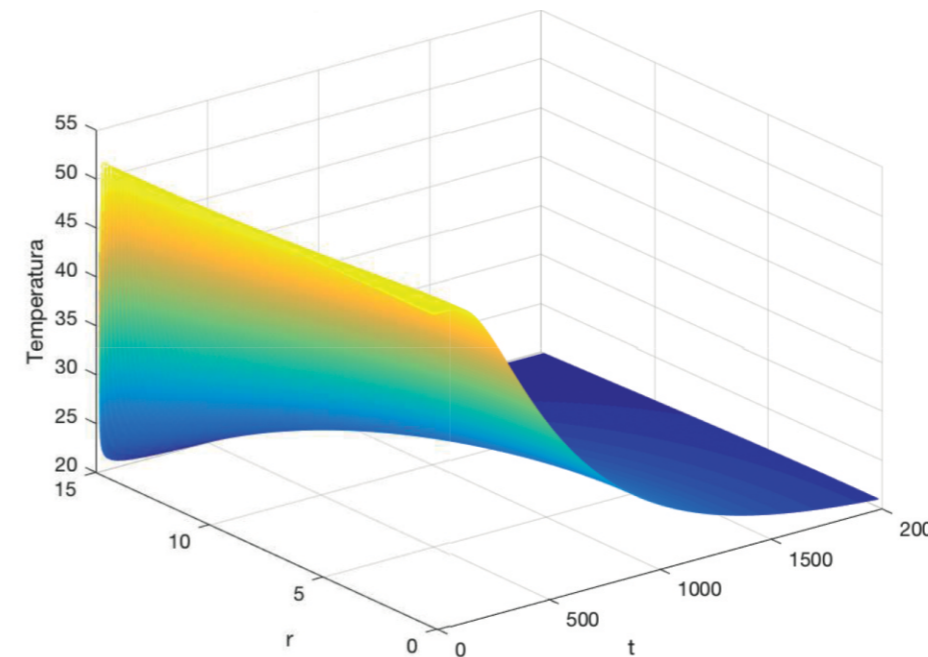


# Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales parciales al modelamiento de fenómenos térmicos

**Christian Nolasco Serna**  
**Claudia Marcela Durán Chinchilla**  
**José Julián Cadena Morales**



editorial  
**redipe**

**UFPS** Universidad Francisco  
de Paula Santander  
Vigilada Mineducación



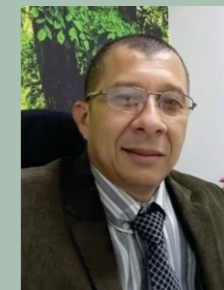
**Christian Nolasco Serna.**

Matemático egresado de la Universidad Nacional de Colombia, con estudios de doctorado en Ciencias Matemáticas. Sus áreas de interés comprenden complejidad computacional, aplicaciones de los métodos numéricos a problemas relacionados con modelamiento en la ingeniería y didáctica de la enseñanza de las matemáticas universitarias. En la actualidad desempeña el cargo de docente de tiempo completo, en la Universidad Francisco de Paula Santander Ocaña, adscrito al departamento de ciencias básicas además de ser miembro permanente del grupo de investigación de la Facultad de Educación, Artes y Humanidades



**Claudia Marcela Durán Chinchilla.**

Nació en Ocaña, Colombia; docente tiempo completo de la Universidad Francisco de Paula Santander Ocaña. Licenciada en lingüística y literatura de la Universidad de Pamplona, Colombia; especialista en Práctica Docente Universitaria de la Universidad Francisco de Paula Santander Ocaña; Magister en Pedagogía de la misma Universidad y PhD. en Educación De la Universidad Pedagógica Experimental Libertadores de Venezuela. Categorizada por Colciencias como investigadora asociada, directora del grupo de investigación GIFEAH de la Universidad Francisco de Paula Santander Ocaña, ha publicado tres libros, seis capítulos de libro, doce artículos y es miembro de la Red Iberoamericana de Pedagogía REDIPE.



**José Julián Cadena Morales.**

Nacido en Chimichagua César en el año 1970 el 5 de mayo. Biólogo en la Universidad Industrial de Santander, especialista en Práctica Pedagógica y en Gerencia en medio ambiente y prevención de Desastres; Magister en Gestión y Evaluación Ambiental. Subdirector Académico de la Universidad Francisco de Paula Santander seccional Ocaña. sus investigaciones han comprendido estudios de los ecosistemas del Catatumbo, relacionados con la flora y fauna de la región, haciendo énfasis en la conservación in situ de la gran diversidad existente de estos ecosistemas.

La modelación matemática, es un proceso que permite partir de un problema contextual, ara llevarlo a un problema matemáticos a partir de una serie de pasos que dan lugar a la resolución de dichos problemas, para tal caso, se hace necesario en primer lugar plantearse una pregunta acerca del mundo o situación que se desea comprender; seguidamente, se debe elegir elementos que circundan el mundo a estudiar para establecer relaciones entre los mismos; una vez relacionados los elementos, se procede a elegir los que son útiles y los que no los son para eliminarlos del proceso; posteriormente y luego de interpretar la realidad o la situación a estudiarlos datos se trasladan a términos matemáticos para generar formulas matemáticas y con ella poder resolver el o los problemas del mundo, del contexto o situaciones .

Se considera que, desde la modelación matemáticas, se puede lograr que los estudiantes apliquen el saber matemático en las distintas situaciones del contexto en el cual viven y de esa manera, también se desarrolle la competencia critica que todo ser o individuo debe poseer para construir una sociedad justa y equitativa.

De igual manera, se puede afirmar que la modelación matemática es una forma de transformar realidades en problemas matemáticos para posteriormente solucionarlos a partir del mundo real usando como herramienta principal los números y los cálculos matemáticos.

Para el caso particular de este libro, y en su aplicación en cuanto a la aplicación de la modelación en el caso de las transferencias de calor en hornos tipo Hoffman y el estudio cilíndrico de dos dimensiones, se puede establecer que el uso de métodos numéricos es más directo y más eficiente y eficaz que el estudio analítico de la situación, permitiendo así, deducir que el método de modelación implícito funciona excelentemente para describir y detallar le cambio de temperatura en el centro del cilindro.



editorial  
**redipe**

www.rediberoamericanapedagogia.com

INVESTIGADOR E INNOVADOR DE LA EDUCACIÓN  
**Comparte tu saber,  
publica con redipe.**

**¡Infórmate!**  
editorial@rediberoamericanapedagogia.com

Título original

**Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales parciales al modelamiento de fenómenos térmicos.**

**Editorial**

REDIPE Red Iberoamericana de Pedagogía  
Capítulo Estados Unidos  
Bowker Books in Print

**Editor**

Julio César Arboleda Aparicio

**ISBN: 978-1-951198-60-2**

Primera edición: Diciembre 2020

© Todos los derechos reservados

**Docentes Investigadores y Autores:**

Christian Nolasco Serna  
Claudia Marcela Durán Chinchilla  
José Julián Cadena Morales

**Universidad Francisco de Paula Santander Ocaña**

Facultad de Educación, Artes y Humanidades

Programa de Comunicación Social

Grupo de Investigación Communis

**Édgar Antonio Sánchez Ortiz**

Director UFPS Ocaña

**José Julián Cadena Morales**

Subdirector Académico UFPS Ocaña

**Ana María Carrascal Vergel**

Decana FEAH

**Doris Cecilia Páez Quintero**

Directora de Departamento de Humanidades

**Claudia Marcela Durán Chinchilla**

Directora del grupo de Investigación GIFEAH

**Comité Editorial**

Valdir Heitor Barzotto, Universidad de Sao Paulo, Brasil

Carlos Arboleda A. PhD Investigador Southern Connecticut State University, Estados Unidos

Agustín de La Herrán Gascón, Ph D. Universidad Autónoma de Madrid, España

Mario Germán Gil Claros, Grupo de Investigación Redipe

Rodrigo Ruay Garcés, Chile. Coordinador Macroproyecto Investigativo Iberoamericano Evaluación Educativa

Julio César Arboleda, Ph D. Dirección General Redipe. Grupo de investigación Educación y

Desarrollo humano, Universidad de San Buenaventura

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la ley, la reproducción (electrónica, química, mecánica, óptica, de grabación o de fotocopia), distribución, comunicación pública y transformación de cualquier parte de ésta publicación -incluido el diseño de la cubierta- sin la previa autorización escrita de los titulares de la propiedad intelectual y de la Editorial. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual.

Los Editores no se pronuncian, ni expresan ni implícitamente, respecto a la exactitud de la información contenida en este libro, razón por la cual no puede asumir ningún tipo de responsabilidad en caso de error u omisión.

Red Iberoamericana de Pedagogía

[editorial@redipe.org](mailto:editorial@redipe.org)

[www.redipe.org](http://www.redipe.org)

Impreso en Cali, Colombia

*Printed in Cali, Colombia*

# Contenido

Pág	
9	Prólogo
11	Introducción
15	CAPÍTULO 1. Una mirada conceptual sobre las ecuaciones diferenciales
15	1. Componentes teóricos de las ecuaciones diferenciales parciales.
15	1.1. Orígenes físicos de la ecuación del calor
18	1.2. Método de Fourier.
21	1.3. Métodos numéricos
23	CAPÍTULO 2. Ecuaciones diferenciales Parciales en ingeniería
23	2. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales parciales a la ingeniería
23	2.1. Estudio de la transferencia de calor en un horno tipo Hoffman.
28	2.2. Estudio de la transferencia térmica en dispositivos sin uso de electricidad
33	CAPÍTULO 3. Modelamiento matemático
33	3. Resultados del modelamiento matemático
33	3.1. Modelamiento para el caso de la transferencia de calor en un horno tipo Hoffman
39	3.2. Modelamiento para el caso de la transferencia de térmica en dispositivos sin uso de electricidad.
45	Conclusiones
47	Prefacio
49	Bibliografía
51	Apéndice



*Agradecimientos*

*a la Universidad Francisco de Paula Santander Ocaña,  
por construir y debatir  
sobre la base de la academia*



# Prólogo

La modelación matemática es un proceso por medio del cual se elabora o construye un modelo matemático que permita conectarse desde los números con el mundo real; para ello es indispensable abarcar varias actividades: construcción, estructuración, matematización, interpretación, validación y exposición. Desde este punto de vista, la modelación matemática, pedagógicamente es una herramienta didáctica que da lugar a desarrollar en el estudiante competencias relacionadas con la resolución de problemas, no solo en el área de las ciencias básicas, sino también en las distintas áreas disciplinares, toda vez que, en primer lugar, desarrolla la competencia interpretativa de los individuos, y en segunda instancia, lleva al discernimiento y resolución de problemas presentes en contextos diversos.

Llevar a los estudiantes a la modelación matemática es una oportunidad no solo para que estos pongan en práctica todos los conocimientos matemáticos, sino que se les permita buscar soluciones matemáticas a todos los problemas situacionales o de contexto que en el día a día se presentan, y de esa manera poder ser competentes e interpretar el universo en todas sus dimensiones: culturales, académicas, sociales, culturales, políticas, sociales, religiosas y demás dimensiones que circundan el mundo.

Para el caso de este libro, sin lugar a dudas es una forma de aplicación del modelamiento matemático, en especial en la aplicación de las ecuaciones diferenciales en contextos de la transferencia de calor. En tal sentido, el contenido del mismo integra aspectos relacionados con la ecuación del calor y sus métodos de solución: matemático, numérico y su aplicación a la ingeniería.

Los autores buscan a través del estudio de un caso particular, "transferencia de calor", en el cual se aplicó modelamiento matemático, demostrar que el conocimiento matemático y la modelación en particu-

lar es una forma didáctica para que los estudiantes puedan entender e interactuar de manera activa en la sociedad, y desde allí también puedan aportar a la solución de situaciones y problemas sociales, y a la vez, se entienda que la matemática tiene un valor incalculable en el desarrollo del mundo en sus distintas dimensiones.

*Edgar Antonio Sánchez Ortiz*



# Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales aparecen de forma frecuente en la modelización de fenómenos de la Ciencia y Tecnología. Es precisamente en los modelos de evolución que se describe la dinámica a lo largo del tiempo, de determinada cantidad variable (también a veces denominada estado) que puede representar objetos de los más diversos, que van desde la posición de un satélite en el espacio hasta la dinámica de un átomo, pasando por los índices bursátiles o el grado en que una enfermedad afecta a la población. En otras palabras, los modelos dinámicos de evolución son los más naturales en la medida que reproducen nuestra propia concepción del mundo: un espacio tridimensional que evoluciona y cambia en función del tiempo (Stephenson, 1975).

El modelamiento de algunos procesos físicos, químicos, biológicos, del medio ambiente e incluso sociales presentan mecanismos diferentes que son descritos por una partícula al azar y por las interacciones dependientes de las variables de estado. Ejemplos típicos son la propagación de una flama, el movimiento biológico de las células en una planta y animales, y la propagación de especies biológicas en ecosistemas homogéneos y heterogéneos (Smoller, 1982).

En el contexto de Colombia, el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales está directamente relacionado con los procesos que involucran la transferencia de calor, en relación con el mejoramiento de técnicas para tratar fenómenos de combustión (Guerrero et al., 2013, 2015, 2017, 2018). Los esfuerzos técnicos y científicos que permitan implementar el uso de tecnologías más eficientes, así como la generación de estrategias enfocadas en la optimización energética es de vital importancia para el sector industrial (Subdirección de información Minero Energético, 2012).

El sector cerámico en Colombia no cuenta con tecnificación en sus procesos de producción, conduciendo a que el proceso de combustión sea deficiente, generando problemas ambientales y de salud por sus emisio-

nes contaminantes, y ocasionando costos innecesarios para las empresas, presentando baja calidad en sus productos sin los estándares básicos de calidad (Instituto Colombiano De Normas Técnicas NTC, (2000)). Un inadecuado proceso de combustión requiere la utilización de mayores cantidades de combustibles y expone a las empresas al pago de multas al no acatar las normas ambientales vigentes (Ministerio De Ambiente, Vivienda y Desarrollo Territorial (2010)).

En el municipio de Ocaña se encuentran 30 empresas del sector cerámico con una producción aproximadamente de 1.027.600 productos/mes dedicadas exclusivamente a la producción de materiales para la construcción como ladrillos, bloque y teja, que de acuerdo con la clasificación hecha en el Artículo 20 de la Ley 905 de 2004, el 96,67 % son empresas pequeñas que realizan la quema de carbón sobre parrilla fija con una cantidad de 416.280 productos correspondiente al 40,51 % de la producción mensual total en el municipio de Ocaña, mientras que el 3,34 % corresponden a empresas grandes que utilizan hornos continuos con una producción de 611.320 productos correspondiente al 59,49 % de la producción según plan básico de ordenamiento territorial del municipio de Ocaña. (Alcaldía Municipal De Ocaña, (2011)).

Por esta razón el estudio de los fenómenos de transferencia de calor tiene vital importancia a nivel internacional y a nivel nacional. Dentro del sector industrial uno de los subsectores con mayores índices de problemas energéticos es el subsector de cerámicos. El proceso de mayor consumo energético dentro de esta industria se enmarca en la cocción (Campos, Lora, Meriño, Tovar, & Navarro, 2010). Este subsector de la industria tiene como una de las principales regiones de concentración Norte de Santander específicamente en la ciudad de Cúcuta, Ocaña y Pamplona (Andres Amell et al., 2013). Por esta razón el estudio teórico de los procesos de transferencia es de vital importancia en la región del Norte de Santander.

Este libro tiene como finalidad integrar tres aspectos de la ecuación del calor y sus métodos de solución: el matemático, los métodos numéricos y las aplicaciones a la ingeniería. El elemento integrador de estos aspectos es la modelación de los resultados generados por los métodos numéricos aplicados a la ecuación del calor en el contexto de las aplicaciones a la ingeniería.

El capítulo inicial permite una rápida introducción a la teoría de ecuaciones diferenciales parciales con el objetivo de servir de fundamentación teórica para los capítulos posteriores.

En el capítulo dos se estudia, en primer lugar, la ecuación del calor en relación a la conducción térmica de una placa unidimensional. Para tal fin se analiza el planteamiento de la ecuación diferencial del calor utilizando los datos de las temperaturas del calor en el horno tipo Hoffman de la ladrillera de Ocaña, luego se procede a solucionar la ecuación de forma analítica. La complejidad de la solución analítica sugiere un enfoque complementario, por tal razón se proponen esquemas numéricos explícitos e implícitos para resolver la ecuación diferencial asociada a la transferencia térmica en el horno, finalizando con el análisis del fenómeno de transferencia en el horno comparando las soluciones numéricas con el caso ideal descrito teóricamente.

En segundo lugar, se estudia la ecuación del calor en relación a la conducción térmica en un cilindro de dos dimensiones; como apoyo para lograr esta tarea se propone estudiar el fenómeno de enfriamiento por evaporación en un refrigerador de dos vasijas. Este dispositivo de enfriamiento sin electricidad consta de una vasija externa de cerámica porosa que aloja en su interior una vasija más pequeña que contiene la materia. El espacio entre las vasijas se encuentra relleno de arena húmeda. El efecto de refrigeración en el dispositivo se produce por la evaporación del agua, la transmisión de calor de la materia hacia la arena y la influencia del aire.

El experimento realizado por (Chemin et al., 2017), para modelar el proceso térmico del refrigerador de dos vasijas, utilizó un sistema de cilindros graduados esto se refleja en las coordenadas cilíndricas empleadas para la formulación de la ecuación de calor asociada al fenómeno estudiado. Por métodos analíticos (Chemin et al., 2017) encuentran una solución de la ecuación del calor asociada al fenómeno térmico que produce el efecto de enfriamiento en el refrigerador al suponer una geometría cilíndrica. de tal manera, se propone una solución por los métodos numéricos explícitos e implícitos para la ecuación analítica propuesta en el artículo de (Chemin et al., 2017) y la contrastación de los resultados numéricos y analíticos.

En el capítulo tres se muestran los resultados referentes a la aplicación de los métodos numéricos a las aplicaciones desarrolladas a lo largo del trabajo; es importante resaltar que la metodología de trabajo es consistente con los resultados experimentales. Por ultimo se proponen algunas conclusiones y se plantean nuevas direcciones para desarrollar posteriores investigaciones.



---

## CAPÍTULO 1

---

# Una mirada conceptual sobre las ecuaciones diferenciales

### 1. Componentes teóricos de las ecuaciones diferenciales parciales.

Varias de las más importantes ideas en matemáticas son desarrolladas en el interior de las ciencias físicas y las ecuaciones matemáticas; especialmente las ecuaciones diferenciales parciales permiten establecer un lenguaje para formular estas ideas. De igual manera, avances en matemáticas permiten desarrollar nuevas perspectivas en las ciencias. A medida que los años pasan los matemáticos y científicos extienden sus metodologías para incluir todas las áreas de la ciencia y la tecnología. Este nuevo paradigma que surge es llamado modelamiento matemático, el cual corresponde conceptualmente a una ecuación, o un conjunto de ecuaciones, cuya solución describe el comportamiento físico de un sistema relacionado. En general, un modelo matemático es una descripción simplificada de la realidad en términos matemáticos, que, envuelve observación, análisis de las ecuaciones y simulación, y finalmente, validación del modelo para asegurar si las predicciones son acertadas.

Este primer capítulo tiene como objetivo desarrollar el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales enfatizando como ejemplo particular la ecuación diferencial del calor. El capítulo se divide en tres partes: en primer lugar, se deduce la ecuación del calor desde principios de la física y las matemáticas, en segundo lugar se estudia la solución de las ecuaciones diferenciales parciales por métodos analíticos, y por ultimo se estudia la solución por métodos numéricos.

#### 1.1. Orígenes físicos de la ecuación del calor

Un conjunto amplio de ecuaciones diferenciales parciales tiene su origen en las leyes de balance, o leyes de conservación. Una ley de con-

servación es una formulación matemática del hecho de que la razón de cambio de una cantidad en el interior de un dominio es igual a la razón de cambio del flujo de la cantidad a través de la frontera, menos la razón a la cual la cantidad es creada en el interior del dominio. Por ejemplo, considere una población de una cierta especie animal en una región geográfica, la razón de cambio de la población es igual a la razón de cambio en que el animal migra en el interior de la región menos la razón a la que sale, más tasa de nacimientos, menos la tasa de muertes. Como ejemplo de aplicación de la ley de conservación se plantea el estudio de la transferencia de calor en tres dimensiones.

Sea  $R$  una región en el espacio donde el calor se encuentra fluyendo, y sea  $T(x,y,z,t)$  la función de temperatura en el tiempo  $t$  en un punto  $(x,y,z)$  en  $R$ . Se asume que la región es homogénea y es caracterizada por una constante de calor específico  $c$  y una constante de densidad  $\rho$ . Sea  $B$  una esfera arbitraria contenida en  $R$ . Al aplicar el principio de balance de energía a  $B$ , que afirma que la razón de cambio de la energía total en  $B$  es igual a la razón de cambio del flujo que cruza la frontera de  $B$  además de la variación de la energía generada en  $B$  por las fuentes. La cantidad total de calor en un elemento de volumen  $dV=dx dy dz$  es  $c\rho T dV$ , y por lo tanto el total de energía calórica en  $B$  esta dada por la integral triple

$$\text{Total de energía calórica en } B = \iiint_B c\rho T dV.$$

Es posible asumir que el calor generado por las fuentes es cuantificado por la función  $f(x,y,z,t)$ , donde  $f dV$  es la razón de cambio que se genera en  $dV$ ; por lo tanto, así la variación de calor generada por las fuentes en toda  $B$  es

$$\text{Razón de cambio de la energía producida en } B = \iiint_B f dV.$$

Es importante notar que  $f$  tiene dimensiones de energía por unidad de volumen, por unidad de tiempo.

La siguiente componente importante en la ecuación de conservación de energía es el campo vectorial que representa el flujo de calor  $\psi(x,y,z,t)$ ; su dirección corresponde a la dirección del flujo de calor en la posición  $(x,y,z)$  en el tiempo  $t$ . La razón a la que el flujo cruza un elemento de superficie oblicua  $dA$  orientada hacia afuera por el vector normal  $\mathbf{n}$  es

$$\psi \cdot \mathbf{n} dA.$$

En consecuencia, la razón de cambio del flujo de calor a través de la frontera de  $B$ , denotado por  $\partial B$ , es la integral de superficie

$$\int_{\partial B} \psi \cdot \mathbf{n} \, dA.$$

Por lo tanto, la ley de conservación, o ley de balance de energía, es

$$\frac{d}{dt} \iiint_B c\rho T \, dV = -\int_{\partial B} \psi \cdot \mathbf{n} \, dA + \iiint_B f \, dV \quad (1.1)$$

El signo negativo aparece en la ecuación a causa de la dirección del flujo.

Al aplicar una de las relaciones integrales fundamentales del cálculo en varias variables - **el teorema de la divergencia**. Este permite reescribir la integral de flujo en (1.1) como una integral de volumen. El teorema de la divergencia es una versión del teorema fundamental del cálculo en tres dimensiones.

### Teorema 1.1

**(Teorema de la divergencia)** Si un campo vectorial  $\psi$  es continuo y diferenciable sobre una región  $B$  y continua sobre  $B \cup \partial B$ , donde  $\partial B$  es la frontera, entonces

$$\iiint_B \operatorname{div} \psi \, dV = \int_{\partial B} \psi \cdot \mathbf{n} \, dA.$$

Usando el teorema de la divergencia es posible escribir la ecuación de balance (1.1) como

$$\frac{d}{dt} \iiint_B c\rho T \, dV = -\int_{\partial B} \operatorname{div} \psi \, dV + \iiint_B f \, dV$$

Ahora es posible colocar la derivada del tiempo en el interior de la integral y reorganizar los términos en una integral de volumen para obtener.

$$\iiint_B (c\rho T_t + \operatorname{div} \psi - f) \, dV = 0$$

Esta ecuación de balance es válida para cualquier esfera  $B$  en  $R$ , por lo tanto es posible quitar el integrando, dando paso a la ecuación en derivadas parciales

$$c\rho T_t + \operatorname{div} \psi - f = 0 \quad (1.2)$$

Para todo  $t$  y todo  $(x,y,z) \in R$ . La ecuación (1.2) es la forma local de **ecuación del calor** en tres dimensiones.

La ecuación presenta dos funciones incógnitas, la temperatura escalar  $T$  y el flujo de calor  $\psi$ . **La ley de conducción de calor de Fourier** afirma que el flujo de calor decrece en la dirección del gradiente. En símbolos,

$$\psi = -K\nabla(T). \quad (1.3)$$

Recordemos desde el cálculo que el gradiente negativo es la dirección del máximo decrecimiento. La constante de proporcionalidad  $K$  es la conductividad térmica. Sustituyendo (1.3) en (1.2) y usando la identidad

$$\operatorname{div}(\nabla(T)) = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz},$$

Se genera la ecuación de temperatura  $T(x,y,z,t)$  en tres dimensiones:

$$c\rho T_t - K(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) = f. \quad (1.4)$$

La expresión  $T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}$  se llama **Laplaciano** de  $T$ , y es denotado por  $\Delta T$ . Finalmente, en resumen, **la ecuación de conducción del calor** puede escribirse como

$$T_t - k\Delta T = \frac{1}{c\rho}f, \quad (1.5)$$

Donde la constante  $k=K/(c\rho)$  es llamada la constante de difusión.

Cuando se indica que la temperatura en la frontera de  $R$  esta definida por

$$T(x,y,z) = g(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \partial R,$$

Se dice que la ecuación (1.5) satisface las condiciones **tipo Dirichlet**.

## 1.2. Método de Fourier.

Para ilustrar el método de Fourier en la solucionar la ecuación (1.5), se considera el siguiente problema de valores iniciales con valores en la frontera en el contexto de la conducción de calor,

$$T_t = T_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (1.6)$$

$$T(0,t) = T(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.7)$$



$$T(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \pi. \quad (1.8)$$

El método de Fourier consiste en la separación de variables en la forma,

$$T(x,t) = h(x)g(t).$$

Al sustituir este producto en la ecuación en la ecuación (1.6), (1.7) y (1.8) se obtiene

$$h(x)g'(t) = h''(x)g(t), \quad h(0)g(t) = 0, \quad h(\pi)g(t) = 0.$$

Como  $g(t)$  no es la función nula, es posible escribir las ecuaciones anteriores como

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{h''(x)}{h(x)} = -\lambda, \quad h(0) = h(\pi) = 0,$$

para alguna constante  $\lambda$ . Esto es válido ya que es la única forma de igualar dos funciones con diferentes parámetros. La constante  $-\lambda$  es llamada la constante de separación. Por lo tanto, se genera una ecuación diferencial ordinaria para  $g$  en el dominio del tiempo, a saber,

$$g'(t) = -\lambda g(t),$$

y además se genera un problema en la frontera para la variable espacial  $h$ ,

$$-h''(x) = \lambda h(x), \quad 0 < x < \pi, \quad (1.9)$$

$$h(0) = 0, \quad h(\pi) = 0. \quad (1.10)$$

La técnica de separación de variables tiene la ventaja de convertir un problema de ecuaciones en derivadas parciales en un problema en ecuaciones diferenciales en una variable.

Es fácil demostrar que la solución para la ecuación  $g$ , tiene la forma,

$$g(t) = e^{-\lambda t}.$$

Para solucionar las ecuaciones (1.9) y (1.10) se procede por casos. En los casos en que  $\lambda=0$  y  $\lambda < 0$  se genera la solución trivial. Cuando  $\lambda > 0$ , o  $\lambda = \alpha^2$ . En este caso la ecuación (1.9) tiene la forma

$$h'' + \alpha^2 h = 0,$$

para la cual las soluciones son:

$$h(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x).$$

En primer lugar,  $h(0) = 0$  conduce a que  $A = 0$ . Así  $h(x) = B\sin(\alpha x)$ . La segunda condición de frontera implica que:

$$h(\pi) = B\sin(\alpha\pi) = 0.$$

El hecho de que  $B \neq 0$ , fuerza a que

$$\lambda = \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Los anteriores valores para  $\lambda$  permiten generar soluciones no triviales

$$h = h_n(x) = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \dots$$

Al regresar a la solución  $g(t) = e^{-\lambda t}$ . Se sustituyen los valores de  $\lambda = \lambda_n = n^2$ .

Lo cual genera el conjunto de soluciones

$$g_n(t) = e^{-n^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto, las soluciones para las ecuaciones (1.6-1.8) son

$$T_n(x, t) = g_n(t)h_n(x) = e^{-n^2 t} \sin(nx), \quad n = 1, 2, \dots$$

Para calcular una solución que satisface las condiciones iniciales (1.8), al usar el principio de superposición y la forma de combinación lineal

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx), \quad (1.11)$$

La ecuación (1.8) implica que

$$T(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Mediante el uso de la teoría de funciones ortogonales, los coeficientes de Fourier están dados por

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \text{sen}(nx) dx. \quad (1.12)$$

En resumen, la solución del problema de frontera con condiciones iniciales (1.6), (1.7) y (1.8) esta dada por la serie (1.11) donde los coeficientes  $b_n$  están dados por (1.12).

### 1.3. Métodos numéricos.

La dificultad en muchos casos de la búsqueda de soluciones analíticas para ecuaciones diferenciales parciales, sugiere la exploración de métodos alternativos que permitan el uso de las herramientas tecnológicas. Los métodos numéricos son un conjunto de estrategias conceptuales y practicas que permiten resolver ecuaciones diferenciales con un amplio poder de precisión. La idea fundamental de la estrategia consiste en convertir un problema arbitrario en una versión discreta del mismo, que se pueda implementar en un computador. Para las aplicaciones que se describen en el libro, se desarrollaran dos tipos de métodos numéricos, el método explícito y el método implícito. En lo que sigue se realizará una breve descripción del método de diferencias finitas.

El esquema de la solución de las ecuaciones por los métodos numéricos se conoce con el nombre de **diferencias finitas**, tiene como fundamento la definición de la derivada como razón de cambio.

El primer paso para la construcción método de solución es **discretizar** la región de espacio-tiempo donde se desea obtener la solución. Para este caso la región es  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Es necesario colocar una cota sobre el tiempo ya que en la práctica el problema se resuelve en un tiempo finito. Discretizar significa definir un retículo de puntos en la región de espacio-tiempo dada por

$$x_j = jh, \quad t_n = nk, \quad j = 0, 1, \dots, J; \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

Donde los números fijos  $h$  y  $k$  son los pasos espaciales y temporales. Aquí  $h=1/J$  y  $k=1/N$ . El entero  $J$  es el numero de subintervalos en  $0 \leq x \leq l$ , y  $N$  es el numero es numero de iteraciones que se pueden tomar. Para cada nodo  $(x_j, t_n)$  del retículo se busca una aproximación, la cual llamaremos  $T_j^n$ , la cual aproxima el valor exacto de la solución  $u(x_j, t_n)$ . Se define

$T_j^n$  como una matriz de tamaño  $n \times j$ . Para obtener las ecuaciones para  $T_j^n$  se sustituyen las derivadas de la ecuación del calor por las siguientes diferencias divididas:

$$T_t(x_j, t_n) \approx \frac{T(x_j, t_{n+1}) - T(x_j, t_n)}{k}$$

$$T_{xx}(x_j, t_n) \approx \frac{T(x_{j-1}, t_n) - 2T(x_j, t_n) + T(x_{j+1}, t_n)}{h^2}.$$

Al sustituir en la ecuación del calor las anteriores aproximaciones se genera una expresión para  $T_j^{n+1}$ ,  $T_j^{n+1} = T_j^n + \frac{kD}{h^2}(T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n)$

Nótese que la aproximación depende de los puntos.

$$(x_{j-1}, t_n), (x_j, t_n), (x_{j-1}, t_n), (x_j, t_{n+1}).$$

Desde la condición inicial y las condiciones de frontera nosotros sabemos que

$$T_0^n = 0, T_j^n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

La fórmula para  $T_j^{n+1}$  puede ser ahora aplicada en todo el interior del retículo, iniciando con los valores en  $t=0$ , para calcular los valores en  $t=t_1$  y así continuar. Así es posible calcular la función  $T_j^n$  por filas. Debido al error de aproximación en las diferencias divididas, se puede demostrar que se debe tener una condición de estabilidad  $\frac{kD}{h^2} \leq \frac{1}{2}$  para que el método funcione.

---

## CAPÍTULO 2

---

# Ecuaciones diferenciales Parciales en ingeniería

## 2. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales parciales a la ingeniería.

Este capítulo tiene como principal objetivo aplicar las herramientas conceptuales desarrolladas en el capítulo 1 al estudio de la transferencia de calor en una dimensión en los casos de geometrías rectangulares y cilíndricas. En primer lugar, se estudia la transferencia de calor en un horno tipo Hoffman; en cuanto a la metodología de trabajo, sigue el orden del capítulo 1, se plantea en modelo matemático, se estudian las soluciones numéricas y analíticas y por último se comparan los resultados. El segundo caso de estudio se contextualiza la transferencia del calor en dispositivos sin uso de electricidad; es importante resaltar, que la geometría dominante es la cilíndrica. Al igual que en el caso rectangular se sigue la misma metodología de estudio.

### 2.1. Estudio de la transferencia de calor en un horno tipo Hoffman.

El estudio de la transferencia de calor es un ejemplo relevante en la aplicación de las ecuaciones diferenciales parciales a la ingeniería. El siguiente estudio de caso tiene como objetivo mostrar este hecho desde el punto de vista metodológico y didáctico.

Para modelar la transferencia de calor en una placa unidimensional se utilizan los datos experimentales producto de las investigaciones del profesor Gustavo Guerrero al medir la temperatura de un horno tipo Hoffman en diferentes puntos de una pared (Guerrero et al., 2013, 2015, 2017, 2018). Un sistema de adquisición de datos fue diseñado para registrar las temperaturas del proceso de cocción obtenido a partir de 16 termopares tipo K, por lo que se utilizaron dos tarjetas de adquisición en la cual se

instalaron 8 termopares en cada una, en la primera tarjeta o bloque de adquisición se registraron las temperaturas interiores en el horno en la segunda tarjeta de adquisición se registraron temperaturas exteriores, para luego ser almacenadas a través del software LabView en el reporte de adquisición y generar los perfiles de temperatura de las posiciones de la cámara escogida como referencia para las mediciones. La adquisición de datos se realizó en la cámara 22 del horno, la producción de ladrillo H 10x40 en esta fue de 33.000 unidades.

En el modelo que vamos a estudiar se tienen en cuenta la temperatura de la pared externa, interior y centro interior.

Para encontrar el modelo matemático que permita conocer la temperatura en función de la posición y el tiempo (estamos considerando una dimensión espacial), calculamos un promedio de las temperaturas (cada hora) de los datos experimentales de las paredes externa e interna del horno. La anterior consideración nos permitió generar los siguientes datos que reflejan las condiciones de frontera del modelo de cambio de temperatura en el horno tipo Hoffman.

Horas	Temperatura en grados centígrados de la pared externa : $f_1(t)$	Temperatura en grados centígrados de la pared interna: $f_2(t)$
1	19.85	30.25
2	19.97	32.20
3	19.68	33.64
4	19.48	36.09
5	19.65	39.75
6	20.01	49.75
7	19.48	57.90
8	20.02	81.91
9	21.42	134.41
10	24.33	343.20
11	35.89	668.17
12	48.47	594.34
13	70.16	747.75
14	133.44	712.23
15	144.67	691.35

El modelo matemático que soporta los datos de la anterior tabla es la ecuación del calor deducida en la sección 1.1 junto con las adecuadas condiciones de frontera y condiciones iniciales.

$$T_t = kT_{xx}, \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (2.1)$$

$$T(0, t) = f_1(t), \quad T(l, t) = f_2(t), \quad t > 0 \quad (2.2)$$

$$T(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l \quad (2.3)$$

Las funciones escalonadas  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  representan los datos experimentales de las temperaturas de la pared externa e interna del horno. En adelante se representa el modelo matemático que representan las ecuaciones (2.1)-(2.3) como **EDP1**.

Para solucionar el modelo **EDP1**, el primer paso es convertir las condiciones de frontera de la ecuación (2.2) en condiciones homogéneas, con la finalidad de aplicar el método de separación de variables estudiado en la sección 1.2.

$$h(x, t) = f_1(t) + \frac{x}{l}(f_2(t) - f_1(t)),$$

tal que  $\hat{T}(x, t) = T(x, t) - h(x, t)$ .

Nuestro objetivo es observar que tipo de modelo verifica la función  $\hat{T}$ . Para este fin nosotros notamos que

$$h_{xx}(x, t) = 0 \quad h_t(x, t) = f_1'(t) + \frac{x}{l}(f_2'(t) - f_1'(t)).$$

Nosotros observamos que

$$\hat{T}_t - k\hat{T}_{xx} = -h_t(x, t)$$

y

$$\hat{T}(0, t) = T(0, t) - h(0, t) = 0, \quad \hat{T}(l, t) = T(l, t) - h(l, t) = 0,$$

$$\hat{T}(0, x) = f(x) - h(x, 0) = f(x) - (f_1(0) + \frac{x}{l}(f_2(0) - f_1(0))) \equiv \hat{T}_0(x)$$

Por lo anterior, la función  $\hat{T}$  verifica el modelo notado por **EDP2**:

$$\hat{T}_t = k\hat{T}_{xx} - h_t(x, t), \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (2.4)$$

$$\hat{T}(0,t) = 0, \quad T(l,t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.5)$$

$$\hat{T}(x,0) = \hat{T}_0(x), \quad 0 < x < l. \quad (2.6)$$

Al conjunto de ecuaciones (2.4)-(2.5) se aplica el método de Fourier estudiado en la sección 1.2. Por lo tanto la solución del modelo **EDP1** es:

$$T(x,t) = \hat{T}(x,t) + h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{T}_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} + h(x,t) \quad (2.7)$$

donde

$$\hat{T}_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t} [\hat{T}_{0,n} + \int_0^t e^{n^2\pi^2 s} h_n(s) ds],$$

$$\hat{T}_{0,n} = 2 \int_0^l \hat{T}_0(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx$$

y

$$h_n(t) = -2 \int_0^l h_t(x,t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx$$

La complejidad de la ecuación (2.7) sugiere un enfoque más natural para analizar el modelo **EDP1**. Por lo tanto, lo que sigue en la sección propone estudiar dos esquemas de solución numérica.

El método numérico explícito para solucionar el modelo **EDP1** consiste en sustituir la función incógnita  $T(x,t)$  por las aproximaciones de las derivadas parciales que se generan de la serie de Taylor correspondiente:

$$T_t(r_j, t_n) = \frac{T(r_j, t_{n+1}) - T(r_j, t_n)}{\Delta t} \quad (2.7)$$

$$T_{xx}(x_j, t_n) = \frac{T(x_{j-1}, t_n) - 2T(x_j, t_n) + T(x_{j+1}, t_n)}{(\Delta x)^2} \quad (2.8)$$

Las ecuaciones (2.7) y (2.8) generan una versión discretizada del modelo **EDP1**, al sustituir estas ecuaciones se generan las relaciones recursivas correspondientes:

$$T_1^{k+1} = s(T_2^k + T_0^k) + (1-s)T_1^k$$

$$T_j^{k+1} = s(T_{j+1}^k + T_{j-1}^k) + (1-s)T_j^k$$



$$T_n^{k+1} = s(T_{n+1}^k + T_{n-1}^k) + (1 - s)T_n^k$$

donde  $s = \frac{k \Delta t}{(\Delta r)^2}$ . Para el caso  $n=3$ , las relaciones recursivas se reflejan en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 - 2s & s & 0 \\ s & 1 - 2s & s \\ 0 & s & 1 - 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} sf(t_0) \\ 0 \\ sg(t_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix}$$

Solucionar el modelo **EDP1** es equivalente a solucionar el anterior sistema de ecuaciones. La ventaja de esta aproximación tiene que ver con el uso de herramientas computacionales eficientes que permiten solucionar sistemas de ecuaciones de forma eficiente.

De manera similar al método anterior, el método implícito para solucionar el modelo EDP1 consiste en sustituir la función incógnita  $T(r,t)$  por las aproximaciones de las derivadas parciales que se generan de la serie de Taylor correspondiente:

$$T_t(r_j, t_n) = \frac{T(r_j, t_{n+1}) - T(r_j, t_n)}{\Delta t} \quad (2.9)$$

$$T_{xx} = \frac{T(x_{j-1}, t_{n+1}) - 2T(x_j, t_{n+1}) + T(x_{j+1}, t_{n+1})}{(\Delta x)^2} \quad (2.10)$$

Las ecuaciones (2.9) y (2.10) generan una versión discretizada del modelo **EDP1**, al sustituir estas ecuaciones se generan las relaciones recursivas correspondientes:

$$T_1^k = -s(T_2^{k+1} + T_0^{k+1}) + (1 + s)T_1^{k+1}$$

$$T_j^k = -s(T_{j+1}^{k+1} + T_{j-1}^{k+1}) + (1 + s)T_j^{k+1}$$

$$T_n^k = -s(T_{n+1}^{k+1} + T_{n-1}^{k+1}) + (1 + s)T_n^{k+1}$$

donde  $s = \frac{k \Delta t}{(\Delta r)^2}$ .

Para el caso  $n=3$ , las relaciones recursivas se reflejan en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 + 2s & -s & 0 \\ -s & 1 + 2s & -s \\ 0 & -s & 1 + 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sf(t_0) \\ 0 \\ sg(t_4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix}$$

## 2.2. Estudio de la transferencia térmica en dispositivos sin uso de electricidad.

Un dispositivo de refrigeración sin uso de la electricidad consiste en dos vasijas. La vasija externa es de un material poroso que aloja en su interior otra vasija de un material permeable al agua. La vasija interna contiene la materia a refrigerar, el espacio entre las vasijas se encuentra relleno de arena húmeda; el efecto de refrigeración en el dispositivo se produce por la evaporación del agua, la transmisión de calor de la materia hacia la arena y la influencia del aire.

El grosor de las vasijas y la capa de arena son otros parámetros geométricos importantes. Al aumentar el grosor se incrementa la resistencia térmica de la conducción del calor, logrando mantener el dispositivo frío, pero al mismo tiempo evitando el enfriamiento por evaporación. De nuevo la elección del tamaño del dispositivo depende de las necesidades del uso de la nevera y la fuente de agua disponible. La función de la arena es estabilizar la vasija interior y a su vez distribuir el agua a lo largo del dispositivo por la acción capilar.

En orden para simplificar el modelo físico del refrigerador de dos vasijas, en el artículo (Chemin et al., 2017) diseñan un experimento en un conjunto de cilindros alargados los cuales contienen agua o etanol, simulando la materia a refrigerar. Los cilindros son cubiertos con toallas de papel que son humedecidas con un líquido.

Para construir un modelo teórico pertinente en el estudio del proceso de refrigeración, (Chemin et al., 2017) utiliza cilindros de mayor altura en relación con su diámetro, además el modelo teórico bajo consideración es en dos dimensiones. La parte superior del cilindro es tapada, para asegurar que el gradiente de temperatura sea radial y reducir el efecto de convección en el interior del fluido. En adelante, el modelo de refrigeración de dos vasijas se estudiará sobre un cilindro.

Para plantear el modelo matemático que fundamenta el proceso térmico en el dispositivo, por la geometría cilíndrica se realiza el siguiente cambio de coordenadas.

Sea  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z = z$ . La regla de la cadena nos permite calcular las derivadas  $T_{xx}$  y  $T_{yy}$  en términos de las derivadas respecto a  $r$  y  $\theta$ . Al calcular  $T_x$  se tiene:

$$T_x = T_r r_x + T_\theta \theta_x = (\cos \theta) T_r - \frac{\sin \theta}{r} T_\theta \quad (2.11)$$

Por lo tanto, la segunda derivada parcial es:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.12)$$

De igual manera por un razonamiento similar,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.13)$$

Al sustituir (2.12) y (2.13) en la ecuación (1.5) se tiene la ecuación del calor en coordenadas cilíndricas:

$$T_t = T_{rr} + \frac{1}{r} T_r + \frac{1}{r^2} T_{\theta\theta} + T_{zz} \quad (2.14)$$

Consideremos la difusión de calor en un cilindro sólido, de diámetro  $a$ , altura  $h$ , densidad  $\rho$ , calor específico  $c$ , conductividad térmica  $\lambda$ , temperatura inicial  $T_i$ , colocado en un ambiente a temperatura  $T_0$ . La ecuación del calor (2.14) en estado transitorio con difusión radial, en las adecuadas condiciones de frontera es

$$T_t = k(T_{rr} + \frac{1}{r} T_r) \quad (2.15)$$

$$T(0, R) = T_0 \quad (2.16)$$

$$T(r, 0) = T_i \quad 0 \leq r < R \quad (2.17)$$

La técnica para solucionar la ecuación es suponer que  $T(r, t) = y(r)g(t)$ , la ecuación se descompone en

$$\frac{g'(t)}{kg(t)} = \frac{y''(r) + \frac{1}{r}y'(r)}{y(r)} = -\lambda.$$

La solución para  $g(t)$  es resuelta de la forma usual y se obtiene  $g(t) = e^{-\lambda kt}$ . La solución para la ecuación en  $y$  es

$$y''(r) + \frac{1}{r}y'(r) = -\lambda y(r).$$

Aplicando las condiciones de frontera nosotros tenemos las soluciones

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda k t} J_0\left(\frac{z_n r}{R}\right) \quad (2.18).$$

Los coeficientes se obtienen aplicando las condiciones iniciales.

Una aproximación de la ecuación (15) se genera al tener el primer término el cual es

$$T(r, t) = c_1 e^{-\lambda k t} J_0\left(\frac{z_1 r}{R}\right) \quad (2.19),$$

donde la función  $f(t) = c_1 e^{-\lambda k t}$  representa la temperatura de la línea central. Esto quiere decir que un enfoque adecuado para estudiar el modelo del cambio de temperatura en el interior del cilindro consiste en estudiar la temperatura en el centro del cilindro.

La ecuación (2.19), la podemos escribir como

$$f(t) = (T_i - T_0) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.20),$$

$$\text{donde } \tau = \left(\frac{a}{2J_0}\right)^2 \frac{\rho c}{\lambda}.$$

Al igual que en la sección anterior se desarrollan métodos numéricos para solucionar las ecuaciones (2.15)-(2.17).

El método numérico explícito consiste en sustituir la función incógnita  $T(r, t)$  por las aproximaciones de las derivadas parciales que se generan de la serie de Taylor correspondiente:

$$T_t(r_j, t_n) = \frac{T(r_j, t_{n+1}) - T(r_j, t_n)}{\Delta t} \quad (2.21)$$

$$T_{rr}(r_j, t_n) = \frac{T(r_{j-1}, t_n) - 2T(r_j, t_n) + T(r_{j+1}, t_n)}{(\Delta r)^2} \quad (2.22)$$

Las ecuaciones (31) y (32) generan una versión discretizada del modelo **EDPcil**, al sustituir estas ecuaciones se generan las relaciones recursivas correspondientes:

$$T_1^{k+1} = T_1^k + \frac{k \Delta t}{2r\Delta r} [T_2^k - T_0^k] + \frac{k \Delta t}{(\Delta r)^2} [T_0^k - 2T_1^k + T_2^k] \quad (2.23)$$

$$T_j^{k+1} = T_j^k + \frac{k \Delta t}{2r\Delta r} [T_{j+1}^k - T_{j-1}^k] + \frac{k \Delta t}{(\Delta r)^2} [T_{j+1}^k - 2T_j^k + T_{j-1}^k] \quad (2.24)$$

$$T_n^{k+1} = T_n^k + \frac{k \Delta t}{2r\Delta r} [T_{n+1}^k - T_{n-1}^k] + \frac{k \Delta t}{(\Delta r)^2} [T_{n+1}^k - 2T_n^k + T_{n-1}^k] \quad (2.25)$$

Si  $s = \frac{k \Delta t}{(\Delta r)^2}$  las relaciones recursivas se pueden condensar en el siguiente sistema de ecuaciones, para  $n=3$ :

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{s}{2j} - s & \frac{s}{2j} + s & 0 \\ s - \frac{s}{2j} & 1 - 2s & s + \frac{s}{2j} \\ 0 & s - \frac{s}{2j} & 1 - 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20(\frac{s}{2j} + s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix}$$

Solucionar el modelo matemático para el comportamiento térmico del dispositivo sin uso de electricidad es equivalente a solucionar el anterior sistema de ecuaciones.

El planteamiento para el método numérico implícito es equivalente a las siguientes aproximaciones:

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = k \frac{T_{j-1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j+1}^{n+1}}{(\Delta r)^2} \quad (2.26)$$

Usando la ecuación (2.26), el modelo se genera la relación recursiva:

$$T_{j+1}^{k+1} \left[ -s - \frac{s}{2j} \right] + T_{j-1}^{k+1} \left[ -s + \frac{s}{2j} \right] + T_j^{k+1} [1 + 2s] = T_j^k$$

Donde el sistema de ecuaciones para el vector de temperaturas  $T^k$  para el caso  $n=3$  es:

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{s}{2j} + s & -\frac{s}{2j} - s & 0 \\ -s + \frac{s}{2j} & 1 + 2s & -s - \frac{s}{2j} \\ 0 & -s - \frac{s}{2j} & 1 + 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20(-\frac{s}{2j} - s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$



## CAPÍTULO 3

# Modelamiento Matemático

### 3. Resultados del modelamiento matemático.

El objetivo del presente capítulo es mostrar mediante la modelación computacional como las soluciones numéricas de los ejemplos de las aplicaciones del capítulo anterior se ajustan de manera favorable con los resultados experimentales derivados de la teoría de la transferencia de calor.

#### 3.1. Modelamiento para el caso de la transferencia de calor en un horno tipo Hoffman.

En el capítulo anterior en la sección 2.1 se derivaron un conjunto de expresiones recursivas, que permitieron transferir el problema de tipo continuo de las soluciones de la ecuación del calor a un problema de calcular soluciones para un sistema lineal. Vamos a revisar los resultados del modelamiento para los casos de los métodos numéricos explícitos e implícitos.

##### a. Método numérico explícito.

Las relaciones recursivas se sintetizan en el siguiente sistema de ecuaciones.

Para el caso  $n=3$ , las relaciones recursivas se reflejan en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 - 2s & s & 0 \\ s & 1 - 2s & s \\ 0 & s & 1 - 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} sf(t_0) \\ 0 \\ sg(t_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix}$$

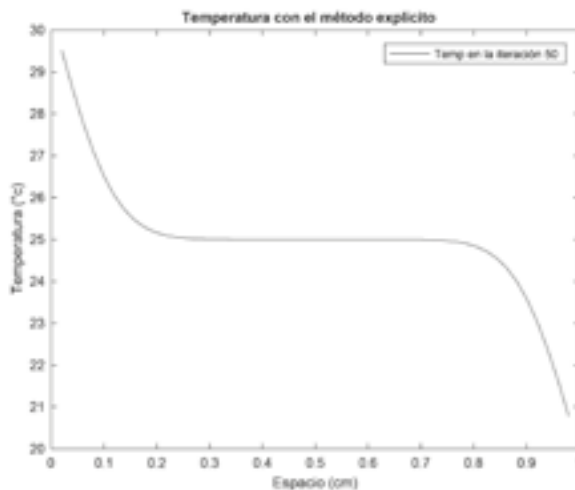
Donde,  $s = \frac{k \Delta t}{(\Delta r)^2}$

Los parámetros empleados en el diseño del código en Matlab fueron:

Parámetros	Datos
Ancho de la pared del horno	1 metro
Número de puntos en la dirección de x	2000
Paso en la dirección de x	1/50
Paso en la dirección de t	43200/2000
Constante de difusión térmica	0.000004
Parámetro de convergencia	0.2160
Temperatura en el interior del muro	25 grados centígrados

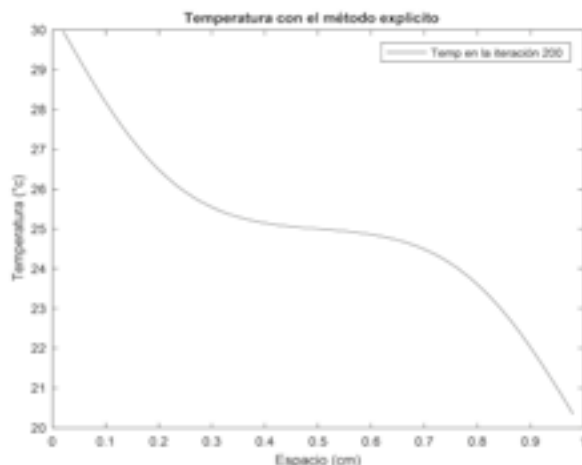
Las siguientes gráficas muestran la evolución de la temperatura de las paredes externa e interna en el horno tipo Hoffman desde el inicio del proceso.

La primera gráfica muestra el comportamiento del modelo computacional generado por el método numérico explícito cuando se encuentra en la iteración 50. Es importante notar que esta primera gráfica muestra el inicio del proceso de la transferencia térmica en las paredes del horno, es decir las condiciones iniciales cuando la temperatura interior del muro es de 25 grados centígrados, la temperatura en la pared interior es de 30 grados centígrados y la temperatura en la pared exterior presenta una temperatura de 20 grados. Los resultados de la primera gráfica se ajustan con los datos experimentales presentados en el segundo capítulo.

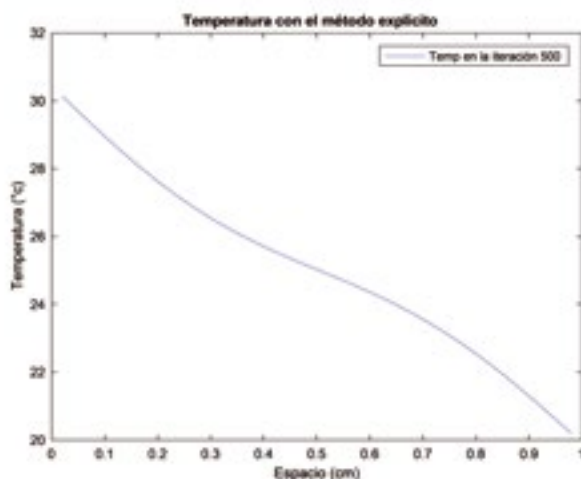




La siguiente gráfica muestra el perfil de la temperatura en la iteración 200. Se observa en el comportamiento de la curva un ligero cambio en la temperatura de pared interna mostrando una leve tendencia hacia una función lineal.

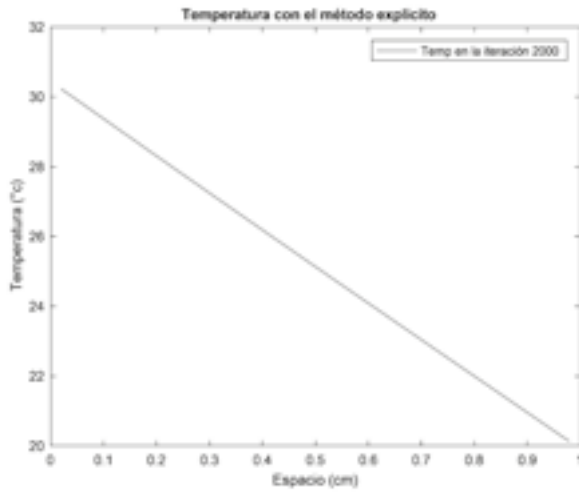


En la siguiente grafica, que muestra el comportamiento térmico en la iteración 500, el comportamiento lineal es mas evidente.

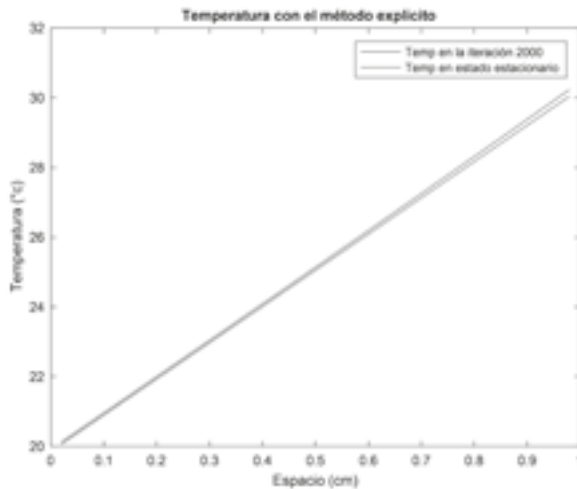


La siguiente gráfica muestra con claridad que la curva de temperatura es una función lineal. Lo cual demuestra que el modelo por el metodo numérico explícito converge a una función lineal en el estado estable.

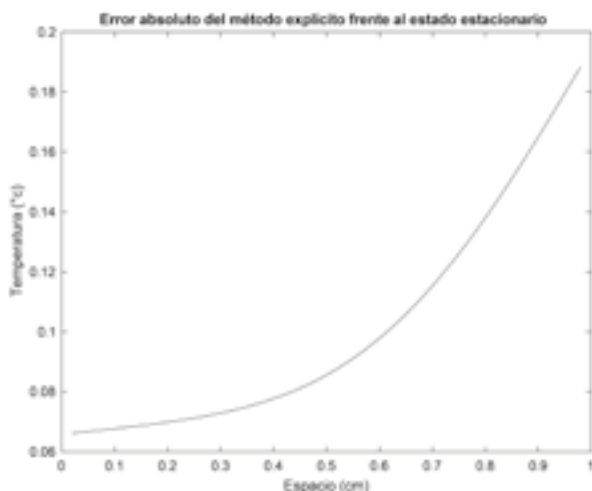
Del comportamiento de las curvas de temperatura en diferentes instantes podemos concluir que  $\lim_{t \rightarrow \infty} T(x, t) = f(x)$ , donde  $f(x) = (30.25 - 19.85)x + 19.85$ .



La siguiente gráfica compara los resultados numéricos del método explícito en la iteración 2000 en relación con la solución analítica de la sección 2.1.



La siguiente gráfica muestra el error del método explícito en comparación con el método analítico.



### b. Esquema implícito.

Las relaciones recursivas se sintetizan en el siguiente sistema de ecuaciones. Para el caso  $n=3$ , las relaciones recursivas se reflejan en el siguiente sistema de ecuaciones:

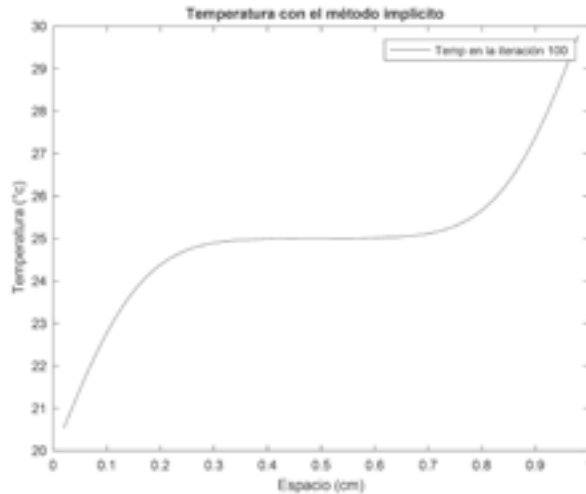
$$\begin{pmatrix} 1 + 2s & -s & 0 \\ -s & 1 + 2s & -s \\ 0 & -s & 1 + 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sf(t_0) \\ 0 \\ sg(t_4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix}$$

Los parámetros empleados en el diseño del código en Matlab fueron:

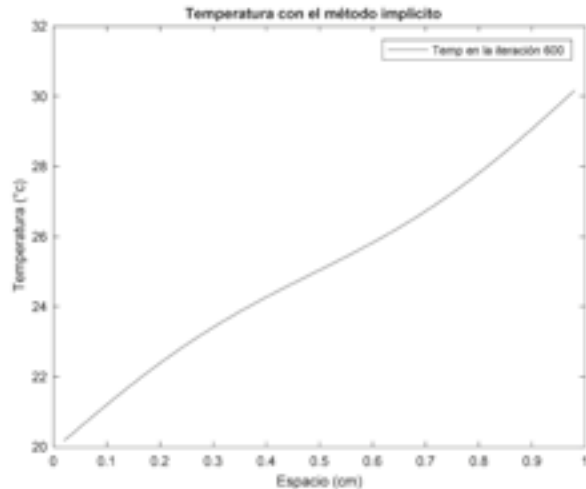
Parámetros	Datos
Ancho de la pared del horno	1 metro
Número de puntos en la dirección de x	2000
Paso en la dirección de x	1/50
Paso en la dirección de t	43200/2000
Constante de difusión térmica	0.000004
Parámetro de convergencia	0.2160
Temperatura en el interior del muro	25 grados

El análisis para el caso del método implícito es similar al caso explícito, esto es debido a la uniformidad del modelo. El siguiente conjunto de graficas muestran este comportamiento.

La siguiente gráfica nos muestra que la temperatura en el interior de la pared muestra la temperatura inicial de 25 grados, en los extremos tenemos las temperaturas dadas por las condiciones iniciales.

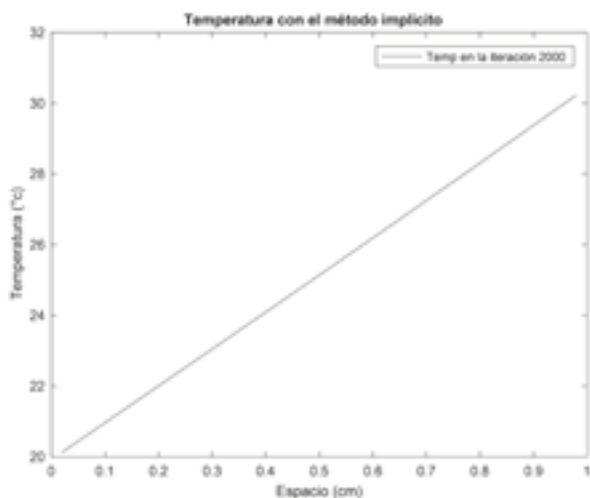


En la iteración temporal 600 la tendencia es hacia una función lineal.

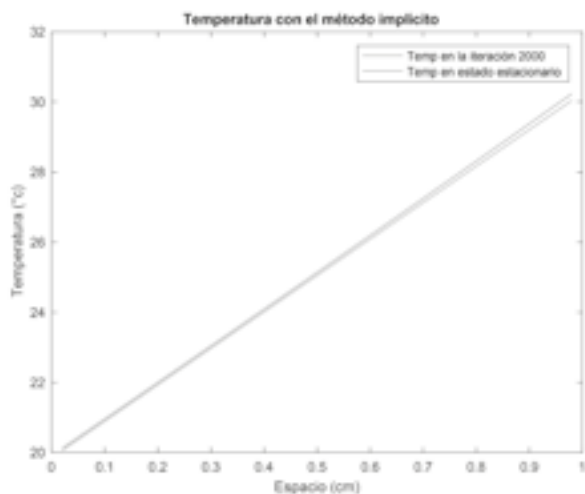


En esta gráfica observamos que la temperatura en la última iteración es claramente una función lineal.

Del comportamiento de las curvas de temperatura en diferentes instantes podemos concluir que  $\lim_{t \rightarrow \infty} T(x, t) = f(x)$ , donde  $f(x) = (30.25 - 19.85)x + 19.85$ .



Las siguiente gráfica muestra los resultados de comparar la función lineal  $f(x)$  con los resultados generados por el método implícito.



### 3.2. Modelamiento para el caso de la transferencia de térmica en dispositivos sin uso de electricidad.

Al aplicar el modelo numérico generado en la sección 2.2 a la ecuación del calor en coordenadas cilíndricas, se generaron los siguientes resultados para los métodos numéricos explícito e implícito.

**a. Esquema explícito.**

Las relaciones recursivas se sintetizan en el siguiente sistema de ecuaciones.

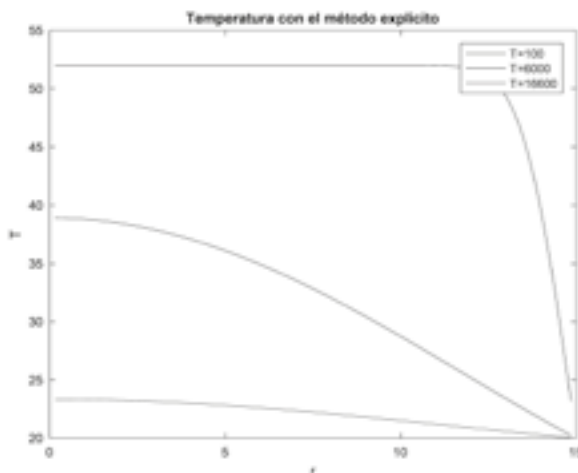
Para el caso  $n=3$ , las relaciones recursivas se reflejan en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{s}{2j} - s & \frac{s}{2j} + s & 0 \\ s - \frac{s}{2j} & 1 - 2s & s + \frac{s}{2j} \\ 0 & s - \frac{s}{2j} & 1 - 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20(\frac{s}{2j} + s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix}$$

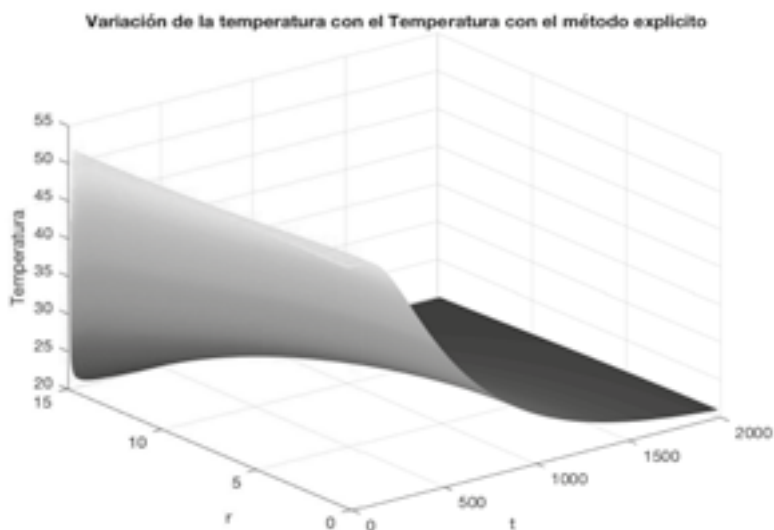
Los parámetros empleados en el diseño del código en Matlab fueron:

Parámetros	Datos
Radio del cilindro	15 mm
Número de puntos en la dirección de x	100
Paso en la dirección de x	15/100
Paso en la dirección de t	2000/25000
Constante de difusión térmica	0.08
Parámetro de convergencia	0.2902
Temperatura inicial del cilindro	52 grados centígrados
Temperatura del aire	20 grados centígrados

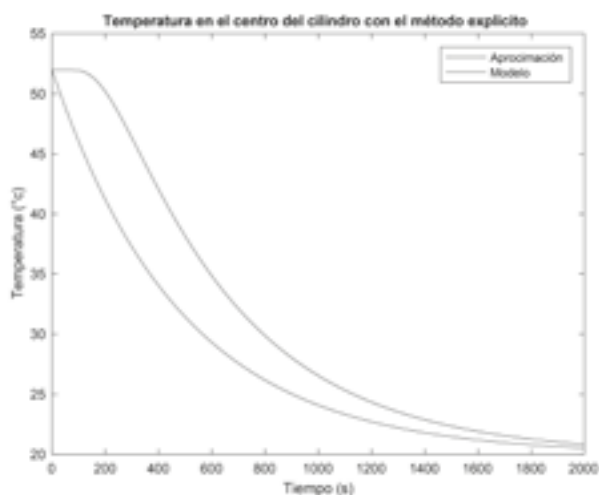
La evolución de la temperatura  $T(x,t)$ , para diferentes instantes se muestra en las siguientes gráficas:



Estas gráficas muestran las curvas de la temperatura para diferentes iteraciones temporales. Del comportamiento de las gráficas observamos que a medida que pasa el tiempo la temperatura del cilindro tiende a la temperatura ambiente de 20 grados.



Se puede determinar que la simulación numérica coincide con el modelo físico. La comparación del modelo teórico y la aproximación por el método explícito la observamos en la siguiente grafica.



**b. Esquema implícito.**

Las relaciones recursivas se sintetizan en el siguiente sistema de ecuaciones.

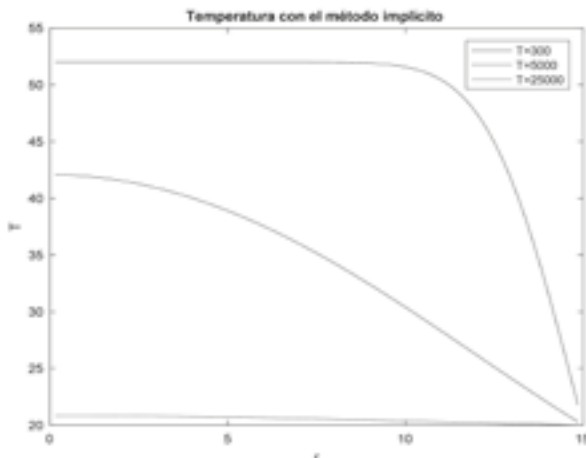
Para el caso  $n=3$ , las relaciones recursivas se reflejan en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{s}{2j} + s & -\frac{s}{2j} - s & 0 \\ -s + \frac{s}{2j} & 1 + 2s & -s - \frac{s}{2j} \\ 0 & -s - \frac{s}{2j} & 1 + 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20(-\frac{s}{2j} - s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix}$$

Los parámetros empleados en el diseño del código en Matlab fueron:

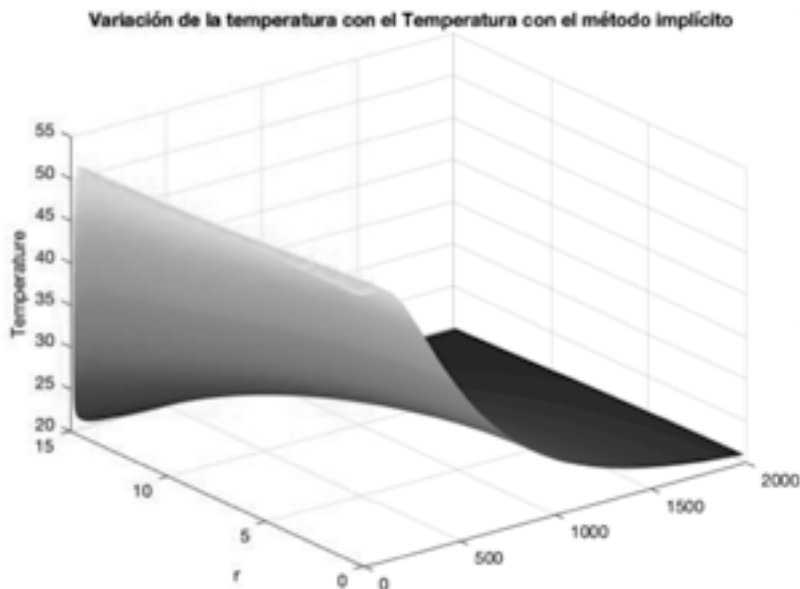
Parámetros	Datos
Radio del cilindro	15 mm
Número de puntos en la dirección de x	100
Paso en la dirección de x	15/100
Paso en la dirección de t	2000/25000
Constante de difusión térmica	0.08
Parámetro de convergencia	0.2902
Temperatura inicial del cilindro	52 grados centígrados
Temperatura del aire	20 grados centígrados

La evolución de la temperatura  $T(x,t)$ , para diferentes instantes se muestra en las siguientes gráficas:



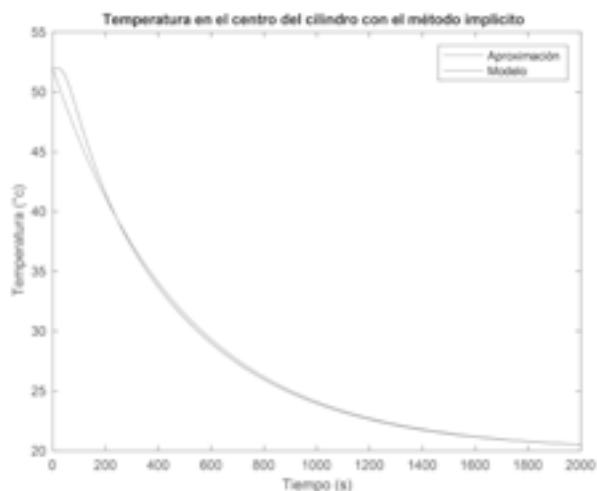


Como se observa, las curvas de la temperatura para diferentes iteraciones temporales. Del comportamiento de las gráficas observamos que a medida que pasa el tiempo la temperatura del cilindro tiende a la temperatura ambiente de 20 grados.



Comportamiento del perfil de temperatura a lo largo del proceso de transferencia de calor implementando el método implícito.

Al comparar el modelo teórico y la aproximación por el método explícito la observamos en la siguiente grafica.



Los dos métodos numéricos generan curvas de temperatura que se ajustan al modelo físico. En el caso del método implícito el error con respecto a la curva teórica es más pequeño. Por lo cual podemos concluir que el método implícito funciona muy bien para describir el cambio de temperatura en el centro del cilindro.

---

## CONCLUSIONES

---

A partir de la aplicación de los métodos numéricos explícito e implícito para los casos de transferencia en el horno tipo Hoffman y el estudio térmico en el cilindro en dos dimensiones se pueden generar las siguientes reflexiones generales:

1. Para el caso del horno tipo Hoffman las curvas de temperatura se ajustan en ambos casos (explícito e implícito) con el modelo teórico que se representa por una función lineal (estado estable). El uso de los métodos numéricos es más directo que el estudio por la solución analítica y tiene la ventaja del uso de las herramientas tecnológicas.
2. Para el caso de la temperatura en el centro del cilindro el método implícito se ajusta de forma más precisa con el modelo teórico propuesto por (Chemin et al., 2017).
3. La modelación matemática, permite, en su aplicación pedagógica, el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes, a través del análisis de situaciones o problemas contextuales.

Esta investigación formula las siguientes recomendaciones para ser resueltas en posteriores estudios.

1. Extender el modelo unidimensional del horno Hoffman para incluir los fenómenos de convección y radiación.
2. Estudiar el modelo de conducción en dos dimensiones para el caso del horno tipo Hoffman.
3. Para el estudio de la refrigeración sin uso de electricidad extender la geometría a un cono truncado y una esfera.



---

## **PREFACIO**

---

La modelación matemática, es un proceso que permite partir de un problema contextual, ara llevarlo a un problema matemáticos a partir de una serie de pasos que dan lugar a la resolución de dichos problemas, para tal caso, se hace necesario en primer lugar plantearse una pregunta acerca del mundo o situación que se desea comprender; seguidamente, se debe elegir elementos que circundan el mundo a estudiar para establecer relaciones entre los mismos; una vez relacionados los elementos, se procede a elegir los que son útiles y los que no los son para eliminarlos del proceso; posteriormente y luego de interpretar la realidad o la situación a estudiarlos datos se trasladan a términos matemáticos para generar formulas matemáticas y con ella poder resolver el o los problemas del mundo, del contexto o situaciones .

Se considera que, desde la modelación matemáticas, se puede lograr que los estudiantes apliquen el saber matemático en las distintas situaciones del contexto en el cual viven y de esa manera, también se desarrolle la competencia critica que todo ser o individuo debe poseer para construir una sociedad justa y equitativa.

De igual manera, se puede afirmar que la modelación matemática es una forma de transformar realidades en problemas matemáticos para posteriormente solucionarlos a partir del mundo real usando como herramienta principal los números y los cálculos matemáticos.

Para el caso particular de este libro, y en su aplicación en cuanto a la aplicación de la modelación en el caso de las transferencias de calor en hornos tipo Hoffman y el estudio cilíndrico de dos dimensiones, se puede establecer que el uso de métodos numéricos es más directo y más eficiente y eficaz que el estudio analítico de la situación, permitiendo así, deducir que el método de modelación implícito funciona excelentemente para describir y detallar le cambio de temperatura en el centro del cilindro.



## BIBLIOGRAFÍA

- Alcaldía Municipal De Ocaña (2011).** Plan Basico de Ordenamiento Territorial PBOT. Ocana.
- Amell, A., Rubio, L., Cadavid, Y., & Echeverri, C. (2013).** Informe final del proyecto: Análisis de las necesidades tecnológicas para la mitigación del cambio climático en el sector industrial colombiano. Ministerio de Medio Ambiente y Desarrollo Sostenible.
- Campos, J., Lora, E., Meriño, L., Tovar, I., & Navarro, A. (2010).** Ahorro de energía en la industria cerámica. Un Proyecto de La Unidad de Planeación Minero Energética de Colombia (UPME) Y El Instituto Colombiano Para El Desarrollo de La Ciencia Y La Tecnología. Francisco Jose de Caldas (Colciencias).(2014, Octubre).
- Chemin, A., Dit, V. L., Caussarieu, A., Plihon, N., Tabert, N. (2018).** Heat transfer and evaporative cooling in function of put in pot coolers, American Journal of Physics , 86, 206-211.
- Date, A. (2012).** Heat and mass transfer analysis of a clay-pot-refrigerator, Int. J. Heat Mass Trans, 55(15), 3977-3983.
- Evans, L. C, (2010),** Partial Differential Equations, Rhode Island, United States of America: American Mathematical Society.
- G. Guerrero Gómez, E. Espinel Blanco 2013** Comparación del Consumo Energética y Propiedades Finales de los Productos Cocidos entre Hornos Artesanales a Cielo Abierto y un Horno Hoftman en las Ladrilleras del Municipio de Ocaña en Norte de Santander. In XX Congreso Peruano de Ingeniería Mecánica, Eléctrica y ramas afines CO-NIMERA (p. 9). Lima.
- G. Guerrero Gómez, D.E. Marrugo Carrazo, and J.A. Gómez Camperos 2015** Desarrollo de instrumento virtual enfocado en la adquisición de da-

tos para generar perfiles de temperatura en hornos. Revista Ingenio-UFPSO. Vol 8, 47–47.

**G. Guerrero Gómez, E. Espinel Blanco and H.G. Sánchez Acevedo 2017** Análisis de temperaturas durante la cocción de ladrillos macizos y sus propiedades finales. Revista Tecnura 21(51), 118–131.

**G. Guerrero Gómez, E. Espinel Blanco and N. Escobar Mora 2018** Curva de cocción de la arcilla en la ladrillera el recreo. Revista Colombiana de Tecnologías de Avanzada. 1(31), 35–41.

**Harish, H., Gowda, Y. K. (2014).** Thermal analysis of clay pot in pot refrigerator, Int. J. Mod. Eng. Res, 4, 50-55.

**Instituto Colombiano De Normas Técnicas NTC (2000).** Unidades de Mampostería de Arcilla Cocida. ladrillos y bloques crámicos NTC 4205. Bogota D.C.,

**Markowich, P. (2007).** Applied Partial Differential Equations: A Visual Approach. Berlín-Heidelberg: Springer-Verlag.

**Ministerio De Ambiente, Vivienda y Desarrollo Territorial (2010),** Protocolo para el Control y Vigilancia de la Contaminación Atmosférica Generada por Fuentes Fijas. Bogota D.C.

**Morton, K. W, (2005),** Numerical Solution of Partial Differential Equations, New York, United States of America: Cambridge University Press.

**Pandey, R., Pesala, B. (2016).** Heat and mass analysis of a pot-in-pot refrigerator using Reynolds flow model, J. Th. Sci. Eng. Appl, 8(3).

**Stephenson, G. (1975).** Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales. España: Editorial Reverte

**Smoller, J. (1982).** ShockWaves and Reaction Diffusion Equations, Springer-Verlag, Grundlehren Series, 258, 608 pp,



## APÉNDICE

En esta sección se realiza un listado de los algoritmos desarrollados a lo largo del libro.

### **1. Algoritmo en Matlab para solucionar por el método explícito la ecuación que modela la transferencia de calor en el horno Hoffman en una dimensión.**

#### **Datos iniciales**

```
x1=0; %Dato inicial en distancia
x2=1; % Dato final en distancia
t=43200; % Tiempo final en segundos
n=50; %Número total de nodos
m=2000; %Número total de iteraciones en el tiempo
dt=t/m; %Paso temporal
dx=x2/n; %Paso espacial
b=0.000004; % Constante de transferencia.
s = b*dt/(dx^2) %Constante de convergencia.
```

**Definición de la Matriz**  $\begin{pmatrix} 1-2s & s & 0 \\ s & 1-2s & s \\ 0 & s & 1-2s \end{pmatrix}$ .

```
A=zeros(n,n);
for i = 1:n
    for j = 1:n
        if i==j
            A(i,j) = 1.- 2.*s;
        elseif i==j-1
            A(i,j) = s;
        elseif i==j+1
            A(i,j) = s;
        else
            A(i,j) = 0.;
        end
    end
end
end
```

**Definición del vector**  $\begin{pmatrix} sf(t_0) \\ 0 \\ sg(t_4) \end{pmatrix}$ .

$b = \text{zeros}(n,1);$

$b(1) = s*19.92;$

$b(n) = s*30.44;$

### Discretización de la malla.

$x = \text{linspace}(x1+dx, x2-dx, n);$

### Definición de las condiciones iniciales.

$U\_tk = 25.*\text{ones}(n,1);$

### Definición de la matriz de temperatura

$U = \text{zeros}(n,m);$

$tvec = \text{zeros}(m,1);$

$U(:,1) = U\_tk;$

$tvec(1) = t;$

### Solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1-2s & s & 0 \\ s & 1-2s & s \\ 0 & s & 1-2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} sf(t_0) \\ 0 \\ sg(t_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix}$$

for k = 1:m

t = t+dt;

U Tk\_1 = A\*U Tk + b;

U(:,k) = U Tk\_1;

U Tk = U Tk\_1;

tvec(k) = t;

if k<3600

b(1) = 19.92\*s;

```
b(n) = 30.44*s;  
end  
if 3600<= k && k<7200  
    b(1) = s*19.97;  
    b(n) = s*32.27;  
end  
if 7200<=k && k<10800  
    b(1) = s*19.68;  
    b(n) = s*33.64;  
end  
if 10800 <=k && k<14400  
    b(1) = s*19.48;  
    b(n) = s*36.06;  
end  
if 14400 <=k && k<18000  
    b(1) = s*19.65;  
    b(n) = s*39.75;  
end  
if 18000<=k && k<21600  
    b(1) = s*20.02;  
    b(n) = s*49.75;  
end  
if 21600<=k && k<25200  
    b(1) = s*19.48;  
    b(n) = s*57.90;  
end  
if 25200<=k && k<28800  
    b(1)=s*20.02;  
    b(n)=s*81.91;  
end  
if 28800<=k && k<32400  
    b(1) = s*21.42;  
    b(n) = s*134.41;  
end  
if 32400<=k && k<36000  
    b(1) = s*24.33;  
    b(n) = s*343.20;  
end  
if 36000<=k && k<39600  
    b(1) = s*35.89;  
    b(n) = s*668.17;  
end  
if 39600<= k
```

```

b(1) = s*48.47;
b(n) = s*594.34;
end

```

```

end

```

## Graficas del perfil de temperatura

```

figure(1)
plot(x,U(:,300),'-',x,U(:,450),'-',x,U(:,2000),'-')
title('Temperatura con el método explícito')
legend('Temp despues de 300 iteraciones', 'Temp despues de 900 iteraciones', 'Temp despues de 2000 iteraciones')
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Temperatura (°C)')

```

## Comportamiento en tres dimensiones de la temperatura

```

figure(2)
mesh(tvec,x,U)
title('Variacion de la temperatura con el Temperatura con el método explícito')
ylabel('r')
zlabel('Temperature')

```

## Comparación de la solución analítica y el método explícito

```

figure(3)
plot(x,U(:,2000),'-',x,(30.25-19.85)*x+19.85,'-')
title('Temperatura con el método explícito')
legend('Temp en la iteración 2000', 'Temp en estado estacionario')
xlabel('Espacio (cm)')
ylabel('Temperatura (°C)')

```

## Error de aproximación del método explícito

```

figure(4)
plot(x,U(:,2000)-((30.25-19.85)*x+19.85),'-')
title('Error absoluto del método explícito frente al estado estacionario')
xlabel('Espacio (cm)')
ylabel('Temperatura (°C)')

```

## 2. Algoritmo en Matlab para solucionar por el método implícito de la ecuación que modela la transferencia de calor en el horno Hoffman en una dimensión.

### Datos iniciales

```
x1=0; %Dato inicial en distancia
x2=1; % Dato final en distancia
t=43200; % Tiempo final en segundos
n=50; %Número total de nodos
m=2000; %Número total de iteraciones en el tiempo
dt=t/m; %Paso temporal
dx=x2/n; %Paso espacial
b=0.000004; % Constante de transferencia.
s = b*dt/(dx^2) %Constante de convergencia.
```

**Definición de la Matriz**  $\begin{pmatrix} 1 + 2s & -s & 0 \\ -s & 1 + 2s & -s \\ 0 & -s & 1 + 2s \end{pmatrix}$

```
A=zeros(n,n);
for i = 1:n
    for j = 1:n
        if i==j
            A(i,j) = 1. + 2.*s;
        elseif i==j-1
            A(i,j) = -s;
        elseif i==j+1
            A(i,j) = -s;
        else
            A(i,j) = 0.;
        end
    end
end
```

**Definición del vector**  $\begin{pmatrix} sf(t_0) \\ 0 \\ sg(t_4) \end{pmatrix}$ .

```
b= zeros(n,1);
b(1) = s*19.92;
b(n)= s*30.44;
```

**Discretización de la malla.**

```
x = linspace (x1+dx,x2-dx, n)';
```

**Definición de las condiciones iniciales.**

```
U_tk = 25.*ones(n,1);
```

**Definición de la matriz de temperatura**

```
U=zeros(n,m);
tvec=zeros(m,1);
U(:,1) = U_tk;
tvec(1) = t;
```

**Solución del sistema**

$$\begin{pmatrix} 1 + 2s & -s & 0 \\ -s & 1 + 2s & -s \\ 0 & -s & 1 + 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sf(t_0) \\ 0 \\ sg(t_4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix}$$

```
for k = 1:m
    t = t+dt;
    c = U_tk + b;
    U_tk_1 = A\c;
    U(:,k) = U_tk_1;
    U_tk = U_tk_1;
    tvec(k) = t;
    if k<3600
        b(1)=19.92*s;
        b(n)=30.44*s;
    end
    if 3600<=k && k<7200
        b(1)=s*19.97;
        b(n)=s*32.27;
    end
    if 7200<=k && k<10800
        b(1)=s*19.68;
        b(n)=s*33.64;
```

```
end
if 10800 <=k && k<14400
  b(1)=s*19.48;
  b(n)=s*36.06;
end
if 14400 <=k && k<18000
  b(1)=s*19.65;
  b(n)=s*39.75;
end
if 18000<=k && k<21600
  b(1)=s*20.02;
  b(n)=s*49.75;
end
if 21600<=k && k<25200
  b(1)=s*19.48;
  b(n)=s*57.90;
end
if 25200<=k && k<28800
  b(1)=s*20.02;
  b(n)=s*81.91;
end
if 28800<=k && k<32400
  b(1)=s*21.42;
  b(n)=s*134.41;
end
if 32400<=k && k<36000
  b(1)=s*24.33;
  b(n)=s*343.20;
end
if 36000<=k && k<39600
  b(1)=s*35.89;
  b(n)=s*668.17;
end
if 39600<= k
  b(1)=s*48.47;
  b(n)=s*594.34;
end

end
```

## Graficas del perfil de temperatura

```
figure(1)
plot(x,U(:,300),'-',x,U(:,450),'-',x,U(:,2000),'-')
title('Temperatura con el método explicito ')
legend('Temp despues de 300 iteraciones', 'Temp despues de 900 iteraciones', 'Temp despues de 2000 iteraciones')
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Temperatura ( $\infty$ c)')
```

## Comportamiento en tres dimensiones de la temperatura

```
figure(2)
mesh (tvec,x,U)
title (' Variacion de la temperatura con el Temperatura con el método implícito')
ylabel ('r')
zlabel ('Temperature')
```

## Comparación de la solución analítica y el método implícito

```
figure(3)
plot(x,U(:,2000),'-',x,(30.25-19.85)*x+19.85,'-')
title('Temperatura con el método explicito ')
legend ('Temp en la iteración 2000', 'Temp en estado estacionario')
xlabel('Espacio (cm)')
ylabel('Temperatura ( $\infty$ c)')
```

## Error de aproximación del método implícito

```
figure(4)
plot(x,U(:,2000)-((30.25-19.85)*x+19.85),'-')
title('Error absoluto del método explícito frente al estado estacionario')
xlabel('Espacio (cm)')
ylabel('Temperatura ( $\infty$ c)')
```



### 3. Algoritmo en Matlab para solucionar por el método explícito de la ecuación que modela la transferencia del calor en un cilindro en dos dimensiones.

#### Datos iniciales

```
T=2000; % Tiempo final en segundos
n = 100; %Número total de nodos
m = 25000; %Número total de iteraciones en el tiempo
dt=t/m; %Paso temporal
rc = 15; %Radio en milímetros
dr=rc/(n+1);%Paso espacial
dt=T/m; %Paso temporal
cond = 0.08; % Constante de transferencia.
s = cond*dt/(dr^2); %Constante de convergencia.
```

#### Definición de la Matriz

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{s}{2j} - s & \frac{s}{2j} + s & 0 \\ s - \frac{s}{2j} & 1 - 2s & s + \frac{s}{2j} \\ 0 & s - \frac{s}{2j} & 1 - 2s \end{pmatrix}$$

```
A=zeros(n,n);
for i = 1:n
    for j = 1:n

        if i==j
            A(i,j) = 1. - 2.*s;
        elseif i==j-1
            A(i,j) = s + s/(2.*i);
        elseif i==j+1
            A(i,j) = s - s/(2.*i);
        else
            A(i,j) = 0.;
        end
    end
end
A(1,1) = 1-s-s/2;
```

**Definición del vector**  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20(\frac{s}{2j} + s) \end{pmatrix}$

```
b = zeros(n,1);
b(n) = (s+s/(2*n))*20.;
```

### Discretización de la malla.

```
r = linspace (r1+dr,r2-dr, n)';
```

### Definición de las condiciones iniciales.

```
TTk = 52.*ones(n,1);
Temp=zeros(n,m);
tvec=zeros(m,1);
Temp(:,1) = TTk;
```

### Solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{s}{2j} - s & \frac{s}{2j} + s & 0 \\ s - \frac{s}{2j} & 1 - 2s & s + \frac{s}{2j} \\ 0 & s - \frac{s}{2j} & 1 - 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20(\frac{s}{2j} + s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix}$$

```
for k = 1:m
    t = t+dt;
    %c = TTk + b;
    TTk_1 = A*TTk + b;
    Temp(:,k) = TTk_1;
    TTk = TTk_1;
    tvec(k) = t;
end
```

## Graficas del perfil de temperatura

```
figure(1)
plot(r,Temp(:,100),'-',r,Temp(:,6000),'-',r,Temp(:,16600),'-')
title(' Temperatura con el método explicito')
xlabel('r')
ylabel('T')
legend('T=100','T=6000','T=16600')
```

## Comportamiento en tres dimensiones de la temperatura

```
figure(2)
mesh (tvec,r,Temp)
title (' Variación de la temperatura con el Temperatura con el método expli-
cito')
xlabel ('t')
ylabel ('r')
zlabel ('Temperatura')
```

## Comparación de la solución analítica y el método explícito

```
figure(3)
plot(tvec,Temp(30,:),'',tvec,20+32*exp((-tvec)/486.25),'')
title('Temperatura en el centro del cilindro con el método explicito')
legend('Aproximación','Modelo')
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Temperatura (°C)')
```

## 4. Algoritmo en Matlab para solucionar por el método implícito de la ecuación que modela la transferencia del calor en un cilindro en dos dimensiones.

### Datos iniciales

```
T =2000; % Tiempo final en segundos
n = 100; %Número total de nodos
m = 25000; %Número total de iteraciones en el tiempo
dt=t/m; %Paso temporal
```

```
rc = 15; %Radio en milímetros
dr=rc/(n+1);%Paso espacial
dt=T/m; %Paso temporal
cond = 0.08; % Constante de transferencia.
s = cond*dt/(dr^2); %Constante de convergencia.
```

**Definición de la Matriz**

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{s}{2j} + s & -\frac{s}{2j} - s & 0 \\ -s + \frac{s}{2j} & 1 + 2s & -s - \frac{s}{2j} \\ 0 & -s - \frac{s}{2j} & 1 + 2s \end{pmatrix}$$

```
for i = 1:n
    for j = 1:n

        if i==j
            A(i,j) = 1. + 2.*v;
        elseif i==j-1
            A(i,j) = -v - v/(2.*i);
        elseif i==j+1
            A(i,j) = -v + v/(2.*i);
        else
            A(i,j) = 0.;
        end
    end
end
end
A(1,1) = 1+v+v/2;
```

**Definición del vector**

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20(-\frac{s}{2j} - s) \end{pmatrix}$$

```
b= zeros(n,1);
b(n) = -(-v-v/(2*n))*20.;
```

### Discretización de la malla.

```
r = linspace (r1+dr,r2-dr, n)';
```

### Definición de las condiciones iniciales.

```
T Tk = 52.*ones(n,1);
Temp=zeros(n,m);
tvec=zeros(m,1);
Temp(:,1) = T Tk;
```

### Solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{s}{2j} + s & -\frac{s}{2j} - s & 0 \\ -s + \frac{s}{2j} & 1 + 2s & -s - \frac{s}{2j} \\ 0 & -s - \frac{s}{2j} & 1 + 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20(-\frac{s}{2j} - s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix}$$

```
for k = 1:m
    t = t+dt;
    c = T Tk + b;
    T Tk_1 = A\c;
    Temp(:,k) = T Tk_1;
    T Tk = T Tk_1;
    tvec(k) = t;
end
```

### Graficas del perfil de temperatura

```
figure(1)
plot(r,Temp(:,300),'-',r,Temp(:,5000),'-',r,Temp(:,25000),'-')
title('Temperatura con el mÈtodo implìcito')
xlabel('r')
ylabel('T')
legend('T=300','T=5000','T=25000')
```

### Comportamiento en tres dimensiones de la temperatura

```
figure(2)
mesh (tvec,r,Temp)
title (' VariaciÛn de la temperatura con el Temperatura con el mÈtodo implì-
cito')
ylabel ('r')
zlabel ('Temperature')
```

## Comparación de la solución analítica y el método implícito

```
figure(3)
plot(tvec,Temp(56,:),'',tvec,20+32*exp((-tvec)/486.25),'')
title('Temperatura en el centro del cilindro con el método implícito')
legend('Aproximación','Modelo' )
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Temperatura (°C)')
```



