NUEVA CONTRIBUCIÓN

Á LA

ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

POR EL

DR. ZOEL G. DE GALDEANO

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, Corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa.
Delegado de la Comisión Internacional de la enseñanza matemática
y miembro de otras Asociaciones matemáticas

ZARAGOZA
Tipografía de Emilio Casañal, Coso, 100

1910

Nueva contribución á la enseñanza matemática

EXAMEN RETROSPECTIVO

I.—Consideraciones generales.

La Matemática ocupa un lugar entre la Metafísica y las ciencias Físico-químicas y sus aplicaciones.

Y es distinta según se trate de un desenvolvimiento propio como desarrollo de su objeto ó como transmitida de una inteligencia á otra.

En el primer caso, tenemos dos movimientos: el lógico, que fija las verdades en un encadenamiento deductivo; el intuitivo, que crea nuevas verdades por adjunciones de nuevos elementos y dilata la ciencia, como irradiando desde puntos varios de su eslabonamiento, al extender la red ó tejido de sus verdades en las más varias direcciones.

En el segundo caso, tenemos que considerar la estructura intelectual; lo que nos interna en los dominios de la psicología y la adaptación de la ciencia constituída, al modo de funcionamiento intelectual. Sembrar, en una palabra, ideas para conseguir la más eficaz germinación de las semillas. Esto constituye el objeto de la Pedagogía en general, de la Metodología en particular, lo primero cuando se aspira á perfeccionar el instrumento (la inteligencia, la actividad y la moción estética); lo segundo cuando sólo se trata de sustituir unas combinaciones ideales (de conocimientos) por otras.

Del primer caso nos ofrece la historia de la ciencia dos ejemplos: Descartes haciendo tabla rasa de la ciencia, para edificarla sobre nuevos cimientos y Pascal deduciendo las veintinueve primeras proposiciones de Euclides.

Y podemos, *por abstracción, considerar la Matemática* deducida desde sus primeros principios hasta sus últimas consecuencias, de igual modo que el mundo externo desde su origen hasta el estado actual de combinación de sus elementos y hasta los estados futuros.

En el primer momento, consideramos las consecuencias en sus principios; en el segundo, los efectos en sus causas.

Tenemos el mundo ideal y el mundo externo; y para nosotros, la Matemática racional ó subjetiva y la Matemática fenomenal ú objetiva, que tienden á aproximarse en su marcha descendente y ascendente. La primera por la deducción de los principios racionales, la segunda por la sucesión de hipótesis ó de sistemas.

En la Matemática pura, no siéndonos posible la perfecta y completa coordinación de las verdades, procedemos por sistematizaciones arbitrarias.

Una de ellas está constituída por las clásicas disciplinas llamadas Aritmética, Algebra y Geometría, después: el Análisis y la Geometría que han constituído las dos primeras distribuciones de los conocimientos matemáticos.

Estas primeras divisiones se fundaban en las ideas sustantivas de número, figura y ecuación; lo discreto, lo continuo y la relación.

Pero de la ilimitada comprensión de las ideas han surgido relaciones ó modos nuevos y varios, según los cuales se concibe lo sustantivo; y resulta cierta adjetivación que sirve de norma á las nuevas divisiones de la Matemática. Esto ha originado ramas diversas tales como: las teorías de los grupos discontinuos y continuos, la de los conjuntos, la de las funciones de variables reales y complejas, la geometría de los números, las trasformaciones isogonales y otras muchas de que trataremos.

Entre estos varios modos, ya hemos citado en otras ocasiones los siguientes: combinatoria, simbolismo, cantidad, sistemas, correspondencias, correlaciones, representaciones, singularidades, normalización y transformaciones.

Estos y otros modos son eminentemente subjetivos, que tienden, no sólo á la producción ideal, sino á la ordenación de los conceptos en el sistema científico.

El orden expositivo de la Matemática no puede ser el mismo que el orden de coexistencia de sus verdades.

No podemos avanzar un paso *sin saber* contar y sin conocer las propiedades elementales de las figuras.

Avanzamos por una serie de andamiajes que nos dan construcciones sucesivas. Pero la inteligencia protesta de esta necesidad práctica, debida á la ley de su desenvolvimiento, desde lo particular á lo general, de lo elemental á lo complejo.

No basta considerar el desenvolvimiento de la ciencia en cada individuo; debemos también verlo en la Historia, en la que causas extrañas desvían la corriente natural y hasta producen discontinuidades en la evolución del pensamiento.

En la historia de la Matemática no se manifiestan los apasionamientos, las luchas y violencias que en las de las religiones, filosofías y puntos de vista sociales, porque afecta predominantemente á las tranquilas regiones de la idea pura; y hoy tan sólo contiende esta ciencia con las tendencias utilitarias á que la llevan sus múltiples aplicaciones.

Sin embargo, la lucha se ha dejado sentir, aunque tibiamente, entre encontradas aplicaciones.

Euclides cuidó de escribir sus célebres Elementos de Geometría, libres de toda asechanza sofística. En tiempos de Tartaglia, Cardan y Vieta comienzan á sentirse las rivalidades que se acentúan en tiempos de Descartes y Roberval, de Newton y Leibniz que continúa entre los hermanos Bernoulli, comenzándose á deslindarse las dos tendencias del Cálculo infinitesimal y las rivalidades de razas entre los matemáticos ingleses y los del continente.

La característica de este período brillante de la matemática, que se extiende hasta Lagrange, es la de la pura idea matemática, edificándose sobre los problemas de la Naturaleza que se ofrecían en cada momento, ejercitando las facultades inventivas de los grandes matemáticos.

Vemos que la Matemática se aplicó al estudio de la Naturaleza y de las necesidades de la vida, como lo prueba el origen de la Geometría.

*Todo lo mensurable, desde lo existente en el mundo ma*terial hasta lo que afecta á la vida social y utilitaria ha ido aumentando el contingente de los conocimientos matemáticos, que constituyen los tres órdenes de la Matemática, pura ó ideal, natural y social.

La primera desciende hacia las últimas; pero también manifiesta una especial tendencia á elevarse hacia las regiones del origen común á todas las ciencias, la Filosofía, como una de sus ramificaciones, especialmente para cumplir otras últimas finalidades cuales son su organización teórica, que depende exclusivamente de la Lógica y sus ulteriores progresos que han de realizarse con auxilio de la Pedagogía y Crítica, las cuales se refieren al orden psicológico é histórico propiamente tal, ó bibliográfico, que es la historia contemporánea.

II.—Mi labor desde 1874

Como ejemplo de estos desarrollos parciales de la ciencia que se efectúan individualmente, voy á citar la génesis de las ideas matemáticas que se ofrece en la serie de mis publicaciones.

Los dos primeros folletos: *Observaciones útiles en las matemáticas* (1874) y el *Método aplicado á la ciencia matemática* (1875) tienen un carácter predominantemente psicológico.

Me ocupo, aunque de un modo elementalísimo ó rudimentario, de los *principios de la ciencia*, de las *cuestiones de la ciencia matemática*, de *algunas ideas que se refieren á las cuestiones matemáticas* acerca de los *teoremas y demostraciones*, sin pasar de las regiones de la segunda enseñanza ó de las matemáticas elementales.

Me propongo esbozar algunas ideas acerca de la Matemática, *en sus relaciones con la inteligencia*: á fin de *despertar el espíritu matemático* en los alumnos, reduciéndose el índice de las materias á:

Ideas generales, método aplicado al desenvolvimiento de una cuestión (objeto, sujeto, análisis, síntesis), ejecución ó fase activa, el método aplicado á sistemas de cuestiones, fases de la ciencia matemática, parte objetiva y subjetiva, métodos matemáticos, ideas generales acerca de la definición, división y clasificación.

Las *consideraciones sobre la conveniencia de un nuevo plan para la enseñanza de las matemáticas elementales* (1877) re-

velan una tendencia hacia la Lógica, bastando para ello recorrer su índice de materias: Períodos del desarrollo intelectual y de la enseñanza.—La ciencia matemática en los tratados.—Diferencia entre la Matemática y las demás ciencias.—La ciencia Matemática en la enseñanza actual.—Progresos de la ciencia matemática, sus aplicaciones finales.—De los métodos demostrativos (métodos directos generales, métodos directos particulares, método *ad absurdum*, método sintético).—Metodología elemental.—Métodos demostrativos geométricos.—Métodos generales.

En este folleto, para establecer la correspondencia entre las fases del desarrollo intelectual y la enseñanza, admito la necesidad de ser establecida en cinco tratados:

El primer tratado, *Exposición preliminar* ó *intuitiva*, digo: contendrá las definiciones, divisiones y operaciones correspondientes á la Aritmética, ciencia del número, es decir, la descripción del objeto y sus variedades y la parte práctica, cuya justificación es un análisis intuitivo de escasa dificultad; después seguirán las definiciones y divisiones pertenecientes á la Geometría, ciencia de las figuras, cuyo objeto, más concreto é inteligible que el del Algebra, cuyos métodos, más numerosos que los de ninguna otra parte de la Matemática, la hace muy propia para mostrar, desde luego, los medios que ha de emplear la inteligencia en la demostración de los teoremas y en la resolución de los problemas. La memoria y la intuición empírica son las dos funciones intelectuales casi exclusivamente ejercidas en esta parte.

El segundo tratado será el de la *Metodología*, que principiará por consideraciones generales respecto al teorema y al problema, distinción de uno y otro, partes de que constan y numerosos ejemplos prácticos para distinguir la hipótesis de la tesis, los datos de las incógnitas y en obtener el teorema recíproco de otro dado, etc.»

«La Metodología, añado, dará como resultado poner en conocimiento del alumno los diferentes procedimientos matemáticos que se combinan para demostrar y resolver las cuestiones».

«El tercer tratado debe ser la exposición razonada de la ciencia elemental en sus cuatro partes: *Aritmética*, *Geometría*, *Algebra* y la *Teoría de las funciones circulares* con la *resolución numérica de los triángulos rectilíneos*, etc.»

«La *crítica* dará por resultados hacer pasar el conocimiento expontáneo de la ciencia adquirida por el alumno, á conocimiento fundado».

«El quinto y último tratado será una *síntesis general*, hecha *a priori*, prescindiendo de las trabas que impone (en el estado actual de la ciencia) el fundar unas proposiciones en otras, es decir, defectos debidos al escaso progreso de los métodos y al estado intelectual de los alumnos que exige con frecuencia alteraciones en la rigurosa exposición sintética».

Ciertamente que estos cinco tratados corresponden á procedimientos educativos, seguidos durante los cinco ó seis años que suele durar la segunda enseñanza.

Así el alumno, en los dos primeros años adquiriría las primeras nociones y algunos procedimientos ó métodos, en el tercero y cuarto conocimientos fundados en la demostración; y, como ocasión para la práctica de la metodología, y, en el quinto año un resumen ordenado de lo aprendido en los años anteriores. Todo lo cual constituye un procedimiento esencialmente educativo ó pedagógico seguido en la enseñanza.

Otra tendencia se revela en las publicaciones siguientes: la tendencia *sintética*, no opuesta al análisis, sino complementaria.

La síntesis señala el *camino más corto* que liga las verdades entre sí para sostenerse mutuamente en un reducido núcleo.

El *Complemento de la Geometría elemental* ó *crítica geométrica* (1881), del que sólo publiqué la parte primera, *crítica didáctica*, obedece á este plan sintético como complemento al *método analítico* ó de *invención*, objeto de la sección pimera, dejando para la sección segunda el tratar del objeto, en su *generación; determinación* en sus *coexistencias* y *sustituciones*, hasta llegar á la *determinación de los lugares geométricos*, y finalmente á las *sustituciones sucesivas de los problemas* ó *cuestiones equivalentes*.

En la *Geometría elemental* pretendo afianzar estos puntos de vista, especificando que se trata de «la existencia y determinación de las rectas no concurrentes ó paralelas, de la determinación de los triángulos, de la transformación ó correspondencia de la igualdad ó desigualdad angular con el paralelismo ó no paralelismo, de la correspondencia de las relaciones angulares y de posición con relaciones de magnitud lineal entre las rectas concurrentes».

En suma, pongo de relieve la idea de *transformación* y de *correspondencia* entre elementos heterogéneos, ya sean ángulos y magnitudes, ángulos y arcos de círculo ó lados de un triángulo, hasta el punto de presentar la Trigonometría como un capítulo de la Geometría; y partiendo, en todo de la *existencia* y la *determinación*.

La sección complementaria de la obra que titulo: *Crítica geométrica*, resume los conceptos expuestos en *Consideraciones sobre la conveniencia* etc. en los dos libros: *Metodología geométrica* y *Crítica de las verdades geométricas*.

Ha de observarse que faltan á este Tratado, los problemas por creer que éstos debían constituir una obra aparte, cuya publicación quedó en proyecto.

Continúa en los tratados de Aritmética, Algebra elemental y Problemas de Aritmética y Algebra mi tendencia sintetizadora y abstracta, poniendo de relieve los caracteres conmutativo, asociativo y distributivo de las operaciones; considerando las fracciones como especies de números concretos, para uniformar todos los números racionales bajo la idea de los sistemas de numeración y el cálculo aritmético; y en el orden abstracto, coordinando la teoría del *número-factor* con la del *número-resto*, en las nociones sobre las congruencias, que permite ver los dispersos teoremas elementales sobre la divisibilidad, subordinados á la teoría de los *restos-potenciales*, en cualquier sistema de numeración.

En el Algebra, doy relieve á los conceptos combinatorios característicos en esta rama de carácter formal. La unificación del cálculo se establece definitivamente al final del tratado de las funciones explícitas, mediante los algoritmos de Grassmam y de Hámilton, siguiendo la idea de sucesiva generalización del cálculo, desde las cantidades reales enteras hasta las cantidades complejas y las puramente abstractas ú *objetos* simplemente sometidos á las leyes combinatorias del cálculo formal.

Y, por otra parte, se exponen las nociones precisas de la combinatoria, en el campo de las sustituciones ó grupos que han de caracterizar más tarde al Algebra en la teoría de las ecuaciones algebráicas, que es la aplicación más inmediata de la teoría de los grupos, lo que, dicho sea de paso, afianzo en el *Tratado superior*, cuya última parte relativa á la resolución de las ecuaciones, según los conceptos de Abel yde Galois, quedó sin publicar.

Pero si los conceptos combinatorios, en los dominios del cálculo formal y de la teoría de los grupos, tienen su pimera base de sustentación en el Algebra, no la tiene menos el concepto de orden y de periodicidad que principia á manifestarse en los restos potenciales, que continúan en las ecuaciones binomias, como caso el más sencillo de las ecuaciones abelianas, y que se extiende con indefinida generalidad, como expresó elegantemente Poinsot en sus *Réflexions sur la théorie des nombres* en las ecuaciones indeterminadas ó de congruencia. Y este segundo punto de vista hice resaltar en mi tratado elemental, llegando á servirme de la representación por medio de los polígonos estrellados, hasta en las nociones sobre las raíces primitivas de las congruencias.

Finalmente, en los *Problemas de Aritmética y Algebra*, pretendo hacer resaltar la superioridad del lenguaje algebráico sobre el lenguaje ordinario y aritmético, la rapidez y generalidad en la expresión del pensamiento.

Por otra parte,distingo, en el libro cuarto, los dos órdenes que constituyen la realidad del mundo físico y los conceptos intelectuales, presentando las dificultades que ofrece la traducción algebráica de los fenómenos de la naturaleza y de los hechos de la vida social, lo que produce analogías y divergencias entre el lenguaje algebráico y la realidad física, entre la asociación y disociación de las cuestiones, y que conduce á la discusión de los problemas, por la cual, tan sólo, pueden armonizarse estos dos órdenes tan distintos.

El Algebra, como la Geometría, elementales, tratan preferentemente problemas que, podemos decir, pertenecen al orden de la discontinuidad, y se refieren á hechos aislados; muy al contrario de lo que ocurre en las ramas superiores, donde se estudian los sistemas, ya en el dominio puramente matemático, ya en el de la Naturaleza, siendo este último extremadamente complejo.

Así pues, en el dominio elemental, sólo pude componer sumariamente, algo de las correspondencias entre los conceptos de número y extensión, que me sirvieron de ocasión para establecer algunas correspondencias geométricas, entre las que creí útil una aplicación al Algebra de las correlaciones geométricas de Carnot, que pretendió explicar los cambios de signo de las cantidades, suponiéndolas contenidas en sistemas variables de un modo continuo, lo que generalizó Poncelet por su *principio de continuidad*, primeros ejemplos que preparan á las inteligencias para el tránsito de lo elemental á los sistemas.

Expuesto lo elemental, con tendencias unificadoras y sistemáticas, faltaba entrar en una nueva región de enlazamientos y armonización.

Los porismas de Euclides, como manantial abundante de proposiciones, que Chasles concentró en su *Geometría superior*, la *Geometría reciente* ó del *Triángulo*, los sistemas geométricos de Grassmann y Hámilton conducen á un complemento y á un sistema.

La Geometría del Triángulo es una expansión de la Geometría elemental, como se expresa perfectamente en la obra *A sequel to Euclid* de Casey. La Geometría de Chasles funda sus construcciones en los sistemas de puntos y haces de rectas, bajo el concepto predominante de la relación anarmónica.

Los sistemas de Grassmann y Hámilton son nuevos sistemas de Geometría analítica; y por último, aparte de todas estas geometrías, las nuevas creaciones de Lobatschewsky y Bolyai, al menos, en el dominio de la literatura matemática, permite elevar los puntos de vista hacia la crítica científica, según lo hice en mi tratado de *Geometría general*; y este espíritu informó también otras varias obras acerca de diversas ramas, como son: la *Crítica y síntesis del Algebra*, *Estudios críticos sobre la generación de los conocimientos matemáticos*, *Las modernas generalizaciones expresadas por el Algebra simbólica, las geometrías no-euclídeas y el concepto de hiper-espacio, el carácter y trascendencia de las Matemáticas en la época presente* (discurso inaugural), *Ciencia, educación y enseñanza*, *Estudios de crítica y pedagogía matemáticas* y algunos artículos publicados en varias revistas, especialmente en el *Progreso matemático*, así como el curso de diez lecciones explicadas en el Ateneo de Madrid sobre la *Moderna organización de la Matemática*, comprendiendo: 1.º *Carácter de la Matemática en el siglo* XIX (variedad de sus teorías, tendencia unificadora, conceptos principales que han conducido á la unificación, generalidad de las diversas teorías, necesidad de una nueva clasificación de éstas); 2.º *Teoría de los números* (Influencia de Gauss, teorías de Kummer y Dedekind, concepto de los conjuntos de Cantor, investigaciones de Du Bois-Reymond, moderna exposición de la Aritmética general y de las teorías de las magnitudes y funciones de variables reales), 3.º *Geometría moderna* (Carácter propio de la Geometría en la escuela de Monge, direcciones dadas por Carnot, Poncelet, Chasles, Plucker, Staudt y Clebsch, lo imaginario y lo infinito, las geometrías infinitesimales y vectoriales); 4.º *Geometrías no-euclídeas* (Geometrías de Lobatschewsky y de Riemann, estudio comparativo de los tres géneros de geometrías, principales desarrollos de las no-euclídeas; 5.º *Geometría de* n *dimensiones*, (Concepto del hiperespacio, exposición general de la geometría de *n* dimensiones, particularización de la de cuatro, poliedros de Schlegel, nociones acerca del *Analysis situs*); 6.º *Algebra* (Carácter esencial de esta rama, principios de Lagrange, Abel, Galois, Algebra asociativa de Peirce, teorías de Dedekind y Weierstrass); 7.º *Algebra de la Lógica* (Métodos de Boole y de Jevons, doctrina de Schroeder, principios combinatorios de Grassmann); 8.º *Algebra de las formas* (Correspondencia entre el Algebra de las formas y la Geometría proyectiva, aplicaciones de las sustituciones lineales, transformaciones de Cremona, problemas de la equivalencia y afinidad de las formas); 9.º *Teorías de las funciones* (Dominio del cálculo infinitesimal, funciones de variables complejas; sus especies, periodicidad de las funciones); 10.º *Unificación de los conceptos de la Matemática en el siglo* XIX (Nociones acerca de los trabajos de Sophus Lie sobre los grupos de transformaciones, resumen del trabajo sintético del siglo XIX).

Por último en mis notas: *Algunas observaciones pedagógicas acerca de la Matemática, Plan de enseñanza matemática, Ensayo de Clasificación de las ideas matemáticas y La Matemática en su estado actual*, presentadas al congreso científico de Zaragoza y publicadas por la *Asociación española para el progreso de las ciencias* y en mi *Boletín de crítica, enseñanza y bibliografía matemáticas* he continuado mi labor de propaganda, encaminada principalmente á la organización de los estudios matemáticos y á la educación intelectual para facilitar tales estudios é investigaciones.

Pero esta extensa labor exige el ser continuada, conforme á los nuevos impulsos y direcciones de la Ciencia moderna.

Esta se halla en un estado de constante progreso. El campo se halla abierto en múltiples direcciones: y hoy particularmente, se notan las dos corrientes, una hacia los principios abstractos y generales, otra hacia los hechos de la experimentación.

Por un lado se discuten las definiciones, los postulados y el valor de los principios científicos; por el otro se busca la compenetración de los estudios racionales con los experimentales. Y finalmente, se aspira á una adaptación, cada vez más firme, de la inteligencia con su objeto, el conocimiento científico, intentando hacer cada vez más eficaces los principios pedagógicos y los métodos de enseñanza.

Un hecho incidental, de importancia secundaria, cual es la creación de una cátedra de *Complemento de Cálculo infinitesimal* en nuestras mermadas facultades de ciencias, facilita dirigir el Cálculo infinitesimal hacia los estudios físico-químicos, en el primer curso de *Elementos de cálculo infinitesimal*, permitiendo tal extensión el retardar, para el segundo, las teorías superiores referentes á las varias funciones y ecuaciones diferenciales.

Mis programas, en los dos cursos terminados, han podido, por tanto, extenderse hacia el cálculo de probabilidades, la ciencia del actuario, y algunas aplicaciones á la física y á la termoquímica, que por su objetividad son, en este grado científico, lo que los gráficos en los estudios elementales, pues las apariencias sensibles dan siempre fijeza á los conceptos abstractos.

Y este hecho manifiesta cumplidamente, cuán diversos han de ser los procedimientos para enseñar la Matemática en cada una de las naciones; pues en el modo, contribuye la esplendidez de los gastos en esta atención de los Estados; y donde no hay consignado lo suficiente, forzoso es suplir con artificios y juxtaposiciones, por lo general, poco satisfactorias.

Una enseñanza puede adolecer de excesivamente teórica, por no haber holgura suficiente para las prácticas necesarias. Sin gran acopio de teorías, las prácticas degeneran en puro empirismo. Quien ve mucho y á distancia, puede recogerse para dar realidad á las ideas; quien sólo conoce las prácticas, no puede avanzar más que unos pasos en el estrecho recinto de sus manipulaciones.

Enseñar por recetas es matar las ideas. El aislamiento de los hechos se contrapone á la asociabilidad de aquéllas.

Los idealismos de la ciencia moderna han multiplicado la producción de los hechos y de los resultados prácticos. La teoría es el barómetro de la práctica.

Bien es cierto también, que la inteligencia necesita cierta fijeza y energía equivalente á la energía física en la salud del cuerpo. Y la energía intelectual del esfuerzo reposado es condición que no ha de faltar al matemático, alejado de los lirismos de la imaginación que perjudican al metódico ejercicio de la razón.

El éxito de la educación matemática depende de la acertada combinación del ejercicio lógico é inventivo ó siquiera personal.

El poder inventivo es un don natural; pero la educación puede dirigir el trabajo de iniciativa aunque sea poca, es decir la actividad intelectual. Todo esto requiere tiempo y medios, de lo que no se dispone por igual en todas partes. Pero queda un recurso: buscar el máximo aprovechamiento con medios determinados.

Esto me ha obligado, en mi incesante labor, á realizar lo que en circunstancias distintas no hubiera realizado.

III.—Algo sobre la marcha de la enseñanza.

Las naciones rezagadas tienen que ser excesivamente teóricas para ganar tiempo que se perdió, así como los inventores deben hallarse en campo fértil, al nivel de los descubrimientos contemporáneos, para obtener resultados eficaces y válidos.

Hay que cultivar la parte ideal y la parte mecánica en proporción á los medios y recursos.

Los centros docentes debieran ser en los primeros años especies de talleres ilustrados. Actuar más que pensar, bajo la acción directora é inteligente del maestro y llevar la actividad hacia las finalidades que éste conoce como buenas, aunque no las conozca el alumno, hasta el momento de su

emancipación de la tutela intelectual, y pueda caminar por sí.

La organización de nuestros estudios matemáticos es deficiente. Se instruye más que se educa y se instruye en lo infecundo.

Las teorías son tanto más fértiles, cuanto más ideales y generales son. El análisis es más fértil que el Algebra; absorbiéndola en una generalidad superior, cuenta más regiones por donde caminar, más instrumentos y recursos de que disponer.

Lo importante para avanzar con rapidez, es elevarse cuanto antes á la región de las ideas complejas con las delineaciones precisas de las elementales, pues luego se descenderá con gran facilidad de lo complejo á lo elemental y se verá con luz clarísima.

En momentos dados, nos basta con las definiciones claras de las cosas, abandonando provisionalmente el lastre de sus numerosas propiedades. Las sinopsis aceleran la marcha ascendente; y desde las alturas es fácil descender.

El cálculo infinitesimal es el alma de la Matemática; su instrumento, la derivada, que corresponde á la tangente, conduce, en Geometría, á las singularidades de las curvas, en Análisis, á las de las funciones, y, concretándose, á las representaciones de los fenómenos físicos y químicos.

Lo elemental es lo discontinuo, la región de los conocimientos aislados, independientes; el Análisis superior es la región de los sistemas, de los encadenamientos, correlaciones y transformaciones, es comparable á lo que ha sido el vapor y la electricidad en la locomoción. Lo elemental es caminar á pie; una necesidad en los primeros pasos de cada inteligencia.

Más bien, en la ciencia no hay elemental y superior, sino lo individual y sistemático. Quien procede por sistemas, camina con superior intensidad; recorre caminos múltiples con la mayor rapidez que comunica la generalidad de los conceptos.

Perdemos pues lastimosamente el tiempo en nuestras facultades de ciencias, retardando hasta el tercer curso los estudios del Análisis infinitesimal y las teorías de las funciones.

Los procedimientos geométricos, más agradables por sus formas representativas, más claros é intuitivos, son más lentos que los analíticos.

Y después de todo, no son más que éstos vistos por uno de sus aspectos; pues la inteligencia los domina mediante un instrumento común que es la idea con sus dos aspectos ó representaciones, numérica y geométrica, numerable y mensurable, sucesivo ó coexistente, esquemático ó sensible.

Por otra parte, el Análisis también gusta de representaciones sensibles, al menos como esquemas. Y así hemos llegado á un *Analysis situs* y á una *Geometría de los números*.

Que el elemento sea el punto geométrico, la recta, el plano ó el punto, curvas y superficies analíticas, es indiferente para la inteligencia. Sólo le importan las *relaciones* que los ligan y las transformaciones por las que pasa de unos objetos á otros más inteligibles.

Hasta en las ciencias experimentales, la inteligencia sólo procede por representaciones, bajo la forma de fuerzas, energías corrientes, y movimientos varios.

Tenemos en España cursos de Geometría de la posición y de Geometría analítica proyectiva, en el sentido que la llevaron Chasles, Fiedler, Ovidio y en que la fijó, para la enseñanza, el Sr. Lazzeri; pero nos falta la Geometría en el sentido en que la dirigieron Cayley, Salmon y Clebsch, en sus correspondencias con las formas homogéneas, que permite acercarse á la tendencia aritmetizadora moderna, cuyos más brillantes aspectos se encuentran en el Algebra del profesor Herr Weber.

También es cierto que, dentro de las premuras de tiempo que permiten nuestros mezquinos planes de enseñanza, el catedrático de la Universidad de Barcelona Dr. Terradas procura implantar en España las teorías superiores del Análisis, llegando hasta los métodos de integración del Sr. Volterra, á la ecuación de Fedholm y hasta á las ecuaciones integrales, y hasta á las aplicaciones de las funciones elípticas á las teorías de la física; pero esto por cuenta propia, con la predominante aspiración de elevar nuestro nivel científico.

Pero debemos insistir en lo perjudicial que es para nuestro progreso científico el haber acumulado en nuestros dos primeros cursos de Facultad varias asignaturas elementales ó preparatorias que, reducidas á lo esencial, tienen su lugar propio en la segunda enseñanza, y que retrasan el comienzo de los estudios llamados superiores. Tal práctica equivale á pretender enseñar las lenguas vivas por medio de un exceso de reglas gramaticales, cuando se aprenden más rápida y completamente de viva voz, por el uso diario que enseña en bloque

la estructura de la frase; y, de igual modo que se estudia con mayor rapidez el Universo, en su actual funcionamiento, que dislocado en multitud de tratados preparatorios correspondientes á cada uno de sus elementos ó agentes constitutivos.

Es necesario que los exordios no superen al resto de los discursos, ni que los cimientos sean sobrados para un ruín edificio, y que nos convenzamos de que las ideas se sostienen entre sí, formando sólidos macizos conceptuales, á través de los que se comunican entre sí, y llevan las unas á las otras nuevos y multiplicados puntos de apoyo y, á la inteligencia, campos fértiles de investigaciones é inesperados descubrimientos. El individualismo clásico, como dijo el Sr. Echegaray con su genialidad esquemática, en su discurso del Congreso de Valencia, ha sido suplantado por el socialismo científico contemporáneo.

En mi *Tratado de Análisis matemático* he acumulado métodos de los inventores matemáticos, con los perfeccionamientos ulteriores, para ofrecer ancho campo al estudio de los alumnos y para que puedan ver la génesis de las ideas, desde su origen hasta su desarrollo perfecto, desde la marcha sinuosa del análisis inventivo hasta la sencilla manifestación sintética. Así, desde un aparente desorden, pueden surgir ideas que el alumno coordina en una síntesis propia.

Hoy se simultanéa el cálculo diferencial con su complemento el integral, hoy á los conceptos del Análisis acompañan incesantemente los esquemas geométricos, y la Geometría se nutre con la savia fecunda del Análisis. Así como no se puede disgregar un individuo sin producir su muerte, no se pueden subdividir las materias que integran el edificio matemático, en un prolongado aislamiento, ó estado preparatorio, sin entorpecer la acción intelectual ó imposibilitar su claro conocimiento.

IV.—Progresos de la Matemática en España

El paréntesis de tres siglos que encerraba nuestra ignorancia científica, al desorientarnos de la dirección que señalaron á la humanidad los Descartes y los Newton, puede asegurarse que se cerró cuando un ilustre alumno de la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de

Madrid, hoy D. José Echegaray, que llamó la atención de sus profesores desde sus primeros pasos en los estudios, apenas salió de las aulas, dió muestras de su espíritu eminentemente progresivo, publicando obras como *Introducción á la Geometría superior*, *Teoría de las determinantes*, *Principios de Termodinámica*; y comenzó á dar vida con sus geniales producciones sobre muy diversas materias á la *Revista de los progresos de las Ciencias*, fundada por la Real Academia de Ciencias, con objeto de encauzar las inteligencias, desviadas de estas modernas orientaciones, anuladas ante los restos de nuestra antigua opulencia literaria.

No era posible que de la nada científica que nos legaron los siglos XVII y XVIII surgiera la ciencia hecha, con los desbordamientos propios de un Gauss, ni aun siquiera con las profundidades de un Legendre.

Porque, sin escatimar la admiración que debemos á los genios y á los grandes talentos, lo cierto es que los progresos humanos no se escapan á cierta ley de continuidad que los guía, pasando por ciertas discontinuidades que señalan los genios. Pero siempre á cada adelanto ha precedido algo, siquiera como ocasión para los nuevos avances. Y aun la Historia nos señala las épocas de los aislamientos, cuyas gráficas en la Matemática se representan por paralelas al eje de las x.

La Matemática española se detuvo, después de la época brillante en todos los ramos de los conocimientos humanos y especialmente los matemáticos, náuticos y astronómicos, con tanta erudición detallados por el sabio y benemérito catedrático que fué del Instituto de segunda enseñanza D. Acisclo F. Vallín, en su discurso ó mejor, obra, escrita para su recepción en la Real Academia de Ciencias de Madrid.

Sólo durante el glorioso reinado de Carlos III hubo un momento en que pareció resurgir. Y por entonces se importó la Geometría de Monge, y en 1801 el profesor D. Josef Chaix escribió, con vigoroso estilo sus *Instituciones de Cálculo diferencial*, donde con feliz criterio nos hace saborear algunas páginas de estilo newtoriano que conduce al interesante problema de la reversebilidad de las series.

Más tarde, solamente los escritores matemáticos se limi-

taban á sostener en sus enseñanzas los descubrimientos doctrinales que irradiaron, en los primeros momentos de su existencia, de la brillante escuela politécnica de París.

Pero, rotas las tradiciones científicas en el calamitoso período de dos siglos, la Matemática, sin haber germinado por su propia virtualidad en España, se redujo á ser planta exótica, sin arraigo ni potencialidad creadora.

El año 1868 fué el comienzo del nuevo período científico de España que trabajosamente tiende á su estado de progreso, luchando desventajosamente contra la multitud de concausas que siempre impiden la refundición de las antiguas existencias en una nueva vida.

Además, siempre ha sido necesario un período preparatorio para cada período de nuevas manifestaciones de la vida que forman sus diversas edades.

Al avance hacia nuevas regiones debe preceder una concentración de las fuerzas que han de constituir los resortes del movimiento expansivo.

La imaginación es un vigía avanzado de la razón. Aquélla presiente y formula lo que la segunda establece. Las filosofías importadas de la India y aun los sistemas primitivos de la Grecia fueron precursoras del realismo juicioso de las épocas modernas.

En la matemática, la intuición precede á la razón y á la Lógica. Esta comprueba las primeras impresiones de aquélla, las analiza, las ordena, las acepta ó las desecha.

Cierto es que la Matemática es tan sólo el ejercicio de la pura razón, que consiste en la Lógica, aplicada á la cantidad ó al orden. Pero además del desenvolvimiento actual de una relación en otras relaciones ó de la reducción de una cuestión á otras cuestiones bajo los encadenamientos racionales, hay otro momento en la Matemática, como en cualquiera otra ciencia, que corresponde al porvenir, y que evoca nuevos puntos de vista ó nuevos resultados. Estos puntos de vista los han tenido los grandes inventores como estímulo para sus ulteriores descubrimientos y también los tienen los simples divulgadores, cuando pretenden atraer adeptos á la ciencia, haciéndola simpática y sugestiva.

Las naciones que han vivido bajo la influencia de las escuelas, cuya tradición se ha continuado sin interrupción, no necesitan de alicientes extraños ni artificios. Los atractivos de la verdad se encuentran en ella misma, las armonías se *sienten sin necesidad de exteriorizarlas por expresiones* que resultarían débiles ante la fuerza de la realidad.

Y cuando el régimen no se halla establecido, como decimos, lo mismo en las ciencias sociales que en las físico-químicas, es necesario establecerlo, lo que se consigue por el método, ó mejor por la Pedagogía y por la Crítica. Y esto motivó el que, desde 1874, me propusiera el divulgar la Matemática por medio de publicaciones crítico-pedagógicas, cuya enumeración es la siguiente:

Obras esencialmente didácticas.

Geometría elemental (con nociones de crítica)........ 1881
Tratado de Algebra con arreglo á las teorías modernas.. 1883
Tratado de Aritmética 1884
Problemas de Aritmética y Algebra con nociones de crítica algorítmica.......................... 1885
Tratado de Algebra (Parte 2.ª, tratado superior)...... 1886
Tratado de Geometría conforme á las teorías modernas 1889
Geometría general. 1894
Cálculo diferencial 1902
Principios generales de la teoría de las funciones...... 1905
Aplicación del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras planas. 1905
Cálculo integral.................................. 1905
Aplicación del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras en el espacio.......................... 1905
Teoría de las ecuaciones diferenciales 1906-7

Obras esencialmente críticas.

Observaciones útiles en el estudio de las matemáticas.. 1874
El Método aplicado á la ciencia matemática.......... 1875
Complemento de Geometría elemental ó crítica geométrica. 1881
Crítica y síntesis del Algebra..................... 1888
Estudios críticos sobre la generación de los conocimientos matemáticos (1.ª y 2.ª partes) 1890

Carácter y trascendencia de la Matemática en la época presente (discurso inaugural) 1895
Las modernas generalizaciones expresadas por el Algebra simbólica, las geometrías no-euclídeas y el concepto de hiperespacio..................... 1896
L' Unification des concepts dans les mathématiques (Congreso de Zurich)......................... 1898
La moderna organización de la Matemática (diez lecciones explicadas en el Ateneo de Madrid)........ 1898
Note sur la critique mathématique (Congreso de París)................................... 1900
Id. (publicada íntegra en el Boletín de Crítica etc. (t. II) 1910
Estudios de Crítica y pedagogía matemática........ 1900
Exposición sumaria de las teorías matemáticas...... 1907
Ensayo de clasificación de las ideas matemáticas (Congreso de Zaragoza).......................... 1908
La Matemática en su estado actual (Congreso de Zaragoza). 1908
Boletín de Crítica, enseñanza y bibliografía matemáticas.................................. 1908-10

Obras esencialmente pedagógicas.

Consideraciones sobre la conveniencia de un nuevo plan para la enseñanza de las matemáticas elementales 1877
La enseñanza de la ciencia matemática en la universidad (Progreso matemático).................. 1894
Ciencia, educación y enseñanza.................. 1899
Quelques principes generaux sur l' enseignement mathématique (L' Enseignenement mathématique) 1899
Quelques reflexions sur l' enseignement mathématique (Congreso de París de l' Association scientifique).. 1900
La enseñanza científica.......................... 1902
L' Enseignement scientifique en Espagne (traducción, L' Enseignement mathématique)............... 1902
Algunas consideraciones sobre filosofía y enseñanza matemáticas 1907
Plan de enseñanza matemática (Congreso de Zaragoza)......................................

Obras de divulgación.

Artículos bibliográficos (Progreso matemático y Boletín de Crítica, enseñanza y bibliografía matemáticas) 1891-5; 1899-900-1907-10
Reivindicación de la ciencia 1899
Las matemáticas en España (Congreso de Besançon).. 1893
Les mathématiques en Espagne (L' Enseignement mathématique) 1901

PUNTOS DE VISTA ACTUALES

I.—Evolución en España.

Esta labor, continuada desde 1874 hasta los actuales momentos, se ha encaminado siempre á la coordinación de las teorías y á la adaptación de la ciencia á las inteligencias en los varios grados de la enseñanza, según ha permitido la premura del tiempo y las dificultades que, con tales propósitos se acumulan para un trabajo individual.

Por la misma época, nuevos impulsos se notaron con la aparición de algunas revistas científicas tales como *La Revista de la Universidad*, *La Revista de los profesores de ciencias*, *La Crónica científica de Barcelona*, aparte de las que sostuvieron por varios años las varias Escuelas de Ingenieros, tales, por ejemplo, los *Anales de la Construcción*, dirigida por el ilustre ingeniero, sabio en las más varias ramas de los conocimientos humanos, D. Eduardo Saavedra.

La Matemática, sin fuerzas propias, se cobijaba al amparo de las demás ciencias congéneres para dominar la esquivez de un público, poco familiarizado con las ciencias abstractas.

Más tarde, desde 1891 hasta 1895 y desde 1899 hasta 1900, *El progreso matemático* con la colaboración de muy distinguidos matemáticos extranjeros y algunos profesores nacionales, intentó presentar la Matemática por sí, libre de extraños auxilios, no admitiendo á lo sumo más que las aplicaciones de mayor abstracción posible en el campo de la cantidad. Y á esta Revista sucedieron *El Archivo de Matemáticas*, *El Aspirante*, *la Gaceta de matemáticas elementales* y *La Revista trimestral.*

Ya era algo, por más que el éxito no coronara esfuerzos tan multiplicados al presentar la Matemática libre de trabas y tutelas para su autónomo ejercicio.

Y si tales tentativas fracasaron, siquiera fueron dejando estela de luz que se difundió, aunque lentamente como había de suceder, cuando algo se abandona á la débil iniciativa individual.

Esta sólo pudo producir la importación á España de los *métodos de la Geometría pura á que dió fuerte arraigo el* profesor de la Universidad Central D. Eduardo Torroja y la moderna Geometría analítica, eminentemente proyectiva, divulgada por el profesor D. Miguel Vegas.

Por otra parte, entre otros profesores, en Barcelona, el profesor D. Lauro Clariana modernizaba el Cálculo infinitesimal con algunas teorías agregadas á los conocimientos corrientes en su *Complemento á los Elementos de Cálculos* (1892), y, en la actualidad el profesor D. Esteban Terradas explica las más varias y abstrusas teorías recientes; y, en Zaragoza, también los cursos adquieren novedad y extensión, siempre crecientes, siendo numerosas las obras publicadas con este objeto.

No sorprenderá pues, que ante este tardío movimiento, de cuya lentitud sólo puede librarnos una protección franca del Estado hacia las ciencias positivas, bajo la dirección matemática, se note una elevación en las tésis doctorales, sobre las que se desarrollaron en tiempos anteriores, abarcando las más varias y recientes disciplinas, aparte de las que se refieren á la pura geometría, tales como los cuaternios, bicuaternios y tricuaternios, funciones elípticas, funciones meromorfas, etc. que coinciden con la aparición de trabajos de Análisis de algunos profesores, y que se elevarán todavía cuando se amplíen nuestros cursos universitarios con asignaturas altamente teóricas; porque la luz teórica guiará siempre los procedimientos de las aplicaciones y servirán para sugerir otros nuevos, dentro de un ambiente intelectual. Así tenemos:

Algunas Tesis doctorales de Matemáticas de los últimos 20 años.

1 Teoría Analítica de los números complejos, por D. Angel Berenguer, 1888.
2 Propiedades fundamentales de las funciones elípticas, por D. José Rius, 1888.
3 La Atracción Universal, por el P. Angel Rodríguez, 1890.
4 Teoría Analítico-Geométrica de las funciones hiperbólicas, por D. Gabriel Galán, 1892.
5 Las coordenadas curvilíneas, por D. Juan B. Amat, 1899.
6 Estudio Analítico esperimental de la inducción y de la auto-inducción magneto-eléctricas, por D. Heliodoro Gallego, 1901.
7 Teoría elemental de las funciones elípticas, por D. Guillermo Saez Muñoz, 1902.
8 Estudio sobre las funciones meromorfas doblemente periódicas, por D. José Lluch y Meléndez, 1903.
9 Apuntes para una teoría de las figuras circulares, por D. Luis Eleizalde, 1903.
10 Estudio de las propiedades principales de las líneas alabeadas y de las líneas de planos no radiados de tercer orden, por D. Pedro Acchilla, 1903.
11 Solución y discusión del problema de Malfati y sus análogos, por D. Enrique de Rafael, 1905.
12 Los Cuaternios, por José A. Sánchez Perez, 1905.
13 Estudio de los complejos de rectas de 1.º y de 2.º grado, por D. Rogelio Masip, 1905.
14 Estudio sobre la representación geométrica de las ecuaciones, al variar el orden de las líneas de referencia, por D. Aurelio Arévalo.
15 El Microsterógrafo y su aplicación á la medida de diedros de los cristales microscópicos, por D. Francisco Pardillo, 1906.
16 Aplicación de la correspondencia cuadrática al estudio de algunas series y haces de cónicas, por D. Miguel Giménez Giménez, 1906.

17 Estudio de los Poliedroídes tetradimensionales regulares; Pentaedroide, Octaedroide y Hexadecaedroide, por D. Octavio Zapater, 1908.
18 Teoría Geométrica de las líneas cíclicas de cuarto orden y primera especie, por D. Sixto Cámara, 1908.
19 Correspondencias Superiores de formas elementales con aplicación al estudio de las figuras que engendran, por D. Julio Rey Pastor, 1909.
20 Cónicas de las superficies alabeadas de 2.º orden, estudiadas sobre la superficie por coordenadas hiperboloidales, por D. José Mingot, 1910.

Sólo falta añadir, para terminar este cuadro, que con la creación del *Complemento de Cálculo infinitesimal* se facilita el llevar, en el curso elemental, á los alumnos hacia el campo de las ciencias físico-químicas, con mejora de lo abstracto y lo concreto; y así he tratado de proceder en este último curso universitario, por convenir también á la Matemática su compenetración con las ciencias de la Naturaleza; pero sin perder su alta jerarquía, ni bastardearse con un empirismo disfrazado bajo la capa de la práctica, con tendencia á la rutina, porque la ciencia sólo vive cuando evoluciona y cambia por una serie indefinida de perfeccionamientos.

II.—Evolución general en el siglo XIX.

Llegar á resultados íntegros en una recopilación crítico-científica acompañada de las noticias bibliográficas correspondientes, sólo ha podido realizarse por la reunión de esfuerzos de los más ilustres matemáticos que han colaborado y siguen colaborando en la *Encyclopædie der Mahematische Wissenschaften.*

Pero al mismo tiempo que se erige este monumento á la Matemática del siglo XIX, se ha comenzado la obra complementaria que se refiere á la intelectualidad, en relación con la ciencia, á que se reduce el problema de la enseñanza ó de la educación intelectual.

Si dirigimos una mirada retrospectiva, veremos que hasta el último tercio del siglo XIX sólo algunos matemáticos tales como Poncelet, Poinsot, Cournot, Duhamel y Freycinet habían comenzado á escribir obras de crítica y metodología matemáticas.

Por otro lado, vemos realizarse una transformación orgánica de la Matemática, desde luego, en virtud de haberse vulgarizado los descubrimientos de Cauchy, Abel, Galois y Riemann, latentes durante algunos años; y, más tarde se manifiestan las nuevas tendencias, principalmente importadas por Fuchs, Weierstrass y Kronecker, á la que se agregan las disciplinas fundadas sobre los conjuntos y grupos continuos de Cantor y Lie.

La Matemática moderna, en estos momentos, entra en un nuevo período que sucede al período Newtoniano y Lebniziano, cuya terminación puede considerarse en Lagrange.

Cauchy, Abel, Galois y Riemann representan, en este período, á Newton y á Leibniz en el período anterior, aunque el origen de la ciencia moderna se remonta á Descartes; pero hay que notar cómo el Análisis infinitesimal domina entre todas las disciplinas matemáticas y constituye su núcleo generador.

Y esta es labor reservada á los grandes maestros, quienes van realizándola en sus numerosas obras que constituyen la biblioteca matemática contemporánea, incesantemente renovada.

Limitándonos á la enseñanza, especialmente de las universidades españolas, veremos cuánto urge una modernización de los estudios.

Del desarrollo doctrinal, tenemos varias tendencias en distintas ramas.

La tendencia lógica procede por combinaciones de igualdades y desigualdades. Sus conceptos predominantes son los de límite, derivabilidad, integrabilidad, singularidades; su campo adecuado es el ofrecido hoy por los conjuntos y sistemas varios de puntos, líneas y superficies analíticos.

La tendencia abstracta procede según leyes formales combinatorias, en Análisis y en Geometría; su campo es el símbolo ó el esquema.

La tendencia representativa comienza por el concepto de afija de Cauchy. Los campos adecuados son el plano de Cauchy, la superficie de Riemann, y, en su mayor amplitud, las representaciones del *Analysis situs*.

Tenemos la tendencia intuitiva que guió preferentemente á los matemáticos, cuyo perfeccionamiento más acabado lo hallamos en la intuición del número, que se ofrece como material inmediato á la Lógica, y que provoca precediéndolos, en su mayor parte, los descubrimientos.

Y citaremos finalmente la tendencia aritmetizadora, que reduce el Análisis á sistemas de números enteros ligados entre sí por relaciones de igualdad y desigualdad.

Estas diversas tendencias principales y otras varias han hecho perder, á las antiguas ramas su carácter y su lugar en el conjunto de los conocimientos matemáticos.

III.—Paso del período clásico al moderno.

En Análisis, las fórmulas analíticas eran el fondo de las existencias, relaciones y realidades matemáticas. Estas sólo se apreciaban inmediata ó indirectamente por sus representaciones.

Hoy se estudia inmediata y directamente cada objeto.

Se sigue á la función en todos los estados de su existencia; se estereotipan sus caracteres propios que están dados por sus singularidades, ó se construyen según condiciones previamente señaladas. El examen de la función es una contemplación directa, siendo casi nula la importancia del símbolo que, en la Matemática clásica, era un intermediario forzoso entre la inteligencia y el objeto.

Se definen los objetos, creando dominios, campos, regiones, etc., cuyas leyes se fijan, y así se producen los sistemas matemáticos.

Tenemos, por ejemplo, el campo de Galois, el dominio de racionalidad de Kronecker, los sistemas de números ideales de Kummer ó los ideales de Dedekind, los cuerpos abelianos de números, etc.

En Geometría, cuyos avances son más lentos que los del Análisis, aun ha seguido la representación analítica, pues sus realidades se estudian generalmente hasta las curvas y superficies de cuarto grado. Y á lo sumo, el espacio reglado ha ofrecido sistemas de los más generales, habiendo acudido en su auxilio el Algebra especialmente, la de las formas homogéneas y transformaciones lineales.

Se ha adjetivado la Matemática al reducirse sus medios y finalidades á transformaciones, correspondencias, correlaciones, etc.

La actividad intelectual, creando tantos dominios, ha acrecentado su importancia y la Metodología, la Crítica y la Pedagogía se han ido organizando para acudir á las nuevas necesidades científicas.

En el período clásico, el fondo de las investigaciones era una función ó una ecuación $f(x, y) = 0$, $f(x, y, z) = 0$; y su estudio conducía á lo sumo, hasta las curvas de 3.º y 4.º grados, que eran las gráficas de las relaciones correspondientes.

La fundamental relación cartesiana entre la derivada y la tangente daba *el elemento fundamental, generador de las* funciones y de sus representaciones en el plano y en el espacio llegándose á las singularidades de las curvas y á sus clasificaciones.

Por otra parte, al definir Cauchy la función monógena, la representación artificiosa de Descartes por ordenadas y abscisas quedó sustituída mediante la correspondencia de dos puntos, ó la representación funcional en un plano, monótropa ó polítropa y sus singularidades, por la definición de la función algebráica, por la consideración de sus valores según los caminos que conducen de un punto á otro del plano, á la permutación de las raíces, según los sistemas de lazos fundamentales ó alrededor de los puntos de ramificación y llevando la equivalencia de una integral doble para todos los puntos de un área, con la integral simple, tomada á lo largo del contorno que la contiene; lo que reduce su cálculo al de los residuos de Cauchy, relativos á los infinitos de las funciones y también á caracterizar á éstas por sus polos, infinitos puntos críticos, esenciales y de ramificación y á su representación por series de Cauchy y de Laurent, etc.

A la representación geométrica de las funciones de Descartes podemos agregar la representación compleja de Cauchy.

Las dos representan las funciones; pero la primera, como estratificada bajo la forma analítica $f(x, y)$; la segunda, adaptable á los desarrollos en series, libremente extendidos en el plano ó en especiales regiones de éste, pero cuyos carácteres esenciales se han de estudiar en los puntos límites, fronteras, *etcétera, y constituyen sus caracteres determinativos.*

Además, los nuevos desarrollos en series trigonométricas que tienen su punto de partida en la serie de Fourier, se adaptan fácilmente al nuevo orden de investigaciones que parten del estudio de las discontinuidades ó toda clase de singularidades, como los objetos esencialmente útiles y eficaces en el estudio de las funciones, y que son los puntos brillantes ó de luz destacados del fondo monótono de la continuidad.

La correspondencia algebráica de la Geometría cartesiana se puede considerar como una simple correspondencia de valores entre la variable y la función ó como una sucesiva formación de puntos sujetos á la relación algebráica que expresa *la ecuación dada.*

Esta simple relación exigía la relación complementaria que liga á la derivada con su representación geométrica por la tangente; y así los puntos se ven ligados efectivamente por una serie de elementos que señalan, en el curso de la función, su alteración por los segmentos tangenciales infinitamente pequeños; lo que permite el tránsito al cálculo infinitesimal, donde se da la solución general de una ecuación diferencial mediante el conjunto de sus diversas soluciones particulares y singulares.

Pero, como la simple representación cartesiana hubo de relegarse á un campo reducido, dentro de los dominios del Algebra, también la integración clásica ó formal se confinó á regiones muy especiales; porque estas clases de soluciones son excepcionales, dentro de la infinita variabilidad en el mundo de las cantidades.

Hoy se define y se construye, hasta se fijan de antemano las singularidades de una función á que damos existencia, como antes se fijaba exclusivamente por una fórmula dada; y esto resulta, de que hoy el número de elementos transcendentes conocidos, generan inagotables combinaciones productoras de infinidad de expresiones que se estudian en todas las fases de su existencia.

NECESIDAD DE LA CRÍTICA Y PEDAGOGÍA MATEMÁTICAS

I.—Consideraciones generales.

En toda ciencia, lo primero que se ofrece al estudio es la *constitución* del objeto; pero en la Matemática, esta constitución puede existir en los mismos actos del espíritu, al crear el objeto mediante definiciones y postulados, cuando se trata de la Matemática pura, especialmente la Aritmética y el Análisis; y cuando nos proponemos conceptualizar los hechos exteriores para someter á las leyes matemáticas el mundo fenomenal, se trata de una constitución objetiva, en la que intervienen las hipótesis varias que se suceden en los perfeccionamientos de cada teoría.

Después de la constitución, se puede considerar la *comprensión*, que expresa la compenetración de la inteligencia y el objeto cognoscible. La posesión de éste por aquélla.

La comprensión da los materiales á la Ciencia, cuyos elementos son los conocimientos que han de formar, por sus relaciones las verdades.

Los conocimientos adquiridos exigen su *ordenación*, para constituir los varios sistemas sobre que se edifican las diversas teorías.

Pero los conocimientos, como sus sistemas coordinados y subordinados entre sí, exigen para facilitar la labor combinatoria del espíritu, y para fijarse en él como objeto, signos representativos, por cuya mediación actúa aquél, hasta el punto de reemplazar, en nuestros procedimientos, los objetos por sus signos ó símbolos.

La *expresión* es, por tanto, un lenguaje interno del espíritu mediante el cual se relaciona con el objeto.

Esta expresión, extendida, ó sea la *comunicación* es lo que constituye la enseñanza y lleva á hacer necesaria la Pedagogía.

Además, el modo real de formarse la Ciencia á través de los siglos, es objeto de un estudio esencialmente analítico

que da su conocimiento bajo la acción modificadora de las influencias exteriores.

Por último consideramos el progreso ó la *invención*.

II.—La constitución científica.

En la Matemática, la constitución del objeto tiene un carácter constructivo, no sólo en análisis, sino también en Geometría, que exige algunos postulados de conformidad objetivo-subjetiva, por los cuales se edifican diversos sistemas de Geometrías.

El predominio lógico es tal, que se puede prescindir de la existencia objetiva, con tal de ser respetado el principio de contradicción, y constituir sistemas sobre los símbolos imaginarios y hasta sobre símbolos, en cuyas composiciones sólo se consideran las leyes formales del cálculo ó los principios de leyes combinatorias previamente admitidas.

En la admisión de dichos símbolos se funda la generalidad de las teorías matemáticas, la regularidad de sus leyes, las simétricas é integridad de las clasificaciones y la posibilidad de abarcar, desde puntos de vista sencillos, la complejidad abrumadora de los actuales objetos y problemas matemáticos.

III.—La comprensión.

Si fuera posible explicarlo todo, hasta los más mínimos detalles, la Matemática sería la ciencia más fácil ó accesible á las inteligencias, porque es la más intelectual, la que más se compenetra con la inteligencia, al contrario de las demás, cuyos objetos nos son exteriores.

Pero esto no es posible. El tiempo falta, y los medios prácticos de realizarlo todo serían abrumadores; porque antes bien, para caminar brevemente, necesitamos, de los esquemas y lenguajes abreviados que superan al tardo y deficiente lenguaje ordinario.

La Metodología es una necesidad que se impone para facilitar la dificultad de la comprensión por sus artificios y procedimientos adecuados á cada fin.

IV.—La ordenación.

La ordenación de los conceptos ó verdades ha sido tan necesaria también para facilitar el conocimiento de tan extensa é inagotable ciencia, que hoy la Matemática es una ciencia de correspondencias y de transformaciones. Y puede decirse que su método más general es el de las *transformaciones*, por las que sustituímos un dominio, en el cual se estudien tales ó cuales relaciones ó propiedades por otros dominios más accesibles á la inteligencia; y así tenemos, por ejemplo, las *transformaciones proyectivas*, la *representación conforme* etc.

Y no sólo ordenamos los objetos de unos sistemas con auxilio de los objetos de otros sistemas; sino que acudimos á las clasificaciones para dar formas arquitectónicas á los diversos objetos de un mismo sistema.

V.—La expresión.

La expresión interna ó individual es la representación de la idea por ciertos símbolos, que permite razonar sobre signos en vez de razonar sobre objetos ó mejor, sobre las ideas de éstos.

La Matemática es una ciencia de símbolos, y tenemos:

1.º Que es una lengua universal en el sentido de Leibniz; y en este sentido, su desarrollo constituye el Algebra de la Lógica. La Matemática es un lenguaje de conceptos, basado en la representación matemática de las relaciones y procedimientos lógicos. Es un lenguaje lógico.

2.º Es una abreviación del lenguaje ordinario, por medio de los símbolos que expresan el cálculo de sus diversos algoritmos y las relaciones en que éste se funda. Es un lenguaje abreviado y simbólico.

3.º Las gráficas de todas clases ó más exacto, las representaciones de unos objetos por otros, por ejemplo, números por puntos, funciones por líneas ó superficies, etc.; las de unos dominios por otros no son más que traducciones de unos sistemas por otros sistemas.

Y por último, tenemos una representación más ó menos arbitraria por medio de esquemas, por ejemplo, el equiparar la marcha de una función á una corriente eléctrica, las representaciones del *Analysis situs* y representaciones caprichosas que podemos hacer para evocar ciertas ideas. Estos esquemas son al lenguaje, lo que fueron los geroglíficos egipcios.

VI.—La comunicación.

La Ciencia es función social y la Enseñanza la satisface. La enseñanza ó transmisión inmediata ha sido el primer procedimiento. Y en épocas más ó menos remotas consistía exclusivamente, en la exposición en las obras escritas sobre tal ó cual materia. Además, los inventores tenían sus métodos propios que constituían para ellos una Pedagogía.

Pero, cuando la Matemática se ha complicado por el número y calidad de sus teorías, se ha impuesto la necesidad de utilizar los varios resortes de la inteligencia, para obtener el máximo aprovechamiento; y la instrucción se ha elevado á la categoría de educación, que no sólo comprende el orden intelectual, sino también el moral y sensible; pues no basta conocer, es necesario amar la verdad en sí, por el bien que produce y por la atracción y simpatía que la aproxima al espíritu.

La expresión es aquí el lenguaje que comunica dos ó varias inteligencias entre sí; y esta comunicación es un lenguaje; y no sólo un lenguaje, sino un medio persuasivo, un arte de convicción moral y de finalidad estética que produce vocación para realizar, en su integridad, las tres aspiraciones ó finalidades del alma; aparte de que también estas aspiraciones pueden dirigirse á los fines utilitarios de la vida que conducen al bienestar material, individual y social.

VII.—La invención.

Los inventos son saltos bruscos ó discontinuidades en el proceso científico.

Los inventos tienen alguna relación con el grado de adelanto social; pero son excepciones ó irregularidades, en el orden intelectual. Todos necesitan cierta preparación social, ó ambiente predispuesto. Concebir su valor es tan difícil como apreciar el verdadero valor artístico de un objeto.

Admiramos los descubrimientos de los Descartes y los Newton, porque señalan enormes discontinuidades en la marcha de las ideas; y admiramos la labor de otros grandes matemáticos por su intensidad y por su cantidad, como inmensa expansión de un poder intelectual soberanamente enérgico.

Nos admira lo que escribieron un Euler, un Cauchy, un Cayley, con tanto poder intensivo.

Y aparte la preparación que fueron los trabajos de los unos para los trabajos de los otros, apreciamos esa discontinuidad que da á cada uno su lugar en la historia de la Ciencia.

Pero no se trata ahora de lo excepcional, de lo que no se somete á reglas; porque está sobre todas ellas.

Se trata de lo regular y normal, de los términos medios de la humanidad.

Esta aprovecha esas ráfagas de luz que transforman ventajosamente una ciencia; pero continúa pausadamente su marcha, fundada en una labor universal y hasta el punto que se establece un régimen medio en los avances de la Ciencia.

A este fin tienden hoy todas las naciones, y no especialmente aisladas, sino unidas por cierto cosmopolitismo, en asociaciones y en congresos internacionales.

La Ciencia es una labor impuesta á la humanidad para que ésta conozca cada vez mejor las inagotables armonías del Universo. Y, limitándonos al campo de la Matemática, vemos que aun siendo tan considerables sus progresos, es necesario preparar otros nuevos; y no sólo ya en la región puramente abstracta, sino en las de sus aplicaciones; porque ya pueden considerarse la Física y Química como dos de sus ramas.

Hoy no es suficiente el estudio inmediato de la Matemática en los libros más recomendables; hay que unir al estudio los resultados de la acción educativa y, de entre éstos, el á que nos referimos en el presente párrafo, es la heurística, el arte de inventar, reducido á la evocación de la iniciativa individual, á evitar que seamos meros repetidores de lo aprendido, con auxilio de la memoria, especies de pizarras animadas ó aun repetidores de lo que no se entiende. No hay que

conocer solamente las reglas teóricas, es necesario llegar á aplicarlas dentro de cierta libertad de criterio; llegar á la ciencia asimilada, no postiza.

ALGUNAS FINALIDADES TEÓRICAS DE LA MATEMÁTICA

I.—Consideraciones generales.

En la memoria presentada al Congreso de Zaragoza con el título: *Ensayo de clasificación de las ideas matemáticas*, establecí las divisiones siguientes:

Combinatoria, simbolismo, cantidad, sistemas, correspondencias, correlaciones, normalización, singularidades, representaciones y transformaciones.

Y en el *Boletín de crítica, enseñanza* y *Bibliografía matemática* establecí lo característico de cada una de ellas, observando que la matemática se ha *adjetivado* al dar cada día creciente importancia á estos conceptos en su constante fluir por las antiguas ramas: Aritmética, Algebra, Geometría, etc.

Esto ha obedecido á la indefinida expansión de la Matemática, por cierta especie de crecimiento por *intus-susceptionem*, es decir, de una manera orgánica. Y la riquísima bibliografía contemporánea lo manifiesta por la variedad de los títulos de las obras que incesantemente se publican, desde muy varios puntos de vista.

Esperando el tratar en este sentido el actual desarrollo matemático, vamos á bosquejar ligeramente algunas de sus ramas principales, como si se tratase de indicar el programa general de cada una de ellas.

II.—Aritmética.

Una dificultad se opone á la rigurosa exposición lógica; el carácter de la enseñanza.

En las asignaturas elementales, por efecto de la organización intelectual de los alumnos, debe preferirse que predominen los medios intuitivos y el análisis.

La numeración nos da la primera clasificación de los números en decenas, centenas, etc.

La adición es una segunda agrupación de diversos sistemas de unidades, según la base decimal. Y una nueva complicación resulta al variar la base del sistema, y calcular, por ejemplo, en el sistema binario ó duodecimal, etc. Y los antiguos sistemas de números complejos no son más que combinaciones simultáneas de varios sistemas de numeración.

Respecto á las fracciones, la indefinida divisibilidad de la unidad en partes iguales, permite el cálculo en regiones descendentes de décimas, centésimas, etc., como antes se había calculado en orden ascendente por decenas, centenas, etc. Y la división en medios, tercios, etc., corresponde á los casos irregulares y arbitrarios de subdivisiones.

La resta es un complemento de la adición: el mismo procedimiento en sentido inverso. La multiplicación una abreviación de la suma, como la división el procedimiento inverso de la multiplicación.

La potenciación y la radicación exigen ya aplicar las leyes combinatorias y la iteración en el procedimiento: y en los resultados, un nuevo elemento, el *número irracional.* El cálculo logarítmico y el de los números irracionales establecen las fronteras por las que del dominio aritmético se pasa al dominio superior del Análisis, con la primera noción funcional.

La teoría de la Aritmética establece las dos primeras nociones del número como factor y como resto; la primera descomposición del número en sus elementos ó factores primos, la relación de congruencia, que da la primera clasificación de los números y prepara para penetrar en el amplio dominio de la *Teoría de los números.*

III.—La Geometría elemental.

Lo elemental lleva el sello de la discontinuidad.

La Geometría elemental es un encadenamiento de verdades por el que se pasa de unas á otras, mediante un cambio de condiciones por otras equivalentes.

Sus elementos son la recta y el plano, como lugares respectivamente de los puntos, determinados respectivamente por

dos ó tres cualesquiera de éstos. Así tenemos un lugar invariable, cuando resbalan sobre dos ó tres de sus puntos, respectivamente. Además se admite el postulado de Euclides que equivale á admitir *un solo punto en el infinito* de cada recta y de todas sus paralelas.

Las correspondencias entre la igualdad de ángulos y paralelismo ó desigualdad y no paralelismo producen encadenamientos de correspondencias, expresadas por una sucesión de teoremas, que suelen ser casos de otros, en condiciones particulares ó combinación de varios de ellos. Por ejemplo, el teorema relativo á los ángulos adyacentes y el referente á los ángulos que una secante forma con dos paralelas.

En estos primeros pasos, la Ciencia se ajusta al tardo movimiento intelectual.

Y las correspondencias de proporcionalidad entre segmentos de dos ó varias rectas paralelas establecen las relaciones métricas que especialmente formula el teorema de Pitágoras, del que resultan los teoremas concernientes á los polígonos regulares. Y estas consideraciones se extienden á la Geometría del espacio.

Pero además del teorema de Pitágoras tenemos, al referir los ángulos y lados de un triángulo rectángulo á los arcos de circunferencia, otros teoremas que son puntos de partida de la Trigonometría, capítulo de la Geometría, que constituye además un nuevo algoritmo, fundado en las transcendentes circulares, fronterizo de la Geometría con la teoría de las funciones ó, más generalmente, en el Análisis, pues dos teoremas muy conocidos, expresan la correspondencia irracional entre la diagonal y un lado del cuadrado, y la relación transcendente entre un lado y un ángulo de un triángulo.

Lo demás se reduce á la medida de áreas y volúmenes que es el *cálculo de las figuras.*

Todo se desarrolla desde los puntos de vista de la *existencia,* la *determinación* y las *sustituciones* de condiciones equivalentes.

Cada problema envuelve algunas de estas condiciones equivalentes; y el resolverlo consiste en obtener la equivalencia que se busca, con auxilio de otras condiciones intermedias que completan el encadenamiento.

Para conseguir tal fin, se busca un teorema conocido que introduce una condición *superabundante* que, con otra de las introducidas por *construcción*, componen la relación buscada.

El procedimiento de mayor generalidad, en la Geometría elemental, es el de los lugares geométricos, dos de ellos dan, por su intersección, la entidad que constituye la solución de un problema.

Esta Geometría no se desprende de su carácter subjetivo. Sus problemas tienen entre sí la discontinuidad que corresponde á la arbitrariedad con que formulamos los problemas. Pero tal arbitrariedad se halla sujeta á no salir de las condiciones de *compatibilidad*.

El profesor puede componer cuantos problemas quiera dentro de estas condiciones de compatibilidad. Esto constituye un procedimiento educativo que despierta las iniciativas individuales.

IV.—El Algebra clásica.

La característica de esta rama es la *ecuación* numérica ó literal (ecuación algebráica). Constituye el tratado de la primera *correlación numérica* ó *algorítmica*. Las cantidades conocidas y las incógnitas son los elementos correlativos. El instrumento está constituído por las leyes combinatorias. Basta para convencernos de ello, el siguiente ejemplo (considerando á x' y x'' como las raíces de la ecuación):

$$x^2 + ax + b = 0,\ x'^2 - (x' + x'')x' + x'x'' = 0,\ x''^2 - \ldots = 0.$$

Consta: 1.º del *Cálculo explícito* ó sea la composición de sus fórmulas, mediante los tres algoritmos fundamentales con sus inversos; 2.º del *cálculo implícito*, ó sea la obtención de la incógnita de la ecuación ó ecuaciones dadas.

El cálculo implícito exige la *discusión*, que establece la correlación entre los coeficientes (*parámetros*) y las incógnitas (*variables*).

Ya, desde Cramer se introdujo, en esta rama, un elemento precioso y muy adaptable á la naturaleza combinatoria del Algebra, el *determinante*, de tal importancia, que por sí constituye el objeto de una extensa rama combinatoria, aplicable lo mismo á la Geometría que al Algebra y al Análisis.

El Algebra ordinaria, además de admitir una generalización en las Algebras simbólicas, queda en las fronteras del Análisis y de la Teoría de los números que aprovechan como elementos propios el *carácter algebráico* y el *número algebráico*, respectivamente.

V.—Algebras geométricas y abstractas.

Siguiendo la tendencia de todas las ramas de la Matemática á fusionar, dentro de un concepto dominante con el concepto opuesto, el número con la extensión, las construcciones geométricas de las operaciones algebráicas, condujeron á cierta aplicación de la Geometría al Algebra; llegó á la representación geométrica de las cantidades imaginarias, cuyas variantes constituyen los diversos sistemas de geometrías vectoriales, edificadas sobre la composición de segmentos.

Finalmente, manteniéndose en el dominio abstracto se llegó á las álgebras simbólicas de Weierstrass y Dedekind, y en direcciones especiales, á las Algebras de diversas especies.

VI.—La Geometría superior.

Realmente, en vez de superior, debería llamarse esta geometría, *sistemática*, porque se distingue de la elemental en que principia á emplear *sistemas de puntos*, *de rectas* y *de planos*.

Pero los procedimientos son dos, paralelos ó equivalentes: la Geometría *pura* y la *analítica*.

La Geometría pura (*Geometria der Lage* de Staudt) parte del *cuadrilátero armónico*, para establecer sus teoremas sobre las diferentes series de puntos, rayos, haces é irradiaciones.

Nuevos elementos, introducidos como los *puntos circulares*, los *rayos dobles rectangulares*, los puntos, rectas y planos *impropios* le dan una simetría y regularidad perfectas, que evitan toda condición excepcional; pero su misma elegancia le priva de la generalidad indefinida que lleva en sí la *Geometría analítica*.

VII.—La Geometría analítica cartesiana.

La Geometría cartesiana fué una producción genial. Descartes importó la idea de fundir los conceptos de número y extensión en uno sólo, y creó un Análisis paralelo á la Geometría y al Algebra de su tiempo, proveyó á las generaciones matemáticas de un instrumento precioso, y sobre todo, su sistema de coordenadas sirvió á Newton para extender el estudio de las cónicas al de las curvas de tercer orden y para su cálculo de las fluxiones, lo mismo que para las representaciones en el cálculo infinitesimal de Leibniz; y hoy queda como medio fundamental de representación.

Pero el elemento capital de la Geometría cartesiana es la tangente, en su correlación con la derivada, que coloca á la Geometría analítica en la frontera del cálculo infinitesimal.

Por lo demás, la Geometría analítica continuó, por dos siglos, siendo la *Aplicación del Algebra á la Geometría*, una extensión del Algebra, que dió origen al estudio de las correspondencias de estas dos disciplinas, á la discusión de los problemas, á sus asociaciones y disociaciones, que daban á esta ciencia compleja un carácter subjetivo-objetivo, que importó á la Matemática las cantidades imaginarias ó complejas, después de haber introducido las negativas, amplificando extraordinariamente los dominios algorítmicos. De la Geometría cartesiana ha quedado su *espíritu*, la representación geométrica de las figuras y su método de coordenadas.

VIII.—La Geometría analítica proyectiva.

Chasles, inspirándose en la obra de los porismas de Euclides, supo dar unidad á la inmensa variedad de enunciados que originaban estas proposiciones mixtas de teoremas y problemas.

Todas ellas quedaron sujetas al concepto de la relación anarmónica, con las bases de los sistemas homográficos y en involución.

Sus instrumentos son las ecuaciones que se obtienen como representación de la relación anarmónica, por medio de una suma de segmentos.

IX.—Algebra de las formas.

El Algebra de las formas es el reverso de la Geometría proyectiva. Es un Algebra en estado de movimiento ó de variación.

El elemento es la forma homogénea, sus instrumentos las transformaciones lineales, sus correspondencias tienen el carácter proyectivo. Es el Algebra de las transformaciones, la forma analítica de Geometría.

En estas transformaciones, lo permanente se halla representado por los invariantes.

Las representaciones geométricas son las afinidades y las relaciones proyectivas, por la correspondencia entre la relación anarmónica y el invariante.

La transformación lineal es la expresión analítica de un cambio de puntos fundamentales, y también como una relación entre dos puntos diferentes, referidos á los mismos elementos de base, como la expresión de una *afinidad lineal.* Y al asociar cada punto de una recta á otro punto de la misma recta, tenemos una correlación idéntica á la que liga dos series proyectivas.

Además, los invariantes y covariantes de las formas binarias, igualados á cero, dan ecuaciones que representan relaciones proyectivas entre los elementos de las series de puntos y de haces de rayos.

Tenemos la dualidad, la polaridad los sistemas polares y las involuciones de diversos órdenes, series sucesivas de grupos de puntos que forman sistemas polares de diversos órdenes, involuciones proyectivas; y en estas relaciones es fundamental la igualdad de las relaciones anarmónicas correspondientes.

Las derivadas de distintos órdenes se emplean tan sólo con el mero carácter de instrumentos analíticos, no en sí, como en el cálculo infinitesimal.

Análogamente á, como la Geometría cartesiana representa por ecuaciones las figuras geométricas, el algoritmo constituído por el Algebra de las formas homogéneas sirve para representar las relaciones sistemáticas de las curvas.

Las lecciones de Geometría de Clebsch, son la expresión más genuina de este hecho.

La relación anarmónica representa un punto móvil cuya posición respecto á otro punto fijo está determinada por dicha relación. Y dos series de puntos cuyas relaciones anarmónicas son iguales, son proyectivas y constituyen dos series homográficas que, en las circunstancia especial de corresponderse doblemente, dan la involución.

El desarrollo de estos conceptos es la Geometría de Chasles.

Pero introduciéndose los conceptos fundamentales del Algebra de las formas homogéneas, el campo de relaciones se extiende.

La introducción de las formas polares y por tanto, el empleo de la derivada, no en sí como en el cálculo infinitesimal, sino como elemento, y de los haces de curvas, análogamente á los haces de rayos de la Geometría de Chasles, son la base de infinidad de construcciones geométricas que traducen las propiedades de los invariantes, covariantes, tactinvariantes, etcétera.

Las transformaciones lineales se representan por cambios de coordenadas ó afinidades lineales que establecen correspondencias de curvas entre sí.

Y, si en la Geometría de las series de puntos de las formas binarias, el punto es el solo elemento generador, en la *Teoría de las formas ternarias*, el punto y la recta intervienen simultáneamente, correspondiendo á las coordenadas puntos y á las coordenadas líneas, según el principio de *dualidad*.

En el terreno ternario, análogamente, la transformación lineal puede mirarse como un cambio de coordenadas ó como una relación de puntos de dos planos separados ó reunidos; y tenemos, en particular, una correspondencia entre dos curvas algebráicas, y se establece la afinidad lineal entre dos pares de puntos tales, que en cada uno, tres puntos no se hallen en línea recta, llegándose al principio *de correspondencia* de Chasles:

Si se tiene en una recta una afinidad (*correspondencia*) *por la cual, á cada punto* x *corresponden* n *puntos* ξ, *y á cada uno de estos puntos* ξ, m *puntos* x, *sucederá* m + n *veces que un punto* x *coincide con un punto correspondiente* ξ.

Y además, el *principio de traslación de Clebsch* permite utilizar inmediatamente, para las formaciones ternarias, todos los teoremas conocidos respecto á las binarias.

Terminaremos, indicando que esta Geometría emplea como instrumento generador los haces de curvas y como principios los que establece la *Geometría numerativa*, reduciéndose á la *Geometría sobre una curva algebráica*, que permite establecer una teoría de los grupos de puntos sobre una curva, semejante á la establecida sobre una recta. En una palabra, las leyes numéricas, siguiendo las modificaciones de las curvas con sus degeneraciones, cuyo tránsito de unas á otras expresan aquéllas; las leyes á que se subordinan sus contactos, las curvas singulares que se encuentran en los diversos sistemas, etc., y el predominio del concepto de *género* ó, más concreto, de cierto número sobre el orden y la clase de la curva, con lo que se expresa una tendencia hacia la uniformidad de la Geometría y el Análisis, cuyas correspondencias analógicas son cada vez más íntimas.

Las *curvas adjuntas, que pasan una sola vez por todos los puntos dobles y los puntos de retroceso de la curva fija, el número de los puntos de intersección móviles*, la *multiplicidad* del sistema y su *grado* que dependen del número de *parámetros*, el orden de los infinitos que dependen linealmente de estos parámetros y el concepto de *residuo*, constituyen el conjunto de entidades en que se funda esta nueva geometría, la cual aun se eleva á la relación, *no lineal*, existente con reciprocidad, entre dos elementos correspondientes de dos planos, tales como la *transformación cuadrática* y la *transformación racional* ó de *Cremona*.

MEDIOS DE REALIZAR LAS FINALIDADES TEÓRICAS

I.—Existencia.

En la Geometría se establece la *existencia* de la paralela á una recta mediante el postulado de Euclides, lo que equivale á la existencia de los puntos impropios de Staudt; y otras geometrías, aparte de las de Lobatschewky y de Riemann, se establecen fundadas en postulados especiales tales como la no-arquimédica.

La hipótesis de los puntos circulares ó de la cónica imaginaria en el infinito, establece una regularidad perfecta en el sistema geométrico, dando uniformidad á sus reglas y á las propiedades de las figuras, análoga á la correspondencia unívoca, que permite sustituir un sistema á otro sistema; y llega á realizar el *principio de continuidad* de Poncelet, por la fusión de lo real y lo imaginario en un solo sistema *completo* y *perfecto*, sin restricciones ni excepciones.

Y, en una más amplia esfera, el *teorema de la existencia de la integral* de una ecuación diferencial es el principio fundamental de la teoría de las ecuaciones diferenciales, que funda así la correspondencia recíproca entre las funciones y las variables de cada sistema, que constituye una ecuación diferencial.

En los problemas inversos se ha impuesto la necesidad de extender los campos ó dominios, como lo hizo Galois, al tratar de la resolución de las ecuaciones por medio de radicales.

Los problemas inversos son imposibles en general, pues sólo algunos números enteros son productos de números enteros, ó números racionales de números racionales, etc.

De esta naturaleza han sido los problemas de la cuadratura del círculo y de la trisección del arco.

Los problemas elementales, como se ve, han motivado la adjunción de las cantidades irracionales, negativas é imaginarias. La resolución de las ecuaciones ha separado del dominio de las ecuaciones, las llamadas *abelianas*.

La teoria de las ecuaciones diferenciales ha exigido demostrar, como hemos dicho, la *existencia* de la solución.

El mundo de las cantidades implícitas es tan externo como el espacio, à la inteligencia. Se presenta impuesto á ella, con sus propiedades, que la actividad intelectual desentraña constantemente, auxiliada por sus métodos.

La inmensidad de los descubrimientos que constituyen la historia matemática del siglo XIX, tienden á atacar estos problemas teóricos, que se han complicado con los nuevos, de orden más objetivo que presentan las aplicaciones al mundo externo.

II. — Las definiciones.

El matemático se aproxima á las realidades sobre que investiga, acumulando definiciones generadoras ó constructivas que desenvuelve en sus consecuencias, por procedimientos puramente deductivos. Y así crea y extiende dominios teóricos que pretende aproximar cada vez más á los dominios externos realmente existentes. Aspira á hacer explícito lo implícito. Y las correspondencias subjetivo-objetivas se fijan por medio de las discusiones de cada problema, de cada ecuación ó entidad que se ofrece.

Entre los dominios matemáticos que se han ido creando en este proceso subjetivo, citaremos los cuerpos ó campos de Galois, el dominio de racionalidad de Kronecker, el dominio funcional de Abel, los espacios de raíces de Pincherle, las diferentes especies de conjuntos.

La extensión de ciertos dominios sobre los existentes, por la adjunción de nuevos elementos, á la manera que lo hizo Galois en su método de resolución de las ecuaciones algebraicas, por medio de radicales, ha sustituído á los procedimientos clásicos, consistentes en extender, por ejemplo, las definiciones primitivas concernientes á números enteros, sucesivamente á los fraccionarios, negativos é imaginarios.

Las imposibilidades que, en el proceso generador de la Ciencia, resultaban sucesivamente, obedecían á que la definición de cada operación directa se refería á un dominio particular (el de los números enteros, por ejemplo) y la operación inversa exigía, para su posibilidad, un dominio más extenso, el de las cantidades positivas con las negativas, si se trataba de la resta; el de unidades subalternas si de la división; el de cantidades irracionales si se trataba de raíces, cuantitativa y cualitativamente consideradas.

Sucedía, lo que al invertir una proposición particular, que el nuevo sujeto tenía más extensión que el atributo; y, por consiguiente, para mantener la nueva proposición, precisaba el extender el atributo. Y la afirmación se extendía gradualmente del dominio de los números enteros al de los racionales y, de éstos, al de los algebraicos, comprendiendo finalmente el dominio de las funciones de variables complejas.

Las definiciones crean pues nuevos objetos y dominios; y el matemático aplica su lógica combinatoria á todos ellos para ir espesando cada vez más la trama del tejido científico.

La integración de las ecuaciones diferenciales se reduce á establecer la coexistencia de dos órdenes de cantidades, la diferencial y la integral, de *raíces* y *espacios de raíces* como dice el Sr. Pincherle en su obra *Le operazioni distributive;* y dicha operación es constructiva. Por medio de las definiciones, el matemático crea una ciencia cada vez más perfecta que contrasta con la realidad, por medio de postulados.

III.—Dominios matemáticos.

En el período clásico, los dominios de los números se elevaban gradualmente, desde el de los números enteros, á los racionales á los algebráicos y á los transcendentes.

En la época moderna, éstos se diversificaron en especies varias que se clasificaban y transformaban en cada región matemática.

Así, tenemos, en Aritmética, ó más generalmente, en la Teoría de los números, los dominios creados por Kummer, Dedekind y Kronecker, que constituyen los números ideales, los ideales y el dominio de racionalidad.

En Algebra, tenemos los cuerpos de números algebraicos de Galois y de Abel.

En Análisis, los conjuntos de Cantor y las pantaquias de Du Bois Reymond, las representaciones por líneas y superficies analíticas, hasta las representaciones generales del *Analysis situs*, por los hiperespacios.

Estos dominios son uniláteros ó biláteros, teniendo sus bordes, sus fronteras, como en ellos, las funciones sus oscilaciones, sus saltos, sus límites, su perioricidad, sus discontinuidades de diversas especies, sus singularidades, etc.

Pero lo que da una variedad indefinida, es la definición de cada entidad que se crea con especiales fines.

Tenemos así, regiones en que una función es holomorfa, meromorfa, sinéctica, etc., las regiones denominadas estrellas de Mittag-Leffler y de Borel, etc.

Y, por último, en el *Cálculo funcional*, hoy naciente bajo

los esfuerzos y altas especulaciones de los Sres. Volterra, Pincherle, Bourlet y últimamente de Mr. Hadamard, que en sus *Leçons sur le calcul des variations* (*tome premier*, *1910*) le dedica un capítulo especial, tenemos el *campo funcional*, locución introducida por este ilustre profesor del *Collège* de France, sin olvidar que la primera idea se debe al celebérrimo Abel.

En Geometría, además del espacio euclídeo ó parabólico, tenemos los espacios hiperbólico y elíptico de Lobatschewsky y Riemann, intuitivos y representativos, cuyas representaciones ha obtenido el ilustre profesor Herr F. Klein, y además los hiperespacios puramente lógicos, sin representación sensible, si bien tenemos además las representaciones analíticas de estos espacios que, dejando de ser geométricos, quedan reducidos á ser simplemente analíticos, y son esquemas de la teoría de funciones de un número cualquiera de variables.

A este mundo, construído *a priori*, refieren los matemáticos, tanto las funciones transcendentes que desean estudiar, como las curvas, ó superficies ó configuraciones que hayan resultado de aquellas construciones, impuestas por definición, que pueden hasta llegar á ser funciones, cuyas singularidades se dan.

Y al fin, algunas veces se presentan correspondencias mutuas entre tales objetos creados, por las combinaciones y construcciones intelectuales, como ocurre con la función armónica de Laplace y con la serie hipergeométrica de Gauss; y como sucede con los invariantes, covariantes, etc., que satisfacen ó amoldan á ecuaciones diferenciales dadas.

IV.—El lenguaje.

El lenguaje es el medio ó instrumento más poderoso de la Matemática, pues simplifica los razonamientos, reduciéndolos á lo más preciso, y abrevia el trabajo directo de la inteligencia por sus rápidas transformaciones, que indican las sucesivas combinaciones de su signos operatorios y objetivos.

Tenemos tres lenguajes matemáticos: el ordinario, el simbólico y el intuitivo

Por el lenguaje ordinario, se siguen las operaciones de la inteligencia en un dominio real.

Una serie de desigualdades estrecha á las cantidades entre los límites en que se mueven y dentro de los que se realizan sus correspondencias efectivas. Un incremento h, que al ser suficientemente pequeño, *obligue á la función á variar menos* que cierto valor, tan pequeño como se quiera, para cierto valor de x, imita á un movimiento oscilatorio simultáneo; y este movimiento se diversifica de mil maneras, en el modo de ser las funciones, en los momentos de sus discontinuidades y que caracterizan á cada una en su modo de ser individual.

La introducción de los parámetros lleva á seguir las funciones, líneas ó superficies en su existenia sistemática, moviéndose en sus diversos campos de variabilidad. Y los signos permiten seguir estas evoluciones, haciendo preponderar, según convenga, la acción de las variables ó de los parámetros que va llevando, como algunos matemáticos lo han conseguido, según se indicó á la naciente teoría del cálculo funcional.

Pero sobre el lenguaje ordinario, está el lenguaje simbólico que sirve para las combinaciones abstractas puramente subjetivas de la pura razón, prescindiendo de la objetividad; porque luego queda el trabajo de interpretación de los símbolos, que conduce á resultados efectivos y útiles, según la finalidad buscada.

Y, por último, contra esa tendencia subjetiva y eminentemente lógica, tenemos la tendencia esquemática ó mejor *gráfica* ó *representativa*, que expresa las ideas por medio de imágenes sensibles.

El cálculo lógico de Boole y los cálculos simbólicos de Cayley, afines con aquél, son ejemplos de lenguaje simbólico, como en Geometría los elementos imaginarios y en el infinito. Las representaciones de Riemann, concernientes al *Análisis situs*, y otras muchas empleadas por los matemáticos de la actualidad, son ejemplos de la tendencia intuitiva, como *medio representativo* sobre el que se funda el lenguaje del Análisis moderno.

V.—Los sistemas

Establecida la existencia de un teorema, su teoría se reduce á una especie de desdoblamiento de sus propiedades características de cada uno de ellos.

Así, después que en Aritmética se ha establecido la *única*

descomposición de un número en factores primos y la clasificación de todos los números respecto á un módulo dado, en la Geometría elemental, la *determinación* de las figuras elementales y, en el Algebra, la existencia, por lo menos, de *una* raiz; en las demás teorías que entran ya en la categoría de *estudios sistemáticos*, se aspira á la ordenación y clasificación y á las correspondencias que conducen á tales clasificaciones y ordenación.

En Geometría, se definen sucesivamente los puntos dobles y en general múltiples, los de inflexión, retroceso, etc., no solamente en el sentido individual, según el cual los estableció Briot, y que han servido de modelo para un estudio en los libros destinados á la enseñanza, sino más amplia y sistemáticamente, como se ve en la Geometría de Clebsch, partiendo de la fecunda idea de los sistemas polares, que permiten la consideración de los elementos correlativos por la dualidad, y crea sistemas de figuras, cuyas tramas se dan por las curvas covariantes hessiana, esteineriana, cayleyana, jacobiana, lugares de tales ó cuales puntos singulares que forman redes de figuras, ó mejor, configuraciones *que expresan la forma gráfica de* cada sistema.

Tenemos los sistemas abstractos por excelencia, de la teoría de los números, tales como los constitutivos de los números ideales de Kummer ó los ideales de Dedekind, y los sistemas de unidades complejas que concurren, como elementos irreducibles, á constituir todos los números ya reales, ya ideales, lo cual se complica aun, cuando se trata, no ya de simples números, sino de cuerpos de números abelianos y cuerpos ó campos de Galois; y, en el dominio más concreto del Algebra, donde el número irracional sólo puede concebirse por la variación continua é implica la nueva noción de límite, la continuidad permite la representación geométrica.

La derivada, considerada, no en sí, como en el Análisis infinitesimal, sino como simple instrumento que se adapta á la dirección de la tangente, permite representarla en todos los momentos de la existencia de las curvas, pasando á ser su genuino representante. Con esta representación, el tránsito del dominio del Análisis al de la Geometría es natural; y, con reciprocidad absoluta, los medios é instrumentos del uno se aplican indiferentemente á la otra.

La descomposición de unas singularidades superiores en otras elementales, tales como la reducción de los puntos múltiples á cierto número de puntos dobles; en general, las reglas de equivalencias de las singularidades, constituyen una especie de cálculo, análogo á la de cualquier algoritmo que fija las leyes de dependencias de sus elementos y cuya ley está dada en las fórmulas de Plücker.

Podemos considerar tres momentos en la evolución histórica de esta teoría.

En el primero, ciertas leyes numéricas fijan la posición de un punto de una recta, por medio de cierto número de puntos fijos de la misma; y tenemos el centro de las distancias medias, los polos de diversos órdenes, etc., objeto de la teoría de las transversales, que llega á su máximo desarrollo en las obras de Poncelet.

La Geometría se eleva después á los sistemas homográficos é involutivos en la Geometría de Chasles, de la que irradia el método puramente geométrico de Staudt; y Chasles llega, en este sistema, cuyo primer origen son los porismas de Euclides, á las generaciones de las cónicas, cuyos primeros ejemplos vemos en la generación orgánica de las curvas de Newton y en el tratado de Mac-Laurin.

Pero, además de que Jonquières y Chasles ya introducen los principios de la Geometría numerativa y la noción de *característica*, por otra parte Boole y Cayley enriquecen la Ciencia con la nueva teoría del Algebra de las formas homogéneas; y la Geometría analítica adquiere un nuevo carácter de transformación y de movilidad.

La noción de invariante fija propiedades permanentes para cualquiera base de referencia de una figura, como si dijéramos aquéllo que tienen de absoluto, sus propiedades intrínsecas.

El discriminante, los covariantes, contravariantes, emanantes, hessianos, jacobianos, etc., son los nuevos objetos é instrumentos que aumentan los recursos de la Geometría, al mismo tiempo que la parte formal penetra en el Análisis para dar su carácter de uniformidad á cualquier sistema matemático, por una compenetración de los conceptos.

Este nuevo sistema geométrico se eleva sobre los anteriores.

Las involuciones ordinarias se elevan á involuciones superiores entre grupos de puntos, por la eficacia de los sistemas

polares, permitiendo la teoría de las polares interpretar covariantes de gran importancia. Tenemos, en vez de haces de rectas, haces de cónicas, con la circunstancia de que, por cada punto del plano pasa una curva única del haz. Lo que lleva á la Geometría sobre una curva algebráica que determina qué puntos, entre los de intersección de dos curvas, son determinados por los otros y el número de ellos, estableciéndose una teoría de grupos de puntos sobre una curva, análoga á la relativa á la línea recta.

De los sistemas analíticos, por lo mismo que su amplitud supera en mucho á los ligeramente descritos, bastará por ahora indicar que comprenden, además del cálculo explícito, cuyos problemas son la diferenciación y la integración, las ecuaciones diferenciales, cuyo problema se reduce á hacer explícita una función implícita, en la ecuación y en los signos diferenciales; y por último, el naciente cálculo funcional, que se desenvuelve en su dominio de funciones.

Ciertamente que la *Teoría de los números*, considerada por Gauss como la reina de las matemáticas, es la más difícil. Y en efecto, solamente el dominio de los números enteros, con su serie de números primos, al parecer irregularmente sembrados entre la serie de los demás números enteros, con los productos, las potencias y las combinaciones de todos para formar las ecuaciones indeterminadas ó, bajo otra forma, *las congruencias*, ofrece el conjunto inagotable de todos los problemas aritméticos, pero existentes en un campo de discontinuidad que dificulta el descubrir sus leyes.

Después, el Algebra auxiliada por el lazo de la continuidad, encadena con este nuevo instrumento las relaciones, dentro de las que se destacan los números que se unen en series de valores, que sometidos á las leyes previamente fijadas, se aproximan á algo puramente ideal y fijo que llamamos sus *límites*. Y las *ecuaciones* son nuevos núcleos ú objetos cuya naturaleza consiste en contener, cada una, ligados ciertos números que llamamos sus *raíces*, contenidas implícitamente en aquéllas. Y estas relaciones están sujetas á leyes combinatorias, que da á conocer la teoría de los grupos discontinuos.

Pero además, un nuevo concepto, de mayor generalidad, correspondiente al *dominio* en que las ecuaciones existen, las contiene como individuos de una clase, en la que aparecen las ecuaciones irreducibles, como aparecieron los números primos en el dominio de los números enteros y como, más tarde, aparecen las curvas irreducibles ó simples en el dominio de las curvas. Y obtenemos cuantos resultados ofrezca la aplicación de la teoría de las sustituciones á la teoría de las ecuaciones algebráicas.

Pero además, de la pura combinación, que es la simple ordenación de objetos, según todas las disposiciones posibles, con ó sin repetición, tenemos el cálculo formal, según las leyes de los algoritmos elementales aplicados, ya á objetos, ya á símbolos, que producen los moldes á que se han de ajustar multitud de objetos, con muy varias finalidades; y llegamos á edificar Algebras de distintas especies, con *potencialidad* varia, para producir, en diversas circunstancias, resultados efectivos, pues la Naturaleza, que es también un sistema matemático efectivo, se armoniza, muchas veces, con las leyes dictadas *a priori* por la inteligencia.

La Aritmética y el Algebra tienen en el más alto grado el carácter *subjetivo,* bajo la forma de *número* ó de combinación, como los tipos á que todos los demás se subordinan.

En cambio, el Análisis tiene actualmente, en su máximo, el carácter *objetivo,* ó mejor, *descriptivo.*

Las funciones son objetos generados por las leyes algorítmicas que tienen su elemento esencial, fuente ó base de su generación, la *derivada.* El cálculo diferencial es el algoritmo de la derivación, y el cálculo integral, el algoritmo complementario, por el que se recorre en sentido inverso el proceso de la generación. El primero va de la función á cada uno de sus elementos, el segundo de éstos á la función en que se reunen yuxtapuestos.

El campo es más amplio, porque además de la continuidad abarca los dominios, no comparables de los diversos órdenes de infinitos ó infinitésimos. Pero en este fondo continuo se destaca la discontinuidad, que es lo característico y distintivo de cada función, siendo lo importante, en cada caso, las varias discontinuidades ó singularidades existentes.

Tenemos aquí una coexistencia entre campos más extensos que los campos numéricos discretos, en el que además de lo numérico y algebráico, existe lo transcendente que complica el problema de la integración de las ecuaciones diferenciales, á cuya resolución contribuyen todas las teorías matemáticas.

Por último, las recientes investigaciones llevan á un dominio superior, hasta ahora poco explorado, el *dominio funcional,* cuyo algoritmo es el cálculo de variaciones, que ofrece esperanzas halagueñas para el porvenir.

Así como la Aritmética se desarrolla en el dominio de los números, el Algebra en el de las ecuaciones, y el cálculo infinitesimal en el de la generación funcional, por medio del elemento diferencial, el cálculo funcional se desarrolla en el amplio dominio de las funciones, como elementos, dominio más vasto que el de las funciones, y que las comprende como individuos particulares.

La Geometría se desarrolla en el espacio. Se observa un carácter subjetivo-objetivo en la Geometría elemental, que tiene una discontinuidad análoga á la de la Aritmética. Su instrumento es la determinación triangular, que conduce á construcciones auxiliares, empleando suficiente número de términos medios, cuyas relaciones están condensadas en los teoremas, en cuya constitución predomina cierta arbitrariedad, debida á la acción intelectual, que aun no posee un instrumento de variación continua.

La Geometría elemental produce conglomerados ó redes de figuras que conducen á los resultados buscados por la inspiración intelectual que se traduce en ideas *más ó menos felices;* y sólo vemos que comienza á emplear métodos regulares, ya de objetividad preponderante, que hace incesante la acción intelectual *explícita é inmediatamente evocada,* y nos hace penetrar en esa subjetividad absoluta que constituye el carácter predominante de la Matemática pura.

La Geometría tiene también su desarrollo combinatorio que lleva á la *teoría de las configuraciones,* un grado superior á los conglomerados elementales que sólo se rigen por inspiraciones aisladas de la inteligencia.

En la Geometría elemental vemos que la *acción intelectual* es el instrumento exclusivo. La resolución de los problemas depende de la *combinación acertada* de relaciones elegidas que, por *eliminación natural* de ciertos términos medios, conducen á unir los elementos buscados con los dados análogamente á como procede el sorites de la Lógica. Pero, en el desenvolvimiento histórico, vemos aparecer al lado de la Geometría de Euclides, las Geometrías hiperbólica y elíptica, que llevan á consideraciones subjetivo-objetivas, porque se fundan, no en un desarrollo *a priori*, sino en un desarrollo fundado en las propiedades intrínsecas del espacio objetivo; bien es cierto que conceptualizado, como conceptualizamos los fenómenos naturales, al hacerlos entrar en el dominio matemático.

Y, por último, hasta se ha logrado construir una Geometría de cuatro dimensiones, prescindiendo de la intuición y basada en las consideraciones abstractas de una lógica rigurosa, paralelamente á como se construyó un Algebra de n unidades complejas. La Geometría sistemática pura es la Geometría de Staudt que prescinde en absoluto de toda noción cuantitativa.

Por otra parte, la Geometría se edifica sobre elementos puramente espaciales, pero con auxilio de procedimientos analíticos, en la *Geometría de la recta* de Plücker.

Luego, ya sólo vemos una fusión de los elementos espacial y numérico en las varias manifestaciones de la Geometría analítica y aun en las Geometrías cinemática y vectoriales.

Finalmente, se efectúa la síntesis de estas dos manifestaciones matemáticas por la esquematización geométrica, mediante líneas y superficies analíticas que representan intuitivamente las relaciones del análisis, de igual modo que se generalizan los resultados geométricos y aun se edifica la Geometría, sometiéndola á las relaciones combinatorias y numéricas del Análisis.

Pero en otra dirección se ofrece un espléndido porvenir á la Matemática, en el orden de las realidades objetivas.

Terminaremos estas consideraciones que se refieren tan sólo á las más antiguas y elementales disciplinas porque, el continuarlas en las numerosas ramas que constituyen la Matemática actual, sería un trabajo demasiado considerable que, realiza la *Encyclopaedie der Mathematische Wissenschaften.*

VI.—La Arquitectónica.

Con las indicaciones expuestas acerca de las definiciones, los dominios, los sistemas, etc., hemos seguido en algunas direcciones, el desenvolvimiento matemático, especialmente teórico. Se han examinado los objetos matemáticos desde el punto de vista de su existencia, de su generación, de sus agrupaciones, y de los medios donde se estudian sus propie-

dades. Pero un aspecto, de capital importancia es el de la *forma*, ya sea geométrica ya algorítmica, bajo las cuales dichos objetos se presentan.

Ya hemos visto cómo la Lógica los encadena con sus deducciones; y desde el punto de vista de la certeza de las verdades y de la validez de las relaciones, nada hay que añadir de substancial.

Después de la certeza de los conocimientos, una segunda fase del estudio matemático, como acabamos de decir, concierne á la forma, al modo de presentarse las relaciones ó los objetos y sus sistemas.

No sólo en las figuras de la Geometría tenemos apariencias intuitivas que afectan á la vista, aunque esto no satisfaga á la razón, sino que en las fórmulas algorítmicas podemos considerar este carácter.

Lo que dijimos de la *elegancia geométrica*, de una *idea feliz* que simplifica las figuras ó abrevia los razonamientos, podemos repetirlo al tratar de los objetos geométricos ó algorítmicos.

Poco diremos de los primeros. Tan sólo, que existe una visión directa del objeto, tal como la consideraba Staudt, que prescindía de las figuras geométricas, puesto que la contemplación racional es la exacta, la que mira solamente las condiciones impuestas, dentro de una rigurosa lógica; y lógicamente se han de deducir las consecuencias, sin necesidad de mezclar en los razonamientos las impurezas de la intuición sensible.

Hemos visto que, análogamente, el cálculo combinatorio y las formas puramente racionales de lo imaginario y el infinito daban vigor, sencillez, generalidad y simetría á las relaciones y á los objetos y sistemas.

Y ahora añadiremos que, en general, los objetos matemáticos más abstractos, tales como son los algorítmicos, comprendidos en la Aritmética, el Algebra y, en general, el Análisis, tienen su forma arquitectónica. Y ésta ha sido un objeto de preferencia para los grandes matemáticos, cuyos nombres van unidos á algunas de éstas sus grandes creaciones.

Así, las series de Wallis, Stirling, las de Lagrange, Laplace, Burmann, Cauchy y otras muchas, que harían interminable su enumeración, son desarrollos interesantes por su forma que expresa relaciones recurrentes.

Pero además existen otras fórmulas que se condensan en un número limitado de signos de relaciones, que muestran de paso las excelencias del lenguaje matemático y su eficacia como instrumento determinativo, con sus sistemas de signos operatorios, algorítmicos, paréntesis y elementos funcionales de toda especie.

Estas representaciones ó esquemas algorítmicos constituyen la parte más objetiva y práctica de la Ciencia y la contribución más efectiva de los grandes matemáticos, resultados, unas veces de transformaciones felices é ingeniosas, otras de combinaciones acertadas de ciertos algoritmos ó representaciones en dominios especiales, á veces por procedimientos esquemáticos que han conducido rápidamente al fin, ó también por construcciones normales simplificadoras.

Y hoy el espléndido conjunto de teorías, de transformaciones y representaciones constituyen el arsenal de que se surte el matemático para ayudarse de mil maneras en sus investigaciones.

Si nos dirigimos hacia el cálculo combinatorio, tenemos, aparte del simbolismo lógico de Leibniz y de Boole, el abstracto de Morgan, Clifford, Cayley, etc., la combinatoria que parte del triángulo aritmético de Pascal y la que lleva como germen el célebre binomio de Newton, el que comienza con el algoritmo de las facultades de Kramp, en que se ejercitaron los matemáticos Ohm y Oettingen á principios del siglo XIX, perfeccionado por Weierstrass, al purificarlo de algunas faltas de rigor de sus antecesores; y por otra parte, los cálculos de Herschel y Gregory, llevados hacia los desarrollos en series y el cálculo de las diferencias finitas y ecuaciones de derivadas parciales que afianzaron Jacobi, Pfaff, Mayer y otros, que vemos recopilados en *A Treatise on the Calculus of diffences* de Herschel, *An Essay on Algebraic development* de T. Jarret, *A Treatise on the Calculus of operations* por R. Carmichael, y finalmente, la recopilación hecha por el profesor Herr E. Netto en su *Lehrbuch der Combinatorik.*

Más gráficas se presentan las representaciones de los grupos discontinuos que tienen su parte geométrica, por la cual

adquiere un carácter gráfico la teoría de las ecuaciones y las numerosas representaciones de los tipos de grupos de diversos parámetros que encontramos en las diversas obras acerca de los grupos continuos de Lie, nos ofrecen otro ejemplo de esta arquitectónica matemática que afecta al sentido del orden.

En otra dirección, las *Nouvelles tables d'intégrales définies* de D. Bierens de Haan, que contiene 8.359 integrales, condensando los resultados obtenidos en el problema de la integración formal ó clásica, mediante esa correspondencia que mantienen por los símbolos del análisis las correlaciones de las expresiones diferenciales é integrales.

Pero donde se admiran las maravillas de esta disposición arquitectónica de la Ciencia es en los trabajos de Jacobi, Weierstrass, Hermite, Schwarz y otros contemporáneos en la edificación de la Teoría de las funciones elípticas.

En esta disciplina del siglo XIX se observa la importancia del lenguaje matemático en los progresos de esta ciencia al observar las ventajas ó desventajas de unos medios de expresión con respecto á otros: pero cada uno de ellos realiza algún fin apreciable.

El Análisis imita á la Geometría.

Las funciones σ de Weierstrass adquieren innumerables representaciones en funcion de otras funciones. Y así como las curvas ó las configuraciones representan, de un modo sensible á la vista, cada entidad geométrica y hasta sus sistemas; de igual modo, las innumerables fórmulas hoy conocidas, en la sola teoría de las funciones elípticas, constituyen un arsenal de representaciones bajo forma finita de las diversas funciones σu, ζu, $\wp u$ de Weierstrass, las cuatro thetas de Jacobi, con sus varias representaciones que les han dado estos matemáticos, la función Φ de Hermite, etc.

Estas relaciones analíticas no ceden á las figuras geométricas en virtualidad representativa; si éstas afectan al sentido de la vista, aquéllas afectan al sentido del orden combinatorio, ofreciendo intuiciones tan permanentes como las de los trazos geométricos. Unas y otras tienen el mismo carácter constructivo y con igual eficacia son la forma real del objeto representado.

El Análisis moderno, con las representaciones de Cauchy y de Riemann, por un lado, y con la tendencia aritmetizadora que comienza con la reducción del Análisis á la teoría de las series enteras, nos lleva á nuevos horizontes.

Por un lado, la teoría de las funciones monógenas y sinécticas de Cauchy, por otro, la prolongación analítica de las funciones nos ofrecen el fondo de las nuevas edificaciones. La representación geométrica, siquiera la que da el *Analysis situs* se impone como medio de representación y de normalización.

Pero hemos de notar el nuevo aspecto del Análisis en la teoría de Weierstrass.

Dejado á un lado el coeficiente diferencial que había sido el alma del antiguo análisis, parte de las series enteras, determinadas por sus sumas, que pasan á ser las entidades genuinas del Análisis, que procede por series y por sus equivalentes, los productos infinitos, muy adecuados para dar formas arquitectónicas á las expresiones analíticas.

Este dominio matemático, acrecentado con el nuevo concepto de la doble periodicidad de las funciones, adquiere un esquematismo correspondiente que se ofrece en las redes representativas de paralelógramos, donde se fijan los ceros y los polos de aquéllas, como sus nuevas características.

Y, no sólo la vista contempla las formas de las funciones en las numerosas tablas construídas por los creadores de esta nueva doctrina, comparables á los festoneados tejidos vegetales que hermosean la Naturaleza ó á las formas simétricas de los cuerpos cristalizados, sino que se las hace fluir en las sucesivas transformaciones de su existencia, bajo las leyes establecidas, dentro del dominio combinatorio, por la teoría de los grupos.

Estas finalidades prácticas de la Matemática, constituyen su parte artística, porque tienden á dar la forma visible y determinada de cada objeto que se hace destacar de las demás relaciones informes como las figuras de un cuadro, y que contornean cada vez con más vigor y distinción los diversos objetos matemáticos; son las hondas huellas que dejan inscritas en la historia de la Ciencia, los talentos creadores y son las verdaderas efectividades que afectan con su carácter gráfico á nuestra facultad perceptiva.

Esta parte práctica es el complemento de la teórica que

tiende al vigor de los encadenamientos ideales sujetando fuertemente los diversos objetos por sus relaciones de dependencia tan sólo reveladas por su simple carácter de ser principio ó consecuencia ó de ser equivalentes para mantener íntegro el tejido de las verdades, por cuya trama camina la inteligencia en las más varias direcciones.

La parte teórica corresponde al momento en que la inteligencia contempla la complejidad de las relaciones confusas que ofrecen los objetos creados por sus definiciones, relaciones objetivas que han de armonizarse con los objetos creados por decreto subjetivo. Y el fin exclusivo de la Ciencia es tal armonización que cede nuevos lugares á otras armonizaciones más perfectas.

Finalmente, ante el cúmulo de conocimientos que se aglomeran, produciendo dificultades á la inteligencia, existen procedimientos útiles para la más fácil comprensión de las ideas; entre ellos citaremos la normalización y la representación.

La normalización permite representar mediante expresiones sencillas los objetos matemáticos, sean funciones ó ecuaciones, bajo ciertas formas típicas; y además, partiendo de elementos *irreducibles*, los emplea para constituir las bases fundamentales de las representaciones.

La introducción de elementos extraordinarios tales como los puntos impropios y cíclicos da simetría y generalidad á las teorías geométricas.

Las representaciones varias tales como la *conforme*, las del *Analysus situs*, el empleo de curvas y superficies analíticas hace intuivas ciertas verdades ó permite su estudio en regiones más sencillas á que se han transportado los objetos matemáticos como, por ejemplo, las representaciones de las diversas geometrías dadas por el profesor Herr Klein y las debidas á Schwarz, otras, como las representaciones de los grupos fuchsianos por M. Poincaré y, en general, las que constituyen la base para el estudio de las funciones autormorfas y las modulares elípticas, que son otra de las formas de esquematismo matemático.

RECAPITULACIÓN

I.—Resumen acerca de lo actual

Ya es un hecho, en las naciones más adelantadas, la *elementalización* de lo que hace cincuenta años se consideraba como superior.

El fecundo y fundamental concepto de *derivada* se ha importado á la enseñanza secundaria en Francia desde 1902. En Hungría se hizo lo mismo con el concepto de función y de sus representaciones gráficas y, en Alemania, dicha obra elementalizadora se efectúa desde varios punos de vista, llevando así, hacia el lugar de los estudios en que la acción educativa es más necesaria, las ideas más luminosas y más susceptibles de nutrir el espíritu, y desarrollando su actividad con la mayor eficacia, para ulteriores perfeccionamientos.

Las excelencias de la educación y la necesidad de prolongar su acción en los estudios secundarios se ha reconocido con cierta unanimidad que lleva á las naciones hacia el progreso.

Se tiende á simplificar aquella antigua y pausada marcha que sólo dependía de las energías propias de cada individuo. Hoy se reconoce la educación *científica* como un artificio comparable á las más poderosas máquinas de la industria humana; y así, aquellas inteligencias aisladas en las energías poderosas, se reparten y difunden en la masa social que sustituye á aquel brillante y excepcional individualismo por un esfuerzo mancomunado que se organiza, desde la Universidad hasta todas las asociaciones que tienden á la cultura.

La antigua Ciencia de los genios se va convirtiendo en la ciencia de la humanidad, con la colaboración de muchos, en razón del grado de sus energías individuales; porque, con ser mucho lo descubierto hasta el día, mucho hay que avanzar todavía. Y basta, para convencernos de ello, el exiguo número de problemas resueltos en relación con los que hay por resolver, especialmente en el momento en que la Matemática aspira á extender sus dominios abstractos sobre los dominios, cada vez más crecientes, de las ciencias experimentales; y aquellos

problemas que los Newton y los Euler resolvían con ocasión de algún problema astronómico ó de Mecánica, hoy quedan sustituídos por otros problemas de mayor complejidad, correspondientes á los nuevos fenómenos que han de entrar en la Ciencia con la etiqueta matemática.

No voy á repetir lo expuesto ya en varios de mis trabajos, acerca de la enseñanza matemática, que se refieren á los libros publicados en Alemania, Francia, etc., para la enseñanza en los gimnasios y liceos, que pueden servirnos de modelos para importar nuevos adelantos y otros que se aspira á divulgar.

Bastará que citemos la importancia de la *Encyclopaedie der Matematische Wissenschaften*, como recopilación la más importante que jamás se haya obtenido para el conocimiento sumario del estado actual del desenvolvimiento matemático; y como tendencia á preparar nuevos profesores por la acción educadora, los trabajos que comienza á realizar la *Commission Internationale de l'enseignement mathématique.*

Respecto á la práctica de este progreso que se busca, bastará decir que, elementalizados los estudios matemáticos, según las tendencias arriba indicadas, se imponen como necesarios para avances en la enseñanza superior, los estudios de conjunto y de simplificación, las clasificaciones, la ordenación, los puntos de vista sintéticos, que ayuden al trabajo analítico y á la acción investigadora. La Pedagogía, la Crítica, la Bibliografía ó Literatura matemática son medios que deben combinarse.

Sobre todo, hay que facilitar, suprimiendo muchos saltos bruscos que dificultan el acceso á los conocimientos y que constituyen las dificultades mayores de la enseñanza matemática.

La heurística, por último, es uno de los procedimientos de la enseñanza que más dificultad ofrecen, debiéndose en ésta tener por finalidad, el despertar ó evocar la iniciativa propia, separando de la ciega rutina del mero repetidor.

II.—Las aspiraciones futuras

Sólo profesores tan autorizados como Herr Hilbert y M. Poincaré pueden llegar á alguna conclusión acerca de puntos tan difíciles.

Herr Hilbert, en el Congreso de París, presentó su memoria *Sur les problèmes futurs des mathématiques* en que expone cómo el espíritu humano crea problemas nuevos y fecundos, sin impulsión externa y únicamente por combinación lógica, por separación y reunión de ideas, etc., fijándose principalmente en la cuestión de la existencia matemática y de la posibilidad ó imposibilidad de los problemas, la cuestión de los axiomas; y entre los problemas que pueden contribuir al progreso de la Ciencia, expone los rasgos característicos de los siguientes:

Problema de Herr Cantor respecto á la potencia del continuo, la no contradicción de los axiomas de la Aritmética, la línea recta como el camino más corto, la noción de grupos continuos de transformaciones, los axiomas de la Física, problemas sobre los números primos, la posibilidad de resolver una ecuación de Diofanto, de los sistemas de funciones finitas, geometría numerativa, representación de formas definidas por sumas de cuadrados, soluciones analíticas del cálculo de variaciones y otros. También M. Poincaré, en el Congreso de Roma, ha tratado tan importante cuestión. Trata de la Aritmética, el Algebra, las ecuaciones diferenciales, de derivadas parciales, funciones abelianas, teorías de las funciones y de los grupos y la Geometría, desde los puntos de vista elevados, haciendo ver cómo las analogías llevan á generalizaciones de unas teorías por medio de las otras, teniendo por principal objetivo el principio de la economía del pensamiento y las ventajas de un lenguaje bien elegido, los hechos de gran rendimiento hacen prever otros muchos, los teoremas que se agrupan alrededor de los antiguos, como un cristal que se nutre en una disolución, la analogía de problemas, que lleva á tipos de problemas, la elegancia que abrevia y armoniza, los moldes á que se ajustan objetos distintos, semejantes en la forma. Todo esto lleva á preparar nuevos avances en las recientes teorías, señalados como orígenes de los desarrollos futuros. Así, la ecuación de Fredholm lleva á considerar una infinidad de ecuaciones discretas, con una infinidad igualmente discreta de incógnitas y una ecuación de derivadas parciales que representa una infinidad continua de ecuaciones, que sirven para determinar una función incógnita que representa una infinidad contínua de incógnitas; siendo los determinantes infinitos á los determinantes ordinarios lo que las series á las sumas finitas.

Esta mirada del presente hacia el porvenir puede estudiarse también en la Memoria: *La Mathématique dans ses rapports avec la Physique*, presentada por M. E. Picard, también en el Congreso de París, donde expone los puntos de vista actuales de estas dos ciencias, de las que la primera es, como dice, «una parte esencial en la edificación de la filosofía natural».

III.—El organismo docente

La Ciencia camina incesantemente de un modo perfectivo, planteándose nuevos problemas. Su estado es de constante formación. Y de igual modo que los seres orgánicos, eliminan ciertas substancias como residuos inútiles y perjudiciales para su funcionamiento, y solo así se conserva la acción armónica que constituye la vida, en la enseñanza se han de ir segregando los productos actualmente inútiles, aunque sirvieran para la generación de lo presente, que á su vez inicia otros perfeccionamientos.

Hay que tener por guía el máximo rendimiento con la economía del esfuerzo, ó como enuncia el principio de Mach, con la economía de pensamiento.

Aligerar, sintetizar, ordenar, clasificar, simultanear, condensar, elementalizar, reducir á elemental lo que en su origen fué superior ó vulgarizar lo extraordinario. Esto se puede conseguir con un espíritu de crítica, envuelto en la ciencia pedagógica. Hoy la ciencia objetiva tiene que guiarse por impulsiones subjetivas que la dirijan.

Y no sólo la Matemática, sino la Física, la Química, la Astronomía, en cuanto tienen de teórico, pueden entrar en esta disciplina que comprenderá así, en su integridad, la *Filosofía de la Naturaleza*, pero sin desfallecimiento hacia lo experimental, como disciplina del espíritu y gimnasia del ejercicio racional, no olvidando un instante la máxima de la escuela platónica, y que en las ciencias experimentales, la teoría es un mínimo y en la Matemática un máximo.

La Crítica Matemática, parte teórica de la Pedagogía, está llamada á modelar la Matemática según las agrupaciones naturales de los varios conceptos que subordinan y coordinan entre sí las varias disciplinas, señalar los principios que constituyen la nota dominante en la agrupación de las ideas, para formar los núcleos esenciales, de donde han de irradiar infinidad de consecuencias, tener todas éstas condensadas en los núcleos que las encierran. Simplificar abreviando y dirigiendo por el camino más corto, armonizando lo vario en el menor número de unidades posibles, señalados los puntos centrales que conducen por el tejido de las ideas, en todas las direcciones, según las que se compenetran, para distinguirlas claramente unas de otras, suprimiendo aquéllas que no se destacan de las demás, para conservar tan sólo lo que deba seleccionarse. Así tendremos el extracto, lo único que se debe conservar, con lo que se posee todo lo demás.

La parte práctica se referirá á la *heurística*, á la acción inventiva ó, por lo menos discursiva, que cree la vocación científica por el ejercicio de la actividad intelectual y el gusto por el culto de la verdad, lo que conducirá á la moción estética, producida por las armonías científicas y por las finalidades útiles y buenas á que conducen las aplicaciones teóricas.

La parte concerniente á la cultura tratará del desarrollo histórico de la Ciencia en sus principales fases, completada por la bibliografía que constituirá unas nociones útiles de *Literatura matemática*, como génesis de la constitución lógica de la Matemática en su actualidad.