Contribuciones invitadas

XIII Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora

CIEMAC

TEC Tecnológico de Costa Rica · Universidad de La Rioja · Universitat de les Illes Balears

Escuela de Matemática

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Contribuciones invitadas

XIII CIEMAC

2023

Índice

Créditos

Citar como

Páez, C., Alpízar, G., Carbonell, C., Ribera, J. M., y Marín, M.(eds.) (2024). *Contribuciones invitadas XIII Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora*. Instituto Tecnológico de Costa Rica, Universidad de La Rioja

Portada: Ricardo Alfieri. ”Danta” serigrafía, 2023.

ISBN 978-84-09-51629-2 (pdf)

Entidades colaboradoras

TEC | Tecnológico de Costa Rica

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

UIB | Universitat de les Illes Balears

Introducción

El propósito de este libro es recoger los conocimientos y experiencias de profesores invitados, vinculados a la educación matemática, cada uno bajo distintos enfoques, con el objetivo final de proporcionar un valioso recurso para los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Las propuestas presentadas, que provienen de distintos puntos geográficos del mundo como Costa Rica, España, Puerto Rico y Canadá, recogen diversas áreas de la educación matemática. Los dos primeros capítulos abordan un tema fundamental en la Didáctica de la Matemática: la educación STEM. En el tercer capítulo el autor analiza los retos y posibilidades inherentes al proceso educativo de las matemáticas. Los últimos dos capítulos ponen el énfasis en la resolución de problemas: el primero se centra en la transformación de las tareas de los libros de texto y el segundo aborda una metodología eficaz para las competiciones matemáticas.

El primer capítulo, que tiene por título ”Educación STEM en Matemática” y cuyos autores son Mario Marín (Instituto Tecnológico de Costa Rica) y Juan Miguel Ribera (Universidad de Islas Baleares), explora la integración de la tecnología en la educación matemática. Esta incorporación en el aula es concebida como una estrategia clave para abordar los nuevos desafíos en educación y en la publicación se exponen diversos enfoques. Se presentan algunas posibilidades como las ofrecidas por robots y kits educativos, juegos como Minecraft y las realidades aumentada y virtual. Los autores exponen la necesidad de abrazar el cambio y la innovación en la educación matemática, aprovechando las oportunidades que ofrecen las tecnologías emergentes y el enfoque interdisciplinario de la educación STEM. El segundo capítulo ”Modelizando en tres dimensiones para la resolución de problemas de matemáticas con un enfoque STEAM”, de Lucía Rotger (Universidad de Islas Baleares), a través de la tecnología de impresión 3D, resalta la función central de las matemáticas como el lenguaje unificador de las disciplinas STEAM, apoyando visiones clásicas sobre la enseñanza de la matemática como una actividad humana interconectada con elementos reales y relevantes para la sociedad. La autora muestra la convergencia de la modelización matemática y la impresión 3D en la educación STEAM, haciendo uso de herramientas como Tinkercad y BlocksCAD. La propuesta está acompañada de problemas matemáticos, que dejan de manifiesto el papel crucial que juega la interacción entre matemáticas y tecnología emergente en el enriquecimiento de la experiencia educativa.

En el tercer capítulo, que lleva por título ”Desafíos y oportunidades de la enseñanza de la matemática en entornos digitales, reflexiones de un profe de mate”, desarrollado por Carlos González (Instituto Tecnológico de Costa Rica), se analizan algunas claves, desafíos y potenciales para tener en cuenta en el ámbito educativo de la enseñanza de las matemáticas. Bajo el prisma de un docente con una amplia experiencia se presentan varias ideas alrededor de conceptos como similitud, simetría, matemática visual, análisis de datos, etc., presentados como insumos para que los estudiantes puedan asimilar y degustar la matemática. De igual manera, se presentan habilidades como aprender a aprender, autodisciplina, ética, fortalecimiento de la curiosidad, etc., que se vuelven elementos imperativos para promover una comprensión más profunda y aplicada de las matemáticas en la vida cotidiana y en el ámbito profesional.

Los dos últimos capítulos están más centrados en la resolución de tareas matemáticas. En ”Sobre la relación entre tareas y pensamiento matemático”, Ildiko Pelczer (Universidad Concordia) detalla cómo ciertas tareas típicas de los libros de texto pueden transformarse en ocasiones de exploración al cambiar las preguntas, al solicitar generalizaciones o al pedir propuestas de situaciones posibles o imposibles. La autora, basándose en su experiencia en el proyecto ”círculos matemáticos” durante los últimos ocho años, ofrece ejemplos de tareas de construcción para estudiantes de primaria, discutiendo sus características y, en última instancia, discute el papel del maestro en la integración de estas tareas en el proceso normal de enseñanza. Para concluir, en ”Metodología de enseñanza en espiral en competencias de matemáticas”, Luis Cáceres y Víctor Reyes, ambos profesores de la Universidad de Puerto Rico en Mayagüez, presentan la estrategia de enseñanza y aprendizaje a través del modelo de espiral. Esta metodología, busca promover las competiciones matemáticas mediante etapas, revisando conceptos y profundizando a medida que se va integrando conocimiento nuevo. Los autores examinan el aprendizaje en espiral y presentan ejemplos (de conteo, álgebra y geometría) de esta metodología, sobre todo centrándose en olimpiadas matemáticas, tanto las que tienen como objetivos la popularización de las matemáticas como las que están orientadas hacia estudiantes talentosos. Los mismos, defienden que es precisamente en estas competiciones donde es más fructífera esta metodología, debido a la voluntad de los estudiantes participantes, que buscan enfrentarse a problemas más retadores.

Pensamos que las distintas propuestas y enfoques recogidos en este libro lo convierten en una lectura altamente enriquecedora y atractiva para todos los integrantes de la comunidad de educación en matemáticas.

Carlos Carbonell Urtubia
Universidad de La Rioja, España

Capítulo 1

Educación STEM en Matemática

Mario Marín Sánchez[a] y Juan Miguel Ribera Puchades[b]

[a] *Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica*
[b] *Departamento de Ciencias Matemáticas e Informáticas, Universitat de les Illes Balears, España*

1.1 Introducción

En la actualidad, la educación se ha convertido en uno de los temas más sensibles y prioritarios en la agenda política. Su relevancia radica en su estrecha relación con el desarrollo integral y sostenible de los países y sus ciudadanos. En este contexto, dos vertientes fundamentales plantean desafíos significativos que requieren transformación y adaptación.

Por un lado, presenciamos cambios tecnológicos vertiginosos, una explosión en el crecimiento y valor de la información, la volatilidad en el concepto de individuo y su contexto, la creciente competitividad, la evolución de perfiles profesionales, así como la irrupción de tecnologías digitales como los Chatbots y la realidad aumentada, entre otros elementos. Por otro lado, en países como Costa Rica, se refleja un deterioro en el desempeño de los estudiantes, lo cual se manifiesta en los resultados de pruebas internacionales, como las pruebas PISA, y en informes nacionales, como el informe del estado de la educación. Estos factores exigen un análisis profundo y la búsqueda de alternativas para transformar la educación, fortaleciendo su papel como motor de desarrollo científico y social, y adaptándola en términos de formas y objetivos.

La educación integrada en Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (STEM, por sus siglas en inglés) ha emergido en las últimas décadas como una alternativa prometedora para abordar debilidades en la formación académica de los estudiantes (European Schoolnet, 2018; Hasanah, 2020; Li et al., 2020). Esta filosofía busca orientar la educación hacia el desarrollo de habilidades relacionadas con las vocaciones STEM y promover una alfabetización que concientice sobre la naturaleza de la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas, fomentando la integración de estas disciplinas.

Otros factores respaldan esta filosofía, la creencia de que los graduados con conocimientos STEM prácticos serán altamente demandados en todos los sectores laborales (Bybee, 2010), y la convicción de que la educación y la investigación en esta área son fundamentales para el desarrollo, la productividad, la competitividad y el bienestar (Freeman et al., 2019). Además, estudios ocupacionales y proyecciones de desarrollo indican que las ocupaciones STEM son las que experimentarán un mayor crecimiento y demanda (Noonan, 2017).

Ante este desafío, los países deben reevaluar sus enfoques, basándose en una interpretación adecuada del pasado, el presente y el futuro, pero siempre considerando la realidad nacional. Factores como el acceso a la educación, la capacidad real de los docentes, la cultura del cuerpo docente y de los administradores, y las desigualdades geográficas, socioeconómicas, de género y étnicas, deben ser abordados como pasos preliminares en la toma de decisiones.

En este capítulo, ofreceremos una visión parcial sobre la educación STEM en el escenario educativo global y costarricense. Nos interesa reflexionar sobre el concepto, su origen, complejidad y potencial, prestando especial atención a los elementos clave de la filosofía y a cómo estos pueden representar un punto de inflexión en ciertas prácticas educativas, en especial si son interiorizados adecuadamente por los distintos actores. Todo esto se complementará, a su vez, con una colección de herramientas tecnológicas y de propuestas educativas de matemáticas en contextos STEM que permitan ilustrar las múltiples posibilidades de este enfoque educativo.

En última instancia, como apunta Boyd (1978), los propósitos de la escuela pública y el currículo son medios para llevar a cabo objetivos políticos. En ese contexto, STEM es un fenómeno político complejo, nacido en un escenario particular, con una intención específica que se ha extrapolado de diversas maneras a otros contextos, no siempre equivalentes al original, pero impulsados por tentadoras promesas de desarrollo social, económico y científico. Es necesario entender mejor las conexiones de la educación STEM con la investigación, la salud económica de la nación y el bienestar de sus ciudadanos, siempre teniendo en cuenta el contexto específico que nos interesa (Freeman et al., 2019).

1.2 Anotaciones sobre el origen del concepto

Aunque el término "educación STEM" se acuñó a inicios de este siglo, sus raíces filosóficas se remontan a 1958 (Daugherty, 2013), e incluso antes, ya que desde la década de los 30 se hablaba de enfoques transversales que establecían conexiones interdisciplinarias entre las asignaturas (Drake y Reid, 2020). También en la década de los 70 surgieron movimientos educativos que abogaban por la enseñanza de las ciencias como una unidad del conocimiento científico basada en las contribuciones de cada disciplina particular (Dillashaw y Okey, 1980).

Estos movimientos cobraron mayor relevancia en el contexto de una serie de propósitos políticos en los Estados Unidos de América, inicialmente centrados en objetivos económicos y de hegemonía, y posiblemente influidos por reclamos sociales en un segundo plano. Estas ambiciones respondieron a llamados para mejorar diversos aspectos de la educación, haciendo hincapié en el fomento de la investigación y la competitividad (Mohr-Schroeder et al., 2022), la promoción de las matemáticas y las ciencias para atraer a estudiantes hacia carreras STEM (Freeman et al., 2014) y la visión de las matemáticas y las ciencias como componentes fundamentales de la educación científica.

A mediados de la década de los 90, surgió un nuevo elemento en esta evolución de la educación, proponiendo una orientación hacia una ciencia para todos. Por ejemplo, en el foro del National Institute for Science Education, "Indicators of success in post-secondary SME&T education: Shapes of the future", realizado en 1998, se evidenció la atención hacia la educación SMET y la opinión de algunos de los participantes sobre la necesidad de una competencia científica básica para todos (Millar, 1998), así como el fortalecimiento de la discusión en temas relacionados con esta dinámica de integración.

En resumen, se puede situar el origen del término SMET (Science, Mathematics,Engineering and Technology) a mediados de la década de 1990 cuando la National Science Fundation (NSF) incluye formalmente la ingeniería y la tecnología con la matemática y las ciencias en la educación preuniversitaria. A partir de este momento las referencias a la educación en ciencias naturales y físicas, las matemáticas, la ingeniería y la tecnología (SMET), empiezan a aparecer en la literatura especializada apuntalando la necesidad expresa de investigación del área en aras de lograr el fortalecimiento de la educación en ciencias y matemáticas (Cooper y Robinson, 1998; Springer et al., 1999), y de reducir los problemas de deserción de los estudiantes de las carreras de corte de ingeniería, matemática, ciencias y tecnología, así como atender las grandes diferencias en la participación en estas disciplinas por sexo o etnicidad. El término SMET se cambia a STEM a principios de este siglo y es a mediados de la década del 2000 que el movimiento STEM cobra mayor relevancia (Sanders, 2009).

1.3 De las teorías a las políticas educativas

Las mayores limitaciones que enfrenta la educación para seguir el ritmo de los cambios promovidos por distintos paradigmas, como el constructivismo en boga a finales del siglo pasado o la educación STEM en las últimas décadas, están relacionadas con varios factores. Uno de los más destacados es la limitada flexibilidad del sistema educativo para transformarse a sí mismo, especialmente para incorporar los cambios sociales, generacionales y tecnológicos que naturalmente suceden y están interrelacionados entre sí, lo que complica las transformaciones en la educación.

También, elementos relacionados con el cuerpo de docentes y administradores, con sus contextos y creencias, que influye en cómo interpretan y ejecutan las acciones necesarias para generar las transformaciones propuestas. Además, la complejidad detrás de las transformaciones mismas que pueden hacer que las ideas centrales sean ambiguas y se tiendan a entender e implementar de formas diferentes.

No podemos pasar por alto el hecho de que ninguna política educativa o movimiento de cambio en educación tendrá un efecto positivo y relevante si no convergen al menos tres aspectos vitales: políticas claras en diversas esferas administrativas, un conocimiento profundo por parte de los docentes y administradores de la educación que lleve a una comprensión compartida de los conceptos, especialmente cuando son complejos, y, finalmente, una voluntad de acción consecuente con los dos puntos anteriores. Es importante destacar que las transformaciones significativas en educación requieren largos periodos de asimilación y adaptación. El paradigma de la educación STEM también está sujeto a estos factores.

De acuerdo con lo descrito en (Tanenbaum, 2016), informe elaborado por un grupo de expertos que incluye formadores de políticas educativas, investigadores, educadores y líderes de la industria, se establecen metas para la educación STEM, como cerrar las brechas educativas y económicas, satisfacer las demandas de una economía impulsada por la tecnología, garantizar la seguridad nacional y mantener la preeminencia en la investigación científica y la innovación tecnológica. Aunque estas metas son de gran relevancia en el desarrollo humano, también es cierto que esta visión puede ser ajena a muchos países en desarrollo.

En el caso de países como Costa Rica, esta visión coincide en la necesidad de abordar necesidades humanas fundamentales, como cerrar las brechas educativas y económicas, pero se distancia en las aspiraciones de mantener una preeminencia mundial en investigación científica e innovación. Para muchos países en desarrollo, una aspiración real podría ser reducir las brechas socioeconómicas o en investigación y tecnología, lo que permitiría un crecimiento más sólido y coherente con los objetivos de desarrollo sostenible. Sin embargo, es importante reconocer que las metas STEM en las políticas de desarrollo pueden ser ambiciosas, pero también están sujetas a elementos que aún no se han resuelto.

A pesar de los años transcurridos desde que se planteó la tendencia STEM, el término sigue siendo descrito como ambiguo en muchas referencias (European Schoolnet, 2018; Holmlund et al., 2018; Martín-Páez et al., 2019), y las investigaciones actuales sobre STEM alertan sobre su complejidad. Esto se debe a la diversidad de enfoques e interpretaciones, así como a la falta de esquemas que permitan la implementación de muchas de estas ideas (Stohlmann et al., 2012; Li et al., 2020; Aguilera et al., 2021). Una respuesta razonable a este escenario puede derivarse de afirmaciones de autores como Freeman et al. (2019), que plantean la existencia de paralelismos y similitudes significativas en los enfoques políticos y educativos entre países con respecto a la educación STEM.

Estas coincidencias pueden servir como base para establecer escenarios de trabajo, reconociendo que estas propuestas se han vuelto estratégicamente importantes para todos los países. Por lo tanto, no es factible esperar a tener un escenario ideal para emprender acciones.

A nivel de políticas educativas y estrategias didácticas concretas, debemos buscar enfoques apropiados para definir acciones específicas que favorezcan las metas STEM. Es importante tener en cuenta que las diferencias en varios aspectos requieren enfoques distintos, pero lo esencial es que aquellos que trabajan en el mismo sistema construyan conjuntamente una visión que brinde oportunidades para que todos los estudiantes alcancen metas de alto nivel relacionadas con STEM. Estos elementos comunes deben ser coherentes con los objetivos y metas de desarrollo específicos y están supeditados a un contexto particular.

Para Holmlund et al. (2018), dada la variedad de prácticas institucionalizadas y contextos escolares dentro de los cuales se promulga la educación STEM, podría ser más importante la uniformidad de las prácticas STEM en contextos locales. En el mismo sentido, Bybee (2010) puntualiza que la convergencia de criterios tiene un carácter local, a pesar de que muchas de las ideas y aportes en investigación sean globales.

1.4 Elementos comunes en la educación STEM

La educación STEM es un entramado complejo de aspiraciones sobre cómo articular esfuerzos y recursos en función de lograr un ideal de competencias de formación propias de las demandas del siglo XXI. Si bien no existe una conceptualización común del concepto es posible encontrar puntos de convergencia que se conviertan en puntos de partida robustos hacia las metas STEM.

Bybee (2010) resume tres elementos centrales asociados a la educación STEM, el reconocimiento de la importancia de la ciencia por su estrecha relación con la tecnología y la ingeniería en el currículo escolar, de alguna manera este reconocimiento hacia la matemática siempre ha existido, también, ante la profunda influencia que tiene la tecnología en nuestras vidas, el énfasis que recibe ésta en los programas educativos debe valorase y ampliarse. Y en la misma línea del punto previo, el rol de la ingeniería en los programas en referencia a que esta disciplina está directamente involucrada en la resolución de problemas y en la innovación.

Thibaut et al. (2018), en una revisión sobre prácticas instruccionales STEM, organizan una serie de elementos que de alguna forma están presentes en la bibliografía, en la misma línea lo hacen Stohlmann et al. (2012) en una reflexión que trata de identificar acciones relevantes. Todas estas ”recomendaciones” enfatizan la necesidad de contemplar elementos sociales, étnicos, cognitivos, técnicos, de recursos y políticos, entre otras cosas, al momento de establecer acciones en la educación STEM. De estas revisiones se rescatan.

- Promover la participación en actividades auténticas, por ejemplo, rutas de solución propias basadas en pensamiento inductivo o abductivo, reflexionar, proponer, desarrollar y justificar.
- Fomentar herramientas del siglo XXI como pensamiento crítico, creatividad y trabajo en equipo. Enfocarse en problemas del mundo real como eje para integrar a los estudiantes en los procesos de aprendizaje, esta es una tarea compleja que implica aspectos tanto cognitivos como afectivos, aparte de la complejidad de elegir problemas que promuevan STEM.
- Involucrar a los estudiantes en actividades que les permitan el diseño y la evaluación a partir de datos recopilados, incluido el rediseño y la reingeniería.
- Integración de contexto como elemento generador del aprendizaje apuntalando la necesidad explícita de fomentar en los estudiantes la reflexión y el razonamiento basado en evidencias y el contexto.

Entre los elementos discutidos uno de ellos ha mostrado mayor complejidad, la integración disciplinar. De manera simple, se trata de establecer conexiones interdisciplinares y transdisciplinares, no solo entre las disciplinas mismas, sino que también entre ellas y el contexto. Pero la situación real es que no hay una definición común del concepto y tampoco hay claridad sobre cómo enfocar los aspectos de integración (Li et al., 2020; Aguilera et al., 2021). Sin adentrarnos mucho en esta discusión, que es compleja, se reconocen distintos abordajes para la integración de contenidos. Unos más amplios e inclusivos promueven tanto las disciplinas individuales Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas, como las combinaciones interdisciplinares o transdisciplinares entre ellas. Otros más restrictivos que referencian solo la interdisciplinariedad o las combinaciones transdisciplinares de las disciplinas individuales (Li et al., 2020; Aguilera et al., 2021).

También hay enfoques más abiertos, por ejemplo, en el reporte European Schoolnet (2018), una educación STEM integradora generalmente implica una enseñanza multidisciplinaria y está dirigida a desarrollar las habilidades de los estudiantes para formular y resolver problemas, así como su capacidad para contextualizar conceptos científicos en situaciones de la vida real. Se centra en el fortalecimiento de algunas disciplinas y en la forma de enseñarlas en un currículo más integrado que fomente el desarrollo de habilidades como razonamiento crítico, creatividad, resolución de problemas, entre otras, y establecer puentes entre las distintas disciplinas STEM y de estas con problemas del mundo real.

Aunado a esto no hay homogeneidad sobre cuáles son las disciplinas STEM (Xie et al., 2015), pero al menos sí la hay sobre el hecho de que las Ciencias, la Tecnología, la Ingeniería y la Matemática son el núcleo STEM (Freeman et al., 2014).

Sobre este tema de la integración algunos autores (Razi y Zhou, 2022) han propuesto distintos niveles: centrados en las disciplinas, multidisciplinares, interdisciplinares y diciplinar-integrado. De igual forma, otros autores como Aguilera et al. (2022) proponen tres niveles: multidisciplinar, interdisciplinar y transdisciplinar. Solo como referencia de esta complejidad se citan algunas definiciones en la literatura que ayudarán a comprender mejor estas diferencias de enfoque:

> Educación STEM [. . .] es un plan de estudios basado en la idea de educar a los estudiantes en cuatro disciplinas específicas: ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas, en un enfoque interdisciplinario y aplicado. En lugar de enseñar las cuatro disciplinas como materias separadas y discretas, STEM las integra en un paradigma de aprendizaje cohesivo basado en aplicaciones del mundo real. (Kakarndee et al., 2018, p. 3).
>
> El enfoque integrador de la educación STEM implica la integración de al menos dos disciplinas STEM al tener en cuenta los intereses y las experiencias tanto de los estudiantes como del docente, manteniendo el enfoque central de la disciplina enseñada. (Çorlu et al., 2015, p. 1715).

Para Stohlmann et al. (2012) ”la educación STEM integrada es un esfuerzo por combinar algunas o todas las cuatro disciplinas de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas en una clase, unidad o lección que se basa en las conexiones entre las materias y los problemas del mundo real”. (p. 38).

> La educación STEM integrada es el enfoque para enseñar el contenido STEM de dos o más dominios STEM, vinculados por prácticas STEM dentro de un contexto auténtico con el fin de conectar estas materias para mejorar el aprendizaje de los estudiantes. (Kelley y Knowles, 2016).

1.5 Visión de aula

La educación STEM en el aula plantea desafíos significativos debido a la diversidad de enfoques pero, a partir de la puesta en común de algunos elementos, las acciones de aula pueden orientarse hacia el fortalecimiento de acciones concretas, esto implica algún riesgo que se debe considerar.

Además de ser un problema complejo, que no tiene un abordaje común o uniforme entre los educadores e investigadores, se debe considerar que hay límites en muchos enfoques de educación STEM y que no es posible hacer enseñanza STEM en ciertos enfoques bajo todas las circunstancias. Especialmente hay que considerar la dificultad al hacer conexiones STEM transversales porque requieren que se enseñe contenido STEM deliberadamente, de manera que los estudiantes entiendan cómo el conocimiento STEM se aplica a problemas del mundo real (Kelley y Knowles, 2016).

De manera similar conectar conceptos en distintas disciplinas STEM es una tarea compleja cuando los estudiantes tienen poca a ninguna comprensión de las ideas relevantes en las áreas individuales y cuando el profesor no ha desarrollado tampoco saberes para lograr inducir esas conexiones, muchas veces ocultas para ellos mismos.

Valores STEM que desde nuestras aulas podemos gestionar de manera natural incluyen promover actividades de clase basadas en resolución de problemas, estos problemas de manera ideal deben tender puentes entre conceptos disciplinares y situaciones del mundo real.

Es recomendable no apegare a esquemas extremos que podrían llevarnos a escenarios áridos, por ejemplo, un esquema simplista de que cada disciplina se enseña por separado y la integración se da por sí sola no es recomendable porque deja un factor central al azar. Tampoco son prácticos esquemas muy complejos que sugieren que todas las actividades de integración parten de una cohesión rigurosa de todas las disciplinas en igualdad de condiciones e hilvanadas a través de un problema del mundo real, es posible que haya escenarios para hacerlo, pero no son simples.

Enfocarse en las conexiones entre las disciplinas, entender el rol y el cómo integrar la tecnología y la ingeniería son retadoras para los docentes, pero no necesariamente imposibles.

Promover actividades centradas en el estudiante, fomentar el pensamiento autónomo, el análisis crítico, la indagación, la justificación del pensamiento, usar la evaluación como parte de la instrucción, el aprendizaje cooperativo, el uso de materiales concretos, son prácticas que no solo los docentes conocemos bien, sino también apropiadas en el desarrollo de habilidades STEM. Lo anterior debe ir asociado con el logro de objetivos generales importantes, tales como:

- Desarrollo individual. La persona debe estar más preparada para afrontar retos laborales, profesionales y ocupacionales distintos. La educación es un instrumento de transformación socioeconómica. Hoy día se demanda autonomía de aprendizaje y mayor capacidad de respuesta ante retos desconocidos, criticidad para evaluar el pensamiento y otras habilidades que deben ayudar al ciudadano a interactuar positivamente con sus similares y con el entorno tecnológico.
- Convivencia y compromiso social. La formación sustentada por valores, concepciones humanísticas y solidarias.
- Desarrollo económico del país. No podemos concebir un país de oportunidades si no produce riqueza. La educación tiene la obligación de favorecer el desarrollo de profesionales que impulsen en desarrollo económico sostenible y coherente con modelos de justicia social y equidad.

La integración de conocimientos de distintas disciplinas científicas, la ingeniería, la matemática y la tecnología han sido y seguirán siendo los factores que generan todo el desarrollo de la industria, la medicina y en general todas las áreas del conocimiento humano. En educación es razonable pensar en una integración ponderada en la que las distintas áreas asumen distintos roles en distintos momentos. STEM implica una visión de educación funcional en la que coexisten visiones de pensamiento convergente que se desarrollan alrededor de metodologías integradoras de las distintas áreas del conocimiento y alrededor de resolver una tarea académica razonablemente cercana a problemas del mundo real y visiones de pensamiento divergente muy relacionas con la creatividad y flexibilidad en el abordaje de un problema.

A manera de resumen como educadores podemos emprender distintas acciones en la línea de la educación STEM.

- Comprender la complejidad del concepto para no caer en simplificaciones inapropiadas. Si bien el abordaje integral es complejo los elementos centrales de la filosofía STEM marcan una ruta de desarrollo con la que podemos avanzar significativamente en nuestro entorno.

- Identificar qué elementos de STEM se vuelven críticos y acomodar nuestros esfuerzos en ese sentido. Por ejemplo, para Costa Rica, el caso debe ser similar en otros contextos, en este momento exportamos trabajo profesional calificado (Computación, Ingenierías, Medicina, entre otras) y se vuelve crítico priorizar hacia dónde orientar los esfuerzos para lograr que las futuras generaciones logren una mejor integración en los entornos de trabajo, pero también que desarrollen resiliencia ante cambios.
- Reconocer que por ahora no hay una sola solución de educación STEM y que además los esfuerzos que se hagan en esta línea tendrán que competir con arraigo entre los docentes sobre el para qué, el qué y el cómo de la educación, una conceptualización implícita, que no se puede cambiar de la noche a la mañana a través de una propuesta sustituta o explícita.
- Todas las acciones cuentan. Si el maestro enseña piezas de información aislada, el estudiante lo aprende de esa forma. El reto es encontrar estrategias de enseñanza que promuevan esquemas integradores, no tienen que ser altamente complejos, pero sí tener objetivos formativos claros para el docente. Exploración a través de experiencias que evidencien y faciliten que los estudiantes establezcan conexiones, aprendan y construyan su conocimiento de la misma forma que lo hacen en su interacción con los objetos de la vida real.
- Valorar críticamente y adaptar estrategias para educación STEM. Ante la dificultad de una integración de todas las disciplinas (STEM) y de estas con otras disciplinas periféricas la integración de dos o más áreas ofrece un aporte significativo. Se ha documentado que los estudiantes que participan en clases integradas de STEM suelen estar más motivados para aprender porque la relevancia de lo que se les enseña evidencia las conexiones intra-disciplinas y con escenarios de la vida real (Satchwell y Loepp, 2015). No se trata de cual área es más importante, se trata de una dinámica que visibilice las áreas y sus conexiones, buscando que los estudiantes interioricen la interrelacionalidad en sus aprendizajes.
- Las comunidades de apoyo, el trabajo colaborativo, el análisis crítico, la generación de ideas son importantes en educación. Si como docentes somos puntos aislados poco estamos contribuyendo en construir escenarios de integración. Sinergias entre docentes, que se atrevan a construir bajo ideas STEM para luego evaluar de manera crítica y mejorar mediante el trabajo en equipos, son críticas si se quieren lograr metas de alto nivel.

1.6 Matemática en el contexto STEM

En la educación STEM integrada, es esencial considerar la naturaleza intrínsecamente diferente de cada disciplina integradora y su arraigo histórico y cultural en la sociedad. Cada disciplina STEM tiene un enfoque epistémico único, que abarca conocimientos específicos, métodos, valores y objetivos (Fernández-Blanco et al., 2020).

La enseñanza de STEM plantea retos complejos, y hacer que las matemáticas sean accesibles para los estudiantes es uno de ellos. Es por esto que se torna vital identificar aspectos disciplinarios, interdisciplinarios o transdisciplinarios que puedan contribuir a la integración STEM de manera sólida.

A partir de diversidad de interpretaciones y la complejidad de la integración STEM, es prudente adoptar una posición estratégica que permita una didáctica de las matemáticas que, de manera gradual, incorpore elementos relevantes para la educación STEM.

El aprendizaje de la matemática tiene dos vertientes principales que son comprender conceptos matemáticos, las relaciones entre ellos y su relación con habilidades de pensamiento, y el desarrollo de herramientas para usar en el análisis y resolución de situaciones de conceptos en otras disciplinas, o más avanzados dentro de la matemática misma.

En el reporte Scientix Observatory Report (2018) sobre las políticas educativas en Europa se señala que la visión de la matemática como silo independiente respecto a las otras disciplinas es una realidad, y que a menudo hay pocas relaciones entre la matemática como materia y otras materias de ciencias. Plantean que el mejoramiento de la enseñanza STEM requiere de una profunda reflexión sobre matemática, y que los docentes deban buscar en otras disciplinas enfoques basados en desarrollo de proyectos, indagación e investigación para consolidar el rol de la matemática en esta filosofía. Este reporte va más allá y sugiere que las matemáticas podrían usarse como puerta para promover las disciplinas STEM: pero para hacer esto de manera efectiva, parece necesario fortalecer los vínculos entre los educadores de matemáticas y otros educadores STEM.

Se hará necesario también que los docentes paulatinamente amplíen algunos de sus conocimientos mediante alianzas con pares de su propia disciplina o de otras disciplinas, para que pueden guiar el descubrimiento que se quiere en los estudiantes y que además, agudicen su capacidad de análisis crítico para elegir o crear actividades que contribuyan con objetivos STEM.

También, y puesto que las interpretaciones sobre el tema son amplias, no es extraño que dadas las características propias de la matemática y la complejidad de la integración misma en muchas experiencias en la literatura su papel de integración sea más bien de soporte. Una situación similar podría darse con otras disciplinas que podrían quedar subrepresentadas por sus propias características ya sea por un entendimiento parcial de sus roles, por la diversidad de interpretaciones en la literatura o simplemente por la complejidad de hacerlo. Una visión de esta naturaleza implica claramente relegar la matemática en los contextos STEM a un rol de apoyo, lo que no solo incide en una percepción poco realista de la matemática, sino también tiene un impacto educativo en la construcción de un sentido STEM en los estudiantes y reduce significativamente capacidades centrales en la alfabetización STEM. El reto fundamental radica en identificar acciones que permitan situar la matemática en esta dinámica de integración a través de acciones que fortalezcan elementos STEM.

Sobre el rol de la matemática en la educación STEM integrada, Maass et al. (2019) proponían tres posibles escenarios para la integración de la matemática, los autores no evidencian elementos metodológicos al respecto. Estos tres escenarios son la adquisición de herramientas para el siglo XXI, dar mayor relevancia al modelado matemático en la educación escolar y contribuir con una educación para una ciudadanía responsable, este enfoque ofrece posibilidades reales.

Primero, respecto al desarrollo de habilidades para el siglo XXI, la matemática auténtica evoca un pensamiento crítico, flexible y creativo, búsqueda e interpretación de hechos, justificación y comunicación. Hay que romper creencias sobre la relación biunívoca entre problemas y soluciones. La resolución de problemas, como se suele entender en matemática, es un proceso centrado en reconocer o identificar hechos (premisas y relaciones), interpretarlos para generar o inducir nuevos datos (hipótesis) y luego justificarlos y comunicar. Problemas con soluciones múltiples o sin solución ayudan a que los estudiantes comprendan una arista realista de pensamiento científico, la necesidad de ser creativos, la resiliencia ante el fallo y la capacidad de buscar enfoques alternativos. En Rahman et al. (2021), en un estudio sobre las prácticas de los docentes en educación STEM y sustentado en una revisión de fuentes en entre 2016 y 2020, se reconocen una serie de competencias o habilidades matemáticas a desarrollar con miras a las competencias hacia el siglo XXI. Se destilan como centrales pensamiento crítico, resolución de problemas, creatividad, comunicación, colaboración, alfabetización en datos y alfabetización digital e informática. Identifican también las prácticas instruccionales de los maestros involucradas en educación STEM, pedagogía basada en investigación, integración de contenidos, aplicaciones al mundo real, aprendizaje basado en proyectos o problemas, andamiaje, evaluación, sensibilidad y relevancia cultural. Un listado con elementos similares aparece en Maass et al. (2019).

La segunda vertiente parte del hecho de que la naturaleza interdisciplinar de la matemática ofrece oportunidades de hacer conexiones entre disciplinas de STEM a través del modelamiento matemático. El modelaje debería motivar un mejor entendimiento de la matemática y de sus conceptos a la vez que debería contribuir a ver la matemática en una perspectiva útil para resolver problemas del mundo real. En un enfoque integrado la matemática busca habilidades de modelaje y resolución de problemas que contribuyan con el desarrollo de otras disciplinas, mientras que se vale ellas para lograr sus propios objetivos disciplinares. Se reconoce que todavía sobre este tema hay mucha investigación que debe hacerse (Maass et al., 2019). Para puntualizar algunas acciones concretas, primero, el concepto de problema del mundo real común en el vocabulario STEM debe ser ampliado a un concepto más general que pueda incluir problemas anclados en situaciones reales, pero didácticamente productivos y factibles. Segundo, es central reconocer qué tipo de modelaje puede hacerse en las distintas etapas del desarrollo de los niños para no producir un efecto contrario a lo que se busca. Las conexiones disciplinares deben hacerse explícitas a través de tareas o proyectos con un andamiaje apropiado que permita al estudiante reconocer una lógica de interconexión entre las disciplinas. Por ejemplo, en etapas tempranas, por aspectos de desarrollo cognitivo y por limitaciones de conocimiento de los niños, es posible que los discursos educativos deban centrarse mucho más en desarrollo y fortalecimiento de prácticas o hábitos STEM, por ejemplo, en fortalecer la indagación, el pensamiento crítico y la resolución de problemas simples que muestren una matemática relevante. En edades más avanzadas el descubrimiento, la simulación, la modelación entre otras, abren escenarios para evidenciar el rol de la matemática y su relación con las otras disciplinas. Tercero, la construcción de las experiencias de conocimiento no deben encapsularse, se dan a través de procesos de interacción crítica con la resolución de problemas en los que haya un sentido, si son problemas reales mucho mejor. Las conexiones disciplinares deben ser evidenciadas. La percepción general es que alguna parte de los maestros suelen hacer actividades de esta naturaleza en sus dinámicas de aula; quizá el tema se resuma en fortalecer y hacer más tangibles estos puentes o conexiones.

La tercera consideración que no puede la matemática dejar de lado está relacionada con el compromiso de la educación en el desarrollo de ciudadanos sensibles a los aspectos sociales y culturales, y comprometidos con metas de desarrollo, conscientes de las implicaciones de sus decisiones tanto de manera personal como de manera colectiva. En esta parte la estadística elemental ofrece un amplio repertorio de oportunidades de compilación de datos, análisis crítico sobre las conclusiones mismas y sobre las implicaciones de estas conclusiones en temas sensibles como contaminación, responsabilidad social, medio ambiente, bienestar y desarrollo humano equitativo o en temas personales como finanzas o salud.

El tema medular es, a partir de elementos centrales de la filosofía STEM, construir, con base en las experiencias personales o de otros profesionales, prácticas didácticas sensibles a los ideales STEM en un proceso iterativo donde estas se puedan ir perfeccionando. La integración de la matemática en educación STEM puede enfocarse desde varias perspectivas, se advierte que desde esta percepción la integración STEM ocurre en variados escenarios y en distintos niveles, y que además tiene enfoques, e inclusive objetivos de integración, distintos a través de los niveles escolares. Se reconoce también que hay limitantes de experiencia, formación, recursos y socioculturales, que pueden influir en la forma y resultados de esos enfoques.

La cuestión no es si hay formas definidas de hacer este tipo de educación, más bien el tema es si como docentes hay disposición a asumir retos que gradualmente lleven a metas de educación acorde con las exigencias del contexto global actual y futuro.

1.7 Tecnologías en la enseñanza de las matemáticas a través de un enfoque STEM

Dado que el uso de tecnologías en la educación STEM puede fomentar la creatividad, el pensamiento crítico y la resolución de problemas de matemáticas (Aguilera y Ortiz-Revilla, 2021), se considera de interés revisar las diferentes tecnologías que permiten desarrollar dichas habilidades.

1.7.1 Robótica educativa en primeras edades

La robótica educativa, desde las primeras edades, ha emergido como una herramienta innovadora para fomentar el desarrollo de habilidades matemáticas, fortalecer la educación STEM (en especial en ingeniería y tecnología) e iniciar la enseñanza de la programación (Alam, 2022). De hecho, la robótica educativa se considera un enfoque STEM ya que abarca aspectos como algoritmos de diseño, medición con unidades no estándar, codificación, estructuras mecánicas, construcción y operación de robots y kits robóticos. Además, al participar en actividades de robótica basadas en la construcción, los niños pueden interesarse no solo en muchos aspectos de la robótica, sino también en aprender muchas características de programación y pensamiento computacional. Los objetivos pedagógicos de la robótica se pueden dividir en dos categorías principales de situaciones para la primera infancia y la primera edad escolar:

- *Kits de construcción robótica*: El robot se compone de bloques de construcción, típicamente tipo Lego, como LEGO®-WeDo, que permiten la construcción y programación del robot.
- *Robots programables*: Son robots prefabricados que se programan para ejecutar una secuencia de comandos, como Bee-Bot.

En la educación temprana, se trata principalmente de manejar y no construir robots (Papadakis, 2020). Así, los robots programables permiten a los estudiantes introducir secuencias de comandos para movimientos específicos. Estos robots, a menudo referidos como robots de suelo debido a su movimiento en superficies planas, pueden ejecutar instrucciones simples como moverse hacia adelante, hacia atrás o realizar giros de 90º en direcciones horarias o antihorarias (sin desplazamiento). Además de las instrucciones de movimiento, estos robots suelen estar equipados con botones adicionales que permiten iniciar, pausar o reiniciar la secuencia de comandos programada por el usuario.

Existen propuestas de actividades de matemáticas y de iniciación a la programación con robots programables desde las primeras edades en las que se contextualizan los problemas en contextos variados como los cuentos (Kim, 2021; Samuelsson, 2022; Terroba et al., 2021) o la música (Torrejón y Ventura-Campos, 2019). Desde la resolución de problemas, como menciona Papadakis (2020), las actividades robóticas suelen ofrecer un 'piso bajo' (inversión cognitiva mínima requerida para comenzar una actividad), un 'techo alto' (sin límites establecidos en cuán lejos se puede llevar una idea) y 'paredes anchas' (puede usarse para una amplia variedad de experiencias de aprendizaje).

En concreto, en la bibliografía se encuentran propuestas en las que se usan robots programables donde se plantean problemas de localización y posición relativa de objetos, visualización y modelización geométrica.

1.7.2 Propuesta de resolución de problemas de matemáticas con el uso de robots

Siguiendo las etapas de resolución de problemas propuestas por Pólya (1945) -que incluyen comprensión, planificación, ejecución y evaluación-, los robots programables de suelo con direccionalidad programada facilitan la descomposición de problemas en partes más simples y promueven la identificación y corrección eficiente de errores (Resnick, 2013). De esta forma se pueden diseñar tableros de diferente tipo en los que proponer problemas como el de la Figura 1.1.

Figura 1.1: *Tablero para el uso de robot de suelo de direccionalidad programada*

Una propuesta de problemas que pueden ser resueltos mediante el uso de un robot de suelo de direccionalidad programada podría ser la siguiente:

- ¿Cuál es el menor número de casillas, incluidas la de inicio y final, que debe pisar el robot para llegar a la posición final? ¿Cuál es el menor número de instrucciones para llegar desde la posición inicial a la final?
- ¿Cuántos caminos diferentes existen si solo usamos los botones adelante y derecha (sin poder presionar este último dos veces seguidas)? ¿De cuántas formas posibles llegamos al obstáculo de la derecha (marcado con una X) siguiendo las mismas condiciones de la pregunta anterior? ¿Cuántos caminos habría si pudiéramos presionar el botón de giro más de una vez? ¿Por qué?
- Si el robot debe pasar por las cruces, la casilla de fin y volver al punto de inicio, ¿se podría dibujar un cuadrado con el camino del robot?, ¿se podría dibujar un rectángulo (no cuadrado) con el camino del robot? ¿Cuáles serían los pasos para dibujarlo? ¿Existen más alternativas para dibujar cuadrados/rectángulos?

Estas preguntas pretenden ser una pequeña muestra de la variedad de retos que se pueden proponer con este recurso. En ellas se puede observar preguntas en las que intervienen contenidos de matemáticas (aritméticos, combinatorios, geométricos y otras) y también de iniciación a la programación informática (descomposición, modelización, codificación, implementación y otras). Así mismo, este tipo de propuestas permite el uso de estrategias de juego de roles en las que puede no ser necesario el uso de robots, sino que se usa el cuerpo humano como instrumento para abordar los problemas propuestos (Zazkis et al., 2013).

1.7.3 Videojuegos educativos

A lo largo de los últimos años, los videojuegos han sido implementados en la educación, siendo el aprendizaje basado en juegos un área prometedora. Los videojuegos educativos son una subcategoría de videojuegos diseñados específicamente para proporcionar experiencias de aprendizaje a los jugadores. Estos juegos se distinguen de otros videojuegos por su intención principal: facilitar el aprendizaje de conceptos, habilidades o competencias específicas mientras se mantiene el entretenimiento y la interactividad inherentes a los videojuegos. Cole et al. (2023) definen las características esenciales de los videojuegos educativos como:

- Medio Digital Visual: Se presentan exclusivamente en un medio digital visual, lo que significa que se accede a ellos a través de dispositivos electrónicos y se interactúa con ellos a través de interfaces visuales.
- Juego Basado en Reglas: Al igual que otros videojuegos, tienen un conjunto de reglas que los jugadores deben seguir. Estas reglas proporcionan una estructura y un marco para la interacción del jugador con el juego.
- Resultados Variables: Los videojuegos educativos tienen resultados que pueden variar según las acciones del jugador. Estos resultados, ya sea ganar o perder, avanzar o no, son influenciados por el esfuerzo y las decisiones del jugador.
- Contexto Educativo: Lo que distingue principalmente a los videojuegos educativos de otros videojuegos es su propósito educativo. Están diseñados para ser utilizados en un contexto educativo y tienen como objetivo cumplir con resultados de aprendizaje específicos.

Además, los mismos autores añaden la posibilidad de que aparezcan otras características en los videojuegos educativos que van a permitir enriquecer la experiencia educativa; de esta forma, pueden incorporar elementos de fantasía que permitan a los jugadores asumir roles variados, presentar desafíos educativos para desarrollar habilidades y ofrecer oportunidades para la interacción social a través de diversas modalidades de juego.

De hecho, Ueno (2014) identifica diez factores que otorgan a los videojuegos principios atractivos para la enseñanza en contextos STEM: identidad, interacción, asunción de riesgos, personalización, dificultad graduada, desafío y consolidación, contextualización, desarrollo del pensamiento lateral, equipos multidisciplinarios y rendimiento previo a la competencia. A su vez, los metaanálisis como los de Wang et al. (2022) sobre el uso de videojuegos en la educación STEM indican que los videojuegos pueden promover eficazmente el logro académico de los estudiantes. Estos autores indican, además, que los videojuegos tienen efectos positivos en todas las materias STEM, aunque destaca especialmente en las materias de ciencias y matemáticas.

En el ámbito de las matemáticas, autores como Muñiz-Rodríguez et al. (2014) argumentan que el uso de juegos aporta tres valores adicionales en este contexto. El primero de estos es la relación directa que se establece entre las etapas de desarrollo del juego y las fases al desarrollar una estrategia para resolver un problema. Esto fomenta que los estudiantes potencien habilidades cognitivas que demandan un mayor grado de esfuerzo, rigor, atención, memoria e imaginación. Esto se relaciona con el segundo valor añadido: la naturaleza atractiva de las matemáticas que se presenta a los estudiantes. Se muestra el aprendizaje y la práctica de las matemáticas como algo más atractivo y motivador. El último valor adicional en la didáctica de las matemáticas mediante juegos se centra en la atención a la diversidad que puede llevarse a cabo en el aula. Los juegos son herramientas motivacionales que ofrecen el apoyo necesario a estudiantes con mayores dificultades, al igual que pueden ser el incentivo académico para aquellos estudiantes con mayores habilidades en matemáticas.

1.7.4 Minecraft Education

Minecraft es una plataforma digital que ofrece un entorno de construcción basado en bloques, como el de la Figura 1.2, donde los usuarios pueden crear, modificar y explorar mundos virtuales, fomentando así el desarrollo de habilidades creativas y espaciales. Estos bloques representan diferentes elementos naturales y artificiales, como tierra, piedra, agua, y diversos tipos de minerales y vegetación.

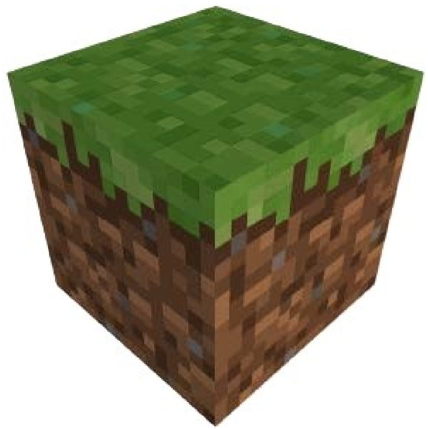

Figura 1.2: *Bloque básico del juego Minecraft*

La capacidad del juego Minecraft Education (https://education.minecraft.net/) de Mojang Studios (2011), versión educativa de Minecraft, para fomentar el aprendizaje activo, la colaboración y la creatividad lo convierte en una herramienta valiosa para educadores y estudiantes por igual. Este juego proporciona al docente herramientas especializadas que facilitan la adaptación del proceso de enseñanza-aprendizaje de las materias STEM en el aula, herramientas que no están presentes en otras versiones de la plataforma Minecraft. Por ejemplo, este juego ha sido utilizado en diferentes materias STEM específicas como:

- En ingeniería (Lamont et al., 2021), para realizar proyectos de diseño y desarrollar habilidades de trabajo en equipo, comunicación e impacto de la ingeniería en la sociedad y el medio ambiente.
- En química (Panja y Berge, 2021), ya que el juego incluye características relacionadas con los elementos de la tabla periódica y laboratorios virtuales sin necesidad de implementaciones adicionales.

Asimismo, se encuentran otras propuestas que integran diferentes materias STEM como Bile (2022) en la que integra contenidos de ciencia, matemáticas y codificación para el desarrollar de habilidades intelectuales y científicas o Rotger et al. (2022) en la que se realiza un diseño de un espacio tridimensional sobre el que se plantea una secuencia de problemas de matemáticas contextualizados en materias STEM. Desde una perspectiva educativa en matemáticas, y en relación con otras áreas STEM, Minecraft presenta diversas características que facilitan el aprendizaje de conceptos tales como:

- Geometría Espacial: Este mundo está compuesto por bloques cúbicos, lo que proporciona una excelente oportunidad para explorar conceptos de geometría especial como volumen, área y, en general, formas tridimensionales. Así mismo, estas formas geométricas pueden modelizar estructuras tridimensionales que son construidas a través de herramientas tecnológicas existentes en el propio juego.
- Proporciones y escala: Los bloques usados permiten generar estructuras a escala, lo que facilita la comprensión de proporciones y relaciones de tamaño. Estas habilidades son fundamentales en ingeniería para el diseño y construcción de edificaciones y otros objetos.
- Patrones y simetría: Minecraft permite a los usuarios crear patrones y estructuras simétricas, ayudando a desarrollar habilidades de pensamiento computacionales. Estos conceptos se relacionan con el arte, permitiendo a los jugadores expresar su creatividad.

- Coordenadas y orientación espacial: El juego utiliza un sistema de coordenadas para ubicar posiciones en el mundo virtual, lo que ayuda a los jugadores a desarrollar habilidades de orientación espacial y comprensión de sistemas de coordenadas. Estas habilidades son fundamentales para explorar y comprender el mundo en ciencias como la geografía y la astronomía.

- Lógica y programación: Minecraft incluye elementos de redstone, que pueden ser utilizados para crear circuitos y sistemas de automatización, proporcionando una introducción a conceptos de lógica y programación. Estos elementos se utilizan para crear mecanismos que pueden realizar diversas funciones, desde abrir puertas y activar trampas hasta construir computadoras simples dentro del juego. Estas componentes del juego proporcionan, por tanto, una introducción práctica a conceptos de lógica y programación, áreas fundamentales en tecnología e ingeniería.

Particularmente, se pueden proponer otros problemas de matemáticas como la construcción de objetos tridimensionales (como cubos) o de modelos de objetos tridimensionales (como esferas). Además, se pueden plantear actividades de estimación muy interesantes como obtener aproximaciones al valor de π aplicando las fórmulas del volumen y el área a los modelos de las esferas y los círculos (Figura 1.3), respectivamente.

Figura 1.3: *Modelos de construcciones circulares y esféricos a partir de bloques sobre Minecraft*

Este tipo de actividades sobre la plataforma Minecraft a través de elementos intrínsecos del juego permiten a los estudiantes explorar y aplicar conceptos matemáticos de manera práctica. A su vez, el enfoque interdisciplinario STEM permite desarrollar competencias clave que enriquecen la experiencia educativa y promueven el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la creatividad.

1.7.5 Realidad aumentada y virtual

La realidad aumentada (RA) es una tecnología que superpone elementos digitales, como imágenes, sonidos o datos, en el entorno real del usuario, enriqueciendo así su percepción del mundo que le rodea. Por otro lado, la realidad virtual (RV) es una tecnología que sumerge al usuario en un entorno completamente digital, creado por computadora, que simula la realidad y le permite interactuar con ella de manera inmersiva. La integración de estas tecnologías emergentes en la educación STEM ha sido objeto de creciente interés en la comunidad académica y educativa ya que ofrecen un entorno inmersivo y dinámico que facilita la comprensión de conceptos abstractos y complejos, característicos de las disciplinas STEM (Ibáñez y Delgado-Kloos, 2018). La RA y la RV, denominadas de forma general Realidad Extendida (RE), permiten a los estudiantes interactuar con representaciones tridimensionales de objetos y fenómenos, experimentando de primera mano los principios científicos y matemáticos en acción, proporcionando así una experiencia de aprendizaje más rica y significativa (Demitriadou et al., 2020).

La revisión realizada por Ibáñez y Delgado-Kloos (2018) muestra que, en entornos STEM, la Realidad Aumentada se aplica principalmente para la exploración y la simulación y, en menor medida, para el aprendizaje basado en juegos. Más concretamente, las principales aplicaciones de exploración se utilizan principalmente para temas de ciencias de la vida en entornos fuera del aula, utilizando RA basada en la ubicación, mientras que las aplicaciones de simulación se utilizan principalmente para entornos de aprendizaje instruccional de matemáticas y física, llevados a cabo en entornos en el aula utilizando RA basada en imágenes o marcadores. En general, la mayoría de las aplicaciones educativas de la RA aprovechan las características de superposición de texto, imágenes y animaciones para mejorar la experiencia de aprendizaje (ver Figura 1.4).

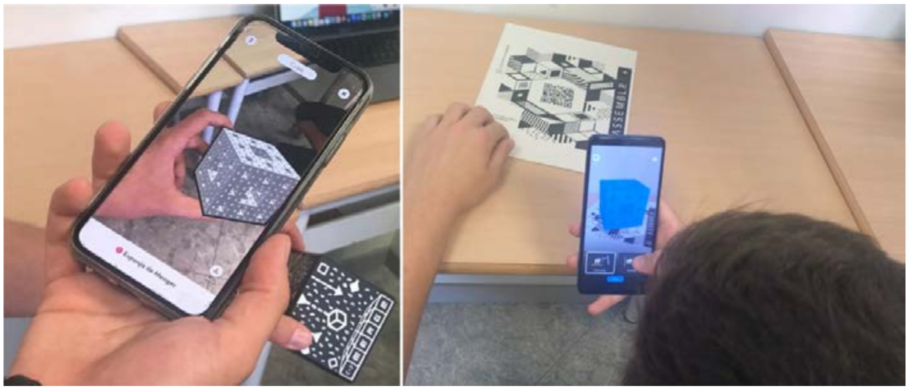

Figura 1.4: *Realidad Aumentada a través de marcadores y de cubo holográfico* (*Merge Cube*)

En la literatura se encuentran otras propuestas educativas de uso de la RA de alto interés en materias STEM en las que se destaca las posibilidades que esta ofrece en la mejora de visualización de conceptos:

- En ciencias ambientales y geológicas, existen experiencias que combinan la RA con la realización de excursiones de campo en las que también intervienen habilidades de orientación y geometría para la geolocalización (Bursztyn et al., 2017).
- En química y física se encuentran numerosos ejemplos de uso de la RA para la visualización de modelos 3D de átomos o vídeos de experimentos reales (Abd Majid y Abd Majid, 2018). La combinación de elementos químicos reales con modelos virtuales de reacciones químicas favorece la visualización de los procesos químicos.
- En la enseñanza de las matemáticas en contextos STEM también se encuentran experiencias educativas en las que se usa la realidad aumentada para la modelización de objetos tridimensionales y la experimentación a través de programas de geometría dinámica como Geogebra (Kramarenko et al., 2019).

La revisión realizada por Radianti et al. (2020) indica que el interés en la Realidad Virtual (RV) para fines educativos es bastante alto, aunque su uso sigue siendo experimental y no es sistemático ni se basa en las mejores prácticas. Sin embargo, en algunas áreas STEM, como la ingeniería y la informática, ciertas aplicaciones de RV, como lo que se muestra en la Figura 1.5, se han utilizado de manera regular para enseñar ciertas habilidades, especialmente aquellas que requieren conocimiento declarativo y conocimiento práctico-procedimental.

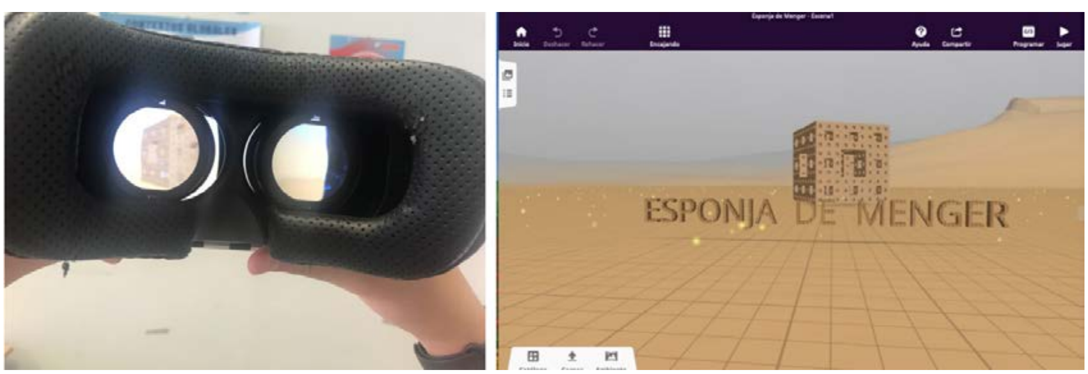

Figura 1.5: *Realidad Virtual a través de CoSpaces sobre dispositivo móvil incorporado en gafas*

1.8 RA y RV para la resolución de problemas de matemáticas en contextos STEM

La integración de elementos visuales y táctiles en el entorno de aprendizaje permite a los estudiantes visualizar y manipular objetos matemáticos en tiempo real, mejorando así su capacidad para comprender y aplicar conceptos matemáticos. Además, las RE pueden facilitar la colaboración entre estudiantes, permitiéndoles trabajar juntos en problemas matemáticos en un entorno virtual compartido. En línea con lo propuesto con Rotger et al. (2021) y mediante el uso de herramientas de RA y RV de las Figuras 1.4 y 1.5 se pueden plantear problemas de materias STEM en los que sean necesarias las habilidades de visualización de los objetos tridimensionales. Algunos ejemplos de problemas de este tipo propuestos sobre las iteraciones que forman el fractal de la Esponja de Menger podrían ser los siguientes:

- Supongamos que una esponja de Menger es utilizada como modelo para un coral. Si cada orificio permite el paso de una cierta cantidad de agua para alimentar al coral, ¿cómo se relaciona el número de iteraciones con la eficiencia del coral para alimentarse?
- Si se vierte agua sobre la esponja de Menger, describe cómo crees que fluiría el agua a través de ella después de la segunda iteración.
- Imagina que la esponja se somete a vibraciones en una frecuencia f. ¿Cómo podría afectar la estructura fractal a la propagación de estas vibraciones?
- Si el aire fluye a través de la esponja de Menger, ¿cómo podría afectar el número de iteraciones a la resistencia del flujo?
- Suponiendo que cada unidad de área superficial de la esponja de Menger puede capturar una cantidad x de energía solar, ¿cuántas iteraciones serían óptimas para maximizar la captura de energía con la menor cantidad de material?
- Si se construyera una esponja de Menger con un material que cambia de color con la presión, ¿cómo se manifestarían los patrones de color después de aplicar una fuerza en un vértice?

Las preguntas anteriores son solo una muestra de problemas que se pueden proponer, en los que intervienen diferentes materias STEM, en las que la visualización de los objetos geométricos tridimensionales puede ser clave para la mejora de su comprensión y para la modelización de las situaciones propuestas.

1.9 Conclusiones

En este artículo hemos explorado la importancia de la educación STEM para el progreso sostenible de las naciones y el desarrollo integral de sus ciudadanos. En un mundo caracterizado por rápidos avances tecnológicos, un crecimiento exponencial de la información y perfiles profesionales en constante evolución, el sistema educativo se enfrenta al reto de adaptarse y evolucionar para mantenerse relevante.

La integración de la tecnología en la educación, especialmente en el ámbito de las matemáticas, es una estrategia clave para abordar estos desafíos. Juegos como Minecraft, con sus elementos intrínsecos, se convierten en un espacio de aprendizaje interactivo donde los estudiantes pueden aplicar sus conocimientos matemáticos en situaciones del mundo real, contribuyendo así al enfoque interdisciplinario de la educación STEM. Además, las realidades aumentada y virtual se presentan como tecnologías innovadoras que enriquecen la experiencia educativa, permitiendo a los estudiantes explorar conceptos matemáticos y científicos en entornos inmersivos.

En conclusión, este artículo trata de resaltar la necesidad de abrazar el cambio y la innovación en la educación matemática, aprovechando las oportunidades que ofrecen las tecnologías emergentes y el enfoque interdisciplinario de la educación STEM. Estos elementos son fundamentales para preparar a los estudiantes para los desafíos del futuro y garantizar que la educación siga siendo relevante y efectiva en un mundo en constante evolución.

1.10 Referencias bibliográficas

1 Abd Majid, N. A. y Abd Majid, N. (2018). Augmented reality to promote guided discovery learning for STEM learning. *Int. J. on Advanced Science, Engineering and Information Technology*, 8(4-2), 1494-1500.

2 Aguilera, D. y Ortiz-Revilla, J. (2021). STEM vs. STEAM education and student creativity: A systematic literature review. *Education Sciences*, 11(7), 331. https://doi.org/10.3390/educsci11070331

3 Aguilera, D., Lupiáñez, J. L., Vílchez-González, J. M. y Perales-Palacios, F. J. (2021). In search of a long-awaited consensus on disciplinary integration in STEM education. *Mathematics*, 9, 597. https://doi.org/10.3390/math9060597

4 Alam, A. (2022). *Educational Robotics and Computer Programming in Early Childhood Education: A Conceptual Framework for Assessing Elementary School Students' Computational Thinking for Designing Powerful Educational Scenarios*. International Conference on Smart Technologies and Systems for Next Generation Computing (ICSTSN), 1-7. https://doi.org/10.1109/ICSTS

5 Bile, A. (2022). Development of intellectual and scientific abilities through game-programming in Minecraft. *Educ Inf Technol 27*, 7241-7256. https://doi.org/10.1007/s10639-022-10894-z

6 Bybee, R. W. (2010). Advancing STEM education: A 2020 vision. *Technology and engineering teacher*, 70(1), 30.

7 Boyd, W. L. (1978). The changing politics of curriculum policy-making for American schools. Review of Educational Research, 48(4), 577-628. https://doi.org/10.2307/1170049

8 Burke, A., Okrent, A., Hale, K. y Gough, N. (2022). *The state of US science & engineering 2022*. National Science Board Science & Engineering Indicators. NSB-2022-1. National Science Foundation.

9 Bursztyn, N., Shelton, B., Walker, A. y Pederson, J. (2017). Increasing undergraduate interest to learn geoscience with GPS-based augmented reality field trips on students' own smartphones. *GSA Today*, 27(5), 4-11.

10 Cole, C., Parada, R. H. y Mackenzie, E. (2023). *Why and How to Define Educational Video Games?* Games and Culture. Pendiente de publicación. https://doi.org/10.1177/15554120231183495

11 Cooper, J. y Robinson, P. (1998). Small-group instruction in science, mathematics, engineering, and technology (SMET) disciplines: A status report and an agenda for the future. *Journal of College Science Teaching*, 27(6), 383-388.

12 Çorlu, M. S., Capraro, R. M. y Çorlu, M. A. (2015). Investigating the mental readiness of pre-service teachers for integrated teaching. *International Online Journal of Educational Sciences*, 7(1), 17-28.

13 Daugherty, M. K. (2013). The prospect of an "A" in STEM education. *Journal of STEM Education: Innovations and Research*, 14(2).

14 Demitriadou, E., Stavroulia, K. E. y Lanitis, A. (2020). Comparative evaluation of virtual and augmented reality for teaching mathematics in primary education. *Education and Information Technologies*, 25(1), 381-401.

https://doi.org/10.1007/S10639-019-09973-5

15 Dillashaw, F. G. y Okey, J. R. (1980). *A test of the integrated science process skills for secondary science students*.

16 Drake, S. M. y Reid, J. L. (2020). 21st century competencies in light of the history of integrated curriculum. *Frontiers in Education*, 5, 122. https://doi.org/10.3389/feduc.2020.00122

17 English, L. D. (2016). STEM education K-12: Perspectives on integration. *International Journal of STEM Education*, 3, 1-8. https://doi.org/10.1186/s40594-016-0046-z

18 European Schoolnet. (2018). *Science, technology, engineering and mathematics education policies in Europe*. Scientix Observatory report. October 2018, European Schoolnet, Brussels.

19 Fernández-Blanco, T., González-Roel, V. y Ares, A. (2020). Estudio exploratorio de las steam desde las matemáticas Exploratory study of steam from mathematics. *Saber & Educar*, (28).

20 Fortenberry, N. L. (1998). Research & curriculum. *Council on Undergraduate Research Quarterly*, 54-61.

21 Fortenberry, N. L. (1993). *Federal policy options to achieve renewal in undergraduate education*. Proceedings of IEEE Frontiers in Education Conference - FIE '93, Washington, DC, USA, 245-250. https://doi.org/10.1109/FIE.1993.405526.

22 Freeman, B., Marginson, S. y Tytler, R. (2019). *An international view of STEM education*. En Sahin, A. y Mohr-Schroeder, M. (Eds.), STEM education 2.0: Myths and truths–what has K-12 STEM education research taught us? (pp. 350-363). Brill. https://doi.org/10.1163/9789004405400_019

23 Freeman, B., Marginson, S. y Tytler, R. (Eds.). (2014). *The age of STEM: Educational policy and practice across the world in science, technology, engineering and mathematics*. Routledge.

24 Gardner, D. P. (1983). *A nation at risk: The imperative for educational reform. An open letter to the American people*. A report to the nation and the secretary of education.

25 Hasanah, U. (2020). Key definitions of STEM education: Literature review. *Interdisciplinary Journal of Environmental and Science Education*, 16(3), e2217. https://doi.org/10.29333/ijese/8336

26 Herold, J. (1974). SPUTNIK IN AMERICAN EDUCATION: A HISTORY AND REAPPRAISAL. *McGill Journal of Education / Revue Des Sciences De l'éducation De McGill*, 9(002). Retrieved from https://mje.mcgill.ca/article/view/6971

27 Holmlund, T., Lesseig, K. y Slavit, D. (2018). Making sense of 'STEM education' in K-12 contexts. *International Journal of STEM Education*, 5, 32. https://doi.org/10.1186/s40594-018-0127-2

28 Ibáñez, M. B. y Delgado-Kloos, C. (2018). Augmented reality for STEM learning: A systematic review. *Computers & Education*, 123, 109-123. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.05.002

29 Jones, L. V. (1988). Chapter 8: School achievement trends in mathematics and science, and what can be done to improve them. *Review of research in education*, 15(1), 307-341.

30 Kakarndee, N., Kudthalang, N. y Jansawang, N. (2018). *The integrated learning management using the STEM education for improve learning achievement and creativity in the topic of force and motion at the 9th grade level*. In AIP Conference Proceedings (Vol. 1923, No. 1, pp. 030024-1, 030024-10). AIP Publishing LLC.

31 Kelley, T. R. y Knowles, J. G. (2016). A conceptual framework for integrated STEM education. *International Journal of STEM Education*, 3(11). https://doi.org/10.1186/s40594-016-0046-z

32 Kim, K.-E. (2021). Experience of Participation in Educational Community in Early Childhood Mathematics Education Using Storytelling and its Meaning. *Journal of Convergence for Information Technology*, 11(2), 219-228.

https://doi.org/10.22156/CS4SMB.2021.11.02.219

33 Koonce, D. A., Zhou, J., Anderson, C. D., Hening, D. A. y Conley, V. M. (2011, June). *What is STEM?* En 2011 ASEE Annual Conference & Exposition (pp. 22-1684).

34 Kramarenko, T. H., Pylypenko, O. S., y Zaselskyi, V. (2019). Prospects of using the augmented reality application in STEM-based Mathematics teaching. *Educational Dimension*, 1 (53), 199?218.

35 Li, Y., Wang, K., Xiao, Y. y Froyd, J. E. (2020). Research and trends in STEM education: A systematic review of journal publications. *International Journal of STEM Education*, 7(1), 1-16. https://doi.org/10.1186/s40594-020-00207-6

36 Martín-Páez, T., Aguilera, D., Perales-Palacios, F. J. y Vílchez-González, J. M. (2019). What are we talking about when we talk about STEM education? A review of literature. *Science Education*, 103(4), 799-822. https://doi.org/10.1002/sce.21522

37 Maass, K., Geiger, V., Ariza, M. R. y Goos, M. (2019). *The role of mathematics in interdisciplinary STEM education*. Zdm, 51, 869-884. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01052-2

38 Mehta, J. (2015). Escaping the shadow: "A nation at risk" and its far-reaching influence. *American Educator*, 39(2), 20.

39 Millar, S. B. (1998). *Indicators of success in postsecondary SMET education: Shapes of the future*. Synthesis and Proceedings of the Annual NISE Forum (3rd, February 23-24, 1998). Workshop Report.

40 Mohr-Schroeder, M. J., Cavalcanti, M. y Blyman, K. (2015). *STEM education: Understanding the changing landscape*. En A practice-based model of STEM teaching (pp. 3-14). Brill.

41 Mojang Studios. (2011). *Minecraft [video game]*. Microsoft Studios.

42 Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2014). El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas; estudio de una experiencia innovadora. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 39, 19-33.

43 National Commission on Excellence in Education. (1983). A nation at risk: The imperative for educational reform. *The Elementary School Journal*, 84(2), 113-130.

44 Noonan, R. (2017). *STEM jobs: 2017 update*. ESA Issue Brief N° 02-17. US Department of Commerce.

45 Panja, V. y Berge, J. (2021). Minecraft Education Edition's Ability to Create an Effective and Engaging Learning Experience. *Journal of Student Research*, 10(2). https://doi.org/10.47611/jsrhs.v10i2.1697

46 Papadakis, S. (2020). Robots and Robotics Kits for Early Childhood and First School Age. International Journal of Interactive Mobile Technologies (iJIM), 14(18), pp. 34-56. https://doi.org/10.3991/ijim.v14i18.16631

47 Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University

48 Radianti, J., Majchrzak, T. A., Fromm, J. y Wohlgenannt, I. (2020). A systematic review of immersive virtual reality applications for higher education: Design elements, lessons learned, and research agenda. *Computers & Education*, 147, 103778. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103778

49 Rahman, N. A., Rosli, R., Rambely, A. S. y Halim, L. (2021). Mathematics teachers' practices of STEM education: A systematic literature review. *European Journal of Educational Research*, 10(3), 1541-1559.

https://doi.org/10.12973/eujer.10.3.1541

50 Razi, A. y Zhou, G. (2022). STEM, iSTEM, and STEAM: What is next? *International Journal of Technology in Education*, 5(1), 1.

51 Resnick, M. (2013). *Learn to Code, Code to Learn*. EdSurge.

52 Rotger, L., Herreros-Herreros, S. y Ribera, J. M. (2022). *Use of Minecraft: Education Edition for Teaching Pre-College Mathematics: Design of Educational Reinforcement*. En C. A. Huertas-Abril y otros (eds.) Handbook of Research on International Approaches and Practices for Gamifying Mathematics (pp 258-277).

https://dx.doi.org/10.4018/978-1-7998-9660-9.ch013

53 Rotger, L., Ribera, J. M. y Cuadrado, M. L. (2021). Visualizando la tercera dimensión desde diferentes realidades. En Diago, P.D., Yáñez, D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 673). Valencia: SEIEM.

54 Samuelsson, R. (2022). *Cultural Heritage Through Educational Robots: Using a Ukrainian Folk Tale with a Programmable Robot in Early Childhood Education*. In: Stephanidis, C., Antona, M., Ntoa, S., Salvendy, G. (eds) HCI International 2022 - Late Breaking Posters. HCII 2022. Communications in Computer and Information Science, vol 1654. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-19679-9_42

55 Satchwell, R. y Loepp, F. L. (2015). Designing and implementing an integrated mathematics, science, and technology curriculum for the middle school. *Journal of Industrial Teacher Education*, 39(3).

https://scholar.lib.vt.edu/ejournals/JITE/v39n3/satchwell.html

56 Springer, L., Stanne, M. E. y Donovan, S. S. (1999). Effects of small-group learning on undergraduates in science, mathematics, engineering, and technology: A meta-analysis. *Review of Educational Research*, 69(1), 21-51.

57 Suchting, W. A. (1992). Constructivism deconstructed. *Science and Education*, 1(3), 223-254.
https://doi.org/10.1007/BF00430275

58 Stohlmann, M., Moore, T. J. y Roehrig, G. H. (2012). Considerations for teaching integrated STEM education. *Journal of Pre-College Engineering Education Research (J-PEER)*, 2(1), 4.

59 Tanenbaum, C. (2016). *STEM 2026: A Vision for Innovation in STEM Education*.
https://www.air.org/resource/report/stem-2026-vision-innovation-stem-education

60 Terroba, M., Ribera, J. M. y Lapresa, D. (2020). Pensamiento computacional en la resolución de problemas contextualizados en un cuento en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 9(2), 73-92.

61 Thibaut, L., Ceuppens, S., De Loof, H., De Meester, J., Goovaerts, L., Struyf, A., Boeve-de Pauw, J., Dehaene, W., Deprez, J., De Cock, M., Hellinckx, L., Knipprath, H., Langie, G., Struyven, K., Van de Velde, D., Van Petegem, P. y Depaepe, F. (2018). Integrated STEM education: A systematic review of instructional practices in secondary education. *European Journal of STEM Education*, 3(1), 02. https://doi.org/10.20897/ejsteme/85525

62 Toma, R. B. y García-Carmona, A. (2021). «De STEM nos gusta todo menos STEM». Análisis crítico de una tendencia educativa de moda. Enseñanza de las Ciencias. *Revista de investigación y experiencias didácticas*, 39(1), 65-80.

63 Torrejón, M. F. y Ventura-Campos, N. (2019). Enseñanza-aprendizaje músico-matemático utilizando robótica educativa. 3C TIC. Cuadernos de desarrollo aplicados a las TIC, 8(3), 12-37.

64 Ueno, C. (2014). Tiempo de (Video) Juegos. *Números-Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 86, 161-171.

65 Wang, L. H., Chen, B., Hwang, G. J., Guan, J. Q. y Wang, Y. Q. (2022). *Effects of digital game-based STEM education on students' learning achievement: a meta-analysis*. IJ STEM Ed 9, 26. https://doi.org/10.1186/s40594-022-00344-0

66 Watson, A. D. y Watson, G. H. (2013). Transitioning STEM to STEAM: Reformation of engineering education. *Journal for Quality and Participation*, 36(3), 1-5.

67 Xie, Y., Fang, M. y Shauman, K. (2015). STEM education. *Annual Review of Sociology*, 41, 331-357.
https://doi.org/10.1146/annurev-soc-071312-145659

68 Zazkis, R., Sinclair, N. y Liljedahl, P. (2013). *Lesson Play in Mathematics Education: A tool for research and professional development*. Springer.

69 Zhong, B., Liu, X., Zhan, Z., Ke, Q. y Wang, F. (2022). What should a Chinese top-level design in STEM Education look like? *Humanities and Social Sciences Communications*, 9(1), 1-8.

Capítulo 2

Modelizando en tres dimensiones para la resolución de problemas de matemáticas con un enfoque STEAM

Lucía Rotger García

Departamento de Ciencias Matemáticas e Informáticas, Universitat de les Illes Balears, España

2.1 Introducción

Desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista (EMR) introducida por Freudenthal (1991), la enseñanza de la matemática, como actividad humana, se debe relacionar con elementos reales y relevantes para la sociedad. Freudenthal aboga por el uso de problemas matemáticos realistas que involucren a los estudiantes en la resolución de problemas auténticos, lo que les permite construir su comprensión de las matemáticas a través de la experiencia práctica. Además, enfatiza la importancia de la comunicación y la discusión en el aula para desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes. Las matemáticas deben contribuir, por tanto, a comprender y describir la realidad que nos rodea.

Con esa perspectiva integradora, las matemáticas, siendo uno de los pilares de la Educación STEAM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Artes y Matemáticas), juegan un papel crucial en este enfoque interdisciplinario en el que se pretende promover experiencias de aprendizaje integrales y significativas. Las matemáticas actúan como el lenguaje subyacente que conecta todas estas disciplinas, proporcionando las herramientas necesarias para analizar, modelar y resolver problemas en diversos campos. Además, la integración de la matemática en contextos STEAM permite a los estudiantes ver la relevancia y aplicabilidad de los conceptos matemáticos en el mundo real, fortaleciendo su comprensión y motivación para aprender (Hsiao y Su, 2021).

Esta educación interdisciplinaria involucra a los estudiantes en el proceso educativo a través de un enfoque multifacético y multisensorial, desarrollando habilidades metacognitivas y controlando la forma en que aprenden (Lytra y Drigas, 2021). La combinación de STEAM con tecnologías emergentes ha mostrado potencial para mejorar la motivación y el aprendizaje de los estudiantes (Hsiao y Su, 2021). Por ello, la inclusión de la tecnología en la educación STEAM representa una evolución natural en el panorama educativo contemporáneo. Las tecnologías emergentes, como la realidad virtual y aumentada, han evidenciado potenciar la comprensión y el aprendizaje de los estudiantes en áreas STEM (Pellas et al., 2020). Estas herramientas no solo enriquecen la experiencia educativa, sino que también preparan a los estudiantes para un mundo en constante evolución tecnológica (Kefalis y Drigas, 2019).

2.2 Impresión 3D y educación STEAM

En el entrecruzamiento de la didáctica moderna con el avance de la tecnología, se destaca la impresión tridimensional como un agente de cambio en la educación STEAM, proveyendo un enlace concreto entre el estudio teórico de las matemáticas y su aplicación práctica. La integración de esta tecnología en el currículo matemático no solo encarna la interdisciplinariedad inherente al enfoque STEAM, sino que también proporciona una plataforma para la exploración creativa y la innovación (Sun y Li, 2017). La impresión en 3D, al transformar los conceptos matemáticos en objetos físicos, promueve un entendimiento más amplio y un reconocimiento estético de la disciplina matemática. Esto se manifiesta en las investigaciones de Lee et al. (2015), donde la belleza inherente en las figuras geométricas se revela a través de modelos impresos en 3D, enriqueciendo así la experiencia educativa. La revisión sistemática de Kit Ng et al. (2022) aporta una clasificación de las propuestas de impresión 3D en contextos STEAM:

- Formas geométricas y otros objetos que fomentan habilidades de pensamiento espacial. Se encuentran ejemplos de desarrollo de conceptos geométricos tales como el volumen y las áreas superficiales de objetos como cubos, primas rectangulares y cilindros. Además, se desarrollan propiedades sobre otros objetos geométricos y sus secciones transversales en contextos de resolución de problemas.

- Conceptos matemáticos de educación superior. Existen propuestas que tratan de desarrollar conceptos de matemáticas como cálculo multivariable, matricial o vectorial.
- Proyectos STEAM. Los diseños de estructuras (por ejemplo, resistentes a terremotos) o de modelos de objetos tridimensionales (como podría ser un coche de carreras) fomentan la aplicación de conocimientos matemáticos dentro de programas STEAM.

La relevancia de la impresión 3D en la educación STEAM se extiende más allá de la visualización y manipulación de objetos matemáticos; se adentra en el reino del aprendizaje experiencial y el desarrollo de habilidades del siglo XXI. Zapata et al. (2022) discuten cómo la metodología STEAM, apoyada por la impresión 3D, promueve el aprendizaje transversal y el desarrollo de habilidades críticas como el procesamiento visoespacial y el pensamiento computacional. Este enfoque interdisciplinario no solo es fundamental para la comprensión conceptual, sino que también es crucial para fomentar la capacidad de innovación y resolución de problemas en los estudiantes.

Al integrar la impresión 3D en la educación matemática, los educadores pueden proporcionar experiencias de aprendizaje que reflejen la realidad multifacética que Freudenthal imaginó, donde los estudiantes no solo resuelven problemas matemáticos, sino que también diseñan y crean objetos que tienen aplicaciones en el mundo real, desde la ingeniería hasta el arte (Harron et al., 2022). Los estudios analizados por Kit Ng et al. (2022) indican que, generalmente, el uso de la impresión 3D en la educación resulta en una tasa más alta de éxito en las habilidades espaciales y de representación matemática.

2.3 Modelización matemática e impresión 3D en contextos STEAM

La modelización matemática, un componente esencial de la educación STEAM, se beneficia de la impresión 3D al proporcionar una plataforma tangible para la exploración de conceptos abstractos y realización de ideas matemáticas en el mundo físico (Lipson y Kurman, 2013). La capacidad de transformar modelos matemáticos en objetos físicos no solo mejora la comprensión espacial y geométrica, sino que también fomenta una comprensión más profunda de las matemáticas aplicadas (Levin y Verner, 2021). La modelización 3D en la educación STEAM no solo se limita a la matemática, sino que también se extiende a aplicaciones más creativas y artísticas. La capacidad de los estudiantes para diseñar y crear objetos 3D que son tanto funcionales como estéticamente agradables les permite explorar la intersección de las matemáticas con el arte y el diseño, lo que refleja la naturaleza interdisciplinaria del aprendizaje STEAM (Nuraliev et al., 2023). Por ejemplo, la modelización de estructuras antiguas utilizando herramientas como GeoGebra, la realidad aumentada y la impresión 3D, ofrece una aproximación interdisciplinaria que entrelaza la historia, la cultura, las matemáticas y la ingeniería, proporcionando a los estudiantes una experiencia educativa rica y multimodal (El Bedewy et al., 2021).

En la educación matemática, la modelización geométrica tridimensional es particularmente relevante ya que puede ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión más intuitiva de conceptos matemáticos complejos, como la simetría, las transformaciones geométricas y las propiedades de los sólidos. Permite a los estudiantes visualizar y manipular la geometría y la topología de los objetos, lo que facilita un aprendizaje más concreto y contextualizado de conceptos matemáticos complejos (Öçal, 2021) y proporciona una comprensión más profunda de las propiedades matemáticas y físicas que definen el mundo que nos rodea (Stolbova et al., 2022). La impresión 3D ofrece una herramienta excepcional para este fin, ya que los estudiantes pueden diseñar, iterar y perfeccionar modelos geométricos, lo que refuerza el ciclo de aprendizaje experiencial (Kolb, 1984). Este enfoque práctico es esencial para el desarrollo del pensamiento crítico y la resolución de problemas (Levin y Verner, 2021). Un estudio realizado por Lin et al. (2021) encontró que el uso de modelado repetitivo y la impresión 3D en proyectos STEM mejoró significativamente la imaginación de los estudiantes y su interés en carreras relacionadas con la tecnología y la ingeniería. Este enfoque práctico permite a los estudiantes aplicar sus conocimientos matemáticos en proyectos de diseño realistas, preparándolos para los desafíos de la industria moderna.

Por todo esto, la convergencia de la modelización matemática y la impresión 3D en la educación STEAM representa una sinergia transformadora que potencia el aprendizaje interdisciplinario y la aplicación práctica del conocimiento.

2.4 Una experiencia de modelización 3D en contextos STEAM: El oloide

En esta sección se va a presentar detalladamente una propuesta educativa que pretende integrar la modelización e impresión 3D con una perspectiva STEAM poniendo el foco en la figura geométrica denominada *oloide*.

En el ámbito de la geometría y su influencia en el desarrollo tecnológico, el oloide se destaca como un prototipo ilustrativo de la simbiosis entre forma y función (ver Figura 2.1). Originado de la mente visionaria del matemático y escultor alemán Paul Schatz, el oloide es una figura de revolución singular, cuya patente en 1969 marcó el comienzo de una exploración más profunda en las propiedades geométricas y su aplicación práctica. Este objeto geométrico, caracterizado por su habilidad para generar un movimiento de volteo continuo, simboliza la confluencia de la estética matemática con la utilidad mecánica (Dirnböck y Stachel, 1997).

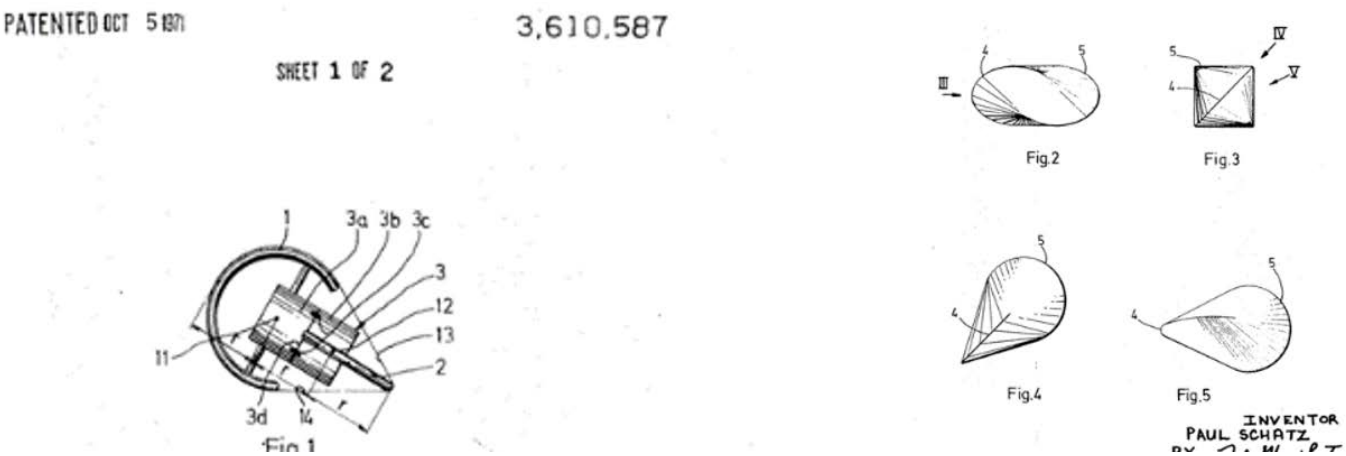

Figura 2.1: *Extractos de la patente del Oloide, Paul Schatz* (*1969*)

Desde el punto de vista matemático formal, el oloide es una superficie reglada originada por la intersección ortogonal de dos círculos congruentes, donde la distancia entre los centros es equivalente al radio común. Por tanto, su construcción geométrica se caracteriza por la generación de una superficie mediante la unión de segmentos correspondientes entre los círculos perpendiculares. Tal superficie reglada se distingue por sus singulares trayectorias durante el movimiento de rotación, donde cada punto de la superficie es capaz de contactar un plano tangente durante el ciclo de rotación completo, subrayando su carácter de objeto de anchura constante.

En las siguientes secciones se detalla una secuencia de actividades para profundizar en el análisis de las propiedades geométricas del oloide, desde el diseño hasta sus aplicaciones. Se han divido secuencialmente en: experimentación manipulativa, modelización de las circunferencias generadoras del oloide a través de Tinkercad, propiedades matemáticas de la figura geométrica, modelización del oloide a través de BlocksCAD e impresión 3D y aplicaciones.

2.4.1 Experimentación manipulativa

La habilidad para visualizar y manipular objetos en tres dimensiones es esencial no solo para el estudio de la geometría misma, sino también para aplicaciones prácticas en campos tan diversos como la ingeniería, la arquitectura y el diseño gráfico. La manipulación de objetos tridimensionales facilita la transición de la comprensión bidimensional a la tridimensional, permitiendo a los estudiantes experimentar directamente con propiedades como el volumen, el área de superficie y las relaciones entre diferentes formas geométricas (Clements y Battista, 1992). Por estas razones, la propuesta parte de una actividad previa de análisis de las formas geométricas que comparten la propiedad de girar.

2.4.2 Análisis del volteo de figuras geométricas tridimensionales

Un posible punto de partida de la experiencia educativa parte de la pregunta: *¿qué figuras tienen la propiedad de girar?*

Las respuestas del alumnado ante esta pregunta permiten institucionalizar el vocabulario que se pretende utilizar a lo largo de la propuesta y marcar diferencias claves entre objetos geométricos circulares bidimensionales (circunferencia, círculo, elipse) y tridimensionales (esfera, cilindro). Estos cuerpos, conocidos como sólidos de revolución o rotores, ofrecen un campo rico para la exploración matemática y la aplicación práctica, desde la ingeniería mecánica hasta el diseño industrial.

Para realizar la experimentación en el aula se puede partir del análisis diferenciado de las posibilidades de giro que tienen objetos tridimensionales como las esferas (que pueden ser modelizadas con pelotas de tenis o futbol) y los cilindros (para los que se pueden usar rollos de papel). Posteriormente, se puede observar los elementos geométricos bidimensionales que conforman las secciones de los objetos anteriores, como los círculos.

2.4.3 La construcción de los círculos generadores del oloide

El oloide emerge de la unión de dos círculos perpendiculares entre sí que comparten un radio, y su estudio desafía a los estudiantes a comprender cómo dos círculos, objetos bidimensionales por excelencia, pueden interactuar en el espacio tridimensional para formar un cuerpo con propiedades únicas.

Para llevar a cabo su construcción el alumnado puede utilizar instrumentos de dibujo como regla y compás para el diseño de dos círculos de igual radio que, posteriormente, se conectan perpendicularmente formando un ángulo recto (como se puede ver en la Figura 2.2). Para el proceso de ensamblado es conveniente tener en cuenta la definición del oloide, es decir, que los dos discos se conectan perpendicularmente compartiendo un radio de ambos círculos.

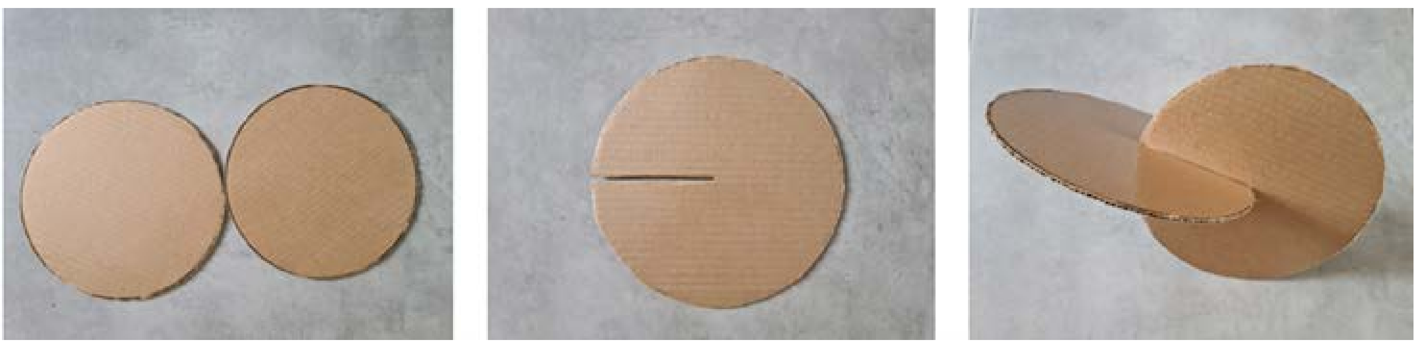

Figura 2.2: *Proceso de construcción de los círculos generadores del oloide con cartón*

Para llevar a cabo este prototipo puede ser de interés disponer de materiales de diferente tipo: firmes (como puede ser el cartón) o más flexibles (como puede ser una cartulina). Esto puede favorecer el posterior análisis de las características del oloide y motivar la necesidad de generar un modelo más firme; por ejemplo, un modelo impreso en 3D.

Una vez se dispone de prototipos de diferentes materiales, es conveniente animar al alumnado a realizar exploraciones sobre la capacidad de rotación de los círculos generadores del oloide y a describir el movimiento que realizan en el proceso de rotación. Para realizar esta tarea puede ser interesante preparar unas preguntas previas que inviten al alumnado a reflexionar sobre la capacidad de rotación del prototipo, incluso antes de hacerlo rotar:

- *¿Cuál es la trayectoria que crees que va a realizar este objeto?*
- *¿Puede realizar una rotación suave como la de un cilindro rodando o una más irregular?*

Al realizar este primer análisis y encontrarse con las dificultades propias del uso de un material que no sea completamente firme se puede despertar el interés por buscar un material alternativo que favorezca un estudio más minucioso de la rotación generada por el oloide.

2.5 Modelización de las circunferencias generadoras del oloide a través de Tinkercad

La importancia de la modelización tridimensional en la educación matemática se fundamenta en la capacidad de los modelos para servir como representaciones concretas de entidades abstractas. Al transformar ecuaciones y teoremas en objetos manipulables, los educadores proporcionan un medio tangible para explorar relaciones espaciales, simetrías, proporciones y otras propiedades geométricas que de otro modo serían difíciles de comprender (Gutiérrez, 1996). La modelización tridimensional actúa como un puente entre la teoría matemática y la realidad física, permitiendo a los estudiantes aplicar su conocimiento en contextos prácticos y resolver problemas complejos. Los estudiantes deben pensar sobre cómo construir sus modelos, qué formas utilizar y cómo combinarlas para lograr el resultado deseado. Este proceso de diseño y resolución de problemas es fundamental para el desarrollo cognitivo y prepara a los estudiantes para futuros desafíos en campos relacionados con STEM y STEAM (Bequette y Bequette, 2012).

La modelización de objetos de geometría tridimensional mediante plataformas como Tinkercad, una herramienta de diseño 3D accesible y basada en la nube, proporciona un entorno intuitivo para la creación de modelos geométricos complejos, facilitando así un entendimiento más profundo de las estructuras tridimensionales y sus propiedades. Al modelar objetos en Tinkercad, los estudiantes no solo aprenden sobre geometría; también adquieren habilidades en diseño asistido por computadora (CAD), que son esenciales para la alfabetización tecnológica moderna (Honey y Kanter, 2013). Esta herramienta es particularmente valiosa en el contexto educativo, ya que facilita el acceso a la modelización 3D debido a su interfaz de usuario amigable que reduce la curva de aprendizaje, permitiendo a estudiantes de todas las edades y niveles de habilidad participar en el aprendizaje práctico de conceptos matemáticos fundamentales. Al arrastrar y soltar formas geométricas básicas y modificar sus dimensiones, los estudiantes pueden explorar conceptos como la simetría, las proporciones y las relaciones espaciales de una manera visual y táctil (Johnson, 2015).

2.5.1 La modelización de los círculos generadores del oloide sobre Tinkercad

Después de la fase anterior en la que se ha invitado al alumnado a experimentar con la propiedad de rotar en objetos tridimensionales y con el prototipo de cartulina o cartón de los círculos generadores del oloide, puede ser un buen momento para construir un modelo tridimensional que se pueda imprimir en 3D. Para ello, se podrían seguir los siguientes pasos:

1) Abrir un espacio de trabajo sobre la herramienta web Tinkercad seleccionando la opción ”crear un nuevo diseño” una vez accedido a la cuenta.

2) Seleccionar el cilindro dentro de la colección de ”Formas Básicas” que serán la base para crear los círculos generadores del oloide.

3) Ajustar las dimensiones del cilindro para que tenga una altura mínima, creando así una forma de disco que representará uno de los círculos generadores. Para esto se debe tener en cuenta tanto el tamaño del modelo que se quiere generar; esto es, el grosor que debe tener el cilindro. A modo de guía, los discos de 2 mm. ofrecen una buena capacidad de rotación.

4) Duplicar el disco para crear el segundo círculo generador.

5) Utilizar las herramientas de rotación para posicionar uno de los discos de manera que esté perpendicular al otro; de hecho, Tinkercad dispone de deslizadores sencillos para ajustar el giro a 90° exactos. Puede ser necesario utilizar la vista de alzado, planta y perfil para comprobar de que los discos están perfectamente perpendiculares entre sí.

6) Alinear los centros de ambos discos, de forma que compartan todo un radio, utilizando las herramientas de alineación y desplazamiento de Tinkercad.

7) Seleccionar y unir los dos objetos para considerarlos como un único objeto mediante la herramienta ”unir”.

8) Presionar la tecla ”D” el objeto se posicionará por encima del plano de trabajo. Es equivalente a subir con el deslizador de cono negro pequeño.

Los pasos mencionados se pueden visualizar en el siguiente enlace de la plataforma Tinkercad:

https://bit.ly/CircunferenciasOloideTinkercad

Además, en la Figura 5.3 se muestran algunos de los pasos indicados.

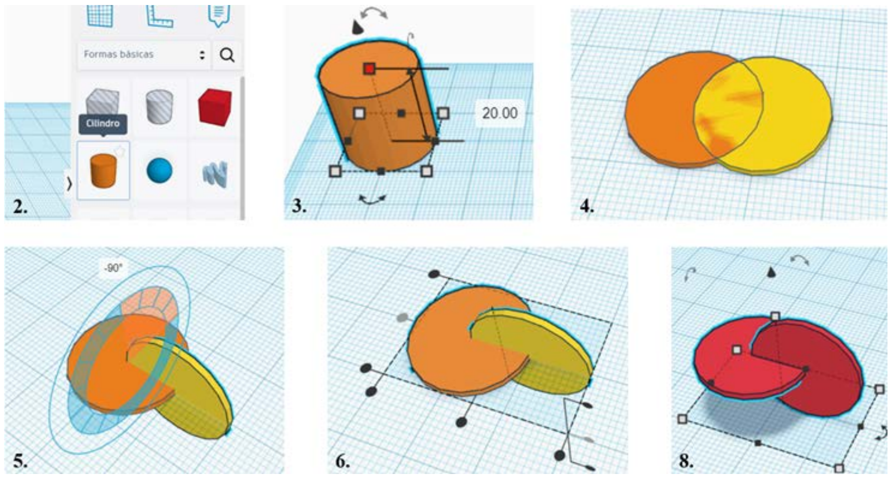

Figura 5.3: *Pasos del proceso de la modelización de los círculos generadores del oloide en Tinkercad*

Asimismo, se pueden descargar los prototipos tridimensionales para ser impresos en una impresora 3D. Una actividad complementaria de interés puede ser el análisis de la forma óptima de impresión de los discos, dado que puede ser útil imprimir los discos por separado y juntarlos posteriormente, ahorrando material de impresión en el uso de soportes. Para poder realizar esta última acción puede ser necesario modificar la estructura del disco, generando hendiduras que permitan conectarlo de forma ortogonal a otro disco. En el siguiente enlace https://bit.ly/STLCirculoOloide se encuentran dos discos separados con hendiduras para facilitar la posterior conexión perpendicular.

2.5.2 La experimentación con los círculos generadores del oloide en Tinkercad

Recientemente, la herramienta Tinkercad ha incorporado lo que denomina el *Sim Lab* que ofrece la capacidad de incorporar parámetros gravitacionales y asignar propiedades materiales específicas a modelos tridimensionales. Mediante la activación de la función *Reproducir*, los objetos modelados se comportan de acuerdo con sus atributos intrínsecos y los efectos de gravedad aplicados, emulando así el movimiento y la interacción conforme a las leyes de la física.

En el siguiente enlace compartido se encuentra la posibilidad de experimentar en el *Sim Lab* con varios diseños diferentes de los círculos generadores del oloide. En la Figura 5.4 y en el enlace https://bit.ly/DiseñosDiscosOloide se observan diferentes diseños de los discos que modelizan los círculos generadores del oloide junto a una rampa sobre la que poder realizar la simulación de rotación.

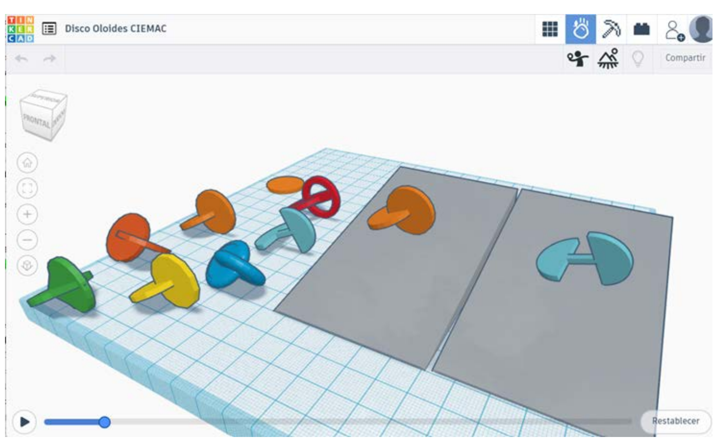

Figura 5.4: *Diferentes modelizaciones de los círculos generadores del oloide en el Sim Lab*

Algunos de los problemas que se pueden responder a través de la experimentación sobre la plataforma de simulación de Tinkercad son los siguientes:

- ¿Qué versión de los círculos generadores del oloide gira mejor en el simulador?
- ¿Qué características tiene el borde del disco que mejor gira en el simulador?

Estas preguntas permiten analizar las diferentes opciones de configuración de los bordes del disco con el objetivo de conocer las mejores opciones para la impresión.

2.6 Propiedades matemáticas de la figura geométrica

La habilidad para analizar y manipular mentalmente objetos tridimensionales es una competencia clave en situaciones de la vida real. La capacidad de visualizar y rotar estos objetos en la mente es un indicador de habilidades de pensamiento crítico y abstracto avanzadas (Clements y Battista, 1992). La educación que enfatiza el análisis de las propiedades matemáticas de la geometría tridimensional fomenta el desarrollo de estas habilidades cognitivas esenciales.

La forma del oloide, con su superficie continua y sin aristas, ofrece un estudio intrigante de las propiedades de las curvas y superficies, así como de las relaciones espaciales que surgen de su construcción geométrica (Dirnböck y Schatz, 1997).

2.6.1 El análisis del oloide a través de la manipulación de los círculos que lo generan

Después de la fase anterior en la que se ha invitado al alumnado a experimentar con la aplicación web de Tinkercad y de generar un modelo de los círculos que lo generan puede ser interesante investigar las características de rotación de este. Entre las preguntas que se pueden resolver se encuentran:

- ¿La trayectoria de los círculos que generan el oloide depende del punto de aplicación y la dirección del impulso inicial?
- ¿Varía la trayectoria del oloide al ser empujado manualmente en comparación con su descenso por una rampa?
- ¿Es posible que el oloide alcance cualquier punto de una superficie plana con un solo impulso o se requieren múltiples impulsos? ¿Necesita rotación adicional?
- ¿De qué forma se detiene el oloide tras ser lanzado? ¿Es consistente este comportamiento en cada intento?

Estas preguntas son solo una muestra de las preguntas abiertas que pueden tratar de responderse a través de la manipulación del prototipo diseñado e impreso en 3D. Se observa que también se puede tratar de dar respuesta a las mismas con los diseños de cartulina o cartón mencionados previamente.

2.6.2 Las matemáticas que definen el oloide

El oloide es un sólido de revolución generado por la rotación de un círculo a lo largo de una trayectoria que interseca otro círculo del mismo diámetro en ángulo recto. Este objeto, que pertenece a la familia de los sólidos de desarrollo, es único en su capacidad para desenrollarse completamente sobre una superficie plana, creando una huella continua y sin solapamientos, una propiedad que no se encuentra en figuras más convencionales como la esfera o el cilindro.

Para el alumnado de los últimos cursos de educación secundaria, se pueden plantear problemas de diferente tipo que conectan las circunferencias que generan el oloide con el oloide en sí, problemas en los que intervienen contenidos como el teorema de Pitágoras y el cálculo de distancias entre puntos en el espacio: *¿qué distancia tienen los segmentos que conectan dos puntos de las circunferencias que generan el oloide?*

Como resultado de esta experimentación, se obtiene que la longitud de los segmentos que definen el oloide a partir de sus circunferencias generadoras es la raíz cuadrada de 3.

Las ecuaciones que definen las circunferencias que generan el posterior oloide son las que se pueden ver en la Figura 5.5 junto con su representación tridimensional.

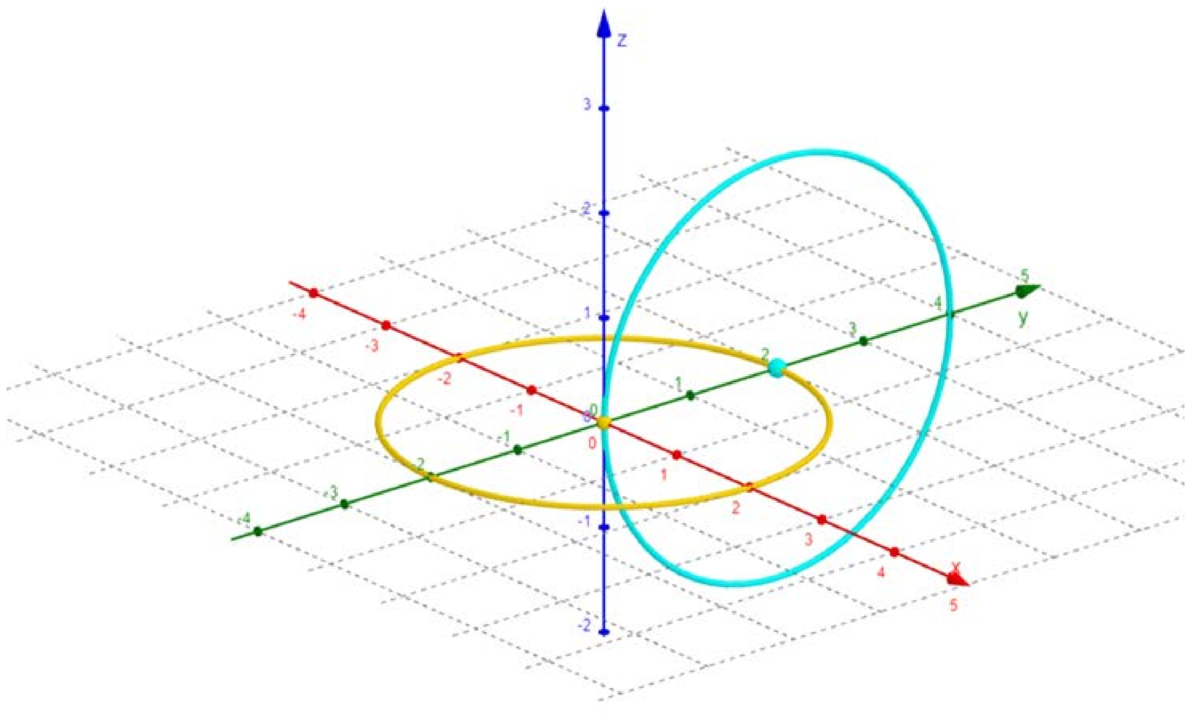

Figura 5.5: *Las circunferencias que generan el oloide y su representación en 3D*

2.7 Modelización del oloide a través de BlocksCAD

La modelización de objetos tridimensionales a través de la programación por bloques, como BlocksCAD, fomenta el desarrollo de habilidades de pensamiento computacional, como la abstracción, la descomposición de problemas y el pensamiento algorítmico. Estas habilidades son transferibles a una amplia gama de disciplinas y problemas, y son fundamentales para la educación STEM (Brennan y Resnick, 2012).

BlocksCAD, en particular, permite a los usuarios crear modelos tridimensionales mediante una interfaz visual basada en bloques, que abstrae la sintaxis del código y se centra en la lógica de la programación. Esta metodología es especialmente beneficiosa en el contexto educativo, ya que reduce la barrera de entrada para los estudiantes que pueden no tener experiencia previa en codificación (Weintrop y Wilensky, 2017). La programación por bloques permite a los estudiantes visualizar el resultado de cada componente de su código en tiempo real, lo que refuerza su comprensión de cómo los cambios en las dimensiones y las relaciones entre los objetos afectan al producto final. Este tipo de retroalimentación inmediata es invaluable para el aprendizaje matemático, ya que promueve un ciclo iterativo de hipótesis, experimentación y revisión (Bau et al., 2015).

2.7.1 El proceso de construcción sobre BlocksCAD

El proceso es similar a la construcción con Tinkercad, sin embargo, cada acción, ya sea un deslizamiento, una herramienta específica o una transformación, requiere la implementación de al menos un bloque de código. A medida que se van integrando y manipulando los distintos bloques de código, es posible observar el desarrollo del modelo en tiempo real. Esto se logra mediante el uso del botón *Hacer*, que activa una previsualización dinámica en el panel visual situado a la izquierda de la interfaz. Cabe destacar que cada vez que se emplea el botón *Hacer*, el sistema reinicia y ejecuta de nuevo todos los bloques de código presentes en el área de trabajo. Por ejemplo, estos podrían ser los pasos para la generación del modelo del oloide en BlocksCAD:

1) Iniciar el proceso de modelado tridimensional accediendo a BlocksCAD, una interfaz web para la programación visual. Es esencial iniciar sesión y guardar manualmente los avances en el diseño, debido a la ausencia de una función de

autoguardado en la plataforma. Este procedimiento garantiza la preservación de los datos de diseño a lo largo de la sesión de modelado.

2) Acceder al menú lateral para seleccionar las primitivas de las formas geométricas. Primeramente, elegir dos cilindros de la categoría *Formas 3D*, identificable por su tono verde oscuro. Estos cilindros serán los discos que formarán la estructura principal del oloide, para ello, se ajustarán los parámetros disponibles: arista y altura.

3) Emplear el bloque de código de *Transformaciones*, visualmente diferenciado por su color azul, para realizar la rotación angular de los discos. Cada disco puede ser rotado 90 grados en el eje X o Y, pero no simultáneamente en ambos ejes.

4) Posterior a la rotación, es necesario reposicionar uno de los discos para que solamente compartan un radio, en lugar de un diámetro completo. Para ello, utilizar el bloque *Trasladar* para mover el disco rotado una distancia equivalente a un radio (en el ejemplo, 10 mm) en la dirección del eje de rotación.

5) Utilizar el bloque *Unión* de la sección *Ops. de conjuntos* para fusionar ambos discos en un único objeto geométrico. Aunque esta acción no produce una alteración visual significativa respecto al paso anterior, es esencial para la consolidación de los discos en una pieza unificada, facilitando su exportación mediante el botón *Generar STL*.

6) Para la construcción de un oloide completo, substituir el bloque de *Unión* por el bloque de *Envoltura convexa*. Este ajuste en el proceso de modelado resulta en la formación de un oloide, con las características geométricas definidas.

7) Para incrementar la complejidad de la programación con bloques de código se puede considerar la introducción de variables. Estas pueden regular aspectos como el grosor o el radio de los discos. La exploración de discos con radios diferentes abre nuevas dimensiones en el análisis y diseño del oloide.

En la Figura 5.6 se muestran resultados asociados con algunos de los pasos descritos anteriormente.

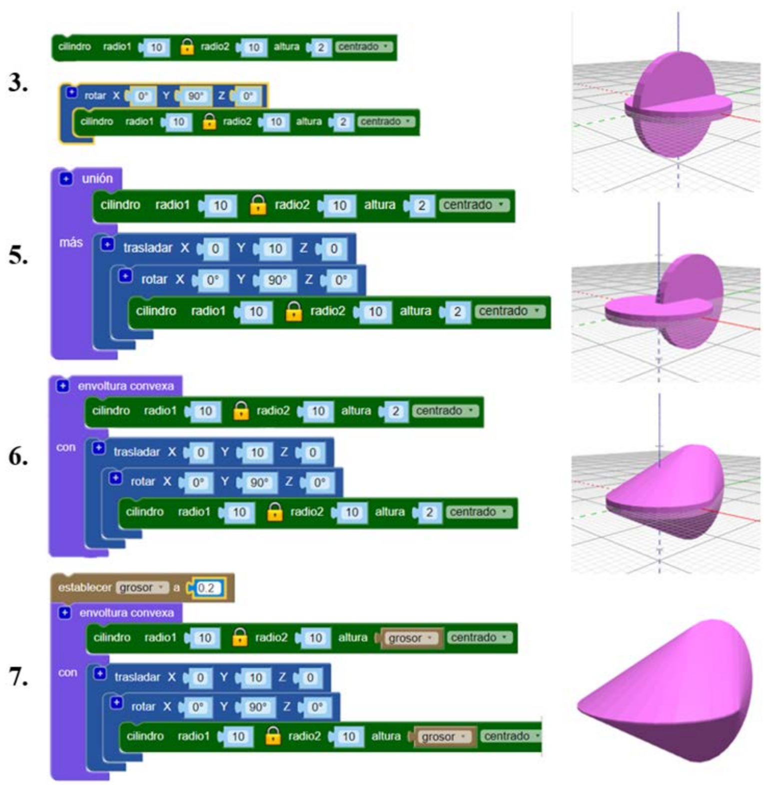

Figura 5.6: *Pasos del proceso de creación del oloide en BlocksCAD*

En https://bit.ly/OloideBlocksCAD se pueden encontrar las versiones de los pasos 5 y 7. Se recomienda activar el bloque de código deseado haciendo clic derecho y *Habilitar* antes de su generación.

2.8 Impresión 3D y aplicaciones

La tecnología de impresión 3D ha revolucionado la forma en que los estudiantes pueden interactuar con la geometría, permitiéndoles crear y explorar modelos físicos de conceptos que anteriormente solo podían visualizar en dos dimensiones o en el espacio abstracto de su imaginación (Buehler et al., 2015). Además, la impresión 3D ofrece una aplicación directa de conceptos matemáticos en contextos reales y prácticos, lo que mejora la relevancia percibida de la matemática en la vida cotidiana y profesional de los estudiantes. Al ver cómo los objetos geométricos pueden ser creados y utilizados en el mundo real, los estudiantes pueden apreciar más profundamente la utilidad y la belleza de la matemática (Schelly et al., 2015).

La impresión 3D también promueve la interdisciplinariedad dentro de la educación STEAM, al integrar la geometría con la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las artes. Los estudiantes no solo aprenden sobre geometría tridimensional, sino que también adquieren conocimientos en diseño asistido por computadora (CAD), ingeniería de materiales y procesos de fabricación, preparándolos para las demandas de la economía del conocimiento (Ford y Minshall, 2019).

2.8.1 El proceso de impresión 3D del oloide

Las características geométricas que definen el oloide, particularmente cuando se busca optimizar el material de impresión al minimizar el uso de soportes estructurales, requiere de dividir el oloide en dos mitades. A continuación, se describe el proceso de impresión:

1) Preparación del modelo 3D. Una vez se dispone del modelo tridimensional completo utilizando software de modelado 3D, se divide en dos mitades iguales. Esta división se realiza de manera que las superficies de corte sean planas, cortando por el plano que contiene a una de las dos circunferencias de la Figura 5.5.

2) Orientación de las Mitades para la Impresión. Cada mitad del oloide se orienta en la plataforma de impresión de tal manera que la superficie plana de corte quede en contacto con la base de impresión. Esta orientación es crucial para reducir la necesidad de soportes estructurales, ya que las superficies curvas del oloide, si se imprimen directamente sobre la base, pueden requerir soportes extensos para evitar deformaciones o caídas durante la impresión.

3) Impresión de las Mitades. Se procede a la impresión de cada mitad del oloide. Puede ser necesario eliminar pequeñas imperfecciones en la superficie del oloide.

4) Ensamblaje del Oloide. Las dos mitades se unen para formar el oloide completo. Esto se puede hacer utilizando adhesivos apropiados para el material de impresión (como puede ser el pegamento de rápida adhesión), asegurando que las mitades se alineen correctamente y formen una estructura sólida y uniforme.

De esta forma no solo se elimina la necesidad de soportes, sino que también puede mejorar la calidad de la impresión al minimizar las deformaciones y facilitar el manejo de las piezas durante el proceso de impresión y post-procesamiento. En el siguiente enlace https://bit.ly/STLOloide se puede acceder al archivo para su impresión.

2.8.2 Aplicaciones del oloide en otros ámbitos STEAM

La importancia de estudiar el oloide radica en su movimiento de rodadura, que es excepcionalmente suave y armonioso, lo que lo hace relevante para aplicaciones prácticas como la mezcla de materiales, la aerodinámica y la hidrodinámica. La forma en que el oloide transfiere puntos de su superficie a un plano durante la rodadura puede inspirar diseños innovadores en campos que requieren movimientos eficientes y uniformes (Pöppe, 1989). Por ejemplo, se ha explorado su uso en el diseño de ruedas para vehículos y robots, donde su movimiento único puede ofrecer ventajas en términos de tracción y estabilidad (Braun, 1993).

Además, su forma y las características de movimiento que presenta son de interés en la hidrodinámica y la aerodinámica. Una de las aplicaciones más notables del oloide en el flujo de fluidos se encuentra en su capacidad para mezclar eficientemente líquidos. La forma del oloide, al girar dentro de un fluido, genera un patrón de flujo complejo y altamente eficiente. Este patrón de mezcla es significativamente diferente del creado por agitadores tradicionales, ya que el oloide induce un movimiento tridimensional que abarca tanto la rotación como la traslación. Esta característica lo hace ideal para aplicaciones en las que se requiere una mezcla homogénea y suave, como en la industria química, farmacéutica y de procesamiento de alimentos.

En el campo de la ingeniería ambiental (Olbrich-Majer, 2016), el oloide ha demostrado ser útil en sistemas de tratamiento de aguas residuales. Su movimiento único facilita la aireación y mezcla de agua en tanques de tratamiento, mejorando la eficiencia del proceso de descontaminación. Esta aplicación es particularmente valiosa, ya que ofrece una alternativa energéticamente eficiente a los métodos convencionales de aireación y mezcla.

2.9 Conclusiones

Este documento trata de resaltar la función central de las matemáticas como el lenguaje unificador de las disciplinas STEAM, apoyando la visión de Freudenthal (1991) sobre la enseñanza de la matemática como una actividad humana interconectada con elementos reales y relevantes para la sociedad. La impresión 3D emerge como un agente de cambio en la educación STEAM, proporcionando un enlace concreto entre el estudio teórico de las matemáticas y su aplicación práctica, en línea con las observaciones de Sun y Li (2017). Este enfoque no solo encarna la interdisciplinariedad inherente al enfoque STEAM sino que también proporciona una plataforma para la exploración creativa y la innovación.

La investigación de Lee et al. (2015) y la revisión sistemática de Kit Ng et al. (2022) demuestran cómo la impresión en 3D, al transformar los conceptos matemáticos en objetos físicos, promueve un entendimiento más amplio y un reconocimiento estético de la disciplina matemática. La modelización matemática 3D, beneficiándose de la impresión 3D, proporciona una plataforma tangible para la exploración de conceptos abstractos y la realización de ideas matemáticas en el mundo físico, tal como lo señalan Lipson y Kurman (2013) y Levin y Verner (2021). Este enfoque interdisciplinario no solo es fundamental para la comprensión conceptual, sino que también es crucial para fomentar la capacidad de innovación y resolución de problemas en los estudiantes.

La convergencia de la modelización matemática y la impresión 3D en la educación STEAM, como se ejemplifica con el estudio del oloide, representa una sinergia transformadora que potencia el aprendizaje interdisciplinario y la aplicación práctica del conocimiento. Esto es coherente con la visión de Harron et al. (2022), quienes destacan la importancia de integrar la impresión 3D en la educación matemática para proporcionar experiencias que reflejen la realidad multifacética imaginada por Freudenthal, donde los estudiantes no solo resuelven problemas matemáticos, sino que también diseñan y crean objetos con aplicaciones en el mundo real.

En conclusión, este análisis sugiere un futuro prometedor para la educación STEAM, donde la interacción entre matemáticas y tecnología emergente juega un papel crucial en el enriquecimiento de la experiencia educativa, respaldando las perspectivas de autores como Hsiao y Su (2021) y Zapata, Arias-Flores y Alvarez (2022) sobre el impacto de la integración de tecnologías emergentes en la educación.

2.10 Referencias bibliográficas

1 Bau, D., Bau, A., Dawson, M. y Pickens, C. (2015). Pencil Code: Block code for a text world. *Proceedings of the 14th International Conference on Interaction Design and Children*, 445-448. http://dx.doi.org/10.1145/2771839.2771875

2 Bequette, J. W. y Bequette, M. B. (2012). A place for ART and DESIGN education in the STEM conversation. *Art Education*, 65(2), 40-47. https://doi.org/10.1080/00043125.2012.11519167

3 Braun, H. (1993). The Oloid: A Study in Geometric Motion and Its Applications. *Engineering and Design Review*.

4 Brennan, K. y Resnick, M. (2012). New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. *Proceedings of the 2012 annual meeting of the American Educational Research Association*.

http://web.media.mit.edu/ kbrennan/files/Brennan_Resnick_AERA2012_CT.pdf

5 Buehler, E., Branham, S., Ali, A., Chang, J., Hofmann, M. K., Hurst, A. y Kane, S. (2015). Sharing is caring: Assistive technology designs on Thingiverse. *Proceedings of the 33rd Annual ACM Conference on Human Factors in Computing Systems*, 525-534.

6 Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 420-464). Macmillan.

7 Dirnböck, H. y Stachel, H. (1997). The Development of the Oloid. *Journal for Geometry and Graphics*, 1(2), 105-118.

8 El Bedewy, S., Choi, K., Lavicza, Z., Fenyvesi, K. y Houghton, T. (2021). STEAM Practices to Explore Ancient Architectures Using Augmented Reality and 3D Printing with GeoGebra. *Education Sciences*, 11(1). https://doi.org/10.1515/edu-2020-0150

9 Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*, Kluwer, Dordrecht, Reidel Publishing Co.

10 Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 3-19.

11 Harron, J., Emert, R., Thomas, D. M. y Campana, J. (2022). Laying the Groundwork for STEAM: Scaling and Supporting 3D Design and Printing in Higher Education. *Frontiers in Education*, 6, 763362. https://doi.org/10.3389/feduc.2021.763362

12 Honey, M. y Kanter, D. E. (Eds.). (2013). *Design, Make, Play: Growing the Next Generation of STEM Innovators*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203108352

13 Hsiao, P.-W. y Su, C.-H. (2021). A Study on the Impact of STEAM Education for Sustainable Development Courses and Its Effects on Student Motivation and Learning. *Sustainability*, 13, 3772. https://doi.org/10.3390/su13073772

14 Johnson, S. D. (2015). Making makers in the classroom: A new approach to learning design. *Journal of Pre-College Engineering Education Research* (*J-PEER*), 5(1), Article 4.

15 Kit Ng, D. T., Tsui, M. F. y Yuen, M. (2022). Exploring the use of 3D printing in mathematics education: A scoping review. *Asian Journal for Mathematics Education*, 1(3), 338-358. https://doi.org/10.1177/27527263221129357

16 Kolb, D. A. (1984). *Experiential learning: Experience as the source of learning and development*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc.

17 Lee, S. G., Lee, J. Y., Park, K. E., Lee, J. H. y Ahn, S. (2015). Mathematics, Art and 3D-Printing in STEAM Education. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series E: Communications of Mathematical Education*, 29(1), 35-53. https://doi.org/10.7468/jksmee.2015.29.1.35

18 Levin, L. y Verner, I. (2021). Student practice in 3D design and printing for promoting analytical and applied mathematical thinking skills. *International Journal of Engineering Pedagogy*, 11(3). https://doi.org/10.3991/ijep.v11i3.19893

19 Lipson, H. y Kurman, M. (2013). *Fabricated: The New World of 3D Printing*. John Wiley & Sons.

20 Lytra, N. y Drigas, A. (2021). STEAM education- metacognition - Specific Learning Disabilities. *Scientific Electronic Archives*, 14(10). https://doi.org/10.36560/141020211442

21 Nuraliev, F. M., Morozov, M. N., Giyosov, U. y Yorkulov, J. (2023). About the application of the R-function for geometric modeling of 3D objects of complex shapes in a virtual educational environment. *National Virtual University Platform*. https://doi.org/10.7256/2454-0714.2023.3.36937

22 Öçal, T. y Halmatov, M. (2021). 3D geometric thinking skills of preschool children. *International Journal of Curriculum and Instruction*, 13(2), 1508-1526.

23 Olbrich-Majer, M. (2016). *Zum schütteln und rühren*. Lebendige Erde.
https://www.lebendigeerde.de/index.php?id=portrait_162

24 Pöppe, C. (1989). The oloide and other objects of Paul Schatz. *Mathematical Intelligencer*, 11(2), 52-56.

25 Pellas, N., Dengel, A. y Christopoulos, A. (2020). A Scoping Review of Immersive Virtual Reality in STEM Education. *IEEE Transactions on Learning Technologies*, 13(4), 748-761 https://doi.org/10.1109/TLT.2020.3019405

26 Schatz, P. (1969). *Tumbling Apparatus* (*3 610 587*). United States Patent Office. https://bit.ly/OloidPatent

27 Schelly, C., Anzalone, G., Wijnen, B.y Pearce, J. M. (2015). Open-source 3D-printing technologies for education: Bringing additive manufacturing to the classroom. *Journal of Visual Languages & Computing*, 28, 226-237.

http://digitalcommons.mtu.edu/materials_fp/47

28 Stolbova, I., Pichkaleva, O. y Nosov, K. (2022). Digital 3D Model in Geometric and Graphic Education. En *2022 VI International Conference on Information Technologies in Engineering Education* (*Inforino*) (pp. 1-6). Moscow, Russian Federation. https://doi.org/10.1109/Inforino53888.2022.9782896

29 Sun, Y. y Li, Q. (2017). The application of 3D printing in mathematics education. En *2017 12th International Conference on Computer Science and Education* (*ICCSE*) (pp. 47-50). Houston, TX, USA. IEEE.

https://doi.org/10.1109/ICCSE.2017.8085461

30 Weintrop, D. y Wilensky, U. (2017). Comparing block-based and text-based programming in high school computer science classrooms. *ACM Transactions on Computing Education* (*TOCE*), 18(1), 1-25.

31 Zapata, M., Arias-Flores, H. y Alvarez, J. (2022). STEAM and Educational Applications with 3D Printing. In: Emilio Rossi and Massimo Di Nicolantonio (eds) Additive Manufacturing, Modeling Systems and 3D Prototyping. AHFE (2022) International Conference. *AHFE Open Access*, vol 34. AHFE International, USA. http://doi.org/10.54941/ahfe1001593

Capítulo 3

Desafíos y oportunidades de la enseñanza de la matemática en entornos digitales, reflexiones de un profe de mate

Carlos Alvarado González

Profesor adhnorem, Instituto Tecnológico de Costa Rica

La gran razón por la cual los niños se abandonan por completo a las actividades tontas que les quitan el tiempo de forma insípida es porque encuentran que su curiosidad se ve obstaculizada y sus preguntas son descuidadas. John Locke

3.1 La matemática, herramienta imprescindible

La importancia de la matemática en el mundo actual es cada vez mayor, al proporcionar herramientas y métodos para abordar problemas complejos, tomar decisiones informadas y avanzar en la ciencia, la tecnología, el arte y la economía, entre otros. A medida que el mundo se vuelve más complejo, la demanda de habilidades matemáticas también aumenta. Así, es una disciplina fundamental en la formación de las personas a través de los diferentes niveles del proceso educativo. No sobra decir que la matemática proporciona a los estudiantes habilidades analíticas, razonamiento lógico y herramientas para resolver problemas.

Con el advenimiento de las tecnologías digitales, así como los cambios de paradigma que se han dado en los procesos de creación de conocimiento, surge la inevitable pregunta de qué hacer frente al reto que representa la enseñanza de la matemática en este nuevo entorno. Mucho se ha discutido sobre las potencialidades que puede representar la adopción de un ambiente virtual para llevar a cabo el desarrollo de estrategias para la enseñanza de la matemática. Sin embargo, diversos son los retos que se deben enfrentar, tanto tecnológicos, como metodológicos y humanos. Se van a exponer, a criterio del autor, algunas ideas que pueden ayudarnos a incursionar en este nuevo ambiente de formación.

Se presentan varias ideas, alrededor de conceptos como similitud, simetría, matemática visual, análisis de datos, etc., como insumos para que los estudiantes puedan asimilar y degustar la matemática, la que ha tomado un lugar preponderante en el nuevo paradigma de la ciencia de datos y, habilidades como aprender a aprender, autodisciplina, ética, fortalecimiento de la curiosidad, etc., se vuelven elementos imperativos.

3.2 Enseñanza virtual

A través de los años, se ha reflexionado mucho sobre las potencialidades de la enseñanza presencial versus la enseñanza virtual; las dos presentan sus propias ventajas y desventajas. La enseñanza virtual ofrece la flexibilidad de poder acceder al contenido educativo desde cualquier lugar y en cualquier momento, mientras que la enseñanza presencial ofrece la oportunidad de interacción social y colaboración directa entre estudiantes y docentes. Por ejemplo, en las siguientes tablas se resumen algunas fortalezas (Tabla 3.1) y debilidades (Tabla 3.2) de ambas modalidades.

Enseñanza presencial	Enseñanza virtual
▪ Interacción en persona, estableciendo vínculos afectivos. ▪ Enseñanza personalizada con apoyo individualizado. ▪ Acceso a entornos físicos seguros y adecuados. ▪ Fomento de la socialización y habilidades sociales. ▪ Interacción en persona que fomenta discusiones y debates. ▪ Desarrollo de habilidades de colaboración.	▪ Utilización de juegos y aplicaciones educativas. ▪ Recursos multimedia interactivos. ▪ Flexibilidad para adaptarse a estilos de aprendizaje variados. ▪ Mayor acceso a recurso en línea y materiales de aprendizaje. ▪ Mayor flexibilidad en la programación de clases. ▪ Autodirección del aprendizaje y autogestión. ▪ Acceso a una amplia gama de recursos en línea. ▪ Flexibilidad en horarios y ubicación. ▪ Desarrollo de habilidades de autodirección.

Tabla 3.1: *Fortalezas de cada modalidad*

Enseñanza presencial	Enseñanza virtual
▪ Limitaciones de recursos tecnológicos en algunas áreas. ▪ Necesidad de traslados a la institución. ▪ Rigidez en horarios y ubicación. ▪ Posible falta de acceso a tecnología y recursos en línea. ▪ Requerimiento de autodisciplina y gestión del tiempo. ▪ Evaluaciones en persona pueden ser estresantes.	▪ Falta de interacción directa entre el docente y los estudiantes. ▪ Crear espacios de colaboración entre estudiantes. ▪ Dificultad para desarrollar habilidades sociales. ▪ Aumento de la carga de trabajo para los estudiantes porque pueden tener que dedicar más tiempo al estudio para compensar la falta de interacción directa con el docente. ▪ Posible distracción en línea. ▪ Requiere altos niveles de autodisciplina. ▪ Posible desvinculación con el proceso de aprendizaje. ▪ Requiere una mayor planificación por parte del docente.

Tabla 3.2: *Debilidades de cada modalidad*

En este caso, nos centraremos en la educación en modalidad virtual sin detrimento de la tradición de la educación presencial, la cual, en muchos casos, se hace imprescindible, sobre todo en los inicios del proceso educativo, así como en las últimas etapas de la formación universitaria, maestrías y doctorados.

La educación virtual, si bien se puede remontar a principios del siglo XX, es a partir de la década de los setenta cuando comenzó a desarrollarse de forma importante, con el desarrollo de sistemas de aprendizaje en línea y el aumento de la disponibilidad de computadoras personales. Y en la actualidad, se ha fortalecido con el desarrollo de las tecnologías digitales como la Internet, el abaratamiento de las computadoras, así como el incremento de su capacidad.

Existe otro gran dilema en la enseñanza virtual y es el referente a la necesidad de establecer una serie de elementos que permitan caracterizar qué tipo de enseñanza se debe brindar y esto según el nivel de escolarización y edad que tenga el estudiante. Así, deben considerarse estrategias diferentes, según el nivel educativo en que se encuentre, ya sea educación primaria, secundaria o universitaria.

En el caso de la enseñanza primaria, las evaluaciones virtuales pueden ser una herramienta útil para evaluar el progreso de los estudiantes en los conceptos básicos de la matemática. Sin embargo, es importante tener en cuenta las limitaciones de este formato, como el riesgo de fraude y la falta de interacción. Con respecto a la enseñanza secundaria, las evaluaciones virtuales pueden ser utilizadas para evaluar el dominio de conceptos más complejos y la capacidad de resolución de problemas. Sin embargo, es importante que las evaluaciones sean diseñadas cuidadosamente para evitar el fraude y garantizar que los estudiantes tengan la oportunidad de demostrar sus habilidades. Por su parte, en la enseñanza universitaria, las evaluaciones virtuales pueden ser una forma efectiva de evaluar el aprendizaje de los estudiantes en cursos de matemática. Las herramientas de analítica de aprendizaje pueden utilizarse para recopilar datos sobre el rendimiento de los estudiantes, lo que puede ayudar a los docentes a identificar problemas de aprendizaje y brindar apoyo personalizado.

La virtualidad obliga a repensar las formas de interacción, entre docente y estudiantes y entre los mismos estudiantes, así como la evaluación y el seguimiento del proceso de su formación. En efecto, la evaluación puede ser un problema ya que es difícil garantizar que los estudiantes estén aprendiendo de forma efectiva. Esto se debe a que el docente no puede observar de forma directa el progreso ni brindarles retroalimentación personalizada. Además, en dicho proceso de aprendizaje, se deben fortalecer habilidades como aprender a aprender, problema que se profundiza, según el nivel en que se encuentra el estudiante. Así, no es lo mismo dicha habilidad en un niño que se encuentre en la educación primaria, a un adolescente colegial.

Así, estos desafíos concernientes a la evaluación y seguimiento en el aprendizaje de los estudiantes requieren que nos adaptemos a las características y dinámicas particulares de este entorno de aprendizaje. En primer lugar, se debe asegurar que los estudiantes estén realizando sus trabajos de manera independiente y que dichas evaluaciones reflejen su propio aprendizaje, sin recurrir a prácticas deshonestas o fraudulentas, como algunos suponen ha sido en el caso en el periodo de pandemia del Covid-19. Pero, para alcanzar esto se debe supervisar el proceso de evaluación en línea que garantice la integridad y cumplimiento de las reglas establecidas. Esto quiere decir que se deben buscar soluciones efectivas que permitan prevenir el plagio y así mantener la confianza en los resultados de la evaluación.

Para aprovechar las fortalezas y minimizar las debilidades de la evaluación de los cursos de matemática en formato virtual, es necesario el uso de una variedad de métodos de evaluación; esto ayudará a garantizar que los estudiantes sean evaluados de forma integral y que el formato virtual no limite la capacidad de los docentes para evaluar el aprendizaje. Por lo tanto, se requiere diseñar evaluaciones de forma cuidadosa con el fin de evitar el fraude y garantizar que las evaluaciones sean justas y equitativas.

En síntesis, la evaluación de cursos de matemática en formato virtual presenta tanto fortalezas como debilidades y es importante que los docentes las tengan en cuenta con el fin de diseñar evaluaciones que sean efectivas y justas.

3.3 IA: ¿Inteligencia Artificial o Inteligencia Aumentada?

En la actualidad, muchos de los conceptos que se han desarrollado en el tiempo alrededor de las tecnologías digitales, se han ido aglutinando a través de un término general como es el de Inteligencia Artificial. A pesar de que este concepto data de 1956, desgraciadamente, su uso se ha vuelto un término cliché que sirve, en muchos casos, para posicionar un producto, servicio o sistema en el mundo comercial. En años anteriores se hablaba de reconocimiento de voz, Photoshop, algoritmos, redes neuronales; hoy se habla de Inteligencia Artificial. Erróneo es considerar que, por razones meramente comerciales, cualquier avance en el mundo de las tecnologías digitales, se hable de Inteligencia Artificial.

Como se desprende del libro de Julia (2019), la Inteligencia Artificial, al estilo hollywoodense, no existe. Más bien, se puede ver esta como una "caja de herramientas" cuyas aplicaciones pueden ser de gran utilidad en diferentes áreas y que involucran gran cantidad de datos, siempre y cuando se haga un buen uso de ellas. Y es en esa vía, que consideramos cómo debe posicionarse en el mundo de la enseñanza: un conjunto de aplicaciones que pueden ayudar, si se hace un buen uso, en el fortalecimiento de la formación de los estudiantes.

Mucho se ha hablado de la derrota que sufrió el campeón mundial de Go, el sudcoreano Lee Sedol, frente al algoritmo *AlphaGo*[1]. Lo que quizás no se ha dicho es que, por ejemplo, Lee Sedol utilizó, en las diferentes partidas, un consumo de 20 Wh de energía, producto del uso de su cerebro, mientras que *AlphaGo* requirió de 1500 procesadores, 30 GPU (Unidades de Procesamiento de Gráficos) y 30 TPU (Unidades de Procesamiento de Tensores). Es decir, para hacer un sistema capaz de vencer a una persona en el juego de Go, se requirió, además de ser altamente especializado, un consumo de 440 kWh. Y si se deseara que este sistema jugara damas chinas, quizás no podría hacerlo.

Así, la Inteligencia Artificial, en cualquier disciplina y, principalmente en la educación virtual, debe ubicarse en su propia realidad. Como se dijo anteriormente, se debe ver como un conjunto de aplicaciones que pueden ayudar al docente y a sus estudiantes en el proceso de aprendizaje. De esta forma, es erróneo creer que con solo contar con una laptop y una conexión a Internet, se pueda impartir una educación de calidad.

En conclusión, la Inteligencia Aumentada se centra en el uso de la tecnología para mejorar la inteligencia humana. Esto puede tener un impacto positivo en nuestras vidas, ya que nos permitirá hacer cosas que no podríamos hacer por nosotros mismos. Por ejemplo, puede ayudarnos a tomar mejores decisiones, a aprender más rápido y a ser más creativos. En este sentido, la Inteligencia Aumentada es una forma más positiva de ver el futuro de las tecnologías digitales. Nos permite centrarnos en las posibilidades que ofrece esta tecnología, en lugar de los riesgos que conlleva.

3.4 La curiosidad, raíz del conocimiento

Un elemento por considerar en el contexto del aprendizaje de un estudiante es fortalecer la habilidad de la curiosidad. Este es un punto crucial que está presente en las personas, desde su más tierna infancia. Sin embargo, esta sed de saber se va perdiendo a través de los años. Este es un elemento básico que se debe fortalecer si se desea que la habilidad de ”aprender a aprender” se convierta en verdaderamente un insumo y no en una simple definición, sin ningún tipo de relevancia. Porque el ”aprender a aprender” es imperativo en un ambiente de enseñanza virtual, en donde el estudiante debe asumir una serie de tareas por su cuenta, a diferencia de un ambiente presencial.

Según el autor Livio (2017) la curiosidad puede clasificarse en varios tipos, de los cuales rescatamos dos. En primer lugar la *curiosidad epistémica* que nos impulsa a adquirir conocimientos por el simple deseo de saber más. Es la curiosidad intelectual que nos lleva a hacer preguntas y explorar nuevos temas. Como se mencionó anteriormente, este tipo de curiosidad es inherente a las personas, la cual se va disipando a través de la edad del estudiante; en algún momento pasamos de ser personas sedientas de saber a personas más conformistas e indiferentes. ¿Qué pasó?, ¿en qué momento se da este desgano?, ¿es el sistema educativo vigente el responsable directo, o son otros factores? Preguntas que quizás sean difíciles de responder, pero que sí evidencian una realidad, la capacidad de asombrarnos se va perdiendo a través de los años en el sistema educativo. Por otra parte, se tiene la *curiosidad sobre el futuro*, que nos impulsa a especular, planificar y anticipar lo que vendrá, lo que puede ser útil en la forma de decisiones. Este tipo de curiosidad se va haciendo más notoria conforme se avanza en la escala de formación del estudiante; entre más avanzado, el estudiante debe fortalecer esta habilidad de tratar de predecir el futuro, que es uno de los pilares fundamentales del mundo de la ciencia de datos.

3.5 Aprender a aprender

Entre la gran variedad de propuestas metodológicas, un elemento de la mayor importancia para desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje tiene que ver con que los estudiantes deben adquirir la habilidad de ”aprender a aprender”. Sin embargo, esta posibilidad se hace más incierta cuando se habla de la educación virtual, porque esto requiere una persona con grandes deseos de aprendizaje, así como autodisciplina, cualidades que se han ido perdiendo a través de los años. Ahora, la gran pregunta que surge es, ¿cómo realizar esto?

Un elemento básico para fomentar la curiosidad en los estudiantes es transmitir la idea de la horizontalización de la matemática y cómo ella aparece como un hilo conductor en diferentes disciplinas. En el libro de Hofstadter (1982) se exploran temas

[1]AlphaGo es un programa informático desarrollado por Google DeepMind para jugar al juego de mesa Go.

relacionados con la lógica, la matemática, la música, el arte y la inteligencia. Esta obra promueve la idea de que estas disciplinas aparentemente dispares, están interconectadas de maneras sorprendentes. Y esto puede inspirar a los estudiantes a explorar conexiones entre diferentes áreas del conocimiento y fomentar la curiosidad por descubrir estas relaciones. Además, se presentan desafíos intelectuales y rompecabezas, lo que puede estimular la curiosidad en los estudiantes al invitarlos a resolver problemas y a explorar conceptos complejos por sí mismos. Al enfatizar la importancia de la expresión personal y la originalidad, puede alentar a los estudiantes a explorar sus propias ideas y fomentar su curiosidad en la búsqueda de formas creativas de expresarse.

La curiosidad es un rasgo natural de los seres humanos, que se manifiesta desde la infancia. Los niños son curiosos por naturaleza, ya que están descubriendo el mundo que los rodea. Los lleva a hacer preguntas, investigar, buscar respuestas y probar cosas nuevas. Este proceso activo de exploración es esencial para el aprendizaje autodirigido, importante sobre todo en ambientes virtuales de enseñanza. Sin embargo, esta curiosidad puede ir disminuyendo a medida que los niños van creciendo. Así, la pregunta que surge es por qué, en algún momento del desarrollo de los niños, el interés de asombrarse y la curiosidad que nos acompaña desde la más tierna infancia, se perdió en el camino, ¿por qué perdimos esa capacidad de asombrarnos?

Existen una serie de factores que pueden contribuir a la pérdida de la curiosidad en los niños. En primer lugar, se puede mencionar la presión social, esto es que los niños pueden sentirse presionados para encajar en un determinado grupo o para seguir las expectativas de los demás. Esto puede llevarlos a reprimir su curiosidad por miedo a ser juzgados o rechazados. También, se puede mencionar el miedo al fracaso, en donde los niños pueden tener miedo de equivocarse o de no ser lo suficientemente buenos. Esto puede llevarlos a evitar situaciones nuevas o desafiantes, lo que puede limitar su curiosidad. Por otra parte, se podría mencionar la falta de estímulos en los estudiantes para mantener su curiosidad. Si el entorno no ofrece suficientes estímulos, los estudiantes pueden aburrirse y perder su interés por aprender. Finalmente, otro elemento disonante puede ser la educación formal, ya que puede contribuir a la pérdida de la curiosidad si se centra demasiado en la memorización y la repetición. Los estudiantes necesitan oportunidades para explorar, experimentar y resolver problemas por sí mismos.

3.6 Metodología MAETS

En efecto, en vez del acrónimo STEAM, se podría usar el acrónimo MAETS[2], debido a la importancia que reviste la matemática en esta propuesta metodológica, tanto, como formación profesional, así como andamiaje fundamental para las áreas del Arte, la Ingeniería, la Tecnología y la Ciencia.

El concepto de STEAM, más que una metodología de formación, en muchos casos, se ha convertido en un concepto comercial que fundamentalmente ha servido como imán de atracción en diferentes centros de educación. Es importante que este concepto realmente sea considerado como una opción viable para la formación de recurso humano en estas diferentes áreas sensibles y que son necesarias para el desarrollo de las economías, así como la formación integral de las personas.

Otro aspecto que se debe considerar es que la acumulación y administración de datos se han vuelto tan importantes en los diferentes campos del saber que incluso el mismo método científico se ve enfrentado a una forma alternativa de producir conocimiento. En efecto, con el método científico lo que se busca es establecer hipótesis, las cuales se validan con la generación de datos. Sin embargo, actualmente, con la generación de grandes volúmenes de datos, se puede proceder de forma inversa, es decir, a partir de estos se establecen hipótesis como patrones, correlaciones y tendencias que sean de interés para crear nuevo conocimiento o para la toma de decisiones. Por esta razón, no se puede desligar de esta propuesta lo que concierne a la acumulación, administración y análisis de grandes volúmenes de datos, lo que requiere soluciones matemáticas a estos análisis y no es extraño cómo la matemática se ha vuelto una disciplina vital en esta nueva coyuntura.

3.7 Sacar a la matemática del pizarrón y del aula

Con el propósito de enamorar a los estudiantes sobre la matemática, poco se lograría si se sigue enseñando como se ha hecho desde hace siglos; lo que debemos hacer es sacarla de los pizarrones y aulas de cuatro paredes y llevarla al entorno de los estudiantes y sus áreas de interés.

[2] El apellido MAETS proviene del catalán ”mates” y podría haberse originado como un apodo para alguien que era amigo de muchos.

A continuación se presentan algunos elementos que, a criterio del autor, podrían considerarse con el fin de incorporar la matemática en el mundo real y el mundo de los datos.

3.7.1 Simetría

La palabra simetría proviene del griego *sym* (con), *métron* (medida). Por lo tanto, la palabra simetría puede traducirse como "*con medida*" o "*medida justa*". En su sentido original, la simetría se refería a la correspondencia en forma, tamaño y posición de las partes de un todo. También se utiliza para referirse a la correspondencia entre dos o más cosas.

Según se explica en el libro de Livio (2005), la simetría se puede ver como un concepto universal que se halla en todas las disciplinas y se puede encontrar en la naturaleza, en la ciencia, en el arte y en la arquitectura. Por ejemplo, las flores son simétricas, los cristales están formados por átomos dispuestos de forma simétrica, las matemáticas están llenas de conceptos simétricos, y muchas obras de arte y arquitectura están inspiradas en la simetría. Asimismo, menciona que, por ejemplo, de las diferentes apariencias que los animales podían haber adoptado, prevalecieron las simetrías, sin olvidar las leyes de la física, lo que favorece una propuesta que puede enamorar a los estudiantes.

Así, la simetría puede ser entendida y apreciada por personas de diferentes disciplinas. La simetría es un concepto estético que puede ser apreciado por personas de todas las edades y niveles de formación. Además, puede ser utilizado para generar nuevas ideas, pues ayuda a encontrar nuevas soluciones a problemas científicos, crear nuevas obras de arte y diseñar nuevas estructuras arquitectónicas.

Asimismo, en su libro Livio (2005) proporciona numerosos ejemplos de cómo la simetría ha sido utilizada para integrar la ciencia, el arte y la matemática. Por ejemplo, menciona la obra del matemático griego Pitágoras, quien creía que la música se basaba en principios matemáticos simétricos. También menciona la obra del artista y matemático Maurits Cornelis Escher, quien utilizó la simetría para crear imágenes imposibles que desafiaban la percepción humana.

Por su parte, en la obra de Stewart (2007), se enfatiza en la importancia de la simetría como herramienta para integrar, ciencias y arte y, al establecerla como un concepto general, se convierte en un lenguaje común que sirve para conectarlas. Asimismo, afirma que nos puede ayudar a comprender el mundo que nos rodea y nos puede inspirar la creatividad.

La simetría es un concepto que se puede considerar en la enseñanza de la matemática porque proporciona una base para el razonamiento lógico, la resolución de problemas y nos permite identificar patrones y regularidades en el mundo que nos rodea.

Un tipo de simetría que puede ser de gran utilidad para que el estudiante fortalezca su curiosidad es la que se denomina *simetría bilateral*. Este es un concepto común en la naturaleza y se encuentra en muchas criaturas vivas, como los seres humanos, animales y plantas. También se utiliza en el diseño y el arte pues es una característica estética atractiva y puede tener aplicaciones prácticas en la ingeniería y la arquitectura, ya que puede facilitar la fabricación y el diseño de objetos.

Así, la simetría es una característica intrínseca de la naturaleza. La encontramos en todas partes, desde la simetría de un copo de nieve hasta la simetría en la estructura de las moléculas. Como se mencionó, sirve como enlace entre diferentes áreas del saber.

También, la simetría es importante en la resolución de problemas. Al identificar la simetría en un problema, podemos simplificarlos y hacerlo más fácil de resolver. Por ejemplo, si un problema implica encontrar el área de un cuadrado, podemos dividir el cuadrado en dos triángulos congruentes y resolver el problema usando la fórmula para el área de un triángulo.

La enseñanza de la simetría puede ayudar a los estudiantes a desarrollar un pensamiento crítico y creativo. Al proporcionar a los estudiantes oportunidades para explorar este concepto, los educadores pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades para identificar y describir patrones , razonar de forma deductiva, resolver problemas y pensar en forma abstracta.

En resumen, la simetría es una herramienta poderosa que une la ciencia, el arte y la matemática al ser una característica común en todas estas disciplinas. Facilita la resolución de problemas, la comunicación de ideas y la inspiración interdisciplinaria, lo que la convierte en un concepto fundamental para comprender la interconexión de diferentes áreas del conocimiento.

3.7.2 Similitud

La palabra similitud proviene del latín *similitudo*, que a su vez se deriva de *similis*, que significa similar o semejante. Así, se usa para referirse a la cualidad o estado de ser similar o parecido a algo más. Con el tiempo, esta palabra pasó al español y se convirtió en similitud, manteniendo su significado original de parecido o semejanza entre dos o más cosas.

Como se menciona en la publicación de González (2023), la similitud es fundamental en el contexto humano. En casi cualquier actividad surge el imperativo de comparar objetos, ya sean físicos o intangibles, como las ideas. Estas comparaciones se pueden referir a brechas entre clases sociales, cercanías entre modelos, indicadores de desarrollo humano, eficacia de un documento, intervalos de tiempo, etc. Una forma de crear un modelo matemático que permita la comparación de objetos se puede hacer mediante la creación de métricas, como es el caso de una función *distancia*.

Así, el concepto de similitud es fundamental para muchas actividades humanas, tanto a nivel individual como colectivo. En el ejemplar de Deza y Deza (2016) se pueden apreciar cómo las distancias matemáticas nos sirven para comparar objetos en diferentes disciplinas como la física, la bilogía, las ciencias de la tierra, etc.

A nivel individual, la similitud es esencial para nuestra capacidad de aprender y comprender el mundo que nos rodea. Aprendemos identificando similitudes entre experiencias nuevas y antiguas, y usando esas similitudes para hacer predicciones sobre el futuro. En el arte, nos ayuda a apreciar el arte; podemos encontrar una pintura hermosa porque es similar a las cosas que encontramos bellas en el mundo real. Y, en el caso de la ciencia es fundamental, ya que nos ayuda a hacer predicciones, uno de los pilares fundamentales del desarrollo de la ciencia de datos.

Por otra parte, como concepto filosófico, la similitud puede desempeñar un papel crucial en el fortalecimiento de la habilidad de aprender a aprender en matemática y en otras áreas del conocimiento. Por ejemplo, la similitud puede ayudar a establecer relaciones y patrones entre diferentes objetos y conceptos, ya que, al fomentar el pensamiento analógico, los estudiantes pueden transferir conocimientos y estrategias de resolución de problemas de una situación a otra. Al alentar a los estudiantes a hacer estas conexiones, se fomenta un aprendizaje más significativo y una comprensión más sólida de los principios matemáticos subyacentes y esto puede manifestarse en reconocer cómo ciertos conceptos están relacionados entre sí o cómo se aplica en otras disciplinas y situaciones del mundo real.

Esto les permite a los estudiantes aplicar lo que han aprendido en un contexto a nuevas situaciones matemáticas, lo que es esencial para aprender a aprender y desarrollar una comprensión más profunda y flexible de la matemática. Es una invitación a los estudiantes a explorar diferentes perspectivas y enfoques para abordar problemas en diferentes contextos y a considerar múltiples estrategias para resolverlos, enfrentando desafíos con confianza y enfoques más innovadores.

Así, la similitud puede alentar a los estudiantes a buscar conexiones por sí mismos y promueve el aprendizaje autónomo y el pensamiento crítico. Los estudiantes se convierten en aprendices activos y curiosos que están motivados a explorar y descubrir nuevos conceptos y relaciones matemáticas por sí mismos, pudiendo desarrollar una base sólida para enfrentar nuevos desafíos y para aplicar sus conocimientos, tanto dentro como fuera del aula. Esto es esencial para el desarrollo de la habilidad de aprender a aprender a lo largo de toda su vida.

3.7.3 Matemática visual

Para finales del siglo XIX y principios del XX, el pedagogo suizo Johann Heinrich Pestalozzi hizo importantes contribuciones a la educación, incluyendo la enseñanza de la matemática a través de mecanismos visuales y prácticos. Pestalozzi promovió el uso de objetos físicos y materiales manipulativos, como bloques, cubos y otros objetos, para enseñar conceptos matemáticos. Creía que los estudiantes debían experimentar con objetos tangibles para comprender mejor los conceptos matemáticos abstractos. Pestalozzi enfatizaba la importancia de desarrollar la intuición matemática. Creía que los estudiantes debían adquirir una comprensión profunda de los conceptos matemáticos a través de la observación y la práctica, en lugar de simplemente memorizar fórmulas y reglas. Abogaba por la participación de los estudiantes en su propio proceso de aprendizaje. Creía que los estudiantes debían descubrir por sí mismos los conceptos matemáticos, y los maestros debían actuar como guías y facilitadores. Pestalozzi también abogaba por adaptar la enseñanza de las matemáticas al nivel y las necesidades individuales de cada estudiante. Reconocía que cada estudiante tenía su propio ritmo de aprendizaje y que los maestros debían personalizar la enseñanza.

Y esta posibilidad de trabajar con una matemática visual, permite que se fortalezca la curiosidad, al llevar de la mano a los estudiantes y puedan descubrir que la matemática está presente por doquier: en la construcción de las colmenas de las abejas, en donde las celdas son hexágonos perfectos; en los periodos de hibernación de cigarras basados en números primos; en el mundo mineral, como es el caso de unas 40 000 columnas de basalto en forma de hexágonos y pentágonos de la Calzada del Gigante en Irlanda, etc.

Por otra parte, en el mundo donde nos desenvolvemos, la generación de ingentes cantidades de datos, en muchas ocasiones, las decisiones basadas en los datos se tendrán necesariamente que realizar en forma visual. Incorporar estas capacidades de visualización en los programas de los estudiantes pueden ayudar a fortalecer la capacidad de resolver problemas, analizando patrones y correlaciones y contar así con herramientas sólidas para establecer predicciones.

3.7.4 Lenguaje sencillo

Es curioso cómo el cálculo diferencial e integral se enseña actualmente como se hacía hace 200 años. En el tratado de Lacroix (1820) se aprecia el desarrollo de la teoría y los ejercicios que acompañan a los diferentes temas. No es importante para un estudiante pasar largas horas resolviendo cientos de integrales, por ejemplo, por partes, cuando existen aplicaciones informáticas que lo pueden hacer de forma automática. Y en un ambiente de enseñanza virtual, asignar a los estudiantes resolver este tipo de problemas, posiblemente utilizarán aplicaciones que los resuelvan por ellos. No estoy afirmando que el cálculo no sea de gran relevancia; lo que sí cuestiono es la forma en que lo hacemos. Más importante es enfatizar en cómo el concepto de derivada o integral se puede utilizar para resolver problemas concretos.

Así, se debe salir de propuestas de enseñanza de la matemática que lo único que persiguen es realizar problemas repetitivos que se centran en solamente cómputos. Esto se justificaba en el pasado, pero contando con aplicaciones que permiten hacer esos cálculos, no tiene sentido que hoy en día le pidamos a un estudiante que realice, por ejemplo, el producto de dos números de cuatro dígitos utilizando una tabla de logaritmos. Para ello, una simple calculadora podría hacer dicha tarea, y eso no significa que el estudiante pierda capacidad cognitiva. Por ello, se debe ir a buscar otras alternativas que le permitan al estudiante ser más creativo.

Según la obra de Nonaka y Takeuchi (1995), una forma de crear conocimiento tácito[3] es mediante el uso de un lenguaje figurativo, utilizando por ejemplo, la metáfora y la analogía. En esa línea, estos conceptos también podrían facilitar el uso de un lenguaje matemático más simple, al proporcionar a los estudiantes relacionar conceptos matemáticos abstractos con ideas o situaciones más concretas, lo que hace que sea más fácil para las personas comprender dichos conceptos. En el campo de la matemática, se utilizan términos técnicos y una jerga específica que pueden ser difíciles de entender para aquellos que no son expertos en la materia. Las metáforas y analogías pueden ayudar a superar estas barreras al proporcionar un lenguaje más accesible, lo que hace que los estudiantes encuentren relevancia en lo que están aprendiendo y así pueden descubrir nuevas formas de abordar problemas matemáticos y promover la creatividad en la resolución de problemas.

En resumen, aunque la obra de Nonaka y Takeuchi (1995) no se centra en el lenguaje matemático en particular, el uso de metáforas y analogías puede ser una estrategia efectiva para hacer que los conceptos matemáticos sean más accesibles y comprensibles y estimulen la creación de conocimiento.

[3] Según su modelo, el conocimiento tácito se refiere a conocimientos y habilidades que una persona posee pero que son difíciles de expresar o transmitir de manera formal. Este tipo de conocimiento es altamente personal y a menudo se adquiere a través de la experiencia, la práctica y la intuición.

3.8 Reflexión final

Según el informe "The Economic Value of Mathematics in the UK" publicado por la Royal Society en 2022, la matemática representa un 10 % del PIB de Reino Unido. Este porcentaje se calcula teniendo en cuenta el valor económico de los productos y servicios que utilizan la matemática, así como el valor de los empleos que requieren conocimientos matemáticos.

Así, hoy más que nunca, la matemática se ha convertido en un motor fundamental para el desarrollo de las naciones. Por ello, en los procesos vigentes de educación, se hace un imperativo que la matemática fluya de la mejor manera en las mentes de las personas; que sean capaces de asimilarla de la forma más natural posible. Por ello, se debe analizar lo que se ha hecho hasta ahora y dar el golpe de timón necesario, para que desde la más tierna infancia, sin perjuicio de géneros, podamos utilizarla con el fin de responder a muchas de las cuestiones que nos rodean cotidianamente.

En la creación de conocimiento, actualmente, pasamos de un modelo de causalidad a uno en donde lo que se resalta es que los fenómenos se dan; y esto se debe a que, en muchos casos, los fenómenos por analizar cuentan con todos los datos y no solamente una muestra de estos. Así, pasamos de un muestreo a uno en donde, al contar con todos los datos, los análisis se vuelven fundamentales y para navegar en este ambiente, la matemática se hace imprescindible. Muchas de las decisiones basadas en datos que se están tomando, se hacen sobre diagramas y no tanto sobre cantidades de tablas y texto. Por ello, se hace necesaria la habilidad de una matemática visual que permita presentarlos y analizarlos de la mejor manera.

Como se ha planteado anteriormente, la similitud y la simetría pueden brindar a los estudiantes una forma intuitiva de comprender conceptos matemáticos abstractos, ya que, al trabajar con figuras y objetos que son similares o simétricos, los estudiantes pueden visualizar y relacionar propiedades geométricas y algebraicas de manera más efectiva y esto les puede ayudar a internalizar y aplicar conceptos de una manera más natural.

Asimismo, estos conceptos pueden ofrecer a los estudiantes herramientas para abordar problemas matemáticos de manera creativa. Al reconocer similitudes entre problemas previamente resueltos, los estudiantes pueden aplicar estrategias y técnicas similares para resolver nuevos desafíos. Además, la simetría proporciona un marco para explorar y descubrir nuevas soluciones mediante la manipulación y transformación de objetos simétricos.

Y un elemento vital es que la similitud y la simetría tienen aplicaciones en diversas disciplinas más allá de la matemática. Al explorar estos conceptos, los estudiantes pueden establecer conexiones con otras áreas como la física, la biología, el arte y la arquitectura. Esto enriquece su comprensión de la matemática al ver cómo se aplican en diferentes contextos, se promueve una visión interdisciplinaria del conocimiento.

Así, la similitud y la simetría desempeñan un papel esencial en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Estos conceptos ayudan a los estudiantes a comprender conceptos abstractos, estimulan el pensamiento visual y espacial, promueven la resolución de problemas y fomentan la creatividad. Además, establecen conexiones interdisciplinarias y preparan a los estudiantes para conceptos matemáticos más avanzados. Se sugiere que los educadores integren la similitud y la simetría de manera efectiva en su enseñanza, utilizando ejemplos concretos y actividades prácticas para promover una comprensión profunda y significativa de estos conceptos matemáticos.

La enseñanza de la matemática no debe quedarse estática, ya que la sociedad, la tecnología y las necesidades educativas están evolucionado rápidamente. En efecto, el desarrollo de nuevas tecnologías, como la inteligencia artificial, la computación cuántica y la robótica afectan la forma en que se utiliza la matemática y, por tanto, debe igualmente adaptarse a este cambio. Los estudiantes deben estar preparados para utilizar herramientas digitales y software que requieren conocimientos matemáticos actualizados, sin olvidar la diversidad de los estudiantes y sus diferentes estilos de aprendizaje. Se requieren enfoques pedagógicos que sean más accesibles y relevantes para todos los estudiantes.

En resumen, la actualización de la enseñanza de las matemáticas es esencial para preparar a los estudiantes para los desafíos y oportunidades del mundo actual. Esto implica no solo adaptar los contenidos, sino también los métodos pedagógicos y enfoques educativos para promover una comprensión más profunda y aplicada de las matemáticas en la vida cotidiana y en el ámbito profesional. La actualización de la enseñanza de la matemática es una inversión en el futuro. Al proporcionar a los estudiantes las habilidades matemáticas que necesitan, les estamos preparando para el éxito en un mundo cada vez más complejo y cambiante.

3.9 Referencias bibliográficas

1 Borba, M. (2021). The future of mathematics education since COVID-19: humans-with-media or humans-with-non-living-things. *Educational Studies in Mathematics*, 108, 385-400.

2 Brading, K. y Castellani, E. (2017). *Simetría y ruptura de la simetría. Diccionario Interdisciplinar Austral*. Recuperado el 15 de julio de 2023. http://dia.austral.edu.ar/Simetría_y_ruptura_de_la_simetría

3 Deza, M. y Deza, E. (2016). *Encyclopedia of Distances* (4th ed.) Springer.

4 González, C. (2023). *Ciencia de Datos*. Editorial Tecnológica de Costa Rica.

5 Hofstadter, D. R. (1982). *Gödel, Escher, Bach: Una eterna trenza dorada*. CONACYT.

6 Julia, L. (2019). *L'intelligence artificielle n'existe pas*. Ed. First.

7 Lacroix, S. F. (1820). *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*. Mme Ve Courcier, Eibraire pour les Sciences.

8 Livio, M. (2005). *The Equation That Couldn't Be Solved*. Simon y Schuster, Inc.

9 Livio, M. (2017). *Why?: What Makes Us Curious*. Simon y Schuster, Inc.

10 Nonaka, I. y Takeuchi, H. (1995). *The Knowledge-creating company*. Oxford University Press.

11 Perrenoud, P. (2008). *Dix nouvelles compétences pour enseigner Invitation au voyage*. (5e éd). Paris.

12 Rodríguez, P. (2018). *Inteligencia Artificial: Cómo cambiará el mundo (y tu vida)*. Deusto.

13 Stewart, I. (2007). *Why Beauty Is Truth. A History of Symmetry*. Basic Books.

Capítulo 4

Sobre la relación entre tareas y pensamiento matemático

Ildiko Pelczer

Universidad de Concordia, Montreal, Canadá

4.1 En lugar de introducción

¿Por qué enseñamos matemáticas? ¿Cuáles son los objetivos y qué podemos emplear para alcanzarlos? Responder estas preguntas fundamentales es una invitación a reflexionar sobre las formas en que podemos abordar distintos elementos de la formación matemática en nuestros estudiantes. Se presentan respuestas a estas interrogantes desde dos perspectivas centrales: la que podemos identificar en los materiales curriculares, por lo tanto, vinculada a opiniones oficialmente sancionadas, y la que emerge de la comunidad de personas involucradas en la divulgación y en competiciones matemáticas.

En los materiales curriculares, a menudo, podemos identificar dos conjuntos de objetivos para enseñar matemáticas. Uno consiste en la adquisición de algoritmos, procedimientos y técnicas específicas de las matemáticas junto con los conceptos subyacentes. Podríamos decir que este aspecto se centra en los procedimientos. Un segundo conjunto de objetivos se expresa como el desarrollo del pensamiento matemático, incluyendo el pensamiento crítico y creativo (Gallagher et al., 2012). El desarrollo del pensamiento matemático se equipara con el desarrollo de competencias como el razonamiento inductivo, el reconocimiento de patrones y la modelización.

No es que estos dos tipos de objetivos se expresen explícitamente; más bien, es un problema identificado en la descripción detallada de los indicadores del aprendizaje de los estudiantes y su medición, junto con las herramientas ofrecidas (por ejemplo, ejercicios, tareas y actividades en los libros de texto) para lograr los objetivos de aprendizaje. Los investigadores en educación matemática (por ejemplo, Kang y Kilpatrick, 1992; Hudson et al., 2014) explicaron el cambio utilizando el concepto de ”transposición didáctica” (Chevallard, 1989), que se refiere al proceso de transformar el conocimiento científico (como el creado y aceptado por la comunidad científica) en conocimiento para enseñar (como se manifiesta en los libros de texto). Hudson et al. (2014), basándose en el trabajo de Lakatos (1976), argumentan que, en última instancia, esto se puede atribuir a dos visiones diferentes de las matemáticas: una donde las matemáticas se ven como un conjunto de verdades eternas y otra donde se ven como una construcción humana falible. Aunque estas dos visiones son fundamentalmente diferentes, el mensaje de las matemáticas, tal como se construye a través de los materiales curriculares, no es tan claro.

Los problemas, tareas y actividades ofrecidas en los libros de texto son la principal fuente de actividades de enseñanza: por lo tanto, afectan el aprendizaje y la enseñanza y, en última instancia, desempeñan un papel en el acceso y la equidad (Fan et al., 2013; Hadar, 2017). Estos deben ofrecer la oportunidad para que los estudiantes adquieran las herramientas de las matemáticas. Con herramientas me refiero, por un lado, a procedimientos y algoritmos, y por otro, a formas de pensar particulares de las matemáticas.

Por lo tanto, la pregunta principal en la que me centraré es: ¿cómo podemos caracterizar las tareas que brindan la oportunidad de pensar matemáticamente (creativa y críticamente)?

Naturalmente, la tarea en sí es importante, pero para que su potencial se alcance, debe implementarse adecuadamente en el aula. La integración en la enseñanza en el aula plantea nuevas preguntas: ¿son pertinentes las tareas para clases de niveles mixtos? ¿Cuál es el papel del maestro en la implementación de las tareas? ¿Podemos permitirnos dedicar tiempo a estas tareas cuando hay tantos otros conceptos que enseñar?

Aunque estas preguntas son importantes, el enfoque de este artículo se centra en ejemplificar tareas con el potencial de mejorar el pensamiento matemático, y los demás aspectos se tratarán brevemente.

Antes de discutir esas tareas, necesitamos revisar la definición (o definiciones) que se encuentran en la literatura de investigación para el pensamiento matemático. Discutiré esto en la próxima sección.

A continuación, ofreceré ejemplos de tareas y discutiré sus características. ¿Qué aspecto de la tarea hace que, al trabajar en ellas, los estudiantes se involucren en el pensamiento matemático? ¿Quién puede crear estas tareas? En esta sección, me baso en mi experiencia liderando un círculo de matemáticas durante los últimos 8 años con estudiantes de 8 a 17 años.

Finalmente, discutiré brevemente el papel del maestro en la integración de estas tareas en el proceso normal de enseñanza.

4.2 Breve revisión de algunas definiciones

Devlin (2011) describe el pensamiento matemático como una forma de observar las cosas una vez simplificadas a sus características esenciales y analizar los patrones subyacentes. En otras palabras, identificar la estructura es la esencia del pensamiento matemático y, para hacerlo, uno debe familiarizarse con la lógica de las matemáticas y las demostraciones. Pensar matemáticamente significa aprender a mirar el mundo con ojos de matemático.

Mason et al. (2010) hacen hincapié en el pensamiento y utilizan la expresión ”pensar matemáticamente” en lugar de ”pensamiento matemático”. Como tal, el enfoque se centra en los procesos subyacentes, que los autores denominaron: especialización, generalización, conjetura, justificación y persuasión. La especialización se refiere al uso de casos concretos que resaltarían algunos elementos de la situación general. Las observaciones derivadas del estudio de casos conducen a un proceso de generalización: extendiendo el estudio a un conjunto más grande de objetos. A su vez, esto puede llevar a la conjetura: formular afirmaciones sobre una clase de objetos. Los siguientes pasos son la justificación y la persuasión, mediante los cuales se establece el valor de verdad de una afirmación. Los procesos son cíclicos en su naturaleza: en algunos casos, podríamos regresar a la especialización y refinar los hallazgos.

Monteleone et al. (2018) describen siete características del pensamiento matemático, identificadas a partir de una revisión extensa de la literatura. Estas son: 1. Conectar procedimientos/notar relaciones/generalizar conceptos; 2. Abordar problemas complejos de maneras novedosas; 3. Razonar; 4. Construir sentido; 5. Evaluar; 6. Considerar otros métodos/estrategias/soluciones alternativas y 7. Describir soluciones/aclaración de soluciones/elaboración de ideas.

En la lista anterior se incluyen características generalmente vinculadas a la creatividad: abordar problemas de maneras novedosas y generar múltiples soluciones. En la literatura de investigación, la creatividad matemática se ve como un producto, proceso o experiencia que puede manifestarse a través de la creación de ideas, conceptos y enfoques novedosos (Boud et al., 2015; Liljedahl y Sriraman, 2006). Un marco común para evaluar la creatividad matemática es mediante medidas cuantitativas de sus componentes, propuesto inicialmente por Silver (1997): fluidez, flexibilidad y novedad. Una forma particular de mejorar, pero también evaluar la creatividad matemática es a través de tareas con múltiples soluciones (Leikin y Lev, 2007; Leikin, 2011), problemas abiertos y planteamiento de problemas (Lewis y Colonnese, 2021). Por lo tanto, la interconexión entre la creatividad y el pensamiento matemáticos: la creatividad matemática presupone el pensamiento matemático, pero también contribuye a su desarrollo.

El desarrollo del pensamiento creativo es parte del currículo de matemáticas de muchos países, por lo tanto, hay una necesidad de un marco para evaluar los materiales curriculares en términos de su potencial para fomentar habilidades de pensamiento creativo. Hadar y Tirosh (2019) propusieron un marco que consta de nueve categorías y lo utilizaron para analizar libros de texto de matemáticas primarias en el contexto del currículo israelí. Su marco propuesto se sistematiza en tres temas: pensamiento lateral, pensamiento divergente y pensamiento convergente-integrador. El pensamiento lateral está vinculado a la generación de ideas novedosas, mientras que el pensamiento divergente se manifiesta en fluidez y flexibilidad. El pensamiento convergente-integrador está vinculado a la identificación de nuevas relaciones, encontrar patrones y determinar nuevas relaciones (Suherman y Vidakovich, 2022). Hadar y Tirosh (2019) concluyeron a partir de su análisis de libros de texto que hay diferencias en cuanto a dónde se enfatiza en el currículo en relación con las habilidades de pensamiento creativo y lo que se enfatiza en el libro de texto.

La investigación sobre el análisis de libros de texto se centra en evaluar las oportunidades de aprendizaje ofrecidas por las actividades, tareas y problemas en los mismos. El análisis se centra en las tareas, no en la puesta en práctica de las tareas por parte de los maestros. En este sentido, las preguntas principales se refieren a la demanda cognitiva de la tarea y la necesidad de construir una solución (por ejemplo, para tareas de resolución de problemas) versus seguir una plantilla de solución.

Estudios en este ámbito han demostrado repetidamente que una gran proporción de las tareas ofrecidas en los libros de texto tienen una baja demanda cognitiva, es decir, se basan principalmente en la memorización, la aplicación directa de fórmulas y algoritmos o soluciones modeladas (por ejemplo, Jäder et al., 2020; Jones y Tarr, 2007).

Fuera de la comunidad de investigación, hay matemáticos y educadores comprometidos en actividades de enseñanza, principalmente a través de círculos matemáticos, divulgación matemática, campamentos de entrenamiento y competiciones. Su comunidad también promueve una cierta visión de las matemáticas, por ejemplo, a través del tipo de problemas incluidos en las competiciones, el material producido para el entrenamiento, y artículos publicados en revistas especializadas (ver, por ejemplo, Mathematics Competitions, a Journal of the World Federation of National Mathematics Competition, http://wfnmc.org/journal.html).

¿Cuál es el propósito de la instrucción matemática desde este punto de vista? Soifer A. (2016), fundador de la Olimpiada Matemática de Colorado, afirmó:

> De hecho, yo sostendría que toda disciplina trata sobre la resolución de problemas. Y así, el objetivo principal de cada disciplina debería ser permitir a los estudiantes aprender a pensar dentro de la disciplina, cómo resolver problemas de la disciplina y, finalmente, de qué trata esa disciplina y qué hacen los profesionales dentro de la disciplina. (p. 16)

¿Cómo se logran estos objetivos? ¿Qué caracteriza a un problema de la Olimpiada Matemática? Soifer (2011) afirma que los problemas no necesitan requerir un alto nivel de conocimiento de contenido, se trata más de pensamiento creativo, imaginación y sentido común. Luego, continúa: ”Algunos de los problemas modelan la investigación matemática: sólo capitularían ante la experimentación con casos particulares, seguido de la observación de un patrón, seguido a su vez por la generalización, la formulación de una hipótesis y, finalmente, por una demostración” (Soifer, 2011, p. 11). Reconocemos que estos procesos son los vinculados al pensamiento matemático, como se mencionó anteriormente. Además, menciona tres ideas de prueba que están inextricablemente vinculadas a las matemáticas: la prueba por contradicción, el principio del palomar y el principio de inducción matemática. Estos constituyen elementos para ”pensar dentro de la disciplina”, como se mencionó anteriormente.

Dado el objetivo común de desarrollar el pensamiento matemático y considerando que las tareas de los libros de texto no siempre son pertinentes para fomentar el pensamiento creativo y matemático, parece natural preguntarse si los problemas de las competiciones (o tareas similares) pueden integrarse en la enseñanza en el aula.

A continuación, espero ilustrar que hay ciertos tipos de tareas, generalmente encontradas en competiciones que, con la orientación adecuada, pueden involucrar a los estudiantes en la exploración, la conjetura, el razonamiento y la demostración.

En el resto de esta presentación, me baso en mi experiencia con un círculo de matemáticas que dirigí durante los últimos 8 años. El círculo de matemáticas estaba organizado en cuatro niveles, asociados con los grados escolares 3-4, 5-6, 7-8 y 9 en adelante. Aunque se especificaban los grados escolares, los participantes decidían en qué nivel querían participar. El círculo de matemáticas se centraba en la resolución de problemas, siendo las clases basadas en temas específicos.

4.3 Tareas de construcción

Ahora discutiré un tipo de tarea que se utilizaba con frecuencia en el círculo. Por razones de referencia, lo categorizo como *tarea de construcción*. El nombre *tarea de construcción* no está institucionalizado; es una elección personal que refleja una característica esencial de la misma.

En términos generales, la característica fundamental de este tipo de tarea es la exigencia de construir un objeto matemático basado en alguna especificación. El término *objeto* se emplea aquí en un sentido muy general: puede representar un número, una configuración, un proceso, etc. Como tal, la tarea difiere de aquellas en las que se proporciona el objeto y la solicitud es probar alguna relación o propiedad con respecto al objeto. El contexto más simple en el que los estudiantes se enfrentan a este tipo de tarea es la ejemplificación: se define un nuevo concepto y los estudiantes deben crear ejemplos.

Una segunda característica es que no requieren conocimientos más allá de lo que se enseña en la escuela en el grado dado. Por lo tanto, pueden integrarse en la enseñanza.

Una tercera característica es la adaptabilidad a diferentes niveles de grado. Las tareas pueden ajustarse a diferentes niveles de grado. Este aspecto es importante, ya que a menudo se considera que las tareas matemáticas ”reales” solo se pueden ofrecer mucho más tarde, cuando los estudiantes hayan acumulado una cantidad significativa de conocimientos de contenido. Muy al contrario, elementos del pensamiento matemático se pueden trabajar desde una edad temprana, ya que los niños pueden participar en el razonamiento por contradicción, pueden comprender ideas relacionadas con el principio del palomar o la inducción, por ejemplo, incluso cuando no tienen descripciones formales disponibles.

A continuación, presentaré una caracterización y categorización de las tareas de construcción al discutir uno o dos ejemplos "prototípicos" e identificar algunas características. Además, propongo formas en que se pueden integrar en la enseñanza en el salón de clase. La mayoría de los ejemplos siguientes se vieron con estudiantes de nivel de primaria, en los grados 5-6.

4.3.1 Categoría 1. Ingeniería inversa

Ejemplo 4.1: Proporcione un ejemplo de tres números diferentes, cada uno mayor que 1, que tengan su mínimo común múltiplo 1676. Proporcione un ejemplo de tres números diferentes que tengan el máximo común divisor igual a 12.

En las matemáticas escolares, a los estudiantes generalmente se les presentan uno o dos algoritmos para identificar el mínimo común múltiplo (mcm) o el máximo común divisor (mcd) y luego se les pide que practiquen aplicándolo. Una tarea en la que necesitan proponer números que tendrían un número dado como mcm no es común. Sin embargo, tal tarea es una mejor prueba de su comprensión conceptual del concepto de mcm que una que requiere identificar el mcm de un conjunto de números.

La construcción de estos números se basa en la comprensión del concepto de mcm y mcd, por un lado, y en la relación entre el significado del concepto y el algoritmo para identificarlo, por otro lado.

En mi experiencia, los estudiantes participan más activamente en esta tarea que en la identificación del mcm de un conjunto dado. Al trabajar en grupos pequeños, los estudiantes proponen soluciones posibles y a menudo ven que sus propuestas son refutadas por otros colegas. Algunos argumentaron que es imposible encontrar tales números, solo para ser refutados por otro que propuso considerar simplemente el número dado (1676), su mitad y su cuarta parte.

En consecuencia, la tarea brinda la oportunidad, de manera natural, de participar en alguna discusión matemática: se presenta una propuesta, luego se evalúa (al compararla con la definición o al realizar el procedimiento) y al final de ese proceso, se acepta o se refuta.

Muchos temas enseñados en la escuela permiten la formulación de tareas como la presentada anteriormente: se trata de invertir la pregunta.

La existencia de un algoritmo para crear el mcm o mcd fue el punto de partida para la creación de números. Sin embargo, para tener éxito en la resolución de la tarea, se debe hacer explícito el vínculo entre la estructura de los números (forma prima factorizada) y la estructura del mcm (o mcd).

La existencia de múltiples soluciones puede ser un hecho sorprendente para algunos estudiantes, pero luego puede llevar a preguntas específicas de las matemáticas, como ¿hay infinitas soluciones? o ¿cuáles son todas las soluciones posibles? o ¿cómo encontrar una situación donde haya un número dado de soluciones?

El maestro puede ampliar la tarea haciendo preguntas adicionales. Por ejemplo:

- ¿Cuál es la tripleta de los números "más pequeños" con el mcm el número dado?
- ¿Cuántas tripletas de números existen con mcm 1676?
- ¿Puedo elegir un número como mcm de modo que solo exista una tripleta de números?
- ¿Puedo elegir un número como mcm con un número predefinido de tripletas como solución?

Naturalmente, el maestro debe explorar la tarea y analizar qué otras preguntas tendrían sentido en este contexto. Sin embargo, es importante permitir que los estudiantes también planteen preguntas. Al permitir que los estudiantes formulen preguntas a sus compañeros de clase, deberán decidir sobre la pertinencia de la pregunta para el tema y la claridad de la formulación. En entornos de enseñanza tradicionales, tienen pocas oportunidades de hacerlo. Nuevamente, el papel del maestro es esencial para sondear su pensamiento, ofrecer contraejemplos (si es el caso) y, en general, notar las oportunidades para discutir matemáticas.

Ejemplo 4.2: La Figura 4.1 es la red de un cubo. Escribe los números del 1 al 6, uno en cada cara del cubo, de manera que una vez que el cubo esté plegado, en cada uno de sus vértices el resultado de multiplicar los tres números en las tres caras que concurren, se obtienen los números 10, 12, 20, 24, 30, 36, 60 y 72.

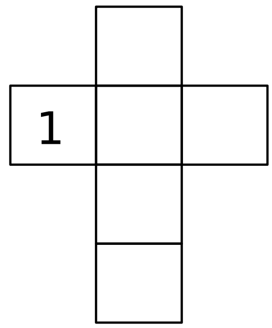

Figura 4.1: *Red de cubo*

En este problema, necesitamos ”(re)construir” una configuración que se caracteriza por los productos en los vértices. El ”objeto” es una configuración, y el punto de partida es la forma factorizada de los números dados. Queda la pregunta de qué producto da la ”mayor cantidad de información” para comenzar el proceso de (re)construcción. Se muestra una solución en la Figura 4.2.

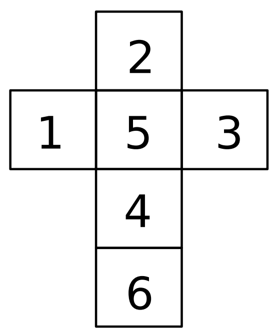

Figura 4.2: *Solución red de cubo*

Una vez más, el maestro puede ampliar la discusión y verificar el nivel de comprensión a través de preguntas. Algunos ejemplos se dan a continuación.

- Brinde un ejemplo de un conjunto de números (productos) que no se puede obtener, al cambiar uno de los números entre los productos. El producto debe obtenerse con números del 1 al 6.
- ¿Cuántos números en el conjunto de productos son divisibles por 5? ¿Hay un número mínimo y máximo para estos productos?
- En este problema, la diferencia entre el menor y el mayor producto es 62. ¿Cuál podría ser la mayor diferencia que puedes obtener en esta situación? ¿Cuál sería la menor diferencia?

En esta categoría, también incluyo tareas de construcción de naturaleza geométrica; es decir, situaciones en las que se debe crear una configuración a partir de restricciones dadas. Por ejemplo, la tarea *construir el triángulo ABC dado que el ángulo B es agudo, AC+BA=m y BC=a* requiere imaginar la construcción realizada e identificar elementos que pueden ser útiles para lograrlo.

Dado que el punto de partida para resolver las dos tareas anteriores es un algoritmo, propiedad o configuración conocida del cual no solo sabemos que existe, sino también cómo debería ser, nombro este tipo de tarea de construcción como tarea de *ingeniería inversa*.

Podemos resumir sus características de la siguiente manera:

- El *objeto* puede ser *ingenierizado inversamente*.
- El punto de entrada es un hecho conocido, algoritmo o concepto.
- El problema puede tener múltiples soluciones.
- Los estudiantes deben participar en un proceso cíclico de exploración y verificación.

4.3.2 Categoría 2. Construcción por partes

Ejemplo 4.3: Proporcione un ejemplo de un múltiplo de 17 con la suma de dígitos igual a 17.

Basándome en mis observaciones, una de las dificultades que tienen los estudiantes con el problema es que esperan ”tropezarse” con este número; algo así como ”encontrarlo mirando alrededor”. Mi hipótesis aquí, sin investigación que la confirme, es que no están acostumbrados a ”construir”, por lo tanto, el ”proporcione un ejemplo” se interpreta como una solicitud de encontrar un número ”listo para presentar” con esta propiedad.

A diferencia de los problemas presentados anteriormente, no hay una referencia (inmediata) a un algoritmo que permita alguna ingeniería inversa. La falta de un camino claro podría causar frustración en algunos estudiantes, especialmente para aquellos que tienen conceptos erróneos sobre la naturaleza de las matemáticas ”las matemáticas son solo reglas que aprender” y sobre la resolución de problemas ”todos los problemas se pueden resolver en 5 minutos o menos” (Schoenfeld, 1992). Experimentar emociones durante la resolución de problemas es normal; la cuestión es cómo ayudar a los estudiantes a lidiar con emociones negativas como la frustración. La investigación sobre el tema destaca que, en caso de una resolución exitosa, hay una transición hacia emociones positivas (Di Leo et al., 2019).

Una forma de iniciar el proceso de resolución y, potencialmente, ayudar a los estudiantes a lidiar con la frustración, es invitarlos a participar en la exploración. Con el tiempo, pueden desarrollar algunas estrategias genéricas para lidiar con tales situaciones. La exploración, la conjetura o el análisis de casos son ejemplos de ”qué hacer cuando no sabes qué hacer” (Kasuba, 2006).

Los estudiantes pueden participar en la especialización y generalización para obtener una visión del problema (el presentado anteriormente, pero también en general).

Al escribir algunos múltiplos, como $17, 34, 51, \ldots$ y observar la suma de los dígitos, los estudiantes pueden observar algunas regularidades. El maestro puede guiar esta exploración e incluso sugerir la creación de nuevos múltiplos ”cosiendo” dos múltiplos: por ejemplo, 1717 o 5134. Esta es una excelente oportunidad para sondear la comprensión de los estudiantes sobre ciertas propiedades de la relación de divisibilidad y sobre la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición (o, simplemente, sobre escribir números en una base). Aplicando esta técnica, se puede construir el número 10 268, por ejemplo.

El problema solicita un objeto (un número concreto, en este caso), sin embargo, para crear el objeto se necesita un procedimiento (en general, el procedimiento también es un objeto por crear). En caso de que los estudiantes comprendan el procedimiento (o cómo se relaciona con los conocimientos de contenido que tienen sobre la divisibilidad y las propiedades de las operaciones), podrán reutilizarlo en otra situación.

Por ejemplo, en Kasuba (2010, p.13) se discute el siguiente problema (el problema no es para el grado 5-6):

Encuentra un entero cuya representación binaria contenga 2005 0's, 2005 1's y que sea divisible por 2005.

En el artículo, el autor discute casos más pequeños, usando 2 y luego 9 en lugar de 2005, pero el proceso aplicado para identificar un número así implica el mismo procedimiento presentado anteriormente.

Incluyo también problemas que requieren una construcción gradual: comenzamos desde un estado inicial y lo modificamos mientras cumplimos con una restricción.

Ejemplo 4.4: Identifica la cantidad máxima de números que es posible organizar en una secuencia de manera que la suma de cualesquiera cinco números consecutivos sea positiva y la suma de cualesquiera siete números consecutivos sea negativa.

Dado que la solicitud es maximizar el tamaño del conjunto, el enfoque gradual es pertinente. Comenzamos con cinco números para que su suma sea positiva, agregamos uno más, luego uno más y deberíamos obtener la suma negativa. Los estudiantes deben comenzar explorando; podrían llegar a diferentes conclusiones, lo que es una excelente oportunidad para explicar y ”defender” sus resultados.

En este problema, es necesario justificar la maximalidad. Si bien los estudiantes pueden llegar por exploración a un consenso sobre el tamaño de dicho conjunto, aún pueden carecer de un argumento sobre por qué eso es máximo. Por lo tanto, para dar una solución completa, los estudiantes deben participar en la prueba (en el sentido de un argumento convincente).

Para este problema, una forma de lograrlo es escribir los números en una configuración especial: cinco por fila, donde la segunda fila comienza desde el segundo número, etc. Una vez que llegamos a la séptima fila, obtenemos una suma negativa por columna mientras que la suma en las filas es positiva. Esto demuestra que no podemos tener más de diez números en el conjunto.

Las características de este tipo de tarea son:

- El objetivo es crear un objeto, pero eso requiere crear un procedimiento (otro objeto).
- El objeto final se construye a partir de ”partes” o en ”pasos”.
- Se necesita una prueba (o justificación) para mostrar que el objeto final (hecho a partir de ”partes”) cumple con las condiciones.
- Puede haber varias soluciones al problema.

Queda para el maestro orquestar una mayor exploración, con un enfoque especial en la generalidad de la solución: ¿cuáles son otras situaciones donde se puede usar el mismo argumento? ¿Cómo podríamos crear un problema que pueda abordarse de manera similar? Este paso es importante ya que involucraría a los estudiantes en reflexionar sobre las soluciones (similar a la fase de ”mirar hacia atrás” en la resolución de problemas).

4.3.3 Categoría 3. Configuraciones imposibles

En los ejemplos mostrados anteriormente, los problemas estaban formulados de manera que sugerían la existencia de una solución (usando *proporcione*, *brinde*). Por supuesto, esto se puede modificar fácilmente en una pregunta existencial (usando *¿hay...?*). Los ejemplos a continuación están formulados intencionadamente como una pregunta sobre la existencia de una configuración en la que se cumpla cierta propiedad. La razón es simplemente que, a menudo, la respuesta es no; es decir, nos enfrentamos a la imposibilidad de una situación.

Ejemplo 4.5: ¿Es posible construir una tabla de 5×6 con los enteros del 1 al 30 de modo que la suma de los seis números en cada fila sea constante y la suma de los cinco números en cada columna también sea constante?

Ejemplo 4.6: Considere los números $1\ 2\ 3\ 4\ \dots\ 2021\ 2022$ escritos en una fila. Frente a cada número, podemos colocar un signo $+$ o $-$. ¿Existe una manera de colocar los signos de modo que el resultado sea cero? ¿O 1022?

En estos problemas, la pregunta es sobre encontrar una cierta configuración; todos los elementos están dados, y se trata de organizarlos de alguna manera.

A diferencia de los tipos anteriores de tareas, la exploración para este tipo de preguntas es compleja: hay demasiados casos que considerar. La complejidad sugiere considerar un caso más pequeño donde haya menos números/objetos involucrados. Una versión con números más pequeños (escala hacia abajo) debe retener las características esenciales del problema, de modo que las observaciones hechas en el caso ”reducido” sean informativas sobre el problema original.

Sin embargo, nos enfrentamos a la dificultad: ¿cuál es la característica esencial por mantener?

Por ejemplo, en el problema que se enuncia en el Ejemplo 4.5 no es obvio qué es importante en las dimensiones de la tabla: ¿es que tenemos un número par/impar? ¿Es que son números consecutivos?

O ¿deberíamos centrarnos en los números que debemos usar? ¿Son importantes los números dados? ¿Podemos cambiarlos a un conjunto diferente de números, por ejemplo, 30 números de 1?

De manera similar, para el problema del Ejemplo 4.6, si queremos reemplazar 2022, ¿qué número deberíamos elegir?

El proceso de escalar hacia abajo plantea las mismas preguntas que el proceso de escalar hacia arriba (o generalización, en este caso): comprender cómo la naturaleza de los elementos del problema (aquí, las dimensiones) juega un papel en la solubilidad.

Para la resolución de problemas, muestra la importancia de utilizar las restricciones (misma suma en fila y columna para el primer problema) y relacionar esto con el conjunto disponible de números.

El segundo problema requiere una exploración sistemática (por ejemplo, comprobando para 2, 3, etc.) antes de poder ver las características que controlan la existencia de la solución.

La conclusión es que el escalado de un problema debe aprenderse mediante la experimentación y al hacer explícitos los vínculos entre las características del problema y la configuración.

Un camino por seguir en estos problemas es formalizar las restricciones/relaciones y comenzar el razonamiento desde allí.

Los problemas de esta categoría tienen todos los elementos dados: en 4.5 sabemos los números que se deben usar, lo mismo es válido para el segundo problema. Deberíamos usar esa información.

En el primer problema, obtener la misma suma en cada fila significa que la suma de todos los números (obtenida como suma de las sumas de las filas) es múltiplo de 5, mientras que pensar de la misma manera, pero para columnas, lleva a la conclusión de que la suma de todos los números es múltiplo de 6. Dado que los números son del 1 al 30, esto no es posible. El conocimiento del contenido necesario en el problema es adición y divisibilidad, sin embargo, la tarea no es realizar la suma o la división.

Para el segundo problema, dado que conocemos la suma de todos los números involucrados (ya que conocemos todos los números), deberíamos referirnos a ella. La observación clave aquí es que podemos expresar $a - b$ como $a + b - 2b$. Por lo tanto, cualquier combinación de + y − se puede expresar como la suma de todos los números de los que restamos un número par. Dado que la suma de los números naturales hasta 2022 es impar, no podemos obtener 0 ni ningún otro número par.

Una característica especial de los problemas discutidos aquí es que debemos expresar formalmente la restricción (por ejemplo, suma de fila/columna u operaciones a utilizar) y relacionarla con los elementos del problema. En estos problemas, la exploración no es suficiente, necesitamos formalización. Esto no quiere decir que la exploración no sea informativa, porque lo es. Sin embargo, puede ser más difícil ver la relación con el problema inicial porque la conclusión no es necesariamente siempre la misma. Por ejemplo, si tomamos 2024 en lugar de 2022, podemos encontrar una disposición de + y − para obtener 0.

Estos problemas no tienen soluciones. Esto puede ser sorprendente para algunos estudiantes, ya que la mayoría de los problemas dados en la escuela no solo tienen solución, sino que tienen una solución única.

Al proporcionar a los estudiantes problemas donde la clave es demostrar la imposibilidad, los alentamos a expresar formalmente las restricciones y relacionar los elementos del problema, en resumen, a identificar la estructura del problema. Nuevamente, el problema es accesible para todos, ya que todos los estudiantes pueden intentar y observar lo que está sucediendo, todos pueden llegar a conjeturas acerca de la situación; para configuraciones pequeñas, incluso pueden hacer una verificación exhaustiva. Pero el valor real de los problemas de configuración imposible radica en la discusión que el maestro puede iniciar con los estudiantes. Al llevar estos problemas al aula, los maestros pueden discutir: a) ¿qué constituye un argumento irrefutable de que una situación no es posible? y b) la (enorme) diferencia entre ”no puedo encontrar una solución” y ”no hay solución”.

Como en la categoría anterior, surge la pregunta de la generalización: si los estudiantes comprenden el vínculo entre los elementos del problema y la conclusión de la imposibilidad, pueden proponer otras situaciones donde la conclusión sería la misma o, por el contrario, pueden diseñar situaciones donde habría solución.

La generalización es un método para hacer crecer el conocimiento matemático: uno que es particular de las matemáticas. Al integrar preguntas sobre la generalizabilidad de los resultados, los maestros transmiten a los estudiantes una característica de las matemáticas en sí mismas.

Las características de la tarea de ”configuración imposible” se pueden resumir de la siguiente manera:

- El objetivo es identificar si se puede lograr una configuración específica.
- Todos los elementos están dados.
- Se centra en demostrar la (im)posibilidad.
- Requiere formalizar las restricciones.
- Puede vincularse, para demostrar la imposibilidad, al principio de invarianza.
- Puede vincularse, para demostrar la imposibilidad, a la prueba por contradicción.

4.3.4 Categoría 4. Identificación de un orden para aplicar reglas

Algunos problemas implican transformaciones basadas en reglas dadas. Consideraremos aquellos en los que las reglas están especificadas, se proporciona un estado inicial, se especifica un estado final y la tarea es encontrar el orden en el que las reglas deben aplicarse para llegar al estado final. En algunos casos, la pregunta también es decidir si se puede alcanzar cierto estado final. Los dos siguientes problemas son prototípicos para esta categoría.

Ejemplo 4.7: Un príncipe quiere cortar las cabezas de un dragón de 100 cabezas. Puede cortar 9, 10 o 11 cabezas de un solo golpe de espada; sin embargo, inmediatamente le crecen 6, 13 o 5 cabezas, respectivamente. Si todas las cabezas son cortadas, el dragón muere. ¿Puede el dragón morir alguna vez?

Ejemplo 4.8: En los bosques de una isla mágica deambulan tres tipos de animales: leones, lobos y cabras. Los lobos pueden comer cabras y los leones pueden comer tanto lobos como cabras. Sin embargo, al ser una isla mágica: si un lobo se come a una cabra, se convierte en un león. Si un león se come a una cabra, se convierte en un lobo. Si un león se come a un lobo, se convierte en una cabra. Originalmente, había 17 cabras, 55 lobos y 6 leones en la isla. ¿Cuál es el número máximo posible de animales que quedan en la isla después de que ya no sea posible que se coman entre ellos? (este problema es para grados superiores)

Algunos estudiantes pueden considerar estos problemas como insuficientemente especificados ¡pero interesantes! ¡Casi inmediatamente comienzan a probar las reglas y ver qué sucede!

El maestro debería animarlos a hacer observaciones mientras calculan diligentemente, ya que sin una serie de observaciones sobre las cuales reflexionar, el problema es solamente una suma y resta simple.

El hecho de que el orden de realizar las operaciones no esté impuesto permite un estudio sistemático (eventualmente, en una versión más pequeña del problema).

El maestro puede guiar la exploración con preguntas como: ¿qué sucede si aplicamos una regla una y otra vez? ¿Podemos cuantificar el cambio? ¿Cómo se relaciona con la regla que aplicamos?

Desde el punto de vista matemático, estos problemas a menudo se basan en el principio de invarianza. Este principio significa que ciertas características de la situación permanecen inalteradas a pesar de realizar las transformaciones. Es una estrategia central para resolver problemas, pero rara vez se informa a los estudiantes de manera explícita sobre la invariante. Por ejemplo, los problemas verbales requieren modelar la situación; a menudo, esa modelización se basa en la invariabilidad de cierta cantidad (una cantidad total se redistribuyó, por lo que las relaciones entre las partes cambian, pero no la cantidad total, etc.), pero esto no se enfatiza de manera especial.

Mientras a los estudiantes no se les enseña o informa sobre esta estrategia de resolución de problemas, pueden observar patrones que surgen de su exploración. Por ejemplo, si solo usan la primera regla (cortando 9 cabezas y creciendo 6) de manera repetida, pueden reconocer un patrón en la secuencia numérica que representa el número de cabezas restantes: 100, 97, 94, 91, ...

Pero para que sea útil para progresar con la solución, el patrón debe interpretarse en el contexto del problema.

Resolver estos problemas puede beneficiarse de formalizar el efecto de las reglas, es decir, describir explícitamente los cambios en los números inducidos por las reglas. Sin embargo, la formalización debe preceder a la exploración; es la exploración la que le da significado.

Para el primer problema, los estudiantes observan rápidamente que el cambio en el número de cabezas ocurre por un múltiplo de tres. Dado que el número original de cabezas es 100, la única manera de quitar todas las cabezas es llegar a 10 (ya que da el mismo resto cuando se divide por 3 que 100). Por lo tanto, se debe llegar a cortar 90 cabezas, y luego las diez restantes de una vez.

La solución del segundo problema se basa en seguir los cambios inducidos por cada regla y relacionarlos con la paridad del número que expresa la cantidad de cada animal.

Las características de la tarea de esta categoría se pueden resumir de la siguiente manera:

- El objetivo es identificar un orden para aplicar las reglas.
- Los estudiantes deben participar en la exploración, síntesis y reconocimiento de patrones.
- La tarea requiere participar en el razonamiento inductivo.
- Puede vincularse al principio de invarianza.

El maestro puede sondear la comprensión al pedir a los estudiantes que den ejemplos de a) situaciones no alcanzables; b) reglas ”no interesantes” (y discutir qué se puede poner bajo la categoría ”no interesante”); c) reglas que inducen un patrón diferente, etc.

Las categorías presentadas anteriormente se establecieron al comparar las características de los problemas (lo que se da, lo que se solicita, qué procesos se movilizan durante el proceso de solución), pero también consideré mis recuerdos de las reacciones de los estudiantes cuando enfrentaron estos u otros problemas similares.

Las tareas de construcción brindan a los estudiantes la oportunidad de participar en estrategias de resolución de problemas y razonamiento (inductivo, deductivo), y dejan espacio para enfoques creativos, por lo que son pertinentes para promover el pensamiento matemático de los estudiantes.

Además, los estudiantes participan activamente en la tarea, exploran, observan y generalizan. En ese sentido, estas tareas ofrecen una mejor visión de lo que significa hacer matemáticas, ayudan a normalizar el estado inicial de ”no sé” y lo transforman en ”pero lo averiguaré”.

4.4 Reflexiones finales

Desarrollar el pensamiento matemático implica aprovechar las oportunidades percibidas en los problemas y ser sistemático al hacerlo. Ciertas tareas típicas de los libros de texto pueden transformarse en ocasiones de exploración al cambiar las preguntas, al solicitar generalizaciones o al pedir propuestas de situaciones posibles o imposibles. Además de transformar las preguntas de los libros de texto (por ejemplo, al 'darle la vuelta'), los maestros pueden introducir en el aula una variedad de preguntas de concursos bien seleccionadas. El propósito del artículo fue presentar un tipo de problema que tiene el potencial de involucrar a los estudiantes en el pensamiento matemático.

Sin embargo, las tareas son oportunidades para fomentar el pensamiento matemático y la creatividad solo si son implementadas adecuadamente por el maestro. Si bien muchas de estas tareas son ”divertidas”, su valor radica en el aprendizaje que facilitan a través del pensamiento que provocan. Permanece la responsabilidad del maestro de coordinar la investigación, iniciar discusiones, ayudar, sin excederse, con la formalización para que ocurra el pensamiento y se aproveche el potencial de la tarea.

4.5 Referencias bibliográficas

1 Boud, D., Lawson, R. y Thompson, D. G. (2015). The calibration of student judgement through self-assessment: disruptive effects of assessment patterns. *Higher Education Research & Development*, 34:1, 45-59.

2 Chevallard, Y. (1989). On didactic transposition theory: Some introductory notes. *In the proceedings of The International Symposium on Selected Domains of Research and Development in Mathematics Education*, 51?62.

3 Devlin, K. (2011). *Mathematics Education for a New Era: Video Games as a Medium for Learning*. A K Peters/CRC Press.

4 Di Leo, I., Muis, K. R., Singh, C.A. y Psaradellis, C. (2019). Curiosity? Confusion? Frustration! The role and sequencing of emotions during mathematics problem solving. *Contemporary Educational Psychology*, 58,121-137.

5 Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). *Textbook research in mathematics education: Development status and directions*. ZDM, 45(5), 633-646.

6 Gallagher, C., Hipkins, R. y Zohar, A. (2012). Positioning thinking within national curriculum and assessment systems: Perspectives from Israel, New Zealand and Northern Ireland. *Thinking skills and Creativity*, 7, 134-143.

7 Hadar, L. (2017). Opportunities to learn: Mathematics textbooks and students' achievements. *Studies in Educational Evaluation*, 55, 153-166.

8 Hadar, L. y Tirosh, M. (2019). Creative thinking in mathematics curriculum: An analytic framework. *Thinking skills and creativity*, 33.

9 Hudson, B., Henderson, S. y Hudson, A. (2015) Developing mathematical thinking in the primary classroom: liberating students and teachers as learners of mathematics. *Journal of Curriculum Studies*, 47:3, 374-398

10 Jäder, J., Lithner, J. y Sidenvall, J. (2020). Mathematical problem solving in textbooks from twelve countries. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51:7, 1120-1136

11 Jones, D. L. y Tarr, J. E. (2007). An examination of the levels of cognitive demand required by probability tasks in middle grade mathematics textbooks. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 4-27.

12 Kang, W. y Kilpatrick, J. (1992). Didactic transposition in mathematics textbooks. *For the Learning of Mathematics* 12(1), 2-7.

13 Kasuba, R. (2006). *What to do when you don't know what to do?* Macibu gramata, Riga.

14 Kasuba, R. (2010). Several Remarks on Possible Components of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematics Competitions*, 43(1).

15 Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

16 Leikin, R. y Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. y Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 161-168. Seoul: PME.

17 Leikin, R. (2011). *Multiple-solution tasks: from a teacher education course to teacher practice*. ZDM, 43, 993-1006.

18 Lewis, W. y Colonnese, M. (2021). Fostering Mathematical Creativity Through Problem Posing and Three-Act Tasks. *Gifted Child Today*, 44(3).

19 Liljedahl, P. y Sriraman, B. (2006). Musings on mathematical creativity. *For The Learning of Mathematics*, 26(1), 17-19.

20 Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically*. Harlow: Prentice Hall.

21 Monteleone, C., White, P. y Geiger, V. (2018). Defining the Characteristics of Critical Mathematical Thinking. In Hunter, J., Perger, P., y Darragh, L. (Eds.). Making waves, opening spaces. *Proceedings of the 41st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, pp. 559-566. Auckland: MERGA.

22 Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 334-370). Macmillan Publishing Co, Inc.

23 Silver, E. (1997). *Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing*. ZDM, 29, 75-80.

24 Soifer, A. (editor) (2016). *ICME-13 Monograph: Competitions for young mathematicians: perspectives from five continents*. Springer Verlag.

25 Suherman, S. y Vidakovich, T. (2022). Assessment of mathematical creative thinking: A systematic review. *Thinking skills and creativity*, 44.

Capítulo 5

Metodología de enseñanza en espiral en competencias de matemáticas

Luis F. Cáceres y Víctor M. Reyes

Universidad de Puerto Rico en Mayagüez

5.1 Resumen

La estrategia de enseñanza y aprendizaje a través del modelo de espiral está alineada con los estudios que establecen que la matemática se aprende mejor poco a poco y en periodos de tiempo largos. De esta manera, la retención de los conceptos y destrezas, por parte de los estudiantes, aumenta significativamente. En competencias de matemáticas sucede lo mismo, el aprendizaje se va dando mediante etapas, revisando conceptos y profundizando a medida que se va integrando conocimiento nuevo. En este trabajo estudiamos el aprendizaje en espiral y presentamos ejemplos de esta metodología en olimpiadas matemáticas. En particular mostramos algunos ejemplos en áreas clásicas de competencias matemáticas como geometría, álgebra, conteo y teoría de números. También mostramos ejemplos de distintas olimpiadas, unas de ellas con objetivos de popularización de la matemática y otras orientadas hacia estudiantes talentosos.

5.2 Introducción

La matemática está desarrollada en pedazos lineales, que obviamente se van ramificando y conectando, pero en esos segmentos lineales, los conceptos se van construyendo a partir de conceptos previos, comenzando de aspectos sencillos y logrando llegar a conceptos más complejos y abstractos. Esta linealidad en la matemática puede ser una de las razones principales de su dificultad, ya que un estudiante que no domine ciertos temas tendrá mayor dificultad para entender y dominar temas futuros. La pregunta que nos hacemos es, si el hecho que la matemática sea lineal implica que la debemos enseñar de manera lineal, en bloques, o la debemos enseñar en espiral. La respuesta a esta pregunta se basa, obviamente, en el efecto positivo que queremos en cuanto al aprendizaje por parte del alumno.

El psicólogo estadounidense Jerome Bruner, durante la década de los sesenta (Bruner, 1960), observó que se podían obtener muy buenos resultados en clases de alta complejidad como la matemática, aplicando una metodología que consistía en presentar al estudiante en una primera instancia una serie de conceptos y destrezas a un nivel básico, tanto, que se podían aprender de manera muy intuitiva y práctica. Una vez dominadas estas destrezas se introducían de manera posterior conceptos de mayor complejidad y dificultad de manera progresiva, estos respaldados por los conocimientos previamente adquiridos, no solo en la primera etapa, sino también, aquellos que provenían de otras temáticas de la materia e incluso de otras ramas de estudio y de la vida cotidiana. A partir de esto desarrolla lo que conocemos hoy como la metodología de enseñanza en espiral.

Aunque se ha demostrado que la educación en espiral es muy eficiente, hay que reconocer que desarrollar un currículo con enseñanza en espiral es complicado. En ese sentido, surgen preguntas fundamentales como por ejemplo: ¿cuándo debemos enseñar determinado concepto y destreza?, ¿hasta qué nivel de profundidad?, ¿cuándo debemos revisitar el tema para profundizar y conectar con otros conceptos? Esta dificultad ha causado que no necesariamente se enseñe de esta manera en muchos sistemas educativos. Además, analizando la metodología en distintos contextos, varios autores (Gibbs, 2014) han llegado a la conclusión que la metodología en espiral es altamente eficiente, pero se ha fracasado en su implementación.

Por otro lado se sugiere que la metodología en espiral estudiada y propuesta por Bruner responde a los tres estados en los que la cognición humana se produce. Enactivo, que se refiere al aprendizaje a través de la acción y la manipulación de objetos;

el icónico que se basa mayormente en la representación visual de los objetos y el simbólico donde ya se usan las palabras o símbolos para describir los objetos o fenómenos (Johnston, 2012).

Otra característica importante que Bruner fomentaba en su metodología, es el hecho que los errores son bienvenidos porque de ellos se puede sacar aprendizaje positivo. Justamente la metodología en espiral ayuda a detectar los errores comunes que los estudiantes cometen y el docente puede construir conocimiento a partir de esos errores. Esta idea es compartida por muchos psicólogos que piensan que los errores ayudan a aprender. Como plantea en Giraldez (s.f.) lo importante es la pregunta ¿cómo podemos ayudar a nuestros estudiantes a aprender de sus propios errores?

La metodología de currículum en espiral se usa en distintas áreas incluyendo matemáticas, lenguaje, ciencias, ciencias sociales, entre otros. En matemáticas su uso en algunos momentos es prácticamente obligatorio. Los estudiantes aprenden la suma de números enteros positivos en los primeros grados de primaria y en los últimos grados aprenden esta operación con números negativos, decimales y fracciones. Después en escuela intermedia y superior suman con variables, con expresiones algebraicas en general y después con funciones, etc.

Desde este punto de vista es natural que la matemática en general se enseñe usando la metodología en espiral. En ese sentido, las preguntas que nos interesan son: ¿cómo hacerlo?, ¿en qué temas hacerlo?, ¿cuándo hacerlo?, ¿cómo dividir un tema en particular para estudiarlo en bloques?, entre otras. En matemáticas esta disyuntiva se hace aún más complicada porque la cantidad de conceptos, estrategias y algoritmos que un estudiante debe aprender en su paso por la escuela es extensa.

La matemática se construye sobre ella misma (Oswal, 2022). El cálculo requiere trigonometría, la trigonometría requiere un entendimiento sólido de geometría y el álgebra, estos a su vez requieren un buen dominio de aritmética. Los estudiantes pasan estos cursos, muchas veces con notas bajas, lo que implica que tienen lagunas en el conocimiento, que van a influir en el aprendizaje de los temas subsiguientes. De esta manera se van arrastrando deficiencias en temas básicos y estas deficiencias se ven engrandecidas cuando el estudiante se tiene que enfrentar a temas más avanzados y abstractos, por consiguiente a la frustración de no entender y no poder fácilmente llenar esos vacíos.

En consonancia con lo anterior, el estudiante debe aprender estas destrezas en distintas áreas, de cierta forma diferentes, como geometría, álgebra, estadística, conteo, entre otras y cada una de estas áreas a su vez tiene temas y subtemas. Para un maestro es entonces un reto, estar revisitando temas y garantizando que de todas formas se cubra todo el currículum. Por esta razón, el diseño del currículum en espiral es complicado y supone que no se tenga que re-enseñar, sino que se vaya profundizando y agregando temas a medida que se pasa por contenidos ya estudiados, de esta forma garantizar que se cubren los temas de los currículos con la formalidad y profundidad adecuada.

5.3 La Metodología de Enseñanza en Espiral

En sus estudios de educación, Bruner observó que la metodología de enseñanza de las matemáticas en espiral es muy efectiva, de hecho él plantea que esta estrategia es efectiva en general para enseñar asignaturas de mayor complejidad.

En esta metodología en espiral los conceptos y destrezas no se estudian desde su inicio hasta su final, es decir en bloque o de forma lineal, sino que se presentan de manera básica y más adelante se vuelven a presentar conectándose y profundizando con destrezas que el estudiante ha aprendido a lo largo del tiempo.

En una enseñanza en bloque, se espera que el estudiante tenga todas las herramientas para entender desde lo más básico hasta lo más avanzado del concepto. Entonces se empieza y se termina el estudio del concepto en un bloque continuo de tiempo. Sin embargo, esto acarrea de manera usual una saturación en el estudiante que juega un papel negativo, en particular en materias complejas como la matemática, la sensación de que el contenido está fuera del alcance de su propio entendimiento es un factor de fracaso para los estudiantes. La metodología en espiral plantea un aprendizaje gradual a lo largo de meses durante un grado determinado o incluso años, tomando así varios grados de la educación del estudiante.

Al establecerse un proceso gradual que evita la saturación en el contenido abordado, el estudiante no necesariamente experimenta la frustración de aprender contenidos excesivamente complejos y extensos, sino más bien, adquiere confianza en su aprendizaje y se vuelve partícipe de este proceso, ya que es consciente de que revisitará el tema de manera más profunda en el futuro y esto lo incentiva a realizar investigaciones por su cuenta. Además, el estudiante es capaz de observar su propio progreso cada vez que revisita el tema.

La enseñanza en espiral, que envuelve fuertemente la repetición, ha demostrado ser una estrategia importante para que el alumno vaya madurando poco a poco los conceptos y destrezas. En ese sentido, a la metodología en espiral se le asocia directamente el concepto de revisitar un tema, sin embargo, esto no se debe confundir con la metodología de re-enseñanza, es decir, que no se vuelvan a explicar los conceptos previos, sino que a partir de estos y con las experiencias adquiridas, se construya el conocimiento más avanzado. En otras palabras mantiene la secuencia lógica del currículo a enseñar, con la diferencia que los temas tienen una jerarquía de importancia y dificultad progresiva. Justamente esta es una de las dificultades más grandes de esta metodología, pues la misma asume que el estudiante ya conoce los temas básicos o intermedios previos.

Una de las ventajas de la enseñanza en espiral comparada con la enseñanza en bloque, es que el profesor se da cuenta constantemente de los conceptos o destrezas que el alumno no conoce o que ha olvidado, esto le permite reforzar o inclusive re-enseñar estos conceptos. Cuando la enseñanza se da en bloque, el profesor no necesariamente se da cuenta de conceptos que no fueron suficientemente aprendidos por el estudiante. A su vez, el profesor también es capaz de identificar qué contenidos fueron meramente memorizados por el estudiante, permitiendo de esta manera, buscar estrategias que le permitan profundizar en estos contenidos, en beneficio de la adquisición de conocimiento a un nivel más profundo, dando como resultado una mejor integración entre temas, asignaturas y la misma realidad.

La enseñanza en espiral también plantea un aumento de la dificultad de manera progresiva y planificada, como se ilustra en la Figura 5.1, dando comienzo con una introducción básica y simple del tema a tratar, permitiendo al estudiante familiarizarse de manera general con el contenido, posteriormente al revisitar el tema se deben introducir más detalles del mismo, aumentando la dificultad y complejidad, sin descuidar que dicha transición debe efectuarse de manera fluida, para evitar la saturación en el estudiante. Es vital en esta etapa, dejar en claro la relación que hay entre los conceptos antiguos y los nuevos, y cómo estos se pueden relacionar con todo su entorno académico o la vida cotidiana.

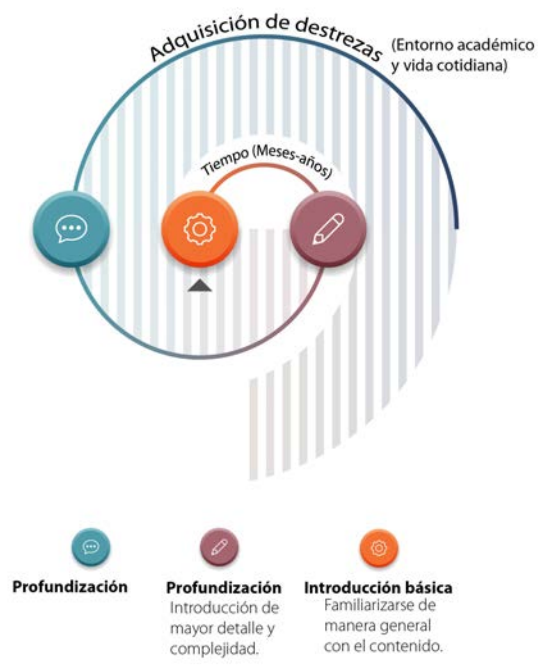

Figura 5.1: *Enseñanza en espiral*

Por el hecho que mencionamos anteriormente, en donde la matemática está construida de muchos pedazos lineales, es prácticamente inevitable, en algunos casos, usar de manera natural la metodología en espiral. Por ejemplo, el concepto de circunferencia, con un centro y un radio debe ser introducido con anterioridad, pues se necesita para conectarlo con problemas de área, perímetro entre otros. Por lo tanto no podríamos esperar a ver el tema en álgebra, en donde se define formalmente, con el concepto de distancia, y donde se desarrolla la teoría para escribir una ecuación, completando cuadrado, etc. También cabe recalcar que el concepto de circunferencia se visitará fuera de la clase de matemáticas, como en física cuando se estudie el movimiento circular uniforme o en dibujo técnico donde se estudiarán de manera precisa sus propiedades de tangencia.

La enseñanza en espiral no solamente se refiere a añadir conceptos nuevos y conectarlos con un concepto ya estudiado, también la podemos apreciar en la dificultad y profundización de un determinado problema. Esto lo ejemplificamos en la siguiente sección con problemas de olimpiadas. Podemos tener un mismo problema en distintos grados de dificultad para estudiantes de distintas edades. La madurez matemática y de razonamiento en general, adquirida por el estudiante le permite abordar un problema, que ya había tenido, pero ahora tenerlo con un grado de mayor dificultad.

El modelo de enseñanza en espiral va alineado directamente al constructivismo (Saborio, 2019). El desarrollo de conceptos o destrezas lo hacemos en el momento apropiado, cuando el estudiante ya conoce ese concepto en otro contexto, o con otra profundidad, para que ahora, cuando ya tiene otras experiencias, pueda construir conocimiento más profundo. Además, el aprendizaje en espiral permite que cada estudiante, de acuerdo a sus conocimientos previos y a sus experiencias de razonamiento, logre afianzar los conocimientos y adquiera destrezas y conocimientos mas profundos. Una de las principales ventajas que tiene el aprendizaje en espiral es justamente que los conceptos y destrezas son aprendidos de manera significativa, y eso permite que el estudiante logre una mejor retención. Los docentes nos quejamos de la poca capacidad de retención que tienen nuestros estudiantes en general, la enseñanza en espiral es una propuesta fuerte para atacar este problema.

En general el modelo de un currículo en espiral de acuerdo a los estudios de Bruner plantea entonces tres principios fundamentales:

- El estudiante revisita un tema o un área varias veces a través del año escolar o a través de distintos años escolares.
- La complejidad del tema aumenta cada vez que se revisita el tema.
- El aprendizaje se va construyendo basado en aprendizaje previo.

La filosofía que hay detrás del aprendizaje en espiral sugiere que el ser humano está en aprendizaje continuo y ese aprendizaje se va fortaleciendo de acuerdo a experiencias y aprendizajes nuevos.

Hay muchos ejemplos en el currículum de varios sistemas educativos en donde se implementa la enseñanza en espiral en algunos temas particulares (Drew, 2013). Por ejemplo el tema de fracciones, tema fundamental que se enseña en la escuela primaria y que inclusive estudiantes universitarios aún no dominan, se puede comenzar enseñando fracciones simples, después más complejas, luego comenzar a sumar y restar fracciones y finalmente a multiplicar y dividir fracciones. Esto se puede hacer de manera continua, pero el currículo en espiral sugiere que se divida en partes y se enseñe revisitando el tema, después de intercalar otros temas, o inclusive que se enseñe y se revisite en varios años escolares. Por otro lado, las operaciones de fracciones también se pueden enseñar comenzando con las más simples, por ejemplo las que tienen denominador igual y después continuar con las más generales. Otro punto de vista puede sugerir que es mejor enseñar las operaciones y fracciones de manera general y entonces ver las fracciones más simples luego como casos especiales. En cualquier caso se puede aplicar la metodología de enseñanza en espiral.

5.4 Aprendizaje en Espiral en las Competencias Matemáticas

Las competencias matemáticas vistas como una estrategia de aprendizaje, cuyo marco teórico se basa mayormente en la solución de problemas, usa fuertemente la metodología en espiral. Muchas de estas competencias, a nivel nacional e internacional, no se ofrecen necesariamente de acuerdo al grado del estudiante, sino más bien de acuerdo a la edad. En la región de Iberoamérica hay competencias regionales como la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (OMCC) y la Olimpiada del Cono Sur y hay olimpiadas que abarcan un número mayor de países como la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (IBERO). Por otro lado, hay Olimpiadas mucho más grandes como la Olimpiada Mundial de Matemáticas (IMO).

En varias de estas olimpiadas no siempre existe necesariamente un currículo completamente definido, pero hay áreas de la matemática y temas particulares que son los que se cubren. En estas olimpiadas se ve claramente la metodología de espiral. Por ejemplo, en el área de geometría en la OMCC, uno de los temas más avanzados que se cubre son los cuadriláteros cíclicos. Un estudiante que desee participar en esta Olimpiada y ser exitoso en los problemas de geometría sabe que necesita conocer este tema a profundidad. Por otro lado, para olimpiadas como la IBERO o la IMO, el conocimiento sobre cuadriláteros cíclicos es un tema fundamental, pero la utilización de conceptos más fuertes como eje radical, potencia, etc., cuya base principal son los cuadriláteros cíclicos son temas también muy importantes.

Una competencia donde podemos estudiar y analizar el aprendizaje en espiral es la competencia Canguro Matemático. Este evento es la competencia internacional de matemáticas más grande del mundo, en la que participan millones de estudiantes de más de 90 países. El Canguro matemático está disponible para varios niveles educativos en la escuela preuniversitaria y podemos apreciar y ejemplificar esta estrategia de enseñanza fácilmente.

5.4.1 Dificultades variadas

En la competencia Canguro Matemático encontramos problemas que podríamos llamar "problemas de seguimiento". en ese sentido se plantea un problema con una estrategia básica para un cierto nivel y después se plantea la misma situación pero que requiere herramientas mas sofisticadas para su solución. Una de las intenciones de hacer esto, es que justamente el estudiante al ver nuevamente la situación pueda usar la experiencia de haber resuelto el ejercicio básico. Esta dinámica es un buen ejemplo de una estrategia de implementación de la metodología en espiral. Los siguientes dos problemas están tomados de los exámenes de Écolier y Cadet de la competencia Canguro Matemático del año 2022.

Problema 5, Écolier, 2022: Kengu siempre hace un gran salto seguido de dos pequeños saltos en la recta numérica, como se muestra en la Figura 5.2. Kengu comienza en 0 y termina en 16. ¿Cuál es el número de saltos que hace Kengu?

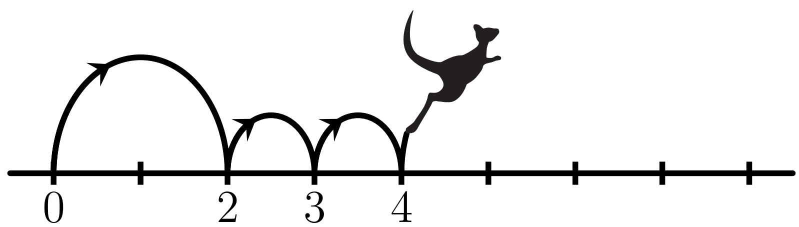

Figura 5.2: *Pequeños saltos del canguro*

A) 4 B) 7 C) 8 D) 9 E) 12

Solución: Este primer problema requiere ver un patrón; darse cuenta por ejemplo, que se requieren 3 saltos para avanzar 4 unidades. Por lo tanto para avanzar 16 unidades se requieren $3 \cdot 4 = 12$ saltos. Como los números del problema son pequeños, otra manera de abordar el problema es simplemente hacer el proceso hasta el 16 y contar los saltos.

Problema 3, Cadet, 2022: A Kengu le gusta saltar sobre la recta numérica. Siempre hace dos saltos grandes seguidos de tres saltos pequeños, como se muestra en la Figura 5.3, y luego repite este proceso una y otra vez. Kengu comienza su rutina de salto en 0. ¿En cuál de estos números aterrizará Kengu durante su rutina?

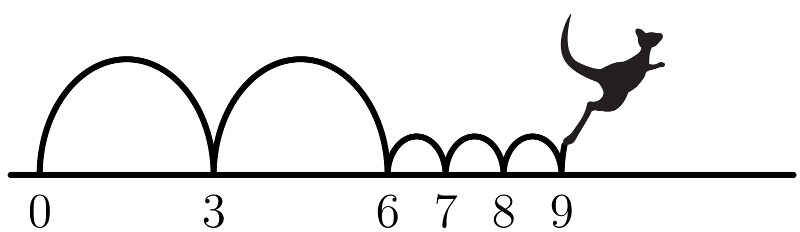

Figura 5.3: *Grandes saltos del canguro*

A) 82 B) 83 C) 84 D) 85 E) 86

Solución: Este problema, aunque se podría hacer también de manera exhaustiva, haciendo todos los saltos hasta llegar a los números de las alternativas de la respuesta, eso requiere más tiempo y no es necesariamente la solución más elegante. Mirando el patrón notamos que el canguro siempre visita los números que son múltiplos de 3. Con esa información podemos saber la respuesta pues en las opciones múltiples el único múltiplo de 3 es el 84. Por otro lado, ¿Cómo saber que Kengu no cae en otros de los números de las opciones?; esto requiere un poco mas de análisis. Un patrón se obtiene cada 9 unidades, así que si dividimos 84 entre 9 notamos que $84 = 9 \cdot 9 + 3$. Por lo tanto, el 84 corresponde a 9 veces el patrón y un salto más de 3 unidades. Es decir, que Kengu cae en un punto equivalente al punto del 3 en el primer patrón. Con esto podemos ver que Kengu no visita el 85 ni el 86 y tampoco visita el 82 y el 83.

La Competencia canguro Matemática tiene exámenes en seis niveles: Pre-Écolier, Écolier, Benjamin, Cadet, Junior y Student; es decir básicamente un nivel para dos grados del sistema educativo, comenzando desde primaria. Esto permite encontrar varios problemas de este estilo, en donde la idea puede ser la misma, pero la dificultad y las herramientas que ese usan dependen del nivel.

5.4.2 Algunos ejemplos en conteo

A continuación, mostramos una serie de problemas del área de conteo. Comenzamos con un problema que requiere contar, pero se puede hacer de manera exhaustiva, que es la forma usual como aprenden a contar los niños en grados de educación primaria. Después mostramos dos problemas, conectados a este primero, pero que requieren propiedades de divisibilidad y propiedades más sofisticadas de conteo.

En el primer problema se requiere identificar cuándo un número es divisible por 3 pero no es necesario saber la regla de divisibilidad del 3 ya que los números son pequeños y fáciles de verificar. También se requiere contar, pero no es necesario saber técnicas de conteo pues se puede simplemente hacer una lista exhaustiva de las posibilidades.

Problema Benjamin: ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden armar usando los tres dígitos $1, 2, 4$ de tal manera que los dígitos vecinos siempre sumen a un múltiplo de 3?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 6

Solución: El 1 y el 2 siempre tienen que ir juntos y el 2 y el 4 también tienen que ir juntos, por lo tanto las únicas posibilidades son 124 y 421.

El siguiente problema es uno clásico de conteo en donde el principio de multiplicación ayuda a contar rápido.

Problema Cadet: ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden armar usando solamente dígitos pares?
A) 10 B) 13 C) 100 D) 200 E) 500

Solución: Para el dígito de las centenas tenemos cuatro opciones: $2, 4, 6, 8$. Para el dígito de las decenas tenemos cinco posibilidades: $0, 2, 4, 6, 8$. De igual manera para el dígito de las unidades tenemos cinco posibilidades. Por lo tanto, por el principio de multiplicación, tenemos en total $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ números que cumplen las condiciones del problema.

Al juntar las estrategias de los ejercicios anteriores podemos solucionar problemas que incluyan tanto las reglas de divisibilidad como el conteo.

El siguiente problema fue el último del nivel Junior de la Competencia Canguro Matemático 2023. El examen del nivel Junior tiene 30 preguntas, así que este problema es uno de los más difíciles de este nivel. Aquí se requiere un conocimiento más profundo de la regla de divisibilidad del 3 y aunque se pudiera hacer una lista exhaustiva de los casos, saber el principio de multiplicación facilita el conteo.

Problema 30 Junior 2023: Pia quiere escribir los enteros del 1 al 9 en las nueve cajas que se muestran en la Figura 5.4, de tal manera que los enteros en cualesquiera tres cajas adyacentes sumen a un múltiplos de 3. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

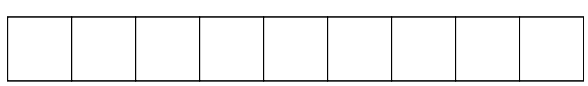

Figura 5.4: *Múltiplos de tres*

A) 6^4 B) 6^3 C) 2^9 D) $6!$ E) $9!$

Solución: Para tener una suma divisible por 3 necesitamos que aparezcan los residuos módulo 3 en el patrón ABCABCABC con $A, B, C \in \{0, 1, 2\}$. Hay $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ posibilidades para ordenar los residuos $0, 1, 2$ de acuerdo a las letras A, B, C. Una vez hecho esto hay 6 maneras de ordenar los números que dejan residuo 1 al dividirse por 3, es decir: $1, 4, 7$. Hay 6 maneras de ordenar los números que dejan residuo 2 al dividirse por 3, es decir: $2, 5, 8$; y hay 6 formas de ordenar los números que dejan residuo 0 al dividirse por 3, es decir: $3, 6, 9$ en los lugares con el residuo correspondiente. En total hay $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$ posibles distribuciones deseadas.

El siguiente problema fue el problema 9 en el nivel Student de la competencia Canguro Matemático del 2023. El examen del nivel Student tiene 30 problemas, así que este es catalogado de nivel medio fácil.

Problema 9 Student 2023: Cada uno de los números enteros del 1 al 9 se deben colocar en una de las 9 casillas de la Figura 5.5, para que tres números cualesquiera en casillas consecutivas sumen un múltiplo de 3. Los números 7 y 9 ya se han colocado. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden llenar las casillas restantes?

	7		9					

Figura 5.5: *Múltiplos de tres con dos números dados*

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 24

Solución: Como $7 = 2 \cdot 3 + 1$ y $9 = 3 \cdot 3$, el número entre 7 y 9 debe tener la forma $3x + 2$ para que la suma de los tres sea divisible por 3. Esto nos da las opciones 2, 5 y 8 para este cuadrado. El primer cuadrado debe llenarse con un número de la forma $3x$ por la misma razón, y esto da las opciones 3 y 6. Por lo tanto, tenemos un total de $3 \cdot 2 = 6$ formas posibles de llenar los dos cuadrados al lado del dígito 7. Junto al 9, volvemos a necesitar un dígito de la forma $3x + 1$, y por tanto debe ser 4 o 1, y al lado, un dígito de la forma $3x + 2$, de los cuales aún nos quedan dos dígitos sin utilizar. Esto nos da un total de $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ formas de llenar los 6 cuadrados más a la izquierda. Esto obliga a una única opción para cada uno de los cuadrados restantes, ya que estos deben ser de la forma $3x$, $3x + 1$ y $3x + 2$, respectivamente, y solo queda un dígito de cada tipo por colocar. Esto significa que hay un total de 24 opciones para distribuir los dígitos de forma que cumplan las condiciones.

5.4.3 Algunos ejemplos en álgebra

En el apartado algebraico tomaremos como tema central la ecuación, este concepto se aborda desde muy temprano en la formación de los estudiantes y, si bien es cierto que en sus primeras presentaciones estos no tienen un lenguaje algebraico formal, sí son capaces de asociar valores numéricos a símbolos que los representan, a su vez, las propiedades de la igualdad, como la transitividad empiezan a ser parte fundamental de la solución de problemas, tal como podemos verlo en el siguiente ejemplo asociado con la Figura 5.6:

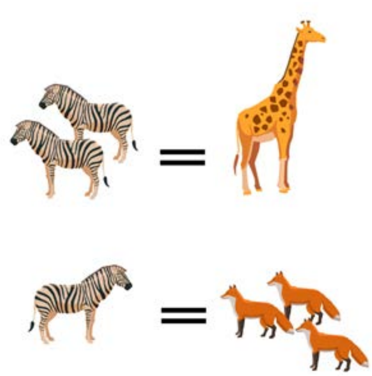

Figura 5.6: *Cebras, jirafa y zorros*

Problema PreÉcolier, 2019: Dos cebras pueden transportar tantas mercancías como una jirafa. Una cebra puede transportar tantas mercancías como 3 zorros. ¿Cuántos zorros se necesitan para cargar la misma mercancía que una jirafa?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Solución: Una cebra puede cargar lo que tres zorros, por lo que dos cebras pueden cargar lo que seis zorros. Como la jirafa puede cargar lo que dos cebras, por transitividad, entonces se necesitan seis zorros para cargar lo de una jirafa.

Con el paso del tiempo el estudiante adquiere el lenguaje formal del álgebra, aprende cómo declarar variables y plantear ecuaciones, y aunque los problemas aun no poseen tanta dificultad como para forzosamente resolverlos mediante este lenguaje, su uso le da seguridad a la hora de abordarlos y encontrar una solución precisa. En el siguiente ejemplo podemos apreciar dicha situación:

Problema Cadet: Lucy tiene algunos dulces. Ella le da la mitad a Aidan, y una tercera parte de lo que le queda a Brandon, finalmente, le da a Kartik una cuarta parte de los dulces sobrantes. Si Brandon tiene dos dulces más que Karnik, ¿cuántos dulces tenía Lucy al empezar?
A) 6 B) 12 C) 18 D) 24 E) 30

Solución: Si Lucy tiene x dulces, entonces, Aidan recibe $\frac{x}{2}$, Brandon $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)$ y Kartik $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$. Además como Brandon tiene dos dulces más que Kartik tenemos:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + 2$$

De lo cual podemos obtener que $x = 24$

Ahora bien, en esta etapa el estudiante además ha adquirido conocimientos en otras áreas de la matemática, y puede combinarlos con sus conocimientos sobre ecuaciones para resolver problemas como el presentado a continuación. En este ejemplo el estudiante debe tener conocimientos sobre los lados de un triángulo ya que no solo debe plantear las ecuaciones que le permitan encontrar las medidas, sino también, debe discriminar cuál de las dos soluciones posibles es compatible con la figura de triángulo.

Problema Cadet: La suma de las medidas de dos lados de un triángulo isósceles es $20cm$. La suma de las medidas de otro par de sus lados es $30cm$. Encuentra el perímetro del triángulo.
A) $35cm$ B) $40cm$ C) $45cm$ D) $50cm$ E) Otra respuesta

Solución: Si asignamos a la medida de los lados iguales del triángulo x y a al lado restante y, se puede obtener el siguiente sistema, si asumimos que los lados iguales suman $20cm$:

$$\begin{aligned} x + x &= 20 \\ x + y &= 30 \end{aligned}$$

De lo que se obtiene que $x = 10$ y $y = 20$. Por otro lado, si asumimos que los lados diferentes suman $20cm$ se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + x &= 30 \\ x + y &= 20 \end{aligned}$$

Y se obtiene que $x = 15$ y $y = 5$. Es fácil ver que la primera solución a pesar de ser una respuesta coherente para el sistema de ecuaciones no cumple con la desigualdad triangular, por lo que no puede ser solución del problema. En el segundo caso si se satisface la desigualdad triangular y así el perímetro será $35cm$.

Ya bien establecido el concepto de ecuación, el aumento de la dificultad de los problemas tendrá un papel fundamental en el desarrollo analítico del estudiante, así, las aplicaciones de estas en temas como la geometría y el análisis de funciones serán indispensables. En los siguientes problemas veremos situaciones similares a las anteriores, pero con un mayor grado de dificultad.

Problema Student: Exactamente la mitad del volumen de una copa de cristal, como la se muestra en la Figura 5.7, está llena de champaña, si la altura de la copa (sin la base) es h, ¿hasta qué altura está llena la copa?

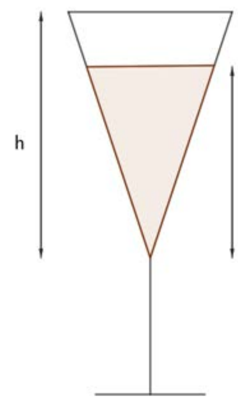

Figura 5.7: *Copa*

A) $\frac{2h}{3}$ B) $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$ C) $\frac{h}{\sqrt{3}}$ D) $\frac{3h}{4}$ E) $\frac{\sqrt{2}h}{4}$

Solución: Si el radio de la copa está dado por R y la altura por h, y el volumen de la champaña, está dado por el radio r y la altura x, entonces obtenemos la ecuación, $\frac{1}{3}\left(\pi R^2\right)h = 2\frac{1}{3}\left(\pi r^2\right)x$. Que simplificando sería:

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{2x}{h}$$

.

Además, note que si dividimos por la mitad el triángulo isósceles que forma la copa, se obtienen dos triángulos rectángulos semejantes de los cuales se desprende la ecuación:

$$\frac{R}{r} = \frac{h}{x}$$

Al resolver estas ecuaciones para x obtenemos $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$.

En el siguiente ejemplo se muestra un ejercicio de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas 2023, en el que el concepto de ecuación debe usarse de manera más avanzada y conectándolo con otros conceptos. En este caso es una ecuación que envuelve funciones y operaciones entre funciones. En el ejercicio se pide solucionar la ecuación, pero en este caso solucionarla, es encontrar las funciones que la satisfagan.

Problema 3, IBERO 2023: Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que:

$$2023f(f(x)) + 2022x^2 = 2022f(x) + 2023[f(x)]^2 + 1$$

para cada entero x.

Solución: Como en (AOPS, 2023) considerar la ecuación:

$$2023\left(f(f(x)) - f(x)^2 - 1\right) = 2022\left(f(x) - x^2 - 1\right)$$

Esto implica que 2023 divide el lado derecho de la ecuación y como 2023 y 2022 son primos relativos, entonces 2023 divide a

$$\left(f(x) - x^2 - 1\right)$$

para todo x. Por lo tanto, 2023 divide a $\left(f(f(x)) - f(x)^2 - 1\right)$ y entonces 2023^2 divide el lado izquierdo de la ecuación. Por inducción es fácil probar que 2023^n divide el lado izquierdo de la ecuación para todo entero positivo n. Entonces el lado izquierdo de la ecuación es 0 y por lo tanto, el lado derecho de la ecuación es 0. Por lo tanto $f(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{Z}$. Por último, es fácil probar que efectivamente esta función satisface la condición.

En Figura 5.8 se puede apreciar un resumen del trayecto en espiral de los ejemplos anteriores, cómo partimos del concepto natural de ecuación y se profundizó en cada etapa, aumentando detalles, complejidad, interrelación con otras áreas de la materia, etc.

Figura 5.8: *Trayecto en espiral de problemas de álgebra*

5.4.4 Algunos ejemplos en geometría

En los siguientes problemas del área de geometría veremos, cómo el estudio de la circunferencia nos lleva a través de la profundización de sus propiedades, empezando por el análisis del comportamiento de ángulos asociados a las mismas, hasta problemas de competencia en los que se aplican los conceptos como cuadriláteros cíclicos, potencia de un punto, eje radical, etc. La Figura 5.9 será utilizada en el primero de los problemas que se consideran a continuación:

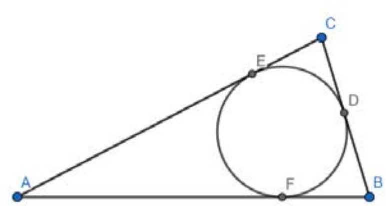

Figura 5.9: *Circunferencia inscrita*

Problema Junior: En el triángulo ABC, $\angle A = 40^o$. Los puntos D, E y F son los puntos tangentes a la circunferencia inscrita al triángulo. La medida del $\angle EDF$ es:

A)40^o B) 50^o C) 60^o D) 70^o E) 80^o

Solución: Sea O el centro de la circunferencia, los segmentos OE y OF son perpendiculares a los segmentos AE y AF respectivamente, por lo que la medida $\angle EOF = 180^o - 40^o = 140^o$. Como el ángulo central $\angle EOF$ abre el mismo arco que el ángulo inscrito $\angle EDF$, entonces $2\angle EDF = \angle EOF$, lo que implica que $\angle EDF = 70^o$.

En el problema anterior vemos cómo entran en juego los conceptos de ángulo inscrito, ángulo central y la relación entre ellos, así como también la perpendicularidad de la recta tangente a la circunferencia. En el siguiente problema se unen a las ya conocidas propiedades de los ángulos inscritos y centrales, las propiedades de triángulos isósceles.

Problema Student: En la Figura 5.10 se muestra que $\angle A = 11^o$. Si el segmento AB es igual al radio de la circunferencia, ¿cuál es la medida del $\angle COD$?

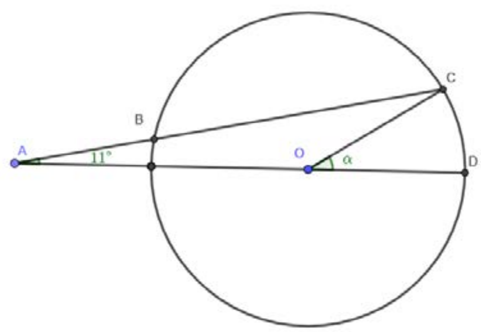

Figura 5.10: *Ángulo exterior*

A)60^o B) 44^o C) 33^o D) 66^o E) $22{,}5^o$

Solución: El triángulo ABO es isósceles, por lo tanto $\angle BOA = 11^o$. Entonces, por ángulo exterior tenemos $\angle CBO = 22^o$. Pero el triángulo OBC también es isósceles, así que $\angle OCB = 22^o$. Luego $\angle BOC = 180^o - 22^o - 22^o = 136^o$. Por lo tanto, $\angle COD = 180^o - 11^o - 136^o = 33^o$.

En el siguiente ejemplo, donde se considera la Figura 5.11, el problema toma el concepto de cuadrilátero ortogonal y el valioso teorema de Pitágoras en su solución.

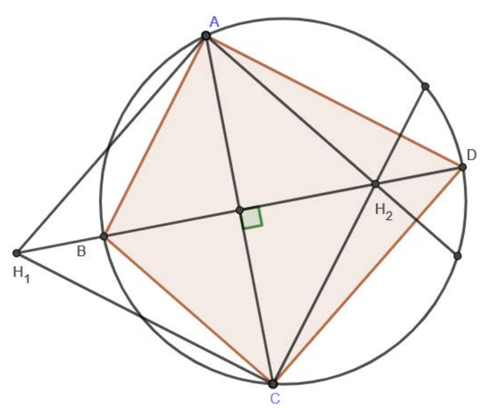

Figura 5.11: *Cuadrilátero ortogonal*

Problema Student: El cuadrilátero ortogonal $ABCD$ está inscrito en un círculo de radio R. Si H_1 y H_2 son los ortocentros de los triángulos ABC y ADC, respectivamente, y $AC = \frac{24}{13}R$, la suma de las medidas de los segmentos de recta BH_1 y DH_2 es:
A) $\frac{20}{13}R$ B) R C) $\frac{3}{2}R$ D) $\frac{7}{13}R$ E) $\frac{14}{13}R$

Solución: Sean M el punto medio de AC, C_1 el circuncentro del triángulo ABC y del triángulo ADC (nótese que es el mismo para los dos triángulos, ya que es el centro del cuadrilátero cíclico). Es conocido que la distancia de un vértice del triángulo al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto al vértice, es decir $BH_1 = 2C_1M$ y $DH_2 = 2C_1M$. Como el cuadrilátero es ortogonal, por Pitágoras se tiene que $(C_1M)^2 + (CM)^2 = R^2$. Por hipótesis $CM = \frac{24}{26}R$. Sustituyendo resulta que $(C_1M)^2 + \left(\frac{24}{26}R\right)^2 = R^2$. De aquí se obtiene que $C_1M = \frac{5}{13}R$. Por lo tanto, $BH_1 + DH_2 = 2\frac{5}{13}R + 2\frac{5}{13}R = \frac{20}{13}R$.

En el siguiente problema se usan propiedades básicas de paralelogramos y triángulos. Además se usa una propiedad fundamental de los ángulos inscritos: los triángulos inscritos en una circunferencia en donde uno de sus lados es un diámetro de dicha circunferencia, son siempre triángulos rectángulos.

Problema 2, OMCC 2008: Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia de centro O tal que AC es un diámetro. Se construyen los paralelogramos $BAOE$ y $DCOF$. Demuestre que si los puntos E y F pertenecen a la circunferencia entonces $ABCD$ es un rectángulo.

Solución: Considere la Figura 5.12. Como $BAOE$ es un paralelogramo se tiene $AO = BE$ y $AB = OE$. Pero si E está en la circunferencia entonces $OE = OB = OA$, o sea que $OA = OB = BA$ y el triángulo AOB es equilátero. Entonces $\angle OAB = 60^o$. Como $\angle ABC = 90^o$ (ángulo inscrito en una semicircunferencia) se sigue que $\angle OCB = 30^o$. Un razonamiento análogo muestra que $\angle DCA = 60^o$ y $\angle DAC = 30^o$. Por lo tanto, $\angle BCD = \angle BAD = 30^o + 60^o = 90^o$, y $ABCD$ es un rectángulo.

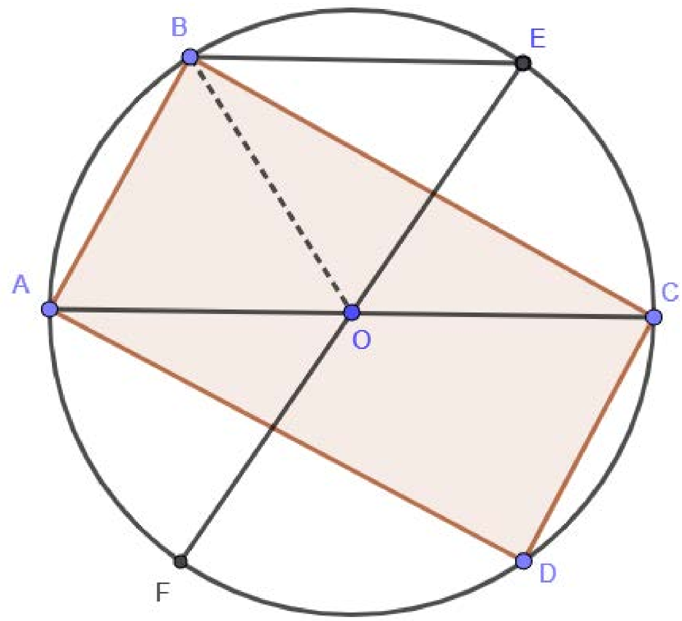

Figura 5.12: *Rectángulo inscrito*

Las olimpiadas internacionales de matemáticas, dedicadas a estudiantes talentosos, como la IMO, la IBERO, la OMCC han ido subiendo de dificultad a medida que pasan los años. Por esta razón es difícil valorar las dificultades con respecto a años anteriores. En adición a la dificultad también se han ido agregando temas que antes no se cubrían. Eso lo podemos apreciar en el siguiente ejemplo comparado con el anterior.

Problema 5, OMCC 2023: Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB < AC$ y Γ la circunferencia que pasa por A, B y C. Sea D el punto diametralmente opuesto A en Γ y l la tangente a Γ en D. Sean P, Q y R los puntos de intersección de BC con l, de AP

con Γ tal que $Q \neq A$ y de QD con la altura del triángulo ABC en A, respectivamente. Defina S como la intersección de AB con l y T como la intersección de AC con l. Muestre que S y T están sobre la circunferencia que pasa por A, Q y R.

Solución:
En la Figura 5.13 observamos que $\angle CTS = \angle CTD$. Además $\angle CTD + \angle TDC = 90^o$ y $\angle TDC + \angle CDA = 90^o$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \angle CTS &= \angle CTD \\ &= 90^o - \angle TDC \\ &= \angle CDA \end{aligned} \tag{5.1}$$

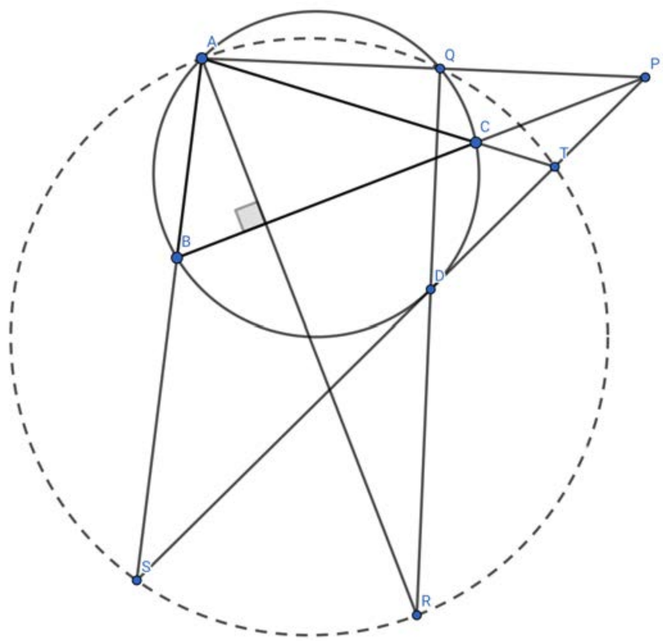

Figura 5.13: *Cinco puntos concíclicos*

Pero $\angle CDA = \angle CBA$ pues ambos son inscritos que abren el arco $\widehat{AC}$. Por lo tanto, $\angle CTS = \angle CBA$. Esto implica que $BCTS$ es cíclico.

Luego, por potencia tenemos $PT \cdot PS = PC \cdot PB = PQ \cdot PA$, por lo que $AQTS$ es cíclico. También tenemos que $\angle AQR = \angle AQD = 90^o$, por lo que para demostrar que los cinco puntos S, T, A, Q, R son concíclicos basta demostrar que el circuncentro del triángulo ATS está en AR. Esto se puede probar demostrando que la tangente al circuncírculo del triángulo AST en el punto A es perpendicular a AR, es decir paralela a BC. En efecto, el ángulo inscrito $\angle TSA$ es igual al ángulo semiinscrito (formado por dicha tangente y AT) que abre el arco $\widehat{AT}$. Por otro lado, como $BCTS$ es cíclico, se tiene que $\angle TSA = \angle BCA$. Esto prueba que la tangente al circuncírculo del triángulo AST en el punto A es paralela a BC.

Para finalizar la sección de geometría se presenta un problema de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas de 2023, en la que se sigue tratando problemas con la propiedad de cuadriláteros cíclicos, pero esta vez agregando al problema encontrar el lugar geométrico que cumple la condición dada.

Problema 4, IBERO 2023: Sean B y C dos puntos fijos en el plano. Para cada punto A del plano, fuera de la recta BC, sea G el baricentro del triángulo ABC. Determine el lugar geométrico de puntos A tales que $\angle BAC + \angle BGC = 180^o$.

Solución: Sea D el punto medio de BC. El lugar geométrico solicitado es el círculo ω con centro D y radio $\frac{\sqrt{3}}{2}BC$, excluyendo los dos puntos que se encuentran sobre BC.

Sea A_1 el reflejo de A a través de D, como se muestra en la Figura 5.14. La condición dada es equivalente a que el cuadrilátero $BGCA_1$ sea cíclico, por lo que, por potencia de un punto, se debe cumplir que:

$$DG \cdot DA_1 = BD \cdot DC \tag{5.2}$$

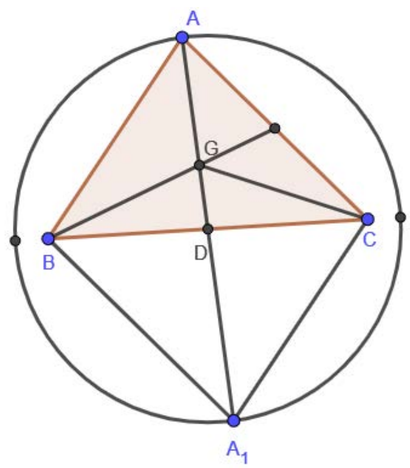

Figura 5.14: *Lugar geométrico*

Como G es el baricentro del triángulo ABC, entonces $DA_1 = DA = 3DG$, Luego $DG = \dfrac{DA}{3}$. Por otro lado, $DB = DC = \dfrac{BC}{2}$. Sustituyendo estas ecuaciones en (5.2) se obtiene:

$$\frac{AD^2}{3} = \frac{BC^2}{4}$$

Por lo tanto,

$$AD^2 = \frac{3 \cdot BC^2}{4}$$

Luego $AD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BC$ y entonces A debe pertenecer a ω. Como BC y su punto medio D están fijos, entonces todos los puntos de ω cumplen la condición, excepto los que caen en la línea BC pues allí se forman triángulos degenerados. Esto termina la demostración.

5.5 Conclusiones

En matemáticas puede parecer muy natural el uso de la metodología en espiral para su enseñanza, ya que muchos de los conceptos aprendidos se revisitan de manera obligatoria. Sin embargo, la implementación de esta metodología no es sencilla pues se puede confundir fácilmente con re-enseñanza y aunque la re-enseñanza no es mala, si trae problemas a los docentes para alcanzar a cubrir las destrezas y conceptos de los respectivos currículos.

Una de las ventajas importantes de la metodología en espiral es que el aprendizaje se da de manera continua, por lo tanto, es más difícil que los estudiantes olviden los conceptos y destrezas aprendidos y esto les permitirá avanzar de manera más efectiva en la adquisición de conceptos más profundos.

La metodología de espiral es una herramienta importante para el docente, ya que puede identificar de manera más clara las debilidades académicas de sus estudiantes.

Una de las desventajas mayores de la metodología en espiral, es el tiempo que consume la planificación de los currículos. En ese contexto deben ser bien pensados de tal manera que no se convierta en repetición de temas y por consiguiente el periodo escolar no alcance para cubrir y profundizar en los temas.

A nivel de los currículos universitarios no se encuentran estudios en el área de la metodología en espiral. El problema sigue siendo evidente. Por ejemplo los estudiantes ven el concepto y las técnicas para encontrar límites en el curso de cálculo diferencial y cuando las tienen que usar en los cursos siguientes, por ejemplo para series, no dominan el tema y muchos de ellos ni recuerdan el tema. La metodología en espiral podría ser una solución a este problema.

En olimpiadas matemáticas es más fácil seguir esta metodología, ya que muchos de los estudiantes que participan voluntariamente en estas competencias adquieren conocimientos para solucionar problemas y de cierta forma están ávidos de adquirir más conocimientos para solucionar problemas más retadores y para participar en competencias de más alto nivel. Eso sucede mucho en el caso de las Olimpiadas Internacionales.

5.6 Referencias bibliográficas

1 AOPS (2023). *Iberoamerican Math Olympiad*.
https://artofproblemsolving.com/community/c6h3151809p28631506

2 Akveld, M. y Cáceres, L. (2022). AKSF & Math Kangaroo: The world's largest International Mathematics Competition. *Notices*, 69, 11, pp. 1956-1960.

3 Bruner, J. (1960). *Process of education*. Cambridge, MA, Harvard University Press.

4 Drew, C. (2023). *Bruner's spiral curriculum - the 3 key principles*.
https://helpfulprofessor.com/spiral-curriculum/

5 Gibbs, B. C. (2014). Reconfiguring Bruner: Compressing the Spiral Curriculum. *Phi Delta Kappan*, v95, n7, pp. 41-44.

6 Giraldez, A. (s.f.). *El error como oportunidad de aprendizaje. ¿Y si dejamos de castigar los errores?*, Educación 3.0.
https://www.educaciontrespuntocero.com/noticias/dejamos-castigar-los-errores/

7 Glosario Currículum en Espiral.
https://grupoaspasia.com/es/glosario/curriculum-en-espiral/

8 Johnston, H. (2012). *The Espiral Curriculum*.
https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED538282.pdf

9 Montagud, N. (2019). *Curriculum en espiral: qué es y cómo se usa en educación*.
https://psicologiaymente.com/desarrollo/curriculum-espiral

10 Oswal, Y. (2022). *Why is Mathematics Difficult?*
https://timesofindia.indiatimes.com/readersblog/wordsoul/why-is-mathematics-difficult-48082/

11 Saborio, A. (2019) *Teorías del Aprendizaje según Bruner*.
https://www.psicologia-online.com/teorias-del-aprendizaje-segun-bruner-2605.html
https://www.overleaf.com/project/6550b392e33e719f1f160ccf