

La investigación científica requiere de la recopilación y análisis de datos, los cuales pueden llegar a ser determinantes en la consecución de los objetivos trazados. A menudo, los investigadores se enfrentan a un grupo de interrogantes relacionadas con la recolección de la información, su procesamiento e interpretación. El presente libro está dirigido a aquellos investigadores que desean incorporar el uso de la inferencia estadística como una herramienta en su quehacer científico. Se aporta, además de los fundamentos teóricos necesarios, un grupo significativo de ejemplos que ayudarán al lector a descubrir las múltiples aplicaciones de la estadística inferencial en diversas áreas de la ciencia, desde los estudios sociales y humanísticos, hasta los gerenciales o de ingeniería. Se inicia con una sistematización de los elementos fundamentales de la teoría de probabilidades que sustentan los métodos y prácticas que se describen. El muestreo, las pruebas de hipótesis y la estimación son abordados con un enfoque práctico. Por último, se exponen elementos de estadística inferencial neutrosófica, la cual permite el manejo estadístico de las indeterminaciones y los sesgos en la información recopilada, asociados a la mala calidad de los datos o al grado de neutralidad que puedan tener por su propia naturaleza.



Edelmery de Lourdes Muñoz Aveiga, Doctora en Ciencias de la Educación, Especialización Pedagogía, Magíster en Educación y Desarrollo Social, Especialista en Diseño Curricular por Competencias. Docente Investigadora de la Facultad de Psicología de la Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí, Ecuador. Tutora de varias tesis de grado y de proyectos relacionados con la Gestión Social del Conocimiento. Autora de diversas publicaciones científicas. Ha participado como ponente en diferentes eventos nacionales e internacionales.

Email: edelmerymuoz@yahoo.es **https://orcid.org/0000-0001-5909-3430**



Evelyn Jazmín Henríquez Antepara, Licenciada en Ciencias de la Educación con especialización en Comercio Exterior, Magister en Gerencia y Docencia en Educación Superior, Doctorando en Ciencias de la Educación. Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad de Guayaquil, Ecuador. Autora de numerosos artículos y libros, así como, ponente en varios eventos científicos. Tutora de varias tesis de grado y proyectos tecnológicos.

Email: jazmin19803@hotmail.com **https://orcid.org/0000-0001-7465-2376**



Mérida Rocío Campoverde Méndez, Licenciada en Lengua Inglesa, mención Lingüística y Literatura, Magister en Diseño Curricular, y Doctorando en Ciencias de la Educación en la ciudad de Rosario- Argentina. Docente en la Facultad de Educación en la Universidad Laica Vicente Rocafuerte, Ecuador. Autora de varias publicaciones científicas y ponencias sobre la enseñanza del Idioma Inglés, la Evaluación Educativa y la Calidad de la Educación. Tutora de varias tesis de pregrado para la Carrera de Inglés.

Email: rcampoverdem@hotmail.com **https://orcid.org/0000-0001-8848-7535**



Wilber Ortiz Aguilar. Doctor en Ciencias Pedagógicas, Máster en Ciencias de la Educación, Especialista en el área de matemáticas. Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad de Guayaquil, Ecuador. Coevaluador par académico del área de matemáticas. Tutor de varias tesis de grado, de maestría, y de proyectos relacionados con la Gestión Social del Conocimiento. Ha socializado de manera sistemática sus resultados investigativos en eventos nacionales e internacionales. Autor de diversos libros y artículos científicos.

E-mail: wilber.ortiza@ug.edu.ec **https://orcid.org/0000-0002-9373-5983**



Yeny Marlies Traba Montejo, Máster en Metodología del Entrenamiento Deportivo para la Alta Competencia, Licenciada en Cultura Física. Cursa la Maestría en Idiomas, mención en Inglés. Tutora de varias tesis de grado y proyectos deportivos. Ponente en disímiles eventos científicos nacionales e internacionales. Autora de varios artículos y libros científicos en el área de la Educación Física.

Email: trabayeny@gmail.com **https://orcid.org/0000-0002-0543-5738**



Probabilidades y estadística
pilares fundamentales de la investigación científica



Probabilidades y estadística pilares fundamentales de la investigación científica



Probabilidades y estadística: pilares fundamentales de la investigación científica

Diseño: Ing. Erik Marino Santos Pérez.

Traducción: Prof. Dr. C. Ernan Santiesteban Naranjo.

Corrección de estilo: Prof. Dra. C. Kenia María Velázquez Avila.

Diagramación: Prof. Dr. C. Ernan Santiesteban Naranjo.

Director de Colección Textos para universidad: MSc. Dania Acosta Luís.

Jefe de edición: Prof. Dra. C. Kenia María Velázquez Avila.

Dirección general: Prof. Dr. C. Ernan Santiesteban Naranjo.

© Dra. Edelmary de Lourdes Muñoz Aveiga.

Mag. Evelyn Jazmín Henríquez Antepara.

Mag. Mérida Rocío Campoverde Méndez.

Dr. C. Wilber Ortiz Aguilar.

MSc. Yeny Marlies Traba Montejo.

© **Sobre la presente edición**

Esta obra ha sido evaluada por pares académicos a doble ciegos

Lectores/Pares académicos/Revisores: 0013 & 0022

Editorial Tecnocientífica Americana

Domicilio legal: calle 613nw 15th, en Amarillo, Texas.

ZIP: 79104

Estados Unidos de América, 2020

Teléfono: 7867769991

Código IBIC: PBT

ISBN: 978-0-3110-0004-3



Sello de calidad 6000/7000

SPI

Scholarly Publishers Indicators

Books in Humanities and Social Sciences

Copyright © 2011



Contenido

Capítulo 1. Introducción a la teoría de probabilidades.....	1
1.1. Definición clásica de probabilidad.....	1
1.1.1. Eventos mutuamente excluyentes.....	8
1.1.2. Eventos independientes.....	9
1.2. Definición estadística de probabilidad.....	12
1.3. Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad.....	16
1.3.1. Distribución empírica de probabilidad de una variable aleatoria.....	17
1.3.2. Distribución empírica de probabilidad de una variable aleatoria discreta.....	18
1.3.3. Distribución empírica de probabilidad de una variable aleatoria continua.....	20
1.3.4. Distribución teórica de probabilidad de una variable aleatoria.....	21
1.3.5. Distribución de probabilidad discreta.....	21
1.3.6. Distribución de probabilidad continua.....	24
1.3.7. Distribución normal.....	25
1.3.8. Distribución <i>t-Student</i>	30
Capítulo 2: Muestreo y estimación.....	31
2.1. Población y muestra.....	31
2.1.1. Razones para muestrear.....	32
2.2. Muestreo.....	34
2.2.1. Muestreo aleatorio simple.....	35
2.2.2. Muestreo sistemático.....	35
2.2.3. Muestreo estratificado.....	36
2.2.4. Muestreo por conglomerados.....	37
2.2.5. Error de muestreo.....	38
2.3. Estimación de parámetros poblacionales.....	39
2.3.1. Tipos de estimaciones.....	40
2.4. Distribuciones muestrales.....	42
2.4.1. Distribución muestral de la media.....	43
2.4.2. Teorema del límite central.....	44
2.5. Estimación por intervalos de confianza.....	47
2.5.1. Intervalo de confianza para σ^2 conocida.....	47
2.5.2. Intervalo de confianza para la media con σ^2 conocida.....	50



2.5.3. Intervalo de confianza para una muestra grande.....	52
2.5.4. Intervalo de confianza para la proporción con muestras grandes.....	52
2.5.5. Representatividad de la muestra	55
2.5.6. Tamaño de la muestra.....	55
2.5.7. Cálculo del tamaño de muestra para estimar una media.....	56
2.5.8. Cálculo del tamaño de muestra para la proporción de una población	58
Capítulo 3. Pruebas de hipótesis	58
3.1 Introducción a las pruebas de hipótesis.....	58
3.2 Pruebas de significancia de una y dos colas	61
3.2.1. Valor p en la prueba de hipótesis	64
3.3. Pruebas de hipótesis paramétricas.....	65
3.3.1. Distribución de muestreo para la diferencia entre dos parámetros de población	66
3.3.2. Pruebas para diferencias entre medias: muestras grandes.....	67
3.3.3. Dósimas para comparar las medias de dos distribuciones normales con varianzas desconocidas pero iguales	69
3.3.4. Varianzas desconocidas pero diferentes	71
3.3.5. Pruebas de hipótesis para la proporción	71
3.4 Prueba de hipótesis no paramétricas o de libre distribución que hacen uso de la distribución (X ²).....	72
3.4.1. Tablas de contingencia.....	74
3.4.2. Características de la distribución ji cuadrada	74
Capítulo 4. Estadística inferencial neutrosófica	76
4.1. Introducción a las probabilidades y estadística neutrosóficas	76
4.1.1. Estadística neutrosófica	76
4.1.2. Números neutrosóficos clásicos.....	77
4.1.3. Números estadísticos neutrosóficos.....	81
4.1.4. Probabilidad neutrosófica	82
4.2. Distribución binomial neutrosófica	82
4.3. Distribución multinomial neutrosófica	86
4.4. Distribución normal neutrosófica.....	88
4.4.1. Neutrosificación de otras distribuciones	91
4.5. Pruebas de hipótesis neutrosóficas.....	91
4.5.1. Prueba de errores en hipótesis neutrosófica	95



4.5.2. Hipótesis alternativas.....	97
4.6. Intervalo de confianza neutrosófico	98
Referencias	110

Capítulo 1. Introducción a la teoría de probabilidades

La teoría de probabilidades surgió por la necesidad de explicar y modelar matemáticamente los elementos y fenómenos relacionados con juegos de azar.

“Quizás fue la insaciable sed del ser humano por el juego, lo que condujo al desarrollo temprano de la teoría de la probabilidad. En un esfuerzo por aumentar sus triunfos, algunos pidieron a los matemáticos que les proporcionaran las estrategias óptimas para los diversos juegos de azar. Algunos de los matemáticos que brindaron tales estrategias fueron Pascal, Leibniz, Fermat y James Bernoulli” (Walpole, 2012).

El alcance de estos primeros estudios probabilísticos dio lugar al desarrollo de la inferencia estadística con sus predicciones y generalizaciones. Esta teoría abarcó diversas ramas de las ciencias. Y es que la aleatoriedad de los sistemas universales se manifiesta desde su naturaleza misma, desde la gran variedad de escenarios en que se manifiestan, o incluso aparece ligada a los errores inherentes a los procesos de estudio y medición que son objeto por parte de la ciencia.

Se pudo de esta forma incursionar en el estudio de los fenómenos aleatorios asociados a las ciencias sociales, la administración, la ingeniería y la investigación científica. Teniendo en cuenta esta evolución histórica, a continuación, se exponen las principales definiciones ligadas al concepto de probabilidad, su evolución y aplicaciones, las cuales resultan fundamentales para el desarrollo de los próximos contenidos de este libro.

1.1. Definición clásica de probabilidad

En la vida cotidiana se utilizan frecuentemente términos relacionados con la palabra probabilidad, aunque es evidente que se hace sin el rigor científico requerido. Es común escuchar expresiones que presuponen un conocimiento incompleto sobre un desenlace futuro o resultado posible de alguna decisión que se evidencia con el uso del referido término en esa expresión. Incluso se abusa de su utilización para evadir respuestas comprometedoras, y se connota la incertidumbre que implican las expresiones: “probablemente”, “es muy probable”, y “es poco probable”.

Como se puede apreciar, estos términos involucran un cierto nivel (no establecido o declarado) de seguridad respecto a la respuesta que espera el interlocutor. Pero lejos del efecto de subjetividad que puede tener el uso insano de esta terminología, las probabilidades y su estudio contribuirá a revelar la regularidad subyacente en lo posible, modelarla y usarla en beneficio de la ciencia.

Se puede afirmar que la teoría de probabilidades es el conjunto de herramientas y métodos matemáticos diseñados para el análisis del comportamiento de los fenómenos

aleatorios. La noción de aleatoriedad, por su parte, está asociada a la posibilidad de la observación de múltiples resultados diferentes para un conjunto de acciones y condiciones idénticas de un proceso, experimento o decisión. Lo aleatorio deviene el opuesto de lo determinístico.

El ambiente determinista garantiza resultados iguales, conocidos o perfectamente determinados para condiciones constantes. La aleatoriedad implica un número finito o infinito de resultados posibles para un mismo conjunto de condiciones.

La primera definición de probabilidad, atribuida a Laplace (1749-1827) y denominada “definición clásica”, por razones históricas, plantea que: “La probabilidad de un determinado suceso es el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles” (Laplace, 1850).

De una manera más rigurosa se expresa que dado un suceso A tal que de n casos posibles ocurre n_A veces; entonces, se entiende por P(A):

$$P(A) = \frac{n_A}{n} \quad (\text{Fórmula 1})$$

Se puede afirmar entonces que la probabilidad de un evento A es la expresión numérica de su posibilidad de ocurrencia y se denota por P(A). Al cumplirse la relación evidente $n_A \leq n$, toda vez que A constituye un subconjunto del universo de n casos posibles, entonces resulta obvio que $P(A) \in [0, 1]$.

Ejemplo 1: Lanzamiento de un dado

Se desea calcular la probabilidad de que el lanzamiento de un dado arroje un número par (ver tabla 1). Acorde con esta definición se tendrá:

Casos asociados		
	Casos posibles (número del 1 al 6)	Casos favorables (número par)
	1	
	2	X
	3	
	4	X
	5	
	6	X
Cantidad	6	3
	n	n_A

Tabla 1. Experimento: lanzamiento de un dado

En este caso:

$$n = 6 \text{ y } n_A = 3$$

Por tanto:

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

El valor calculado de probabilidad se puede leer de diferentes formas, aunque todas indican el mismo resultado.

- Existe una probabilidad del 50 % de que salga un número par al lanzar un dado.
- La probabilidad de que se observe un número par, al lanzar un dado, es de 0.5.

Resulta necesario introducir una serie de conceptos y sus respectivas definiciones, en aras de profundizar en el conocimiento de la probabilidad, tal como se estudió desde este enfoque. En muchos de los casos se propondrán conceptos alternativos para facilitar su identificación, debido a la variedad de términos similares utilizados en la bibliografía especializada.

Experimento aleatorio

Experimento del cual no se puede conocer a priori cuál resultado arrojará, aunque se repitan las condiciones iniciales. En el ejemplo, lanzamiento del dado, puede observarse cualquiera de las 6 caras, aunque el lanzamiento se realice varias veces por una misma persona, sobre la misma área de la mesa, con el mismo tiempo e intensidad de agitación del cubilete.

Suceso o evento

Subconjunto de resultados de un experimento aleatorio. En el ejemplo, lanzamiento del dado: “Que resulte un número par” $A = \{2, 4, 6\}$

Suceso elemental o evento unitario

Cada uno de los resultados posibles del experimento aleatorio; es decir, está compuesto por un único elemento del total de los resultados posibles. En el ejemplo, lanzamiento del dado: “Que resulte el número dos” $B = \{2\}$.

Espacio muestral

Conjunto de todos los sucesos elementales del experimento aleatorio. En el ejemplo, lanzamiento del dado: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Suceso seguro o evento cierto

Suceso que siempre se observará si se realiza el experimento, por tanto, coincide con el espacio muestral, ya que al realizar el experimento aleatorio se obtendrá con seguridad absoluta, alguno de los posibles resultados de los sucesos elementales que contiene S. En el ejemplo, lanzamiento del dado: "Que resulte un número entero entre 1 y 6" $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Suceso imposible o evento nulo

Es el que no tiene ningún elemento del espacio muestral, y por tanto no ocurrirá nunca. En el ejemplo, lanzamiento del dado: "Que resulte el número diez" $C = \emptyset$.

Complemento de un suceso o evento

Se refiere a la no ocurrencia de un suceso. En el ejemplo, lanzamiento del dado: "Que no resulte un número par" $A^c = \{1, 3, 5\}$.

Los resultados de un experimento aleatorio se pueden representar de manera gráfica mediante un diagrama. El inglés Venn (1834-1923) creó los diagramas que hasta hoy se utilizan para representar gráficamente los resultados de un experimento aleatorio.

Para construir un diagrama de Venn, se enmarca un espacio rectangular, el cual representa el total de posibles resultados (S). Los eventos se representan mediante áreas circulares, que se dibujan dentro del rectángulo, las cuales corresponden a la probabilidad del evento, aunque su tamaño no es necesariamente proporcional a esta.

En el siguiente diagrama de Venn (figura 1) se representan los eventos especificados en cada una de las definiciones anteriores.

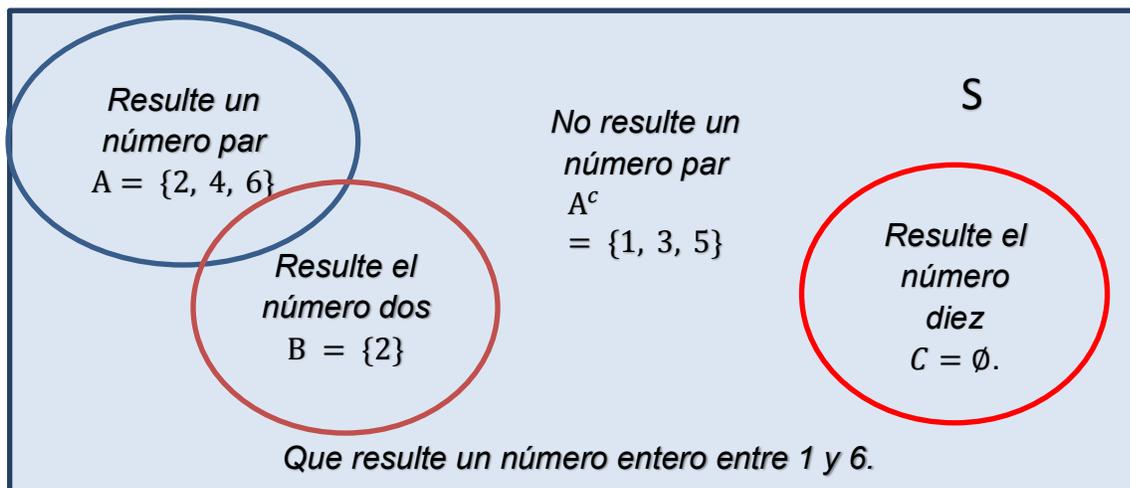


Figura 1. Eventos asociados al ejemplo: lanzamiento de un dado

Nótese que el rectángulo representa al conjunto de todos los sucesos elementales del experimento y, por supuesto, al evento cierto: “Que resulte un número entero entre 1 y 6”, ya que representa un suceso cierto o seguro para este experimento.

Se circularon los distintos sucesos o eventos que sirvieron para ilustrar algunas definiciones y se incluyeron sus nombres solo para ilustrar la aplicación del diagrama. En lo adelante cada evento contendrá solo los valores numéricos asociados, tal y como se hace en la práctica al aplicar diagramas de Venn.

Otro detalle importante en esta representación gráfica, resulta el hecho de que los eventos: “Que resulte un número par” y “Que resulte el número 2” se superponen parcialmente.

¿Por qué esta superposición gráfica intencionada?

Porque representa la intersección entre ambos eventos. Si se utiliza la notación de la teoría de conjuntos se puede expresar como:

$$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{2\} = \{2\}$$

El número 2 es un elemento común para ambos eventos, luego 2 es la intersección entre los eventos A y B. Este evento se enuncia como: “Que resulte un número par y al mismo tiempo, que resulte el número 2”. A este tipo de eventos se les denomina evento intersección.

De lo anterior se deduce claramente que ambos eventos pueden ocurrir de forma simultánea, o lo que es lo mismo, que la ocurrencia de uno no excluye la ocurrencia del otro.

Sin embargo, los eventos A y A^c no tienen elementos en común, esto quiere decir que el uno excluye al otro. Este tipo de eventos se conocen como mutuamente excluyentes. Este caso resulta evidente, ya que A^c se define como la no ocurrencia de A.

Es significativo señalar el hecho de que, siendo A^c un evento, no se encerró en un área circular como se explicó anteriormente. Esto resulta válido porque A^c representa a todos los elementos contenidos en el espacio muestral que no pertenecen a A, gráficamente esto es, toda el área del rectángulo, excepto el círculo que representa a A.

Por cuanto, ambos completan el área total del rectángulo. Se puede decir entonces que estos eventos son exhaustivos pues la suma de sus elementos equivale al espacio muestral.

Posteriormente se tratarán algunos elementos teóricos acerca del cálculo de probabilidades para estos tipos de eventos y se ilustrarán además, ejemplos de casos excluyentes, no necesariamente complementarios.

Suponga ahora un evento: “Que resulte un número menor que 4” $D = \{1, 2, 3\}$, luego los eventos: “Que resulte un número menor que 4” o “Que resulte un número par”. Estos se representan como:

$$D \cup A = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

Este tipo de eventos se conoce como evento unión y se lee como la ocurrencia del evento D o del evento A, o sea, que si como resultado del experimento se obtiene algún valor contenido en cualquiera D o A, este resultado igualmente pertenece al evento $D \cup A$ y se puede decir que este último también ocurrió. En la figura 2 se representan los eventos A y D.

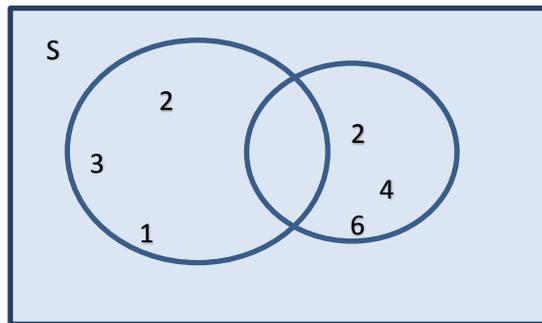


Figura 2. Eventos A y D

Para extraer el máximo provecho del diagrama presentado, se muestran a continuación algunas deducciones de su interpretación aplicando la teoría de conjuntos. Esto resultará muy útil a la hora de realizar cálculos de probabilidades en el futuro.

$$D^c = \{4, 5, 6\}$$

$$D \cup A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$(D \cap A)^c = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

$$D \cap A^c = \{1, 3\}$$

$$D \cup A^c = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$D^c \cap A = \{4, 6\}$$

$$D^c \cup A = \{2, 4, 5, 6\}$$

$$D^c \cap A^c = \{5\}$$

$$D^c \cup A^c = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

Las probabilidades asociadas para cada uno de los eventos hasta aquí descritos se calculan mediante la fórmula 1 (página 2.), ya que resulta muy sencillo determinar la cantidad de casos favorables para cada uno de ellos, a partir del análisis desarrollado anteriormente. Por lo que resulta suficiente ilustrarlo para dos de los casos solamente.

$$P(D^c) = \frac{n_A}{n} = \frac{1}{6}$$

$$P(D \cap A^c) = \frac{n_A}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Antes de calcular que la probabilidad del evento no resulte un número par en el lanzamiento, o lo que es lo mismo, complemento de un resultado par $P(A^c)$, se hace necesario reflexionar acerca de algunos elementos teóricos. El universo de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio también se puede definir desde el punto de vista de un suceso, incluso, desde un suceso elemental. Téngase en cuenta que todo el espacio muestral está contenido en la unión de un evento y su complemento.

Ello implica que todo evento tiene un 100% de probabilidad de ocurrir o no ocurrir. Al lanzar un dado, la probabilidad de que resulte un número 2 o un número diferente de 2 es 1, pues aquí están contenidos todos los posibles resultados. Esta propiedad se denomina regla de complementariedad y se expresa:

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

Esta regla se utiliza para determinar la probabilidad de que un evento ocurra. Así se le resta a 1 la probabilidad de que no lo haga. Su utilidad radica en que, en muchas ocasiones, resulta más fácil calcular la probabilidad de que un evento suceda, determinando la probabilidad de que no suceda. Estos eventos son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos (la suma de sus probabilidades es 1).

Luego, para el ejemplo anterior, se tiene:

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{n_A}{n} = 1 - \frac{3}{6} = \frac{6-3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Pero, ¿cómo se calculan las probabilidades de eventos compuestos, cuando los datos que se tienen son las probabilidades de cada suceso elemental? Para el caso en que se cuenta con las probabilidades de los eventos unitarios en lugar de los valores de n y n_A , se requiere conocer la relación existentes entre los eventos, aplicar las propiedades y fórmulas que se presentan en los epígrafes que siguen, y se partirá del estudio de los conceptos y sus implicaciones.

1.1.1. Eventos mutuamente excluyentes

Este tipo de eventos se explicó anteriormente para el caso de los eventos complementarios A y A^c . Sin embargo, los eventos: “Que resulte un número menor que 4” $D = \{1, 2, 3\}$ y “Que resulte un número mayor o igual que 4 y menor o igual que 5” $E = \{4, 5\}$ son mutuamente excluyentes sin ser complementarios.

Es imposible que al lanzar un dado se observe en un mismo resultado un número que esté contenido en ambos subconjuntos porque estos no tienen elementos comunes y por tanto, la ocurrencia del uno excluye la ocurrencia del otro. Se afirma de manera general que dos eventos X y Z son mutuamente excluyentes si se verifica la propiedad: $X \cap Z = \emptyset$ Y por tanto se cumple que:

$$P(X \cap Z) = 0$$

Esto resulta útil para el cálculo de probabilidades del evento unión, ya que para eventos no excluyentes esta probabilidad se calcula mediante la fórmula:

$$P(X \cup Z) = P(X) + P(Z) - P(X \cap Z) \quad (\text{Fórmula 2})$$

De regreso en el ejemplo del lanzamiento del dado. Para calcular $P(A \cup B)$ se tiene:

$$P(A) = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{1}{6} \text{ y } P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Sustituyendo en fórmula 2:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Si se analiza en el diagrama, resulta muy sencillo identificar que B está contenido completamente en A y basta con la ocurrencia de este último para que se observe al menos uno de los dos, esto es, que se observe $A \cup B$.

Para el caso de los eventos mutuamente excluyentes, dado que no existe intersección (fórmula 2) se reduce a la siguiente expresión:

$$P(X \cup Z) = P(X) + P(Z) - P(X \cap Z)$$

$$P(X \cup Z) = P(X) + P(Z)$$

Aplicando al ejemplo anterior se tiene que:

$$P(D \cup E) = P(D) + P(E)$$

$$P(D \cup E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

1.1.2. Eventos independientes

Para ilustrar en detalles este tipo de eventos, es necesario realizar el experimento más complejo que el anterior, de ahí que se adicionará un segundo dado.

Ejemplo 2: Lanzamiento de dos dados

Se desea calcular la probabilidad de que resulte un número par en cada dado, al lanzarlos.

En este caso el resultado individual de cada dado es absolutamente independiente del otro. Estos eventos cuyos resultados no presentan ninguna relación de dependencia se denominan, como resulta obvio ya, eventos independientes. Asociados a estos eventos aparece un nuevo concepto, el de probabilidad condicional.

Para dos eventos X y Z se entiende como probabilidad condicional, $P(X/Z)$, de X respecto a Z , a la probabilidad de ocurrencia del primer dado que el segundo ocurrió. Y se calcula:

$$P(X/Z) = \frac{P(X \cap Z)}{P(Z)} \quad (\text{Fórmula 3})$$

Despejando se obtiene:

$$P(X \cap Z) = P(Z) \cdot P(X/Z) \quad (\text{Fórmula 4})$$

O su alternativa:

$$P(X \cap Z) = P(X) \cdot P(Z/X)$$

Luego se puede definir que dos eventos X y Z son independientes, si y solo si, se cumple que:

$$P(X/Z) = P(X) \text{ o } P(Z/X) = P(Z)$$

Al ser independientes, la ocurrencia de Z no tiene influencia alguna en la ocurrencia de X , por tanto la probabilidad de que ocurra X dado que Z ocurrió, sigue siendo $P(X)$.

Sustituyendo en la fórmula 4 se puede plantear que para dos eventos X y Z independientes:

$$P(X \cap Z) = P(Z) \cdot P(X) \quad (\text{Fórmula 5})$$

Una vez explicado esto, ya se tienen los elementos suficientes para intentar realizar los cálculos relacionados con el experimento de lanzar dos dados a la vez, y los eventos.

A_1 : Que resulte un número par en el primero de los dados

$$A_1 = \{21, 22, 23, 24, 25, 26, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$$

A_2 : Que resulte un número par en el segundo de los dados

$$A_2 = \{12, 22, 32, 42, 52, 62, 14, 24, 34, 44, 54, 64, 16, 26, 36, 46, 56, 66\}$$

Se desea calcular $P(A_1 \cap A_2)$, mediante una revisión visual se puede obtener:

$$A_1 \cap A_2 = \{22, 24, 26, 42, 44, 46, 62, 64, 66\}$$

Así $n_{A_1 \cap A_2} = 9$, sin embargo, para obtener el valor de n sería aún más agotador que lo que resultó obtener los conjuntos de cada uno de los sucesos.

En este caso se recomienda recurrir al conteo del número de puntos en el espacio muestral, en lugar de listar realmente cada elemento. La regla de multiplicación constituye el principio fundamental de este conteo, y dicha regla establece lo siguiente. “Si una operación se puede llevar a cabo en n_1 formas, y si para cada una de estas se puede realizar una segunda operación en n_2 formas, entonces las dos operaciones se pueden ejecutar juntas de $n_1 \cdot n_2$ formas” (Walpole, 2012).

Luego para nuestro ejemplo, el lanzamiento de cada dado puede resultar en 6 valores diferentes. Por tanto $n_1 = 6$ y $n_2 = 6$ y $n_1 \cdot n_2 = 36$.

Al aplicar la regla de multiplicación al suceso A_1 , el primer dado tiene solo 3 maneras de arrojar un número par, mientras que el segundo tiene 6 posibilidades, pues no está restringido para este evento, queda $n_1 = 3$, $n_2 = 6$ y $n_1 \cdot n_2 = 18$, la misma cantidad de elementos que se presentaron anteriormente para este subconjunto.

Igualmente para A_2 , se tienen 6 posibilidades para el primer dado, y solo 3 para el segundo. Por lo que $n_1 = 6$, $n_2 = 3$ y $n_1 \cdot n_2 = 18$.

Aplicando la fórmula 1 se tiene:

$$P(A_1) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_2) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Luego, dado que A_1 y A_2 son independientes, al aplicar la fórmula 5 se obtiene:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Como se aprecia, la regla de la multiplicación permitió calcular la probabilidad de la ocurrencia del evento intersección de 2 sucesos independientes. Se deduce entonces

que esta regla se puede generalizar y ser utilizada para un mayor número de operaciones. La generalización se describe de la siguiente forma.

“Si una operación se puede ejecutar en n_1 formas, y si para cada una de estas se puede llevar a cabo una segunda operación en n_2 formas, y para cada una de las primeras dos se puede realizar una tercera operación en n_3 formas, y así sucesivamente, entonces la serie de k operaciones se puede realizar en $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \dots n_k$ formas” (Walpole, 2012).

Solo resta en esta parte introductoria a las probabilidades, desde la óptica de su definición clásica, que se exploren otros espacios muestrales más complejos que facilitarán la introducción al resto de los contenidos de esta obra.

En ocasiones el investigador se interesa por un espacio muestral compuesto por todas las posibles ordenaciones o arreglos de un conjunto de objetos. Un ejemplo de esto lo constituye la necesidad de conocer de cuántas formas se pueden organizar un grupo de objetos en un número predeterminado de espacios. A los diferentes arreglos se les denomina en estos casos, permutaciones.

Se entiende entonces por permutación, al arreglo u ordenamiento de un conjunto de objetos.

Por ejemplo, considere los tres números 3, 4 y 5. Los posibles arreglos son 345, 354, 435, 453, 534 y 543, se observan 6 permutaciones posibles. Si se usa la regla de la multiplicación, se puede alcanzar la respuesta, (6), sin necesidad de listar las diferentes ordenaciones. Se tienen 3 opciones para la primera posición. Sin importar cuál número seleccione, habrá 2 posibles posiciones para el segundo número y solo queda una opción posible para colocar el último número.

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

De aquí se infiere que, n objetos distintos se pueden ordenar de $n(n-1) \cdot (n-2) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ maneras diferentes. O lo que es lo mismo, mediante $n!$ arreglos. De ahí se puede generalizar que se pueden ordenar n objetos en $n!$ permutaciones o arreglos diferentes. Sin embargo, si en lugar de ordenar todos los objetos, solo interesa saber las posibles permutaciones de un subconjunto del total, entonces el objetivo es arreglar n objetos, tomados en grupos de tamaño s . De manera general, estos se pueden arreglar en $n(n-1) \cdot (n-2) \dots (n-s+1)$ arreglos. Lo cual se puede expresar como:

$${}_n P_s = \frac{n!}{(n-s)!} \quad (\text{Fórmula 6})$$

Por último, existe un grupo de estudios en los que se quiere conocer el número de combinaciones de n objetos distintos tomados de s a la vez. Se entiende como

combinación el número de formas de seleccionar s objetos de un conjunto de n elementos, sin importar el orden. Entonces se calculará el número de combinaciones de s objetos de n , mediante:

$$\binom{n}{s} = \frac{n!}{s!(n-s)!} \quad (\text{Fórmula 7})$$

Hasta aquí este recorrido por la definición estadística de probabilidad y algunos de sus aspectos teóricos más relevantes. La definición clásica de probabilidad tiene muchas limitaciones para su aplicación práctica y es solo el preámbulo a un mundo de infinitas aplicaciones que llegaron posteriores a la definición estadística de probabilidad.

En el siguiente epígrafe se abundará sobre estas limitaciones asociadas al mundo ideal de las probabilidades clásicas y la teoría que subyace al enfoque estadístico y sus múltiples aplicaciones en la investigación científica.

1.2. Definición estadística de probabilidad

Resulta conveniente repasar algunos ejemplos en los que se utilizan expresiones referidas a la probabilidad de un suceso, pero esta vez, expresan alguna posibilidad real que se fundamenta en experiencias vividas.

- Probabilidad de alcanzar una meta productiva para un mes determinado.
- Probabilidad de que una persona encuestada sea mujer.
- Probabilidad de que un equipo gane el campeonato nacional en su deporte.
- Probabilidad de que cierta arquitectura de red de computadoras sea eficiente.

Existe un conjunto de datos que sustentan estas afirmaciones y que permiten tener cierto nivel de seguridad respecto a lo planteado. En ninguno de estos casos se puede conocer, sin experiencias previas, el valor de la probabilidad asociada, por lo que se requiere de un conjunto de observaciones o, de manera general, de un conjunto de resultados experimentales, para deducir el valor de la probabilidad, o sea, la probabilidad es utilizada con un nuevo enfoque, como medida de la validez de la afirmación realizada, a partir del conocimiento y la experiencia que se tiene acerca del suceso en cuestión.

Desde un punto de vista puramente intuitivo y lógico, se puede afirmar que, entre mayor sea el volumen y la calidad de la información disponible, mayor grado de seguridad se tendrá acerca de lo afirmado y de su probabilidad asociada. Desde un enfoque más estadístico, se expresaría como que, entre mayor sea el número de experimentos realizados, la frecuencia del suceso se estabilizará alrededor de cierto número, el cual puede utilizarse como medida de probabilidad.

Si se retoma el experimento del lanzamiento del dado, del cual se conoce que la probabilidad de que resulte un número par es $P(A) = 0.5$. Si se realiza un número creciente de lanzamientos (experimentos), se observa en la figura 3, como la frecuencia relativa se va estabilizando alrededor de la probabilidad teórica a partir de los 400 lanzamientos.

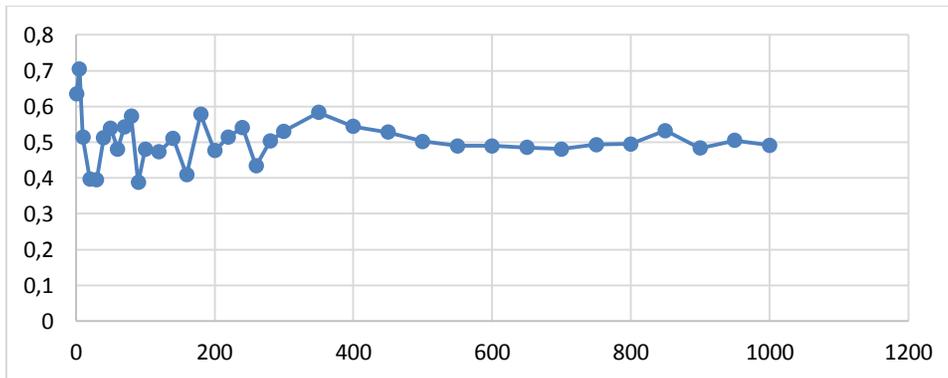


Figura 3. Frecuencia relativa asociada al evento A

De forma similar, se puede tener un grupo significativo de observaciones y las frecuencias relativas de:

- Las producciones mensuales de su empresa o negocio.
- Una muestra de personas encuestadas que especificaron su sexo.
- Registro del desempeño de un equipo deportivo.
- Indicadores de eficiencia de cierta arquitectura de red de computadoras.

Teniendo en cuenta lo planteado hasta aquí, se puede resumir matemáticamente que: si un fenómeno (experimento) es observado (realizado) n veces y un suceso A se repite $n(A)$ veces, la frecuencia relativa se calcula:

$$f(A) = \frac{n(A)}{n} \quad (\text{Fórmula 7})$$

Y se cumplirá que:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(A) \quad (\text{Fórmula 8})$$

Esta es la base de la definición estadística de probabilidad, la cual puede enunciarse como: si un experimento u observación se repite un número suficientemente grande de veces en condiciones replicables, entonces se puede decir que la frecuencia relativa de ocurrencia de cierto evento A es, al mismo tiempo, su valor de probabilidad.

Mediante el siguiente ejemplo se pondrá de manifiesto la aplicación de esta definición de probabilidad, así como el uso de reglas y operaciones aprendidas en el epígrafe anterior y que son comunes a ambos enfoques probabilísticos.

Ejemplo 3: Análisis de resultados docentes de la carrera Ingeniería de Sistemas

Se realizó un estudio acerca de los resultados académicos de 300 estudiantes de diferentes años de la carrera Ingeniería de Sistemas (IS). En la tabla 2, se muestran los datos correspondientes con las frecuencias absolutas de los resultados docentes según el año académico.

Año que curso	Resultados docentes			Total
	M	R	B	
1	20	39	14	73
2	21	20	15	56
3	16	21	21	58
4	17	25	18	60
5	12	21	20	53
Total	86	126	88	300

Tabla 2. Frecuencias absolutas de los resultados docentes por año académico

Si se selecciona aleatoriamente un estudiante, cuál es la probabilidad de que:

- Esté cursando el segundo año de la carrera.
- Haya obtenido una evaluación de B.
- Esté en el primer año de la carrera y haya obtenido calificaciones de R o M.
- Esté cursando el cuarto o quinto año de la carrera y su calificación sea de B.
- Haya obtenido evaluación de M dado que está en el quinto año de la carrera.
- No haya obtenido evaluación de R o M y esté cursando el cuarto año.

Para facilitar la solución a los siguientes enunciados se denotará:

A_i : año que cursa el estudiante con $i = (1, 2, 3, 4, 5)$

E_j : Evaluación del estudiante con $j = (M, R, B)$

En la tabla 3 se muestran las frecuencias relativas asociadas a la investigación, las cuales fueron calculadas aplicando la fórmula 7.

Año que cursa	Resultados docentes			Total
	M	R	B	
1	0,067	0,130	0,047	0,243
2	0,070	0,067	0,050	0,187
3	0,053	0,070	0,070	0,193
4	0,057	0,083	0,060	0,200
5	0,040	0,070	0,067	0,177
Total	0,287	0,420	0,293	1

Tabla 3. Frecuencias relativas de los resultados docentes por año académico

Las probabilidades que se desean obtener, se calculan o se toman directamente de la tabla de frecuencias según sea el caso.

$$P(A_2) = 0.187$$

La probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar esté cursando el segundo año es del 18.7%.

$$P(E_B) = 0.293$$

La probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar haya obtenido una evaluación de B es de 29.3%.

$$P(A_1 \cap (E_R \cup E_M)) = P(A_1 \cap E_R) + P(A_1 \cap E_M)$$

$$P(A_1 \cap (E_R \cup E_M)) = 0.067 + 0.13$$

$$P(A_1 \cap (E_R \cup E_M)) = 0.197$$

La probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar esté en el primer año de la carrera y haya obtenido calificaciones de R o M, es del 19.7%.

$$P((A_4 \cup A_5) \cap E_B) = P(A_4 \cap E_B) + P(A_5 \cap E_B)$$

$$P((A_4 \cup A_5) \cap E_B) = 0.06 + 0.067$$

$$P((A_4 \cup A_5) \cap E_B) = 0.127$$

La probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar esté cursando el cuarto o quinto año de la carrera y su calificación sea de B es del 12.7%.

$$P(E_M/A_5) = \frac{P(E_M \cap A_5)}{P(A_5)}$$

$$P(E_M/A_5) = \frac{0.040}{0.177}$$

$$P(E_M/A_5) = 0.226$$

La probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar haya obtenido evaluación de M dado que está en el quinto año de la carrera es del 22.6%.

$$P((E_R \cup E_M)^c \cap A_4) = P(E_B \cap A_4)$$
$$P((E_R \cup E_M)^c \cap A_4) = 0.06$$

La probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar no haya obtenido evaluación de R o M y esté cursando el cuarto año es del 6%.

Como se puede apreciar, en el ejemplo anterior, se calcularon probabilidades para eventos intersección, unión, complementos y algunas de sus combinaciones, a partir de la definición estadística de probabilidad y de las reglas de cálculo de la definición clásica. Esto evidencia que ambas definiciones se utilizan conjuntamente para realizar cálculos de probabilidades durante una investigación científica.

1.3. Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad

El concepto de variable aleatoria está ligado al concepto clásico de variable, pues es un símbolo que adopta diferentes valores. El adjetivo "aleatoria" indica que toma valores que son producto del azar. Se puede definir una variable aleatoria, como una función que asigna un número real a cada uno de los elementos del espacio muestral de un experimento aleatorio.

Una variable aleatoria, es por defecto, numérica, sin importar a qué tipo de datos o resultados esté asociada, aun cuando las observaciones sean cualitativas. Se consideran universalmente, solo dos tipos de variables aleatorias:

- variables aleatorias discretas: son aquellas que toman valores contables, numerables y pueden asociarse a datos cualitativos, ordinales o categóricos.
- variables aleatorias continuas: son aquellas que pueden tomar infinitos valores dentro de un rango. Están generalmente asociadas a mediciones de magnitudes físicas como distancia, velocidad, masa, volumen, temperatura, presión, etc.

Las variables aleatorias discretas son aquellas que toman valores contables, numerables y pueden asociarse a datos cualitativos, ordinales o categóricos. Son variables cuyos valores se diferencian siempre en alguna cantidad entera, por lo que entre dos valores consecutivos no puede existir ningún otro.

Ejemplos de variables discretas:

- El número de trabajadores en una fábrica
- El número de robos en una determinada ciudad
- La cantidad de nacimientos en el mes de enero.

No resulta difícil ver que estas variables se corresponden con situaciones donde se considera el número de veces que ocurre un evento determinado. Por otra parte, las variables que son de tipo cualitativas, en este contexto, quedan definidas como variables aleatorias discretas pues se le asigna un número entero a cada uno de sus atributos.

Las variables aleatorias continuas son aquellas variables que pueden tomar infinitos valores dentro de un rango. Están generalmente asociadas a mediciones de magnitudes físicas como distancia, velocidad, masa, volumen, temperatura, presión, etc.

Ejemplos de variables continuas:

- El tiempo que demoran en llegar a su destino, un grupo de transacciones bancarias.
- La masa de unas cajas de componentes electrónicos.
- La presión que alcanzan unas calderas de vapor.

1.3.1. Distribución empírica de probabilidad de una variable aleatoria

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria X , es una regla que permite relacionar cada uno de los valores de la variable X , que a su vez, están ligados a los resultados de un experimento aleatorio, con la probabilidad de ocurrencia de ese resultado. Esta regla permite describir el comportamiento aleatorio de dicha variable y, por tanto, obtener una noción de regularidad sobre el experimento al que está asociada.

Para conocer cómo se distribuye una variable aleatoria discreta en la población, se procede en primer lugar a elaborar su distribución de probabilidad que es precisamente una tabla donde se relacionan los posibles valores que adopta la variable junto a sus probabilidades asociadas. Este procedimiento es equivalente a la distribución de frecuencias relativas utilizada en el contexto de la estadística descriptiva.

En resumen, una distribución de probabilidad de una variable aleatoria, es una función que asigna valores de probabilidad a cada uno los posibles resultados de un experimento aleatorio, expresados mediante valores de dicha variable.

Las distribuciones de probabilidad pueden ser igualmente discretas o continuas, según el tipo de variable aleatoria a la que se refieran. Si una variable aleatoria es discreta, le corresponderá una distribución de probabilidad discreta que se obtendrá como resultado de un proceso de conteo o registro estadístico de un conjunto de categorías transformadas de un formato de expresión lingüística, a un número entero. Si una variable aleatoria es continua, le corresponderá una distribución de probabilidad continua y será producto del resumen estadístico de los resultados de un proceso de medición.

1.3.2. Distribución empírica de probabilidad de una variable aleatoria discreta

A partir de los datos ofrecidos en el ejemplo 3, se obtuvo la distribución de probabilidad que se muestra en la tabla 4, para describir el comportamiento de la variable aleatoria A_i .

A_i	Probabilidad
1	0,243
2	0,187
3	0,193
4	0,200
5	0,177
Total	1

Tabla 4. Distribución de probabilidad de a variable A_i

Esta distribución de probabilidad puede representarse gráficamente mediante un gráfico de barras como se muestra en la figura 4.

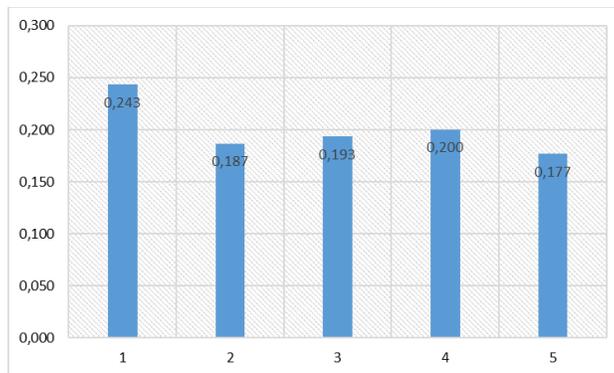


Figura 4. Distribución de probabilidad de la variable A_i

A este tipo de distribuciones de probabilidad, que se fundamentan en la definición estadística de probabilidad y se obtienen a partir de los análisis estadísticos de un experimento aleatorio, se les conoce como distribuciones empíricas de probabilidad (DEP). Es importante aclarar las diferencias, nada evidentes a simple vista, entre una distribución empírica de probabilidad y una tabla de frecuencias relativas.

Una distribución de frecuencias relativas se construye con datos reales a partir de un estudio o ensayo reales realizados a una muestra, o sea, es una distribución empírica

de frecuencias. Sin embargo, una DEP es una distribución que se construye tomando como base inferencias que aplican a nivel de población.

Una distribución de frecuencias relativas es una proporción muestral para cada resultado de un experimento. Por su parte, una DEP asigna una probabilidad de ocurrencia a cada valor particular de la variable aleatoria X , por lo que hace referencia a una proporción poblacional.

Ambas distribuciones tienen una estrecha relación, pues se considera que una distribución de frecuencias relativas será una DEP a largo plazo. Al aplicar la fórmula 8 a este razonamiento, se puede decir que a medida que aumenta el número de ensayos de un experimento, las diferencias entre el histograma de frecuencias relativas y la distribución de probabilidad de la variable, serán cada vez menores.

En lo adelante, se denominará función de probabilidad o de cuantía $f(x)$, a la función de probabilidad asociada a una variable aleatoria discreta, para el caso de las DEA son equivalentes a la regla aplicada a la distribución de probabilidad. Asimismo, se denominará función de distribución $F(x)$ a la función de probabilidad acumulada de cualquier variable aleatoria. Por lo que estas funciones se expresan:

$$f(x) = P(x = X)$$

$$F(x) = P(x \leq X)$$

A partir del ejemplo anterior se tiene:

Año	$f(A_i)$	$F(A_i)$
1	0,243	0,243
2	0,187	0,430
3	0,193	0,623
4	0,200	0,823
5	0,177	1,0

Tabla 5. Funciones de probabilidad y de distribución de A_i

A partir de estas funciones, se quiere determinar:

- La probabilidad de que un estudiante se encuentre en segundo año.
- La probabilidad de que un estudiante se encuentre en un año igual o menor al cuarto.

Para el resultado 1 se obtiene $f(A_2) = 0.187$

Para el resultado 2 se obtiene $F(A_4) = 0.823$

Resulta obvio que, generalizando:

$$F_x(t) = \sum_{x=0}^t f(x) \quad (\text{Fórmula 9})$$

Y debe verificarse para $F_x(t)$

$$0 \leq F_x(t) \leq 1$$

$$F_x(n) = \sum_{x=0}^n f(x) = 1$$

Donde n es el máximo valor de x

1.3.3. Distribución empírica de probabilidad de una variable aleatoria continua

De la misma forma que se puede asociar una distribución empírica de probabilidad a una variable aleatoria discreta, existe la distribución empírica de probabilidad para variables continuas. En este caso específico, se le denomina a la función de probabilidad, función de densidad probabilística.

La función de probabilidad en este caso no tiene utilidad alguna por sí sola, toda vez que la probabilidad de que ocurra un evento específico entre infinitas opciones dentro de un intervalo (variable aleatoria continua) es cero, por tanto, la función de distribución será fundamental en este tipo de distribuciones empíricas.

En el cálculo infinitesimal la equivalencia a F

$$F_x(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

Y debe verificarse que:

$$0 \leq F_x(t) \leq 1$$

$$F_x(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Para ilustrar el cálculo de probabilidades para distribución empírica de probabilidad continua, se utilizará el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4: Cálculo de una distribución empírica de probabilidad

Se desea calcular la probabilidad de que cierto mantenimiento a una PC demore menos de 30 minutos y se conoce que el tiempo de prestación de ese servicio tiene la siguiente función de densidad probabilística expresada en horas.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{para otro valor de } x \end{cases}$$

Entonces la función de densidad $F_x(t)$ para esta variable continua puede ser definida:

$$F_x(x) = \int_0^x f(x) dx \quad (\text{Fórmula 10})$$

Sustituyendo:

$$F_x(x) = \int_0^x 2x dx$$

Luego:

$$F_x(x) = x^2$$

Se desea calcular $P(x \leq 0.5)$, esto es:

$$F_x(0.5) = 0.5^2 = 0.25$$

Se puede afirmar que la probabilidad de que este mantenimiento dure menos de 30 minutos, es del 25%.

1.3.4. Distribución teórica de probabilidad de una variable aleatoria

Durante mucho tiempo, se ha logrado identificar y caracterizar mediante funciones probabilísticas el comportamiento de una gran diversidad de fenómenos naturales. No todas las funciones de probabilidad y de densidad de probabilidad se derivan de cantidades grandes de datos históricos. Hay un gran número de situaciones en las que la naturaleza del escenario científico sugiere un tipo de distribución específica.

“Las distribuciones empíricas cuyos datos corresponden a observaciones reales, constatadas (estaturas, coeficientes intelectuales, opciones políticas de una población...etc) de los modelos de distribución, donde los datos son generados según ciertas reglas. Los datos, en este caso, son consecuencia del supuesto establecido. Decimos modelos porque hacen referencia a distribuciones ideales, o si se quiere a distribuciones que obedecen a una cierta manera de conceptualizar la realidad” (Camacho, s/f).

1.3.5. Distribución de probabilidad discreta

Con frecuencia, las observaciones que se obtienen como resultado de experimentos estadísticos o aleatorios, tienen un comportamiento general muy similar. La distribución de probabilidad discreta describe el comportamiento de una variable aleatoria, independientemente de si se representa de forma gráfica o mediante un histograma, en forma tabular o con una fórmula.

En consecuencia, las variables aleatorias discretas asociadas con estos experimentos se pueden describir esencialmente con la misma distribución de probabilidad y, por lo

tanto, es posible representarlas usando una fórmula común. “Se necesitan solo unas cuantas distribuciones de probabilidad importantes para describir muchas de las variables aleatorias discretas que se encuentran en la práctica” (Walpole, 2012).

Distribución binomial

El experimento de Bernoulli consiste en una función probabilística en la cual solo se pueden asociar dos valores a la variable aleatoria discreta: el éxito (1), al que se le asigna una probabilidad p , y el fracaso (0), con una probabilidad asociada a este suceso de $1 - p = q$.

La distribución binomial se construye al calcular la probabilidad de obtener x éxitos en n ensayos de Bernoulli independientes en sucesión (la probabilidad p permanece inalterada en todos los ensayos).

Esta distribución modela situaciones en que observaciones repetidas e independientes son binarias por naturaleza, es decir, defectuoso o no, funciona o no, alérgico o no, con un valor de 0 o 1.

Los procesos de Bernoulli se pueden identificar sobre la base de las siguientes características.

- El experimento está constituido por ensayos idénticos que se repiten.
- Los ensayos son independientes.
- El resultado de cada ensayo se puede clasificar como éxito o fracaso.
- La probabilidad de éxito es constante para todos los ensayos.

Una variable X sigue una distribución binomial de parámetros:

n = el número de veces que se repite el ensayo

p = la probabilidad de que ocurra A , en un ensayo.

Se denota $X \sim B(n, p)$

La función de probabilidad binomial se escribe:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad (\text{Fórmula 11.})$$

$$b(x; n, p) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \quad (\text{Fórmula 12.})$$

Igualmente se verifica la propiedad:

$$\sum_{x=0}^n b(x; n, p) = 1$$

Ejemplo 5: En una investigación científica relacionada con el grado de aceptación de una nueva tecnología en auriculares, se ha observado que una tasa equivalente al 12% de las personas, responden negativamente a la innovación propuesta. Si se escogen 10 personas al azar de una muestra:

- ¿Cuál es la probabilidad de que 2 de ellas responden negativamente?
- ¿Cuál es la probabilidad de que más de 5 respondan de manera positiva?

Para resolver el problema propuesto se utiliza una combinación de las fórmulas 11 y 12.

$$b(x; 10, 0.12) = \binom{10}{x} 0.12^x 0.88^{10-x}$$

- Respondiendo a la primera interrogante se plantea:

$$b(2; 10, 0.12) = \binom{10}{2} 0.12^2 0.88^{10-2}$$

$$b(2; 10, 0.12) = 0.233$$

- Respondiendo a la segunda interrogante se plantea:

$$b(x \leq 5; 10, 0.05) = \sum_{x=6}^{10} \binom{10}{x} 0.05^x 0.95^{10-x}$$

$$b(x \leq 5; 10, 0.05) = 0.0037$$

Distribución multinomial

La distribución multinomial puede considerarse como una extensión de la distribución binomial con la diferencia de que, en lugar de referirse a variables dicotómicas, se refiere a variables que presentan más de dos categorías.

Si un ensayo dado puede producir los k resultados E_1, E_2, \dots, E_k con probabilidades p_1, p_2, \dots, p_k , entonces la distribución de probabilidad de las variables aleatorias x_1, x_2, \dots, x_k , que representa el número de ocurrencias para E_1, E_2, \dots, E_k en n ensayos independientes, se expresa:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k; p_1, p_2, \dots, p_k, n) = \binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k} \quad (\text{Fórmula 13.})$$

Donde:

$$\binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} \quad (\text{Fórmula 14.})$$

Y se verifica:

$$\sum_{i=1}^k x_i = n \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1$$

Ejemplo 6: Se complica el ejemplo 5 al incrementar que en esta ocasión se revisarán 5 diseños diferentes, de los cuales se conoce que su probabilidad de ser rechazados por las personas es:

Modelo	Probabilidad
Modelo 1	0,3
Modelo 2	0,2
Modelo 3	0,2
Modelo 4	0,2
Modelo 5	0,1

Se quiere calcular la probabilidad de que se encuentre la siguiente distribución de modelos rechazados en un grupo de 8 personas.

Modelo	Rechazos
Modelo 1	2
Modelo 2	3
Modelo 3	1
Modelo 4	2
Modelo 5	0

Para responder a la interrogante planteada se sustituyen en fórmula 13, los valores aportados.

$$f(2, 3, 1, 2, 0; 0.3, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1, 8) = \binom{8}{2, 3, 1, 2, 0} \cdot 2^{0.3} \cdot 3^{0.2} \cdot 1^{0.2} \cdot 2^{0.2} \cdot 0^{0.1}$$

$$f(2, 3, 1, 2, 0; 0.3, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1, 8) = 0.0097$$

1.3.6. Distribución de probabilidad continua

Una distribución de probabilidad continua resulta de medir alguna magnitud física (masas, presiones, temperaturas) asociada a una variable aleatoria. Si se seleccionan a 5 estudiantes y se calcula que las distancias en millas, que viajan a clases son de 12.2, 8.9, 6.7, 3.6 y 14.6. Cuando se examine una distribución continua, la información que interesa es el porcentaje de estudiantes que viajan menos de 10 millas o el porcentaje que viaja más de 8 millas.

En otras palabras, en el caso de una distribución continua, quizás se desee conocer el porcentaje de observaciones que se presentan dentro de cierto margen. Es importante señalar que una variable aleatoria continua tiene un número infinito de valores dentro de cierto intervalo particular. Así, se debe pensar en la probabilidad de que una variable tenga un valor dentro de un intervalo determinado, en vez de pensar en la probabilidad de un valor específico.

1.3.7. Distribución normal

Conocida como la “reina de las distribuciones”, la distribución normal es tal vez la distribución de probabilidad continua más importante estadística matemática. Su gráfica, denominada curva normal, describe una campana perfectamente simétrica (ver figura 5). Esta distribución se puede aplicar a un extenso número de ciencias y fenómenos naturales, por lo que resulta recurrente su utilización en el ámbito científico investigativo.

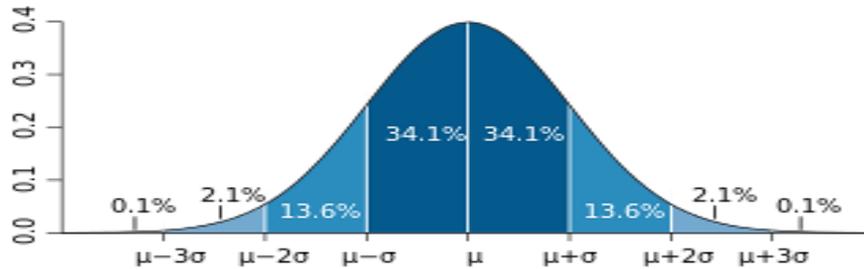


Figura 5. Gráfico de la distribución normal

Por ejemplo, las mediciones físicas en áreas como los experimentos meteorológicos, estudios de la precipitación pluvial y mediciones de partes fabricadas, a menudo se explican más que adecuadamente con una distribución normal. Además, los errores en las mediciones científicas se aproximan muy bien mediante una distribución normal.

En 1733, De Moivre desarrolló la ecuación matemática de la curva normal, la cual sentó las bases sobre las que erigen gran parte de la teoría de la estadística inductiva. La distribución normal a menudo se denomina distribución gaussiana en honor de Gauss (1777-1855) quien también derivó su ecuación a partir de un estudio de errores en mediciones repetidas de la misma cantidad.

La función de densidad probabilística de la distribución normal es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \quad (\text{Fórmula 15.})$$

Donde:

σ : es la desviación estandar de la población

μ : es la media aritmética poblacional

σ^2 : es la varianza de la población

π : es una constante matemática , cuyo valor es aproximadamente 22/7 o 3.1416

e : es la base del sistema de logaritmos naturales y es igual a 2.718

Por tanto, una distribución normal se define por los parámetros poblacionales; media y desviación estándar, y se denota $X \sim N(\mu, \sigma)$

La distribución de probabilidad normal posee las siguientes características principales.

- Tiene forma de campana y posee una sola cima en el centro de la distribución. La media aritmética, la mediana y la moda son iguales, y se localizan en el centro de la distribución.
- El área total bajo la curva es de 1.00. La mitad del área bajo la curva normal se localiza a la derecha de este punto central, y la otra mitad, a la izquierda.
- Es simétrica respecto de la media. Si hace un corte vertical, por el valor central, a la curva normal, las dos mitades son imágenes especulares.
- Desciende suavemente en ambas direcciones del valor central; es decir, la distribución es asintótica. La curva se aproxima más y más al eje X, sin tocarlo. En otras palabras, las colas de la curva se extienden indefinidamente en ambas direcciones.

La localización de una distribución normal se determina a través de la media μ y la dispersión o propagación de la distribución se determina por medio de la desviación estándar σ . El resumen de estas características se puede apreciar en la figura 6.

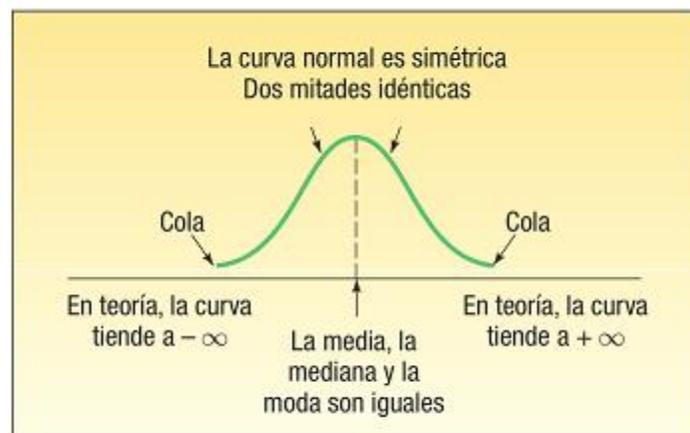


Figura 6. Propiedades de la distribución normal (Lind, 2012)

Áreas bajo la curva normal

La curva de cualquier distribución continua de probabilidad o función de densidad se construye de manera que el área bajo la curva limitada por las dos ordenadas $x = x_1$ y $x = x_2$ sea igual a la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor entre x_1 y x_2 . Por tanto, para la curva normal de la figura 7.

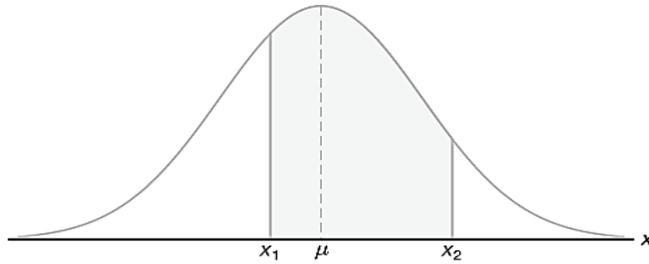


Figura 7. Cálculo de probabilidad entre 2 valores x_1 y x_2

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} dx$$

Aunque esto es equivalente a:

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} dx$$

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\left[\frac{(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} dx - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\left[\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} dx$$

En el caso de la distribución de probabilidad continua, las áreas bajo la curva definen probabilidades. El área total bajo la curva normal es de 1.0. Esto explica todos los posibles resultados. Como una distribución de probabilidad normal es simétrica, el área bajo la curva a la izquierda de la media es de 0.5, y el área bajo la curva a la derecha de la media, de 0.5.

Por tanto, se cumple: $F(\mu) = P(x \leq \mu) = 1 - F(\mu) = P(x > \mu) = 0,5$

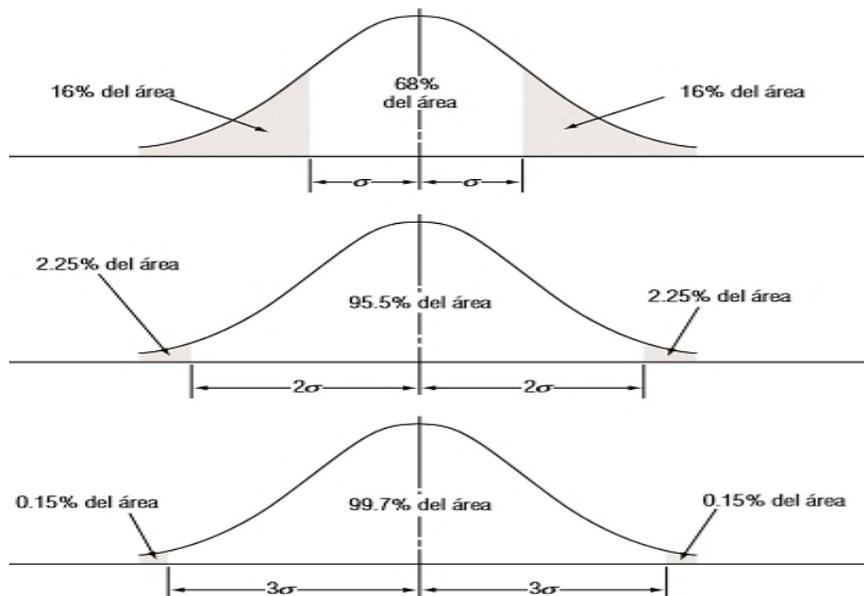


Figura 8. Propiedad 6 sigma de la distribución normal (Levin, 2004)

En la figura anterior se ilustran algunas propiedades respecto al área bajo la curva normal. Existen infinitas distribuciones normales debido a que cada una puede tener diferentes medias o desviaciones estándar. Por lo que no resulta posible elaborar tablas de todas las distribuciones normales definibles.

“Por fortuna, un miembro de la familia se utiliza para determinar las probabilidades de todas las distribuciones de probabilidad normal. Es la distribución de probabilidad normal estándar y es única, pues tiene una media de 0 y una desviación estándar de 1. Cualquier distribución de probabilidad normal puede convertirse en una distribución de probabilidad normal estándar si se resta la media de cada observación y se divide esta diferencia entre la desviación estándar. Los resultados reciben el nombre de valores z o valores tipificados” (Lind, 2012).

El valor z se obtiene mediante:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (\text{Fórmula 16.})$$

Por lo que z se puede interpretar como una distancia media con signo de x respecto μ expresada en términos de σ . Luego el área bajo la curva del intervalo de finido por x_1 y x_2 es igual al área bajo la curva del intervalo acotado por sus valores estandarizados z_1 y z_2 .

Esto se puede expresar como:

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = P(z_1 \leq z \leq z_2)$$

$$P(z_1 \leq z \leq z_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^{z_1} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz$$

En la figura 9 se puede observar el intervalo de una distribución normal y su equivalente estandarizado.

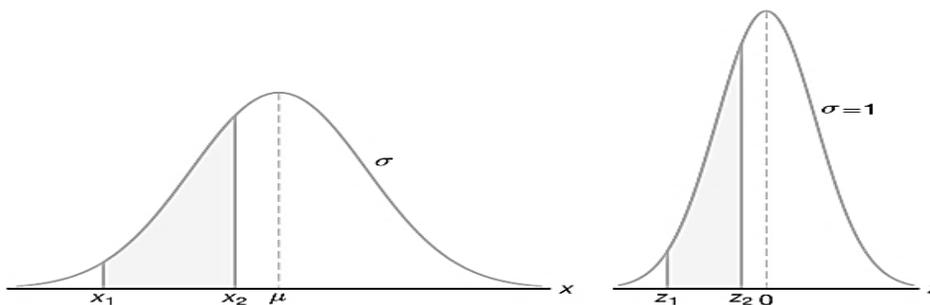


Figura 9. Distribución normal y distribución normal estándar equivalente

Ejemplo 7: Distribución normal de probabilidad

Diariamente se recopilan muestras de las mediciones de temperatura realizadas a un microprocesador para evaluar su desempeño en condiciones de trabajo exigentes y condiciones ambientales controladas en el laboratorio donde se desarrolla el

experimento. Se determinó que las mediciones de temperatura en grados Celsius, sigue una distribución normal con media 65°C y desviación estándar de 2°C ¿Cuál es la probabilidad de que el microprocesador registre temperaturas dentro del rango 61°C a 64°C durante un experimento?

Se desea calcular:

$$P(61 \leq x \leq 64)$$

Aplicando la fórmula 16 se obtiene:

$$P(61 \leq x \leq 64) = P\left(\frac{61-65}{2} \leq z \leq \frac{64-65}{2}\right) = P(-2 \leq z \leq -0.5)$$

$$P(-2 \leq z \leq -0.5) = F(-0.5) - F(2)$$

$$P(61 \leq x \leq 64) = 0.3085 - 0.02275$$

$$P(61 \leq x \leq 64) = 0.2858$$

En la figura 10 se pueden apreciar las curvas correspondientes a este ejemplo.

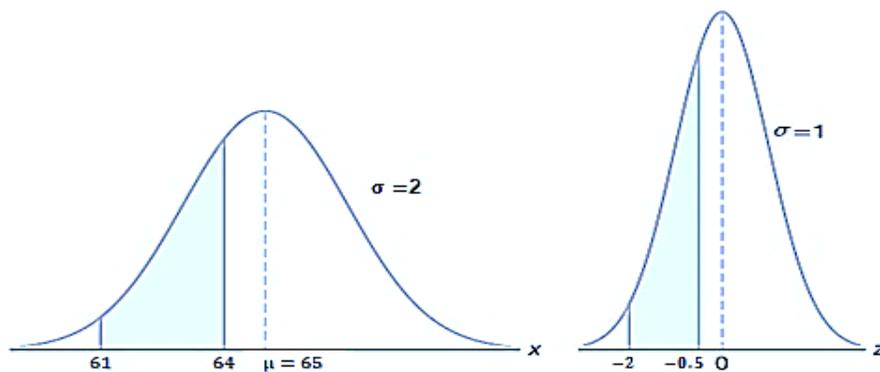


Figura 10. Distribuciones normales para el ejemplo 7

Uno de los mayores intereses de la distribución normal no reside en el hecho de que algunas variables se distribuyan en la población de acuerdo con esta ley. Su importancia radica fundamentalmente en que la mayor parte de los estadísticos obtenidos de distintas variables (medias, proporciones, diferencias de medias y diferencias de proporciones) se distribuyen en el muestreo según leyes normales, aunque tales variables no lo hagan en la población. Esta circunstancia proporciona, una base sólida al problema de la inferencia estadística

1.3.8. Distribución *t-Student*

Sin derivar la distribución *t* de manera matemática, podemos entender en forma intuitiva la relación que existe entre la distribución *t* y la distribución normal. Ambas son simétricas.

En general, la distribución *t* es más plana que la distribución normal y hay una distribución *t* diferente para cada tamaño posible de muestra. Aun así, conforme el tamaño de muestra se hace más grande, la forma de la distribución *t* deja de ser plana y se aproxima más a la distribución normal. De hecho, para tamaños de muestra mayores que 30, la distribución *t* se asemeja tanto a la normal que utilizaremos la normal para aproximar a la distribución *t*.

Definición de la distribución *t* de *Student*

Una variable aleatoria continua sigue una distribución *t* de *Student* con *k* grados de libertad, si su función de densidad es:

$$h_k(t) = \frac{\tau\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\tau\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k}} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} \quad -\infty < t < \infty, \text{ donde } \tau(p) = \int_0^x e^{-x} x^{p-1} dx \quad (1.17)$$

Grados de libertad

Se afirma que existe una distribución *t* diferente para cada tamaño de muestra. En un lenguaje estadístico apropiado, se diría: “existe una distribución *t* distinta para cada uno de los grados de libertad posibles”.

¿Qué son los grados de libertad? Se definen como el número de valores que se pueden escoger libremente y son equivalentes a $n - 1$, si n es el tamaño de la muestra. En la figura 11 se muestra una distribución *t* con 10 grados de libertad.

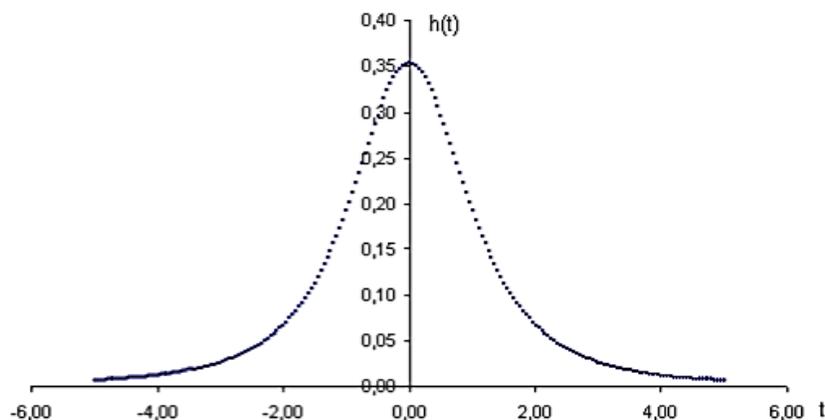


Figura 11. Relación entre la distribución *t* y la normal

La figura 12 compara una distribución normal con dos distribuciones t para tamaños de muestra diferentes. En esta figura se muestran dos características de las distribuciones t.

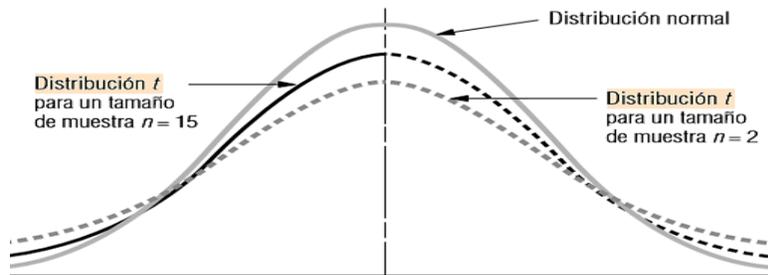


Figura 12. Relación entre la distribución t y la normal (Levin, 2002)

Una distribución t es menor en la media y mayor en las colas que una distribución normal. La figura también muestra cómo la distribución de *Student* tiene, proporcionalmente, una parte mayor de su área en las colas que la distribución normal.

Es por esto que será necesario alejarse más de la media de una distribución t para poder incluir la misma área bajo la curva. Entonces, los anchos de intervalo de una distribución de *Student* son mayores que los basados en la distribución normal.

Se puede resumir, de manera general, las siguientes características de la distribución t, las cuales parten del supuesto de que la población de interés es de naturaleza normal, o al menos, casi normal.

- Es una distribución continua.
- Su gráfica tiene forma de campana y es simétrica.
- No existe una distribución t, sino una familia de distribuciones t.
- Todas las distribuciones t tienen una media de 0, y sus desviaciones estándares difieren de acuerdo con el tamaño de la muestra, n.
- La desviación estándar de una distribución t disminuye a medida que aumenta el tamaño de la muestra.
- La distribución t se extiende más y es más plana por el centro que la distribución normal estándar. Sin embargo, conforme se incrementa el tamaño de la muestra, la distribución t se aproxima a la distribución normal estándar.

Capítulo 2: Muestreo y estimación

2.1. Población y muestra

La muestra es un subconjunto de una población. Esta debe ser representativa de la población, para lo que deberá contar con un tamaño suficiente y con una selección por procedimientos imparciales, como el muestreo aleatorio (Pérez, 2012).

“El objetivo de la estadística como ciencia no es saber lo que ocurre en unos pocos casos (muestra), sino conocer lo que sucede en la generalidad de los mismos (población) a efecto de establecer las leyes generales que rigen el comportamiento de los fenómenos estudiados. Interesa el caso general a partir del caso particular. La cuestión es precisamente cómo determinar el procedimiento estadístico que nos permita realizar tal tipo de consideraciones; cómo generalizar a partir del caso particular, o si se quiere, cómo inferir las poblaciones orígenes a partir de las muestras observadas” (Camacho, s/f).

La población para una investigación científica es el conjunto de elementos sobre el que estamos interesados en obtener conclusiones o hacer inferencias para la toma de decisiones. Estos elementos pueden ser personas, animales, plantas u otros objetos.

Normalmente el tamaño de la población (N) es demasiado grande para poder abarcarla en su totalidad en función de investigaciones que se quieran desarrollar. De ahí que se opte por trabajar con solo una parte de la ella, un tamaño de muestra (n) más pequeño.

En este sentido, la muestra es un subconjunto de la población al que se tiene acceso y debe ser representativa de esta, porque sobre ella se hacen las mediciones pertinentes. De igual forma que la población, la muestra también tiene sus valores representativos que se utilizan como estimadores, como la media, varianza, desviación estándar o proporción de la muestra. En este caso el convenio establece simbolizarlos con letras latinas.

Los investigadores más experimentados comienzan por definir la población total bajo investigación, para luego ocuparse en la determinación de una parte de esta que sea representativa. Sin embargo, los investigadores más noveles insisten en hacerlo a la inversa. Ellos determinan un pequeño grupo para conducir la investigación. Luego se complican al evaluar la incertidumbre en la introducción y generalización de los resultados que obtienen. Es pertinente destacar que puede haber ocasiones en que se puede acceder sin dificultad a toda la población y no es necesaria una muestra.

2.1.1. Razones para muestrear

Cuando se estudian las características de una población, existen diversas razones prácticas para preferir algunas partes o muestras de ella para observar y medir. He aquí algunas razones para muestrear (Lind, 2012).

- Establecer contacto con toda la población requeriría mucho tiempo

Un candidato para un puesto federal quizás desee determinar las posibilidades que tiene de resultar elegido. Una encuesta de muestreo en la que se utiliza el personal y las entrevistas de campo convencionales de una empresa especializada en encuestas tardaría de uno a dos días.

Con el mismo personal y los mismos entrevistadores, y laborando siete días a la semana, se requerirían 200 años para ponerse en contacto con toda la población en edad de votar. Aunque fuera posible reunir a un numeroso equipo de encuestadores, quizás no valdría la pena entrar en contacto con todos los votantes.

- El costo de estudiar todos los elementos de una población resultaría prohibitivo

Por lo general, las organizaciones que realizan encuestas de opinión pública y pruebas entre consumidores, como *Harris International*, *CBS News Polls* y *Zogby International*, entran en contacto con menos de 2 000 de los casi 60 millones de familias en Estados Unidos.

Una organización que entrevista a consumidores en panel cobra cerca de \$40 000 por enviar muestras por correo y tabular las respuestas con el fin de probar un producto (como un cereal para el desayuno, alimento para gato o algún perfume). La misma prueba del producto con los 60 millones de familias tendría un costo de alrededor de \$1 000 000 000.

- Es imposible verificar de manera física todos los elementos de la población

Algunas poblaciones son infinitas. Sería imposible verificar toda el agua del lago Erie en lo que se refiere a niveles de bacterias, así que se eligen muestras en diversos lugares de él.

Las poblaciones de peces, aves, serpientes o mosquitos son grandes, y se desplazan, nacen y mueren de manera continua. En lugar de intentar contar todos los patos que hay en Canadá o todos los peces del lago Pontchartrain, se hacen aproximaciones mediante diversas técnicas. Se cuentan todos los patos que hay en un estanque, capturados al azar, se revisan las cestas de los cazadores o se colocan redes en lugares predeterminados en el lago.

- Algunas pruebas son de naturaleza destructiva

Si los catadores de vino de *Sutter Home Winery*, California, se bebieran todo el vino para evaluar la vendimia, acabarían con la cosecha y no quedaría nada disponible para la venta.

En el área de producción industrial, las placas de acero, cables y productos similares deben contar con una resistencia mínima a la tensión. Para cerciorarse de que el producto satisface la norma mínima, el departamento de control de calidad elige una muestra de la producción.

Cada pieza se somete a tensión hasta que se rompe y se registra el punto de ruptura (medido en libras por pulgada cuadrada). Es obvio que si se sometieran todos los cables o todas las placas a pruebas de resistencia a la tensión no habría productos

disponibles para vender o utilizar. Por la misma razón, solo unas cuantas semillas se someten a pruebas de germinación en *Burpee Seeds*, antes de la temporada de siembra.

- Los resultados de la muestra son adecuados

Aunque se contara con recursos suficientes, es difícil que la precisión de una muestra de 100% —toda la población— resulte esencial en la mayoría de los casos. Por ejemplo, el gobierno federal utiliza una muestra de tiendas de comestibles distribuidas en Estados Unidos para determinar el índice mensual de precios de los alimentos.

Los precios del pan, frijol, leche y otros productos de primera necesidad se incluyen en el índice. Resulta poco probable que la inclusión de todas las tiendas de comestibles de Estados Unidos influya significativamente en el índice, pues los precios de la leche, el pan y otros productos de primera necesidad no varían más de unos cuantos centavos de una cadena de tiendas a otra.

2.2. Muestreo

El muestreo es una herramienta para inferir algo sobre una población. Hay muchas maneras de elegir una muestra de una población. Antes de pasar a analizar dichas formas de extracción de muestras, es importante acotar que todas las muestras han de cumplir varias condiciones indispensables.

Es evidente que para que el estudio a realizar sea fiable, hay que cuidar mucho la elección de la muestra, para que represente en la medida de lo posible a la población de la que se extrae. Si la muestra está mal elegida, no es representativa. En este caso, se pueden producir errores imprevistos e incontrolados. Dichos errores se denominan sesgos y la muestra se califica como sesgada.

Una de las condiciones para que una muestra sea representativa es que el muestreo (o sistema para elegir una muestra de una población) que se haga sea aleatorio, es decir, todas las personas de la población tengan las mismas posibilidades de ser elegidas, mientras que, si la elección de la muestra es subjetiva, es probable que resulte sesgada.

Las distintas maneras de elegir una muestra de una población se denominan muestreos. Básicamente hay dos tipos de muestreos.

- Muestreo no probabilístico: el investigador no elige la muestra al azar, sino mediante determinados criterios subjetivos.
- Muestreo probabilístico: el investigador elige la muestra al azar. En este caso se pueden distinguir varios tipos de muestreos.

2.2.1. Muestreo aleatorio simple

El muestreo aleatorio simple es el muestreo en el que cada individuo de la población tiene las mismas posibilidades de salir en la muestra. Para ejemplificar el muestreo aleatorio simple y la selección, se plantea que una población consta de 560 empleados, de la cual se va a elegir una muestra de 52 empleados.

Una forma de asegurarse de que todos los empleados de la población tienen las mismas posibilidades de que se les elija consiste en escribir primero el nombre de cada empleado en un papel y depositarlos todos en una caja.

Después de mezclar todos los papeles, se efectúa la primera selección tomando uno de la caja sin mirarlo. Se repite este proceso hasta terminar de elegir la muestra de 52 empleados.



Un método más conveniente de seleccionar una muestra aleatoria consiste en utilizar un número de identificación por cada empleado y una tabla de números aleatorios. Como su nombre lo indica, estos números se generaron mediante un proceso aleatorio (en este caso, con una computadora). La probabilidad de 0, 1, 2,..., 9 es la misma para cada dígito de un número. Por consiguiente, la probabilidad de que se seleccione al empleado 1 es la misma que tienen los empleados 500 o 250.

2.2.2. Muestreo sistemático

El muestreo sistemático es aquel en el que se elige un individuo al azar y a partir de él, a intervalos constantes k , se eligen los demás hasta completar la muestra.



En algunos estudios, el procedimiento de muestreo aleatorio simple resulta complicado. Por ejemplo, si se necesita calcular rápidamente cierta variable o indicador en una investigación.

Si se recibe en poco tiempo un gran volumen de información al respecto y la muestra seleccionada es significativamente grande, el muestreo aleatorio simple requerirá la numeración de cada elemento de la muestra antes de utilizar la tabla de números aleatorios para seleccionarla. Dicho

proceso de numeración puede tardar mucho por lo que, en su lugar, es recomendable aplicar el muestreo aleatorio sistemático.

Primero se calcula k , que es el resultado de dividir el tamaño de la población entre el tamaño de la muestra. Si k no es un número entero, se debe redondear.

Para seleccionar el primer elemento se utiliza muestreo aleatorio simple. Por ejemplo, se selecciona un número de la tabla de números aleatorios entre 1 y k , entonces a partir del recibo elemento seleccionado, se incorporará a la muestra cada k -ésimo elemento.

Antes de aplicar el muestreo aleatorio sistemático, se debe observar con cuidado el orden físico de la población. Cuando el orden físico se relaciona con la característica de la población, no se debe aplicar el muestreo aleatorio sistemático. Por ejemplo, si la información se archiva en orden creciente, el muestreo aleatorio sistemático no garantiza una muestra aleatoria. Por cuanto, se debe aplicar otros métodos de muestreo para evitar el sesgo que esto provocaría.

2.2.3. Muestreo estratificado

En el muestreo estratificado se divide la población en clases o estratos y se escoge, aleatoriamente, un número de individuos de cada estrato proporcional al número de componentes de cada estrato.



Cuando una población se divide en grupos a partir de ciertas características, se aplica el muestreo aleatorio estratificado con el fin de garantizar que cada grupo se encuentre representado en la muestra. A los grupos también se les denomina estratos.

Por ejemplo, los encuestados en una investigación, se pueden agrupar por grupos etarios, por sexo o nivel escolar. Una vez definidos los estratos, se aplica el muestreo aleatorio simple en cada grupo o estrato con el fin de formar la muestra.

Ejemplo 8: Se desea estudiar los gastos en I+D de las 100 empresas más grandes de su país. Suponga que el objetivo del estudio consiste en determinar si las empresas más rentables invierten en I+D mayor cantidad de dinero que las empresas con un registro de bajo rendimiento o déficit. Para asegurar que la muestra sea una representación imparcial de las 100 empresas, estas se deben agrupar de acuerdo con el sector económico en el que operan. La tabla 6 incluye los estratos y las frecuencias relativas para seleccionar una muestra de 10 empresas.

Estrato	Sector en que opera	Cantidad de empresas	Frecuencia Relativa	Muestra
1	Industrial	18	0,18	2
2	Turismo	12	0,12	1
3	Comunicaciones	18	0,18	2
4	Farmacéutico	10	0,1	1
5	Agrícola	15	0,15	1
6	Transporte	9	0,09	1
7	Comercio	18	0,18	2
	Total	100	1	10

Tabla 6. Composición de la muestra del ejemplo 8

Podría no seleccionar ninguna de las empresas que aparecen en los estratos 1 o 5 sencillamente por azar. No obstante, el muestreo aleatorio estratificado garantizará que por lo menos una empresa de los estratos menores aparezca en la muestra. Se considera una selección de 10 empresas para desarrollar el estudio, entonces se seleccionará de forma aleatoria 2 (0.18×10) empresas del estrato 1; 1 (0.12×50), del estrato 2, etc.

En este caso, el número de empresas en cada estrato es proporcional a la frecuencia relativa del estrato en la población. El muestreo estratificado ofrece la ventaja de que en algunos casos, refleja con mayor fidelidad las características de la población que el muestreo aleatorio simple o el muestreo aleatorio sistemático.

2.2.4. Muestreo por conglomerados

Si no se dispone de la relación de los elementos de la población, o de los posibles estratos, resulta imposible aplicar los muestreos anteriores. Por cuanto, se emplearía el llamado muestreo por conglomerados. En lugar de elegir individuos directamente, se eligen unidades más amplias donde se clasifican los elementos de la población llamados conglomerados. En cada etapa del muestreo en lugar de seleccionar elementos al azar se seleccionan conglomerados.

Los conglomerados deben ser tan heterogéneos como la población a estudiar, para que la represente bien. Luego se elegirán algunos de los conglomerados al azar, y dentro de estos, analizar todos sus elementos o tomar una muestra aleatoria simple.

No se debe confundir estrato y conglomerado. Un estrato es homogéneo (sus elementos tienen las mismas características), mientras que un conglomerado es heterogéneo (debe representar bien a la población).

Si se desea determinar la opinión de los residentes de algún estado con referencia a las políticas federales y estatales de protección ambiental. Seleccionar una muestra aleatoria de residentes y ponerse en contacto con cada persona requeriría mucho tiempo y resultaría muy costoso. Sería mejor aplicar el muestreo por conglomerados y subdividir el estado en pequeñas unidades: condados o regiones. Con frecuencia se les conoce como unidades primarias.

Si se dividió el estado en 15 unidades primarias, se seleccionan al azar cuatro regiones, 2, 7, 4 y 12, y se concentra la atención en estas unidades primarias. Se puede tomar una muestra aleatoria de los residentes de cada una de estas regiones y entrevistarse con ellos (combinación de un muestreo por conglomerados y un muestreo aleatorio simple).

El estudio de los métodos de muestreo de las secciones anteriores no incluye todos los métodos de muestreo disponibles para el investigador. Si se emprendiera un proyecto de investigación importante de marketing, finanzas, contabilidad u otras áreas, se necesitaría consultar libros dedicados exclusivamente a la teoría del muestreo y al diseño de muestras.

2.2.5. Error de muestreo

En los subepígrafes anteriores se aludieron métodos de muestreo útiles para seleccionar una muestra que constituya una representación imparcial o sin sesgos de la población. Es importante señalar que, en cada método, la selección de cualquier posible muestra de determinado tamaño de una población tiene una posibilidad o probabilidad conocida que constituye otra forma de describir un método de muestreo sin sesgo.

Las muestras se emplean para determinar características de la población. Por ejemplo, con la media de una muestra se calcula la media de la población. No obstante, como la muestra forma parte o es una porción representativa de la población, es poco probable que su media sea exactamente igual a la media poblacional.

Asimismo, es poco probable que la desviación estándar de la muestra sea exactamente igual a la desviación estándar de la población. Por lo tanto, puede esperar una diferencia entre un estadístico de la muestra y el parámetro de la población correspondiente. Esta diferencia recibe el nombre de error de muestreo.

2.3. Estimación de parámetros poblacionales

El objetivo principal de la estadística inferencial es el estudio de la población y la realización de predicciones a cerca de ella, pero a partir de una muestra, no de la población entera, en principio, se estimarán los índices de la población a partir de los índices correspondientes para la muestra.

Estimador insesgado

Un estimador que es una función de los datos muestrales x_1, x_2, \dots, x_n se conoce como estimador insesgado del parámetro poblacional θ si su valor esperado es igual a θ . Dicho de otra manera, es un estimador insesgado del, θ parámetro θ si $E(\hat{\theta}) = \theta$. La condición de que el estimador es insesgado supone que el valor promedio es exactamente correcto.

Estimador eficiente

Si se comparan dos estadísticos de una muestra del mismo tamaño y se quiere decidir cuál de ellos es un estimador más eficiente, se escogería el que tuviera el menor error estándar o la menor desviación estándar de la distribución muestral. Se escoge una muestra de un tamaño determinado y se debe decidir si se utiliza la media de la muestra o la mediana de la muestra para estimar la media de la población.

Si calcula el error estándar de la media de la muestra y encuentra que es inferior el error estándar de la mediana de la muestra, entonces se puede decir que la media de la muestra es un estimador más eficiente de la media poblacional, ya que su error estándar es menor.

En resumen, se dice que un estimador es el más eficiente para un problema en particular, cuando tiene el error estándar más pequeño de todos los estimadores insesgados posibles. Se utiliza la palabra eficiente porque, el estimador hace el mejor uso posible de los datos muestrales.

Estimador consistente

Un estadístico es un estimador consistente de un parámetro de población si al aumentar el tamaño de la muestra, se tiene casi la certeza de que el valor de la estadística se aproxima bastante al valor del parámetro poblacional. Un estimador consistente se vuelve más confiable al tener tamaños de muestra más grandes.

Si se pregunta acerca de la posibilidad de aumentar el tamaño de la muestra para obtener más información sobre un parámetro poblacional, se investiga primero si su estadístico es un estimador consistente o no. Si no lo es, se desperdiciará tiempo y dinero al tomar muestras más grandes. Un estimador es consistente si se aproxima al

parámetro poblacional con probabilidad uno a medida que el tamaño de la muestra tiende a infinito.

2.3.1. Tipos de estimaciones

Se utilizan universalmente dos tipos de estimaciones concernientes a una población: una estimación puntual y una estimación de intervalo. Una estimación puntual es un solo número que se utiliza para estimar un parámetro de población desconocido.

A menudo, una estimación puntual es insuficiente debido a que solo tienen dos opciones: es correcta o no lo es. Si se plantea solamente que la afirmación sobre cierto plan de ventas está equivocada, no sabe cuán mal está y no puede tener la certeza de que la estimación sea confiable. Si la afirmación está errada por 10%, podría aceptar o no, según determinado criterio, el plan como una buena estimación.

Pero si está equivocada en un 20% o más, se rechazaría como estimación de las ventas futuras. Entonces, una estimación puntual es mucho más útil si está acompañada por una estimación del error que podría estar implicado. Una estimación de intervalo es un rango de valores que se utiliza para estimar un parámetro de la población.

Una estimación de este tipo indica el error de dos maneras: por la extensión del intervalo y por la probabilidad de que el verdadero parámetro poblacional se encuentre dentro del intervalo.

En este caso, un jefe de departamento diría: “Estimo que las ventas reales del mes próximo semestre estará entre \$100000,00 y \$100000,00, y es muy probable que las ventas se encuentren dentro de este intervalo.” Con esto se tiene una mejor idea de la confiabilidad de estimación. Ahora se puede presupuestar la compra de insumos y materiales con un margen de seguridad de un 10%.

Estimación por puntos

La inferencia estadística más sencilla es la estimación puntual o por punto, en la que se calcula un valor único (estadístico) con los datos muestrales para estimar un parámetro poblacional. En una primera aproximación, parece lógico pensar que, si se quiere determinar la media de una cierta población, y se ha cogido una muestra representativa de dicha población, la media de la muestra (que es fácilmente calculable porque se tienen los datos) será muy parecida a la de la población y, por tanto, sirve para estimarla.

Se debe distinguir entre los parámetros poblacionales y los estadísticos poblacionales. Los parámetros poblacionales son los índices centrales y de dispersión que definen a una población. La media poblacional μ y la desviación típica poblacional σ . En el caso

de proporciones, la proporción de población que tiene una determinada característica la denotaremos por p y la proporción que no la cumple por $q = 1-p$. (como en la distribución binomial)

Los estadísticos poblacionales son los índices centrales y de dispersión que definen a una muestra. La media muestral por \bar{x} y la desviación típica muestral por s .

En el caso de proporciones, la proporción de muestra que tiene una determinada característica se denota por \hat{p} y la proporción que no la cumple por $\hat{q} = 1 - \hat{p}$. El problema de la estimación radica en que los datos disponibles son una muestra, y lo que se puede calcular es x y s (o bien \hat{p} y \hat{q} , y a partir de estos intentar estimar quiénes tienen que ser μ y σ (o bien p y q), los reales para la población.

En la estimación por puntos, el conocimiento de un estadístico muestral permitirá decidir cuál es el correspondiente parámetro de la población. Para ello, se debe conocer cuál es la relación entre un estadístico y el correspondiente parámetro. Por tanto, resulta conveniente introducir los elementos teóricos y de cálculo que aporten las herramientas para identificar los principales estimadores puntuales de los parámetros poblacionales.

2.3.2. Cálculo de los principales estadísticos de una muestra aleatoria

Los estadísticos que más se utilizan para medir el centro de un conjunto de datos acomodados en orden de magnitud, así como la dispersión de estos, son los siguientes.

- La media,
- La mediana
- La moda
- La varianza
- La desviación estándar

Se profundizará a continuación en sus definiciones y fórmulas para su cálculo.

Sean X_1, X_2, \dots, X_n representaciones de n variables aleatorias muestrales, entonces:

Media muestral

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (\text{Fórmula 17})$$

Note que el estadístico \bar{X} toma el valor $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ cuando X_i toma el valor x_i . El término media muestral se aplica tanto al estadístico \bar{X} como a su valor calculado \bar{x} .

Mediana muestral

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{(n+1)/2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{2}(x_{n/2} + x_{\frac{n}{2}+1}) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \quad (\text{Fórmula 18})$$

La mediana muestral es una medida de localización que indica el valor central de la muestra.

Moda muestral

Es el valor de x_i que presenta mayor frecuencia relativa, o sea, es el valor que más se repite en la muestra.

Varianza muestral

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (\text{Fórmula 19})$$

(2.3)

El valor calculado de S^2 para una muestra dada se denota con s^2 . Obsérvese que S^2 se define como el promedio de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones con respecto a su media.

Desviación estándar muestral

$$S = \sqrt{S^2} \quad (\text{Fórmula 20})$$

Igualmente el valor calculado de S se denotará por s y ambas se definen como la raíz cuadrada del promedio de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones con respecto a su media. Esta medida de variabilidad se expresa en términos lineales.

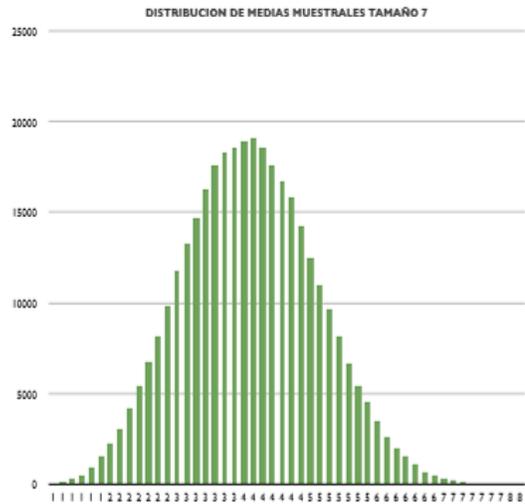
2.4. Distribuciones muestrales

Al utilizar un estadístico muestral para hacer afirmaciones respecto a los valores de los parámetros de la población, se pueden cometer errores significativos debido a que esta única muestra puede no resultar representativa de la población y el error de estimación puede llegar a ser muy significativo. Por eso es necesario que se estudie la distribución muestral asociada al estadístico. Esto es la distribución de probabilidad del estadístico.

Las aplicaciones de tales distribuciones muestrales a problemas de inferencia estadística en la investigación científica son considerables, debido a su estrecha relación con la población objeto de estudio. La distribución muestral de un estadístico depende de la distribución de la población, del tamaño de las muestras y del método de selección de las muestras.

Las distribuciones muestrales de \bar{X} y S^2 constituyen herramientas eficientes a partir de las cuales se pueden hacer inferencias acerca de los parámetros poblacionales μ y σ^2 . La distribución muestral de \bar{X} con tamaño muestral n es la distribución que resulta cuando un experimento se lleva a cabo una y otra vez (siempre con una muestra de tamaño n) y resultan los diversos valores de \bar{X} .

Por lo tanto, esta distribución muestral describe la variabilidad de los promedios muestrales alrededor de la media de la población μ . En el caso de la máquina despachadora de bebidas, el conocer la distribución muestral de \bar{X} le permite al analista encontrar una discrepancia “típica” entre un valor \bar{x} observado y el verdadero valor de μ .



En el caso de la distribución de S^2 se aplica el mismo principio. La distribución muestral produce información acerca de la variabilidad de los valores de s^2 alrededor de σ^2 en experimentos que se repiten.

2.4.1. Distribución muestral de la media

La primera distribución muestral importante a considerar es la de la media \bar{X} . Si de una población normal con media μ y varianza σ^2 , se toma una muestra aleatoria de n observaciones. La observación $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, de cada muestra aleatoria tendrá entonces la misma distribución normal que la población de donde se tomó. Por lo que se plantea que:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n) \quad \text{(Fórmula 21)}$$

Sigue una distribución normal con media

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{1}{n} (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n) = \mu \quad \text{(Fórmula 22)}$$

Y varianza

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{n^2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2) \quad \text{(Fórmula 23)}$$

La distribución muestral de \bar{X} , correspondiente a las muestras de una población con distribución desconocida, ya sea finita o infinita, será aproximadamente normal con media μ y varianza σ^2/n , siempre que el tamaño de la muestra sea suficientemente grande. Este resultado es una consecuencia inmediata del siguiente teorema, que se conoce como teorema del límite central.

2.4.2. Teorema del límite central

Si \bar{X} es la media de una muestra aleatoria de tamaño n , tomada de una población con media μ y varianza σ^2 , entonces la forma límite de la distribución:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

a medida que $n \rightarrow \infty$, es la distribución normal estándar $n(z; 0, 1)$.

El teorema del límite central es, tal vez, el más importante de toda la inferencia estadística, pues asegura que la distribución de muestreo de la media se aproxima a la normal al incrementarse el tamaño de la muestra. Hay situaciones teóricas en las que el teorema del límite central no se cumple, pero casi nunca se encuentran en la toma de decisiones práctica.

De hecho, una muestra no tiene que ser muy grande para que la distribución de muestreo de la media se acerque a la normal. Los especialistas en estadística utilizan la distribución normal como una aproximación a la distribución de muestreo siempre que el tamaño de la muestra sea de al menos 30, pero la distribución de muestreo de la media puede ser casi normal con muestras de incluso la mitad de ese tamaño.

“La importancia del teorema del límite central es que nos permite usar estadísticas de muestra para hacer inferencias con respecto a los parámetros de población, sin saber sobre la forma de la distribución de frecuencia de esa población más que lo que podamos obtener de la muestra” (Levin, 2004).

El tamaño de la muestra $n = 30$ es un lineamiento para el teorema del límite central. Sin embargo, como indica el planteamiento del teorema, la suposición de normalidad en la distribución de \bar{X} se vuelve más precisa a medida que n se hace más grande.

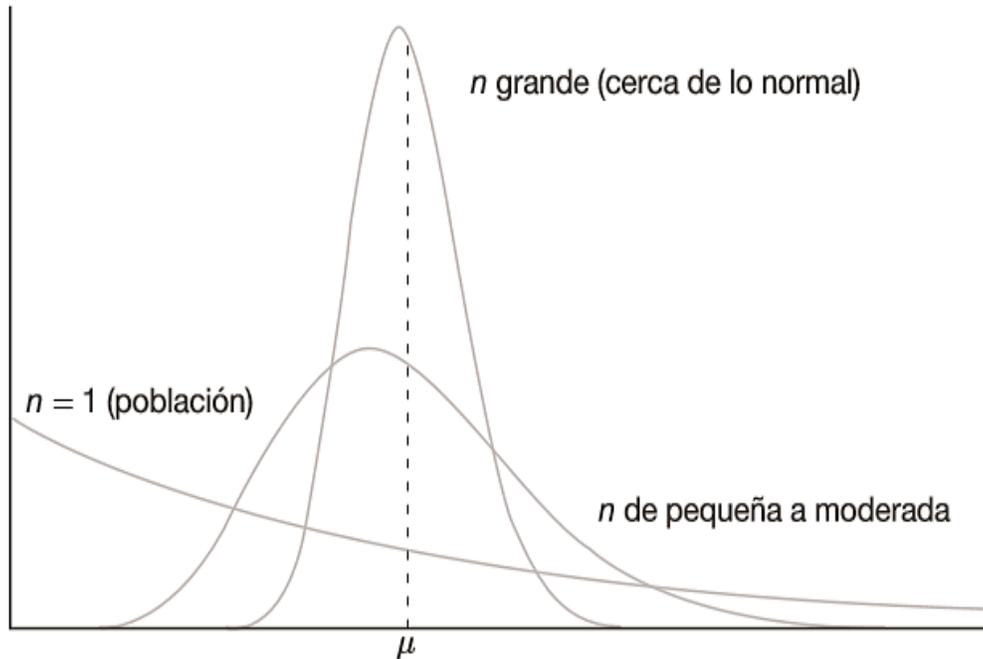


Figura 13. Teorema del límite central (Walpole, 2012)

En la figura 13 se ilustra cómo funciona el teorema. La figura indica cómo la distribución de \bar{X} se acerca más a la normalidad a medida que aumenta n , empezando con la distribución claramente asimétrica de una observación individual ($n = 1$).

Ejemplo 9: Como parte de un experimento social se realizaron estudios sobre los procesos electorales de un país. Fue elegida para el estudio determinada región, donde en cada sede electoral fueron convocadas 350 personas seleccionadas mediante un muestreo aleatorio por conglomerados.

A partir de los resultados obtenidos, se desea estimar el nivel de participación medio de toda la región al proceso oficial de votaciones, así como la variabilidad que puede esperarse que ocurra en ese momento. En la tabla 7 se muestran los datos relacionados al proceso de escrutinio.

A partir del procesamiento de los datos obtenidos, puede inferirse que, a nivel poblacional, se espera una asistencia promedio de 296 votantes, con una dispersión (desviación estándar) de 29.58 personas.

Muestra	Cantidad de votos por urna (x_i)	x_i^2	Media muestral \bar{x}	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	338	114244	296	42	1764
2	341	116281	296	45	2025
3	258	66564	296	-38	1444
4	284	80656	296	-12	144
5	336	112896	296	40	1600
6	258	66564	296	-38	1444
7	258	66564	296	-38	1444
8	301	90601	296	5	25
9	266	70756	296	-30	900
10	306	93636	296	10	100
11	265	70225	296	-31	961
12	261	68121	296	-35	1225
13	329	108241	296	33	1089
14	298	88804	296	2	4
15	272	73984	296	-24	576
16	342	116964	296	46	2116
17	285	81225	296	-11	121
18	296	87616	296	0	0
19	315	99225	296	19	361
20	295	87025	296	-1	1
21	284	80656	296	-12	144
22	343	117649	296	47	2209
23	261	68121	296	-35	1225
24	276	76176	296	-20	400
25	296	87616	296	0	0
26	346	119716	296	50	2500
27	305	93025	296	9	81
28	301	90601	296	5	25
29	259	67081	296	-37	1369
30	305	93025	296	9	81
Suma	8880	2653858		$\sum (x_i - \bar{x})^2$	25378
Media	296				296
S^2	875.103448			$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$	875.103448
s	29.5821475			$S = \sqrt{S^2}$	29.5821475

Tabla 7. Resultados de estudio sobre proceso electoral

2.5. Estimación por intervalos de confianza

Aunque un estimador puntual se aproxime al parámetro poblacional, sería conveniente medir cuán próximo se encuentra en realidad. Un intervalo de confianza sirve para este propósito.

“Un intervalo de confianza es el conjunto de valores que se forma a partir de una muestra de datos de forma que exista la posibilidad de que el parámetro poblacional ocurra dentro de dicho conjunto con una probabilidad específica. La probabilidad específica recibe el nombre de nivel de confianza” (Lind, 2012).

Por ejemplo, se estima que en las compras mensuales de un segmento de mercado de un producto, un intervalo de este valor aproximado puede estar dentro de un rango entre \$20000.00 y \$28000.00.

Es necesario enunciar probabilísticamente la medida de la confiabilidad acerca de qué parámetro poblacional se encuentre dentro de ese intervalo. Se puede decir que se tiene un 95% de seguridad acerca de que el nivel de las compras del segmento de mercado mencionado estará entre \$20000.00 y \$28000.00 mensuales.

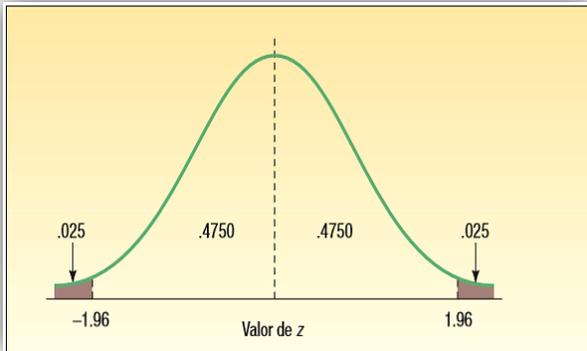
2.5.1. Intervalo de confianza para σ^2 conocida

Un intervalo de confianza se calcula con el empleo de dos estadísticos: la media muestral y la desviación estándar. Es conocido que la desviación estándar es un estadístico importante, porque mide la dispersión, o la amplitud, de una población o de una muestra de distribución.

Cuando se calcula un intervalo de confianza, se utiliza la desviación estándar para estimar el rango del intervalo de confianza. Para demostrar la idea del intervalo de confianza, se comienza con una suposición simple: se conoce el valor de la desviación estándar de la población.

Conocerla permite simplificar el desarrollo del intervalo de confianza, porque se puede utilizar la distribución normal estándar. Recuerde que la distribución muestral de la media es la distribución de todas las medias muestrales, con tamaño de la muestra n de una población. Se conoce la desviación estándar de la población.

A partir de esta información, y del teorema central del límite, se sabe que la distribución muestral sigue una distribución de probabilidad normal con una media y una desviación estándar. Este valor recibe el nombre de error estándar. Los resultados del teorema central del límite permiten afirmar lo siguiente con respecto a los intervalos de confianza utilizando el estadístico z .



El 95 % de las medias muestrales seleccionadas de una población se encontrará dentro de 1.96 errores estándares (desviación estándar de las medias muestrales de la media poblacional).

El 99% de las medias muestrales se encontrará a 2.58 errores estándares de la media poblacional.

Cómo determinar el intervalo de confianza de 95%

La amplitud del intervalo se determina por medio del nivel de confianza y de la magnitud del error estándar de la media. El error estándar de la media indica la variación de la distribución de las medias muestrales. Se trata, en realidad, de la desviación estándar de la distribución muestral de medias. Su fórmula es:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{Fórmula 24})$$

Donde:

$\sigma_{\bar{x}}$: es símbolo del error estándar de la media; se utiliza la letra griega porque se trata de un valor poblacional, y el subíndice recuerda que se refiere a la distribución de las medias muestrales.

σ : es la desviación estándar poblacional.

n : es el número de observaciones en la muestra.

La magnitud del error estándar se ve afectada por dos valores. El primero es la desviación estándar de la población. Mientras mayor sea la desviación estándar de la población, mayor será el error. Si la población es homogénea, de modo que genere una desviación estándar poblacional pequeña, el error estándar también será pequeño.

El segundo es la cantidad de observaciones de la muestra. Una muestra grande generará un error estándar pequeño en la estimación, lo que indicará que hay menos variabilidad en las medias muestrales.

Se conoce que la distribución muestral de \bar{X} , está centrada en μ y en la mayoría de las aplicaciones la varianza es más pequeña que la de cualesquier otro estimador de μ . Por lo tanto, se utilizará la media muestral \bar{x} como una estimación puntual para la media de la población μ .

Se considera la estimación por intervalos de μ . Si se selecciona una muestra a partir de una población normal o, a falta de esta, si n es suficientemente grande, se puede establecer un intervalo de confianza para μ considerando la distribución muestral de \bar{X} .

De acuerdo con el teorema del límite central, se puede esperar que la distribución muestral de \bar{X} esté distribuida de forma aproximadamente normal con media $\mu_{\bar{x}} = \mu$ y desviación estándar $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$. Al escribir $Z_{\alpha/2}$ para el valor Z por encima del cual se encuentra un área de $\alpha/2$ bajo la curva normal, por lo que se puede plantear:

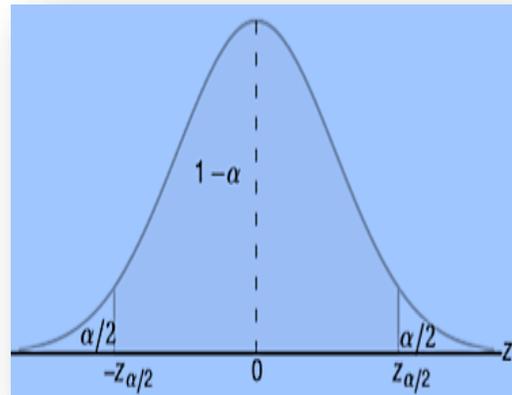
$$P(-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Donde:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Y por tanto:

$$P\left(-Z_{\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$



Si se multiplica cada término en la desigualdad por σ/\sqrt{n} y después se resta \bar{x} de cada término, y luego se multiplica por -1 (para invertir el sentido de las desigualdades), se obtiene:

$$P\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Por lo que la media poblacional se puede estimar mediante un intervalo de confianza para una muestra tamaño n , con σ^2 conocida

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{Fórmula 25})$$

O, simplemente:

$$\mu = \bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ejemplo 10: Un productor de baterías para teléfonos celulares, solicita una investigación para estimar su vida media. Los especialistas de la fábrica determinaron que la desviación estándar de la vida útil de las baterías es de 3 meses. Se encuestaron en las redes sociales de la compañía a 144 clientes, los cuales reportaron la vida útil de sus baterías y se pudo calcular una vida media muestral de 26 meses a partir de la información suministrada.

Al asumir un nivel de significación de confianza de 95% se obtuvo:

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$26 - 1.96 \frac{3}{\sqrt{144}} < \mu < 26 + 1.96 \frac{3}{\sqrt{144}}$$

$$26 - 0.49 < \mu < 26 + 0.49$$

$$25.51 < \mu < 26.49$$

Se puede asumir, con un nivel de confianza del 95%, que la vida media de las baterías del fabricante, está dentro del rango comprendido entre 25.5 meses y 26.5 meses.

2.5.2. Intervalo de confianza para la media con σ^2 conocida

Cuando no se conoce la varianza y, por ende, no se conoce la desviación estándar poblacional, se utiliza la desviación estándar de la muestra para estimar la desviación estándar poblacional; es decir, se utiliza la desviación estándar de la muestra para estimar la desviación estándar de la población. No obstante, al hacerlo no es posible utilizar la fórmula 25.

Como no conoce σ , no puede utilizar la distribución z. Sin embargo, hay una solución: utilizar la desviación estándar de la media y sustituir la distribución z con la distribución t. La distribución t es una distribución de probabilidad continua, con muchas características similares a las de la distribución z, como se pudo estudiar en epígrafes anteriores.

Por lo que la fórmula 25 se transforma en:

$$\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (\text{Fórmula 26})$$

Ejemplo 11: En un laboratorio, se desea estimar la calidad de un aceite vegetal como lubricante para cierta maquinaria industrial. Se muestrearon 20 probetas de acero en un

dispositivo de prueba y se midió el desgaste en términos de pérdida de masa de la probeta con una balanza de alta precisión. Se registró en cada caso las pérdidas expresadas en miligramos.

2.261 3.478 4.174 3.826 4.478 4.435 3.391 4.652 2.348 3.043
 2.348 4.739 3.913 3.783 3.696 4.130 3.043 2.261 3.304 3.391

Se desea estimar el desgaste medio mediante un el intervalo de confianza del 95%.

Los investigadores suponen que la población de las pérdidas de masa por desgaste sigue una distribución normal. En este caso es una suposición razonable. Además, la técnica del intervalo de confianza resulta muy poderosa y tiende a consignar cualquier error del lado conservador si la población no es normal.

No cabe suponer una condición normal cuando la población se encuentra pronunciadamente sesgada o cuando la distribución tiene colas gruesas. Existen métodos para manejar este problema en caso de que no sea posible suponer una condición normal.

En este caso, resulta razonable suponer una condición normal. No se conoce la desviación estándar de la población, pues como son las primeras pruebas de este tipo para el aceite, solo se cuenta con los datos muestrales recopilados. De ahí que resulte adecuado utilizar la distribución t y la fórmula 26 para encontrar el intervalo de confianza. Los estadísticos \bar{x} , S^2 y S , fueron calculados aplicando las fórmulas 17, 19 y 20 respectivamente.

$\bar{x} =$	3.5348
$S^2 =$	0.638
$S =$	0.7987
$t_{0.975;19}$	0.96

Sustituyendo en fórmula 26:

$$3.5348 - 0.96 \frac{0.7987}{\sqrt{20}} < \mu < 3.5348 + 0.96 \frac{0.7987}{\sqrt{20}}$$

$$3.392 < \mu < 3.706$$

Se puede afirmar con un nivel de confianza del 95%, que la pérdida de masa para la población de probetas está entre 3.392 y 3.706 miligramos.

2.5.3. Intervalo de confianza para una muestra grande

Con frecuencia los estadísticos recomiendan que incluso cuando no sea posible suponer la normalidad, se desconozca σ y $n \geq 30$, σ se puede reemplazar con s para poder utilizar el intervalo de confianza:

$$\mu = \bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

“A menudo se hace referencia a esto como un intervalo de confianza para una muestra grande. La justificación para esto reside solo en la presunción de que, con una muestra tan grande como 30 y una distribución de la población no muy sesgada, s estará muy cerca de la σ verdadera y, de esta manera, el teorema del límite central continuará siendo válido. Se debería destacar que esto es solo una aproximación y que la calidad de los resultados mejora a medida que aumenta el tamaño de la muestra” (Walpole, 2012).

Luego se procede de la misma forma que para el caso cuando se conoce σ .

2.5.4. Intervalo de confianza para la proporción con muestras grandes

En muchas investigaciones científicas se recopila información relacionada con la presencia de cierta característica en una muestra, con el objetivo de inferir su presencia a nivel poblacional. En estos casos se trabaja con una escala de medición nominal. Cuando se mide con una escala nominal, una observación se clasifica en uno de dos o más grupos mutuamente excluyentes y los valores se registran en términos de proporción.

Los especialistas en estadística, a menudo, utilizan una muestra para estimar la proporción de ocurrencias de un evento en una población. La proporción de la población se define por medio de p y su estadístico muestral por \hat{p} . Por consiguiente, p se refiere al porcentaje de éxitos en la población. Para crear el intervalo de confianza de una proporción, es necesario cumplir con los siguientes supuestos:

- Los datos de la muestra son resultado de conteos.
- Solo hay dos posibles resultados (lo normal es referirse a uno de los resultados como éxito y al otro como fracaso).
- La probabilidad de un éxito permanece igual de una prueba a la siguiente.
- Las pruebas son independientes. Esto significa que el resultado de la prueba no influye en el resultado de otra.
- Los valores np y $n(1 - p)$ deben ser mayores o iguales que 5. Esta condición permite recurrir al teorema central del límite y emplear la distribución normal estándar, es decir, Z para completar un intervalo de confianza.

Teóricamente, la distribución binomial es la distribución correcta a utilizar en la construcción de intervalos de confianza para estimar una proporción de población. Ello se debe a que el cálculo de probabilidades binomiales es demasiado tedioso, el uso de la distribución binomial para elaborar estimaciones de intervalo de la proporción de una población es una proposición complicada.

No obstante, es favorable que conforme aumenta el tamaño de la muestra, la distribución binomial puede aproximarse por una distribución normal apropiada que podemos utilizar para aproximar la distribución muestral. De ahí la importancia del cumplimiento del último supuesto para el desarrollo satisfactorio de este tipo de estimación.

El estimador puntual de la proporción de la población y el intervalo de confianza de una proporción de población es similar al que se construye para una media. El intervalo de confianza para la proporción se expresa:

$$p = \hat{p} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad (\text{Fórmula 27})$$

Ejemplo 12: A partir de una encuesta realizada a 200 jóvenes en una escuela, se desea estimar, con un 95% de confianza, la proporción de estudiantes que quisieran cursar alguna carrera universitaria. Como resultado se obtuvo que 165 jóvenes respondieron de manera positiva a la pregunta.

Se calcula:

$$\hat{p} = \frac{165}{200} = 0.825$$

Sustituyendo los valores en la fórmula 26 se obtiene:

$$p = 0.825 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.825 \cdot 0.175}{200}}$$

$$p = 0.825 \pm 0.053$$

$$0.772 < p < 0.878$$

Se puede afirmar para un nivel de confianza de 0,95, que entre el 77.2% y el 87.8% de los jóvenes de la población quisieran ingresar a la educación universitaria.

Ejemplo 13: Se desea calcular una estimación por intervalo de la proporción de estudiantes sobresalientes en una escuela, si en una muestra aleatoria simple de 50

estudiantes de dicha escuela se obtuvo una proporción de 0.15 con un nivel de confianza 0.95.

$$\hat{p} \pm \sqrt{\frac{pq}{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\approx 0.15 \pm \sqrt{\frac{0.15 * 0.85}{50}} (1.96) = 0.15 \pm 0.098$$

$0.052 \leq \hat{p} \leq 0.25$ con un nivel de significación de 0.95.

Ejemplo 14: En una empresa exportadora de cítricos se ha realizado un estudio sobre la calidad del proceso de envasado de limones. Se ha analizado una muestra de 49 calas y se obtuvo que el peso promedio por cajas $\bar{x} = 55$ kg y una desviación típica $s=18$.

Se desea calcular:

- a) Una estimación por intervalo para el peso promedio de las cajas con un 90% de confiabilidad.
- b) Con qué confiabilidad el intervalo (48.3657; 61.6343) contiene a μ .

Solución:

$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{n}}(n-1)$ <p>a) $\approx 55 \pm \frac{18}{7} * 1.64$</p> <p>$55 \pm 4.2171$</p> <p>$50.78 \leq \mu \leq 59.21$</p>	$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{n}}(n-1) = 61.6343$ $55 \pm \frac{18}{7} t_{1-\frac{\alpha}{n}}(n-1) = 61.6343$ $t_{1-\frac{\alpha}{n}} = \frac{61.6343 - 55}{2.5714}$ <p>b) $t_{1-\frac{\alpha}{n}} = 2.58$</p> $1 - \frac{\alpha}{n} = 0.995$ $\frac{\alpha}{n} = 0.005$ $\alpha = 0.01$ $1 - \alpha = 0.99$
--	--

2.5.5. Representatividad de la muestra

Existen reglas básicas para el diseño de los modelos estadísticos. Entre ellas se destaca el hecho de lograr la representatividad de la muestra seleccionada en función del contexto y la finalidad de la investigación. Al respecto hay que considerar tanto el tamaño de la muestra como la calidad en la selección de sus elementos. Esta es una de las decisiones que más se consulta en los programas académicos y en las que con mayor frecuencia se encuentran dificultades.

2.5.6. Tamaño de la muestra

El tamaño de muestra es fundamental tanto en la pertinencia del método de inferencia estadístico que se utilice como en el grado de impacto que se logre en sus resultados (Rositas, 2014). Desarrollar una investigación puede resultar un trabajo bien costoso en términos materiales, de tiempo y accesibilidad. De ahí que sea necesario que con un tamaño adecuado se puedan obtener resultados que se puedan generalizar a la población.

No es posible encontrar una respuesta sencilla y definitiva como un porcentaje de la población. De hecho, mientras mayor sea el tamaño de la población menor será la proporción de esta requerida en la muestra.

“El tamaño de muestra depende del objetivo de la investigación, de la naturaleza de la población que se estudia, el nivel de exactitud requerido, el número de variables incluidas en la búsqueda, el tipo de investigación, entre otros aspectos a tener en cuenta” (Cohen, Manion & Morrison, 2015).

Muchos autores sostienen que 30 es el número mínimo de elementos de una muestra para poder usar algunas formas de análisis estadísticos sobre los datos obtenidos. No obstante, este suele ser un número muy pequeño para la fiabilidad. Otros insisten en que, si existe un elevado potencial de variabilidad en las respuestas de los participantes en la investigación, entonces esto incrementará el tamaño requerido de la muestra (Gorard, 2003).

Otros investigadores afirman que el tamaño de la muestra depende tanto del tamaño de la población como de su heterogeneidad (Bailey, 2007). Así, para poblaciones de similar heterogeneidad en la variable que se estudia, mientras mayor sea la población mayor deberá ser la muestra. Para poblaciones de igual tamaño, mientras mayor sea la heterogeneidad mayor deberá ser la muestra.

Otro aspecto a considerar es la naturaleza de las variables de estudio. Contrario a lo que muchos investigadores puedan pensar inicialmente, las variables cualitativas requieren mayores tamaños de muestras que las cuantitativas.

Algunos plantean aspectos que incrementan el tamaño de las muestras. Entre estos destacan la heterogeneidad con respecto a la variable que se analiza, que haya muchas variables, que se esperen pequeñas diferencias o relaciones, cuando la muestra será dividida en subgrupos de estudio, cuando no se puede acceder a medidas fiables de la variable dependiente.

Al respecto Oppenheim (1992) añade la perspectiva de la naturaleza de las escalas que se utilizarán para las ediciones, mientras mayor sea el número de posibles categorías mayor tendrá que ser la muestra.

Pero, en resumen, ¿Qué tan grande debe ser la muestra? Si esta es muy pequeña, puede no alcanzar para el logro de los objetivos del análisis; y si es demasiado grande se desperdician recursos al tomar la muestra. Se presentará cierto grado de error de muestreo por no estudiar a la población completa. Siempre que se tome una muestra, se perderá algo de información útil de la población. Si se quiere tener un alto nivel de precisión se debe muestrear la población lo suficiente para asegurarse de que se obtuvo la información requerida.

El error de muestreo se puede controlar si se selecciona una muestra con el tamaño adecuado. En general, cuanto más precisión se quiera, más grande será el tamaño necesario de la muestra. A continuación se examinarán algunos métodos útiles en la determinación del tamaño necesario de muestra para cualquier nivel específico de precisión.

2.5.7. Cálculo del tamaño de muestra para estimar una media

Una variable relevante cuando se trabaja con intervalos de confianza es el tamaño de la muestra. Sin embargo, en la práctica, no es una variable, sino una decisión que se toma para lograr una acertada estimación del parámetro poblacional. Esta decisión se basa en tres variables: el error que está dispuesto a asumir el investigador, el nivel de confianza deseado, y la dispersión poblacional.

- El error que está dispuesto a asumir el investigador

El máximo error admisible, designado e , es la magnitud que se suma y resta de la media muestral (o proporción muestral) para determinar los puntos extremos del intervalo de confianza, o sea, es la magnitud del error que se tolerará al estimar un parámetro poblacional.

No siempre resulta conveniente un margen de error reducido pues existe una relación inversa entre el margen de error y el tamaño de la muestra. Un margen de error más grande permitirá tener una muestra más pequeña y un intervalo de confianza más amplio.

- El nivel de confianza deseado

Al trabajar con un intervalo de confianza, lógicamente se elegirán niveles de confianza relativamente altos como de 95 y 99%, que son los más comunes. Para calcular el tamaño de la muestra, se necesitará un estadístico z que corresponda al nivel de confianza elegido.

El nivel de confianza de 95% corresponde al valor z de 1.96, y el nivel de confianza de 99%, a un valor z de 2.58. Nótese que las muestras más grandes (con su consecuente requerimiento de más tiempo y dinero para recolectarlas) corresponden a niveles de confianza más altos. Asimismo, obsérvese que se utiliza un estadístico z.

- La dispersión poblacional

El factor de la dispersión incide de la siguiente forma: si la dispersión de la población es muy alta, se requiere una muestra grande para que arroje resultados significativos. Por el contrario, si se encuentra concentrada (homogénea), el tamaño de muestra que se requiere será menor. No obstante, puede ser necesario utilizar un estimador de la desviación estándar de la población. Se proponen algunas sugerencias para determinar dicho estimador.

A partir de la relación de n con estas tres variables, se puede calcular el tamaño adecuado de la muestra para realizar la investigación. La ecuación que las relaciona no es otra que el margen de error que se utiliza para calcular los puntos limitantes de los intervalos de confianza para estimar una media poblacional.

$$e = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Despejando n se obtiene:

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{e} \right)^2 \quad (\text{Fórmula 28})$$

Ejemplo 15: En una provincia se desea efectuar una investigación acerca de los ingresos mensuales de las familias más pobres. Se supo, gracias a la base a los datos del último censo realizado, que en la provincia viven cerca de 300 familias con esta característica y que la desviación estándar de esos ingresos familiares es de \$120.00. Calcule el tamaño de muestra que garantice un error no mayor de \$50,00, para un nivel de confianza del 95%.

Sustituyendo los valores en la fórmula 28 se obtiene:

$$n = \left(\frac{1.96 \cdot 150}{50} \right)^2 = 34.57 \approx 35$$

El estudio debe realizarse a 35 familias de la provincia para garantizar un error no mayor de \$50.00 para una confianza del 95%.

2.5.8. Cálculo del tamaño de muestra para la proporción de una población

Para determinar el tamaño de la muestra en el caso de una proporción, es necesario especificar tres variables mencionadas en el epígrafe anterior.

- El margen de error
- El nivel de confianza deseado
- La variación o dispersión de la población a estudiar

En lo adelante solo se presentarán las fórmulas necesarias para el cálculo de los distintos tamaños de muestra, pues el análisis es similar en todos los casos.

$$n = p(1 - p) \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{e} \right)^2 \quad (\text{Fórmula 29})$$

Capítulo 3. Pruebas de hipótesis

3.1 Introducción a las pruebas de hipótesis

En muchas ocasiones, el problema al que se enfrentan el científico o el investigador no es tanto la estimación de un parámetro de la población, sino la formación de un procedimiento de decisión que se base en los datos, y que pueda producir una conclusión acerca de algún sistema científico.

Por ejemplo, un investigador médico puede decidir sobre la base de la evidencia experimental si beber café incrementa el riesgo de cáncer en los seres humanos; un ingeniero quizá tenga que decidir sobre la base de datos muestrales si hay una diferencia entre la precisión de un tipo de medidor y la de otro; o tal vez un sociólogo desee reunir los datos apropiados que le permitan decidir si el tipo de sangre y el color de ojos de un individuo son variables independientes.

En cada uno de estos casos el científico o el investigador postulan o conjeturan algo acerca de un sistema. Además, cada uno debe utilizar datos experimentales y tomar decisiones basadas en ellos. En cada caso, la conjetura se puede expresar en forma de hipótesis estadística. Los procedimientos que conducen a la aceptación o al rechazo de hipótesis estadísticas como estas comprenden un área importante de la inferencia estadística.

Por tanto, la prueba de hipótesis comienza con una suposición llamada hipótesis, que se hace acerca de un parámetro de población. Después se recolectan los datos muestrales, para el cálculo de los estadísticos y posteriormente, esta información y los

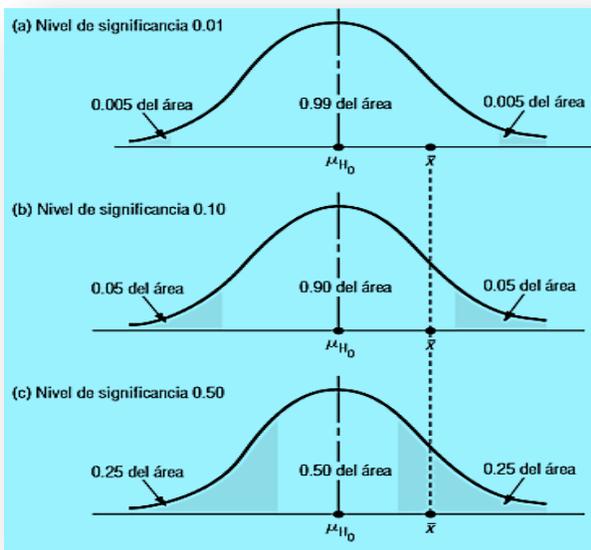
resultados de su procesamiento, se utilizan para decidir qué tan probable es que el valor hipotético del parámetro de población sea correcto.

Si en una investigación, se supone un cierto valor para una media poblacional, para probar la validez de esa suposición será necesario calcular un estadístico a partir de datos muestrales y determinar la diferencia entre el valor hipotético y el valor calculado. Luego se debe juzgar si la diferencia obtenida es estadísticamente significativa o no. Mientras más pequeña sea la diferencia, mayor será la probabilidad de que el valor hipotético para la media sea correcto.

“La prueba de hipótesis, como la emplean los especialistas en estadística, no prueba que algo es verdadero de la forma en que un matemático demuestra un enunciado. Más bien, proporciona un tipo de prueba más allá de toda duda razonable” (Lind, 2012). Existe un procedimiento de cinco pasos que sistematiza la prueba de una hipótesis. Al llegar al paso 5, se está en posibilidades de rechazar o no la hipótesis y arribar a conclusiones. A continuación, se presentan y profundizan cada uno de los pasos.

- Paso 1: se establece la hipótesis nula (H_0) y la hipótesis alternativa (H_1)

El primer paso consiste en establecer la hipótesis que se debe contrastar. Esta recibe el nombre de hipótesis nula, la cual se designa H_0 , y se lee “H sub-cero”. La letra mayúscula H representa la hipótesis, y el subíndice cero implica que “no hay diferencia”.



Por lo general, se incluye el término “no” en la hipótesis nula, que significa que no hay cambio. En términos generales, la hipótesis nula se formula para realizar una prueba y se rechaza o no se rechaza.

Es una afirmación que no se rechaza a menos que la información de la muestra ofrezca evidencia convincente de que es falsa. Si la hipótesis nula no

se rechaza sobre la base de los datos de la muestra, no es posible decir que la hipótesis nula sea verdadera.

La hipótesis alternativa describe lo que se concluirá si se rechaza la hipótesis nula. Se representa H_1 y se lee “H sub-uno”. También se le conoce como hipótesis de la

investigación. La hipótesis alternativa se acepta si la información de la muestra ofrece suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula.

La comprensión de las diferentes funciones que desempeñan la hipótesis nula y la hipótesis alternativa es fundamental para entender los principios de la prueba de hipótesis. La hipótesis alternativa, por lo general, representa la pregunta que se responderá o la teoría que se probará, por lo que su especificación es muy importante. La hipótesis nula se opone a H_1 , y a menudo, es el complemento lógico de H_1 .

- Paso 2: se selecciona un nivel de significancia

Después de establecer las hipótesis: nula y alternativa, el siguiente paso consiste en determinar el nivel de significancia. El nivel de significancia se expresa con la letra griega alfa α . En ocasiones también se conoce como nivel de riesgo.

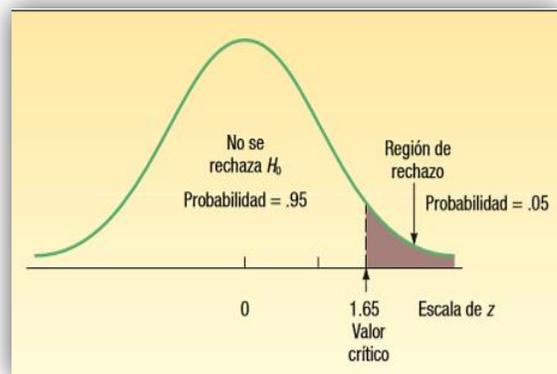
Este quizá sea un término más adecuado porque se trata del riesgo que se corre al rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera (sobre este particular se abundará más adelante). No existe un nivel de significancia único estándar o universal para probar hipótesis.

En algunos casos, se utiliza un nivel de significancia del 5%. Ciertos resultados de investigaciones publicados a menudo prueban hipótesis para un nivel de significancia del 1%. Es posible probar una hipótesis a cualquier nivel de significancia.

Se acostumbra a elegir el nivel de 0.05 en el caso de los proyectos de investigación relacionados con los consumidores; el nivel de 0.01 en relación con el del control de calidad, y el de 0.10 en el de las encuestas políticas. El investigador debe elegir el nivel de significancia antes de formular una regla de decisión y recopilar los datos de la muestra.

- Paso 3: se selecciona el estadístico de prueba

La decisión de rechazar o no, la hipótesis nula, en favor de la alternativa, deberá basarse en la información que da la muestra, a través de alguna medida asociada a ella, que se denomina estadístico de prueba o de contraste.



- Paso 4: se formula la regla de decisión

Una regla de decisión es un enunciado sobre las condiciones específicas en que se rechaza la hipótesis nula y aquellas en las que no se rechaza. La región o área de

rechazo define la ubicación de todos esos valores que son tan grandes o tan pequeños que la probabilidad de que ocurran en una hipótesis nula verdadera es muy remota.

El valor límite que de la región crítica o de rechazo se llama valor crítico del estadístico de prueba. Para un nivel de significancia de 0,95 se puede deducir que el área en que se acepta la hipótesis nula se localiza a la izquierda de 1.65 y el área de rechazo a la derecha, por tanto 1.65 es el valor crítico.

- Paso 5: se toma una decisión

El quinto y último paso en la prueba de hipótesis consiste en calcular el estadístico de la prueba, al compararla con el valor crítico y al tomar la decisión de rechazar o no la hipótesis nula.

Como se indicó, en la prueba de hipótesis solo es posible una de las dos decisiones: la hipótesis nula se acepta o se rechaza. En lugar de aceptar la hipótesis nula, algunos investigadores prefieren expresar la decisión como “no se rechaza H_0 ”, “se decide no rechazar H_0 ” o “los resultados de la muestra no permiten rechazar H_0 ”.

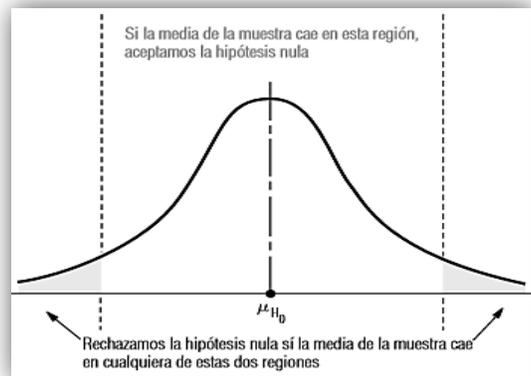
		Estado real	
		H_0	H_1
Decisión en el contraste	H_0	Decisión correcta	Error tipo II
	H_1	Error tipo I	Decisión correcta

Esto se debe a la presencia de dos tipos de errores asociados a las pruebas de hipótesis.

Existe la posibilidad de que la hipótesis nula se rechace siendo cierta, esto se conoce como error tipo I. Asimismo, existe una posibilidad definible de que la hipótesis nula se acepte cuando es falsa y este sería el error tipo II.

3.2 Pruebas de significancia de una y dos colas

En las pruebas de las siguientes medias hipotéticas de población, se tratarán pruebas de dos colas y de una cola. Una prueba de dos colas rechaza la hipótesis nula si la media de muestra es significativamente mayor o menor que la media hipotética de la población. En una prueba de dos colas existen dos regiones de rechazo. Una prueba de dos colas es apropiada cuando la hipótesis nula y la alternativa se plantean de la siguiente forma:



$$H_0: \mu = \mu_{H_0}$$

$$H_1: \mu \neq \mu_{H_0}$$

Donde

μ_{H_0} es un valor previamente fijado.

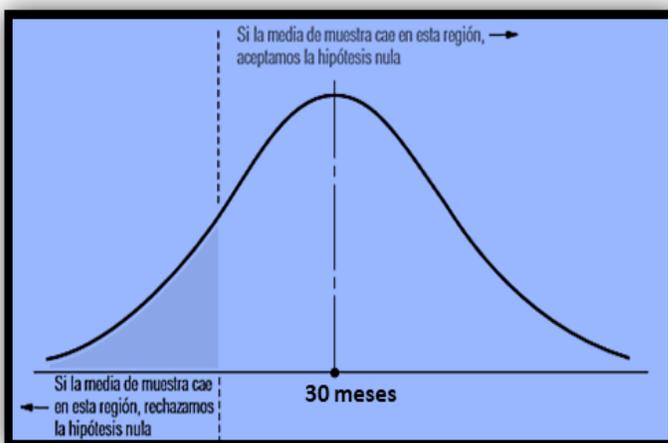
Retomando el ejemplo del fabricante de baterías para teléfonos celulares, quien se ha trazado la meta de que sus baterías alcancen una vida útil de 30 meses, o sea, se plantea:

$$H_0: \mu = \mu_{H_0} = 30$$

Si el tiempo de vida es más corto, perderá clientes en favor de su competencia. Si el tiempo de vida es más largo, tendrá un costo de producción muy alto porque tendrá que invertir en materias primas más costosas. Para verificar que su proceso de producción sea adecuado, se toma una muestra de la producción con el fin de probar la hipótesis. Como no quiere desviarse significativamente de 30 meses, en ninguna dirección, la hipótesis alternativa adecuada es: $H_1: \mu \neq 30$ y utiliza una prueba de dos colas. Esto es, rechaza la hipótesis nula si la vida media de los focos de la muestra está muy por arriba de 30 meses o muy por abajo de esa cifra.

Sin embargo, existen situaciones en las que no es apropiada una prueba de dos colas y se debe usar una prueba de una cola. En el caso de un mayorista que compra las baterías al fabricante del ejemplo anterior. El mayorista las compra en grandes lotes y

no desea aceptar un lote de baterías, a menos que su vida media sea 30 meses o más.



Cada vez que llega una remesa, el mayorista prueba una muestra para decidir si la acepta o no. La compañía rechazará el envío solo si le parece que su vida media es menor que los 30 meses. Si cree que las baterías son mejores que lo esperado (con una vida media superior a 30 meses) es claro que no

rechazará la remesa porque la vida más larga no tiene un costo adicional. Así que las hipótesis del mayorista son:

$$H_0: \mu = 30$$

$$H_1: \mu < 30$$

Un ejemplo mostrará los detalles del procedimiento para probar una hipótesis en cinco pasos. También se desea usar una prueba de dos colas; es decir, no interesa si los resultados de la muestra son más grandes o más pequeños que la media poblacional propuesta. Lo que interesa es si esta es diferente del valor propuesto para la media poblacional. Como en el capítulo anterior, conviene iniciar con un caso en el que se cuente con un historial de datos sobre la población y, de hecho, se conozca la desviación estándar.

Ejemplo 16: Una empresa fabricante de bicicletas para oficina sabe que las ventas semanales de su modelo deportivo sigue una distribución normal, con una media de 150 y una desviación estándar de 10. Luego de una inversión de mediana envergadura en publicidad, el vicepresidente de mercadeo pretende investigar si hubo algún cambio en las ventas semanales debido a la campaña. En otras palabras, ¿la cantidad media de bicicletas vendidas es superior a 150 semanales para un nivel de significancia de 0.01?

En este ejemplo aparecen dos datos importantes: la población de las ventas semanales sigue una distribución normal y la desviación estándar de esta distribución normal es de 10 bicicletas deportivas por semana. Por ello, es apropiado utilizar el estadístico Z para resolver este problema. Aplíquese entonces, el procedimiento de prueba de hipótesis estadística para investigar si cambió el nivel de ventas semanales de 150 bicicletas.

- Paso 1: se establecen las hipótesis nula y alternativa

La hipótesis nula es: la media de la población es de 150. La hipótesis alternativa es: la media es diferente de 150 o, la media no es de 150. Estas dos hipótesis se expresan de la siguiente manera:

$$H_0: \mu = 150$$

$$H_1: \mu \neq 150$$

Esta es una prueba de dos colas, pues la hipótesis alternativa no indica dirección alguna; o sea, no establece si la producción media es mayor o menor a 150. El vicepresidente solo desea saber si la tasa de producción es distinta de 150.

- Paso 2: se selecciona el nivel de significancia

Como ya se indicó anteriormente, se utiliza el nivel de significancia de 0.01. Este es la probabilidad de cometer un error tipo I, que es la probabilidad de rechazar una hipótesis nula verdadera.

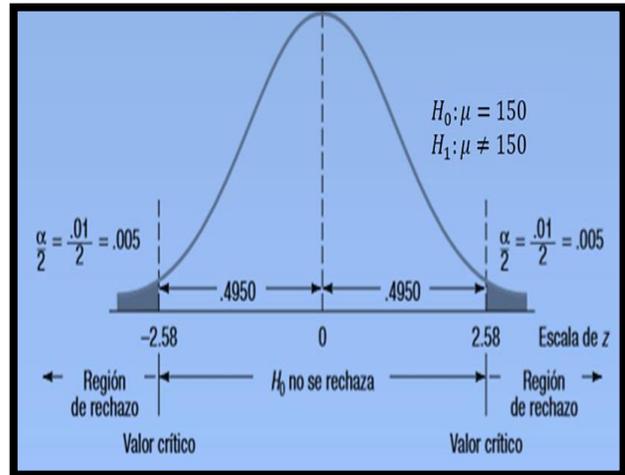
- Paso 3: se selecciona el estadístico de prueba

El estadístico de prueba de una muestra grande es Z. La transformación de los datos de producción en unidades estándares (valores Z) permite que se les utilice no solo en este problema, sino en otros relacionados con la prueba de hipótesis.

- Paso 4: se formula la regla de decisión

La regla de decisión se formula al encontrar los valores críticos de Z. Como se trata de una prueba de dos colas, la mitad de 0.01 o 0.005 se localiza en cada cola. Por consiguiente, el área en la que no se rechaza H_0 , que se ubica entre las dos colas, es 0.99.

Entonces: $0.5000 - 0.005 = 0.4950$, por lo que 0.4950 es el área entre 0 y los puntos críticos ± 2.58 .



- Paso 5: se toma una decisión y se interpreta el resultado

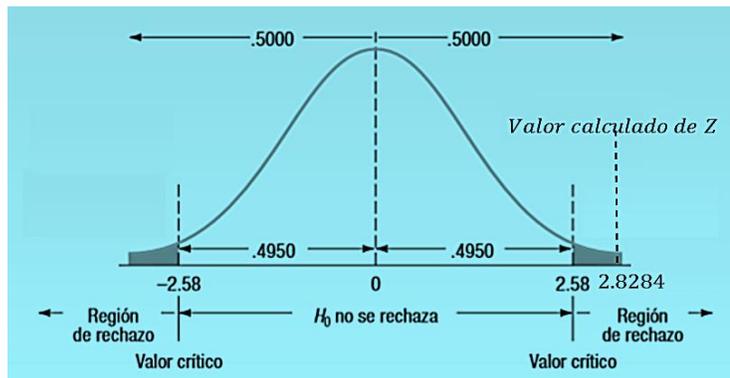
Se toma una muestra de la población (producción semanal), se calcula Z, se aplica la regla de decisión y se llega a la decisión de rechazar o no H_0 . La cantidad media de bicicletas deportivas vendidas en 50 semanas, ya que la planta cerró 2 semanas por vacaciones, es de 154. La desviación estándar de la población es de 10 bicicletas semanales. Al calcular el valor Z, se obtiene:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$Z = \frac{154 - 150}{10 / \sqrt{50}} = 2.8284$$

Como 2.8284 es mayor que el punto crítico 2.58, se rechaza a H_0 ,

por lo que se puede afirmar con un 99% de confianza, que el nivel de ventas semanales aumentó luego de la campaña de marketing que emprendió la fábrica.



3.2.1. Valor p en la prueba de hipótesis

Cuando se desea probar una hipótesis, se compara el estadístico de la prueba con un valor crítico. Se toma la decisión de rechazar la hipótesis nula o de no hacerlo. Así, por ejemplo, si el valor crítico es de 1.96 y el valor calculado del estadístico de prueba es de 2.19, la decisión consiste en rechazar la hipótesis nula.

En años recientes, debido a la disponibilidad del software de computadora, con frecuencia se da información relacionada con la seguridad del rechazo o aceptación; es decir, ¿cuánta confianza hay en el rechazo de la hipótesis nula? Este enfoque indica la probabilidad, en el supuesto de que la hipótesis nula sea verdadera, de obtener un valor del estadístico de la prueba, por lo menos, tan extremo como el valor real que se obtuvo.

Este proceso compara la probabilidad denominada valor p , con el nivel de significancia. Si el valor p es menor que el nivel de significancia, H_0 se rechaza. Si es mayor que el nivel de significancia H_0 no se rechaza. Se entiende por valor p la probabilidad de observar un valor muestral tan extremo o más que el valor observado, si la hipótesis nula es verdadera.

La determinación del valor p no solo obtiene como resultado una decisión respecto de H_0 , sino que brinda la oportunidad de observar la fuerza de la decisión. Un valor p muy pequeño como 0.0001, indica que existe poca probabilidad de que la hipótesis nula sea verdadera. Por otra parte, un valor p de 0.2033 significa que H_0 no se rechaza y que existe poca probabilidad de que sea falsa.

¿Cómo calcular el valor p ? Para ilustrarlo se recurre al ejemplo 16 en el que se rechazó la hipótesis nula relativa al nivel de ventas semanales, y se verificó que las ventas aumentaron luego de la campaña de marketing que emprendió la fábrica.

Se rechazó la hipótesis nula, pues el valor Z de 2.8284 cayó en la región de rechazo, la cual se dividió en $Z < -2.58$ y $Z > 2.58$. La probabilidad de hallar un valor Z de 2.8284 o más es de 0.002339. Para calcular el valor p , es necesario concentrarse en la región superior a 2.8284.

Un valor p es una manera de expresar la probabilidad de que la hipótesis nula sea falsa. Pero, ¿cómo interpretar un valor p ? Ya se mencionó que si el valor p es menor que el nivel de significancia, se rechaza la hipótesis nula; si es mayor que el nivel de significancia, no se rechaza. Asimismo, si el valor p es muy grande, es probable que H_0 sea verdadera; si el valor p es pequeño, es probable que H_0 no lo sea.

3.3. Pruebas de hipótesis paramétricas

Si se desean comparar dos poblaciones y realizar contrastes de hipótesis entre ellas es necesario conceptualizar varios elementos referidos a las distribuciones de muestreo para la diferencia entre dos parámetros de población. Debido a que ahora es necesario estudiar dos poblaciones en lugar de solo una, la distribución de muestreo que interesa es la distribución muestral de la diferencia entre medias muestrales.

3.3.1. Distribución de muestreo para la diferencia entre dos parámetros de población

La figura 14 puede ayudar a conceptualizar esta distribución de muestreo particular. En la parte superior de la figura se presentan dos poblaciones identificadas como población 1 y población 2.

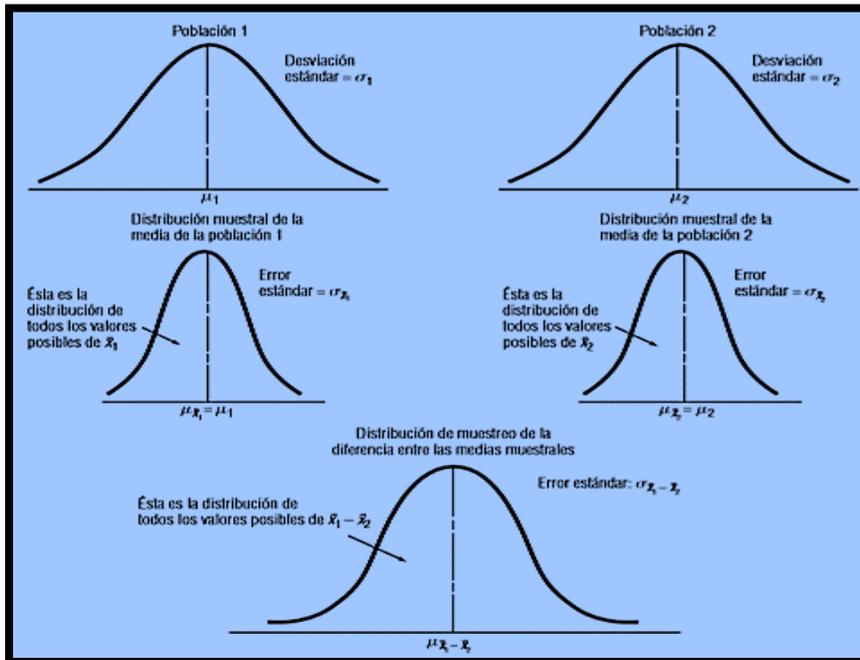


Figura 14. Distribución muestral de la diferencia entre medias muestrales (Levin, 2012)

Estas poblaciones tienen medias y desviaciones estándar respectivamente.

$$\mu_1 \text{ y } \sigma_1; \mu_2 \text{ y } \sigma_2$$

Debajo de cada población se observa la distribución muestral de la media para la población correspondiente. En la parte inferior de la figura se encuentra la distribución muestral de la diferencia entre las medias muestrales. Las dos distribuciones muestrales de la media teóricas de la figura están construidas a partir de todas las muestras posibles de un tamaño dado que pueden obtenerse de la distribución.

Se toma una muestra aleatoria de la distribución de la población 1 y otra muestra aleatoria de la distribución de la población 2. Si luego se restan las dos medias de las muestras, obtenemos:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2, \text{ una diferencia entre las medias muestrales}$$

Esta diferencia será positiva si \bar{X}_1 es mayor que \bar{X}_2 , y negativa \bar{X}_2 es mayor que \bar{X}_1 . Al construir una distribución de todas las diferencias posibles de las muestras, $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ se

termina con la distribución muestral de la diferencia entre las medias de las muestras que se ilustran la parte inferior de la figura. La media de la distribución muestral de la diferencia entre las medias muestrales se representan:

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \text{ que es equivalente a } \mu_1 - \mu_2, \text{ si } \mu_1 = \mu_2, \text{ entonces } \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 0$$

La desviación estándar de la distribución de las diferencias entre las medias de las muestras se conoce como error estándar de la diferencia entre dos medias y se calcula con la siguiente fórmula:

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad (\text{Fórmula 30})$$

Si se conocen las dos desviaciones estándar de la población, se puede estimar el error estándar de la diferencia entre dos medias. Conviene utilizar el mismo método de estimación del error estándar, y hacer que las desviaciones estándar de la muestra estimen las desviaciones estándar de la población de la siguiente manera: $\hat{\sigma} = s$

3.3.2. Pruebas para diferencias entre medias: muestras grandes

Ya se conoce que si se extraen dos muestras aleatorias independientes de tamaño n_1 y n_2 , respectivamente, de dos poblaciones con medias μ_1 y μ_2 y varianzas

$$\sigma_1^2 \text{ y } \sigma_2^2.$$

Sabemos que la variable aleatoria

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad (\text{Fórmula 31})$$

Para esta prueba se pueden definir 3 hipótesis:

- $H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$ contra $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$
- $H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq d_0$ contra $H_1: \mu_1 - \mu_2 > d_0$
- $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq d_0$ contra $H_1: \mu_1 - \mu_2 < d_0$

Por lo que el estadístico de prueba será:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

El resumen de la prueba para una y dos colas se muestra a continuación:

<i>Hipótesis</i>	<i>Estadígrafo común</i>	<i>Región crítica</i>
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$ contra $\mu - \mu_0 \neq d_0$	$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\{z \in \mathfrak{R} \mid z > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$
$\mu_1 - \mu_2 \leq d_0$ contra $\mu - \mu_0 > d_0$		$\{z \in \mathfrak{R} \mid z < -Z_{1-\alpha}\}$
$\mu_1 - \mu_2 \geq d_0$ contra $\mu - \mu_0 < d_0$		$\{z \in \mathfrak{R} \mid z > Z_{1-\alpha}\}$

En dos muestras aleatorias de tamaño $n_1=11$ y $n_2=13$ de poblaciones A y B se obtienen las medias muestrales $\bar{x}_1=73$ y $\bar{x}_2=76$ respectivamente. Si $\sigma_1^2=50$ y $\sigma_2^2=60$ son las varianzas poblacionales de A y B. ¿Podemos rechazar la hipótesis de igualdad de las medias poblacionales con un nivel de significación de 0,10 sobre la base de estos resultados?

Datos

$$\sigma_1^2=50 \quad \sigma_2^2=60$$

$$\bar{x}_1=73 \quad \bar{x}_2=76$$

$$n_1=11 \quad n_2=13$$

$$\alpha=0,10$$

Hipótesis

$$H_0 \mu=\mu_0 \quad H_1 \mu \neq \mu_0$$

Regla de decisión

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } |Z| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Cálculo del estadístico

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{73 - 76}{\sqrt{\frac{50}{11} + \frac{60}{13}}} \approx -0,99 \text{ Punto crítico}$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,95} \approx 1,64$$

Comparación

$0,99 < 1,64$

Decisión:

Rechazar H_0

Conclusión:

No se rechaza H_0 por lo que no se puede asegurar que las medias de estas poblaciones sean diferentes para un nivel de significación del 10%.

3.3.3. Dótimas para comparar las medias de dos distribuciones normales con varianzas desconocidas pero iguales

Podemos encontrar el caso en que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. De las muestras no podemos obtener σ , salvo si la muestra coincide con la población, pero si podemos obtener un valor aproximado, una estimación s_0 que va a ser igual a:

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Donde S_1^2 y S_2^2 son las varianzas de dos muestras simples aleatorias independientes de las poblaciones con medias μ_1 y μ_2 respectivamente y varianzas iguales a σ^2 .

Bajo estas condiciones y bajo H_0 el estadígrafo t obtenido y sustituyendo σ por su estimador s_0 en z tiene una distribución t - *student* con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Por todas estas razones, t será el estadígrafo a utilizar en todas las dótimas de este caso. De esta manera se tiene:

Hipótesis	Estadígrafo común	Región crítica
$\mu_1 = \mu_2$ contra $\mu \neq \mu_0$	$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ <p style="text-align: center;">con</p> $S_o = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$	$\{T \in \mathfrak{R} \mid T > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)\}$
$\mu_1 \geq \mu_2$ contra $\mu < \mu_0$		$\{T \in \mathfrak{R} \mid T < t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)\}$
$\mu_1 \leq \mu_2$ contra $\mu > \mu_0$		$\{T \in \mathfrak{R} \mid T > t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)\}$

Ejemplo 17: se lleva a cabo un experimento para comparar el desgaste por abrasivo de dos diferentes materiales laminados. Se prueban 12 piezas del material 1 mediante la exposición de cada pieza a una máquina para medir el desgaste. Diez piezas del material 2 se prueban de manera similar. En cada caso, se mide la profundidad del desgaste.

Las muestras del material 1 dan un desgaste promedio (codificado) de 85 unidades con una desviación estándar muestral de 4, mientras que las muestras del material 2 dan un promedio de 81 y una desviación estándar muestral de 5. ¿Podemos concluir con un nivel de significación de 0.05 que el desgaste abrasivo del material 1 excede el del material 2 en más de 2 unidades? Las poblaciones son aproximadamente normales con varianzas iguales.

Solución:

Se representa con μ_1 y μ_2 las medias poblacionales del desgaste abrasivo para el material 1 y el material 2, respectivamente.

- $H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 2$
- $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 2$
- $\alpha = 0.05$.

1. Región crítica: $t > 1.725$, donde $t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ con $u = 20$ grados de libertad.

2. Cálculos.

$$S_o = \sqrt{\frac{(11)(16) + (9)(25)}{12 + 10 - 2}} = 4.478$$

$$t = \frac{(85 - 81) - 2}{4.478 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{10}}} = 1.04$$

$$P = P(T \geq 1.04) \approx 0.16$$

3. Decisión: no se rechaza H_0 . No es posible de concluir que el desgaste abrasivo del material 1 excede el del material 2 en más de 2 unidades.

3.3.4. Varianzas desconocidas pero diferentes

Existen situaciones donde el analista no es capaz de suponer que las varianzas sean iguales. Si las poblaciones son normales la estadística:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

tiene una distribución aproximadamente t con grados de libertad aproximados:

$$v = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)}{[(S_1^2/n_1)^2/(n_1 - 1)] + [(S_2^2/n_2)^2/(n_2 - 1)]}$$

Como resultado, el procedimiento de prueba es no rechazar H_0 cuando

$$-t_{\alpha/2, v} \leq t' \leq t_{\alpha/2, v}$$

3.3.5. Pruebas de hipótesis para la proporción

Considere el problema de probar la hipótesis de que la proporción de éxitos en un experimento binomial es igual a algún valor específico; es decir, probar la hipótesis nula H_0 que $p = p_0$, donde p es el parámetro de la distribución binomial. La hipótesis alternativa puede ser una de las alternativas unilaterales o bilaterales usuales.

La variable aleatoria apropiada sobre la que basamos nuestro criterio de decisión es la variable aleatoria binomial X, aunque también podríamos usar solo la estadística $\hat{p} = \frac{x}{n}$.

Los valores de X que están lejos de la media $\mu = np_0$ conducirán al rechazo de la

hipótesis nula. Como X es una variable binomial discreta es poco probable que se pueda mecer una región crítica cuyo tamaño sea exactamente usual a un valor prescrito de α . Por esta razón, es preferible tratar con muestras pequeñas, y basar la decisión en valores P .

Para muestras grandes se puede utilizar la distribución normal, por lo tanto podemos establecer las regiones críticas de la siguiente manera:

Hipótesis	Estadígrafo común	Región crítica
$p=p_0$ contra $p-p_0 \neq d_0$	$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$	$\{z \in \mathfrak{R} \mid z > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$
$p=p_0$ contra $p > p_0$		$\{z \in \mathfrak{R} \mid z > Z_{1-\alpha}\}$
$p=p_0$ contra $p < p_0$		$\{z \in \mathfrak{R} \mid z < -Z_{1-\alpha}\}$

Dos muestras: prueba sobre dos proporciones

Hipótesis	Estadígrafo común	Región crítica
$p_1-p_2=0$ contra $p-p_0 \neq 0$	$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}[(1/n_1) + 1/n_2]}}$ $\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$	$\{z \in \mathfrak{R} \mid z > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$
$p_1-p_2 \leq 0$ contra $p-p_0 > 0$		$\{z \in \mathfrak{R} \mid z > Z_{1-\alpha}\}$
$p_1-p_2 \geq 0$ contra $p-p_0 < 0$		$\{z \in \mathfrak{R} \mid z < -Z_{1-\alpha}\}$

3.4 Prueba de hipótesis no paramétricas o de libre distribución que hacen uso de la distribución (X2)

Prueba de hipótesis X^2 se utiliza cuando se quiere determinar la significación de la diferencia entre la frecuencia observada y la frecuencia esperada de una población clasificada en dos o más categorías. Si k posibles sucesos mutuamente excluyentes

que pueden ocurrir como resultado de un experimento aleatorio. Si el experimento se repite n veces en iguales condiciones se puede calcular la frecuencia o cantidad de veces que ocurre cada uno de los k sucesos en esas n repeticiones o pruebas.

Sean:

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ los k sucesos

$O_1, O_2, O_3, \dots, O_k$ las respectivas frecuencias de los k sucesos

Sea p_i la probabilidad en que ocurra el suceso A_i

$$p_i = P(A_i) \text{ y sea } f_i = \frac{O_i}{n} \text{ para } i=1,2,3,\dots,k$$

Además p_{i0} es un valor supuesto esperado de p_i , por lo que se puede plantear.

Hipótesis

$$H_0 : p_i = p_{i0} \text{ para todo } i=1,2, \dots, k \quad x^2 > x_{1-\alpha}^{2(k-1)}$$

$$H_1 : p_i \neq p_{i0} \text{ para algún } i \text{ de } \{1,2, \dots, k\}$$

$$x^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \quad x^2 > y_{1-\alpha}^{(k-1-r)}$$

Donde p_{i0} es un valor supuesto (esperado) de p_i

$$\left. \begin{array}{l} e_i = np_{i0} \\ p_{i0} = \frac{1}{k} \end{array} \right\} \Rightarrow e_i = n \frac{1}{k}$$

n Tamaño de muestras

k Total de categorías

Se trata a continuación, otra forma de expresar la fórmula:

$$x^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

$$x^2 = \sum_{i=1}^k \left(\frac{o_i - 2o_i + e_i^2}{e_i} \right)$$

$$x^2 = \sum_{i=1}^k \left(\frac{o_i^2}{e_i} - 2o_i + e_i \right)$$

$$x^2 = \sum_{i=1}^k \frac{o_i^2}{e_i} - 2 \sum_{i=1}^k o_i + \sum_{i=1}^k e_i$$

$$x^2 = \sum_{i=1}^k \frac{o_i^2}{e_i} - 2n + n$$

$$x^2 = \sum_{i=1}^k \frac{o_i^2}{e_i} - n$$

3.4.1. Tablas de contingencia

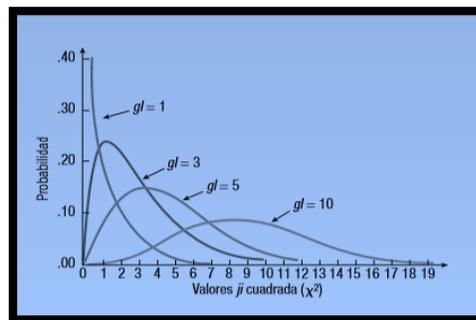
Hay situaciones en las que se estudia y representa visualmente la relación entre dos variables. Al estudiar la relación entre ellas, se hace referencia a los datos como bivariados. Con frecuencia, los analistas de datos tratan de entender la relación entre dos variables.

Una tabla de contingencia es una tabulación cruzada que resume simultáneamente dos variables de interés.

El estadístico ji cuadrada sirve para probar de manera formal si hay una relación entre dos variables con escala nominal. En otras palabras, ¿es independiente una variable de la otra? A continuación se profundizará en algunos ejemplos interesantes para probar si dos variables están relacionadas. El estadístico ji cuadrada se utiliza cuando se quiere determinar si existe dependencia entre las filas y las columnas en una tabla de doble entrada.

3.4.2. Características de la distribución ji cuadrada

- Los valores de ji cuadrada nunca son negativos. Esta característica se debe a que la diferencia entre f_o y f_e se eleva al cuadrado, es decir $(f_o - f_e)^2$.
- Existe una familia de distribuciones de ji cuadrada. Hay una distribución de ji cuadrada para 1 grado de libertad, otra para 2, otra para 3 grados de libertad, etc. En este tipo de problema, el número de grados de libertad se determina mediante $k - 1$, donde k es el número de categorías. Por lo tanto, la forma de la distribución ji cuadrada no depende del tamaño de la muestra, sino del número de categorías.



- La distribución ji cuadrada tiene un sesgo positivo. Sin embargo, a medida que aumenta el número de grados de libertad, la distribución comienza a aproximarse a la distribución normal.

Sea P_{ij} la posibilidad de que ocurran los sucesos A_i y B_j simultáneamente y P_i y P_j , la posibilidad de que ocurran los sucesos A_i y B_j respectivamente. Por lo que los sucesos A_i y B_j son independientes.

Hipótesis:

$$H_0 : p_{ij} = p_i p_j \text{ para todo } i \text{ y } j$$

$$H_1 : p_{ij} \neq p_i p_j \text{ para algún } i \text{ y para algún } j$$

Donde p_{io} es un valor supuesto (esperado) de p_i

$$x^2 > x_{1-\alpha}^{2(mk-1)}$$

$$x^2 > y_{1-\alpha}^{2[(m-1)][(k-1)]}$$

$$\text{Frecuencia esperada} = \frac{(\text{total de la columna}) * (\text{total de fila})}{\text{tamaño de la muestra}}$$

$$x^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

Corrección de Yates

$$\sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \text{ y } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

$$x^2 = \sum_{i=1}^k \frac{((o_i - e_i) - 0.5)^2}{e_i}$$

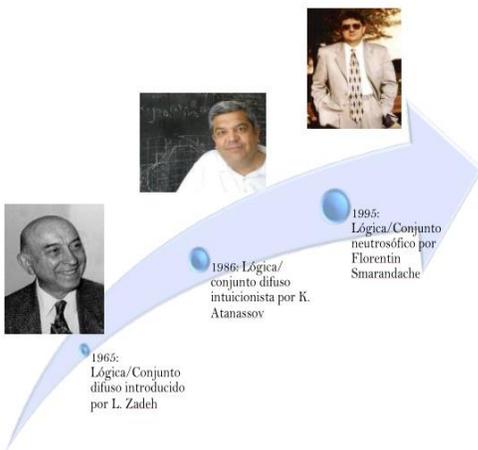
Si la distribución j-cuadrado aproximada de los estadígrafos, tiene solo un grado de libertad, se pueden mejorar estas aproximaciones, al definir y calcular x^2 por las sumas corregidas. Se habla entonces de x^2 corregidas y estas correcciones se denominan correcciones de Yates.

Capítulo 4. Estadística inferencial neutrosófica

4.1. Introducción a las probabilidades y estadística neutrosóficas

La neutrosofía es una nueva rama de la filosofía, creada por Smarandache (1995), que abrió un nuevo campo de investigación en la metafilosofía. Estudia el origen, naturaleza y alcance de las neutralidades, así como sus interacciones con diferentes espectros ideacionales.

Etimológicamente neutro-sofía proviene del francés *neutre* y del latín *neuter* (que significan neutral) y del griego *sophia* (que significa conocimiento). Es el conocimiento de los pensamientos neutrales. Constituye la base para la lógica neutrosófica, los conjuntos neutrosóficos, la probabilidad neutrosófica, y la estadística neutrosófica.



La lógica neutrosófica es una generalización de la lógica difusa de Zadeh (1965), y especialmente de la lógica difusa intuitiva de Atanassov (1986), así como de otras lógicas multivaluadas (Leyva & Smarandache, 2018).

El método de investigación neutrosófico es una generalización de la dialéctica de Hegel que plantea que la ciencia no solo avanzará si se toma en consideración las ideas contrarias, sino también las neutrales. Su teoría fundamental afirma que toda idea $\langle A \rangle$ tiende

a ser neutralizada, disminuida, balaceada por las ideas, por lo que $\langle \text{no } A \rangle = \text{lo que no es } \langle A \rangle$, $\langle \text{anti}A \rangle = \text{lo opuesto a } \langle A \rangle$, y $\langle \text{neut } A \rangle = \text{los que no es ni } \langle A \rangle \text{ ni } \langle \text{anti}A \rangle$.

4.1.1. Estadística neutrosófica

La estadística neutrosófica es el análisis de los eventos neutrosóficos y se ocupa de los números neutrosóficos, la distribución de probabilidad neutrosófica, la estimación neutrosófica, la regresión neutrosófica, etc. Se refiere a un conjunto de datos, el cual está formado total o parcialmente por datos con algún grado de indeterminación; estudia además, los métodos para analizarlos.

Mientras que la estadística clásica se refiere únicamente al azar, la estadística neutrosófica se refiere tanto al azar, pero especialmente, a la indeterminación. En la estadística clásica se determinan todos los datos, esta es la distinción entre ambas. En muchos casos, cuando la indeterminación es cero, la estadística neutrosófica coincide con la estadística clásica.

Los métodos estadísticos neutrosóficos permiten interpretar y organizar los datos neutrosóficos (datos que pueden ser ambiguos, vagos, imprecisos, incompletos o incluso, desconocidos) para revelar los patrones subyacentes.

Los datos neutrosóficos se pueden clasificar de manera similar a las estadísticas clásicas, como:

- datos neutrosóficos discretos, si los valores son puntos aislados. Por ejemplo 8;
- y datos neutrosóficos continuos, si los valores forman uno o más intervalos. Por ejemplo [0.2,0.9] o [0.1,1.0] (no se sabe cuál).

Otra clasificación es la siguiente:

- datos neutrosóficos cuantitativos (numéricos). Por ejemplo: un número en el intervalo [2, 5] (no se sabe con exactitud), 38, 40, 41 o 45 (no se sabe con exactitud);
- datos cualitativos (categóricos) datos neutrosóficos. Por ejemplo: azul o rojo (no se sabe exactamente), blanco, negro o verde o amarillo (no se sabe exactamente);
- datos neutrosóficos univariantes; es decir, datos neutrosóficos que consisten en observaciones sobre un único atributo neutrosófico; y
- datos neutrosóficos multivariantes; es decir, datos neutrosóficos que consisten en observaciones sobre dos o más atributos.

En la estadística neutrosófica el tamaño de muestra puede no conocerse con exactitud. Por ejemplo, el tamaño de muestra puede estar entre 100 y 110. Esto puede pasar porque el investigador no está seguro de que 10 individuos pertenezcan o no a la población de interés, o que pertenezcan solo parcialmente. En este ejemplo, el tamaño de muestra es tomado como un intervalo $n = [100, 110]$, en vez de $n = 100$ o $n=110$, como en la estadística clásica. Otro enfoque podría ser considerar esos 10 datos, solo parcialmente.

4.1.2. Números neutrosóficos clásicos

Los números neutrosóficos han sido introducidos por Vasantha y Smarandache (s/f). Son números de la forma

$$N = a + bI,$$

Donde a y b son números reales o complejos, mientras que " I " es la parte de indeterminación del número neutrosófico N , tal que:

$$I^2 = I$$

$$\alpha I + \beta I = (\alpha + \beta)I.$$

Por supuesto, la indeterminación I es diferente del número imaginario i . En general se tiene que

$$I^n = I \quad \text{si } n > 0$$

$$I^n = \text{Indefinido} \quad \text{si } n \leq 0$$

Si los coeficientes a y b son reales, entonces $a+bI$ es un número neutrosófico real.

Por ejemplo:

$$3 + 4I, \quad -7 + \frac{5}{8}I, \quad 1.9 + 0.2I$$

En cambio, si los coeficientes a y b son números complejos, $a+bI$ es llamado un número neutrosófico complejo.

Por ejemplo:

$$(2 + 5i) - (3 + 4i)I, \quad I + i + 8I - iI, \quad \text{donde } i = \sqrt{-2}$$

Por extensión, cualquier número real puede ser considerado un número neutrosófico.

Por ejemplo:

$$4 = 4 + 0I$$

Estos son llamados números neutrosóficos degenerados. Un número neutrosófico verdadero es aquel que contiene la indeterminación I con un coeficiente distinto de 0.

¿Cómo se dividen los números neutrosóficos?

Si se tiene

$$a_1 + b_1I \div a_2 + b_2I = ?$$

Se sabe que puede denotarse el resultado como:

$$\frac{a_1 + b_1I}{a_2 + b_2I} = x + yI$$

Por lo que multiplicando e identificando los coeficientes:

$$a_1 + b_1I \equiv (x + yI)(a_2 + b_2I)$$

$$a_1 + b_1I \equiv xa_2 + xb_2I + ya_2I + yb_2I^2$$

$$a_1 + b_1I \equiv (a_2x) + (b_2x + a_2y + b_2y)I$$

Donde se forma un sistema algebraico identificando los coeficientes

$$a_2x = a_1$$

$$b_2x + a_2y + b_2y = b_1$$

El cual tiene una única solución, solo cuando el determinante de segundo orden

$$\begin{vmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & a_2 + b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{o} \quad a_2(a_2 + b_2) \neq 0$$

Por lo tanto $a_2 \neq 0$ y $a_2 \neq -b_2$ son condiciones que deben cumplirse para que exista la división

$$\frac{a_1 + b_1I}{a_2 + b_2I}$$

Entonces,

$$x = \frac{a_1}{a_2}, \quad y = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2(a_2 + b_2)}$$

o

$$\frac{a_1 + b_1I}{a_2 + b_2I} = \frac{a_1}{a_2} + \left(\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2(a_2 + b_2)} \right) I$$

En consecuencia, se tiene que:

1. $\frac{a+bl}{ak+bkl} = \frac{a+bl}{k(a+bl)} = \frac{1}{k}$, para $k \in \mathbb{R}$ y $k \neq 0$, $a \neq 0$ y $a \neq -b$.
2. $\frac{l}{a+bl} = \frac{a}{a(a+b)}I = \frac{1}{a+b}I$, para $a \neq 0$ y $a \neq -b$.
3. Las divisiones por l , $-l$ y en general por kl con k un número real, están indefinidas.
4. $\frac{a+bl}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}I$, para $c \neq 0$.
5. $\frac{c}{a+bl} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a(a+b)}I$, para $a \neq 0$ y $a \neq -b$.
6. $\frac{a+0I}{b+0I} = \frac{a}{b}$ para $b \neq 0$
7. $\frac{a+bl}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1}I = a + bI$
8. $\frac{0}{a+bl} = \frac{0}{a} + \frac{a \cdot 0 - 0 \cdot b}{a(a+b)}I = 0 + 0 \cdot I = 0$, para $a \neq 0$ y $a \neq -b$.
9. $\frac{kl}{a+bl} = \left(\frac{k}{a+b} \right) I \quad \forall k \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ y } a \neq -b$

Raíz cuadrada de un número neutrosófico

Si tenemos: $\sqrt{a + bI}$, donde a, b son reales, nótese que:

$$\sqrt{a + bI} = x + yI,$$

Donde y y x son números reales desconocidos, y elevando ambos miembros al cuadrado se obtiene:

$$a + bI \equiv (x + yI)^2 = x^2 + 2xyI + y^2I^2 = x^2 + 2xyI + y^2I = x^2 + (2xyI + y^2)I.$$

Donde $\begin{cases} x^2 = a \\ 2xy + y^2 = b \end{cases}$

Por tanto $\begin{cases} x = \pm\sqrt{a} \\ y^2 \pm 2\sqrt{a} \cdot y - b = 0 \end{cases}$

Y resolvemos la segunda ecuación para y

$$y = \frac{\pm 2\sqrt{a} \pm \sqrt{4a + 4b}}{2(1)} = \frac{\pm 2\sqrt{a} \pm 2\sqrt{a + b}}{2(1)} = \pm\sqrt{a} \pm \sqrt{a + b},$$

Y las cuatro soluciones son:

$$(x, y) = (\sqrt{a}, -\sqrt{a} + \sqrt{a + b}), (\sqrt{a}, -\sqrt{a} - \sqrt{a + b}), (-\sqrt{a}, \sqrt{a} + \sqrt{a + b}), \text{ o } (-\sqrt{a}, \sqrt{a} - \sqrt{a + b})$$

Como un caso particular se pueden calcular igualmente:

$$\sqrt{I} = x + yI, \text{ entonces}$$

$$0 + 1 \cdot I = x^2 + (2xyI + y^2)I$$

Y necesitamos encontrar los valores de x e y

Donde $x^2 = 0$, o $x = 0$, y $2xy + y^2 = 1$, o $y^2 = 1$, o $y = \pm 1$

Por lo que $\sqrt{I} = \pm I$

De igual forma se puede calcular la raíz n-ésima de cualquier número neutrosófico:

$$\sqrt[n]{a + bI} = x + yI \text{ o } a + bI = (x + yI)^n$$

$$= x^n \left(y^2 + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k y^{n-k} x^k \right) \cdot I$$

$$= x^n + \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k y^{n-k} x^k \right) \cdot I$$

Donde C_n^k significa las combinaciones de n elementos tomados en grupos de tamaño k

Por lo que $x = \sqrt[n]{a}$ si n es un número impar, o $x = \pm \sqrt[n]{a}$ si n es un número par. Y

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k y^{n-k} a^{\frac{k}{n}} \right) = b$$

Y se resuelve para y . Cuando las soluciones de x e y son reales, se obtienen soluciones neutrosóficas reales y cuando x e y son números complejos, se obtienen soluciones neutrosóficas complejas.

4.1.3. Números estadísticos neutrosóficos

Un número estadístico neutrosófico N tiene la forma

$$N = d + i$$

Donde N es la parte determinada e i es la parte indeterminada de N . Por ejemplo,

$$a = 3 + i \text{ donde } i \in [0,0.5]$$

Es equivalente a

$$a \in [3, 3.5]$$

Por lo que es seguro que $a \geq 3$ (lo que significa que la parte determinada de a es 3), mientras que la parte indeterminada $i \in [0,0.5]$ significa la posibilidad del número a de ser un poco mayor que 3.

Un número estadístico neutrosófico puede ser escrito de muchas formas. Si se tiene:

$$a = 5 + i \text{ con } i \in [0,0.4]$$

Entonces,

$$a = 4 + i_1, \text{ con } i_1 \in [1,1.4]$$

o

$$a = 3 + i_2, \text{ con } i_2 \in [2,2.4]$$

y en general,

$$a = \alpha + i_\alpha, \text{ con } i_\alpha \in [5 - \alpha, 5.4 - \alpha] \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}$$

O, en el sentido opuesto:

$$a = 5.4 - i_\beta, \text{ con } i_\beta \in [0,0.4]$$

y en general,

$$a = \beta + i_\beta, \text{ con } i_\beta \in [\beta - 5.4, \beta - 5] \text{ y } \beta \in \mathbb{R}$$

4.1.4. Probabilidad neutrosófica

Las probabilidades y estadísticas neutrosóficas son una generalización de las probabilidades y estadísticas clásicas e imprecisas. Tienen una amplia aplicación en diversos campos investigativos y constituye un novedoso referente de estudio en pleno desarrollo.

La probabilidad neutrosófica de un evento E es la probabilidad de que ocurra el evento E , la probabilidad de que el evento E no ocurra y la probabilidad de indeterminación (no saber si el evento E ocurre o no). La función que modela la probabilidad neutrosófica de una variable aleatoria x se denomina distribución neutrosófica:

$$NP(x) = (T(x), I(x), F(x)),$$

Donde $T(x)$ representa la probabilidad de que el valor x se produce, $F(x)$ representa la probabilidad de que el valor x no ocurra, e $I(x)$ representa la probabilidad indeterminada o desconocida del valor x .



4.2. Distribución binomial neutrosófica

La distribución binomial clásica puede ser extendida neutrosóficamente cuando existe alguna indeterminación relacionada con el experimento probabilístico. Cada prueba puede resultar en éxito (E), fracaso (F) o indeterminación (I), siendo los tres resultados mutuamente excluyentes. Por ejemplo, al tirar una moneda en una superficie irregular con grietas, la moneda puede caer en alguna de esas grietas de canto, y entonces el resultado no será cara ni escudo, sino indeterminación.

Al llevar a cabo un número fijo de pequeños experimentos (llamados ensayos) cuyos resultados son independientes, para cada ensayo, la posibilidad de obtener E es la misma, de manera similar para la posibilidad de obtener F , o de obtener I . La variable aleatoria del binomio neutrosófico x se define entonces como el número de aciertos cuando se realiza el experimento $n \geq 1$ veces. La distribución de probabilidad neutrosófica de x también se llama distribución de probabilidad neutrosófica binomial.

Para n experimentos es importante la forma en que se define la indeterminación. En primer lugar, está claro que obtener la indeterminación en cada ensayo significa indeterminación para todo el conjunto de n ensayos. En segundo lugar, obtener la indeterminación en ningún ensayo significa que no hay indeterminación para todo el conjunto de n ensayos. Pero, ¿qué sucede cuando se obtiene indeterminación en algunos ensayos y determinación (éxito o fracaso) en otros?

Este conjunto parcialmente indeterminado y parcialmente determinado de n ensayos depende del problema que se necesita resolver y del punto de vista del experto. Se puede definir un umbral de indeterminación:

$th =$ número de ensayos cuyo resultado es indeterminado

Donde $th \in \{1, 2, \dots, n\}$

Los casos con un umbral $> th$ pertenecerán a la parte indeterminada, mientras que para un umbral $\leq th$ pertenecerán a la parte determinada.

Sea $P(E)$ = la posibilidad de que un ensayo particular resulte en un éxito, y $P(F)$ = la posibilidad de que un ensayo particular resulte en un fracaso, tanto para E como para F diferentes de la indeterminación. Sea $P(I)$ = la posibilidad de que un ensayo particular resulte en una indeterminación. Para $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, NP (exactamente x éxitos entre n pruebas) = (T_x, I_x, F_x) , con:

$$T_x = \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot P(E)^x \sum_{k=0}^{th} C_{n-x}^k P(I)^k P(F)^{n-x-k}$$

$$T_x = \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot P(E)^x \sum_{k=0}^{th} \frac{n!}{x!(n-x)!} P(I)^k P(F)^{n-x-k}$$

$$T_x = \frac{n!}{x!} \cdot P(E)^x \sum_{k=0}^{th} \frac{P(I)^k P(F)^{n-x-k}}{k!(n-x-k)!}$$

De manera similar:

$$F_x = \sum_{\substack{y=0 \\ y \neq x}}^n T_y = \sum_{\substack{y=0 \\ y \neq x}}^n \frac{n!}{y!} \cdot P(E)^y \cdot \left[\sum_{k=0}^{th} \frac{P(I)^k P(F)^{n-y-k}}{k!(n-y-k)!} \right]$$

Y

$$I_x = \sum_{z=th+1}^n \frac{n!}{z!(n-z)!} \cdot P(I)^z \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-z} C_{n-z}^k P(E)^k \cdot P(F)^{n-z-k} \right]$$

$$I_x = \sum_{z=th+1}^n \frac{n!}{z!(n-z)!} \cdot P(I)^z \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-z} \frac{n!}{z!(n-z)!} \cdot P(I)^z \cdot P(F)^{n-z-k} \right]$$

$$I_x = \sum_{z=th+1}^n \frac{n!}{z!} \cdot P(I)^z \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-z} \frac{P(E)^k \cdot P(F)^{n-z-k}}{k!(n-z-k)!} \right]$$

Donde C_u^v significa las combinaciones de u elementos de tomadas por grupos de v elementos: $C_u^v = \frac{u!}{v!(u-v)!}$

También:

T_x = probabilidad de x éxitos, y $n - x$ fracasos e indeterminaciones, pero de tal manera que, el número de indeterminaciones sea menor o igual al umbral de indeterminación.

F_x = probabilidad de y éxitos, con $y \neq x$ y $n - y$ fracasos e indeterminaciones, pero tales que, el número de indeterminaciones es menor o igual al umbral de indeterminación.

I_x = probabilidad de z indeterminaciones, donde z es estrictamente mayor que el umbral de indeterminación.

$$T_x + I_x + F_x = (P(E) + P(I) + P(F))^n$$

En la mayoría de las aplicaciones,

$P(E) + P(I) + P(F) = 1$, y este caso se denomina probabilidad completa.

Pero para la probabilidad incompleta (donde falta información):

$$0 \leq P(E) + P(I) + P(F) < 1.$$

Mientras que en la probabilidad paraconsistente (que tiene información contradictoria):

$$1 < P(E) + P(I) + P(F) \leq 3.$$

Ejemplo 18: Entre los relojes vendidos por una tienda, el 80% tenía una pantalla digital y el 10% una pantalla analógica. Hay un número de relojes vendidos para los cuales el dueño de la tienda no tiene pruebas sobre su tipo de exhibición, y le pregunta a su asistente de dirección sobre ellas. Al desconocer las estimaciones previas del gerente, la asistente estima que el tipo de relojes desconocidos es del 20%.

Al considerar una variable aleatoria neutrosófica x = el número de relojes entre los próximos 5 compradores que tienen una pantalla analógica.

Por lo tanto:

$$P(E) = P(\text{pantalla analógica}) = 0.1$$

$$P(F) = P(\text{pantalla digital}) = 0.8$$

$$P(I) = P(\text{indeterminación}) = 0.2$$

Se tiene, por lo tanto, una probabilidad neutrosófica paraconsistente, ya que la información proviene de las diferentes fuentes que estiman independientemente. Existe una contradicción entre las estimaciones del gerente y su asistente, porque:

$0.8 + 0.1 + 0.2 = 1.1 > 1$. Por lo que se está en presencia de una distribución binomial neutrosófica.

Suponiendo que el umbral de indeterminación es 2, se define la variable aleatoria X de la siguiente manera:

x = número de relojes que tienen una pantalla analógica entre los próximos 5 relojes que se compran

$$T_x = \frac{5!}{x!} (0.1)^x \cdot \sum_{k=0}^2 \frac{(0.2)^k (0.8)^{5-x-k}}{k! (5-x-k)!}$$

Donde $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

La probabilidad de que exactamente 2 relojes sean analógicos es:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{5!}{2!} (0.1)^2 \cdot \left[\frac{(0.2)^0 (0.8)^3}{0! 3!} + \frac{(0.2)^1 (0.8)^2}{1! 2!} + \frac{(0.2)^2 (0.8)^1}{2! 1!} \right] = 0.0992 \\ I_2 &= \sum_{z=2+1}^5 \frac{5!}{z!} (0.2)^z \cdot \left[\sum_{k=0}^{5-z} \frac{(0.1)^k (0.8)^{5-z-k}}{k! (5-z-k)!} \right] \\ &= \frac{5!}{3!} (0.2)^3 \left[\sum_{k=0}^2 \frac{(0.1)^k (0.8)^{2-k}}{k! (2-k)!} \right] + \frac{5!}{4!} (0.2)^4 \left[\sum_{k=0}^1 \frac{(0.1)^k (0.8)^{1-k}}{k! (1-k)!} \right] \\ &\quad + \frac{5!}{5!} (0.2)^5 \left[\sum_{k=0}^0 \frac{(0.1)^k (0.8)^{0-k}}{k! (-k)!} \right] \\ &= 20 \cdot (0.2)^3 \cdot \left[\frac{(0.1)^0 (0.8)^2}{0! 2!} + \frac{(0.1)^1 (0.8)^1}{1! 1!} + \frac{(0.1)^2 (0.8)^0}{2! 0!} \right] + 5(0.2)^4 \\ &\quad \cdot \left[\frac{(0.1)^0 (0.8)^1}{0! 1!} + \frac{(0.1)^1 (0.8)^0}{1! 0!} \right] + 1 \cdot (0.2)^5 \cdot \left[\frac{(0.1)^0 (0.8)^0}{0! 0!} \right] = 0.07232 \end{aligned}$$

F_2 puede ser calculado fácilmente (en lugar de hacerlo usando la fórmula combinatoria) como sigue:

$$\begin{aligned} F_2 &= (P(E) + P(I) + P(F))^5 - T_2 - I_2 \\ F_2 &= (0.1 + 0.2 + 0.8)^5 - 0.0992 - 0.07232 \\ F_2 &= 1.43899 \end{aligned}$$

Si se normaliza el vector:

$$(T_2, I_2, F_2) = (0.0992, 0.07232, 1.43899)$$

Mediante la división de cada componente del vector entre su suma total, $(0.0992 + 0.07232 + 1.43899) = 1.61051$, se obtiene:

$$\begin{aligned} (T_2, I_2, F_2) &= \left(\frac{0.0992}{1.61051}, \frac{0.07232}{1.61051}, \frac{1.43899}{1.61051} \right) \\ (T_2, I_2, F_2) &= (0.061595, 0.044905, 0.893500) \end{aligned}$$

Para probabilidades incompletas y paraconsistentes no importa si se normaliza al principio o al final, se obtiene el mismo resultado.

Como un tercer componente (la probabilidad de indeterminación) se añadió a la distribución binomial, la distribución binomial neutrosófica, que en realidad se asemeja a una suma de la distribución trinomial clásica:

$$(p_1 + i + p_2)^n$$

Donde p_1 y p_2 son las probabilidades de que los dos eventos mutuamente exclusivos (E1 y E2) ocurran respectivamente, mientras que i es la posibilidad de obtener indeterminación.

Denótese con $A(\alpha, \beta, \gamma)$ la probabilidad de obtener α eventos E1, β eventos indeterminados, y γ eventos E2, donde por supuesto $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n$, y $\alpha + \beta + \gamma = n$, como resultado de n ensayos independientes. Por supuesto, como en la distribución clásica del trinomio, se tiene:

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma!} p_1^\alpha i^\beta p_2^\gamma$$

Con $n = \alpha + \beta + \gamma$

Se necesita definir lo que significa indeterminación dentro de n ensayos. Sea th el umbral de indeterminación. Para $th + 1$ o más indeterminaciones, se consideran como indeterminación, de lo contrario se tiene una determinación.

Luego para $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$,

$$NP(\text{exactamente } x \text{ eventos } E, \text{ entre } n \text{ ensayos}) = (T_x, I_x, F_x)$$

Donde:

$$T_x = \sum_{0 \leq \beta \leq th} A(x, \beta, n - x - \beta)$$

$$I_x = \sum_{\substack{th+1 \leq \beta \leq n \\ 0 \leq \alpha \leq n-th}} A(\alpha, \beta, n - \alpha - \beta)$$

$$F_x = \sum_{\substack{0 \leq \alpha \leq n, \alpha \neq x \\ 0 \leq \beta \leq th}} A(\alpha, \beta, n - \alpha - \beta)$$

4.3. Distribución multinomial neutrosófica

La distribución anterior del binomio neutrosófico se generaliza para el caso cuando en cada ensayo hay $r (\geq 2)$ posibles resultados y cierta indeterminación. Al Suponer que todos los posibles resultados son E_1, E_2, \dots, E_r con las correspondientes posibilidades

de ocurrir P_1, P_2, \dots, P_r y alguna indeterminación I con las correspondientes posibilidades de ocurrir i .

Entonces tenemos la expansión multinomial:

$$(P_1 + P_2 + \dots + P_r + i)^n$$

para n ensayos.

Denotemos de manera similar por $A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta)$ la probabilidad de obtener: exactamente α_1 eventos E_1 , α_2 eventos E_2 , α_r eventos E_r y β eventos indeterminados, donde $0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta \leq n$ y $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r + \beta = n$, como resultados de n ensayos independientes, entonces:

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta) = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_r! \beta} \cdot P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot P_r^{\alpha_r} \cdot i^\beta$$

Considerando el mismo th como umbral de indeterminación.

Sea la variable aleatoria X_j el número de veces que ocurre el evento E_j , para toda $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ en n ensayos independientes.

Entonces se tiene una distribución multivariada.

Así, la probabilidad neutrosófica de obtener exactamente x_1 eventos E_1 , x_2 eventos E_2 , \dots , x_r eventos E_r , en n ensayos es:

$$(T_{x_1, x_2, \dots, x_r}, I_{x_1, x_2, \dots, x_r}, F_{x_1, x_2, \dots, x_r})$$

Donde:

$$T_{x_1, x_2, \dots, x_r} = \sum_{0 \leq \beta \leq th} A(x_1, x_2, \dots, x_r, \beta)$$

$$I_{x_1, x_2, \dots, x_r} = \sum_{\substack{th+1 \leq \beta \leq n \\ 0 \leq \alpha_j \leq n-th, \text{ para } j \in \{1, 2, \dots, r\}}} A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta)$$

$$F_{x_1, x_2, \dots, x_r} = \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq th \\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \{1, 2, \dots, n\}^r \setminus (x_1, x_2, \dots, x_r)}} A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta)$$

4.4. Distribución normal neutrosófica

De acuerdo con Smarandache (2014), una distribución normal neutrosófica de una variable continua X es una distribución normal clásica de x , pero tal que su media μ o su desviación estándar σ (o varianza σ^2), o ambas, son imprecisas. Por ejemplo, μ , o σ , o ambas pueden ser fijadas con dos o más elementos. Las distribuciones más comunes de este tipo son cuando μ , o σ , o ambas son intervalos. La fórmula de la función de la frecuencia neutrosófica es la misma, salvo que, se sustituye μ por μ_N y por σ_N :

$$X_N \sim N_N(\mu_N, \sigma_N^2) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu_N)^2}{2\sigma_N^2}\right)$$

Donde X_N significa, en realidad, que la variable X puede ser neutrosófica; es decir, tener cierta indeterminación, y de manera similar, $N_N(\bullet, \bullet)$ significa que la distribución normal $N(\bullet, \bullet)$ puede ser neutrosófica; es decir, tener cierta indeterminación.

En lugar de una curva en forma de campana, se puede tener dos o más curvas en forma de campana que tienen regiones comunes y no comunes entre ellas, y están por encima del eje x . Cada una es simétrica con respecto a la línea vertical que pasa por la media ($x = \mu$), como se muestra en la figura 15.

Ejemplo 19: como primer ejemplo de distribución normal, se considera una distribución normal con $\mu = 15$ y $\sigma = [2, 3]$. Por lo tanto, la desviación estándar es indeterminada (figura 15).

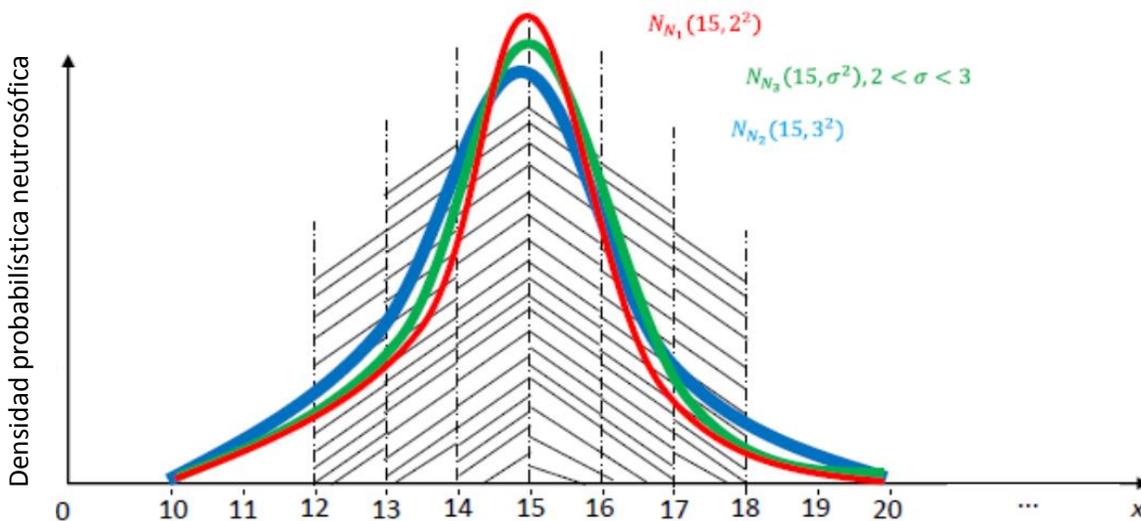


Figura 15. Gráfica de densidad probabilística neutrosófica con distribución $N \sim (15, [2^2, 3^2])$ (Smarandache, 2014)

Con esta desviación estándar, la media se traduce en este primer ejemplo:

$$\mu \pm \sigma = 15 \pm [2,3] = [15 - 3, 15 + 3] = [12,18]$$

O que aproximadamente el 68% de los valores se encuentran entre $x \in [12,18]$.

Con dos desviaciones estándar de la media se traduce:

$$\mu \pm 2\sigma = 15 \pm 2[2,3] = 15 \pm [4,6] = [15 - 6, 15 + 6] = [9,21]$$

O aproximadamente el 95,4% de los valores se encuentran entre $x \in [9,21]$.

También se podría calcular el último intervalo como:

$$[12,18] \pm \sigma = [12,18] \pm [2,3] = [12 - 3, 18 + 3] = [9,21].$$

Para tres desviaciones estándar:

$$\mu \pm 3\sigma = 15 \pm 3[2,3] = 15 \pm [6,9] = [15 - 9, 15 + 9] = [6,24]$$

También se podría calcularlo como:

$$[9,21] \pm \sigma = [9,21] \pm [2,3] = [9 - 3, 21 + 3] = [6,24].$$

Y aproximadamente el 97,7% de los valores se encuentran entre $x \in [6,24]$.

El área entre la curva más baja y la más alta para cada porción representa la carga (indeterminación) del gráfico. La distribución neutrosófica normal puede considerarse como una curva en forma de campana con fuertes márgenes. Una variable aleatoria X que tiene una distribución neutrosófica normal se denomina variable neutrosófica normal.

Ejemplo 20: un segundo ejemplo neutrosófico para la distribución normal donde $\mu = [15,17]$ y $\sigma = 2$, por lo tanto ahora μ es indeterminada (figura 16).

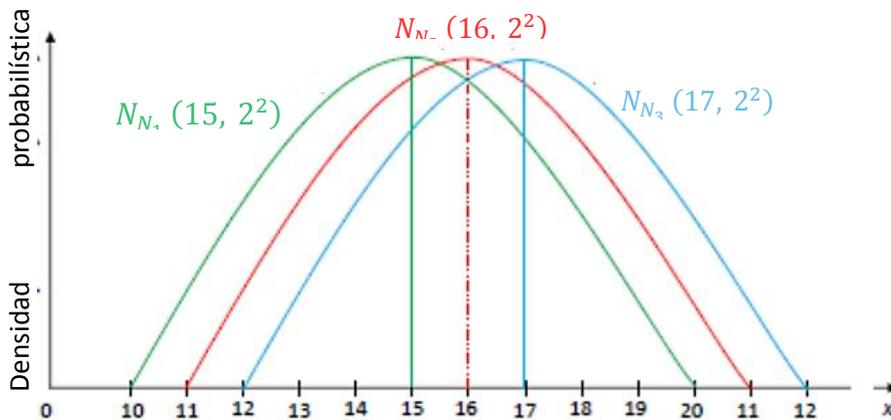


Figura 16. Gráfica de densidad probabilística neutrosófica con distribución $N \sim ([15,17], 2^2)$ (Smarandache (2014))

De forma similar al primer ejemplo de esta distribución, se tiene que, con una desviación estándar

$$\mu \pm \sigma = [15,17] \pm 2 = [15 - 2, 17 + 2] = [13,19]$$

O que aproximadamente el 68% de los valores se encuentran entre $x \in [13,19]$.

Dentro de dos desviaciones estándar de la media se traduce:

$$\mu \pm 2\sigma = [15,17] \pm 2 \cdot 2 = [15,17] \pm 4 = [15 - 4, 17 + 4] = [11,21]$$

O aproximadamente el 95,4% de los valores se encuentran entre $x \in [11,21]$.

También se podría calcular el último intervalo como:

$$[13,19] \pm \sigma = [13,19] \pm 2 = [13 - 2, 19 + 2] = [11,21].$$

Para tres desviaciones estándar:

$$\mu \pm 3\sigma = [15,17] \pm 3 \cdot 2 = [15,17] \pm 6 = [15 - 6, 17 + 6] = [9, 23]$$

También se podría calcularlo como:

$$[11,21] \pm 2 = [11 - 2, 21 + 2] \pm 2 = [9, 23]$$

Y aproximadamente el 97,7% de los valores se encuentran entre $x \in [9,23]$.

Ejemplo 21: un tercer ejemplo neutrosófico de distribución normal con $\mu = [15,17]$ y $\sigma = [2,3]$, por lo tanto de doble indeterminación, combina el gráfico de la figura 16 con el gráfico de la figura 15.

Por supuesto, ¡la vaguedad se hace más amplia! Con $\mu = [15,17]$ y $\sigma = [2,3]$, se tiene lo siguiente.

Dentro de una desviación estándar de la media:

$$\mu \pm \sigma = [15,17] \pm [2, 3] = [15 - 3, 17 + 3] = [12,20]$$

Es decir, aproximadamente el 68% de los valores se encuentran entre $x \in [12,20]$.

Dentro de dos desviaciones estándar de la media:

$$\mu \pm 2\sigma = [15,17] \pm 2 \cdot [2, 3] = [15,17] \pm [4, 6] = [15 - 6, 17 + 6] = [9,23]$$

O calculado como:

$$[12,20] \pm [2, 3] = [12 - 3, 20 + 3] = [9,23]$$

Es decir, aproximadamente el 95,4% de los valores se encuentran entre $x \in [9,23]$.

Y dentro de tres desviaciones estándar de la media:

$$\mu \pm 3\sigma = [15,17] \pm 3 \cdot [2,3] = [15,17] \pm [6,9] = [15 - 9, 17 + 9] = [6, 26]$$

O calculado como

$$[9,23] \pm [2,3] = [9 - 3, 23 + 3] = [6,26],$$

Aproximadamente el 97,7% de los valores se encuentran entre $x \in [6,26]$.

4.4.1. Neutrosificación de otras distribuciones

De la misma manera, al sustituir uno o más parámetros de distribución por un conjunto, se puede extender las distribuciones clásicas, tales como: distribución normal estándar, distribución normal bivalente, distribución uniforme, distribución de muestreo, distribución geométrica, distribución hipergeométrica, distribución de Poisson, distribución chi-cuadrado, distribución exponencial, distribución de frecuencia, distribución de Pareto, distribución t, etc. a sus versiones neutrosóficas correspondientes.

El conjunto que sustituye a un parámetro nítido puede tener dos o más elementos, o puede estar vacío (el último caso significa que el parámetro es desconocido).

4.5. Pruebas de hipótesis neutrosóficas

Al recopilar, organizar, resumir e interpretar datos mediante técnicas estadísticas, la teoría de la probabilidad desempeña un rol fundamental como base científica para realizar inferencias y medir cuán fiables son las conclusiones a las que se arriba al término de una investigación científica.

Desde sus orígenes, siempre han estado unidas, es cierto que existe un cierto paralelismo entre la estadística descriptiva y el cálculo de probabilidades. A la



probabilidad clásica, a menudo, se le conoce como probabilidad a priori, debido a que, si empleamos ejemplos ordenados como monedas no alteradas, dados no cargados y mazos de barajas normales, entonces podemos establecer la respuesta de antemano (a priori) sin necesidad de lanzar una moneda, un dado o tomar una carta.

Hay cierta frecuencia de acontecimientos ocurridos que sirve de base para futuros acontecimientos.

Otras veces nuestras afirmaciones carecen de fundamento objetivo, ya que se limitan a un único acontecimiento, sin otras referencias posibles.

No es necesario efectuar experimentos para poder llegar a conclusiones sobre las monedas, los dados no cargados y las barajas normales. En lugar de experimentos, las conclusiones se pueden basar en un razonamiento lógico antes de realizar el experimento.

Este planteamiento de la probabilidad es útil cuando se trata con juegos de cartas, de dados, lanzamientos de monedas y cosas parecidas, pero tiene serios problemas cuando se intenta aplicar a los problemas de toma de decisiones menos previsibles, como los que encontramos en la administración.

La definición clásica de probabilidad implica un nivel de abstracción que la aleja significativamente de la realidad. Se asume la inexistencia de escenarios que, a pesar de su baja probabilidad de ocurrencia, no deben descartarse del universo de posibilidades a tener en cuenta.

Sin embargo, el planteamiento clásico supone que no existen. La probabilidad clásica supone también una especie de simetría en el mundo, y esta suposición también puede ocasionar problemas. Las situaciones de la vida real, desordenadas y poco probables como son a menudo, hacen que sea útil definir la probabilidad de otras formas.

Una hipótesis neutrosófica es una afirmación sobre los valores neutrosóficos de una o varias características de la población. La distinción entre la hipótesis clásica (estadística) y la hipótesis neutrosófica es que en la estadística neutrosófica las variables que describen las características de la población son neutrosóficas; es decir, tienen algunos valores indeterminados, o varios valores desconocidos, o un número inexacto de términos si la variable es discreta, o para los valores que se comparan, al menos una de las características de la población, es neutrosófica (valor indeterminado o vago).

De manera similar a las estadísticas clásicas, una hipótesis neutrosófica nula denotada por el NH_0 , es la afirmación que se supone inicialmente como verdadera. Mientras que la hipótesis neutrosófica alternativa denotada por NH_a , es la otra hipótesis. Al llevar a cabo una prueba de NH_0 frente a NH_a hay dos posibles conclusiones: rechazar el NH_0 , si la evidencia de la muestra sugiere fuertemente que el NH_0 es falso, o no rechazar el NH_0 , si la muestra no apoya la evidencia de la cadena contra el NH_0 .

Ejemplo 22: si se quiere establecer una hipótesis donde μ representa el promedio clásico de CI de todos los niños nacidos desde el 1 de enero de 2001, se puede hacer de forma neutrosófica, como sigue:

$$NH_0: \mu \in [90, 100]$$

$$NH_a: \mu < 90$$

$$NH_a: \mu > 100$$

$$NH_a: \mu \notin [90, 100]$$

Ejemplo 23: otro ejemplo de hipótesis neutrosófica sería el siguiente, donde π representa la proporción clásica de todos los coches Ford que necesitan ser reparados mientras están bajo el primer año de garantía.

$$NH_0: \pi = 0.2 \text{ o } 0.3$$

$$NH_a: \pi < 0.2$$

$$NH_a: \pi > 0.3$$

$$NH_a: \pi \in (0.2, 0.3)$$

$$NH_a: \mu \notin \{0.2, 0.3\}$$

Ejemplo 24: así también si se trata de representar la proporción clásica de valores atípicos en una población humana con respecto a su estatura, se puede emplear la hipótesis neutrosófica:

$$NH_0: p < 0.1 \text{ o } p > 0.9$$

$$NH_a: p = 0.1$$

$$NH_a: p = 0.9$$

$$NH_0: p > 0.1 \text{ y } p < 0.9$$

$$NH_a: p \in [0.1, 0.9]$$

Donde p representa el porcentaje de personas cuya estatura es inferior a 150 cm, o el porcentaje de personas cuya estatura es superior a 190 cm.

Los valores atípicos neutrosóficos son valores notablemente inusuales en los datos neutrosóficos; pueden ser valores nítidos o valores neutrosóficos. Por ejemplo, si se trata de representar un porcentaje promedio neutrosófico de todos los dispositivos electrónicos que se deprecian moralmente después de tres años desde su fabricación, puede definirse:

$$NH_0: [\mu_{min}, \mu_{max}] > [0.45, 0.55]$$

Lo que es equivalente a:

$$\mu_{min} > 0.45$$

$$\mu_{max} > 0.55$$

Donde $[\mu_{min}, \mu_{max}]$ es un valor neutrosófico (aproximación)

$$NH_a: \mu_{min} = 0.45$$

$$NH_a: \mu_{max} = 0.55$$

$$NH_a: \mu_{min} < 0.45$$

$$NH_a: \mu_{min} < 0.55$$

$$NH_a: \mu_{min} < 0.45 \text{ o } \mu_{max} < 0.45$$

$$NH_0: \mu = 0.7$$

$$NH_0: \mu < 0.7$$

$$NH_0: \mu > 0.7$$

$$NH_0: \mu \neq 0.7$$

Ejemplo 25: una fábrica hizo una encuesta aproximada de su venta, la cual fue realizada por dos observatorios independientes en diferentes muestras del mismo tamaño. Sus hallazgos son cercanos, pero diferentes. El propietario de la planta de fabricación decidió poner juntos ambos resultados, y tomó para cada período el intervalo $[\min, \max]$ o $[\inf, \sup]$, para ver la fluctuación de las ventas. La variable x que describe el estudio es, por lo tanto, una variable neutrosófica (tabla 8).

Período	Cantidad vendida en miles de unidades
2014	[4, 6]
2015	[7, 8]
2016	5.5 o 6
2017	(8, 8.8)
2018	7.5

Tabla 8. Resultados de encuesta ejemplo

La hipótesis nula de que el promedio anual de ventas $\mu = 7,0$ está en el estilo clásico, pero la variable x a la que μ se refiere es neutrosófica. Por cuanto, se tiene una hipótesis neutrosófica.

4.5.1. Prueba de errores en hipótesis neutrosófica

Un censo de una gran población es difícil o incluso imposible de realizar. Por eso es necesario usar muestras. La inferencia que se hace de una característica de la muestra neutrosófica a una característica de la población está sujeta a error. Al igual que en las estadísticas clásicas hay dos tipos de errores.

- Error neutrosófico de tipo I, que es el error de rechazar el NH_0 , cuando el NH_0 es verdadero.
- Error neutrosófico de tipo II, que es lo contrario del error anterior, es decir, el error de no rechazar el NH_0 , cuando el NH_0 es falso.

Independientemente de la prueba que se realice, hay alguna posibilidad de que se cometa un error neutrosófico de tipo I, y también hay alguna posibilidad de que se cometa un error neutrosófico de tipo II.

Por ejemplo, rechazar la hipótesis $NH_0: \mu = 7.0$ cuando es verdadera en el ejemplo anterior, determinaría al dueño de la planta de fabricación a tomar ajustes adicionales y a gastar dinero cuando no se necesita realmente. Mientras que aceptar $NH_0: \mu = 7$ cuando es falsa, perjudicaría la futura venta. Las probabilidades de error neutrosófico de tipo I y de tipo II se denotan por α_N (nivel de significación) y respectivamente β_N .

Si se trata de probabilidades neutrosóficas, α_N y β_N pueden ser subconjuntos del intervalo $[0, 1]$. El procedimiento de prueba ideal sería $\alpha_N = \beta_N \equiv 0$, o α_N y β_N como intervalos diminutos cercanos a cero.

Por ejemplo, si $\alpha_N = [0.07, 0.10]$ en un procedimiento de prueba, realizado con diferentes muestras, una y otra vez, una verdadera hipótesis H_0 es rechazada unas 7, 8, 9, o 10 veces en cien. Si $\alpha_N = [0.07, 0.10]$, entonces una falsa hipótesis H_0 es aceptada unas 7-10 veces de cada cien.

Ejemplo 26: un fabricante de automóviles pretende que su coche no necesite ninguna reparación durante los 2 primeros años de conducción. Para ello necesita una probabilidad entre el 80% y el 90%. Para comprobar la afirmación, una agencia de consumidores obtiene una muestra aleatoria de 50 compradores, e investiga si sus coches necesitan o no ser reparados durante los 2 primeros años de conducción.

En este caso p denota la proporción de la muestra de respuestas que indican que no hay reparación, y que π denota la verdadera proporción de no reparaciones (llamadas éxitos). Las hipótesis neutrosóficas apropiadas son:

$$NH_0 : \pi \in [0.8,0.9]$$

$$NH_a : \pi < 0.8$$

Para comprobar si la muestra de pruebas sugiere que $\pi < 0,9$.

El error neutrosófico de tipo I en este caso es considerar falsa la afirmación del fabricante de automóviles ($\pi < 0,8$) mientras que en realidad es correcta. El error neutrosófico de tipo II sería si la agencia de consumidores no detecta la afirmación incorrecta del fabricante.

Para evitar consecuencias graves, la agencia de consumidores decide una probabilidad de error de tipo I de $[0.01,0.05]$ pero no se puede tolerar una mayor. Así que $\alpha = [0.01,0.05]$ se utiliza para desarrollar un procedimiento de prueba.

A partir de las estadísticas clásicas, una distribución normal estándar clásica de una variable aleatoria Z, es una distribución normal con el valor medio $\mu = 0$ y la desviación estándar $\sigma = 1$. Su curva correspondiente se denomina curva normal estándar o curva Z. Un valor crítico Z captura el área de la cola inferior o superior, o el área central bajo la curva Z. La tabla de los valores críticos de Z más utilizados en la estadística clásica se muestra en la tabla 9.

Valor crítico, Z	Área a la derecha de Z	Área a la izquierda de Z	Área entre -Z y Z
1.28	.10	.10	.80
1.645	.05	.05	.90
1.96	.025	.025	.95
2.33	.01	.01	.98
2.58	.005	.005	.99
3.09	.001	.001	.998
3.29	.0005	.0005	.999

Tabla 9. Valores críticos de Z

Una variable aleatoria x distribuida normalmente puede ser mejor normalizada como:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Donde μ = valor medio de x,

σ = distribución estándar de x.

Si la hipótesis neutrosófica nula sobre la variable x es:

$$NH_0 : \mu \in [a, b],$$

Donde $[a, b]$, con $a \leq b$, es el intervalo hipotético, entonces la estadística de la prueba neutrosófica es:

$$z = \frac{\bar{x} - [a, b]}{s/\sqrt{n}}$$

Donde \bar{x} es la media de la muestra, s es la desviación estándar de la muestra, y n es el tamaño de la muestra, con $n > 30$.

La variable z tiene aproximadamente una distribución neutrosófica estándar normal.

En la estadística neutrosófica, \bar{x} , s e incluso n pueden ser conjuntos, no necesariamente números nítidos.

4.5.2. Hipótesis alternativas

Si se tiene:

- $NH_a: \mu > b$; se rechaza H_0 si $\min z > \text{valor crítico de } z$.
- $NH_a: \mu < a$; se rechaza H_0 si $\max z < \text{valor crítico de } -z$.
- $NH_a: \mu \notin [a, b]$; se rechaza H_0 si $\min z > \text{valor crítico de } z$ o $\max z < \text{valor crítico de } -z$.

Ejemplo 27: al considerar los resultados de los exámenes de ansiedad de una muestra de un estudiante de un colegio universitario estadounidense, que fueron los siguientes:

$$n = 64,$$

$$\bar{x} = [48,0,50,0],$$

Y

$$s = 25.$$

Entonces μ es la media de verdad en el examen de ansiedad.

$$NH_0 : \mu \in [40.0,41.0],$$

$$NH_a : \mu > 41.0,$$

La prueba estadística neutrosófica es:

$$z = \frac{[48.0,50.0] - [40.0,41.0]}{25/\sqrt{64}}$$

$$z = \frac{[48.0 - 41.0] - [50.0 - 40.0]}{25/8}$$

$$z = \frac{[7.0,10.0]}{25/8}$$

$$z = \frac{8 * [7.0,10.0]}{25}$$

$$z = \frac{[56.0, 80.0]}{25}$$

$$z = \left[\frac{56.0}{25}, \frac{80.0}{25} \right]$$

$$z = [2.24, 3.20]$$

Para $\alpha = 0.10$ el correspondiente valor crítico de z con una cola es 1.28. Por tal motivo H_0 es rechazada porque $z = [2.24, 3.20] > 1.28$. En conclusión, la media de los resultados del examen de ansiedad es más alta que 41.0.

4.6. Intervalo de confianza neutrosófico

El intervalo de confianza neutrosófico para las características de una población se define de manera similar al de las estadísticas clásicas, como un intervalo de valores neutrosóficos plausibles de la característica. El valor neutrosófico de la característica se capta dentro del intervalo con un grado de confianza elegido.

Se asocia un nivel de confianza a cada intervalo de confianza neutrosófica, como en las estadísticas clásicas. Ello otorga cuánta confianza se tiene en el procedimiento utilizado para construir el intervalo de confianza neutrosófico. Las fórmulas clásicas para el intervalo de confianza se extienden desde las variables nítidas hasta las variables neutrosóficas; es decir, las variables cuyos valores son conjuntos:

- Cuando se conoce el valor neutrosófico de la desviación estándar de la población σ , el intervalo de confianza neutrosófico de la muestra grande para la media de la población μ es:

$$\bar{x} \pm (\text{valor crítico de } z) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Donde \bar{x} es la media neutrosófica de la muestra grande, y n es el tamaño neutrosófico de la muestra grande.

Por lo tanto \bar{x} , σ , y/o n pueden ser conjuntos en lugar de números nítidos.

- Cuando el valor neutrosófico se desconoce, la desviación estándar de la población σ (como en aplicaciones más prácticas), y el tamaño de la muestra supera los 30, se utiliza la desviación estándar de la muestra en lugar de σ para calcular el intervalo de confianza neutrosófico para el promedio de la población μ :

$$\bar{x} \pm (\text{valor crítico de } z) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Para ambas fórmulas, el valor crítico de $z = 1,645$, corresponde al nivel de confianza del 90%, el valor crítico de $z = 1,96$ corresponde al nivel de confianza del 95%, y el

valor crítico de $z = 2,58$ corresponde al nivel de confianza del 99%, de manera similar a las estadísticas clásicas.

El nivel de confianza de, por ejemplo, 90% no se refiere a la posibilidad de que la media de la población μ sea capturada en un intervalo, sino al porcentaje de todas las posibles muestras exitosas, o sea, las muestras para las que μ está incluida en el intervalo de confianza.

Ejemplo 28: muchos profesionales de las informáticas padecen de afectaciones en la visión debido a la cantidad de horas de exposición a la luz artificial de la pantalla de los monitores de las computadoras. En un estudio en el que participaron 60 ingenieros informáticos (una muestra), confesaron permanecer frente a sus computadores entre 8 y 10 horas diarias. Se determinó que en promedio perdieron un 18%-20% de la precisión de su visión, con una desviación estándar de la muestra del 4%-5%.

El investigador del estudio estableció un intervalo de confianza del 90% para μ . Así:

$$\bar{x} = [18,20]$$

$$\text{Valor crítico de } z = 1.645$$

$$s = [4,5]$$

$$n = 60.$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza neutrosófico para la población con media μ es:

$$[18,20] \pm (1.645) \cdot \frac{[4,5]}{\sqrt{60}} = [18,20] \pm \left[\frac{4(1.645)}{\sqrt{60}}, \frac{5(1.645)}{\sqrt{60}} \right] \cong [18,20] \pm [0.85,1.06]$$

Se divide en dos partes:

$$[18,20] + [0.85,1.06] = [18 + 0.85, 20 + 1.06] = [18.85, 21.06]$$

Y:

$$[18,20] - [0.85,1.06] = [18 + 1.06, 20 + 0.85] = [16.94, 19.15]$$

Combinando estos dos casos se obtiene el intervalo de confianza neutrosófica: [16.94, 21.06].

El tamaño de la muestra neutrosófica para estimar, dentro de la cantidad B , con un $c\%$ de confianza, de la media de la población μ es:

$$n_N = \frac{(\text{valor crítico de } z)\sigma}{B}$$

Donde el valor crítico z debería corresponder al $c\%$ de confianza, σ es la variación estándar de la población, y n_N es el tamaño de muestra neutrosófica resultante, por lo que n_N puede ser un conjunto (especialmente un intervalo).

Como garantía, podemos tomar el tamaño de la muestra como $\lceil \max\{n_N\} \rceil$, donde $\lceil \cdot \rceil$ significa parte entera superior.

Ejemplo 29: el departamento de contabilidad de la Facultad de Ciencias de la Información de la Universidad de Guayaquil desea estimar el costo anual de los suministros de oficina dentro de los 40 dólares de la media verdadera de la población. El departamento de negocios quiere un 95% de confianza en la exactitud de sus resultados. ¿Qué tamaño debe tener la muestra?

Debido a que σ no se conoce, se puede aproximar como

$$\sigma \approx \frac{\text{Rango}}{4}$$

Como en las estadísticas clásicas, el rango es la diferencia entre los costos más altos y los más bajos. La cantidad gastada en material de oficina varió entre \$500-\$550 y \$100-\$150. Luego:

$$\sigma \approx \frac{[500,550] - [100,150]}{4} = \frac{[500 - 150, 550 - 100]}{4} = \frac{[350, 450]}{4} = [87.5, 137.5]$$

Además $B = 40$, el valor crítico de z es 1,96, y:

$$\begin{aligned} n_N &= \left[\frac{1.96[87.5, 137.5]}{40} \right]^2 = \left[\frac{1.96(87.5)}{40}, \frac{1.96(137.5)}{40} \right]^2 = [4.2875, 6.7375]^2 \\ &= [(4.2875)^2, (6.7375)^2] \approx [18.38, 45.39] \end{aligned}$$

Ahora

$$\lceil \max [18.38, 45.39] \rceil = \lceil 45.39 \rceil = 46.$$

Por lo tanto, el tamaño de la muestra debería ser 46.

4.6.1. Intervalo de confianza neutrosófico de muestra grande para la proporción de población

Al utilizar las estadísticas clásicas se puede definir, de la misma manera, el intervalo de confianza neutrosófica de gran muestra para la proporción de población π :

$$p \pm (\text{valor crítico de } z) \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$



Para el caso cuando $\min\{np\} \geq 5$ y $\min\{n \cdot (1 - p)\} \geq 5$

Donde

p = proporción de la muestra = número de individuos de la muestra que poseen la propiedad de interés dividido por el tamaño de la muestra

n = tamaño de la muestra

π = proporción de la población = número de individuos de la población que poseen la propiedad de interés dividido por el tamaño de la población

Con la distinción de las estadísticas clásicas de que en las estadísticas neutrosóficas los parámetros p y n pueden ser conjuntos en lugar de números nítidos, y el valor crítico z puede ser también un conjunto. Por ejemplo, puede ser $[1,645, 1,96]$, un nivel de confianza del $[90, 95]\%$.

Las estadísticas de la muestra neutrosófica p , para $\min\{n\}$ suficientemente grande, tiene una distribución de muestreo neutrosófico (curva normal) que se aproxima a la media de la población π y su desviación estándar.

$$\sqrt{\frac{\pi(1 - \pi)}{n}}$$

Ejemplo 30: en una tienda de electrodomésticos se le realiza una encuesta a una muestra de 200 - 220 consumidores. Se les pregunta si estarían dispuestos a cambiar su viejo TV y comprar uno nuevo. El número de respuestas afirmativas fue de 150. El nivel de confianza debería ser del 99%. Si π denota la proporción de todos los consumidores que cambiarían sus televisores viejos, se puede considerar una estimación de puntos para π :

$$p = \frac{150}{\{200, 201, \dots, 220\}} \approx \left[\frac{150}{220}, \frac{150}{200} \right] \approx [0.68, 0.75]$$

El tamaño de muestra $\{200, 201, \dots, 220\}$ significa que el investigador no estaba seguro si 20 de las personas encuestadas eran clientes de la tienda o no. Por ello, el tamaño de muestra es indeterminado aproximadamente por el intervalo $\{200, 201, \dots, 220\}$.

El valor crítico de $z=2.58$

$$\min\{np\} = \min\{\{200, 201, \dots, 220\} \cdot [0.68, 0.75]\} = 200 \cdot 0.68 = 136 > 5;$$

$$\min\{n(1 - p)\} = \min\{\{200, 201, \dots, 220\} \cdot (1 - [0.68, 0.75])\}$$

$$= 200 \cdot \min([1 - 0.75, 1 - 0.68]) = 200 \cdot \min([0.25, 0.32])$$

$$= 200(0.25) = 50 > 5$$

El intervalo de confianza de la muestra grande para π es:

$$\begin{aligned}
 & [0.68,0.75] \pm 2.58 \cdot \sqrt{\frac{[0.68,0.75] \cdot (1 - [0.68,0.75])}{\{200,201, \dots, 220\}}} \\
 & = [0.68,0.75] \pm 2.58 \cdot \sqrt{\frac{[0.68,0.75] \cdot [0.25,0.32]}{\{200,201, \dots, 220\}}} \\
 & = [0.68,0.75] \pm 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.68(0.25)}{220}, \frac{0.75(0.32)}{200}} \\
 & = [0.68,0.75] \pm 2.58 \cdot \sqrt{[0.000773,0.001200]} \\
 & = [0.68,0.75] \pm 2.58 \cdot [\sqrt{0.000773}, \sqrt{0.001200}] \\
 & = [0.68,0.75] \pm 2.58 \cdot [0.027803,0.034641] \\
 & = [0.68,0.75] \pm [0.071732,0.089374]
 \end{aligned}$$

Se divide en dos partes:

$$[0.68,0.75] + [0.071732,0.089374] = [0.751732,0.839374]$$

Y

$$[0.68,0.75] - [0.071732,0.089374] = [0.590626,0.678268]$$

Al combinar ambos resultados en un modo conservador, se obtiene:

$$[0.590626,0.839374].$$

La fórmula para elegir el tamaño de la muestra neutrosófica es la misma que en la estadística clásica, pero utilizando conjuntos en lugar de números nítidos:

$$n = \pi(1 - \pi) \cdot \left[\frac{\text{valor crítico de } z}{B} \right]^2$$

Donde B es el error específico limitado.

Si π no puede estimarse utilizando información neutrosófica previa, se utiliza $\pi = 0,5$, lo que da un valor de muestra conservadoramente grande, un n mayor que cualquier otro valor de π .

4.7. Teorema del límite central neutrosófico

El teorema del límite central neutrosófico es una extensión del clásico teorema del límite central, puede aplicarse con seguridad si $\min\{n\}$ supera los 30, donde n es el tamaño de la muestra neutrosófica, n puede ser un conjunto. El teorema del límite central neutrosófico establece que la distribución de muestras neutrosóficas de \bar{x} si se aproxima a una curva normal neutrosófica cuando $\min\{n\}$ es suficientemente grande, sin importar la distribución de la población.

Por supuesto, si la distribución de la población es normal, entonces $\min\{n\}$ puede ser menor de 30, y la distribución de muestreo neutrosófico de \bar{x} es normal también para cualquier tamaño de muestra neutrosófica n . Pero, si la distribución de la población no es normal, entonces $\min\{n\}$ debería ser mayor de 30, y la distribución de muestreo neutrosófico de \bar{x} es solo una aproximación a la curva normal: cuanto mayor sea $\min\{n\}$, mejor será el enfoque.

El último resultado ha permitido a los estadísticos neutrosóficos, con el fin de inferir una media de la población, desarrollar procedimientos neutrosóficos de muestras grandes, incluso cuando se trata de una forma desconocida de la distribución de la población.

Al utilizar notaciones similares:

n : tamaño de muestra neutrosófica aleatoria

\bar{x} : media neutrosófica del tamaño de la muestra

μ : media

σ : desviación estándar de la población

$\mu_{\bar{x}}$: media neutrosófica de la distribución \bar{x}

Y

$\sigma_{\bar{x}}$: desviación estándar neutrosófica de la distribución \bar{x}

Se tiene, como en las estadísticas clásicas:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu,$$

Y

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

El teorema del límite central neutrosófico no se aplica, como en la estadística clásica, cuando $\min\{n\}$ es pequeña y se desconoce la forma de la distribución de la población.

Al introducir el intervalo de confianza neutrosófico t de muestra pequeña para la media de la población normal, que es solo una neutrosificación del intervalo de confianza t clásico de una muestra para la media de la población μ :

$$\bar{x} \pm (\text{valor crítico } t) \cdot \sqrt{\frac{s}{n}}$$

Donde, similarmente:

\bar{x} : media neutrosófica del tamaño de la muestra;

s : desviación estándar neutrosófica;

n : tamaño de muestra neutrosófico;

Y el valor crítico t está basado en $\min\{n\} - 1$ grados de libertad. \bar{x} , s y n pueden ser conjuntos en lugar de números nítidos.

Para una pequeña $\min\{n\}$, el intervalo de confianza neutrosófico t para una población con media μ es apropiado cuando la distribución de la población es normal o aproximadamente normal. De lo contrario, debe ser empleado otro método.

La distribución t neutrosófica está más extendida, por supuesto, que la curva estándar neutrosófica normal (z), porque el uso de s , en lugar de la desviación de la población σ , produce una variabilidad adicional.

Las distribuciones neutrosóficas t se distinguen entre sí, por el grado de libertad que puede ser un entero positivo mayor o igual a 1, o un conjunto de enteros positivos mayores o iguales a 1. Por ejemplo:

$$\{n, n + 1, \dots, n + m\}$$

Cuanto mayor es $\min\{n\}$, más se acerca la distribución neutrosófica t a la curva neutrosófica z . Para $\min\{n\} > 120$ se puede utilizar el valor crítico z .

El valor neutrosófico de la curva t , para un número fijo de grados de libertad, tiene en general forma de campana y está centrada en cero en el estilo neutrosófico.

Ejemplo 31: se investigó una pequeña muestra aleatoria de 18 desarrolladores de software, en una empresa de telecomunicaciones. La investigación fue con respecto a los programas que estos trabajadores son capaces de elaborar en un año. El promedio de la muestra neutrosófica encontrada fue entre 8 y 10, con una desviación estándar entre 3-4. Se requiere un nivel de confianza del 95% para capturar el promedio de la población μ . Por lo tanto:

$$\bar{x} = [8,10]$$

$$s = [3,4]$$

$$n = 18$$

Así, un tamaño de muestra pequeño, que requiere un valor crítico neutrosófico t basado en $18 - 1 = 17$ grados de libertad.

Con la tabla de valores críticos t de las estadísticas clásicas, se encuentra que para un nivel de confianza del 95% y 17 grados de libertad, el valor correspondiente de crítico t = 2.11.

Al aplicar la fórmula anterior:

$$\bar{x} \pm (\text{valor crítico } t) \cdot \sqrt{\frac{s}{n}} = [8,10] \pm 2.11 \frac{[3,4]}{\sqrt{18}}$$

$$\bar{x} \pm (\text{valor crítico } t) \cdot \sqrt{\frac{s}{n}} = [8,10] \pm \left[\frac{2.11(3)}{\sqrt{18}}, \frac{2.11(4)}{\sqrt{18}} \right]$$

$$\bar{x} \pm (\text{valor crítico } t) \cdot \sqrt{\frac{s}{n}} \approx [8,10] \pm [1.492,1.989]$$

Se divide el cálculo en las dos posibilidades:

$$[8,10] + [1.492,1.989] = [8 + 1.492, 10 + 1.989] = [9.492, 11.989]$$

$$[8,10] - [1.492,1.989] = [8 - 1.492, 10 - 1.989] = [6.011, 8.508]$$

Al combinar ambos resultados de manera conservadora, se obtiene el intervalo de confianza neutrosófico t para el promedio de elaboración de programas de los programadores de la empresa de [6.011, 11.989].

Ejemplo 32: con el fin de realizar un estudio sobre la calidad de un nuevo programa informático que se pretende expandir su comercialización, se realizó una encuesta a profesionales de la ciudad de Guayaquil, Ecuador. Para ello se definió una muestra de 108 profesionales de 20 empresas. La muestra fue escogida aleatoriamente y respondió según su apreciación del trabajo con el programa en cuestión.

Los profesionales fueron divididos en dos estratos, los especialistas en las ciencias informáticas y los especialistas en otras ramas. Sin embargo, según la información recopilada se identificó sesgo acerca del uso regular del programa en al menos una empresa, por lo que se hizo necesario identificar las frecuencias neutrosóficas.

Una distribución de frecuencias neutrosófica es una tabla donde se muestran las frecuencias absolutas y relativas, con algunas indeterminaciones. Principalmente las indeterminaciones ocurren debido a datos imprecisos, incompletos o desconocidos, relacionados con las frecuencias absolutas. Como consecuencia, las frecuencias relativas se vuelven imprecisas, incompletas o incluso desconocidas.

En este caso, representamos la frecuencia neutrosófica mediante números estadísticos neutrosóficos con la forma $N = d + i$ con $i \in [i_a, i_b]$, donde d : es la parte determinada de N , i : es la parte indeterminada de N , i_a : es el límite inferior del intervalo i y i_b : es el límite superior del intervalo i .

Siendo $\min_{nf} = N + i_a$ y $\max_{nf} = N + i_b$, la expresión que se usará para representar la frecuencia neutrosófica estimada es: $[\min_{nf}, \max_{nf}]$. Para calcular las frecuencias neutrosóficas totales calculamos el total mínimo y máximo de m frecuencias estimadas de categorías por la ecuación:

$$tmin_{nf} = \sum_{j=1}^m (\min_{nf})_j$$

$$tmax_{nf} = \sum_{j=1}^m \max_{nfj}$$

Donde:

$tmin_{nf}$ es el mínimo total de frecuencias estimadas para m posibilidades

$tmax_{nf}$ es el máximo total de frecuencias estimadas para m posibilidades

\min_{nfj} es el límite inferior del intervalo de frecuencia neutrosófica para la posibilidad j

\max_{nfj} es el límite superior del intervalo de frecuencia neutrosófica para la posibilidad j .

Para calcular la frecuencia relativa neutrosófica de cada posibilidad se tiene:

$$\min_{nrfj} = \frac{\min_{nfj}}{tmax_{nf}}$$

$$\max_{nrfj} = \frac{\max_{nfj}}{tmin_{nf}}$$

Donde:

\min_{nrfj} es el límite inferior del intervalo de frecuencia relativa neutrosófica para la posibilidad j \max_{nrfj} es el límite superior del intervalo de frecuencia relativa neutrosófica para la posibilidad j .

La encuesta aplicada está compuesta por los siguientes enunciados:

- El programa posee una interfaz amigable para el usuario.
- El programa permite la portabilidad de datos a nuevas versiones.
- El programa cumple su función u objetivo de forma estable.
- El programa es fácil de usar y tiene un buen manual de usuario.

Aunque se trabajó una muestra estadísticamente significativa, resultó conveniente aplicar una estimación poblacional de la proporción de las respuestas, para reforzar la validación de la propuesta a partir de los resultados de la encuesta. Para tal fin, se utilizó el intervalo de confianza para una proporción de población grande, con la fórmula:

$$I\pi = \left[p - (z \text{ critical value}) \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + (z \text{ critical value}) \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Donde:

p = proporción de la muestra = número de individuos de la muestra que poseen la propiedad de interés dividido por el tamaño de la muestra y n = tamaño de la muestra.

Fue utilizada también la desviación estándar $\sigma = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$ de la distribución de muestreo neutrosófico (curva normal) que se aproxima a la media de la población π .

A partir de los resultados de la encuesta aplicada y teniendo en cuenta el sesgo en la información recopilada, se obtuvo la siguiente tabla de frecuencias neutrosóficas acerca de la composición de la muestra.

Categoría	Neutrosophic Estimated Frequency	Neutrosophic Relative Frequency
Especialistas en informática	[73 , 77]	[0.676 , 0.778]
Especialistas en otras ramas	[26 , 31]	[0.240 , 0.313]
Total	[99 , 108]	

Tabla 9. Frecuencia neutrosófica

Como se puede apreciar, se encuestaron entre 73 y 77 especialistas en informática que usaron regularmente el programa analizado. Mientras que, entre el 24 y el 31,3% de los encuestados son especialistas en otras ramas que usaron el programa al menos una vez. Los resultados muestrales de la aplicación de la encuesta se muestran a continuación (tabla 10).



Respuesta	Enunciado 1		Enunciado 2		Enunciado 3		Enunciado 4	
	Frecuencia	Proporción (p)						
Sí	101	[0.93, 1.02]	97	[0.89, 0.98]	95	[0.88, 0.96]	101	[0.93, 1.02]
No	7	[0.06, 0.07]	11	[0.10, 0.11]	13	[0.12, 0.13]	7	[0.06, 0.07]
Total	[99, 108]	[0.99, 1.09]	[99, 108]	[0.99, 1.09]	[99, 108]	[1.00, 1.09]	[99, 108]	[0.99, 1.09]

Tabla 10. Proporción neutrosófica por enunciado

A nivel muestral se puede observar una proporción de respuestas positivas superior al 89% para todas las preguntas con un 98,1% para el caso de la pregunta 4, la cual se refiere a la facilidad del uso del programa. Para estimar el intervalo de confianza neutrosófico de la proporción poblacional, se utilizó el intervalo de confianza neutrosófico [0.95, 0.99] para un valor crítico neutrosófico de [1.645, 2.326]. Pero, primeramente debe verificarse que se cumple que $\min\{np\} \geq 5$ y $\min\{n \cdot (1 - p)\} \geq 5$ para cada una de las preguntas de la encuesta.

Pregunta 1

$$\min\{np\} \geq 5$$

$$\min\{[99, 108] \cdot [0.93, 1.02]\} \geq 5$$

$$99 \cdot 0.93 \geq 5$$

$$92.07 \geq 5$$

$$\min\{n \cdot (1 - p)\} \geq 5$$

$$\min\{[99, 108] \cdot (1 - [0.93, 1.02])\} \geq 5$$

$$99 \cdot 0.06 \geq 5$$

$$6.42 \geq 5$$

Al realizar la verificación para el resto de las preguntas se obtuvo los resultados que se muestran en la tabla 11.

Verificación	Enunciado 1	Enunciado 2	Enunciado 3	Enunciado 4
$\min\{np\} \geq 5$	$92.07 \geq 5$	$88.92 \geq 5$	$87.08 \geq 5$	$92.07 \geq 5$
$\min\{n \cdot (1 - p)\} \geq 5$	$6.42 \geq 5$	$10.08 \geq 5$	$11.92 \geq 5$	$6.42 \geq 5$

Tabla 11. Verificación del requerimiento mínimo

Dados los resultados de la tabla 11, se puede estimar el intervalo de confianza neutrosófico de la proporción poblacional. Al aplicar la fórmula para cada una de las preguntas se obtuvo:

$$I\pi_j = \left[p_j - (\text{valor crítico } z) \cdot \sqrt{\frac{p_j(1-p)_j}{n}}, p_j + (\text{valor crítico } z) \cdot \sqrt{\frac{p_j(1-p)_j}{n}} \right]$$

Donde j = número de enunciado, con $j = 1, 2, 3, 4$.

	Enunciado 1		Enunciado 2		Enunciado 3		Enunciado 4	
Intervalo neutrosófico	min	max	min	max	min	max	min	max
Z Neutrosófico	1,645	2,326	1,645	2,326	1,645	2,326	1,645	2,326
p_j	0,935	1,020	0,898	0,980	0,880	0,960	0,935	1,020
$1 - p_j$	0,065	0,071	0,102	0,111	0,120	0,131	0,065	0,071
$\sqrt{p_j(1-p)_j}/n$	0,024	0,027	0,029	0,033	0,031	0,036	0,024	0,027
$Z \cdot \sqrt{p_j(1-p)_j}/n$	0,039	0,063	0,048	0,077	0,052	0,083	0,039	0,063
$p_j - Z \cdot \sqrt{p_j(1-p)_j}/n$	0,896	0,957	0,850	0,903	0,828	0,877	0,896	0,957
$p_j + Z \cdot \sqrt{p_j(1-p)_j}/n$	0,959	1,047	0,927	1,013	0,911	0,995	0,959	1,047
$I\pi_j$	0,896	1,047	0,850	1,013	0,828	0,995	0,896	1,047

Tabla 12. Cálculo de intervalos por enunciado

Como puede apreciarse, para cada una de las preguntas realizadas, se estimó una respuesta positiva favorable a los principales puntos analizados del programa. Se puede asegurar, con un nivel de significación de entre un 95 y un 99% que más del 89.6 % de la población estudiada respondería “sí”, a la pregunta número 1, más del 85 % a la pregunta 2, entre un 82.8 y un 99.5% a la pregunta 3 y más del 89.6 % respondería afirmativamente a la pregunta número 4. Esto permite inferir que el programa informático analizado tiene un elevado nivel de aceptación dentro de la comunidad de profesionales de la ciudad de Guayaquil.

Referencias

- Camacho, C. (s/f). *Aproximación a la teoría de la probabilidad*. Universidad de Sevilla.
- Ceballos, L. y otros. (2018). *Enfoque didáctico de la teoría de conjuntos y probabilidades*. Bruxelles: Pons Publishing House.
- Chao, L. L. (2006). *Introducción a la estadística*. México: Cecsa.
- Kessler, M. (2013). *Métodos Estadísticos de la Ingeniería*. (Material digital)
- Lind, D. y otros. (2012). *Estadística aplicada a los negocios y la economía*. Decimoquinta edición. México: Mcgraw-Hill/Interamericana Editores.
- López, A. & Diez, T. (2017) Aproximación de la estadística a las Ciencias Sociales: una mirada crítica. *Revista Cubana Educación Superior*, 2, 148-156.
- Pérez, R. (2012). *Estadística aplicada a las Ciencias Sociales*. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Porras, A. (s/f). *Estadística inferencial*. México: Centro de Investigación en Geografía y Geomática "Ing. Jorge L. Tamayo", A.C.
- Salas, A. N. (2018). *Métodos estadísticos para la Investigación Científica*. Guayaquil: Editorial Grupo Compás.
- Smarandache, F. (2014). *Introduction to Neutrosophic Statistics*. Craiova: Sitech & Education Publishing
- Walpole, R. E., Myers, R. H.; Myers, S. L. & Ye, K. (2012). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. Novena edición. México: Pearson Educación.