathfrak{I}(L(n))$ ó bien $\mathfrak{I}(L)\equiv\mathfrak{I}(L_{\lambda^2+1,n})$. El problema que queda sin resolver es ver si $\mathfrak{I}(L(n))\equiv\mathfrak{I}(L_{\lambda^2+1,n})$ para algún n>2. Luego en el caso resoluble y real existen, a lo más, dos retículos de ideales casi-abelianos no isomorfos de la misma longitud.

Ejemplo 2.14. Sea $\mathbb{R}^{2n}$ espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sean los polinomios λ^2+1 y $\lambda^2-c_1\lambda-c_0$ tales que $(c_1)^2+4c_0<0$. Consideramos las transformaciones lineales f, g que en la base canónica de $\mathbb{R}^{2n}$ tienen por matrices coordenadas la suma diagonal de n veces las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c_0 & c_1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

respectivamente. Entonces, f y $h = c_1/2 \pm (\sqrt{-1/4(c_1{}^2+4c_0)})g$ son semejantes.

En efecto : Se comprueba fácilmente que $h^2-c_1h-c_0 = 0$. Luego f y h tienen el mismo polinomio mínimo y por tanto son semejantes. ♦

Entonces, haciendo uso del ejemplo (2.14) y de la proposición (2.12) se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 2.15. Sea $\lambda^2-c_1\lambda-c_0$ tal que $(c_1)^2+4c_0<0$. Entonces las álgebras de Lie reales $L_{\lambda^2-c_1\lambda-c_0,n}$ y $L_{\lambda^2+1,n}$ tienen el mismo retículo de ideales. ♦

Notemos que además sabemos cómo construir isomorfismos entre $\mathfrak{I}(L_{\lambda^2-c_1\lambda-c_0,n})$ y $\mathfrak{I}(L_{\lambda^2+1,n})$. Por otro lado, el corolario (2.15) y el teorema (2.9) nos aseguran que:

Corolario 2.16. Para cada $\pi(\lambda)$ polinomio irreducible sobre $\mathbb{R}$ las álgebras de Lie reales $L_{\pi,n}$ cumplen:

(i) $\mathfrak{I}(L_{\pi,n})\cong\mathfrak{I}(L(n))$ si $n=1$ ó $n=2$

(ii) Para $n>2$

$\mathfrak{I}(L_{\lambda-c_0,n})\cong\mathfrak{I}(L(n))$ si $c_0\neq0$ y $\mathfrak{I}(L_{\lambda^2-c_1\lambda-c_0,n})\cong\mathfrak{I}(L_{\lambda^2+1,n})$ si $(c_1)^2+4c_0<0$. ♦

§3. Retículos de ideales de álgebras de Lie $L=V\dot{+}\Sigma$ siendo V espacio vectorial y Σ una subálgebra abeliana de gl(V) actuando semisimplemente sobre V

La clase de las álgebras del enunciado tienen un interés especial debido a que, por el teorema de Towers (ver [34], teorema (7.5)), toda álgebra de Lie resoluble M posee alguna imagen homomorfa que pertenece a esta clase. Esto es claro sin más que considerar $M/\Phi(M)$ donde $\Phi(M)$ es la subálgebra de Frattini de M. Entonces las álgebras de Lie del título son precisamente las álgebras de Lie L **resolubles y Φ-libres** ($\Phi(L)=0$).

Notemos que si las transformaciónes de Σ son singulares, entonces $Z(L)\neq 0$ y si Σ posee alguna transformación no-singular, entonces $Z(L)=0$.

En este párrafo analizaremos en primer lugar algunas características generales acerca de la estructura de esta clase de álgebras que nos ayudarán a conocer la distribución de sus ideales minimales y la acción de determinados elementos del álgebra sobre ellos. Después estudiaremos la estructura de las álgebras de Lie que tienen retículo isomorfo con ellas. Se han obtenido condiciones necesarias para que un álgebra de Lie tenga el mismo retículo de ideales que un álgebra de Lie Φ-libre y resoluble. Como corolario de esto, llegaremos a probar que la clase de las álgebras de Lie Φ-libres y resolubles se conserva por isomorfismos de retículos de ideales en cualquiera de los siguientes casos:

1) Las transformaciones de Σ son singulares.

2) $\dim \Sigma > 1$, la subálgebra Σ tiene alguna transformación no-singular y ó bien $\dim \Sigma$ es impar ó bien $\bigcap_{f\in\Sigma} L_1(f)=0$.

En el caso de cuerpos algebraicamente cerrados y $\dim \Sigma > 1$, se cumple siempre que $\bigcap_{f\in\Sigma} L_1(f)=0$ y probaremos que si dos álgebras de este tipo tienen retículos de ideales isomorfos, han de tener la misma dimensión. En el caso de que Σ contenga alguna transformación no-singular, $\bigcap_{f\in\Sigma} L_1(f)\neq 0$ y $\dim \Sigma$ par se consigue demostrar que las álgebras que tienen retículo isomorfo con una de este tipo han de cumplir que $L/Z(L)$ pertenezca a esta clase de álgebras.

Por último señalar que todos los casos mencionados anteriormente se pueden detectar en el retículo.

Sea entonces $L=V\dotplus\Sigma$ un álgebra de Lie cumpliendo

1) V espacio vectorial

2) Σ subálgebra abeliana de $gl(V)$ tal que $\dim \Sigma \geq 1$ (3.0)

3) Las transformaciones de Σ son semisimples

Notemos que L es resoluble. Además L es no abeliana por ser dim $\Sigma \geq 1$. Luego el radical de Jacobson de L, que denotaremos por J(L), es L^2 (ver [25], sección 3). Es claro que $L^2=[V,\Sigma]\leq V$ y por tanto L^2 es un ideal abeliano. Además por el teorema 10, p.81 de [19], V es completamente reducible como Σ-módulo. Luego se tiene que $L^2\leq$Zsocle(L). Consideramos ahora $L=L_0(\Sigma)\dot{+}L_1(\Sigma)$ la descomposición de Fitting de L relativa a $ad_L\Sigma$ (ver [19], p.39). Si llamamos $V_0=V\cap L_0(\Sigma)$ y $V_1=V\cap L_1(\Sigma)$, es inmediato que V_0 y V_1 son ideales de L y además $L_1(\Sigma)=V_1$. Sea ahora $L^{\infty}=\bigcap_{i=1}^{\infty} L^i$. Observar que $V_1=L^{\infty}$ y entonces $V=V_0\oplus L^{\infty}$. Además, como la acción de Σ sobre V es semisimple, $[V_0,\Sigma]=0$. Luego $L^{\infty}=L^2$, con lo cual L^{∞} está determinado reticularmente.

De lo anterior se deduce que L^{∞}=J(L)=L^2 y está contenido en Zsocle(L). Parece entonces conveniente comenzar por estudiar la localización y características de ideales minimales en álgebras de Lie M tales que M^{∞} sea abeliano.

SECCION 1ª: Algebras de Lie L tales que L^{∞} es abeliano

Proposición 3.1.(Winter [45], p.115) Sea L un álgebra de Lie tal que L^{∞} es abeliano. Entonces, L^{∞} es un suplemento de cada subálgebra de Cartan H de L. Además, una subálgebra H de L es subálgebra de Cartan de L si y sólo si es complemento de L^{∞}.

Demostración. Sea H una subálgebra de Cartan de L y sea $L=L_0(H)\dot{+}L_1(H)$ la descomposición de Fitting de L relativa a $ad_L H$. De las proposiciones 1 y 2, p.58 de [19] se deduce que $H=L_0(H)$ y además $[L_0(H),L_1(H)]\leq L_1(H)\leq L^{\infty}$. Luego $L_1(H)$ es abeliana y por tanto es un ideal de L. Por otro lado $L/L_1(H)\cong H$, luego $L/L_1(H)$ es nilpotente. De aquí se deduce que $L^{\infty}\leq L_1(H)$ y por tanto $L^{\infty}=L_1(H)$. ♦

Los siguientes resultados están en [7], y se añaden aquí por autocontenido.

Proposición 3.2.([7]) Sea L un álgebra de Lie tal que L^{∞} es abeliano. Entonces, $L^2=L^{\infty}\dot{+}H^2$ donde H es una subálgebra de Cartan de L. En particular, $L^2\cap H=H^2$.

Demostración. Por la proposición (3.1), $L=L^{\infty}\dot{+}H$. Por tanto $L^2=L^{\infty}\dot{+}H^2$.♦

Lema 3.3.([7]) Sea S una subálgebra nilpotente de un álgebra de Lie L y N un ideal de L. Si $N\cap L_0(S)=0$, entonces $N\leq L_1(S)$.

Demostración. Sea $N=N_0(S)\dot{+}N_1(S)$ la descomposición de Fitting de N relativa a $ad_L S$. Es claro que $N_0(S)\leq L_0(S)$ y $N_1(S)\leq L_1(S)$. Por hipótesis $N\cap L_0(S)=0$ y por tanto $N=N_1(S)\leq L_1(S)$. ♦

Proposición 3.4.([7]) Sea L un álgebra de Lie tal que L^{∞} es abeliano y N un ideal minimal de L. Entonces, $N\leq L^{\infty}$ ó $N\leq Z(L)$. En particular, $\mathrm{Zsocle}(L)\leq L^{\infty}\oplus Z(L)$, es decir, $\mathrm{Zsocle}(L)=Z(L)\oplus N_1\oplus\ldots\oplus N_r$ donde N_i son ideales minimales de L contenidos en L^{∞}.

Demostración. Supongamos que N no está contenido en L^{∞}. Entonces $N\cap L^{\infty}=0$. Sea ahora H una subálgebra de Cartan de L. De la proposición 1 de [19], p.57 y la proposición (3.1) se deduce que $L^{\infty}=L_1(H)$. Luego N no está contenido en $L_1(H)$. Aplicando ahora el lema (3.3), $N\cap H\neq 0$. Entonces $N\cap H$ es un ideal no nulo de H y por tanto $N\cap H\cap Z(H)\neq 0$ (ver [31], proposición 7). Sea $0\neq x\in N\cap H\cap Z(H)$. Es claro que $[x,L]=[x,H]+[x,L^{\infty}]=0$ ya que $x\in Z(H)$ y $[x,L^{\infty}]\leq N\cap L^{\infty}=0$. Por tanto $N\cap Z(L)\neq 0$ y de aquí $N\leq Z(L)$ por ser N ideal minimal. ♦

Proposición 3.5.([7]) Sea L un álgebra de Lie tal que L^{∞} es abeliano y N un ideal minimal de L no contenido en Z(L). Entonces, cada subálgebra de Cartan H de L posee un elemento h que actúa no singularmente sobre N.

Demostración. Por las proposiciones (3.1) y (3.4) se tiene que $N \leq L^{\infty} = L_1(H)$. Ahora bien, como $H = L_0(H) = L_0(ad_L h)$ y $L_1(H) = L_1(ad_L h)$ para algún $h \in H$ (ver [3]) donde L_0 y L_1 son las componentes de Fitting de L relativas a $ad_L h$, el resultado es cierto. ♦

Proposición 3.6.([7]) Sea L un álgebra de Lie tal que L^2 es abeliano y N un ideal minimal de L tal que $N \leq L^2$. Entonces para cada $h \in H$ se tiene que $N \leq C_L(h)$ ó $N \cap C_L(h) = 0$ donde H es cualquier subálgebra de Cartan de L. Es decir, la actuación de cada elemento de cualquier subálgebra de Cartan de L sobre los ideales minimales de L es ó trivial o no-singular.

Demostración. Sea H una subálgebra de Cartan de L. Por la proposición (3.1), $L = L^{\infty} \dot{+} H$. Luego $L = L^2 + H$. Sea ahora $0 \neq h \in H$. Veamos que $[N, h]$ es un ideal de L. Como $[N, h] \leq N \leq L^2$ y L^2 es abeliano, tenemos que $[[N, h]L^2] = 0$. Luego

$$[[N, h]L] \leq [[N, h]H] + [[N, h]L^2] = [[N, h]H]$$

Por otro lado, haciendo uso de la Identidad de Jacobi y teniendo en cuenta que L^2 es abeliana, la siguiente cadena es cierta

$$[[N, h]H] \leq [[H, N]h] + [[h, H]N] = [[H, N]h] \leq [N, h]$$

Luego $[[N, h]L] \leq [N, h]$ y por tanto $[N, h]$ es ideal de L. Como N es minimal, llegamos a $[N, h] = 0$ ó $[N, h] = N$ de donde el resultado es cierto. ♦

Corolario 3.7.([7]) Sea L un álgebra de Lie tal que $L^2 \leq$Zsocle(L). Sea H una subálgebra de Cartan cualquiera de L. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

(i) $L=L^{\infty}\dotplus H$

(ii) $L^2=L^{\infty}\dotplus H^2$ y $L^2\cap H=H^2=L^2\cap Z(L)$

(iii) Zsocle(L)=$L^{\infty}\oplus Z(L)$

Demostración. De la proposición (3.1) se sigue (i). Para probar (ii) basta aplicar (3.2) quedando por ver que $H^2=L^2\cap Z(L)$. Como $Z(L)\leq H$, es claro que $L^2\cap Z(L)\leq L^2\cap H=H^2$. Por otro lado, como $L^2\leq$Zsocle(L) tenemos que $H^2=N_1\oplus\ldots\oplus N_r$ donde N_i son ideales minimales de L. Ahora, aplicando (3.6), tenemos que para cada $1\leq i\leq r$ y $h\in H$ $[N_i,h]=0$ ó $[N_i,h]=N_i$. Como H es nilpotente llegamos a $[N_i,h]=0$ y por tanto $H^2=L^2\cap Z(L)$. El apartado (iii) se sigue de (3.4). ♦

Teniendo en cuenta (3.7) y las notas al comienzo de párrafo se tiene el siguiente resultado:

Corolario 3.8. Sea $L=V\dotplus\Sigma$ cumpliendo (1), (2) y (3) de (3.0) Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

(i) $0\neq L^2\leq V$.

(ii) L^2 es abeliano.

(iii) $Z(L)\leq V$ y Zsocle(L)=$V=L^{\infty}\oplus Z(L)=L^2\oplus Z(L)$. En particular $V\cap L_0(\Sigma)=Z(L)$.

(iv) L es Φ-libre, resoluble y dimL/Zsocle(L)≥ 1. Además, toda álgebra de Lie cumpliendo las anteriores condiciones se puede construir de esta manera. ♦

SECCION 2ª: Caso dim $\Sigma = 1$

En esta sección nos vamos a ocupar del estudio del retículo de ideales de la clase de las álgebras construidas como extensión escindible de un espacio vectorial por una aplicación lineal semisimple no nula. Por el teorema de Towers, esta clase de álgebras coincide con con la clase de las álgebras de Lie **resolubles y Φ-libres** tales que **$\dim L/Zsocle(L)=1$**. Se ha conseguido determinar reticularmente las álgebras de este tipo construidas mediante aplicaciones singulares. Además se llega a probar que si $L=V\dot{+}(f)$ es un álgebra de Lie de este tipo, $\mathfrak{I}(L)$ determina el número de componentes primarias de V respecto de f, la multiplicidad de los factores irreducibles del polinomio característico de f y la componente primaria nula así como su dimensión.

Llamaremos Radical de Jacobson, $J(\mathfrak{I})$, de un retículo $\mathfrak{I}$ al elemento intersección de todos los co-átomos y llamaremos zócalo de $\mathfrak{I}$, Socle($\mathfrak{I}$), al elemento unión de todos los átomos.

Definicion 3.9. Un retículo $\mathfrak{I}$ diremos que es un **E.S-retículo** si satisface las siguientes condiciones:

(E.S.1) El intervalo $[J(\mathfrak{I}):1]$ es abeliano.

(E.S.2) $J(\mathfrak{I})$ está contenido en Socle($\mathfrak{I}$).

(E.S.3) [Socle($\mathfrak{I}$):1] tiene longitud 1.

Teorema 3.10. Sea L un álgebra de Lie. Entonces **$\mathfrak{I}(L)$ es un E.S-retículo** si y sólo si L es de uno de los siguientes tipos:

(i) L es extensión escindible de un espacio vectorial V por una transformación lineal f semisimple no nula. Además, $\mathfrak{I}(L)$ determina los siguientes elementos:

1) El número de componentes primarias de V respecto de f.

2) Las multiplicidades de los factores irreducibles del polinomio característico de f.

3) La componente primaria nula de f y su dimensión.

(ii) L es extensión escindible de un espacio vectorial W por un álgebra de Lie simple S tal que W es un S-módulo fiel. Además, $\mathfrak{I}(L)$ determina los siguientes elementos:

1) El número de factores irreducibles no isomorfos de W.

2) La multiplicidad de los factores irreducibles isomorfos de W.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{I}(L)$ es E.S-retículo. Notemos que $J(\mathfrak{I}(L))=J(L)$ es nilpotente (ver [25]). Luego por (E.S.2), (E.S.1) y (1.6) tenemos $Soc(\mathfrak{I}(L))/J(L)$ es abeliano. Como J(L) es nilpotente, se tiene que $Socle(\mathfrak{I}(L))$ es resoluble. Por tanto $Socle(\mathfrak{I}(L))=Zsocle(L)$. Por (E.S.3) L/Zsocle(L) es 1-dimensional o simple.

Supongamos en primer lugar que L/Zsocle(L) es 1-dimensional. Entonces $L=Zsocle(L)\dotplus (x)$ y x actúa semisimplemente sobre Zsocle(L) (ver [17]). Por tanto L es como en (i).

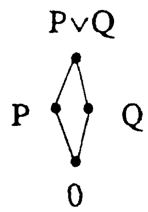
Si L/Zsocle(L) es simple, por el teorema de Levi $L=Zsocle(L)\dotplus S$ donde S es un álgebra de Lie simple. Notemos que $C_L(Zsocle(L))$ es un ideal de L que contiene a Zsocle(L) por ser Zsocle(L) abeliano. Luego $C_L(Zsocle(L))=L$ ó $C_L(Zsocle(L))=Zsocle(L)$. Si $C_L(Zsocle(L))=L$, entonces S es un ideal de L. Luego como S es simple, se tiene que $S\leq Socle(\mathfrak{I}(L))=Zsocle(L)$ lo cual es una contradición. Entonces $C_L(Zsocle(L))=Zsocle(L)$. De aquí se deduce que Zsocle(L) es S-módulo fiel. Por tanto L es como en (ii).

Probemos ahora las últimas afirmaciones de (i) y (ii). Para ello veamos que $Socle(\mathfrak{I}(L))$ debe tener una única descomposición $Socle(\mathfrak{I}(L))=C_1\vee\ldots\vee C_r$ verificando:

(i) $C_i\wedge(C_1\vee\ldots C_{i-1}\vee C_{i+1}\vee\ldots\vee C_r)=0$ para todo $i=1,\ldots,r$.

(ii) Los intervalos $[0:C_i]$ son abelianos.

(iii) Dados P y Q átomos de $\mathfrak{S}(L)$ tales que $P\leq C_i$ y $Q\leq C_j$ con $i\neq j$, el intervalo $[0:P\vee Q]$ de $\mathfrak{S}(L)$ es



Para el caso (i), hemos probado que $L=\text{Zsocle}(L)\dot{+}(x)$. Entonces las componentes primarias, $C_1,\ldots,C_r$, de la acción de x sobre Zsocle(L) son ideales de L y claramente verifican la descomposición anterior. Veamos que esta es la única descomposición posible cumpliendo (i), (ii) y (iii). Sea $\text{Socle}(\mathfrak{S}(L))=V_1\vee\ldots\vee V_s$ una otra descomposición. Entonces como hemos visto que $\text{Socle}(\mathfrak{S}(L))=\text{Zsocle}(L)$ tenemos $\text{Zsocle}(L)=V_1\oplus\ldots\oplus V_s$ donde los ideales V_i verifican:

a) El retículo de subespacios invariantes por x de V_i es abeliano.

b) Dados P, Q subespacios irreducibles tales que $P\leq V_i$ y $Q\leq V_j$ se tiene que el retículo de subespacios de $P\oplus Q$ es $\{0,P,Q,P\oplus Q\}$.

De (a) y el lema (2.1), se deduce que el polinomio mínimo de x sobre cada V_i, que denotaremos por π_i, es irreducible. De (b) se deduce que $\pi_i\neq\pi_j$ si $i\neq j$. Luego $V_1,\ldots,V_s$ son las componentes primarias de Zsocle(L) respecto de x (ver [19], p.42). Por tanto s=r y $V_i=C_j$. Luego el número de componentes primarias está determinado por el retículo. Además, notemos que las multiplicidades de los factores irreducibles del polinomio característico coinciden con las longitudes de los intervalos $[0:C_i]$ lo que prueba (i)(2). Notemos que la componente nula de Zsocle(L) es el complemento C=Z(L) de J(L) en Zsocle(L) y que su dimensión coincide con la longitud del intervalo $[0:C]$.

Para el caso (ii), hemos probado que Zsocle(L) es un S-módulo fiel y S simple. Luego por el teorema de Weyl tenemos que Zsocle(L) es suma directa de S-módulos irreducibles. Escribamos $\text{Zsocle}(L)=W_1^{(e_1)}\oplus\ldots\oplus W_r^{(e_r)}$ siendo $W_i^{(e_i)}$ la suma directa de e_i copias de un S-módulo irreducible y fiel W_i para cada $1\leq i\leq r$ y W_i no isomorfo con W_j si $i\neq j$. Es inmediato que esta descomposición cumple (i), (ii) y (iii). Además si $\mathrm{Socle}(\mathfrak{I}(L))=V_1\vee\ldots\vee V_s$ es una otra descomposición, tenemos que $\mathrm{Zsocle}(L)=V_1\oplus\ldots\oplus V_s$ donde los ideales V_i verifican:

a) El retículo de los S-módulos de V_i es abeliano.

b) Dados P, Q S-módulos irreducibles tales que $P\leq V_i$ y $Q\leq V_j$ se tiene que el retículo de S-módulos de $P\oplus Q$ es $\{0, P, Q, P\oplus Q\}$.

Entonces si R es un S-módulo irreducible tal que $R\leq V_i$, por Jordan-Hölder se tiene que $R\cong W_j$ para algún $1\leq j\leq r$. Si R no está contenido en $W_j^{(e_j)}$, se tiene que $R\cap W_j^{(e_j)}=0$. Sea $\mathrm{Zsocle}(L)=R\oplus W_j^{(e_j)}\oplus R_1\ldots\oplus R_s$ una descomposición en irreducibles. Como $\mathrm{Zsocle}(L)=W_1^{(e_1)}\oplus\ldots\oplus W_r^{(e_r)}$, aplicando de nuevo Jordan-Hölder llegamos a $W_j\cong R\cong W_i$ para algún $i\neq j$, lo cual es una contradición. De aquí se deduce que $V_i\leq W_j^{(e_j)}$. Por tanto, $s=r$ y $V_i=W_j^{(e_j)}$. Luego el número de S-módulos irreducibles no isomorfos de Zsocle(L) está determinado por el retículo. Notemos que la multiplicidad de los irreducibles isomorfos coincide con las longitudes de los intervalos $[0:W_i^{(e_i)}]$ lo que prueba (ii)(2).

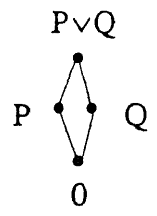
Probemos ahora el recíproco. Sea L como (i). De (3.8) y teniendo en cuenta que $J(L)=L^2$, se deduce que $\mathfrak{I}(L)$ es E.S-retículo. Sea ahora $L=W\dotplus S$ del tipo (ii). Notemos que W es un ideal abeliano y que W=Rad(L)=Zsocle(L). Por ser W un S-módulo fiel, [W,S]=W. De aquí se deduce que W es el radical de Jacobson de L (ver [25]) y W=Socle(L). Luego $\mathfrak{I}(L)$ es un E.S-retículo. ♦

NOTA 3.11: De la demostración de (3.10) se deduce que si $\mathfrak{I}$ es un E.S-retículo para el cual existe un álgebra de Lie L tal que $\mathfrak{I}\cong\mathfrak{I}(L)$, entonces el $\mathrm{Socle}(\mathfrak{I})$ debe de tener una única descomposición $\mathrm{Socle}(\mathfrak{I})=C_1\vee\ldots\vee C_r$ verificando:

(i) $C_i\wedge(C_1\vee\ldots C_{i-1}\vee C_{i+1}\vee\ldots\vee C_r)=0$ para todo $i=1,\ldots,r$.

(ii) Los intervalos $[0:C_i]$ son abelianos.

(iii) Dados P y Q átomos de $\mathfrak{I}$ tales que $P\leq C_i$ y $Q\leq C_j$ con $i\neq j$, el intervalo $[0:P\vee Q]$ de $\mathfrak{I}$ es



Corolario 3.12. Sea $L=V\dot{+}(g)$ donde g es una aplicación lineal semisimple de V con polinomio característico $\lambda^s\omega_1(\lambda)^{e_1}\ldots\omega_r(\lambda)^{e_r}$ y $\alpha:\mathcal{S}(L)\rightarrow\mathcal{S}(M)$ un isomorfismo de retículos. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

(i) Si g es no singular, entonces M es como en (3.10)(ii) con $W=W_1^{(e_1)}\oplus\ldots\oplus W_r^{(e_r)}$ siendo $W_i^{(e_i)}$ la suma directa de e_i copias de un S-módulo irreducible W_i de dimensión mayor que uno para cada $1\leq i\leq r$ y W_i no isomorfo con W_j si $i\neq j$ ó M es como en (3.10)(i) y f es no singular de polinomio característico $\delta_1(\lambda)^{e_1}\ldots\delta_r(\lambda)^{e_r}$.

(ii) Si g es singular, entonces M es como en (3.10)(i) y f es singular de polinomio característico $\lambda^s\delta_1(\lambda)^{e_1}\ldots\delta_r(\lambda)^{e_r}$

Además se tiene que

1) $\alpha(Z(L))=Z(M)$. En particular $\dim Z(L)=\dim Z(M)$.

2) $\alpha(L^2)=M^2$. ♦

En cuerpos algebraicamente cerrados se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.13. Sean L y M álgebras de Lie sobre un cuerpo algebraicamente cerrado tales que $L=V\dot{+}(f)$ donde f es una aplicación lineal semisimple de V de polinomio característico $\lambda^s(\lambda-c_1)^{e_1}\ldots\omega_r(\lambda-c_r)^{e_r}$ y M resoluble. Entonces $\mathcal{S}(L)$ y $\mathcal{S}(M)$ son isomorfos si y sólo si M es extensión escindible de un espacio vectorial W por una transformación lineal g semisimple de polinomio característico $\lambda^s(\lambda-t_1)^{e_1}\ldots\omega_r(\lambda-t_r)^{e_r}$.

Demostración. Si $\Im(L)\cong\Im(M)$ el resultado se sigue de (3.10). Para el recíproco, es fácil construir el isomorfismo teniendo en cuenta que: 1º) Zsocle(L)=$V=V_0\oplus V_1\oplus\ldots\oplus V_r$ (V_0=Z(L)) y Zsocle(M)=$W=W_0\oplus W_1\oplus\ldots\oplus W_r$ (W_0=Z(M)), 2º) para cada ideal P≤Zsocle(L), $P=P\cap V_0\oplus P\cap V_1\oplus\ldots\oplus P\cap V_r$, 3º) los ideales de L no contenidos en Zsocle(L) contienen a $V_1\oplus\ldots\oplus V_r$ y 4º) los intervalos $[0:V_i]$ y $[0:W_i]$ son isomorfos. ♦

Notemos que si un álgebra de Lie no resoluble tiene el mismo retículo de ideales que una del tipo $L=V\dot{+}(f)$, entonces la aplicación f ha de ser no singular. En la sección 4ª de este párrafo se darán ejemplos de álgebras del tipo (3.10)(ii) con el mismo retículo de ideales que una del tipo (3.10)(i) (ver (3.21)).

SECCION 3ª: Caso general

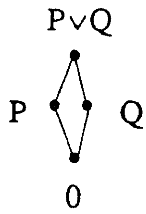
En esta sección se dan condiciones necesarias para que un álgebra de Lie tenga el mismo retículo de ideales que una Φ-libre y resoluble. Como consecuencia de esto, en cuerpos algebraicamente cerrados se ha determinado reticularmente la clase de las álgebras de Lie Φ-libres y resolubles con dimL/Zsocle(L)>1. Además, en este tipo de cuerpos, el retículo de ideales determina la dimensión del álgebra. En cuerpos arbitrarios se ha conseguido determinar reticularmente la clase de álgebras de este tipo construidas con un conjunto Σ de aplicaciones singulares.

Definición 3.14. Diremos que un retículo $\Im$ es **Φ-libre y resoluble** si satisface las siguientes condiciones:

(Φ.1) El intervalo $[J(\Im):1]$ es abeliano.

(Φ.2) $J(\Im)$ está contenido en $Socle(\Im)$.

(Φ.3) Dados P, Q átomos de $\Im$ tales que $P \leq J(\Im)$ y Q no contenido en $J(\Im)$, el intervalo $[0:P\vee Q]$ de $\Im$ es



Teorema 3.15. Sea L un álgebra de Lie. Entonces $\Im(L)$ **es Φ-libre y resoluble** si y sólo si L es de uno de los siguientes tipos:

(i) L es Φ-libre y resoluble.

(ii) $L/Z(L)$ es Φ-libre, no abeliana, L^{∞} abeliano, $\dim L/L^2 > 1$ y $0 \neq Z(L) < L^2$.

(iii) L nilpotente y $Z(L) = L^2$.

(iv) El intervalo $[J(\Im(L)):1]$ tiene longitud 1 y L es simple ó del tipo (3.10)(ii).

Demostración. Supongamos que $\Im(L)$ es un retículo Φ-libre y resoluble. Si $\mathrm{Socle}(\Im(L)) = L$, entonces L es suma directa de ideales luego $J(\Im(L)) = J(L) = 0$. De (Φ.1) y (1.2) se deduce que L es abeliana ó simple y por tanto L es como en (i) ó en (iv). Si la longitud de $[\mathrm{Socle}(\Im(L)):1]$ es 1, por el teorema (3.10) L es como en (i) ó en (iv).

Supongamos entonces que la longitud de $[\mathrm{Socle}(\Im(L)):1]$ es mayor que 1. Luego por (Φ.1) y (1.2), $L/J(L)$ es abeliana. Entonces L es resoluble por ser $J(L)$ nilpotente (ver [25]). Llegamos así a que $\mathrm{Socle}(\Im(L)) = \mathrm{Zsocle}(L)$. Como $J(L) = L^2$ (ver [25]), tenemos que $L^2 \leq \mathrm{Zsocle}(L)$ por (Φ.2). Sea H una subálgebra de Cartan de L. Por (3.7) se tiene que $L = L^{\infty} \dot{+} H$, que $\mathrm{Zsocle}(L) \cap H = Z(L)$ y $L^2 = L^{\infty} \oplus H^2$. De aquí se sigue que $\mathrm{Zsocle}(L/Z(L))$ tiene un complemento en $L/Z(L)$. Por tanto $L/Z(L)$ es Φ-libre por [34]. Si $H^2 = 0$ entonces tomando un complemento de $Z(L)$ en H, se encuentra que este es un complemento de $\mathrm{Zsocle}(L)$ en L. Por tanto L es Φ-libre por [34]. Luego L es como en (i). Supongamos entonces que que $H^2 \neq 0$. Probemos que $H^2=Z(L)$. Si $H^2 \neq Z(L)$, entonces podemos tomar un elemento $a \in Z(L) \setminus H^2$. Como $H^2 \neq 0$ existe un elemento $0 \neq b \in H^2$. Encontramos que F(a), F(b) y F(a+b) son ideales de L tales que $F(a) \oplus F(b)=F(a) \oplus F(a+b)=F(b) \oplus F(a+b)$, lo que contradice ($\Phi$.3). Por tanto $H^2=Z(L)$. Si H=L, entonces L es nilpotente y $Z(L)=L^2$. Luego L es como en (iii). Si $H \neq L$, entonces $Z(L) \leq L^2$ y $Z(L) \neq L^2$. Luego L es como en (ii).

Probemos ahora el recíproco. Sea L como en (i). Si L es abeliana, claramente $\mathfrak{I}(L)$ es un retículo Φ-libre y resoluble. Supongamos L no abeliana. Entonces por el teorema de Towers L admite una construcción del tipo $L=V \dotplus \Sigma$ cumpliendo (1), (2) y (3) de (3.0). Luego de (3.8) y (3.4) se deduce que $\mathfrak{I}(L)$ es un retículo Φ-libre y resoluble.

Sea ahora L del tipo (ii) y H una subálgebra de Cartan de L. Por ser L^∞ abeliano aplicando (3.1) tenemos que $L=L^\infty \dotplus H$. Como L/Z(L) es Φ-libre y resoluble, se tiene que $L/Z(L)=A/Z(L) \dotplus H/Z(L)$ donde $A=L^2+Z(L)$ y A/Z(L) es H/Z(L)-módulo complementado (ver [30]). Notemos que $L^2+Z(L)=L^\infty+Z(L)$ y por tanto L^2 es abeliano. Entonces L^2 es un H/Z(L)-módulo completamente reducible. Ahora bien, $H/Z(L) \cong ad_L H$. De aquí se deduce que $L^2 \leq$ Zsocle(L). Como $Z(L) \leq L^2$, aplicando (3.7) llegamos a $\text{Zsocle}(L)=L^2=L^\infty \oplus Z(L)$. Por tanto $\mathfrak{I}(L)$ es Φ-libre y resoluble.

Sea ahora L del tipo (iii). Tenemos que $0 \neq Z(L)=J(L)=L^2=\text{Zsocle}(L)$. Por tanto $\mathfrak{I}(L)$ es Φ-libre y resoluble. Si L es del tipo (iv) y no simple, por (3.10) tenemos que $\mathfrak{I}(L)$ es Φ-libre y resoluble y si L es simple es inmediato. ♦

(3.16) Elementos detectables en el retículo:

De la demostración de (3.15) se deduce que si $\mathfrak{I}$ es un retículo Φ-libre y resoluble para el cual existe un álgebra de Lie L tal que $\mathfrak{I} \cong \mathfrak{I}(L)$, entonces $J(\mathfrak{I})$ tiene un complemento C en Socle($\mathfrak{I}$). Denotamos por **d** la longitud del intervalo $[J(\mathfrak{I}):1]$ y por **c** la longitud del intervalo [0:C]. Observar que **d - c** es la longitud del intervalo $[\text{Socle}(\mathfrak{I}):1]$. El retículo $\mathfrak{I}$ nos permite afirmar que:

1) Si $J(\mathfrak{S})=0$ y $d>1$, entonces L es abeliana de dimensión d.

2) Si $J(\mathfrak{S})=0$ y $d=1$, entonces L es simple ó L es abeliana 1-dimensional.

3) Si $J(\mathfrak{S})\neq 0$ y ó [$d=1$] ó [$d>1$ y $d-c=1$], entonces $\mathfrak{S}$ es un E.S-retículo. La estructura de estas álgebras se da en (3.10).

4) Si $J(\mathfrak{S})\neq 0$, $d>1$ y $d-c>1$, entonces $J(\mathfrak{S}(L))=L^2$. Además, $\dim L/L^2=d$, $\dim L/\mathrm{Zsocle}(L)=d-c$ y:

A) Si $c\neq 0$, entonces $C=Z(L)$, $\dim Z(L)=c$ y, por el teorema de Towers, L se puede construir como extensión escindible de un espacio vectorial V por una familia de aplicaciones singulares Σ cumpliendo (1), (2) y (3) de (3.0) y $\dim\Sigma>1$.

B) Si $c=0$, entonces $Z(L)=\Phi(L)$ y no se puede detectar en el retículo, en general, como muestran los ejemplos (3.22), (3.23) y (3.24).

(3.17) Algebras de Lie con el mismo retículo de ideales que una Φ-libre y resoluble:

Sea L un álgebra de Lie Φ-libre y resoluble y M un álgebra de Lie no [Φ-libre y resoluble] con el mismo retículo de ideales que L. Entonces por (3.15) M ha de ser como en (ii), (iii) ó en (iv) de (3.15).

En el ejemplo (3.21), se muestra una tal álgebra M verificando (iv).

Supongamos entonces que M es como en (ii) ó (iii). Notemos que en ambos casos $\mathrm{Zsocle}(M)=M^2$. Luego L es tal que $L^2=\mathrm{Zsocle}(L)$. De aquí se deduce que $Z(L)=0$ (ver (3.8)). Además, en este caso M ha de cumplir una condición adicional. En efecto, en el lema (3.18) se prueba que el álgebra L posee un ideal verificando: 1º) está contenido en J(L), 2º) está contenido en todo ideal no contenido en Zsocle(L). Además es el único ideal contenido en J(L) maximal respecto a la 2ª condición.

Luego M ha de poseer un ideal cumpliendo las condiciones anteriores y además debe de estar por encima de Z(M). Si M es del tipo (iii) este ideal es precisamente Z(M) y esto nos conduce a que M/K, siendo Z(M)/K un factor principal de M, es un álgebra de Heisenberg generalizada. Luego en particular $\dim M/M^2$ ha de ser par (ver [Cap.0, §2]).

Si M es del tipo (ii), el ideal anterior ha de contener al Z(M) también. Además, las subálgebras de Cartan de M han de ser como en el caso anterior. Luego $\dim M/M^2$ ha de ser par.

Consecuencia: Si M es como en (ii) ó (iii) de (3.15) y tiene el mismo retículo de ideales que un álgebra de Lie Φ-libre y resoluble, entonces $\dim M/M^2$ ha de ser par y las subálgebras de Cartan H de M han de ser tales que H/K sean álgebras de Heisenberg generalizadas para cualquier ideal K con Z(H)/K factor principal de H. Encontraremos un ejemplo de una tal M en (3.22), (3.23) y (3.24).

Lema 3.18. Sea L un álgebra de Lie Φ-libre y resoluble. Entonces $\bigcap_{h\in H\setminus Z(L)} L_1(h)$ donde H es una subálgebra de Cartan de L verifica las siguientes propiedades:

(i) $\bigcap_{h\in H\setminus Z(L)} L_1(h)$ es un ideal de L.

(ii) Dado un ideal P no contenido en Zsocle(L), se tiene que $\bigcap_{h\in H\setminus Z(L)} L_1(h)\leq P$.

(iii) $\bigcap_{h\in H\setminus Z(L)} L_1(h)$ es el único ideal contenido en L^2 maximal respecto de la propiedad (ii).

Demostración. Notemos que, por (3.8), se tiene que $L=L^{\infty}\dot{+}H$ y $\mathrm{Zsocle}(L)=L^{\infty}\oplus Z(L)=L^2\oplus Z(L)$. Sea $h\in H\setminus Z(L)$ y $L=L_0(h)\dot{+}L_1(h)$ la descomposición de Fitting de L relativa a $\mathrm{ad}_L h$. Como $L_1(h)\leq L^2$ y L^2 es abeliano, tenemos que $L_1(h)$ es un ideal de L (ver [19]) lo que prueba (i).

Probemos ahora (ii). Sea P un ideal no contenido en Zsocle(L) y $P=P_0(H)\dot{+}P_1(H)$ la descomposición de Fitting de P relativa a $\mathrm{ad}_L H$. Es claro que $P_0(H)\leq L_0(H)=H$ y $P_1(H)\leq L_1(H)=L^{\infty}$. Por el lema (3.3) tenemos que

$P_0(H)=P\cap H\neq 0$. Ahora bien, como P no está contenido en Zsocle(L), $P\cap H$ no puede estar contenido en Z(L). Luego existe un elemento $x\in P\cap(H\setminus Z(L))$. Como $[x,L]\leq P$, entonces $L_1(x)\leq[x,L]\leq P$. Por tanto $\bigcap_{h\in H\setminus Z(L)} L_1(h)\leq P$.

Sea ahora $S\leq L^2$ un elemento cumpliendo (ii). Tomamos $h\in H\setminus Z(L)$. Tenemos que $L_1(h)\dot{+}F(h)$ es un ideal de L. Efectivamente, por (3.6) dado P ideal minimal contenido en L^∞ se tiene que $[P,h]=0$ ó $P\leq L_1(h)$. Como $L^\infty\leq$Zsocle(L) y $H^2=0$, entonces $[h,L]=[h,L^\infty]\leq L_1(h)$ y por tanto $L_1(h)\dot{+}F(h)$ es ideal de L. Ahora bien, $L_1(h)\dot{+}F(h)$ no está contenido en Zsocle(L), luego $S\leq[h,L]\dot{+}F(h)$ y como $S\leq L^2$ llegamos a $S\leq L_1(h)$. Por tanto $S\leq\bigcap_{h\in H\setminus Z(L)} L_1(h)$ lo que prueba (iii). ♦

Una consecuencia inmediata de (3.15), (3.16) y (3.17) es el siguiente corolario:

Corolario 3.19. Sea $L=V\dot{+}\Sigma$ un álgebra de Lie cumpliendo (1), (2) y (3) de (3.0) y $\dim\Sigma>1$ Sea $\alpha:\mathfrak{I}(L)\to\mathfrak{I}(M)$ un isomorfismo de retículos de ideales. Entonces se tiene que $M=W\dot{+}\Sigma_1$ cumpliendo (1), (2) y (3) de (3.0) en los siguientes casos:

(i) Si para cada $f\in\Sigma$ la aplicación f es singular.

(ii) Si existe $f\in\Sigma$ tal que f es no-singular y ó bien $\dim\Sigma$ es impar ó bien $0=\bigcap_{f\in\Sigma} L_1(f)$.

Además si se cumple (i) ó (ii), entonces:

1) $\alpha(Z(L))=Z(M)$. En particular, $\dim Z(L)=\dim Z(M)$.

2) $\alpha(L^2)=M^2$ y $\dim\Sigma=\dim\Sigma_1$.

3) $\alpha(\bigcap_{f\in\Sigma} L_1(f))=\bigcap_{f\in\Sigma_1} L_1(f)$. ♦

Veamos ahora que sucede si *el cuerpo base F es algebraicamente cerrado*. Sea $L=V\dot{+}\Sigma$ un álgebra de Lie cumpliendo (1), (2) y (3) de (3.0) y $\dim\Sigma>1$. Como F es algebraicamente cerrado, para cada $f\in\Sigma$ tenemos que el polinomio mínimo de f es $(\lambda-\alpha_1(f))\ldots(\lambda-\alpha_r(f))$. Sea ahora $V=V_1\dot{+}\ldots\dot{+}V_m$ la descomposición de V en componentes primarias relativa a Σ. Notemos que los V_i son ideales de L. Es claro que f actúa escalarmente sobre cada V_i y por tanto es combinación lineal de los endomorfismos $f_1,\ldots,f_m$ definidos por $f_i(V_j)=\delta_{ij}$.

De todo lo anterior se deduce que *$\dim\Sigma\leq m$ y que los ideales minimales de L son 1-dimensionales*. Por otro lado, si tomamos $P=F(a)$ ideal minimal y $f\in\Sigma$, tenemos que $f(a)=\alpha a$. Si $\alpha=0$, entonces $P\leq L_0(f)$. Si $\alpha\neq0$, sea $g\in\Sigma$. Es claro que $g(a)=\beta a$. La aplicación $[(\beta/\alpha)f-g]\in\Sigma$ y cumple que $F(a)\leq L_0([(\beta/\alpha)f-g])$. De aquí se deduce que $\bigcap_{f\in\Sigma}L_1(f)=0$. Además, se observa que cada V_i cumple:

(A) El retículo de subespacios Σ-invariantes de V_i es abeliano de longitud n_i.

(B) Para cada $i\neq j$ dados N_i, N_j subespacios Σ-irreducibles de L tales que $N_i\leq V_i$ y $N_j\leq V_j$, entonces el retículo de.subespacios Σ-invariantes de $N_i\oplus N_j$ es $\{0,N_i,N_j,N_i\oplus N_j\}$.

Luego Socle($\mathfrak{I}$(L)) tiene una descomposición, Socle($\mathfrak{I}$(L))$=V_1\vee\ldots\vee V_m$ cumpliendo (i), (ii) y (iii) de (3.11). De forma análoga a como se ve en la demostración (3.10) se prueba que una tal descomposición es única. De aquí se deduce que $\mathfrak{I}$(L) determina: 1º) el número de componentes primarias de V respecto de Σ y 2º) la dimensión de estas componentes.

Como consecuencia inmediata de (3.15), (3.19) y lo anterior, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.20. Sean L y M dos álgebras de Lie sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Supongamos que $L=V_1\dotplus\Sigma_1$ verificando (1), (2) y (3) de (3.0) y que $\dim\Sigma_1>1$. Sea $\alpha:\Im(L)\rightarrow\Im(M)$ un isomorfismo de retículos de ideales. Entonces $M=V_2\dotplus\Sigma_2$ cumple (1), (2) y (3) de (3.0), $\dim\Sigma_2=\dim\Sigma_1$ y además:

(i) $\alpha(L^2)=M^2$.

(ii) $\alpha(Z(L))=Z(M)$. En particular $\dim Z(L)=\dim Z(M)$.

(iii) El número y las dimensiones de las componentes primarias de V_1 respecto de Σ_1 y de V_2 respecto de Σ_2 coinciden.

(iv) $\dim L/L^2=\dim M/M^2$ y $\dim L^2=\dim M^2$. En particular se tiene que $\dim L=\dim M$. ♦

El corolario (3.20) apunta hacia la posibilidad de que L y M puedan ser isomorfas. Esto no es cierto como prueba el ejemplo (3.25). Además, en cuerpos no algebraicamente cerrados si dos álgebras de Lie Φ-libres y resolubles con $\dim L/Zsocle(L)\geq 1$ tienen el mismo retículo de ideales, las álgebras no tienen, en general, la misma dimensión como prueba el ejemplo (3.26).

SECCION 4ª: Ejemplos

Ejemplo 3.21. *L Φ-libre y resoluble y M como en (3.15)(iv) tal que $\Im(L)\cong\Im(M)$.*

Sea $L=V\dotplus(f)$ donde f es una transformación cíclica, semisimple y no singular con n divisores elementales.

Sea $M=W\dotplus S$ donde S un álgebra de Lie simple y W es un S-módulo tal que la descomposición de W en S-módulos irreducibles, $W=W_1\dotplus\ldots\dotplus W_n$, cumple que para cada $i=1,\ldots,n$ los W_i tienen dimensión mayor que 1 y son no isomorfos dos a dos.

Es inmediato probar que $\Im(L)$ y $\Im(M)$ son isomorfos. ♦

Ejemplo 3.22. *L Φ–libre y resoluble y M como en (3.15)(iii) tal que* $\mathfrak{I}(L)\cong\mathfrak{I}(M)$.

Sea $F=\mathbb{R}$. Consideramos el álgebra de Lie 4-dimensional L con base $\{e_1,e_2,f,g\}$ y tabla de productos no nulos

$$[e_1,f]=e_1 \qquad [e_2,f]=e_2 \qquad [e_1,g]=e_2 \qquad [e_2,g]=-e_1-e_2$$

Notemos que $L=V\dotplus\Sigma$ siendo $V=\mathbb{R}^2$ y $\Sigma=\mathbb{R}(f,g)$. El retículo de ideales de L es

$$\begin{array}{l} L \\ \vdots \\ L^2=L^\infty=\mathbb{R}(e_1,e_2) \\ | \\ 0 \end{array}$$

donde el intervalo $[L^2:L]$ de $\mathfrak{I}(L)$ es isomorfo al retículo de subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

Sea M el álgebra de Heisenberg 3-dimensional real. Entonces M tiene una base $\{a_1,f_1,z\}$ con la siguiente tabla de productos no nulos

$$[a_1,f_1]=z$$

Notemos que M es como en (3.15)(iii). El retículo de ideales de M es

$$\begin{array}{l} M \\ \vdots \\ M^2=\mathbb{R}(z) \\ | \\ 0 \end{array}$$

donde el intervalo $[M^2:M]$ de $\mathfrak{I}(M)$ es isomorfo al retículo de subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

Es inmediato que $\mathfrak{I}(L)$ y $\mathfrak{I}(M)$ son isomorfos. Notemos además que M es nilpotente y L es no nilpotente. Luego *la nilpotencia no se conserva por isomorfismos de retículos de ideales*. Probaremos más adelante que esto solamente ocurre en el caso de álgebras de Lie nilpotentes M tales que $\dim M/M^2$ sea par. ♦

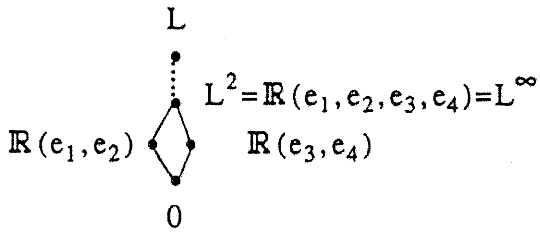
Ejemplo 3.23. *L Φ-libre y resoluble y M como en (3.15)(ii) tal que $\mathfrak{I}(L)\cong\mathfrak{I}(M)$.*

Sea $F=\mathbb{R}$. Consideramos el álgebra de Lie 6-dimensional L con base $\{e_1,e_2,e_3,e_4,f,g\}$ y tabla de productos no nulos

$$[e_1,f]=e_2 \quad [e_2,f]=-e_1 \quad [e_3,f]=e_3-e_4 \quad [e_4,f]=e_3+e_4$$

$$[e_1,g]=e_1-e_2 \quad [e_2,g]=e_1+e_2 \quad [e_3,g]=e_4 \quad [e_4,g]=-e_3$$

Notemos que $L=V\dotplus\Sigma$ siendo $V=\mathbb{R}^4$ y $\Sigma=\mathbb{R}(f,g)$. El retículo de ideales de L es



donde el intervalo $[L^2:L]$ de $\mathfrak{I}(L)$ es isomorfo al retículo de subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

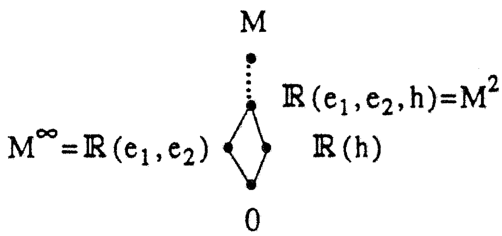
Sea ahora M el álgebra de Lie 5-dimensional con base $\{e_1,e_2,f,g,h\}$ y tabla de productos no nulos

$$[e_1,f]=e_2 \quad [e_2,f]=-e_1 \quad [e_1,g]=e_1-e_2 \quad [e_2,g]=e_1+e_2 \quad [f,g]=h$$

Notemos que $M=M^\infty\dotplus H$ siendo $M^\infty=\mathbb{R}(e_1,e_2)\cong\mathbb{R}^2$ y $H=\mathbb{R}(f,g,h)$ el álgebra de Heisenberg 3-dimensional. Además

$$H^2=\mathbb{R}(h)=Z(M)=\Phi(M) \text{ y } \mathrm{Zsocle}(M)=M^2=\mathbb{R}(e_1,e_2,h)=M^\infty\oplus H^2$$

Luego M es como en (3.15)(ii). El retículo de ideales de M es



donde el intervalo $[M^2:M]$ de $\mathfrak{I}(M)$ es isomorfo al retículo de subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

Es inmediato que $\mathfrak{I}(L)$ y $\mathfrak{I}(M)$ son isomorfos. Notemos además que $\Phi(L)=0$ y que $\Phi(M)=Z(M)\neq 0$. Luego *el ideal de Frattini no se conserva por isomorfismos de retículos de ideales.* ♦

Ejemplo 3.24. *L Φ-libre y resoluble y M como en (3.15)(iii) tal que $\mathfrak{I}(L)\cong\mathfrak{I}(M)$.*

Sea $F=\mathbb{Q}$. Consideramos el álgebra de Lie 12-dimensional L con base $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,f_1,f_2,f_3,f_4\}$ y tabla de productos no nulos

$[e_1,f_1]=e_1$	$[e_2,f_1]=e_2$	$[e_3,f_1]=e_3$	$[e_4,f_1]=e_4$
$[e_5,f_1]=e_5$	$[e_6,f_1]=e_6$	$[e_7,f_1]=e_7$	$[e_8,f_1]=e_8$
$[e_1,f_2]=e_2$	$[e_2,f_2]=e_3$	$[e_3,f_2]=e_4$	$[e_4,f_2]=-e_1$
$[e_5,f_2]=e_6$	$[e_6,f_2]=e_7$	$[e_7,f_2]=e_8$	$[e_8,f_2]=-e_5$
$[e_1,f_3]=e_3$	$[e_2,f_3]=e_4$	$[e_3,f_3]=-e_1$	$[e_4,f_3]=-e_2$
$[e_5,f_3]=e_7$	$[e_6,f_3]=e_8$	$[e_7,f_3]=-e_5$	$[e_8,f_3]=-e_6$
$[e_1,f_4]=e_4$	$[e_2,f_4]=-e_1$	$[e_3,f_4]=-e_2$	$[e_4,f_4]=-e_3$
$[e_5,f_4]=e_8$	$[e_6,f_4]=-e_5$	$[e_7,f_4]=-e_6$	$[e_8,f_4]=-e_7$

Notemos que $L=V\dotplus\Sigma$ siendo $V\cong\mathbb{Q}^8$ y $\Sigma=\mathbb{Q}(f_1,f_2,f_3,f_4)$. Además, $f_3=(f_2)^2$ y $f_4=(f_2)^3$. Luego los elementos de Σ son polinomiales en f_2 y por tanto se tiene que P es Σ-irreducible si y sólo si P es f_2-irreducible. Además, las transformaciones de Σ son isomorfismos. Luego para todo P ideal de L se tiene que ó bien $L^2\leq P$ ó bien $P\leq L^2$. Entonces el retículo de ideales de L es

$$\begin{array}{l} L \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet\ L^2=L^\infty=\mathbb{Q}(e_i:1\leq i\leq 8) \\ \vdots \\ \bullet \\ 0 \end{array}$$

donde el intervalo $[0:L^2]$ de $\mathfrak{I}(L)$ es isomorfo al retículo de subespacios vectoriales de $\mathbb{Q}^2$ y el intervalo $[L^2:L]$ de $\mathfrak{I}(L)$ es isomorfo al retículo de subespacios vectoriales de $\mathbb{Q}^4$.

Sea ahora M el álgebra de Lie 6-dimensional con base $\{a_1,f_1,a_2,f_2,z_1,z_2\}$ y tabla de productos no nulos

$$[a_1,f_1]=z_1 \quad [a_1,f_2]=z_2 \qquad [f_1,a_2]=z_2 \qquad\quad [a_2,f_2]=z_1$$

Notemos que M es como en (3.15)(iii). Es una simple comprobación que para cada ideal P de M se tiene que ó bien $M^2 \leq P$ ó bien $P \leq M^2$. Entonces el retículo de ideales de M es

$$\begin{array}{l} M \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet\ M^2=\mathbb{Q}(z_1,z_2) \\ \vdots \\ \bullet \\ 0 \end{array}$$

donde el intervalo $[0:M^2]$ de $\mathfrak{I}(M)$ es isomorfo al retículo de subespacios vectoriales de $\mathbb{Q}^2$ y el intervalo $[M^2:M]$ de $\mathfrak{I}(M)$ es isomorfo al retículo de subespacios vectoriales de $\mathbb{Q}^4$.

Es inmediato que $\mathfrak{I}(L)$ y $\mathfrak{I}(M)$ son isomorfos. ♦

Ejemplo 3.25. *L y M álgebras de Lie sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, Φ-libres, resolubles, $\dim L/Zsocle(L)>1$, no isomorfas y tales que $\mathfrak{I}(L)\cong\mathfrak{I}(M)$.*

Sea $F=\mathbb{C}$. Consideramos el álgebra de Lie 5-dimensional L con base $\{e_1,e_2,e_3,f_1,f_2\}$ y tabla de productos no nulos

$$[e_1,f_1]=e_1 \qquad [e_2,f_1]=e_2 \qquad [e_3,f_1]=e_3$$

$$[e_1,f_2]=e_1 \qquad [e_2,f_2]=2e_2 \qquad [e_3,f_2]=3e_3$$

Notemos que $L=V\dot{+}\Sigma$ siendo $V=\mathbb{C}^3$ y $\Sigma=\mathbb{C}(f_1,f_2)$. Los ideales de L son:

1) 1-dimensionales: $\mathbb{C}(e_1)$, $\mathbb{C}(e_2)$, $\mathbb{C}(e_3)$

2) 2-dimensionales: $\mathbb{C}(e_1,e_2)$, $\mathbb{C}(e_1,e_3)$, $\mathbb{C}(e_2,e_3)$

3) 3-dimensionales: $\mathbb{C}(e_1,e_2,-3f_1+f_2)$, $\mathbb{C}(e_1,e_3,-2f_1+f_2)$

$\mathbb{C}(e_2,e_3,f_1-f_2)$, $\mathbb{C}(e_1,e_2,e_3)$

4) El resto de los ideales son maximales y por tanto contienen a $\mathbb{C}(e_1,e_2,e_3)=L^2$. El intervalo $[L^2{:}L]$ es además abeliano de longitud 2.

Sea ahora el álgebra de Lie 5-dimensional M con base $\{a_1,a_2,a_3,g_1,g_2\}$ y tabla de productos no nulos

$$[a_1,g_1]=0 \qquad [a_2,g_1]=a_2 \qquad [a_3,g_1]=2a_3$$

$$[a_1,g_2]=2a_1 \qquad [a_2,g_2]=2a_2 \qquad [a_3,g_2]=a_3$$

Notemos que $M=W\dot{+}\Sigma_1$ siendo $W=\mathbb{C}^3$ y $\Sigma_1=\mathbb{C}(g_1,g_2)$. Los ideales de M son:

1) 1-dimensionales: $\mathbb{C}(a_1)$, $\mathbb{C}(a_2)$, $\mathbb{C}(a_3)$

2) 2-dimensionales: $\mathbb{C}(a_1,a_2)$, $\mathbb{C}(a_1,a_3)$, $\mathbb{C}(a_2,a_3)$

3) 3-dimensionales: $\mathbb{C}(a_1,a_2,g_1-2g_2)$, $\mathbb{C}(a_1,a_3,-2g_1+g_2)$

$\mathbb{C}(a_2,a_3,g_1)$, $\mathbb{C}(a_1,a_2,a_3)$

4) El resto de los ideales son maximales y por tanto contienen a $\mathbb{C}(a_1,a_2,a_3)=L^2$. El intervalo $[L^2{:}L]$ es además abeliano de longitud 2.

Claramente $\mathfrak{I}(L)$ y $\mathfrak{I}(M)$ son isomorfos y L no es isomorfa con M ya que $\Sigma_1\neq\Sigma$. ♦

Ejemplo 3.26. *L y M álgebras de Lie Φ-libres, resolubles, tales que $\mathfrak{I}(L)\cong\mathfrak{I}(M)$ y dimL≠dimM.*

Sea $F=\mathbb{Q}$. Consideramos el álgebra de Lie 6-dimensional L con base $\{e_1,e_2,e_3,e_4,f_1,f_2\}$ y tabla de productos no nulos

$$[e_1,f_1]=e_1 \qquad [e_2,f_1]=e_2 \qquad [e_3,f_1]=e_3 \qquad [e_4,f_1]=e_4$$

$$[e_1,f_2]=e_2 \qquad [e_2,f_2]=e_3 \qquad [e_3,f_2]=e_4 \qquad [e_4,f_2]=-e_1$$

Notemos que $L=V\dot{+}\Sigma$ siendo $V\equiv\mathbb{Q}^4$ y $\Sigma=\mathbb{Q}(f_1,f_2)$. El retículo de ideales de L es

$$\begin{array}{l} L \\ \vdots \\ L^2=L^\infty=\mathbb{Q}(e_1,e_2,e_3,e_4) \\ | \\ 0 \end{array}$$

donde el intervalo $[L^2:L]$ de $\mathfrak{I}(L)$ es isomorfo al retículo de subespacios vectoriales de $\mathbb{Q}^2$.

Sea ahora M el álgebra de Lie 4-dimensional con base $\{a_1,a_2,f_1,f_2\}$ y tabla de productos no nulos

$$[a_1,f_1]=a_1 \qquad [a_2,f_1]=a_2 \qquad [a_1,f_2]=a_2 \qquad [a_2,f_2]=-a_1$$

Notemos que $M=W\dot{+}\Sigma_1$ siendo $W=\mathbb{Q}^2$ y $\Sigma=\mathbb{Q}(f_1,f_2)$. El retículo de ideales de M es

$$\begin{array}{l} M \\ \vdots \\ M^2=M^\infty=\mathbb{Q}(a_1,a_2) \\ | \\ 0 \end{array}$$

donde el intervalo $[M^2:M]$ de $\mathfrak{I}(M)$ es isomorfo al retículo de subespacios vectoriales de $\mathbb{Q}^2$.

Claramente $\mathfrak{I}(L)$ y $\mathfrak{I}(M)$ son isomorfos y $\dim L=6\neq\dim M=4$. Notemos que las dimensiones de las componentes primarias tampoco se conservan ($\dim V=4\neq\dim W=2$). ♦

§4. Retículos de ideales de álgebras de Lie resolubles y nilpotentes

El objetivo de este párrafo es probar que la resolubilidad está determinada por el retículo de ideales excepto en el caso de que el retículo tenga un solo co-átomo (ver (3.21)). Además se da un resumen de los principales resultados obtenidos para retículos de ideales de álgebras de Lie nilpotentes que aparecerán en [7].

A) Resolubilidad

Sea entonces L un álgebra de Lie resoluble. Denotamos por J(L) el radical de Jacobson de L. Por la sección 3 de [25], es claro que $J(L)=L^2$. De aquí se deduce que $\mathfrak{I}(L/J(L))$ es un retículo abeliano de longitud $n=\dim L/L^2$. Veamos que esta propiedad determina las álgebras de Lie resolubles tales que $\dim L/J(L)>1$.

Teorema 4.1. Sea L un álgebra de Lie. Supongamos que $\mathfrak{I}(L)$ tiene más de un co-átomo. Entonces el intervalo $[J(\mathfrak{I}(L)):1]$ de $\mathfrak{I}(L)$ es abeliano si y sólo si L es resoluble. Además se tiene que $\dim L/L^2$ es precisamente la longitud de $[J(\mathfrak{I}(L)):1]$.

Demostración. Como $\mathfrak{I}(L)$ tiene más de un co-átomo, $[J(\mathfrak{I}(L)):1]$ es abeliano de longitud $n>1$. Entonces, aplicando (1.2), tenemos que L/J(L) es abeliana n-dimensional y por tanto resoluble ya que J(L) es nilpotente (ver [25], sección 3).

El recíproco es inmediato por la observación al comienzo de párrafo. ♦

Luego la resolubilidad está determinada por el retículo de ideales excepto en el caso de que el retículo tenga un solo co-átomo. Además, los resultados de los párrafos 1 y 3 nos permiten afirmar:

Teorema 4.2. Sea L un álgebra de Lie. Supongamos que $\mathfrak{I}(L)$ tiene más de un co-átomo y que el intervalo $[J(\mathfrak{I}(L)):1]$ de $\mathfrak{I}(L)$ es abeliano de longitud impar. Sea $\alpha:\mathfrak{I}(L)\to\mathfrak{I}(M)$ un isomorfismo de retículos de ideales. Entonces:

(i) $\alpha(L^2)=M^2$ y $\dim L/L^2=\dim M/M^2$

(ii) $\alpha(\Phi(L))=\Phi(M)$

Demostración. Por el teorema (4.1), L y M son resolubles. La afirmación (i) se deduce de (1.2) y (1.4). Veamos ahora (ii). Sea $\Phi(L)$ el ideal de Frattini de L. Por el corolario (7.7) de [34], se tiene que $\Phi(L)\leq L^2$. Entonces, el álgebra de Lie $L/\Phi(L)$ es Φ-libre y resoluble. Además, $\dim[(L/\Phi(L))/(L/\Phi(L))^2]=\dim(L/L^2)$ es impar. Aplicando ahora (3.15) y (3.19) tenemos que $M/\alpha(\Phi(L))$ es Φ-libre y resoluble. Luego por el corolario (4.4) de [34], tenemos que $\Phi(M)\leq\alpha(\Phi(L))$. Cambiando ahora los papeles de L y M llegamos a que $\Phi(L)\leq\alpha^{-1}(\Phi(M))$ lo que prueba el resultado. ♦

Si el cuerpo base F es algebraicamente cerrado conseguimos:

Teorema 4.3. Sean L y M álgebras de Lie sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Supongamos que $\mathfrak{I}(L)$ tiene más de un co-átomo y que el intervalo $[J(\mathfrak{I}(L)):1]$ de $\mathfrak{I}(L)$ es abeliano. Sea $\alpha:\mathfrak{I}(L)\rightarrow\mathfrak{I}(M)$ un isomorfismo de retículos de ideales. Entonces:

(i) $\alpha(L^2)=M^2$ y $\dim L/L^2=\dim M/M^2$

(ii) $\alpha(\Phi(L))=\Phi(M)$

Demostración. Análoga a (4.2) haciendo uso de (3.15) y (3.20). ♦

B) Nilpotencia

Corolario 4.4. Sea $\mathfrak{I}$ el retículo de ideales de un álgebra de Lie nilpotente. Entonces toda álgebra de Lie cuyo retículo sea $\mathfrak{I}$ ha de ser nilpotente en los siguientes casos:

(i) Si el intervalo $[J(\mathfrak{I}):1]$ de $\mathfrak{I}$ es de longitud impar mayor que 1.

(ii) Si el retículo $\mathfrak{I}$ tiene al menos un átomo y el cuerpo es algebraicamente cerrado. ♦

Por tanto, la clase de las álgebras de Lie nilpotentes es cerrada por isomorfismos de retículos de ideales en los siguientes casos:

(i) Si $\dim L/L^2 > 1$ y el cuerpo es algebraicamente cerrado.

(ii) Si $\dim L/L^2$ es impar y mayor que 1.

Además, también han sido estudiadas las siguientes cuestiones:

1) ***Estructura de un álgebra de Lie M no nilpotente con el mismo retículo de ideales que algún álgebra de Lie L nilpotente.*** En el caso de orden de nilpotencia 2, se han obtenido condiciones necesarias y suficientes para que L y M tenga retículos isomorfos. Además, en el cuerpo real y orden de nilpotencia 2, el problema ha sido resuelto: M ha de ser el álgebra de Lie 4-dimensional con base $\{a, b, e, f\}$ y tabla de productos

$$[a,b]=0;\ [a,e]=a;\ [a,f]=b;\ [b,e]=b;\ [b,f]=-a$$

y L es el álgebra de Heisenberg 3-dimensional.

En el caso general, se han obtenido condiciones necesarias sobre la estructura de M.

2) ***Elementos que se conservan por isomorfismos de retículos de ideales entre álgebras de Lie nilpotentes.*** Se ha probado que el retículo de ideales de un álgebra de Lie nilpotente L determina la clase de nilpotencia de L, las dimensiones de los factores de las series centrales ascendente y descendente y en particular, la dimensión de L. Pero el retículo de un álgebra nilpotente no determina el álgebra ya que se han encontrado ejemplos de álgebras de Lie nilpotentes no isomorfas con el mismo retículo de ideales.

CAPITULO II

ALGEBRAS DE LIE CON RETICULO DE IDEALES COMPLEMENTADO O LINEAL

En este capítulo elegimos dos tipos especiales de retículos: los complementados y los lineales. Nuestro objetivo es determinar las álgebras de Lie cuyo retículo de ideales sea complementado ó lineal.

En el párrafo 1, probamos que las álgebras de Lie con retículo de ideales **complementado** son precisamente las sumas directas de una semisimple y una abeliana. Determinamos también las álgebras de Lie con retículo **complementado y distributivo** que son las semisimples y las sumas directas de una semisimple y una abeliana 1-dimensional.

En el párrafo 2 encontramos condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra de Lie L tenga retículo de ideales **lineal**. La determinación completa de la estructura de L se obtiene en los siguientes casos:

1) Retículos de longitud 1: L ha de ser ó abeliana 1-dimensional ó simple.

2) Retículos de longitud 2: L ha de ser ó extensión escindible de un álgebra de Lie simple por un módulo irreducible y fiel ó extensión escindible de un espacio vectorial por una transformación cíclica y no singular de polinomio mínimo un irreducible.

3) L resoluble y Nil(L) abeliano.

4) L superresoluble. Notemos que, en particular, se clasifican las álgebras de Lie resolubles con retículo lineal en cuerpos algebraicamente cerrados.

5) L resoluble y real, con $\mathrm{Nil}(L)^2 \neq 0$ y con retículo de longitud 3.

6) L no resoluble con retículo de longitud 3 y centro no trivial.

§1. Retículos de ideales complementados

Un álgebra de Lie L se dice **reductiva** si su representación adjunta es semisimple. En cuerpos de característica cero esto es equivalente a que L sea suma directa de un álgebra de Lie semisimple S y una abeliana A. El centro de L es precisamente el ideal A y se cumple la siguiente propiedad relativa al retículo de sus ideales: para cada ideal P de L existe un otro ideal Q tal que $L=P\oplus Q$. Es decir que todo ideal de L tiene un *complemento*. Veamos que esta propiedad determina a las álgebras de Lie reductivas.

Teorema 1.1. Sea L un álgebra de Lie. Entonces, $\mathfrak{I}(L)$ es **complementado** si y sólo si L es **reductiva**.

Demostración. Sea L tal que $\mathfrak{I}(L)$ es complementado. Entonces $L=\mathrm{Zsocle}(L)\oplus S$ para algún ideal S de L. Para ver que L es reductiva basta con probar que $\mathrm{Zsocle}(L)=\mathrm{Rad}(L)$. Se tiene que

$$\mathrm{Rad}(L)=\mathrm{Zsocle}(L)\oplus(\mathrm{Rad}(L)\cap S)$$

Sea N un ideal minimal de $\mathrm{Rad}(L)\cap S$. Entonces $N\leq \mathrm{Rad}(L)\cap S\cap \mathrm{Zsocle}(L)=0$. Luego $\mathrm{Rad}(L)\cap S=0$ y por tanto $\mathrm{Zsocle}(L)=\mathrm{Rad}(L)$.

El recíproco es inmediato por la observación del comienzo del párrafo. ♦

El teorema (1.1) prueba que las álgebras de Lie reductivas están determinadas por su retículo de ideales. Este tipo de álgebras se construyen mediante dos importantes clases de álgebras de Lie: las abelianas y las semisimples. Los retículos de ideales de las primeras ya fueron estudiados en el Capítulo I. Veamos ahora que se puede decir sobre el retículo de las semisimples.

Definición 1.2. Se dice que un retículo $\mathfrak{S}$ es **distributivo** si cada terna A, B y C de elementos de $\mathfrak{S}$ cumple la siguiente identidad:

$$(A\vee B)\wedge(B\vee C)\wedge(C\vee A)=(A\wedge B)\vee(B\wedge C)\vee(C\wedge A) \qquad (1.3)$$

Ayudándonos del siguiente lema probaremos que el retículo de ideales de un álgebra de Lie semisimple es distributivo.

Lema 1.4.(Ore [26]) Sea L un álgebra de Lie y A, B y C ideales de L. Entonces

$$(A+B)\cap(B+C)\cap(C+A)=A\cap(B+C)+B\cap(C+A)+B\cap C+C\cap A$$

$$(A\cap B)+(B\cap C)+(C\cap A)=(A+(B\cap C))\cap(B+C)\cap(B+(C\cap A))\cap(C+A). \ \blacklozenge$$

Proposición 1.5. Sea L un álgebra de Lie semisimple. Entonces $\mathfrak{S}(L)$ es distributivo.

Demostración. Hay que probar que dados A, B y C ideales de L se cumple (1.3). Para ello basta con ver que

$$((A+B)\cap(B+C)\cap(C+A))/((A\cap B)+(B\cap C)+(C\cap A))$$

es abeliano ya que entonces

$$((A+B)\cap(B+C)\cap(C+A))^2\leq(A\cap B)+(B\cap C)+(C\cap A)$$

y como L es semisimple en un cuerpo de característica cero, tenemos que

$$((A+B)\cap(B+C)\cap(C+A))^2=(A+B)\cap(B+C)\cap(C+A)$$

De aquí la igualdad (1.3) se deduce de forma inmediata.

Probemos entonces la afirmación inicial. Denotamos por $T(A)=(A\cap(B+C))+B\cap C$; $T(B)=(B\cap(A+C))+A\cap C$; $T(C)=(C\cap(B+A))+B\cap A$. Es claro que

$$T(A)=(A+(B\cap C))\cap(B+C)$$

$$T(B)=(B+(A\cap C))\cap(A+C)$$

$$T(C)=(C+(B\cap A))\cap(B+A)$$

Aplicando ahora el lema de Ore se tiene que

$$T(A)+T(B)=T(B)+T(C)=T(C)+T(A)=U$$

$$T(A)\cap T(B)=T(B)\cap T(C)=T(C)\cap T(A)=V$$

Por tanto

$$(T(A)/V)+(T(B)/V)=(T(B)/V)+(T(C)/V)=(T(C)/V)+(T(A)/V)=U/V$$

$$(T(A)/V)\cap(T(B)/V)=(T(B)/V)\cap(T(C)/V)=(T(C)/V)\cap(T(A)/V)=0$$

Luego $T(A)/V, T(B)/V \leq Z(U/V)$ y de aquí se deduce que U/V es abeliano. Por tanto $((A+B)\cap(B+C)\cap(C+A))/((A\cap B)+(B\cap C)+(C\cap A))$ es abeliano. ♦

Notemos que entonces el retículo de ideales de un álgebra de Lie semisimple es complementado y distributivo. Ahora bien, no son las únicas álgebras de Lie cuyo retículo de ideales cumple las dos anteriores propiedades como prueba el siguiente resultado:

Proposición 1.6. Sea L un álgebra de Lie reductiva tal que $\dim Z(L)=1$. Entonces $\mathfrak{I}(L)$ es distributivo.

Demostración. Notemos que $L=F(z)\oplus S$ donde S es un álgebra semisimple. Es claro que dado P ideal de L ó bien $F(z)\leq P$ ó bien $P\leq S$. Sean entonces A, B y C ideales de L. Veamos que cumplen (1.3). Supongamos que $F(z)\leq(A+B)\cap(B+C)\cap(C+A)$. Entonces $(A+B)\cap(B+C)\cap(C+A)=F(z)\oplus P$.

Luego P es un ideal semisimple de L. En la demostración de (1.5) se prueba que $((A+B)\cap(B+C)\cap(C+A))/((A\cap B)+(B\cap C)+(C\cap A))$ es abeliano. Luego

$$P=((A+B)\cap(B+C)\cap(C+A))^2\leq(A\cap B)+(B\cap C)+(C\cap A)$$

Por otro lado como $F(z)\leq(A+B)$, $F(z)\leq(B+C)$ y $F(z)\leq(C+A)$, entonces $F(z)\leq A$ ó $F(z)\leq B$, $F(z)\leq B$ ó $F(z)\leq C$ y $F(z)\leq C$ ó $F(z)\leq A$. De aquí se deduce que $F(z)\leq(A\cap B)$ ó $F(z)\leq(B\cap C)$ ó $F(z)\leq(C\cap A)$ y por tanto (1.3) es cierta. En otro caso el resultado se sigue de (1.5). ♦

Entonces haciendo uso de (1.5) y (1.6) se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.7. Sea L un álgebra de Lie. Entonces $\mathfrak{I}(L)$ es **complementado y distributivo** si y sólo si L es **reductiva y $\dim Z(L)\leq 1$.**

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\mathfrak{I}(L)$ es complementado y distributivo. Entonces L es reductiva por (1.1). Si $2\leq\dim Z(L)$, sean $a,b\in Z(L)$ tales que $\{a,b\}$ es una familia linealmente independiente. Se tiene que $F(a+b)$ es un ideal de L que verifica: $F(a+b)\oplus F(a)=F(a+b)\oplus F(b)=F(a)\oplus F(b)$. Es claro que los ideales $F(a+b)$, $F(a)$ y $F(b)$ no cumplen (1.3) lo cual es una contradición. Luego $\dim Z(L)\leq 1$.

El recíproco es inmediato por (1.5) y (1.6). ♦

§2. Retículos de ideales lineales

El objetivo del presente párrafo es la determinación de las álgebras de Lie cuyo retículo de ideales sea el retículo distributivo más simple: el retículo lineal (un retículo $\mathfrak{I}$ se dice **lineal** si para cada par de elementos $P,Q\in\mathfrak{I}$ se tiene que ó bien $P\leq Q$ ó bien $Q\leq P$). Numerosos ejemplos de álgebras de Lie con retículo lineal pueden encontrarse entre las álgebras de Lie no nilpotentes tales que toda subálgebra propia es nilpotente. Este tipo de álgebras han sido estudiadas en varios artículos por autores distintos: Towers [35] (1980), Stitzinger [32] (1971) y Gein y Kuznecov [10] (1972) entre otros. En [35], Towers demuestra que este tipo de álgebras han de construirse como extensión escindible de un álgebra de Lie nilpotente N por una derivación D tal que la acción de D sobre N/N^2 es cíclica con polinomio mínimo un irreducible y D ha de actuar nilpotentemente sobre N^2. Además se tiene $N^3=0$ (Stitzinger [32] y Elduque-Varea [9]). Towers prueba que $N^2=0$ si $\dim N/N^2$ es impar y en algunos casos de $\dim N/N^2$ par (ver [35]) y clasifica este tipo de álgebras sobre el cuerpo real dejando abierto el problema de la determinación en el caso general. Hemos observado que en el caso de cuerpo real y en el caso de que $N^2=0$, este tipo de álgebras tienen retículo de ideales lineal.

El presente párrafo está dividido en cuatro secciones. En la primera se determinan las álgebras de Lie resolubles con retículo lineal tales que L^2 es abeliano y, en el caso general, se obtienen condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra de Lie resoluble tenga retículo de ideales lineal. En la segunda sección se obtiene la clasificación de las álgebras de Lie superresolubles y con retículo lineal. La tercera estudia las álgebras de Lie reales y no superresolubles tales que $\mathrm{Nil}(L)^3=0$ y $\mathfrak{I}(L)$ lineal. Como caso particular, se obtiene la clasificación de las álgebras reales con retículo de longitud 3. La última sección está dedicada al caso no resoluble. Se obtienen condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra de Lie no resoluble tenga retículo lineal y se estudian algunos casos particulares.

Sea L un álgebra de Lie arbitraria con retículo de ideales lineal. Si *L es resoluble*, como estamos trabajando en cuerpos de característica cero, L^2 es nilpotente (ver [19] corolario 1, p.51). Por otro lado, como $\mathfrak{I}(L/L^2)$ es lineal, resulta inmediato que $\dim L/L^2=1$. Luego $L=N \dotplus (x)$ ó bien *L es 1-dimensional.*

Si *L es no resoluble,* por la descomposición de Levi sabemos que $L=\mathrm{Rad}(L)\dotplus S$ donde S es una subálgebra semisimple y como $\mathfrak{I}(L/\mathrm{Rad}(L))$ es lineal, S ha de ser simple. Luego Rad(L) es el único ideal maximal de L y por tanto es el Radical de Jacobson de L. Aplicando ahora el corolario 1 de la sección 3 de [25] llegamos a Rad(L)=Nil(L). Por tanto L se construye como suma semidirecta de un álgebra de Lie nilpotente N y un álgebra simple S, es decir, $L=N \dot{+} S$.

SECCION 1ª: Resultados generales sobre álgebras de Lie resolubles con retículo de ideales lineal

Comenzamos analizando el caso L^2 abeliano, para lo cual precisamos el siguiente lema conocido del álgebra lineal:

Lema 2.1. Sea V un espacio vectorial y $f \in End(V)$. El retículo de subespacios f-invariantes de V es lineal si y sólo si f es una transformación cíclica con polinomio mínimo una potencia de primo.

Demostración. Sea $V=\{v_1\} \dot{+} \{v_2\} \dot{+} \ldots \dot{+} \{v_r\}$ una descomposición de V en subespacios cíclicos relativos a los divisores elementales de f. Supongamos que el retículo de subespacios f-invariantes de V es lineal, entonces $V=\{v_i\}$ es cíclico y el polinomio mínimo de f es una potencia de primo.

El recíproco es inmediato. ♦

Consideremos ahora el álgebra de Lie construida de forma natural como suma semidirecta de un espacio vectorial V y de una transformación lineal f sobre V. Entonces:

Teorema 2.2. El álgebra de Lie $L=V \dot{+} (f)$ tiene retículo de ideales lineal si y sólo si f es una transformación cíclica no singular con polinomio mínimo una potencia de primo.

Demostración. Notemos que los subespacios f-invariantes de V son ideales de L y que $L^2=f(V)\leq V$.

Supongamos en primer lugar que el retículo de ideales de L es lineal. Teniendo en cuenta la observación inicial y el lema (2.1), f ha de ser una transformación cíclica con polinomio mínimo una potencia de primo. Además, como $\dim L/L^2=1$, se tiene que $L^2=V$ y por tanto f ha de ser no singular.

Ahora probaremos el recíproco. Por ser f no singular se tiene que $L^2=f(V)=V$. Luego todo ideal propio de L está contenido en V. Aplicando ahora el lema (2.1) el resultado se sigue de forma inmediata. ♦

Corolario 2.3. Sea L un álgebra de Lie de dimensión mayor que uno tal que L^2 es abeliano. Entonces $\mathfrak{I}(L)$ **es lineal** si y sólo si L es una suma semidirecta de un espacio vectorial V y de una transformación lineal f sobre V cíclica y no singular con polinomio mínimo una potencia de primo. ♦

El corolario anterior clasifica las álgebras de Lie con retículo lineal tales que L^2 es abeliano. En el caso general, hemos obtenido la siguiente condición necesaria y suficiente:

Teorema 2.4. Sea L un álgebra de Lie resoluble. Entonces $\mathfrak{I}(L)$ **es lineal** si y sólo si L es una extensión escindible de un álgebra de Lie nilpotente N por una derivación D sobre N tal que para todo ideal K de N que sea D-invariante, la transformación D_K, inducida por D sobre Z(N/K), es cíclica con polinomio mínimo una potencia de primo y además D_{N^2} es no singular.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{I}(L)$ es lineal. Por las observaciones al comienzo del párrafo, tenemos que $L=Nil(L)\dot{+}(x)$ Llamaremos $N=Nil(L)$ y $D=ad_L x$.

Notemos que para probar el resultado es suficiente con ver que D actúa cíclicamente con polinomio mínimo una potencia de primo sobre Z(N). Como todo subespacio D-invariante de Z(N) es un ideal de L, el resultado se sigue de forma inmediata del lema (2.1). Por otro lado $\mathfrak{I}(L/N^2)$ es lineal, luego la acción de D sobre N/N^2 ha de ser no singular por el corolario (2.3).

Ahora probaremos el recíproco. Notemos que al ser D_{N^2} no singular, $\mathrm{Nil}(L)=N=L^2$. Luego N es el Radical de Jacobson de L y por tanto el único ideal maximal de L (ver [25]). Para comprobar que $\mathfrak{I}(L)$ es lineal, bastará con demostrar que para todo ideal K de L, el álgebra de Lie L/K solamente posee un ideal minimal. Por la observación inicial $K\leq N$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad $K=0$. Como todo ideal de L tiene intersección no trivial con el centro de Nil(L) (ver [31]), entonces los ideales minimales de L son los subespacios D-irreducibles de Z(N). Por hipótesis D es cíclica con polinomio mínimo una potencia de primo sobre Z(N), luego Z(N) solamente tiene un subespacio D-irreducible. ♦

Corolario 2.5. Sea $L=\mathrm{Nil}(L)\dot{+}(x)$. Si $\mathfrak{I}(L)$ es lineal entonces las transformaciones inducidas por $ad_L x$ sobre los cocientes $\mathrm{Nil}(L)^i/\mathrm{Nil}(L)^{i+1}$ son cíclicas con polinomio mínimo una potencia de primo siendo además la acción de $ad_L x$ sobre $\mathrm{Nil}(L)/\mathrm{Nil}(L)^2$ no singular.

Demostración. Como $\mathrm{Nil}(L)^i/\mathrm{Nil}(L)^{i+1}\leq Z(\mathrm{Nil}(L)/\mathrm{Nil}(L)^{i+1})$ el resultado se sigue de forma inmediata del teorema (2.4). ♦

Supongamos ahora que $L=\mathrm{Nil}(L)\dot{+}(x)$ tiene retículo de ideales lineal. Sea $\pi_i^{n_i}$ el polinomio mínimo de la transformación inducida por $ad_L x$ sobre $\mathrm{Nil}(L)^i/\mathrm{Nil}(L)^{i+1}$. Si imponemos la condición de que $\pi_i\neq\pi_j$ para todo $i\neq j$, entonces Nil(L) ha de ser tal que su serie central ascendente (s.c.a.) coincida con su serie central descendente (s.c.d.).

Además, las componentes primarias de Nil(L) relativas a $ad_L x$ determinan los cocientes $Nil(L)^i/Nil(L)^{i+1}$. Luego esta condición adicional sobre la acción de $ad_L x$ proporciona algo más de información sobre la estructura del nilradical de L.

Por otro lado, probaremos que si π_1 se escinde, entonces $\pi_i \neq \pi_j$ para todo $i \neq j$. Por tanto sobre cuerpos algebraicamente cerrados esta condición se verifica siempre. Probaremos también que sobre el cuerpo de los números reales $\pi_1 \neq \pi_2$.

Teorema 2.6. Sea $L = Nil(L) \dotplus (x)$ tal que $ad_L x$ actúa cíclicamente sobre $Nil(L)^i/Nil(L)^{i+1}$ con polinomio mínimo $\pi_i^{n_i}$ y $\pi_i \in Irr(F)$ siendo además la acción de $ad_L x$ sobre $Nil(L)/Nil(L)^2$ no singular. Supongamos que $\pi_i \neq \pi_j$ para todo $i \neq j$. Entonces $\mathfrak{I}(L)$ es lineal si y sólo si $Nil(L)_{\pi_{i+1}} \leq [Nil(L), Ker\, \pi_i(ad_L x)]$ para $i \geq 1$ donde $Nil(L)_{\pi_{i+1}}$ son las componentes primarias de Nil(L) relativas a $ad_L x$.

Demostración. Supongamos primeramente que $\mathfrak{I}(L)$ es lineal. Denotamos por $N = Nil(L)$. Es claro que $N = N_{\pi_1} \dotplus N_{\pi_2} \dotplus \ldots \dotplus N_{\pi_k}$ donde N_{π_i} son las componentes primarias de N relativas a $ad_L x$. Como para cada $i \geq 1$ N^i es $ad_L x$-invariante y $ad_L x$ actúa sobre N^i con polinomio característico $\pi_i^{n_i} \cdot \ldots \cdot \pi_k^{n_k}$, se tiene que $N^i = N_{\pi_i} \dotplus \ldots \dotplus N_{\pi_k}$ y por tanto $[Ker\pi_{i-1}(ad_L x), N] \leq [N^{i-1}, N] = N^i$. Veamos que para todo $i \geq 2$ $N_{\pi_i} \leq [Ker\pi_{i-1}(ad_L x), N]$. Sea $P = N^{i+1} + [Ker\pi_{i-1}(ad_L x), N] + Ker\pi_{i-1}(ad_L x)$. Es una comprobación inmediata que $[Ker\pi_{i-1}(ad_L x), N]$ y $Ker\pi_{i-1}(ad_L x)$ son $ad_L x$-invariantes, entonces $[P, x] \leq P$. Por otro lado

$$[P,N] \leq [N^{i+1}, N] + [[Ker\pi_{i-1}(ad_L x), N]N] + [Ker\pi_{i-1}(ad_L x), N] \leq P$$

Entonces P es un ideal de L. Pero $P \nleq N^i$ ya que $Ker\pi_{i-1}(ad_L x) \nleq N^i$. Como $\mathfrak{I}(L)$ es lineal, $N^i \leq P$. Entonces $N_{\pi_i} \leq P$. Además, al ser $[Ker\pi_{i-1}(ad_L x), N]$ subespacio $ad_L x$-invariante de N^i se tiene la siguiente descomposición

$$[Ker\pi_{i-1}(ad_L x), N] = [Ker\pi_{i-1}(ad_L x), N] \cap N_{\pi_i} \dotplus \ldots \dotplus [Ker\pi_{i-1}(ad_L x), N] \cap N_{\pi_k}$$

Luego $P=Ker\pi_{i-1}(ad_L x)\dot{+}[Ker\pi_{i-1}(ad_L x),N]\cap N_{\pi_i}\dot{+}N_{\pi_{i+1}}\dot{+}\ldots\dot{+}N_{\pi_k}$ es la descomposición en componentes primarias de P. Como $N_{\pi_i}\leq P$ se tiene que $N_{\pi_i}\leq[Ker\pi_{i-1}(ad_L x),N]$.

Ahora probaremos el recíproco. Como $ad_L x$ actúa cíclicamente con polinomio mínimo una potencia de primo sobre cada cociente $Nil(L)^i/Nil(L)^{i+1}$ tenemos que, por el lema (2.1), basta probar que para cada P ideal propio de L existe $i\geq 1$ tal que $Nil(L)^{i+1}\leq P\leq NiL(L)^i$. Claramente $NiL(L)=L^2$, luego Nil(L) es el Radical de Jacobson de L (ver [25]). Por tanto Nil(L) es el único ideal maximal de L. Sea P un ideal propio de L. Como P es un subespacio $ad_L x$-invariante de Nil(L) se tiene que $P=P\cap Nil(L)_{\pi_1}\dot{+}\ldots\dot{+}P\cap Nil(L)_{\pi_k}$. Por ser $P\neq 0$, entonces $P\cap Nil(L)_{\pi_j}\neq 0$ para algún $1\leq j\leq k$. Llamaremos i al menor índice entre 1 y k tal que $P\cap Nil(L)_{\pi_j}\neq 0$. Luego $P=P\cap Nil(L)_{\pi_i}\dot{+}P\cap Nil(L)_{\pi_{i+1}}\dot{+}\ldots\dot{+}P\cap Nil(L)_{\pi_k}$. Como $P\cap Nil(L)_{\pi_i}$ es $ad_L x$-invariante y los únicos subespacios $ad_L x$-invariantes de $Nil(L)_{\pi_i}$ son

$$0<Ker\pi_i(ad_L x)<Ker(\pi_i)^2(ad_L x)<\ldots<Ker(\pi_i)^{n_i}(ad_L x)=Nil(L)_{\pi_i}$$

tenemos que $P\cap Nil(L)_{\pi_i}=Ker(\pi_i)^j(ad_L x)$ para algún $1\leq j\leq n_i$. Entonces $Ker\pi_i(ad_L x)\leq P$ y por tanto

$$Nil(L)_{\pi_{i+1}}\leq[Ker\pi_i(ad_L x),N]\leq[P,N]\leq P$$

Luego $P=Nil(L)_{\pi_k}\dot{+}\ldots\dot{+}Nil(L)_{\pi_{i+1}}\dot{+}Ker\pi_i{}^j(ad_L x)$ con $1\leq j\leq n_i$. Por otro lado

$$Nil(L)^j=\sum_{i=j}^{k}Nil(L)_{\pi_i}$$

y por tanto tenemos que $Nil(L)^{i+1}\leq P\leq Nil(L)^i$ como queríamos probar. ♦

Corolario 2.7. Si L está en las condiciones del teorema (2.6) y $\mathfrak{I}(L)$ es lineal, entonces

$$Nil(L)_{\pi_{i+1}}\leq[Ker\pi_i(ad_L x),Nil(L)_{\pi_1}] \text{ para todo } 1\leq i\leq k-1.$$

Demostración. Sea $Nil(L)_{\pi_{i+1}}$ tal que $1\leq i\leq k-1$. Por el teorema (2.6) tenemos que

$$\mathrm{Nil}(L)_{\pi_{i+1}} \leq [\mathrm{Nil}(L), \mathrm{Ker}\pi_i(\mathrm{ad}_L x)] = \sum_{j=1}^{k} [\mathrm{Ker}\pi_i(\mathrm{ad}_L x), \mathrm{Nil}(L)_{\pi_j}]$$

Como $\mathrm{Nil}(L)^j = \mathrm{Nil}(L)_{\pi_j} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathrm{Nil}(L)_{\pi_k}$ entonces para cada $j \geq 2$ es claro que

$$[\mathrm{Ker}\pi_i(\mathrm{ad}_L x), \mathrm{Nil}(L)_{\pi_j}] \leq [\mathrm{Ker}\pi_i(\mathrm{ad}_L x)[\mathrm{Nil}(L), \mathrm{Nil}(L)]] \leq$$

$$[\mathrm{Nil}(L)[\mathrm{Ker}\pi_i(\mathrm{ad}_L x), \mathrm{Nil}(L)]] + [\mathrm{Nil}(L)[\mathrm{Nil}(L), \mathrm{Ker}\pi_i(\mathrm{ad}_L x)]] \leq$$

$$[\mathrm{Nil}(L)[\mathrm{Nil}(L)^i, \mathrm{Nil}(L)]] + [\mathrm{Nil}(L)[\mathrm{Nil}(L), \mathrm{Nil}(L)^i]] \leq \mathrm{Nil}(L)^{i+2}$$

Por tanto

$$\mathrm{Nil}(L)_{\pi_{i+1}} \leq [\mathrm{Ker}\pi_i(\mathrm{ad}_L x), \mathrm{Nil}(L)_{\pi_1}] + \mathrm{Nil}(L)^{i+2}$$

Además $P = [\mathrm{Ker}\pi_i(\mathrm{ad}_L x), \mathrm{Nil}(L)_{\pi_1}]$ es un subespacio $\mathrm{ad}_L x$-invariante de $\mathrm{Nil}(L)^{i+1}$, entonces $P = P \cap \mathrm{Nil}(L)_{\pi_{i+1}} \dot{+} \ldots \dot{+} P \cap \mathrm{Nil}(L)_{\pi_k}$. Por tanto

$$\mathrm{Nil}(L)_{\pi_{i+1}} \leq P \cap \mathrm{Nil}(L)_{\pi_{i+1}} \dot{+} \mathrm{Nil}(L)^{i+2}$$

Por otro lado $P \cap \mathrm{Nil}(L)_{\pi_{i+1}} \dot{+} \mathrm{Nil}(L)^{i+2} = P \cap \mathrm{Nil}(L)_{\pi_{i+1}} \dot{+} \mathrm{Nil}(L)_{\pi_{i+2}} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathrm{Nil}(L)_{\pi_k}$ y de aquí se deduce que $\mathrm{Nil}(L)_{\pi_{i+1}} \leq P \cap \mathrm{Nil}(L)_{\pi_{i+1}} \leq P = [\mathrm{Ker}\pi_i(\mathrm{ad}_L x), \mathrm{Nil}(L)_{\pi_1}]$ como queríamos probar. ♦

SECCION 2ª: Algebras de Lie superresolubles con retículo lineal

Se dice que un álgebra de Lie L es **superresoluble** si existe una cadena de ideales de L, $0 = L_0 < L_1 < L_2 < \ldots < L_n = L$, tal que $\dim L_i/L_{i-1} = 1$ para $1 \leq i \leq n$. Barnes y Newell [4] probaron que esto es equivalente a que L^2 sea nilpotente y $\mathrm{ad}_L x$ sea escindible para todo $x \in L$.

Si $L = N \dot{+} (x)$ donde N es un ideal nilpotente de L, entonces L es superresoluble si y sólo si la transformación lineal inducida por $\mathrm{ad}_L x$ sobre N es escindible (ver [4]). Para cuerpos de característica cero hemos obtenido una debilitación del anterior resultado.

Lema 2.8. Sea $L = N \dot{+} (x)$ donde N es un ideal nilpotente de L. Entonces, L es superresoluble si y sólo si la transformación lineal inducida por $\mathrm{ad}_L x$ en N/N^2 es escindible.

Demostración. La implicación directa es inmediata. Probaremos el recíproco. Si $ad_L x$ se escinde sobre N^2, entonces $ad_L x$ se escinde sobre N y por tanto L es superresoluble. Supongamos pues que $ad_L x$ no se escinde sobre N^2. Sea S el mayor subespacio de N en el que $ad_L x$ se escinde. Notemos que S es subálgebra (ver [19], p.64). La aplicación inducida por $ad_L x$ sobre $N/(N^2+S)$ no tiene valores propios, luego $N^2+S=N$. Sea ahora M una subálgebra maximal tal que $S\dot{+}(x)\leq M$. Por el teorema (6.5) de [34], $N^2\leq M$. Entonces $M=L$ lo cual es una contradición. Por tanto $S=N$ y L es superresoluble. ♦

El siguiente teorema da condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra de Lie superresoluble tenga retículo de ideales lineal.

Teorema 2.9. Sea L un álgebra de Lie superesoluble. Son equivalentes:

(i) $\Im(L)$ es lineal con $p+2$ puntos.

(ii) L es una extensión escindible de un álgebra de Lie nilpotente N por una derivación D siendo D una transformación cíclica con polinomio mínimo $(x-1)^{n_1}(x-2)^{n_2}\ldots(x-k)^{n_k}$ donde $k+1$ es el orden de nilpotencia de N y $p=n_1+\ldots+n_k$. Además, la acción de D sobre N/N^2 tiene de polinomio mínimo $(x-1)^{n_1}$ y $[N_{\lambda-1},Ker(D-i)]=N_{\lambda-(i+1)}$ para todo $1\leq i\leq k-1$.

(iii) $L=Nil(L)\dot{+}(x)$ siendo $Nil(L)=F(a_1^1,\ldots,a_{n_1}^1;\ldots;a_1^k,\ldots,a_{n_k}^k)$ y además: $[a_j^1,a_{n_{i-1}}^{i-1}]=a_j^i$ para cada $1\leq j\leq n_i$; $[a_j^1,a_{n_{i-1}}^{i-1}]=0$ si $j>n_i$

$[a_j^i,x]=ia_j^i+a_{j+1}^i$ para cada $1\leq j\leq n_i-1$, $1\leq i\leq k$; $[a_{n_i}^i,x]=ia_{n_i}^i$ para cada $1\leq i\leq k$.

Demostración. Veamos (i)$\Rightarrow$(ii). Por el teorema (2.4) es claro que $L=N\dot{+}(x)$ donde N es un ideal nilpotente de L y la transformación inducida por $ad_L x$ sobre N/N^2 es cíclica no singular de polinomio mínimo $\pi_1^{n_1}$ y $\pi_1\in Irr(F)$. Como L es superresoluble, $\pi_1=\lambda-t$ donde $0\neq t\in F$. Tomemos $D=(1/t)\mathrm{ad}_L x$. Obviamente L es una extensión escindible de N por D y la transformación inducida por D sobre N/N^2 es cíclica con polinomio mínimo $(\lambda-1)^{n_1}$.

Consideremos ahora los cocientes N^i/N^{i+1}. Por el corolario (2.5) las aplicaciones inducidas por D sobre cada uno de ellos son cíclicas de polinomio mínimo $\pi_i^{n_i}$ y $\pi_i\in \mathrm{Irr}(F)$. Como L es superresoluble, $\pi_i=\lambda-a_i$ donde $a_i\in F$. Afirmamos que para cada $i\geq 1$ $a_i=i$. Efectivamente, si $i=1$ el resultado es cierto por las observaciones del párrafo anterior. Procedemos ahora por inducción. Podemos tomar s.p.d.g. $N^{i+1}=0$. Entonces el polinomio característico de D es $(\lambda-1)^{n_1}\ldots(\lambda-(i-1))^{n_{i-1}}(\lambda-a_i)^{n_i}$. Es claro que

$$N=(N_{\lambda-1}\dot{+}\ldots\dot{+}N_{\lambda-(i-1)})+N^i \quad \text{y} \quad N^{i-1}=N_{\lambda-(i-1)}+N^i$$

donde $N_{\lambda-j}$ $1\leq j\leq i-1$ son componentes primarias de N relativas a D. Por otro lado $N^i\leq Z(N)$ ya que $N^{i+1}=0$. Entonces por el corolario de la p.64 de [19], se tiene la siguiente cadena

$$0\neq N^i=[N,N^{i-1}]\leq \sum_{j=1}^{i-1} N_{\lambda-(i-1+j)}$$

y como $N^i\leq N_{\lambda-a_i}$, se tiene que $a_i\in\{i,\ldots,2i-2\}$. Luego $a_i\neq k$ para $1\leq k\leq i-1$. Aplicando ahora el corolario (2.7) tenemos que $N_{\lambda-a_i}\leq[\mathrm{Ker}(D-(i-1)),N_{\lambda-1}]\leq N_{\lambda-i}$ (ver [19], p.64) y por tanto $a_i=i$ como queríamos probar. Notemos además que $[\mathrm{Ker}(D-(i-1)),N_{\lambda-1}]=N_{\lambda-i}$.

Probaremos ahora (ii)$\Rightarrow$(iii). Claramente $L=\mathrm{Nil}(L)\dot{+}(x)$. Sea $\mathrm{Nil}(L)=\mathrm{Nil}(L)_{\lambda-1}\dot{+}\ldots\dot{+}\mathrm{Nil}(L)_{\lambda-k}$ la descomposición primaria de L relativa a $\mathrm{ad}_L x$. Como la acción de $\mathrm{ad}_L x$ es cíclica podemos tomar $\mathrm{Nil}(L)_{\lambda-1}=F(a_1^1,\ldots,a_{n_1}^1)$ con $[a_j^1,x]=a_j^1+a_{j+1}^1$ para cada $1\leq j\leq n_1-1$ y $[a_{n_1}^1,x]=a_{n_1}^1$. Consideremos ahora $\mathrm{Nil}(L)_{\lambda-2}$. Como $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_L x-1)=F(a_{n_1}^1)$, por hipótesis $\mathrm{Nil}(L)_{\lambda-2}=[\mathrm{Nil}(L)_{\lambda-1},a_{n_1}^1]$. Luego $\{[a_1^1,a_{n_1}^1],\ldots,[a_{n_1-1}^1,a_{n_1}^1]\}$ es un sistema generador de $\mathrm{Nil}(L)_{\lambda-2}$ y por tanto $n_2=\dim\mathrm{Nil}(L)_{\lambda-2}<\dim\mathrm{Nil}(L)_{\lambda-1}=n_1$. Llamamos $a_j^2=[a_j^1,a_{n_1}^1]$ para $1\leq j\leq n_1$. Probemos que $a_{n_2+1}^2=\ldots=a_{n_1}^2=0$ y que $\{a_1^2,\ldots,a_{n_2}^2\}$ es una base de $\mathrm{Nil}(L)_{\lambda-2}$.

Observar que $(ad_Lx-2id)([a_j^1,a_{n_1}^1])=[a_{j+1}^1,a_{n_1}^1]$ para $1\leq j\leq n_1-1$. Como el polinomio mínimo de ad_Lx en $Nil(L)_{\lambda-2}$ es $(\lambda-2)^{n_2}$, tenemos que $0=(ad_Lx-2id)^{n_2}([a_j^1,a_{n_1}^1])=[a_{j+n_2}^1,a_{n_1}^1]$ y por tanto $a_{n_2+1}^2=\ldots=a_{n_1}^2=0$. Por otro lado, como $\dim Nil(L)_{\lambda-2}=n_2$ es claro que $\{a_1^2,\ldots,a_{n_2}^2\}$ es una base de $Nil(L)_{\lambda-2}$ como queríamos probar. Es inmediato que $[a_j^2,x]=2a_j^2+a_{j+1}^2$ para cada $1\leq j\leq n_2-1$ y $[a_{n_2}^2,x]=2a_{n_2}^2$. Repitiendo ahora este proceso con los sucesivos $Nil(L)_{\lambda-i}$ para $2<i\leq k$ se obtiene el resultado deseado.

Falta únicamente probar que (iii)$\Rightarrow$(i) que resulta inmediato al observar que $Nil(L)_{\lambda-i}=F(a_1^i,\ldots,a_{n_i}^i)$ son las componentes primarias de Nil(L) relativas a ad_Lx y aplicar el teorema (2.6). ♦

La descripción de L dada en el teorema (2.9)(iii) es incompleta ya que, aunque sabemos como ha de actuar ad_Lx sobre Nil(L), no sabemos qué álgebras de Lie pueden ser el radical nilpotente de L. Ahora nos ocuparemos de este problema.

Proposición 2.10. Sea L superresoluble y $\mathfrak{Z}(L)$ lineal tal que Nil(L) es no abeliano. Entonces $Nil(L)/Nil(L)^3$ es un álgebra de Heisenberg generalizada.

Demostración. Veamos que $Nil(L)/Nil(L)^3$ es un álgebra de Heisenberg. Podemos suponer s.p.d.g. que $Nil(L)^3=0$. Sea K un ideal de L tal que $Nil(L)^2/K$ es factor principal de L/K. Como L es superresoluble, $\dim Nil(L)^2/K=1$. Por otro lado, al ser $\mathfrak{Z}(L/K)$ lineal y L/K superresoluble, se tiene que $Z(Nil(L)/K)=Nil(L)^2/K$. Luego $Z(Nil(L)/K)$ es 1-dimensional y por tanto $\dim Nil(L)/Nil(L)^2$ es par (ver [Cap.0, §2]). Si $\dim Nil(L)/Nil(L)^2=2$, es inmediato que $\dim Nil(L)^2=1$ y por tanto $Nil(L)/Nil(L)^3$ es un álgebra de Heisenberg 3-dimensional. Sea entonces $\dim Nil(L)/Nil(L)^2=2n$ con $n>1$. Supongamos que $\dim Nil(L)^2\geq 2$. Podemos tomar s.p.d.g. $\dim Nil(L)^2=2$. Por (2.9),

$L=Nil(L)\dot{+}(x)$ siendo $Nil(L)=F(a_1,\ldots,a_{2n})\dot{+}Nil(L)_{\lambda-2}$ con $\dim Nil(L)_{\lambda-2}=2$ y además

$$Nil(L)_{\lambda-2}=F([a_1,a_{2n}],[a_2,a_{2n}]) \text{ y } [a_i,a_{2n}]=0 \text{ para } i\geq 3$$

Llamamos $[a_1,a_{2n}]=b_1$ y $[a_2,a_{2n}]=b_2$ que cumplen

$$[b_1,x]=2b_1+b_2 \qquad (2.10.1)$$

$$[b_2,x]=2b_2 \qquad (2.10.2)$$

Denotamos $[a_i,a_j]=\alpha(i,j)b_1+\beta(i,j)b_2$. Veamos que si $1\leq i\leq n$ se tiene que

$$\alpha(i,2n-i+1)=(-1)^{2n-i+1} \qquad (2.10.3)$$

Procedemos por inducción sobre i. Por la identidad de Jacobi se tiene que

$$[[a_i,a_{2n-i}]x]=2[a_i,a_{2n-i}]+[a_{i+1},a_{2n-i}]+[a_i,a_{2n-i+1}]$$

y como $[a_i,a_{2n-i}]=\alpha(i,2n-i)b_1+\beta(i,2n-i)b_2$ aplicando (2.10.1) y (2.10.2) llegamos a

$$[[a_i,a_{2n-i}]x]=2\alpha(i,2n-i)b_1+2\beta(i,2n-i)b_2+\alpha(i,2n-i)b_2$$

Comparando ahora las tres igualdades, tenemos que

$$[a_{i+1},a_{2n-i}]=-[a_i,a_{2n-i+1}]+\alpha(i,2n-i)b_2$$

Luego aplicando la hipótesis de inducción en la fórmula anterior se tiene que

$$\alpha(i+1,2n-i)=-\alpha(i,2n-i+1)=-(-1)^{2n-i+1}=(-1)^{2n-i}$$

como queríamos probar.

Por otro lado también es cierta la siguiente identidad

$$[a_{n-i},a_{n+i+2}]=(-1)^{n+i+1}(i+1)b_2 \text{ para } 0\leq i\leq n-2 \qquad (2.10.4)$$

Efectivamente, si $i=0$ por la identidad de Jacobi se tiene que

$$[[a_n,a_{n+1}]x]=2[a_n,a_{n+1}]+[a_n,a_{n+2}]$$

y como $[a_n,a_{n+1}]=\alpha(n,n+1)b_1+\beta(n,n+1)b_2$ entonces

$$[[a_n,a_{n+1}]x]=2\alpha(n,n+1)b_1+2\beta(n,n+1)b_2+\alpha(n,n+1)b_2$$

Comparando ahora las tres igualdades tenemos que

$$[a_n,a_{n+2}]=\alpha(n,n+1)b_2$$

Ahora aplicando (2.10.3) tenemos que $\alpha(n,n+1)=(-1)^{n+1}$ y por tanto $[a_n,a_{n+2}]=(-1)^{n+1}b_2$. Procedemos ahora por inducción sobre i. Por la identidad de Jacobi se tiene

$$[[a_{n-(i+1)},a_{n+i+2}]x]=2[a_{n-(i+1)},a_{n+i+2}]+[a_{n-i},a_{n+i+2}]+[a_{n-(i+1)},a_{n+i+3}]$$

y como $[a_{n-(i+1)},a_{n+i+2}]=\alpha(n-(i+1),n+i+2)b_1+\beta(n-(i+1),n+i+2)b_2$ entonces

$$[[a_{n-(i+1)}a_{n+i+2}]x]=2\alpha(n-(i+1),n+i+2)b_1+2\beta(n-(i+1),n+i+2)b_2+\alpha(n-(i+1),n+i+2)b_2$$

Comparando ahora las tres igualdades llegamos a

$$[a_{n-(i+1)},a_{n+i+3}]=-[a_{n-i},a_{n+i+2}]+\alpha(n-(i+1),n+i+2)b_2$$

Por (2.10.3) $\alpha(n-(i+1),n+i+2)=(-1)^{n+i+2}$ y la hipótesis de inducción tenemos que

$$[a_{n-(i+1)},a_{n+i+3}]=-(-1)^{n+i+1}(i+1)b_2+(-1)^{n+i+2}b_2=(-1)^{n+i+2}(i+2)b_2$$

como queríamos probar.

Consideremos ahora $[a_2,a_{2n}]$. Aplicando (2.10.4) tenemos la siguiente igualdad

$$b_2=[a_2,a_{2n}]=[a_{n-(n-2)},a_{n+(n-2)+2}]=(-1)^{2n-1}(n-1)b_2=-(n-1)b_2$$

y por tanto 1=1-n lo cual es una contradición. Luego $\dim Nil(L)^2=1$ y de aquí se deduce que $Nil(L)/Nil(L)^3$ es un álgebra de Heisenberg generalizada. ♦

Lema 2.11. Sea N un álgebra de Lie nilpotente tal que N/N^3 es un álgebra de Heisenberg generalizada y $N^3\neq 0$. Entonces N/N^3 es un álgebra de Heisenberg 3-dimensional.

Demostración. Como N es nilpotente y no abeliana $\dim N/N^2\geq 2$. Podemos considerar s.p.d.g. $\dim N^3=1$. Si $\dim N/N^2>2$, al ser N/N^3 un álgebra de Heisenberg generalizada, podemos tomar $\{a_1,\dots,a_n,f_1,\dots,f_n,b_1\}$ linealmente independientes tal que $N=F(a_1,\dots,a_n,f_1,\dots,f_n,b_1)\dot{+}N^3$ cumpliendo

$$[a_i,f_j]\equiv\delta_{ij}b_1 \qquad (\text{mód} N^3)$$

$$[b_1,a_j]\equiv[b_1,f_j]\equiv[a_i,a_j]\equiv[f_i,f_j]\equiv 0 \quad (\text{mód} N^3)$$

Por otro lado, $Z(N)=N^3$. Efectivamente, si $N^3<Z(N)$ entonces existe $0\neq x=\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_n a_n+\beta_1 f_1+\ldots+\beta_n f_n+\mu_1 b_1$ tal que $[x,N]=0$. Como $[x,a_i]\equiv-\beta_i b_1$ y $[x,f_i]\equiv\alpha_i b_1$ (módN^3), de aquí se deduce que $\beta_i=\alpha_i=0$ para todo i y por tanto $b_1\in Z(N)$. Pero entonces $N^2=N^3\dotplus(b_1)\leq Z(N)$ lo cual es una contradición ya que $N^3\neq 0$. Como $Z(N)=N^3$, entonces existe $z\in\{a_1,\ldots,a_n,f_1,\ldots,f_n\}$ tal que $[b_1,z]\neq 0$. Supongamos $z=f_i$. Al ser $\dim N/N^2\geq 4$ podemos tomar $f_j\neq f_i$ y por la identidad de Jacobi tenemos que

$$[[a_j,f_j]f_i]+[[f_i,a_j]f_j]+[[f_j,f_i]a_j]=0$$

Como $[f_j,f_i]$, $[f_i,a_j]\in Z(N)$ y $[a_j,f_j]=b_1+m$ para algún $m\in Z(N)$, entonces

$$0=[[a_j,f_j]f_i]=[b_1,z]\neq 0$$

lo cual es una contradición. Si $z=a_i$, siguiendo un razonamiento análogo se llega también a contradición. Luego $2\leq\dim N/N^2\leq 2$ y por tanto $\dim N/N^2=2$. ♦

Como consecuencia de la proposición (2.10) y lema (2.11) se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 2.12. Sea L superresoluble tal que $\mathfrak{I}(L)$ es lineal. Entonces sucede una de las siguientes cosas:

(i) Nil(L) es abeliano.

(ii) Nil(L) es un álgebra de Heisenberg generalizada.

(iii) Nil(L)/Nil(L)^3 es un álgebra de Heisenberg 3-dimensional. ♦

El caso (i) del anterior corolario está totalmente resuelto por el corolario (2.3). En el caso (ii) tenemos perfectamente determinada la estructura del nilradical de L. Por tanto solamente queda por estudiar la existencia o no de derivaciones de álgebras de Heisenberg generalizadas que cumplan las condiciones del teorema (2.9). Con esto, el caso (ii) estaría resuelto salvo isomorfismos. En el caso (iii) queda aún por determinar la estructura del nilradical de L.

A partir de ahora nos ocuparemos de resolver el problema de existencia y unicidad planteado en el caso (ii) y posteriormente de determinar las álgebras de Lie del caso (iii).

A) El caso Nil(L)=H(2n+1)

En primer lugar necesitamos saber qué condiciones ha de cumplir una transformación lineal de un álgebra de Heisenberg para ser derivación.

Sea entonces H(2n+1) un álgebra de Heisenberg generalizada y $\{a_1,\ldots,a_n,f_1,\ldots,f_n,z\}$ una base estándar de H(2n+1) (ver [Cap.0, §2]). Consideramos el espacio vectorial $V=F(a_1,\ldots,a_n,f_1,\ldots,f_n)$. Definimos la siguiente forma bilineal sobre V: $\Phi:V\times V\rightarrow F$ tal que $\Phi(a,b):=\lambda_{[a,b]}$ siendo $[a,b]=\lambda_{[a,b]}z$. Llamamos B a la matriz coordenada de Φ en la base $\{a_1,\ldots a_n,f_1,\ldots,f_n\}$. Entonces

$$B=\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Se tiene el siguiente resultado relativo a las derivaciones de H(2n+1):

Lema 2.14. Sea H(2n+1) un álgebra de Heisenberg generalizada y $\{a_1,\ldots,a_n,f_1,\ldots,f_n,z\}$ una base estándar de H(2n+1). Sea D una transformación lineal tal que $H(2n+1)^2$ es D-invariante. Entonces $D\in \mathrm{Der}(H(2n+1))$ si y sólo si la matriz coordenada dada por filas de D en la base estándar es

$$A=\left[\begin{array}{cc|c} A_1 & A_2 & \sigma_1 \\ A_3 & A_4 & \vdots \\ & & \sigma_{2n} \\ \hline 0\ldots\ldots\ldots & 0 & \alpha \end{array}\right]$$

donde $(A_2)^t=A_2$, $(A_3)^t=A_3$ y $A_1+(A_4)^t=\alpha I_n$ con $\alpha\in F$.

Demostración. Notemos que al ser $H(2n+1)^2$ D-invariante, se tiene que $D(z)=\alpha z$. Entonces llamando C a la matriz asociada a D en la base estándar es claro que

$$C=\left[\begin{array}{c|c} A^* & \begin{matrix}\sigma_1\\ \vdots\\ \sigma_{2n}\end{matrix} \\ \hline 0 \dots\dots\dots 0 & \alpha \end{array}\right]$$

Afirmamos que $D\in Der(H(2n+1))$ si y sólo si $A^*B+B(A^*)^t=\alpha B$ siendo B la matriz de (2.13). En efecto, ver que $D\in Der(H(2n+1))$ es equivalente a probar que $D([x,y])=[D(x),y]+[x,D(y)]$ para cualesquiera $x,y\in H(2n+1)$. Sea $a\in H(2n+1)$, entonces $a=\alpha_1 a_1+\dots+\alpha_n a_n+\beta_1 f_1+\dots+\beta_n f_n+\mu z$. Denotamos por $a^*=\alpha_1 a_1+\dots+\alpha_n a_n+\beta_1 f_1+\dots+\beta_n f_n$. Observar que dados $a,b\in H(2n+1)$ se tiene que $[a,b]=tz$ siendo $t=a^*Bb^*\in F$. Entonces $D([x,y])=(x^*By^*)\alpha z$, $[D(x),y]=(x^*A^*By^*)z$ y $[x,D(y)]=(x^*B(A^*)^t y^*)z$. Luego $D\in Der(H(2n+1))$ si y sólo si $\alpha B=A^*B+B(A^*)^t$.

Ahora denotando $A^*=\begin{bmatrix} A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}$ y aplicando el párrafo anterior llegamos a que la condición necesaria y suficiente para que $D\in Der(H(2n+1))$ es

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} (A_1)^t & (A_3)^t\\ (A_2)^t & (A_4)^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \alpha I_n\\ -\alpha I_n & 0\end{bmatrix}$$

es decir, $(A_2)^t=A_2$, $(A_3)^t=A_3$ y $A_1+(A_4)^t=\alpha I_n$. ♦

Ahora estamos en condiciones de poder probar la existencia de álgebras de Lie superresolubles con retículo de ideales lineal cuyo nilradical es un álgebra de Heisenberg generalizada.

Sea $\{a_1,\dots,a_n,f_1,\dots,f_n,z\}$ una base estándar de $H(2n+1)$. Los productos no nulos de los elementos de la base anterior son $[a_i,f_j]=\delta_{ij}z$. Por ser más conveniente para nuestros cálculos, vamos a tomar en H(2n+1) una base no estándar definida de la siguiente forma

$$(e_1,e_2,\ldots,e_{2n},x)=(a_1,\ldots,a_n,f_1,\ldots,f_n,z)\left[\begin{array}{c|c|c}
I_n & 0 & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline
0 & \begin{matrix} 0\ \cdots\cdots\ 0 & 0 & 1 \\ 0\ \cdots\cdots\ 0 & -1 & 0 \\ \cdots\cdots & & \\ (-1)^{n+1}\ \cdots & 0 & 0 & \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix}0\\ 0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline
0\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\ 0 & 1
\end{array}\right] \qquad (2.15)$$

Una simple verificación lleva a que la tabla de productos correspondiente a la nueva base es

$$[e_i,e_j]=-x \text{ si i par, j impar y } j+i-1=2n$$

$$[e_i,e_j]=x \text{ si i impar, j par y } j+i-1=2n$$

siendo el resto de los productos nulos.

Denotaremos por P a la matriz del cambio (2.15). Notemos que

$$P^t = \left[\begin{array}{c|c|c}
I_n & 0 & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline
0 & \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n+1} \\ & \cdots\cdots & & \\ 0 & -1 & \cdots\cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\\ 0\end{matrix} \\ \hline
0\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\ 0 & 1
\end{array}\right] = P^{-1}$$

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.16.(Existencia) Sea H(2n+1) un álgebra de Heisenberg y $\{e_1, e_2, \ldots, e_{2n}, x\}$ la base descrita en (2.15). Sea D la transformación lineal de H(2n+1) cuya matriz coordenada dada por filas en dicha base es

$$A = \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & & 0 \\ & & & & \cdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & 0 \\ \hline 0 & & & \cdots & & & 0 & & 2 \end{array}\right] \qquad (2.16.1)$$

Entonces $D \in Der(H(2n+1))$ y cumple las condiciones del teorema (2.9). Por tanto el álgebra de Lie $L^* = H(2n+1) \dot{+} (D)$ extensión escindible de H(2n+1) por D es superresoluble y $\mathfrak{I}(L^*)$ es lineal.

Demostración. Como $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n}, x) = (a_1, \ldots, a_n, f_1, \ldots, f_n, z)P$ tenemos que $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n}, x)P^t = (a_1, \ldots, a_n, f_1, \ldots, f_n, z)$. Entonces la matriz coordenada de D dada por filas en la base estándar $\{a_1, \ldots, a_n, f_1, \ldots, f_n, z\}$ es PAP^t. Haciendo el correspondiente producto de matrices llegamos a

$$PAP^t = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc|c} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & \cdots & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & \cdots & & & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & & & & \cdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & & \cdots & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & & \cdots & & & (-1)^{n+1} & 0 \\ \hline 0 & & \cdots & & & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & \cdots & & & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \cdots & & & & & & \cdots & & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \cdots & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & & & & \cdots & & & & & & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Aplicando ahora el lema (2.14) tenemos que $D\in Der(H(2n+1))$. Por tanto $L^*=H(2n+1)\dot{+}(D)$ es un álgebra de Lie. Claramente L^* es superresoluble y D cumple las condiciones del teorema (2.9). Luego $\mathfrak{I}(L^*)$ es lineal. ♦

Proposición 2.17.(Unicidad) La única álgebra de Lie superresoluble y con retículo de ideales lineal tal que su nilradical es un álgebra de Heisenberg (2n+1)-dimensional es, salvo isomorfismos, L^*.

Demostración. Sea L un álgebra de Lie superresoluble tal que $\mathfrak{I}(L)$ es lineal y su nilradical es un álgebra de Heisenberg (2n+1)-dimensional arbitraria. Aplicando el teorema (2.9), tenemos que L posee una base $\{a_1,\ldots,a_{2n},z_1,x_1\}$ tal que $Nil(L)=F(a_1,\ldots,a_{2n},z_1)$. La matriz coordenada de $ad_L x$ sobre Nil(L) en la base $\{a_1,\ldots,a_{2n},z_1\}$ es la matriz A descrita en (2.16.1) y además $[a_1,a_{2n}]=z_1$ y $[a_i,a_{2n}]=0$ para $2\leq i\leq 2n$. Veamos que la tabla de productos de Nil(L) en la base anterior es la siguiente

$[a_1,a_{2i}]=\mu_1^{2i}z_1$ para $1\leq i\leq n-1$ siendo $\mu_1^{2i}\in F$

$[a_1,a_{2i-1}]=0$ para $1\leq i\leq n$

$[a_1,a_{2n}]=z_1$

$[a_i,a_j]=c(i,j)z_1$ donde si $1<i\leq j\leq 2n-1$, c(i,j) son las siguientes constantes de estructura

1) $c(i,j)=0$ si paridad de i=paridad de j ó $j+i-1>2n$
2) $c(i,j)=-\mu_1^{j+i-1}$ si i par, j impar y $j+i-1\leq 2n$
3) $c(i,j)=\mu_1^{j+i-1}$ si i impar, j par y $j+i-1\leq 2n$

Por la identidad de Jacobi tenemos que

$$[[a_i,a_j]x]=[[a_i,x]a_j]+[a_i[a_j,x]]$$

que traducido a constantes de estructura nos da

$$2c(i,j)=2c(i,j)+c(i+1,j)+c(i,j+1)$$

Por tanto $c(i+1,j)=-c(i,j+1)$. Aplicando reiteradamente esta recurrencia a $c(i,j)$ con $i\leq j$ llegamos a $c(i,j)=(-1)^{i-1}c(1,j+i-1)$, entendiendo que si $j+i-1>2n$, $c(1,j+i-1)=0$. Notemos que las constantes de estructura son entonces $\pm c(1,2), \pm c(1,3), \ldots\ldots, \pm c(1,2n-1), \pm c(1,2n)$. Además como $c(i,i)=0$, tenemos que si $1\leq i\leq n$ $0=c(i,i)=(-1)^{i-1}c(1,2i-1)$. Luego $c(1,2i-1)=0$ para $1\leq i\leq n$. Para cada $1\leq i\leq n$ denotamos $c(1,2i)=\mu_1^{2i}$ siendo $\mu_1^{2i}\in F$. Ahora consideremos $i\leq j$ y $j+i-1\leq 2n$. Si paridad de i es igual que paridad de j, entonces j+i-1 es impar. En este caso $0=c(1,j+i-1)=c(i,j)$. Ahora bien, si la paridad de i y de j es distinta, entonces j+i-1 es par. En este caso tenemos

$$c(i,j)=-\mu_1^{j+i-1} \text{ si i par y j impar}$$

$$c(i,j)=\mu_1^{j+i-1} \text{ si i impar y j par}$$

Acabamos de probar que L posee una base $\{a_1,\ldots,a_{2n},z_1,x_1\}$ tal que la matriz coordenada de $ad_L x$ sobre Nil(L) en la base $\{a_1,\ldots,a_{2n},z_1\}$ y la matriz de la forma bilineal asociada de forma natural a $V_1=F(a_1,\ldots,a_{2n})$ en esta base son respectivamente

$$A=\left[\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & & 0\\
 & & & & \ldots\ldots\ldots & & & & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & & 2
\end{array}\right] \qquad
B=\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & \mu_1^2 & 0 & \mu_1^4 & \ldots & \mu_1^{2n-2} & 0 & 1\\
-\mu_1^2 & 0 & -\mu_1^4 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 0\\
0 & \mu_1^4 & 0 & \mu_1^6 & \ldots & 1 & 0 & 0\\
 & & & & \ldots\ldots\ldots & & & \\
0 & \mu_1^{2n-2} & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0\\
-\mu_1^{2n-2} & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Denotaremos la matriz A de la forma siguiente

$$A=\left[\begin{array}{c|c}
 & 0\\
A^* & \vdots\\
 & 0\\
\hline
0 \ldots\ldots\ldots 0 & 2
\end{array}\right]$$

Por otro lado, $L^*=F(e_1,e_2,\ldots,e_{2n},x)\dot{+}(D)$ donde la matriz coordenada de D sobre $Nil(L)=F(e_1,e_2,\ldots,e_{2n},x)$ en esta base es A y si llamamos B* a la matriz de la forma bilineal asociada de forma natural a $V=F(e_1,e_2,\ldots,e_{2n})$ en esta base, es claro que

$$B^*=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notemos que para construir el isomorfismo basta con encontrar una matriz P regular que cumpla $PB^*P^t=B$ y $PA^*P^{-1}=A^*$. En tal caso la transformación $\Phi:L\to L^*$ definida por $F(z_1)=x$, $F(x_1)=D$, $F(a_i)=\tilde{e}_i$ para $1\leq i\leq 2n$ donde $(\tilde{e}_i)=P(e_i)$ es un isomorfismo de álgebras de Lie.

Veamos que una tal P siempre existe. Necesitamos determinar una matriz P inversible que conmute con A*. Como A* es la matriz asociada a una transformación cíclica, las únicas matrices que conmutan con A* son polinomios en A* (ver [20], tomo II, p.107), es decir, matrices de la forma $\alpha_0+\alpha_1A^*+\alpha_2(A^*)^2+\ldots+\alpha_{2n-1}(A^*)^{2n-1}$ con $\alpha_i\in F$. Una simple comprobación lleva a que las matrices que conmutan con A* tienen la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \ldots & \sigma_{2n-2} & \sigma_{2n-1} & \sigma_{2n} \\ 0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_{2n-3} & \sigma_{2n-2} & \sigma_{2n-1} \\ 0 & 0 & \sigma_1 & \ldots & \sigma_{2n-4} & \sigma_{2n-3} & \sigma_{2n-2} \\ & & & \cdots\cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \sigma_1 \end{bmatrix} \quad \text{con } \sigma_i\in F$$

Por otro lado, $PB^*P^t=B$, luego tenemos la siguiente igualdad de matrices

$$\begin{bmatrix} -\sigma_{2n} & \sigma_{2n-1} & -\sigma_{2n-2} & \cdots & \sigma_3 & -\sigma_2 & \sigma_1 \\ -\sigma_{2n-1} & \sigma_{2n-2} & -\sigma_{2n-3} & \cdots & \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 \\ -\sigma_{2n-2} & \sigma_{2n-3} & -\sigma_{2n-4} & \cdots & \sigma_1 & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & & \\ -\sigma_4 & \sigma_3 & -\sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & & \\ \sigma_{2n-3} & \sigma_{2n-4} & \sigma_{2n-5} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{2n-2} & \sigma_{2n-3} & \sigma_{2n-4} & \cdots & \sigma_1 & 0 & 0 \\ \sigma_{2n-1} & \sigma_{2n-2} & \sigma_{2n-3} & \cdots & \sigma_2 & \sigma_1 & 0 \\ \sigma_{2n} & \sigma_{2n-1} & \sigma_{2n-2} & \cdots & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{bmatrix} = B$$

Observar que el sistema anterior sólo tiene n ecuaciones que son las que proporciona el producto de la primera fila de la matriz PB^* con las columnas pares de la matriz P^t. El resto de las ecuaciones son ó identidades triviales ó las mismas que las correspondientes a la primera fila. Entonces el sistema que resulta es

$$\begin{aligned} &1=(\sigma_1)^2 \\ &\mu_1^{2n-2}=2\sigma_1\sigma_3-(\sigma_2)^2 \\ &\mu_1^{2n-4}=2\sigma_1\sigma_5-2\sigma_2\sigma_4+(\sigma_3)^2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\mu_1^{2n-2i}=2\sigma_1\sigma_{2i+1}-2\sigma_2\sigma_{2i}+2\sigma_3\sigma_{2i-1}-\ldots+(-1)^i(\sigma_{i+1})^2 \end{aligned}$$

Tomando $\sigma_1=1$ y $\sigma_{2i}=0$ el sistema claramente tiene solución puesto que $\mu_1^{2n-2i}=2\sigma_{2i+1}+f(\sigma_3,\ldots,\sigma_{2i+1})$ depende de un parámetro más que $\mu_1^{2n-2(i-1)}=2\sigma_{2i-1}+f(\sigma_3,\ldots,\sigma_{2i-3})$. ♦

Notemos que en la construcción de L^* no hemos utilizado la base estándar del álgebra de Heisenberg. Para determinar en la práctica este tipo de álgebras de Lie es conveniente saber qué matrices pueden actuar como matrices asociadas en la base estándar de las derivaciones de un álgebra de Heisenberg que cumplan las condiciones del teorema (2.9).

Consideremos entonces la transformación lineal f sobre H(2n+1) tal que la matriz coordenada de f en una base estándar $\{a_1,\ldots,a_n,f_1,\ldots,f_n,z\}$ de H(2n+1) es

$$A=\left[\begin{array}{l|l|l}
1\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ 0 & 0\ \ldots\ldots\ 0 & 0 \\
0\ 1\ 1\ \ldots\ 0\ 0 & 0\ \ldots\ldots\ 0 & 0 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \vdots \\
0\ 0\ 0\ \ldots\ 1\ 1 & 0\ \ldots\ldots\ 0 & 0 \\
0\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ 1 & 0\ \ldots\ (-1)^{n+1} & 0 \\
\hline
0\ \ldots\ldots\ 0 & 1\ 0\ \ldots\ 0\ 0\ 0 & 0 \\
0\ \ldots\ldots\ 0 & -1\ 1\ \ldots\ 0\ 0\ 0 & 0 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \vdots \\
0\ \ldots\ldots\ 0 & 0\ 0\ \ldots\ -1\ 1\ 0 & 0 \\
0\ \ldots\ldots\ 0 & 0\ 0\ \ldots\ 0\ -1\ 1 & 0 \\
\hline
\multicolumn{2}{l|}{0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 0} & 2
\end{array}\right]$$

Notemos que $f\in \mathrm{Der}(H(2n+1))$ por el lema (2.14). Además el álgebra de Lie L construida como extensión escindible de H(2n+1) por f es superresoluble y $\mathcal{S}(L)$ es lineal por el teorema (2.9). Luego aplicando la proposición (2.17), tenemos que $L\cong L^*$.

La cuestión que nos planteamos es cómo detectar cuándo un álgebra de Lie con nilradical un álgebra de Heisenberg generalizada tiene retículo lineal. Sea M una tal álgebra. Entonces $M\cong L$. Sea ahora $x\in M$ tal que $M=H(2n+1)\dot{+}(x)$. Llamamos $g=ad_M x$. Luego $g=m+\lambda f$ con $0\neq\lambda\in F$ y $m\in H(2n+1)$. Además, si $m=\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_n a_n+\beta_1 f_1+\ldots+\beta_n f_n+\sigma z$, la matriz coordenada de g en la base $\{a_1,\ldots,a_n,f_1,\ldots,f_n,z\}$ es

$$A=\left[\begin{array}{l|l|c}
\lambda\ \lambda\ 0\ \ldots\ 0\ 0 & 0\ \ldots\ldots\ 0 & \beta_1 \\
0\ \lambda\ \lambda\ \ldots\ 0\ 0 & 0\ \ldots\ldots\ 0 & \beta_2 \\
\quad\ldots\ldots & \quad\ldots\ldots & \vdots \\
0\ 0\ 0\ \ldots\ \lambda\ \lambda & 0\ \ldots\ldots\ 0 & \vdots \\
0\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ \lambda & 0\ \ldots\ (-1)^{n+1}\lambda & \beta_n \\ \hline
0\ \ldots\ldots\ 0 & \lambda\ 0\ \ldots\ 0\ 0\ 0 & -\alpha_1 \\
0\ \ldots\ldots\ 0 & -\lambda\ \lambda\ \ldots\ 0\ 0\ 0 & -\alpha_2 \\
\quad\ldots\ldots & \quad\ldots\ldots & \vdots \\
0\ \ldots\ldots\ 0 & 0\ 0\ \ldots\ -\lambda\ \lambda\ 0 & \vdots \\
0\ \ldots\ldots\ 0 & 0\ 0\ \ldots\ 0\ -\lambda\ \lambda & -\alpha_n \\ \hline
\multicolumn{2}{l|}{0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 0} & 2\lambda
\end{array}\right]$$

Entonces se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.18. Las transformaciones lineales de un álgebra de Heisenberg generalizada que proporcionan álgebras de Lie con retículo lineal son aquellas cuya matriz asociada en una base estándar de H(2n+1) es

$$A=\left[\begin{array}{l|l|c}
\lambda\ \lambda\ 0\ \ldots\ 0\ 0 & 0\ \ldots\ldots\ 0 & \alpha_1 \\
0\ \lambda\ \lambda\ \ldots\ 0\ 0 & 0\ \ldots\ldots\ 0 & \vdots \\
\quad\ldots\ldots & \quad\ldots\ldots & \vdots \\
0\ 0\ 0\ \ldots\ \lambda\ \lambda & 0\ \ldots\ldots\ 0 & \vdots \\
0\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ \lambda & 0\ \ldots\ (-1)^{n+1}\lambda & \vdots \\ \hline
0\ \ldots\ldots\ 0 & \lambda\ 0\ \ldots\ 0\ 0\ 0 & \vdots \\
0\ \ldots\ldots\ 0 & -\lambda\ \lambda\ \ldots\ 0\ 0\ 0 & \vdots \\
\quad\ldots\ldots & \quad\ldots\ldots & \vdots \\
0\ \ldots\ldots\ 0 & 0\ 0\ \ldots\ -\lambda\ \lambda\ 0 & \vdots \\
0\ \ldots\ldots\ 0 & 0\ 0\ \ldots\ 0\ -\lambda\ \lambda & \alpha_{2n} \\ \hline
\multicolumn{2}{l|}{0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 0} & 2\lambda
\end{array}\right]$$

siendo $\lambda \neq 0$. ♦

B) El caso $Nil(L)/Nil(L)^3=H(3)$

Proposición 2.19. Sea L superresoluble tal que $\mathfrak{I}(L)$ es lineal. Si Nil(L) tiene orden de nilpotencia $2k+1\geq 5$, entonces L es extensión escindible de un álgebra de Lie nilpotente $N=F(a_1,a_2;b_2;\ldots;b_{2k})$ con la siguiente tabla de productos no nulos

$$[a_1,a_2]=b_2 \quad [a_1,b_i]=b_{i+1} \text{ para } 2\leq i\leq 2k-1$$

por una $D\in Der(N)$ que en la base anterior tiene por matriz coordenada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2k \end{bmatrix}$$

Demostración. Por hipótesis $Nil(L)^{2k}\neq 0$ y $Nil(L)^{2k+1}=0$. Notemos que al ser $2k+1\geq 5$ $\dim Nil(L)/Nil(L)^2=2$ y $\dim Nil(L)^2/Nil(L)^3=1$ por el corolario (2.12).

Para probar el resultado basta con ver que $\dim Nil(L)^i/Nil(L)^{i+1}=1$ para $3\leq i\leq 2k$ ya que aplicando entonces el teorema (2.9), L tiene una base $\{a_1^1,a_2^1;a_1^2;\ldots;a_1^{2k};x\}$ cumpliendo

$$[a_1^1,a_2^1]=a_1^2 \qquad [a_2^1,a_1^i]=0 \text{ si } 2\leq i\leq 2k \qquad [a_1^1,a_1^i]=a_1^{i+1} \text{ si } 2\leq i\leq 2k-1$$

$$[a_1^1,x]=a_1^1+a_2^1 \qquad [a_2^1,x]=a_2^1 \qquad [a_1^i,x]=ia_1^i \text{ si } 2\leq i\leq 2k$$

Fácilmente puede comprobarse que la base anterior es la buscada. Efectivamente, como $a_1^{2k}\in Nil(L)^{2k}\leq Z(Nil(L))$, tenemos que $[a_1^1,a_1^{2k}]=[a_2^1,a_1^{2k}]=0$. Por otro lado una simple inducción prueba que si $i,j>1$ $[a_1^i,a_1^j]=0$. Efectivamente, haciendo uso de la identidad de Jacobi tenemos que

$$[a_1^2,a_1^j]=[[a_1^1,a_2^1]a_1^j]=-[[a_1^j,a_1^1]a_2^1]-[[a_2^1,a_1^j]a_1^1]$$

luego $[a_1^2,a_1^j]=0$ para todo $j>1$. Procedemos ahora por inducción sobre i. Por la identidad de Jacobi

$$[a_1^{i+1},a_1^j]=[[a_1^1,a_1^i]a_1^j]=-[[a_1^j,a_1^1]a_1^i]-[[a_1^i,a_1^j]a_1^1]$$

aplicando ahora la hipótesis de inducción tenemos $[a_1^i,a_1^j]=0$. Luego $[a_1^{i+1},a_1^j]=0$ y por tanto el resultado es cierto.

Veamos entonces que la $\dim Nil(L)^i/Nil(L)^{i+1}=1$ para $3\leq i\leq 2k$. Hacemos la demostración por contraejemplo minimal. Sea L el álgebra de Lie superresoluble y con retículo lineal de dimensión más pequeña tal que Nil(L) tiene orden de nilpotencia $2k+1\geq 5$ y $\dim Nil(L)^i/Nil(L)^{i+1}>1$ para algún $2\leq i\leq 2k$. Notemos que $\dim Nil(L)^i/Nil(L)^{i+1}=1$ para $2\leq i\leq 2k-2$. Por otro lado, como $\dim Nil(L)/Nil(L)^2=2$, por el teorema (2.9) $\dim Nil(L)^{2k-1}/Nil(L)^{2k}\leq 2$. Si $\dim Nil(L)^{2k-1}/Nil(L)^{2k}=1$ entonces $\dim Nil(L)^{2k}=2$ y por (2.9) de nuevo, L posee una base $\{a_1^1,a_2^1;a_1^2;\ldots;a_1^{2k-1};a_1^{2k},a_2^{2k};x\}$ tal que

$$[a_1^1,a_2^1]=a_1^2 \quad [a_2^1,a_1^i]=0 \text{ si } 2\leq i\leq 2k-2 \quad [a_2^1,a_1^{2k-1}]=a_2^{2k}$$
$$[a_1^1,a_1^i]=a_1^{i+1} \text{ si } 2\leq i\leq 2k-1 \quad [a_1^1,x]=a_1^1+a_2^1 \quad [a_2^1,x]=a_2^1$$
$$[a_1^i,x]=ia_1^i \text{ si } 2\leq i\leq 2k-1 \quad [a_1^{2k},x]=2ka_1^{2k}+a_2^{2k} \quad [a_2^{2k},x]=2ka_2^{2k}$$

En este caso veamos que se cumplen las siguientes identidades

$$\begin{aligned}&[a_1^i,a_1^{2k-i}]=(-1)^{i-1}a_2^{2k} \text{ si } 2\leq i\leq 2k-2\\ &[a_1^i,a_1^j]=0 \text{ si } j\neq 2k-i \text{ y } j>1\end{aligned} \qquad (2.19.1)$$

Efectivamente, si $i=2$ por la identidad de Jacobi tenemos que

$$[a_1^2,a_1^j]=[[a_1^1,a_2^1]a_1^j]=-[[a_1^j,a_1^1]a_2^1]-[[a_2^1,a_1^j]a_1^1]$$

Entonces si $j=2k-2$

$$[a_1^2,a_1^j]=[a_1^{2k-1},a_2^1]=-a_2^{2k}=(-1)^{2-1}a_2^{2k}$$

y si $1<j\neq 2k-2$ $[a_1^2,a_1^j]=0$. Procedemos ahora por inducción. Aplicando la identidad de Jacobi tenemos la siguiente cadena de igualdades

$$[a_1^i,a_1^{2k-i}]=[[a_1^1,a_1^{i-1}]a_1^{2k-i}]=-[[a_1^{2k-i},a_1^1]a_1^{i-1}]-[[a_1^{i-1},a_1^{2k-i}]a_1^1]$$

usando ahora la hipótesis inductiva tenemos que

$$[a_1^{i-1},a_1^{2k-i}]=0 \text{ y } [a_1^{2k-(i-1)},a_1^{i-1}]=(-1)^{i-1}a_2^{2k}$$

Entonces $[a_1^i,a_1^{2k-i}]=[a_1^{2k-(i-1)},a_1^{i-1}]=(-1)^{i-1}a_2^{2k}$. Si $j\neq 2k-i$ se cumple que $j+1\neq 2k-(i-1)$ y por la identidad de Jacobi

$$[a_1^i,a_1^j]=[[a_1^1,a_1^{i-1}]a_1^j]=-[[a_1^j,a_1^1]a_1^{i-1}]-[[a_1^{i-1},a_1^j]a_1^1]$$

Aplicando nuevamente la hipótesis de inducción, tenemos que $[a_1^{i-1},a_1^j]\in Z(\mathrm{Nil}(L))$ y $[a_1^{j+1},a_1^{i-1}]=0$ y por tanto $[a_1^i,a_1^j]=0$.

Consideremos entonces $[a_1^k,a_1^{2k-k}]$. Por las identidades de (2.19.1) $[a_1^k,a_1^{2k-k}]=(-1)^{k-1}a_2^{2k}$. Pero por otro lado $[a_1^k,a_1^{2k-k}]=[a_1^k,a_1^k]=0$ lo cual es una contradición.

Por tanto ha de cumplirse que $\dim \mathrm{Nil}(L)^{2k-1}/\mathrm{Nil}(L)^{2k}=2$. Haciendo uso del teorema (2.9) deducimos de nuevo que $\dim \mathrm{Nil}(L)^{2k}\leq 2$ y tenemos garantizada la existencia de una familia de elementos de Nil(L), $\{a_1^1,a_2^1;a_1^2;\ldots;a_1^{2k-1},a_2^{2k-1};a_1^{2k},a_2^{2k};x\}$, que cumple

$$[a_1^1,a_2^1]=a_1^2 \quad [a_2^1,a_1^i]=0 \text{ si } 2\leq i\leq 2k-3 \quad [a_1^1,a_1^i]=a_1^{i+1} \text{ si } 2\leq i\leq 2k-2$$

$$[a_2^1,a_1^{2k-2}]=a_2^{2k-1} \quad [a_1^1,a_2^{2k-1}]=a_1^{2k} \quad [a_2^1,a_2^{2k-1}]=a_2^{2k} \quad [a_1^1,x]=a_1^1+a_2^1$$

$$[a_2^1,x]=a_2^1 \quad [a_1^i,x]=ia_1^i \text{ si } 2\leq i\leq 2k-2 \quad [a_1^{2k-1},x]=(2k-1)a_1^{2k-1}+a_2^{2k-1}$$

$$[a_2^{2k-1},x]=(2k-1)a_2^{2k-1} \quad [a_1^{2k},x]=2ka_1^{2k}+a_2^{2k} \quad [a_2^{2k},x]=2ka_2^{2k}$$

Además se tiene que $\mathrm{Nil}(L)^{2k}=F(a_1^{2k},a_2^{2k})=\mathrm{Nil}(L)_{2k}$ siendo $\mathrm{Nil}(L)_{2k}$ la componente primaria de Nil(L) de valor propio 2k relativa a $ad_L x$. Como $1\leq \dim \mathrm{Nil}(L)^{2k}\leq 2$, se cumple que $(ad_L x-2k\,id)^2(\mathrm{Nil}(L)^{2k})=0$. Por otro lado la siguiente cadena de igualdades es cierta

$$[[a_1^1,a_1^{2k-1}]x]=2k[a_1^1,a_1^{2k-1}]+[a_2^1,a_1^{2k-1}]+[a_1^1,a_2^{2k-1}]$$

Luego como $[a_1^1,a_1^{2k-1}]\in \mathrm{Nil}(L)^{2k}$ se cumple

$0=(ad_L x-2k\,id)^2([a_1^1,a_1^{2k-1}])=(ad_L x-2k\,id)([a_2^1,a_1^{2k-1}]+[a_1^1,a_2^{2k-1}])=$
$2k[a_2^1,a_1^{2k-1}]+[a_2^1,a_2^{2k-1}]+2k[a_1^1,a_2^{2k-1}]+[a_2^1,a_2^{2k-1}]-2k[a_2^1,a_1^{2k-1}]-2k[a_1^1,a_2^{2k-1}]=$
$2[a_2^1,a_2^{2k-1}]=2\,a_2^{2k}$

Por tanto $\dim \mathrm{Nil}(L)^{2k}=1$ y la familia $\{a_1^1, a_2^1; a_1^2; \ldots; a_1^{2k-1}, a_2^{2k-1}; a_1^{2k}; x\}$ es base de L. Además $[a_1^{2k}, x] = 2ka_1^{2k}$ y $[a_2^1, a_2^{2k-1}] = 0$. Haciendo uso de la identidad de Jacobi tenemos

$$[[a_1^1, a_1^{2k-1}]x] = 2k[a_1^1, a_1^{2k-1}] + [a_2^1, a_1^{2k-1}] + [a_1^1, a_2^{2k-1}]$$

Por otro lado como $[a_1^1, a_1^{2k-1}] \in \mathrm{Nil}(L)^{2k}$

$$[[a_1^1, a_1^{2k-1}]x] = 2k[a_1^1, a_1^{2k-1}]$$

Comparando ambas igualdades se deduce que

$$[a_2^1, a_1^{2k-1}] = -[a_1^1, a_2^{2k-1}] = -a_1^{2k} \quad (2.19.2)$$

Ahora veamos que se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} &[a_1^i, a_1^{2k-i}] = (-1)^i i a_1^{2k} \text{ si } 2 \leq i \leq 2k-2 \\ &[a_1^i, a_1^{2k-(i+1)}] = (-1)^{i+1} a_2^{2k-1} \text{ si } 2 \leq i \leq 2k-3 \qquad (2.19.3) \\ &[a_1^i, a_1^j] = 0 \text{ si } j \notin \{2k-i, 2k-(i+1), 1\} \text{ y } i > 1 \end{aligned}$$

Efectivamente se cumplen para $i=2$

$$[a_1^2, a_1^j] = [[a_1^1, a_2^1]a_1^j] = -[[a_1^j, a_1^1]a_2^1] - [[a_2^1, a_1^j]a_1^1] = -[a_2^1[a_1^1, a_1^j]] + [a_1^1[a_2^1, a_1^j]]$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} &\text{si } j=2k-2,\ [a_1^2, a_1^{2k-2}] = -[a_2^1, a_1^{2k-1}] + [a_1^1, a_2^{2k-1}] = 2a_1^{2k} \\ &\text{si } j=2k-3,\ [a_1^2, a_1^{2k-3}] = -[a_2^1, a_1^{2k-2}] = -a_2^{2k-1} \\ &\text{si } j \neq 2k-2, 2k-3, 1\ ,\ [a_1^2, a_1^j] = 0 \end{aligned}$$

Procedemos ahora por inducción. Por la identidad de Jacobi tenemos que

$$[a_1^i, a_1^j] = [[a_1^1, a_1^{i-1}]a_1^j] = -[[a_1^j, a_1^1]a_1^{i-1}] - [[a_1^{i-1}, a_1^j]a_1^1]$$

Si $j=2k-i$, aplicando la hipótesis de inducción llegamos a

$$[a_1^i, a_1^{2k-i}] = -[a_1^{i-1}, a_1^{2k-(i-1)}] + (-1)^i[a_1^1, a_2^{2k-1}] = (-1)^i i a_1^{2k}$$

Si $j=2k-(i+1)$, aplicando de nuevo la hipótesis de inducción tenemos que

$$[a_1^{i-1}, a_1^{2k-i}] = (-1)^i a_2^{2k-1} \text{ y } [a_1^{i-1}, a_1^{2k-(i+1)}] = 0$$

luego $[a_1^i, a_1^{2k-(i+1)}] = -[a_1^{i-1}, a_1^{2k-i}] = (-1)^{i+1} a_2^{2k-1}$

Si $j\neq 2k-i, 2k-(i+1), 1$ entonces $j+1\neq 2k-(i-1), 2k-i, 1$ y por tanto $[a_1^{i-1}, a_1^{j+1}]=0$. Con lo cual tenemos $[a_1^i, a_1^j]=-[[a_1^{i-1}, a_1^j]a_1^1]$. Pero como $j\neq 2k-i$, entonces ó $[a_1^{i-1}, a_1^j]=0$ ó $[a_1^{i-1}, a_1^j]\in N^{2k}\leq Z(\mathrm{Nil}(L))$. Luego $[a_1^i, a_1^j]=0$.

Ahora como $k\geq 2$ tenemos que $[a_1^k, a_1^{2k-k}]=[a_1^k, a_1^k]=0$. Pero aplicando (2.19.3) $[a_1^k, a_1^{2k-k}]=(-1)^k k a_1^{2k}$. Por tanto $a_1^{2k}=0$ lo cual es una contradición. Luego no puede haber ningún álgebra de Lie de este tipo y de aquí se deduce que el resultado es cierto. ♦

Proposición 2.20. Sea L superresoluble tal que $\mathfrak{I}(L)$ es lineal. Si Nil(L) es de orden de nilpotencia $2k\geq 4$, entonces ocurre una de las siguientes cosas:

(i) L es extensión escindible de un álgebra de Lie nilpotente $N=F(a_1, a_2; b_2; \ldots; b_{2k-1})$ con la siguiente tabla de productos no nulos

$$[a_1, a_2]=b_2 \qquad [a_1, b_i]=b_{i+1} \text{ para } 2\leq i\leq 2k-2$$

por una $D\in \mathrm{Der}(N)$ que en la base anterior tiene por matriz coordenada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & \ldots\ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2k-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2k-1 \end{bmatrix}$$

(ii) L es extensión escindible de un álgebra de Lie nilpotente $N=F(a_1, a_2; b_2; \ldots; b_{2k-2}; b_{2k-1}^1, b_{2k-1}^2)$ con la siguiente tabla de productos no nulos

$$[a_1, a_2]=b_2 \qquad [a_1, b_i]=b_{i+1} \text{ para } 2\leq i\leq 2k-3 \qquad [a_1, b_{2k-2}]=b_{2k-1}^1$$

$$[a_2, b_{2k-2}]=b_{2k-1}^2 \qquad [b_i, b_{2k-1-i}]=(-1)^{i-1} b_{2k-1}^2 \text{ para } 2\leq i\leq k$$

por una $D\in \mathrm{Der}(N)$ que en la base anterior tiene por matriz coordenada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \dots\dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2k-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2k-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2k-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 2k-1 \end{bmatrix}$$

Demostración. Aplicando el Corolario (2.12) y la proposición (2.19) es claro que $\dim Nil(L)/Nil(L)^2=2$ y $\dim Nil(L)^i/Nil(L)^{i+1}=1$ para $2\leq i\leq 2k-2$ siendo 2k el orden de nilpotencia de Nil(L). Haciendo uso ahora del teorema (2.9) tenemos que ó bien L posee una base $\{a_1^1, a_2^1; a_1^2; \dots; a_1^{2k-1}; x\}$ cumpliendo

$$[a_1^1,a_2^1]=a_1^2 \quad [a_1^1,a_1^i]=a_1^{i+1} \text{ si } 2\leq i\leq 2k-2 \qquad [a_2^1,a_1^i]=0 \text{ si } 2\leq i\leq 2k-1$$

$$[a_1^1,x]=a_1^1+a_2^1 \qquad [a_2^1,x]=a_2^1 \quad [a_1^i,x]=ia_1^i \text{ si } 2\leq i\leq 2k-1$$

ó bien L posee una base $\{a_1^1, a_2^1; a_1^2; \dots; a_1^{2k-1}, a_2^{2k-1}; x\}$ cumpliendo

$$[a_1^1,a_2^1]=a_1^2 \quad [a_1^1,a_1^i]=a_1^{i+1} \text{ si } 2\leq i\leq 2k-2 \qquad [a_2^1,a_1^i]=0 \text{ si } 2\leq i\leq 2k-3$$

$$[a_2^1,a_1^{2k-2}]=a_2^{2k-1} \quad [a_1^1,x]=a_1^1+a_2^1 \qquad [a_2^1,x]=a_2^1 \quad [a_1^i,x]=ia_1^i \text{ si } 2\leq i\leq 2k-2$$

$$[a_1^{2k-1},x]=(2k-1)a_1^{2k-1}+a_2^{2k-1} \qquad [a_2^{2k-1},x]=(2k-1)a_2^{2k-1}$$

En el caso primero solamente queda por comprobar que $[a_1^i, a_1^j]=0$ si $i,j>1$. Si $i=2$ aplicando la identidad de Jacobi tenemos

$$[a_1^2,a_1^j]=[[a_1^1,a_2^1]a_1^j]=-[[a_1^j,a_1^1]a_2^1]-[[a_2^1,a_1^j]a_1^1]$$

Como $[a_1^s,a_2^1]=0$ para $s>1$ y $[a_1^j,a_1^1]=-a_1^{j+1}$, entonces $[a_1^2,a_1^j]=0$. Procedemos ahora por inducción sobre i. De nuevo por la identidad de Jacobi se tiene

$$[a_1^{i+1},a_1^j]=[[a_1^1,a_1^i]a_1^j]=-[[a_1^j,a_1^1]a_1^i]-[[a_1^i,a_1^j]a_1^1]$$

aplicando ahora la hipótesis inductiva se llega a $[a_1^{i+1}, a_1^j]=0$.

Veamos qué sucede con los productos $[a_1^i, a_1^j]$ si $i,j>1$ en el otro caso. Si el orden de nilpotencia de Nil(L) es 4 obviamente $[a_1^2,a_1^3]=[a_1^2,a_2^3]=0$. Ahora bien, si el orden de nilpotencia es mayor que 4 veamos que

$$[a_1^i, a_1^{2k-1-i}] = (-1)^{i-1} a_2^{2k-1} \quad \text{y} \quad [a_1^i, a_1^j] = 0 \text{ si } j \neq 2k-1-i$$

En efecto, si $i=2$ aplicando la identidad de Jacobi tenemos

$$[a_1^2, a_1^j] = [[a_1^1, a_2^1] a_1^j] = -[[a_1^j, a_1^1] a_2^1] - [[a_2^1, a_1^j] a_1^1]$$

Entonces si $j=2k-3$, $[a_1^2, a_1^{2k-3}] = [a_1^{2k-2}, a_2^1] = -a_2^{2k-1}$. Si $j \neq 2k-3$ claramente $[a_1^2, a_1^j] = 0$.

Procedemos ahora por inducción. Se tiene la siguiente cadena de igualdades haciendo uso de la identidad de Jacobi

$$[a_1^i, a_1^j] = [[a_1^1, a_1^{i-1}] a_1^j] = -[[a_1^j, a_1^1] a_1^{i-1}] - [[a_1^{i-1}, a_1^j] a_1^1]$$

Entonces si $j=2k-1-i$ aplicando la hipótesis inductiva llegamos a

$$[a_1^i, a_1^{2k-1-i}] = -[a_1^{i-1}, a_1^{2k-i}] = -(-1)^{i-2} a_2^{2k-1} = (-1)^{i-1} a_2^{2k-1}$$

Si $j \neq 2k-1-i$ entonces $j+1 \neq 2k-i$ luego aplicando nuevamente la hipótesis inductiva tenemos que $[a_1^i, a_1^j] = [a_1^{j+1}, a_1^{i-1}] = 0$ con lo cual la proposición queda demostrada. ♦

CONCLUSION

Teorema 2.21 Sea L un álgebra de Lie superresoluble. Entonces, es lineal si y sólo si L es una de las siguientes álgebras:

(i) $L=F(a_1,a_2;b_2;\ldots;b_{k-1})\dot{+}(x)$ con tabla de productos no nulos $[a_1,a_2]=b_2$; $[a_1,b_i]=b_{i+1}$ para $2\le i\le k-2$; $[a_1,x]=a_1+a_2$; $[a_2,x]=a_2$; $[b_i,x]=ib_i$ para $2\le i\le k-1$.

(ii) $L=F(a_1,a_2;b_2;\ldots;b_{2k-2};b^1_{2k-1},b^2_{2k-1})\dot{+}(x)$ con tabla de productos no nulos

$$[a_1,a_2]=b_2;\ [a_1,b_i]=b_{i+1} \text{ para } 2\le i\le 2k-3;\ [a_1,b_{2k-2}]=b^1_{2k-1}$$

$$[a_2,b_{2k-2}]=b^2_{2k-1};\ [b_i,b_{2k-1-i}]=(-1)^{i-1}b^2_{2k-1} \text{ para } 2\le i\le k$$

$$[a_1,x]=a_1+a_2;\ [a_2,x]=a_2;\ [b_i,x]=ib_i \text{ para } 2\le i\le 2k-2$$

$$[b^1_{2k-1},x]=(2k-1)b^1_{2k-1}+b^2_{2k-1};\ [b^2_{2k-1},x]=(2k-1)b^2_{2k-1}$$

(iii) $L=F(a_1,a_2,\ldots,a_n,f_1,f_2,\ldots,f_n;z)\dot{+}(x)$ con tabla de productos no nulos

$$[a_i,f_i]=z;\ [a_i,x]=a_i+a_{i+1} \text{ para } 1\le i\le n-1;\ [z,x]=2z$$

$$[a_n,x]=a_n+(-1)^{n+1}f_n;\ [f_1,x]=f_1;\ [f_i,x]=f_i-f_{i-1} \text{ para } 2\le i\le n$$

(iv) $L=F(a_1,a_2,\ldots,a_n)\dot{+}(x)$ con tabla de productos no nulos

$[a_i,x]=a_i+a_{i+1}$ para $1\le i\le n-1$; $[a_n,x]=a_n$. ♦

SECCION 3ª: Algebras de Lie L resolubles reales con retículo lineal tales que $Nil(L)^3=0$

Sea L un álgebra de Lie real, resoluble y no superresoluble. Supongamos que $\mathfrak{I}(L)$ es lineal. Sabemos que $L=Nil(L)\dot{+}(x)$. Imponemos la condición de que el orden de nilpotencia de Nil(L) sea 3. Por el teorema (2.4) sabemos que $ad_L x$ actúa cíclicamente sobre $Nil(L)/Nil(L)^2$ y $Nil(L)^2$ con polinomios mínimos $\pi_1^{n_1}$ y $\pi_2^{n_2}$ donde $\pi_i \in Irr(\mathbb{R})$. Como estamos en $\mathbb{R}$ y L es no superresoluble, por el lema (2.8) tenemos que $\pi_1=\lambda^2-c_1\lambda-c_0$ donde $4c_0+(c_1)^2<0$. Veamos que $\pi_2=\lambda-c_1$ ó $\pi_2=\lambda^2-2c_1\lambda-4c_0$. Efectivamente, consideremos el álgebra de Lie $L_{\mathbb{C}}=L\otimes C$. Es claro que $Nil(L)_{\mathbb{C}}$ es un álgebra de Lie nilpotente con orden de nilpotencia 3 y que $(Nil(L)_{\mathbb{C}})^2=(Nil(L)^2)_{\mathbb{C}}$. Además, si denotamos por $D=ad_L x$, tenemos que el polinomio característico de D en $Nil(L)_{\mathbb{C}}$ es $\pi_1^{n_1}\pi_2^{n_2}$. Supongamos que $\pi_1=\pi_2=(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)$. Como $\pi_i \in Irr(\mathbb{R})$, se tiene que $\alpha_1=\overline{\alpha_2}\notin\mathbb{R}$. Entonces

$$Nil(L)_{\mathbb{C}}=Ker(D-\alpha_1)^{n_1}\dot{+}Ker(D-\alpha_2)^{n_2}$$

y de aquí se deduce que $(Nil(L)_{\mathbb{C}})^2=0$ ya que $\alpha_1+\alpha_2$, $2\alpha_1$ y $2\alpha_2$ no son raices del polinomio característico (ver [19], p.64). Esto es una contradición pues $(Nil(L)_{\mathbb{C}})^2\neq 0$. Luego $\pi_1\neq\pi_2$ y por tanto ó bien $\pi_2=\lambda^2-m_1\lambda-m_0$ con $4m_0+m_1{}^2<0$ ó bien $\pi_2=\lambda-m_1$.

Supongamos primeramente $\pi_2=\lambda^2-m_1\lambda-m_0$. En $\mathbb{C}$ se tiene la siguiente factorización: $\pi_2=(\lambda-t_1)(\lambda-t_2)$ con $t_1=\overline{t_2}$ no reales. Como $t_i\neq\alpha_i$ tenemos la siguiente descomposición en componentes primarias para $Nil(L)_{\mathbb{C}}$

$$Nil(L)_{\mathbb{C}}=Ker(D-\alpha_1)^{n_1}\dot{+}Ker(D-\alpha_2)^{n_1}\dot{+}Ker(D-t_1)^{n_2}\dot{+}Ker(D-t_2)^{n_2}$$

Ahora bien, $0\neq(Nil(L)_{\mathbb{C}})^2\leq Z(Nil(L)_{\mathbb{C}})$ y el polinomio característico de D en $(Nil(L)_{\mathbb{C}})^2$ es $\pi_2^{n_2}$. De aquí y del corolario p.64 de [19], se deduce que $t_1\in\{\alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1, 2\alpha_2\}$. Como $\alpha_1+\alpha_2\in\mathbb{R}$, $t_1\neq\alpha_1+\alpha_2$. Luego $t_1=2\alpha_1$ y $t_2=2\alpha_2$. Entonces $m_1=t_1+t_2=2(\alpha_1+\alpha_2)=2c_1$ y $-m_0=t_1t_2=4\alpha_1\alpha_2=-4c_0$. Por tanto $\pi_2=\lambda^2-2c_1\lambda-4c_0$.

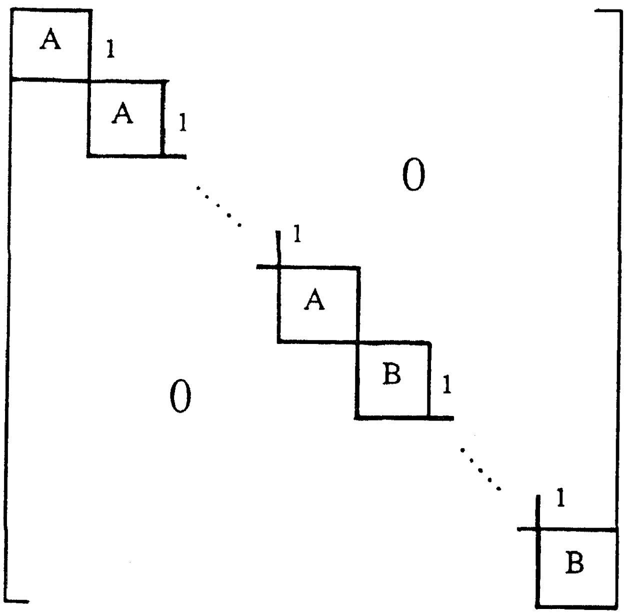
Si $\pi_2=\lambda-m_1$, haciendo un razonamiento análogo obtenemos que $m_1=\alpha_1+\alpha_2=c_1$ y por tanto $\pi_2=\lambda-c_1$.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.22. Sea N un álgebra de Lie tal que posee una base $\{a_1,f_1,\ldots,a_n,f_n,z_1,\ldots,z_m\}$ cumpliendo

$$Z(N)=N^2=F([a_i,a_n],[a_i,f_n],[f_i,a_n],[f_i,f_n]:1\leq i\leq n)=F(z_1,\ldots,z_m)$$

Sea D una derivación de N que tenga matriz asociada por filas en la base anterior



donde A y B responden a uno de los tipos siguientes

Tipo 1 $\quad A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ y $\quad B=[1]$ $\quad$ con $\alpha<-1/4$

Tipo 2 $\quad A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ y $\quad B=[0]$

Tipo 3 $\quad A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}$ $\quad$ y $\quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2\alpha \end{bmatrix}$ $\quad$ con $\alpha^2<4$

Entonces

(i) El álgebra de Lie $L=N\dot{+}(D)$ es resoluble, no superresoluble con nilradical de orden de nilpotencia 3 y $\mathfrak{S}(L)$ es lineal. Además, toda álgebra de Lie real cumpliendo estas condiciones es isomorfa a una de ellas.

(ii) Las álgebras de Lie de los Tipos anteriores son no isomorfas dos a dos y si L_α y L_β son álgebras de Lie del Tipo 1 definidas mediante escalares $\alpha,\beta<-1/4$ tales que $L_\alpha\cong L_\beta$, entonces $\alpha=\beta$.

Demostración. Es una comprobación inmediata ver que L es resoluble, no superresoluble y con nilradical de orden de nilpotencia 3. Además por el teorema (2.6) $\mathfrak{S}(L)$ es lineal.

Sea ahora M un álgebra de Lie real resoluble, no superresoluble con nilradical de orden de nilpotencia 3 y $\mathfrak{S}(M)$ lineal arbitraria. Por las observaciones al comienzo de esta sección tenemos que $M=\mathrm{Nil}(M)\dot{+}(x)$ siendo la acción de $ad_L x$ sobre $\mathrm{Nil}(M)/\mathrm{Nil}(M)^2$ y $\mathrm{Nil}(M)^2$ cíclica con polinomios mínimos $\pi_1^{n_1}$ y $\pi_2^{n_2}$ respectivamente. Además $\pi_1,\pi_2\in \mathrm{Irr}(\mathbb{R})$, $\pi_1\neq\pi_2$ y $\pi_1=\lambda^2-c_1\lambda-c_0$ mientras que $\pi_2=\lambda-c_1$ ó $\pi_2=\lambda^2-2c_1\lambda-4c_0$.

Supongamos en primer lugar $\pi_2=\lambda-c_1$. Si $c_1=0$, entonces tomando $x_1=(1/\sqrt{-c_0})\,x$, tenemos que $M=\mathrm{Nil}(M)\dot{+}(x_1)$ y la acción de $ad_L x_1$ sobre $\mathrm{Nil}(M)/\mathrm{Nil}(M)^2$ es cíclica con polinomio mínimo $(\lambda^2+1)^{n_1}$ y sobre $\mathrm{Nil}(M)^2$ es cíclica con polinomio mínimo λ^{n_2}. Sea ahora una base de M $\{b_1,d_1,\ldots,b_{n_1},d_{n_1},p_1,\ldots,p_{n_2}\}$ tal que la matriz coordenada de $ad_L x_1$ sea la forma canónica racional. Si denotamos por C la matriz anterior, tenemos que C es del Tipo 2. Además como $\mathfrak{S}(M)$ es lineal y $\mathrm{Ker}(\pi_1(ad_L x_1))=F(b_{n_1},d_{n_1})$, aplicando el teorema (2.6) se tiene que

$$Z(M)=\mathrm{Nil}(M)^2=F(p_1,\ldots,p_{n_2})=F([b_i,b_{n_1}],[b_i,d_{n_1}],[d_i,b_{n_1}],[d_i,d_{n_1}]:1\leq i\leq n_1)$$

Por otro lado, si $c_1\neq0$, tomando $x_1=(1/c_1)x$, tenemos que $M=\mathrm{Nil}(M)\dot{+}(x_1)$ y la acción de $ad_L x_1$ sobre $\mathrm{Nil}(M)/\mathrm{Nil}(M)^2$ y $\mathrm{Nil}(M)^2$ es cíclica con polinomios mínimos respectivos $(\lambda^2-\lambda-(c_0/(c_1)^2))^{n_1}$ y $(\lambda-1)^{n_2}$ Observar que

$c_0/(c_1)^2<-1/4$ y por un razonamiento análogo al realizado antes llegamos a que M es del Tipo 1.

Veamos ahora lo que sucede en el caso $\pi_2=\lambda^2-2c_1\lambda-4c_0$. Tomando $x_1=(c_1/\sqrt{-c_0})x$, se tiene que $M=Nil(M)\dot{+}(x_1)$ y la acción de $ad_L x_1$ sobre $Nil(M)/Nil(M)^2$ y $Nil(M)^2$ es cíclica con los siguientes polinomios mínimos $(\lambda^2-(c_1/\sqrt{-c_0})\lambda+1)^{n_1}$ y $(\lambda^2-(2c_1/\sqrt{-c_0})\lambda+4)^{n_2}$ respectivamente. Observar que $(c_1)^2/(-c_0)<4$ y por un razonamiento análogo al realizado antes llegamos a que M ha de ser del Tipo 3.

Solamente queda probar que las álgebras anteriores son no isomorfas dos a dos. Las álgebras del Tipo 2 son de centro no trivial mientras que las de los Tipos 1 y 3 no tienen centro. Luego las álgebras del Tipo 2 son no isomorfas con las de los Tipos 1 y 3. Sean ahora $\alpha, \beta<-1/4$. Denotamos por $L_\alpha=N_\alpha\dot{+}(D_\alpha)$ y $L_\beta=N_\beta\dot{+}(D_\beta)$ las álgebras de Lie del Tipo 1 definidas mediante estos escalares. Si $L_\alpha\cong L_\beta$, entonces existe $z=a+t_1D_\beta$ con $0\neq t_1\in\mathbb{R}$ y $a\in N_\beta$ tal que el polinomio característico de la transformación inducida por $ad_{L_\beta}z$ sobre N_β es $(\lambda^2-\lambda-\alpha)^n(\lambda-1)^m$. Por otro lado teniendo en cuenta la actuación de D_β sobre N_β es una simple comprobación el ver que la transformación $ad_{L_\beta}z$ sobre N_β tiene de polinomio característico $(\lambda^2-t_1\lambda-(t_1)^2\beta)^n(\lambda-t_1)^m$. Por tanto $\alpha=\beta$. Mediante un razonamiento análogo se prueba que dos álgebras de Lie de los Tipos 1 y 3 no pueden ser isomorfas. ♦

Toda álgebra de Lie resoluble, no superresoluble y con retículo de ideales lineal tiene una imagen homomorfa M con retículo de cuatro puntos. Notemos que además Nil(M) tiene orden de nilpotencia menor o igual que 3. Si $Nil(M)^2=0$ el problema de la determinación de M está resuelto por el corolario (2.3). Veamos qué sucede ahora en el caso $Nil(M)^2\neq 0$.

Teorema 2.23. Sea H(3) el álgebra de Heisenberg 3-dimensional. Sean D_0 y D_α con $\alpha<-1/4$ las transformaciones lineales con matrices asociadas en una base estándar de H(3)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

respectivamente. Entonces las álgebras de Lie $L_0=H(3)\dot{+}D_0$ y $L_\alpha=H(3)\dot{+}D_\alpha$ son no isomorfas dos a dos, resolubles, no superresolubles, de nilradical no abeliano y con retículo de cuatro puntos. Además toda álgebra de Lie cumpliendo estas condiciones es isomorfa a una de ellas.

Demostración. Es inmediato que para cada $\alpha\in(-\infty,-(1/4))\cup\{0\}$ L_α es un álgebra de Lie ya que, aplicando el lema (2.14), D_0 y D_α son derivaciones de H(3). Ahora por el teorema (2.22) tenemos que L_α es resoluble, no superresoluble, de nilradical no abeliano y L_α es no isomorfa con L_β si $\alpha\neq\beta$. Resulta una comprobación inmediata el ver que su retículo de ideales es

$$0<H(3)^2<H(3)<L_\alpha$$

Sea ahora L un álgebra de Lie resoluble, no superresoluble de nilradical no abeliano y $\mathfrak{I}(L)$ lineal con retículo de cuatro puntos arbitraria. Entonces el retículo de ideales de L es

$$0<Nil(L)^2<Nil(L)<L$$

Por el teorema (2.22) tenemos que $L=N\dot{+}(x)$ con $Z(N)=N^2$ y la acción de $ad_L x$ sobre N/N^2 y N^2 cíclica con polinomios mínimos respectivos π_1,π_2 tales que

$$(\pi_1,\pi_2)\in\{(\lambda^2-\lambda-\alpha,\lambda-1);(\lambda^2+1,\lambda);(\lambda^2-\beta\lambda+1,\lambda^2-2\beta\lambda+4):\alpha<-1/4,\beta^2<4\}$$

Luego $\dim N/N^2=2$ y por tanto $\dim N^2=1$. Entonces $N=H(3)$ y

$$(\pi_1,\pi_2)=(\lambda^2+1,\lambda) \text{ ó } (\pi_1,\pi_2)=(\lambda^2-\lambda-\alpha,\lambda-1) \qquad \text{para algún } \alpha<-1/4$$

Consideramos ahora para cada caso las bases $B_0=\{a_1,a_2,a_3\}$ y $B_1=\{b_1,b_2,b_3\}$ tales que la matriz coordenada de $ad_L x$ en la base B_i sea

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ para } i=0 \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ para } i=1$$

Notemos que $[a_1,a_2]=t_1a_3$ y $[b_1,b_2]=t_2b_3$ con $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ no nulos. Entonces $B_0=\{a_1,a_2,t_1a_3\}$ y $B_1=\{b_1,b_2,t_2b_3\}$ son bases estándar del álgebra de Heisenberg 3-dimensinal N y por tanto $L\cong L_0$ ó $L\cong L_\alpha$. ♦

SECCION 4ª: Algebras de Lie no resolubles y con retículo de ideales lineal.

Teorema 2.24. Sea L un álgebra de Lie no resoluble. Entonces $\mathfrak{I}(L)$ es lineal con $k+1$ puntos si y sólo si L es una extensión escindible de un álgebra de Lie N de orden de nilpotencia k cuyas series centrales ascendente y descendente coinciden y un álgebra de Lie simple S tal que la acción de S sobre los S-módulos N^i/N^{i+1} es irreducible y $\dim N/N^2>1$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\mathfrak{I}(L)$ es lineal. Por las observaciones al comienzo del párrafo tenemos que L es una suma semidirecta de un álgebra de Lie nilpotente N y un álgebra de Lie simple S.

Veamos ahora que las series centrales ascendente y descendente de N coinciden y que los cocientes N^i/N^{i+1} son S-módulos irreducibles. Para ello bastará con probar que Z(N) es S-módulo irreducible ya que entonces, si m es el orden de nilpotencia de N, se tiene $N^{m-1}=Z(N)$. Como Z(N) es S-módulo y S es un álgebra de Lie simple, entonces Z(N) es completamente reducible (ver [18], p.28). Luego $Z(N)=V_1\dotplus\ldots\dotplus V_n$ con V_i S-módulos ireducibles para $1 \leq i \leq n$. Es claro que V_i es ideal de L y de aquí $Z(N)=V_1$ ya que $\mathfrak{I}(L)$ es lineal. Notemos que Z(N) es el único ideal minimal. De las consideraciones anteriores se deduce que $\dim N/N^2 > 1$ y que el orden de nilpotencia de N ha de ser k.

Veamos ahora el recíproco. Será suficiente con ver que Z(N) es el único ideal minimal de L. Sea entonces P ideal minimal no nulo de L. Como $\dim N/N^2 > 1$, es claro que $[L,N]=N$. Luego por [25], N es el radical de Jacobson de L y por tanto el único ideal maximal. Entonces $P \leq N$ y, aplicando la proposición 8 de [31], P tiene intersección no trivial con Z(N). Como Z(N) es S-módulo ireducible $Z(N) \leq P$. Luego $Z(N)=P$. ♦

La caracterización dada en (2.24) es incompleta, pero nos da dos posibles caminos para la determinación de las álgebras de Lie no resolubles y con retículo lineal. El primero consiste en encontrar, para cada álgebra de Lie nilpotente N tal que s.c.a.(N)=s.c.d.(N), todas las álgebras de Lie simples tales que N^i/N^{i+1} sean S-módulos irreducibles. El segundo en determinar, para cada álgebra de Lie simple S, las álgebras de Lie nilpotentes cumpliendo las condiciones de (2.24). En lo que sigue veremos una aplicación práctica del primer camino.

Sea entonces $N=H(2n+1)$ un álgebra de Heisenberg generalizada. Veamos qué álgebras de Lie no resolubles y con retículo lineal admiten N como nilradical. Notemos además que este tipo de álgebras son las únicas álgebras no resolubles con retículo de cuatro puntos y centro no trivial.

Teorema 2.25. Sea H(2n+1) un álgebra de Heisenberg generalizada y sea $\{a_1,\ldots,a_n,f_1,\ldots,f_n,z\}$ una base estándar de H(2n+1). Sea el espacio vectorial $V=F(a_1,\ldots,a_n,f_1,\ldots,f_n)$ dotado de la forma bilineal antisimétrica no degenerada $(x,y)=\lambda_{[x,y]}$ donde $[x,y]=\lambda_{[x,y]}z$. Consideremos el álgebra de Lie simplética sp(2n,F) sobre V con forma bilineal (x,y). Para cada $A\in sp(2n,F)$ sea A^{τ} la transformación lineal de H(2n+1) con matriz asociada en la base estándar

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline 0\ \ldots\ldots\ldots\ 0 & 0\end{array}\right]$$

Entonces $\tau:sp(2n,F)\to Der(H(2n+1))$ es una representación.

El álgebra de Lie $L=H(2n+1)\dot{+}sp(2n,F)$ tiene retículo de ideales lineal. Además, toda álgebra de Lie no resoluble con retículo lineal y radical un álgebra de Heisenberg generalizada es isomorfa a una del tipo $H(2n+1)\dot{+}S$ donde S es una subálgebra simple de sp(2n+1) tal que el S-módulo $H(2n+1)/H(2n+1)^2$ es irreducible.

Demostración. Notemos que si $A\in sp(2n,F)$, entonces $AB+B(A)^t=0$ (ver [18], p.2) siendo

$$B=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0\end{pmatrix} \quad (2.25.1)$$

Luego por el lema (2.14), Las transformaciones A^{τ} son derivaciones del álgebra H(2n+1). Además, es inmediato probar que τ es una representación. Por tanto $L=H(2n+1)\dot{+}sp(2n,F)$ es un álgebra de Lie. Por otro lado V es sp(2n+1)-irreducible. Esto es cierto si $n\geq 2$ (ver [19], p.137) y si n=1 es una comprobación inmediata. Luego es claro que $H(2n+1)/H(2n+1)^2$ es sp(2n,F)-irreducible. Aplicando ahora el teorema (2.24), $\mathfrak{I}(L)$ es lineal con retículo de cuatro puntos. Además, L es no resoluble y $Z(L)=H(2n+1)^2\neq 0$.

Sea ahora M un álgebra de Lie no resoluble, $\mathfrak{S}(M)$ lineal con Nil(M) un álgebra de Heisenberg generalizada arbitraria. Por el teorema (2.24) tenemos que $M=H(2n+1)\dotplus S$ donde S es simple y $H(2n+1)/H(2n+1)^2$, $H(2n+1)^2$ son S-módulos irreducibles. Como $H(2n+1)^2$ es 1-dimensional es claro que $[H(2n+1)^2,S]=0$. Denotamos por $H(2n+1)^2=F(z_1)$. Entonces existe V_1 S-módulo irreducible tal que $H(2n+1)=V_1\dotplus F(z_1)$. Además, V_1 posee una base $\{b_1,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_n\}$ con productos $[b_i,c_j]=\delta_{ij}z_1$. Sea ahora la representación adjunta $ad_L:S\rightarrow gl(H(2n+1))$. Para cada $s\in S$ la transformación $s^{ad_L}\in Der(H(2n+1))$, luego por el lema (2.14) s^{ad_L} tiene por matriz asociada en la base $\{b_1,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_n,z_1\}$ una matriz del tipo

$$\left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ C & \vdots \\ & 0 \\ \hline 0 \;\ldots\ldots\; 0 & 0 \end{array}\right]$$

donde $CB+B(C)^t=0$ siendo B la matriz de (2.25.1). Sea ahora σ la representación ad_L restringida a V_1. Por ser S simple, $S\cong S^{\sigma}$. Claramente S^{σ} es isomorfa a una subálgebra simple S_1 de sp(2n,F). Consideramos el álgebra $L_1=H(2n+1)\dotplus S_1$ que es subálgebra de $L=H(2n+1)\dotplus sp(2n,F)$. Identificando ahora los elementos de S y de S_1 se tiene que $\Phi:M\rightarrow L_1$ definida por $\Phi(b_i)=a_i$, $\Phi(c_i)=f_i$, $\Phi(z_1)=z$ y $\Phi(s)=s$ para cualquier $s\in S$ es un isomorfismo de álgebras de Lie. ♦

Corolario 2.26. Sea L un álgebra de Lie no resoluble, de centro no trivial y tal que $\mathfrak{S}(L)$ es lineal con cuatro puntos. Entonces Rad(L) es un álgebra de Heisenberg generalizada y L/Rad(L) es un álgebra de Lie simple de uno de los siguientes tipos:

(i) Si $Rad(L)=H(2n+1)$ siendo $3\leq n$, entonces S es una subálgebra simple de un álgebra de Lie del tipo C_n.

(ii) Si $Rad(L)=H(5)$, entonces S es una subálgebra simple de un álgebra de Lie del tipo B_2.

(iii) Si $Rad(L)=H(3)$, entonces $L/Rad(L)\cong sl(2,F)$. ♦

Corolario 2.27. Para cada $n \in \mathbb{N}$ el álgebra de Lie no resoluble de mayor dimensión con centro no trivial y retículo lineal con de cuatro puntos es $L=H(2n+1)\dotplus sp(2n,F)$ construida en (2.25). Además, cualquier otra con nilradical $H(2n+1)$ está sumergida en L. ♦

El siguiente resultado prueba que existen también álgebras de Lie no resolubles, con retículo lineal y radical de orden de nilpotencia 4.

Proposición 2.28. Sea L no resoluble, $\mathfrak{I}(L)$ lineal y tal que $Rad(L)/Rad(L)^3$ es un álgebra de Heisenberg 3-dimensional y $Rad(L)^4=0$. Entonces L posee una base $\{a_0, a_1, b_0, c_0, c_1, e, f, h\}$ con la siguiente tabla de productos no nulos

$[f,a_0]=0$	$[f,a_1]=a_0$	$[f,b_0]=0$	$[f,c_0]=0$	$[f,c_1]=c_0$
$[e,a_0]=a_1$	$[e,a_1]=0$	$[e,b_0]=0$	$[e,c_0]=c_1$	$[e,c_1]=0$
$[h,a_0]=-a_0$	$[h,a_1]=a_1$	$[h,b_0]=0$	$[h,c_0]=-c_0$	$[h,c_1]=c_1$
$[a_0,a_1]=b_0$	$[a_0,b_0]=c_0$	$[a_1,b_0]=c_1$	$[a_0,c_0]=0$	$[a_0,c_1]=0$
$[a_1,c_0]=0$	$[a_1,c_1]=0$	$[b_0,c_0]=0$	$[b_0,c_1]=0$	$[c_0,c_1]=0$
$[f,h]=2f$	$[f,e]=-h$	$[e,h]=-2e$		

Demostración. Notemos que por el corolario (2.26) $L/Rad(L)^3 \cong H(3)\dotplus sl(2,F)$. Luego $L=Nil(L)\dotplus sl(2,F)$ siendo $Nil(L)/Nil(L)^2$ y $Nil(L)^2/Nil(L)^3$ $sl(2,F)$-módulos irreducibles de dimensión 2 y 1 respectivamente. Tomamos en $sl(2,F)$ la base $\{e, f, h\}$ con tabla de productos

$$[f,h]=2f \qquad [f,e]=-h \qquad [e,h]=-2e$$

Para cada natural $0\leq m$ sabemos que existe un único $sl(2,F)$-módulo irreducible $V(m)$ de dimensión $m+1$ (ver [18], p.32). Llamaremos base estándar de $V(m)$ a una base $\{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$ de tal forma que la acción de $sl(2,F)$ sobre ella es como sigue

$$f\cdot a_i=i(m+1-i)b_{i-1} \text{ para } 1\leq i\leq m$$

$$h\cdot b_i=(2i-m)b_i \text{ para } 0\leq i\leq m$$
$$e\cdot b_i=b_{i+1} \text{ para } 0\leq i\leq m-1 \qquad (2.29.1)$$
$$f\cdot b_0=e\cdot b_m=0$$

Ahora, teniendo en cuenta las observaciones iniciales tenemos que $\mathrm{Nil}(L)^2=\mathrm{Nil}(L)^3\dotplus V(0)$ y que $\mathrm{Nil}(L)=\mathrm{Nil}(L)^3\dotplus V(0)\dotplus V(1)$. Sea $\{a_0,a_1\}$ base estándar de $V(1)$. Se tiene que $\mathrm{Nil}(L)^2=[V(1),V(1)]+[V(1),V(0)]$ ya que $\mathrm{Nil}(L)^3=Z(\mathrm{Nil}(L))$. Notemos que $[V(1),V(1)]$ es $sl(2,F)$-módulo. Luego como $\mathrm{Nil}(L)^3$ es $sl(2,F)$-irreducible se tiene que $\mathrm{Nil}(L)^3\cap[V(1),V(1)]=0$ ó $\mathrm{Nil}(L)^3\cap[V(1),V(1)]=\mathrm{Nil}(L)^3$. Si $\mathrm{Nil}(L)^3\cap[V(1),V(1)]=\mathrm{Nil}(L)^3$, entonces $\mathrm{Nil}(L)^2=F([a_0,a_1])$ lo cual es una contradición ya que $2\leq\dim\mathrm{Nil}(L)^2$. Luego $\mathrm{Nil}(L)^2=\mathrm{Nil}(L)^3\dotplus[V(1),V(1)]$. Denotamos por $b_0=[a_0,a_1]$. Notemos que $[V(1),V(1)]=F(b_0)$ es $sl(2,F)$-módulo irreducible. Por otro lado tenemos que $\mathrm{Nil}(L)^3=[\mathrm{Nil}(L)^2,\mathrm{Nil}(L)]=F([a_0,b_0],[a_1,b_0])$. Si $[a_0,b_0]=0$, entonces, haciendo uso de la identidad de Jacobi, se tiene la siguiente igualdad $0=[e[a_0,b_0]]=[a_1,b_0]$. Luego $\mathrm{Nil}(L)^2=0$ lo cual es una contradición. Por tanto $[a_0,b_0]\neq0$ y además $[h[a_0,b_0]]=-[a_0,b_0]$. Por tanto $\mathrm{Nil}(L)^3$ es 2-dimensional. Por último, denotando por $c_0=[a_0,b_0]$ y $c_1=[a_1,b_0]$ se comprueba de forma inmediata que $\{c_0,c_1\}$ es base estándar de $\mathrm{Nil}(L)^3$. ♦

Mediante un procedimiento análogo al empleado en la demostración de (2.28) hemos obtenido también un álgebra de Lie L no resoluble y $\mathfrak{S}(L)$ lineal tal que $\mathrm{Rad}(L)/\mathrm{Rad}(L)^3$ es un álgebra de Heisenberg 3-dimensional y $\mathrm{Rad}(L)^5=0$. El álgebra L posee una base $\{a_0,a_1,b_0,c_0,c_1,z_0,z_1,z_2,e,f,h\}$ con la siguiente tabla de productos no nulos

$[f,a_0]=0$	$[f,a_1]=a_0$	$[f,b_0]=0$	$[f,c_0]=0$	$[f,c_1]=c_0$
$[f,z_0]=0$	$[f,z_1]=2z_0$	$[f,z_2]=2z_1$	$[e,a_0]=a_1$	$[e,a_1]=0$
$[e,b_0]=0$	$[e,c_0]=c_1$	$[e,c_1]=0$	$[e,z_0]=z_1$	$[e,z_1]=z_2$

$[e,z_2]=0$	$[h,a_0]=-a_0$	$[h,a_1]=a_1$	$[h,b_0]=0$	$[h,c_0]=-c_0$
$[h,c_1]=c_1$	$[h,z_0]=-2z_0$	$[h,z_1]=0$	$[h,z_2]=2z_2$	
$[a_0,a_1]=b_0$	$[a_0,b_0]=c_0$	$[a_1,b_0]=c_1$	$[a_0,c_0]=2z_0$	$[a_0,c_1]=z_1$
$[a_1,c_0]=z_1$	$[a_1,c_1]=z_2$	$[a_0,z_0]=0$	$[a_0,z_1]=0$	$[a_0,z_2]=0$
$[a_0,z_0]=0$	$[a_0,z_1]=0$	$[a_0,z_2]=0$	$[b_0,c_0]=0$	$[b_0,c_1]=0$
$[b_0,z_0]=0$	$[b_0,z_1]=0$	$[b_0,z_2]=0$	$[c_0,c_1]=0$	$[c_0,z_0]=0$
$[c_0,z_1]=0$	$[c_0,z_2]=0$	$[c_1,z_0]=0$	$[c_1,z_1]=0$	$[c_1,z_2]=0$
$[z_0,z_1]=0$	$[z_0,z_2]=0$	$[z_1,z_2]=0$		
	$[f,h]=2f$	$[f,e]=-h$	$[e,h]=-2e$	

De la misma forma se pueden obtener retículos de k+1 puntos con $6\leq k$.

Notemos por último que las álgebras de Lie que pueden ser obtenidas haciendo uso de la técnica empleada en (2.28) son las álgebras de Lie no resolubles y con retículo lineal que admiten como radical un álgebra de Lie nilpotente N tal que N/N^3 es un álgebra de Heisenberg.

BIBLIOGRAFIA

[1] Amayo, R. K., Schwarz, J.: *Modularity in Lie algebras,* Hiroshima Math. J. 10 (1980), 311-322.

[2] Barnes, D. W.: *Lattice isomorphisms of Lie algebras,* J. Austral. Math. Soc. 4 (1964), 470- 475.

[3] Barnes, D. W.: *On Cartan subalgebras of Lie algebras,* Math. Z. 101 (1967), 350-355.

[4] Barnes, D. W., Newell, M. L.: *Some Theorems on saturated homomorphs of soluble Lie algebras,* Math. Z. 115 (1970), 179-187.

[5] Barnes, D. W.: *Lattice automorphisms of semisimple Lie algebras,* J. Austral. Math. Soc. 16 (1973), 43-53.

[6] Belifante, J. G. F., Kolman B.: "A survey of Lie algebras with applications and computational methods", S.I.A.M. (1972).

[7] Benito, M. P. , Varea V. R.: *On the lattice of ideals of a nilpotent Lie algebra.* Por aparecer.

[8] Bourbaki, N.: "Eléments de Mathématics: Algèbre Commutative", Ch. 7, Hermann, Paris (1965).

[9] Elduque, A. C., Varea V.: *Lie algebras all of whose subalgebras are supersolvable,* Canadian Math. Society, Conference Proceedings, vol. 5 (1986)

[10] Gein, A.G., Kuznecov S. V.: *Minimal non nilpotent Lie algebras,* Ural. Gos. Univ. Mat. Zap. 8 (treated 3), (1972), 18-27.

[11] Gein, A. G.: *Projectivities of solvable Lie algebras,* Issled. Sovrem. Algebra, Ural. Gos. Univ. Mat. Zap. 10, no. 1,, 150 (1976), 3-15.

[12] Gein, A.G.: *Semimodular Lie algebras,* Sibirsk. Mat. Z. 17 (1976), 243-248 (translated in Siberian Math. J. 17 (1976), 243-248).

[13] Gein, A.G.: *On subalgebra lattices of nilpotent Lie algebras,* Issled. Sovrem. Algebre, Mat. Zap.11,No 1 (1978), 10-25.

[14] Gein, A. G., Muhin, *Complements to subalgebras of Lie algebras,* Ural. Gos. Univ. Zap. 12 (1980), 2, 24-48.

[15] Gein, A.G.: *Modular subalgebras and projections of locally finite dimensional Lie algebras of characteristic zero*, Ural. Gos. Univ. Mat. Zap. 13 (1983), 39-51.

[16] Goto, M.: *Lattices of subalgebras of real Lie algebras*, J. Algebra 11 (1969), 6-24.

[17] Greub, W.: "Linear Algebra", Springer-Verlag, 4ªEdición (1975).

[18] Humphreys, J. E.: "Introduction to Lie algebras and Reprensentation Theory", Springer-Verlag (1972).

[19] Jacobson, N.: "Lie Algebras", Wiley- Interscience, New York (1962).

[20] Jacobson, N.: "Lectures in Abstract Algebras", tomos I y II, Springer-Verlag (1975).

[21] Jensen C. U.: *Arithmetical Rings*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 17, 115-123 (1966).

[22] Kolman, B.: *Semi-modular Lie algebras*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-1 29 (1965), 149-163.

[23] Kolman, B.: *Relatively Complemented Lie algebras*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-1 31 (1967), 1-11.

[24] Lashi, A. A.: *On Lie algebras with modular lattices of subalgebras*, J. Algebra 99 (1986), 80-88.

[25] Marshall, E. J.: *The Frattini subalgebra of a Lie algebra*, J. London Math. Soc., 42 (1967), 416-422.

[26] Ore, O.: *Structures and group theory I*, Duke Math. Journal 3 (1937), 149-173.

[27] Premet, A.A.: *Lie algebras without Strong degeneration*, Math. USSR Sb. 57 (1987), 151-163.

[28] Stanley, R.P.: *Supersolvable Lattices*, Algebra Univ. Vol.2, 1972, 197-217.

[29] Stewart, I.: "Subideals of Lie algebras", Ph. D. thesis, Univ. of Warwick (1969)

[30] Stitzinger, E. L.: *Frattini subalgebras of a class of solvable Lie algebras*, Pacific J. of Math., vol. 34 (1970), 117-182.

[31] Stitzinger, E. L.: *On the Frattini subalgebra of a Lie algebra*, London Math. Soc. (2), 2 (1970), 429-438.

[32] Stitzinger, E. L.: *Minimal non nilpotent Lie algebras*, Proc. of the American Math. Soc., vol. 28, no. 1 (1971).

[33] Suzuki, M.: "Structure of a group and the Structure of its Lattice of Subgroups", Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 10 (1956), Springer, Berlin.

[34] Towers, D. A.: *A Frattini theory for algebras*, Proc. London Math. Soc. (3), 27 (1973), 440-462.

[35] Towers, D. A.: *Lie algebras all whose proper subalgebras are nilpotent*, Linear Algebra and its applications, 32 (1980), 61-73.

[36] Towers, D. A.: *Lattice isomorphisms of Lie algebras*, Math. Proc. Phil. Soc. 89 (1981), 285-292 ; corrigenda, 95, (1984), 511-512.

[37] Towers, D. A.: *Lattice automorphisms of Lie algebras*, Arch. Math. 46 (1986), 39-43.

[38] Towers, D. A.: *Semi-modular subalgebras of a Lie algebra*, J. Algebra 103 (1986), 202-207.

[39] Varea, V. R.: *Lie algebras whose maximal subalgebras are modular*, Proc. of the Royal Soc. of Edinbourgh, 94 A (1983), 9-13.

[40] Varea, V.R.: *On the Lie algebras in which the relation of being an ideal is transitive*, Communications in Algebra, 13 (5) (1985), 1135-1150.

[41] Varea, V.R.: *The subalgebra Lattice of a supersolvable Lie algebra*, Workshop on Lie algebras of prime characteristic,(1987), Lecture Notes in Math., 1373, 81-92.

[42] Varea, V.R.: *On modular subalgebras in Lie algebras of prime characeristic*, Contemporary Math. Series (1988). Por aparecer.

[43] Varea J.J., Varea V.R.: *El retículo de subálgebras de un álgebra de Lie*. Libro en honor del Profesor D. Antonio Plans Sanz de Bremond. Por aparecer.

[44] Völklein, H.: *Lattice isomorphisms of Lie algebras and algebraic groups*, J. Algebra 107 (1987), no. 1, 82-97.

[45] Winter, D. J.: "Abstract Lie Algebras", The M.I.T. Press Cambridge, Massachusetts and London, England (1972).

SECCION 1 (1989)

1. J. BASTERO, Y RAYNAUD, M. L. REZOLA. AN EXPLICIT EXPRESSION FOR THE K_r AND J FUNCTIONALS OF INTERPOLATION BETWEEN L^p SPACES. 1989.

2.- J. BASTERO, J. BERNUES., N. KALTON. EMBEDDING 1_n -CUBES INFINITE -DIMENSIONAL SYMMETRIC SPACES. 1989.

3.- M. MACHO, M. A. PRADA. t*-FUZZY TOPOLOGICAL CONCEPTS. 1989.

4.- M. MACHO STADLER, M. A. DE PRADA VICENTE. STRONG-SEPARATION AND STRONG-COUNTABILITY IN FUZZY TOPOLOGICAL SPACES. 1989.

5.- J. J. RUBIO BENITO. EFFECTIVE HOMOLOGY AND THE EILENBERG-MOORE SPECTRAL SEQUENCE. 1989.

6.-A. ELDUQUE. SOBRE ISOMORFISMOS DEL ALGEBRA DE COLOR. 1989.

7.-A. ELDUQUE. QUADRATIC ALTERNATIVE ALGEBRAS. 1989

8.- J.A. ADELL PASCUAL. CONSTRUCTION OF SUPERMARTINGALES FROM A FAMILY OF RANDOM VARIABLES. 1989.

9.- J.A. ADELL PASCUAL. OPTIMAL STOPPING IN MARKOV PROCESSES WITH RANDOM HORIZON. 1989.

10.- M. CALVO, J. I. MONTIJANO. THE STABILITY OF VARIABLE STEPSIZE BDF METHODS WITH THE AVERAGING TECHNIQUE FOR CHANGING STEPSIZE. 1989.

11.- J. C. JORGE, L. RANDEZ. UN ALGORITMO PARA EL CALCULO DE LAS CONDICIONES DE ORDEN p, CON p ARBITRARIO PARA UN METODO RUNGE-KUTTA. 1989.

12.- M. CALVO, J. I. MONTIJANO, L. RANDEZ. A NEW EMBEDDED PAIR OF RUNGE-KUTTA FORMULAS OF ORDERS 5 AND 6. 1989.

13.- J. C. CANDEAL, E. INDURAIN. SOBRE REPRESENTABILIDAD DE CADENAS MEDIANTE FUNCIONES DE UTILIDAD. 1989.

14.- O. BLASCO, QUANHUA XU. INTERPOLATION BETWEEN VECTOR-VALUED HARDY ESPACES. 1989.

15.- O. BLASCO.VECTOR VALUED MEASURES OF BOUNDED MEAN OSCILATION. 1989.

16.- F. J. RUIZ. VECTOR VALUED CALDERON-ZYGMUND THEORY APPLIED TO TENT SPACES. 1989.

17.- J.E. GALE, T.J. RANSFORD, M.C. WHITE. WEAKLY COMPACT HOMOMORPHISMS. 1989.

18.- J. E. GALE. WEAKLY COMPACT HOMOMORPHISMS BETWEEN JORDAN-BANACH ALGEBRAS. 1989.

19.- J. BASTERO, M. L. REZOLA. A NOTE ON THE ISOMETRIC PROBEM OF INTERPOLATION BETWEEN L^p SPACES. 1989.

SECCION 2

1.- GUSTAVO OCHOA. LOS GRUPOS DE AUTOMORFISMOS DE LOS ANILLOS DE BURNSIDE DE LOS GRUPOS FINITOS HAMILTONIANOS Y DIEDRICOS. 1984.

2.- ALBERTO J. ABAD. ESTUDIO DE SISTEMAS ESTELARES MULTIPLES. 1984

3.- M. PILAR GALLEGO. CLASES DE GRUPOS FINITOS RESOLUBLES DEFINIDOS POR INYECTORES. 1984

4. - ALBERTO ELDUQUE. ESTRUCTURA DE UN ALGEBRA DE MALCEV A TRAVES DE SU RETICULO DE SUBALGEBRAS. 1984.

5 - CARMEN SAFONT. SOBRE CUBIERTAS RAMIFICADAS. 1984.

6. - MIGUEL PAREDES HERNANDEZ. PROLONGACION DE VALORES ABSOLUTOS EN ANILLOS DE DIVISION. 1984.

7. - LUIS A IBORT. ESTRUCTURA GEOMETRICA DE LOS SISTEMAS CON SIMETRIA EN MECANICA CLASICA Y TEORIA CLASICO DE CAMPOS. 1985.

8. -M. A. TRIANA. ESPACIOS F-NORMADOS DE FUNCIONES Y SUCESIONES VECTORIALES. 1985.

9. - J. M. MORENO JIMENEZ. MODELOS AUTORREGRESIVOS EN LA ESTIMACION DE SERIES TEMPORALES ESTACIONARIAS. 1985.

10. - E. INDURAIN. SOBRE GEOMETRIA DE SUCESIONES EN ESPACIOS DE BANACH POSICION UNIDAD. 1985.

11. - F. GARCIA. GEOMETRIA DE LOS HIPERPLANOS ASOCIADOS A UNA SUCESION EN UN ESPACIO DE BANACH. APLICACION AL PROBLEMA DE LA SIMPLIFICACION LINEAL. 1985

12. - M. J. CHASCO. SUCESIONES EN LA GEOMETRIA AFIN DEL ESPACIO DE BANACH. 1985.

13. - ANA FERNANDEZ-FERREIROS. ESTUDIO ANALITICO DE LIBRACIONES LUNARES. 1985.

14. - OSCAR BLASCO. ESPACIOS DE HARDY DE FUNCIONES DE VALORES VECTORIALES. 1985.

15. -M. C. MINGUEZ. CALCULO DIFERENCIAL SINTETICO Y SU INTERPRETACION EN MODELOS DE PREHACES. 1985.

16. - J. M. PEÑA FERNANDEZ. GRUPOS LOCALMENTE GRADUADOS MINIMALES NO (CC GRUPOS). 1986.

17. - M. T. RIVAS. SOBRE INVARIANTES DE HOMOTOPIA PROPIA Y SUS RELACIONES. 1987.

18. - J. I. EXTREMIANA. UNA TEORIA DE OBSTRUCCION PARA LA EXTENSION Y CLASIFICACION DE APLICACIONES PROPIAS. 1987.

19.- M.A. NAVASCUES. LA ECUACION DE RAYLEIGH-BERNARD. 1987.

19. - VICTOR ARENZANA HERNANDEZ. LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS EN ESPAÑA EN EL SIGLO XVIII. LA ESCUELA DE MATEMATICAS DE LA REAL SOCIEDAD ECONOMICA ARAGONESA DE AMIGOS DEL PAIS. 1988.

20. - J. J. RUBIO GARCIA. HOMOLOGIA EFECTIVA Y SUCESION ESPECTRAL DE EILENBERG-MOORE. 1988.

21. - J. A. LALIENA. ESTRUCTURA RETICULAR Y CUASIIDEAL EN ALGEBRAS ALTERNATIVAS. 1988.

22. - JUAN LUIS VARONA MALUMBRES. CONVERGENCIA EN Lp PESOS DE LA SERIE DE FOURIER RESPECTO DE ALGUNOS SISTEMAS ORTOGONALES. 1989.

23. - M. PILAR BENITO CLAVIJO. RELACIONES ENTRE LA ESTRUCTURA DE UN ALGEBRA DE LIE Y EL RETICULO DE SUS IDEALES. 1989.

24. - MARIO PEREZ RIERA. SERIES DE FOURIER RESPECTO DE SISTEMAS ORTOGONALES: ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA EN ESPACIOS DE LEBESGUE Y DE LORENTZ. 1989.

SECCION 3

1. - CLAUDE BREZINSKI. CONVERGENCE ACCELERATION METHODS: THE PAST DECADE. 1984.

2. - JOSE MARIA MONTESINOS. REVETEMENTS RAMIFIES DE NOEUDS, ESPACES FIBRES DE SEIFERT ET SCINDEMENTS DE HEEGARD. 1984.

3. - J. BASTERO. TECNICAS MODERNAS EN LA TEORIA DE LOS ESPACIOS DE BANACH. 1985.

4. - E. DOMINGUEZ. GEOMETRICAL INTRODUCTION TO BORDISM THEORY. 1985.

5. - F. JAVIER RIBERA. LA FORMULACION HAMILTONIANA TRANSFORMACIONES CANONICAS. 1985.

6. - PAUL VER EECKE. LE GROUPOIDE FONDAMENTAL D'UN FEUILLETAGE DE STEFAN. 1986.

7. - E. INDURAIN. SEQUENCES IN BANACH SPACES: SOME PROPERTIES AND APPLICATIONS FROM A GEOMETRICAL POINT OF VIEW. 1986.

8. - R. AYALA, A. QUINTERO. CLASIFICACION HOMOTOPICA DE LOS FIBRADOS. 1987.

9. - W. T. VAN EST. FOLIACIONES, ESTRUCTURA COCIENTE Y VARIEDADES. 1987.

10. - T. PORTER. PROPER HOMOTOPY, PROHOMOTOPY AND COHERENCE. 1987.

11. - JUAN LUIS VARONA MALUMBRES. CONVERGENCIA DE SERIES DE FOURIER RESPECTO DE SISTEMAS ORTOGONALES. 1987.

12. -- R. AYALA, E. DOMINGUEZ, A. QUINTERO. TOPOLOGIA POLIEDRAL+ 1987.

13. - B. GAMBOA DE BUEN. COMPLEMENTACION EN ESPACIOS DE BANACH. 1987.

SECCION 4

1. - J. M. MORENO, A. PEREZ, M. P. LASALA. TEORIA DE GRAFOS EN LA PROGRAMACION Y CONTROL DE PROYECTOS. 1985.

2. - MANUEL VAZQUEZ. UNA INTRODUCCION AL LENGUAJE LISP. 1986.

3. - M. JESUS LAPEÑA. CALCULO DE SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES, COMPARACION DE METODOLOGIA REPRESENTACION GRAFICA. 1987.

SECCION 5

1. - PILAR LASALA. UN JUEGO DE CEROS Y UNOS. 1985.

2. - M. A. ALVAREZ, R. ARRIBAS, B. GARCIA, M. P. LASALA. RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES POR SIMULACION DE CADENAS DE MARKOFF. 1985.

3. - PASCUAL LLORENTE. MATEMATICAS E INFORMATICA. 1985.

4. - ARACELI MARTIN. ESTRUCTURA FORMAL Y POLITICA DEL PARLAMENTO CATALAN DE 1980. 1985

5. - A. PEREZ, J. ESCRIBANO, R. ARRIBAS. RESOLUCION DE SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES. 1985.

6. - JESUS CARNICER. SOBRE ENDOMORFIRMOS NORMALES Y SUBESPACIOS INVARIANTES. 1986.

7. - J. RIBERA PASCUAL. MODELOS MATEMATICOS. MATEMATICAS APLICADAS. 1986.

8. - J. RIBERA PASCUAL. LA FORMULACION LAGRANGIANA DE LA MECANICA. 1986.

9. - L. J. HERNANDEZ. HISTORIA DEL QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES. 1986.

10. - E. DOMINGUEZ, ED. CONFERENCIAS EN UNA CLASE DE PRACTICAS. 1987.

11. - J. J. RUBIO. CALCULO CON ORDENADOR DEL GRUPO FUNDAMENTAL DE UN COMPLEJO SIMPLICIAL ABSTRACTO. 1987.

12. - M. PEREZ. CALCULO CON ORDENADOR DE POLINOMIOS ORTOGONALES Y DE SUS RAICES. 1987.

13. - M. SANCHEZ, A. PEREZ, M. J. DOMENECH. TRANSFORMACION DE PRINCIPIOS DE CONSISTENCIA ALEATORIOS EN DETERMINISTICOS. 1987.

14. - M. C. MINGUEZ. CALCULO INFINITESIMAL SINTETICO. 1987.

15. - J. A. ANQUELA, T. CORTES. EL ENIGMA DE LA PERFECCION. 1987.

16. - M. BENITO. PROXIMIDADES Y TOPOLOGIAS. 1987.

17. - J. C. CANDEAL, J. J. MARTINEZ, L. RANDEZ. APLICACION DE METODOS NUMERICOS PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES NO LINEALES AL ESTUDIO DEL FENOMENO ECONOMICO "CICLOS DE LA TELARAÑA". 1987.

18. - JOSE MARIA MORENO JIMENEZ. EL PROCESO DE TOMA DE DECISIONES EN EL CONTEXTO ECONOMICO-EMPRESARIAL. MODELO AEIOU. 1989.

19. - ACADEMIA GENERAL MILITAR (5º *curso*), DTO. METODOS ESTADISTICOS. MODELOS MATEMATICOS DE DECISION Y SIMULACION. 1989.

20. - ESTEBAN INDURAIN. SOBRE RELACIONES DE PREFERENCIA. 1989.

SECCION 6

1. - ISABEL GOICOECHEA, JUANA MARIA MARTINEZ, MARIA DEL CARMEN PRADOS. TRABAJANDO CON LOGO LAS FRACCIONES EN EL CICLO SUPERIOR DE E.G.B. 1987.

2. - GUY BROUSSEAU. FUNDAMENTOS DE DIDACTICA DE LA MATEMATICA. 1989.

SECCION 7

1. - AURORA LACRUZ. K-ALGEBRAS COCARTESIANAS. 1989.