Planos Acotados

Expresión Gráfica

Ricardo Bartolomé Ramírez

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

didáctica

EXPRESIÓN GRÁFICA

PLANOS ACOTADOS

2ª ed. revisada y ampliada

MATERIAL DIDÁCTICO
Ingenierías
nº 1

Títulos de la colección

1. **Planos acotados: expresión gráfica (2ª ed.)**
   Ricardo Bartolomé Ramírez
   2003, 306 pags. ISBN 84-95301-74-1

2. **Lenguaje "Turbo C" para estudiantes**
   Francisco J. Martínez de Pisón
   1996, 191 pags. ISBN 84-88713-33-9

3. **Problemas de análisis de circuitos eléctricos. Corriente continua. Corriente alterna monofásica**
   Montserrat Mendoza Villena, Luis Alfredo Fernández Jiménez.
   1997, 142 pags. ISBN 84-88713-58-4

4. **Problemas de electrónica analógica**
   Antonio Zorzano Martínez
   1999, 118 pags. ISBN 84-88713-96-7

5. **Programar es fácil**
   Julio Blanco Fernández
   1999, 250 pags. ISBN 84-88713-97-5

6. **Problemas resueltos de topografía práctica**
   Jacinto Santamaría Peña
   1999, 84 pags. ISBN 84-88713-98-3

7. **Resistencia de materiales. Nivel básico (2ª ed.)**
   Eduardo Martínez de Pisón Ascacíbar
   2003, 316 pags. ISBN 84-95301-75-X

8. **Prácticas de C.A.D. Microstation 2D (2ª ed.)**
   José Lafargue Izquierdo
   1999, 224 pags. ISBN 84-95301-15-6

9. **Programación de proyectos**
   Joaquín Ordieres Meré
   1999, 96 pags. ISBN 84-95301-16-4

10. **Termodinámica fundamental (2ª ed.)**
    J. M. Sala Lizarraga, Luis M. López
    2000, 448 pags. ISBN 84-95301-25-3

11. **Termodinámica aplicada (2ª ed.)**
    J. M. Sala Lizarraga, L. M. López y Victor de la Peña
    2000, 584 pags. ISBN 84-95301-26-1

12. **Problemas Termodinámica fundamental (2ª ed.)**
    J. M. Sala Lizarraga, Luis M. López y Felipe Jiménez
    2000, 490 pags. ISBN 84-95301-27-X

13. **Problemas Termodinámica aplicada (2ª ed.)**
    J. M. Sala Lizarraga, Luis M. López y M.M: Ruiz de Adana
    2000, 432 pags. ISBN 84-95301-28-8

14. **Problemas de calor y frío industrial**
    L. M. López, J. M. Sala y J. M. Blanco Ilzarbe
    2000, 418 pags. ISBN 84-95301-29-6

15. **Apuntes de cartografía y proyecciones cartográficas**
    Jacinto Santamaría Peña
    2000, 74pags. ISBN 84-95301-30 X

16. **Apuntes de fotogrametría**
    Jacinto Santamaría Peña y Teófilo Sanz Méndez
    2000, 68pags. ISBN 84-95301-30-X

17. **Perspectiva: fundamentos y aplicaciones. Axonométrico. Caballera. Cónico**
    Ricardo Bartolomé Ramírez
    2000, 260 pags. ISBN 84-95301-33-4

18. **Problemas de resistencia de materiales. Nivel básico. Ingeniería agrícola**
    Eduardo Martínez de Pisón Ascacibar
    2001, 446 pags. ISBN 84-95301-44-X

19. **Sonometría y contaminación acústica.**
    Javier de Cos, J. Ordieres, M. Castejón, F. J. Martínez de Pisón
    2001, 384 pags. ISBN 84-95301-47-4

20. **Cuadernos de prácticas de informática industrial. Modulo 1: enunciados de prácticas en ensamblador**
    F. J. Martínez de Pisón, J. Ordieres, M. Castejón, F. J. de Cos, M. Gil.
    2001, 110 pags. ISBN 84-95301-58-X

21. **La oficina técnica y los proyectos industriales**
    F. J. Martínez de Pisón, J. Ordieres, M. Castejón, F. J. de Cos, E. P. Vergara, F. Alba.
    2 v. ISBN 84-95475-32-4

Ricardo Bartolomé Ramírez

EXPRESIÓN GRÁFICA

PLANOS ACOTADOS

2ª ed. revisada y ampliada

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA
Servicio de Publicaciones
2021

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

ISBN: 978-84-09-31363-1

INTRODUCCIÓN

El Sistema de Planos Acotados (SPA), es uno de los Sistemas de Representación Gráfica, que emplea la proyección acotada de un elemento para su representación reversible sobre el plano del dibujo.

Este sistema es uno de los de mayor aplicación práctica, no solo desde el punto de vista de la pura representación gráfica, sino desde el no menos importante de la geometría resolutiva.

El Dibujo Topográfico y Cartográfico hacen uso de este Sistema, se puede decir que hacen uso casi exclusivo. Sobre un plano topográfico se pueden resolver mediante cálculos gráficos basados en este SPA, innumerables problemas de aplicación práctica. Desmontes, terraplenes, explanaciones, alineaciones, galerías, volumetría de tierras, etc...., son algunas de las posibilidades, y que en este libro se tratan.

Una parte muy importante del libro se ha destinado a la resolución de casi cincuenta casos de tejados, cubiertas y cúpulas, con sus secciones y verdaderas magnitudes en algunos de ellos.

Todos resueltos mediante un método original de este autor que agiliza y facilita la resolución de los mismos.

Del mismo modo otra parte importante está dedicada al estudio de la representación de poliedros en el SPA, con la resolución de veintiocho casos de distintos poliedros regulares.

Todo lo anterior viene soportado por la justificada metodología gráfica del Sistema, que fundamenta sus trazados en la Geometría correspondiente.

También se incluye una serie amplia de ejercicios enunciados para su resolución y que completa los contenidos de este trabajo.

Se ha procurado no cometer erratas, para lo cual se han revisado textos y dibujos. Si a pesar de todo, estas se producen, además de lamentarlo, serán de agradecimiento cuantas indicaciones, críticas y sugerencias se hagan al autor, porque esto le permitirá ir eliminando posibles deficiencias y mejorando su contenido.

El autor.

Tema 1

PUNTO, RECTA Y PLANO

EL PUNTO

El sistema de planos acotados (SPA) está formado por un plano horizontal de proyección, llamado plano del cuadro o plano de referencia.

Sobre este plano se encontrarán las proyecciones ortogonales de los elementos del espacio que sobre él se proyecten.

Cada punto, proyección de otro del espacio, estará debidamente acotado con lo cual quedará totalmente definido.

Observando la fig.1 en la que el plano π es el plano del cuadro, se pueden ver las tres posiciones que puede ocupar un punto en el sistema de planos acotados (SPA):

1º. Por encima del plano del cuadro, punto B.

2º. Contenido en el plano del cuadro, punto C.

3º. Por debajo del plano del cuadro, punto A.

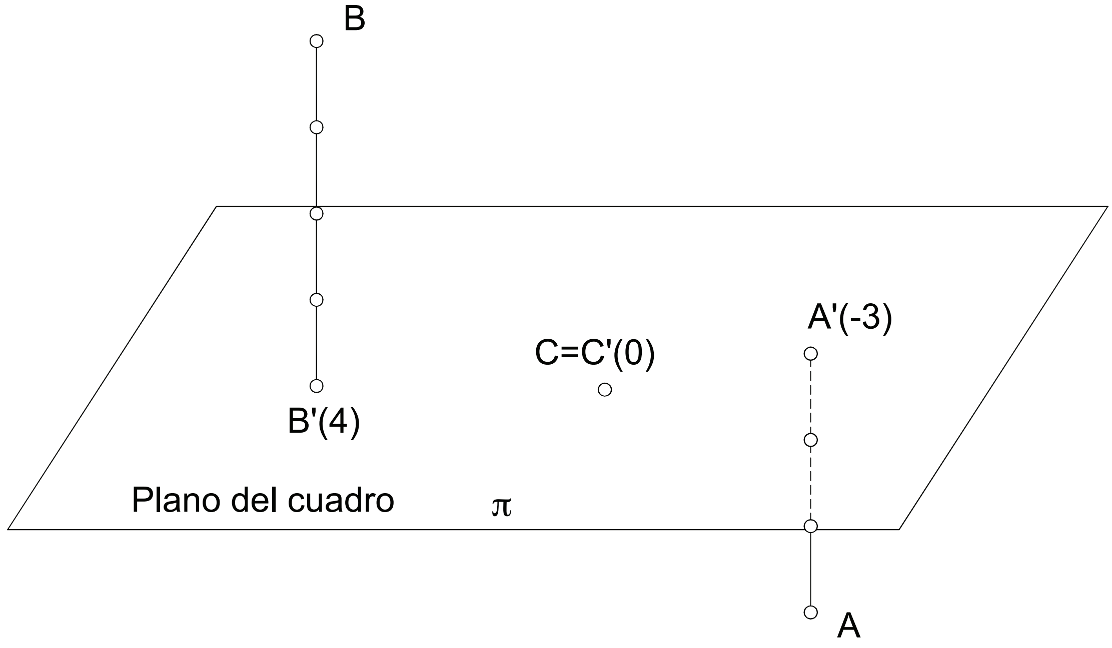


Fig.1

Las proyecciones de cada punto son B´, C´ y A´ respectivamente. Para que cada punto quede exactamente definido se debe anotar entre paréntesis, junto a su proyección, una cifra llamada cota. Este número indicará la distancia del punto al plano del cuadro a través de una recta perpendicular, por la proyección del punto, al plano del cuadro. La cota se medirá en centímetros. En topografía, como caso especial, se mide en metros.

Como se podrá ver, en este sistema conocida la proyección de un punto, se conoce la posición del punto en el espacio respecto al plano de referencia y viceversa.

Conceptos sobre la representación del punto

Desnivel entre dos puntos- Es la diferencia de cotas entre dichos puntos, teniendo en cuenta el signo de cada cota.

Ejemplo: El desnivel entre los puntos D(8) y E(-2) es 10.

Altitudes y profundidades: Cuando el plano del cuadro se sitúa a nivel del mar, las cotas positivas se denominan *altitudes* y las cotas negativas se llaman *profundidades.*

Cota de un punto: Es el número que indica la distancia entre un punto y el plano del cuadro, tomada sobre la perpendicular a este por la proyección del punto.

LA RECTA

La proyección de una recta en este sistema está definida por las proyecciones de dos de sus puntos. Conocidas las proyecciones acotadas de dos puntos de la recta ésta queda definida.

En la fig.2 se puede ver la proyección r´ de la recta r que está definida por los puntos B´(4) y A´(1.4), proyecciones de los puntos B y A de la recta r del espacio.

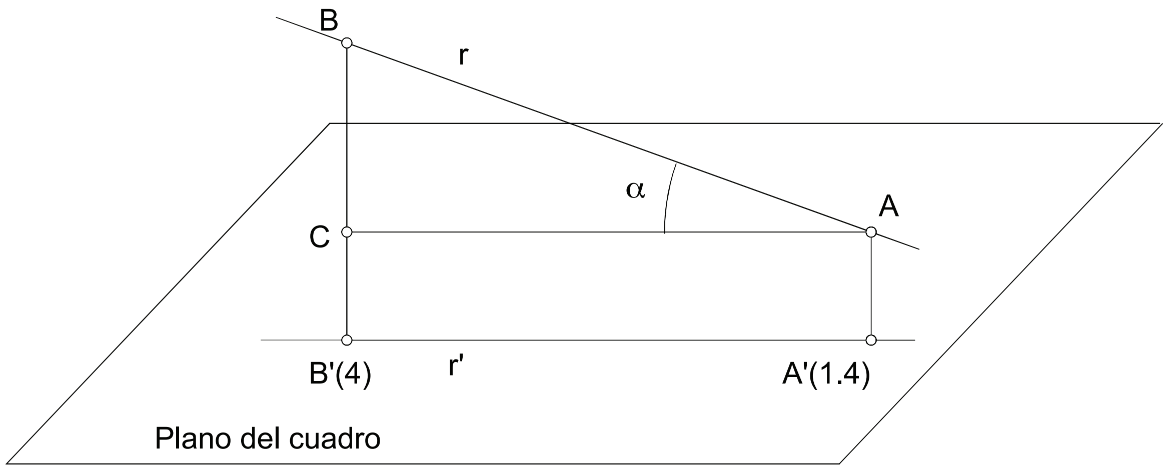


Fig.2

Conceptos sobre la representación de la recta

Pendiente de una recta: Es el valor de la tangente del ángulo que forma la recta con el plano del cuadro. Según la figura anterior:

$$r' = r \cdot \cos\alpha$$

El *desnivel* entre los puntos B y A será:

$$d = \overline{BB'} - \overline{AA'} = 4 - 1.4 = 3$$

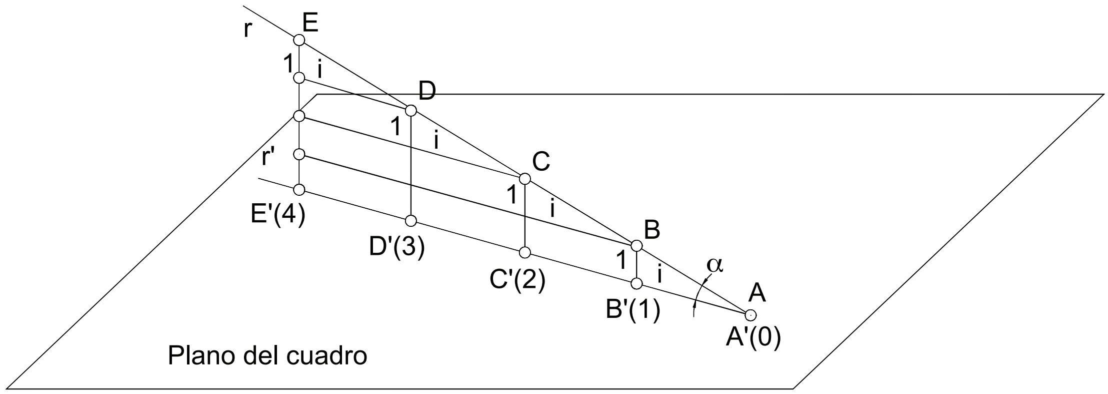


Fig.3

Traza de una recta: Es el punto donde la recta corta al plano del cuadro. En la fig.3 la traza de la recta r es el punto A. Además este punto es el de intersección de la recta r y su proyección r´.

Módulo o intervalo de una recta: Es la proyección de un segmento de dicha recta cuyos extremos tienen por desnivel la unidad.

Ejemplo : Los puntos A y B de cotas 0 y 1 respectivamente son los extremos de un segmento de la recta r, cuya proyección A´(O)-B´(1) constituye un intervalo. A los intervalos se les designa por la letra i.

Graduar una recta: Se denomina graduar una recta a la división de un segmento de la misma en tantas partes iguales como unidades valga la diferencia de cotas de los extremos de dicho segmento.

Como se puede ver en el triángulo A´B´B el ángulo BA´B´ es el ángulo α que forma la recta con el plano, siendo BB´ el segmento unidad, y el segmento A´B´ el intervalo i. La tangente del ángulo α será:

$$p = \operatorname{tg} \alpha = BB'/A'B' = 1/i \ ; \ p = 1 / i$$

El punto A´(0) de intersección de la recta r y su proyección r´, es la traza de la recta.

Abatimiento de una recta

Suponiendo la recta r´ de la fig.4 dada por los puntos A´(0) y B´(4).

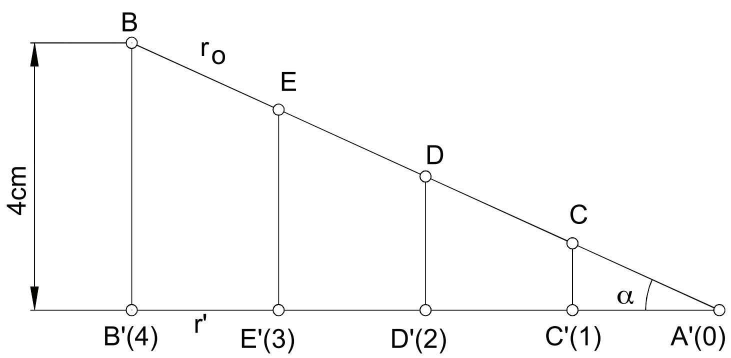


Fig.4

Se graduará la recta dividiendo el segmento A´B´ en cuatro partes iguales. Se traza una recta. perpendicular a r´ por B´ y sobre esta perpendicular se toman 4 centímetros, obteniendo así el punto B. Uniendo ahora B con A´ se obtiene la recta r_0 que es el abatimiento de la recta r sobre el plano del cuadro. Así mismo se pueden obtener los puntos C D y E trazando perpendiculares a r´ por las proyecciones correspondientes. El ángulo α que forman las rectas r_0 y r´ es el ángulo en verdadera magnitud de la recta r con el plano del cuadro.

Alfabeto de la recta

Las posiciones que una recta puede tomar con respecto al plano del cuadro, fig.5, son:

1º Paralela a él. Recta r´.

2º Oblicua. Recta s´.

3º Perpendicular a él. Recta t´.

La recta s(s´) de la figura se dice que es oblicua con respecto al plano del cuadro puesto que los puntos C´(0) y D´(2) por los que está definida, tienen distinta cota.

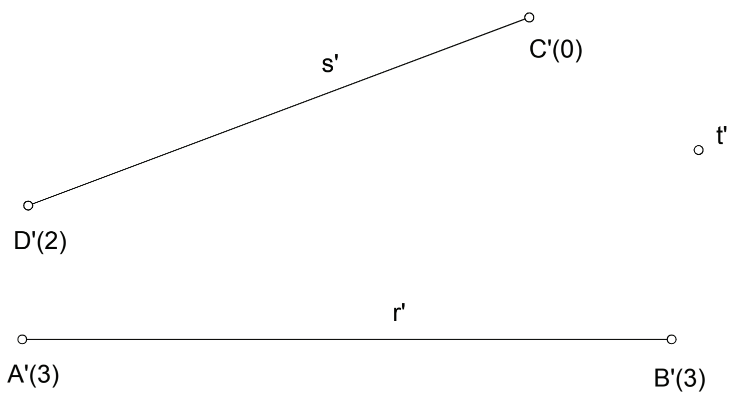


Fig.5

Si la recta es paralela al plano del cuadro, los puntos por los que estará definida tendrán la misma cota, como puede verse en la recta r(r´) dada por los puntos A´(3) y B´(3). La pendiente de este tipo de rectas es 0.

Si la recta es perpendicular al plano del cuadro, su proyección será un punto, como ocurre con la recta t(t´).

Aplicaciones

1º Situar el punto P(3.8) en la recta r dada por los puntos A´(6) y B´(-2).

2º Determinar el valor de i así como la verdadera magnitud de α en la recta anterior.

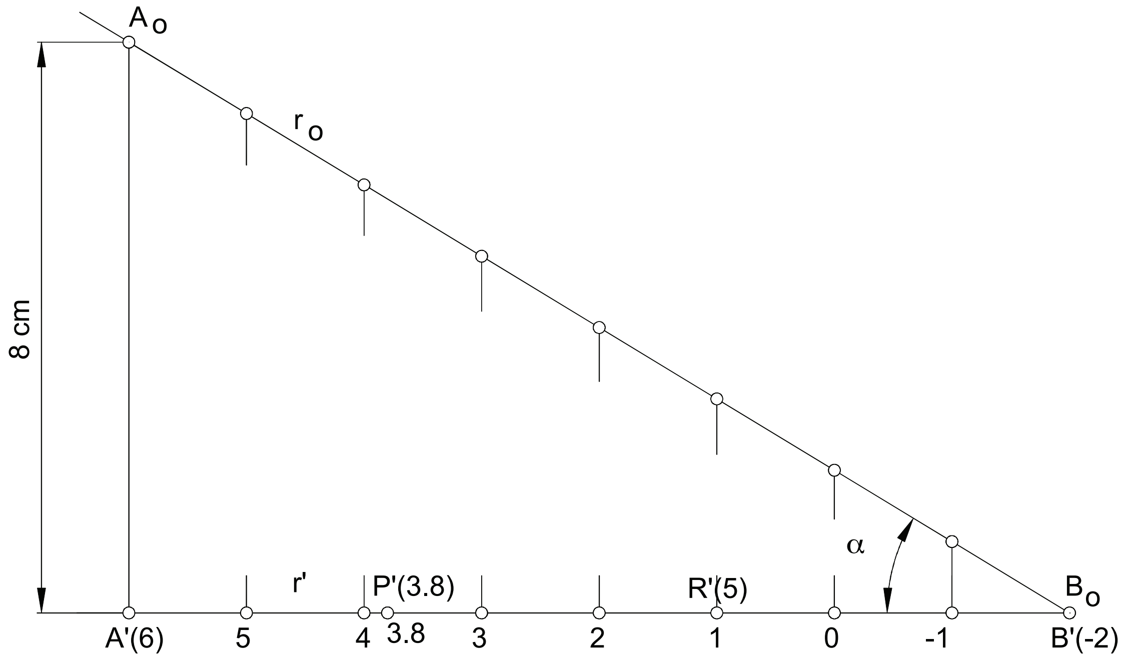


Fig.6

Para que un punto pertenezca a una recta su proyección debe de hallarse sobre la proyección de la recta y su cota debe de coincidir con la del punto de la recta sobre el que se proyecta.

Como muestra la fig.6 el punto P de cota 3.8 cm. pertenece a la recta pues su proyección está sobre ella y su cota coincide con la del punto de la recta. Así mismo el punto R´(5) no pertenece a la misma ya que, aunque su proyección coincida con la de la recta, su cota no es la misma que la del punto de élla.

El ángulo α que la recta r forma, con el plano del cuadro se determina gráficamente, y como se observa en la figura basta con abatirla para obtener dicho ángulo en verdadera magnitud.

Para hallar el intervalo i de la recta anterior se tendrá en cuenta que:

$$p = \text{tg } \alpha = 1 / i$$

y como además se sabe que tg α = sen α/cos α

sólo falta determinar, de forma gráfica, los valores del seno y coseno del ángulo α.

Hallados dichos valores se sustituyen en la fórmula:

$$tg\ \alpha = 8/13$$

luego :

$$i = 1 / tg\ \alpha = 13/8 = 1{,}625crn.$$

3º Determinar si dos rectas se cortan o no.

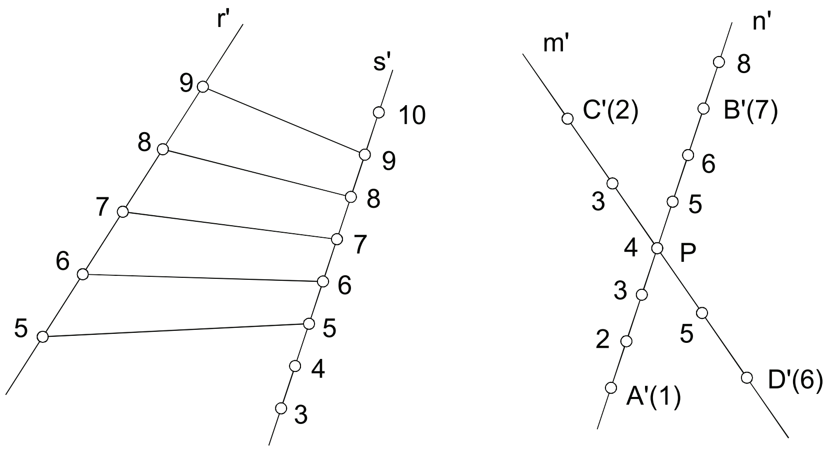


Fig.7

Para que las rectas m y n de la figura anterior se corten en el espacio, deben formar plano y el punto de intersección de ambas debe tener igual cota. En la figura el punto P de cota 4 es el de intersección de las rectas m y n.

Cuando las proyecciones de las dos rectas se cortan fuera del dibujo como sucede con las rectas r´ y s´, hay que comprobar si forman plano, para lo cual se unirán los puntos de igual cota de ambas rectas. Si las rectas así obtenidas son paralelas las rectas forman plano y por lo tanta cortan. En caso contrario las rectas se cruzan.

EL PLANO

En el SPA el plano viene definido de la forma mas simple, por una de sus líneas de máxima pendiente (l.m.p.) con respecto al plano del cuadro.

Como se sabe la línea de máxima pendiente se representa por medio de dos rectas paralelas y próximas y una más gruesa que la otra.

En la fig.8 se representa un plano α cuya intersección con el plano del cuadro es la recta α_0. Sobre este plano se dibuja la l.m.p. que es perpendicular a la traza α_0 del plano.

Tomando los puntos A, B y C de cotas 1, 2 y 3 respectivamente, y trazando por ellos paralelas a α_0 se obtendrán rectas horizontales, quedando definido así el plano.

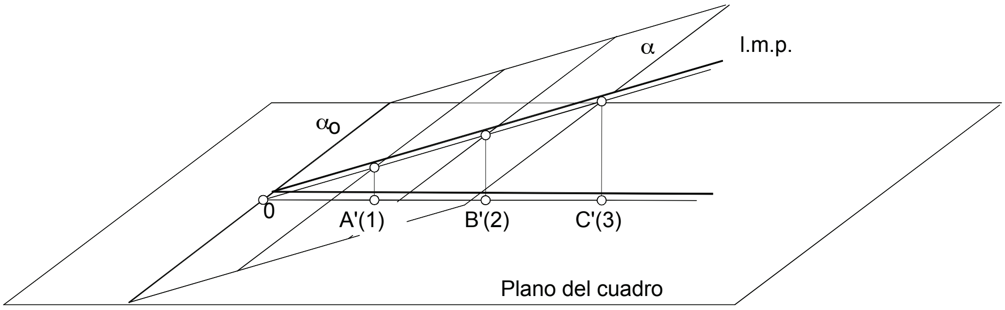


Fig.8

Proyectando todo esto sobre el cuadro, se obtiene la l.m.p. graduada perpendicular a la traza α_0, y con las paralelas a dicha traza por los puntos A´, B´ y C´.

En lo sucesivo será así como ha de representarse el plano.

En la fig.9 se muestra como se representará un plano α de forma completa.

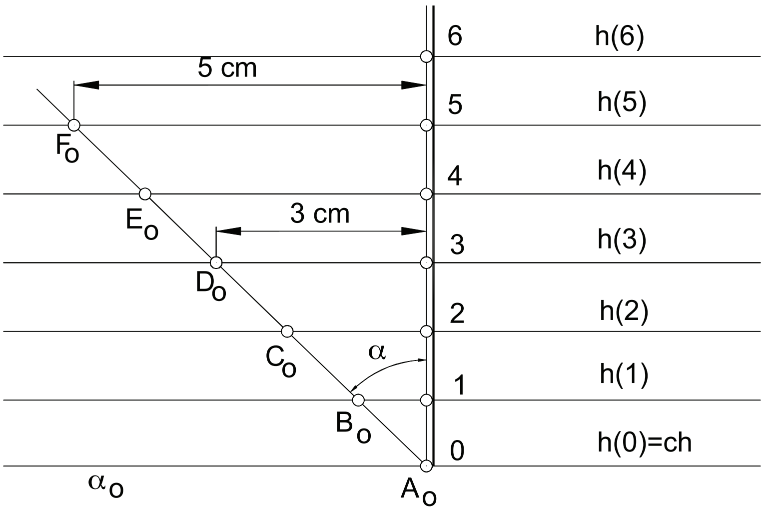


Fig.9

Para determinar el ángulo que forma un plano oblicuo con el de proyección, basta abatir su l.m.p., para ello se tomará sobre la horizontal de cota n, n unidades obteniendo el punto F_0. Uniendo ahora el punto A_0 con el F_0 se obtendrá la l.m.p. abatida. El ángulo α que forman la l.m.p. y su abatida, será el mismo que forme el plano α con el plano del cuadro.

Un plano queda también definido por las proyecciones de dos de sus horizontales debidamente acotadas pues la l.m.p. será perpendicular a ellas.

Así mismo un plano perpendicular al de proyección se representa por una recta, que será su traza. A estos planos se les llama *planos de perfil o planos proyectantes.*

Aplicaciones

1º Situar un punto sobre un plano

Un punto se encuentra en un plano cuando pertenece a una recta cualquiera del mismo. En la fig. 10 se puede observar que los puntos A´(2), C´(5.8) y D´(5) están en el plano α por pertenecer a las horizontales de cota 2, 5.8 y 5 respectivamente. Sin embargo el punto B´(4) no está en el plano, pues su cota 4 no coincide con la cota 5 de la horizontal sobre la que se proyecta.

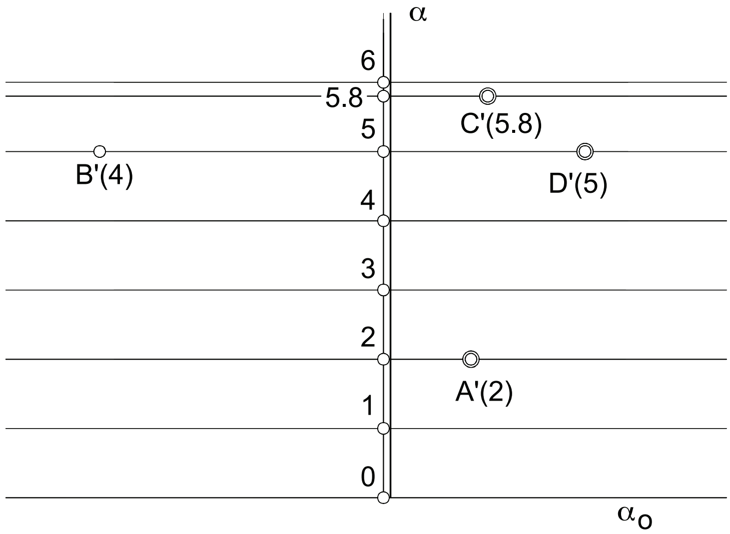


Fig.10

2º Hacer pasar un plano de pendiente conocida por una recta conocida

Se desean hallar los planos que teniendo una pendiente igual a 2/3 pasen por una recta r dada. Para ello debe tomarse un punto cualquiera de la recta, punto de cota 4. Con centro en este punto, se traza una circunferencia de radio 1.5 cm. igual al intervalo del plano, recordando que p=1/i. Por el punto de cota 3 se trazan sendas tangentes a dicha circunferencia. Estas rectas serán las horizontales de cota 3 de ambos planos.

Trazando, posteriormente, paralelas a dichas rectas, se obtienen las demás horizontales de los planos buscados. Sólo resta, ahora, trazar la *l.m.p.* de cada plano que será, como ya sabemos, perpendicular a las horizontales del plano.

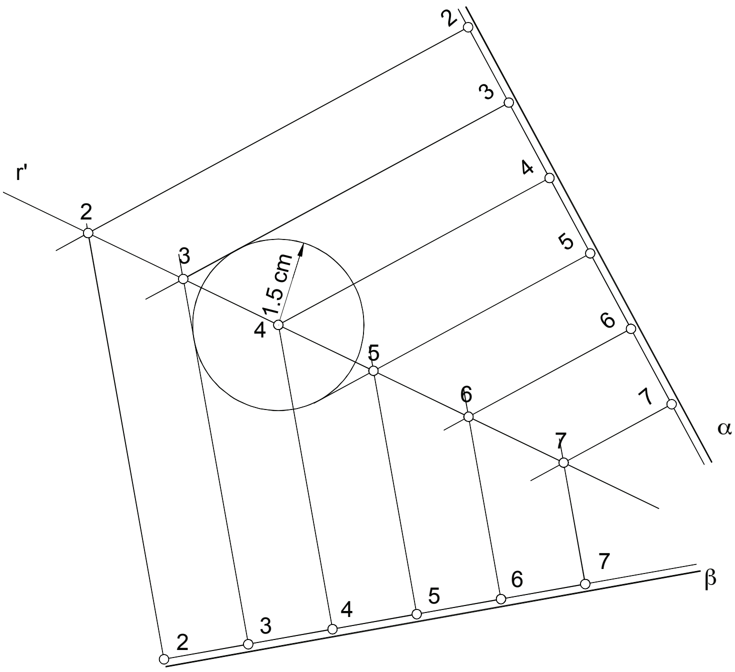


Fig.11

3º Dado un Plano, situar en él rectas de pendiente conocida

Sea el plano α y el punto A´(8) del mismo. Para hallar las rectas de pendiente 3/5 que pasando por el punto A´(8) estén contenidas en el plano α, se trazará una circunferencia de centro en dicho punto y radio igual al intervalo de la recta. Esta circunferencia corta a las horizontales de cota inmediatamente superior e inferior a la del punto A, horizontales de cota 9 y 7 respectivamente, en los puntos B´(7), C´(9), D´(7) y E´(9) tal y como se ve en la fig.12. La unión de los puntos B´(7) y C´(9) así como la de los puntos D´(7) y E´(9), determinan las rectas r´ y s´, respectivamente, que son las rectas buscadas.

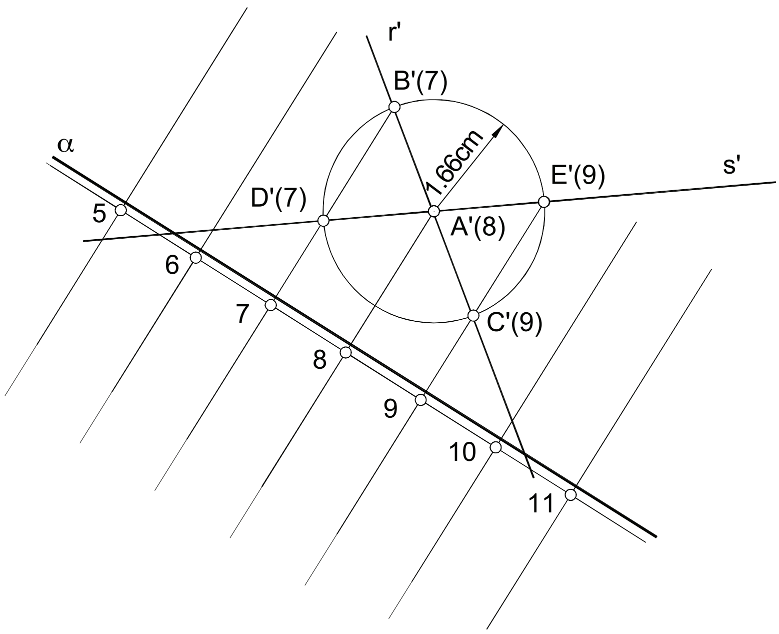


Fig.12

4º Por un punto P del plano α de pendiente 6/5 hacer pasar las rectas de pendiente 1/2 y que estén contenidas en el plano

Dado el plano α por su pendiente, para representarlo se hallará primero su intervalo. Como se sabe, el intervalo es el inverso de la pendiente luego i = 5/6 = 0.8333 cm. Una vez dibujado el plano se toma el punto P de cota 3. Con centro en dicho punto se traza la circunferencia de radio 2 igual al intervalo de las rectas a hallar.

Esta circunferencia corta a las horizontales de cota 4 y 2 en los pares de puntos A, B y C, D respectivamente. Uniendo dichas parejas de puntos, como se ve en la fig.13 se obtienen las rectas r´ y s´ buscadas.

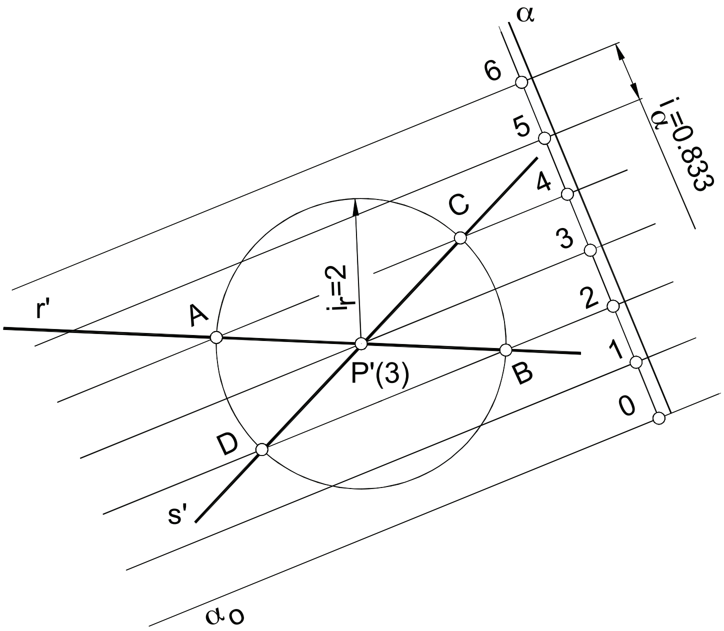


Fig.13

5º. Sobre un plano proyectante situar dos rectas paralelas y de pendiente 1/3

En primer lugar se sabe que el intervalo de las rectas será de 3 cm. Por lo tanto si la primera de las rectas, recta r´, está definida, por ejemplo por los puntos A y B de cotas 2 y 4 respectivamente, la distancia entre proyecciones de dichos puntos será 2 x 3cms.= 6 cm.

Para realizar este ejercicio, se situará en la traza del plano proyectante α el punto A´(2) y a 6 cm. y, sobre la misma traza, se coloca el punto B´(4). Posteriormente se abaten dichos puntos, para lo cual, se trazarán las perpendiculares por ellos a la traza del plano α. Sobre estas perpendiculares se lleva la cota de los puntos obteniendo así sus abatidos A_0 y B_0 como se ve en la fig.14. Por lo tanto la recta r_0, abatida de la recta r´ pedida, pasará por dichos puntos.

Para obtener otra recta que cumpla las condiciones exigidas y que, sea paralela a la anterior, se procede a partir de la recta abatida r_0. Para ello se traza una paralela s_0 a dicha recta. Sobre la recta s_0 se toman dos puntos C_0 y D_0, con la condición de que las proyecciones de ambos puntos disten 6 cm. Las cotas de los puntos C y D serán las distancias de los puntos C´ y D´, proyecciones de C y D respectivamente, a los abatidos C_0 y D_0. En nuestro caso las cotas de ambos puntos son 3 y 5 respectivamente.

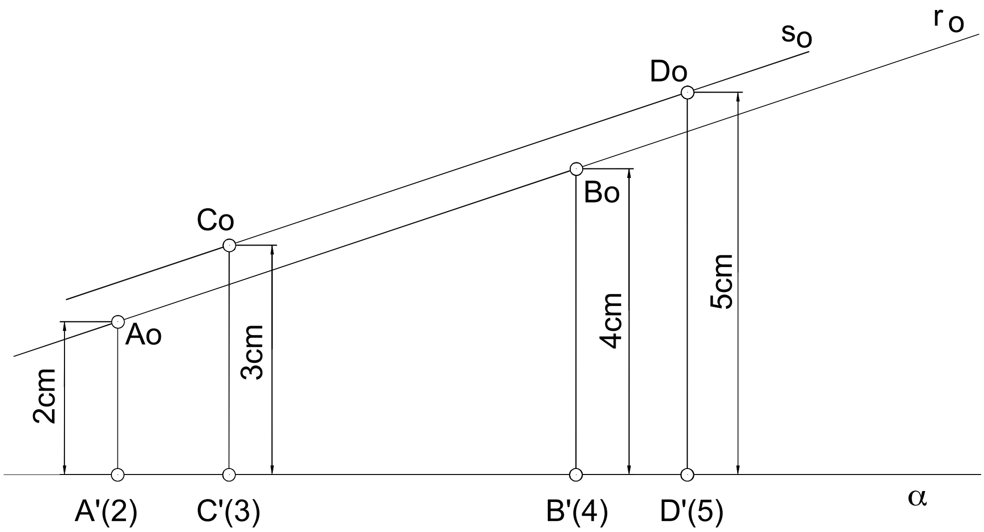


Fig.14

Tema 2

INTERSECCIÓN DE PLANOS. PROBLEMAS DE RECTAS Y PLANOS

INTERSECCIÓN DE PLANOS

Sean dos planos cualesquiera definidos por sus l.m.p. graduadas, fig.15. La recta intersección de ambos planos estará definida por los puntos de intersección de las horizontales de plano de igual cota. Esto es debido a que si se toman planos horizontales auxiliares, su intersección con los planos dados son rectas horizontales de plano que se cortan, definiendo puntos de la recta intersección de los planos dados.

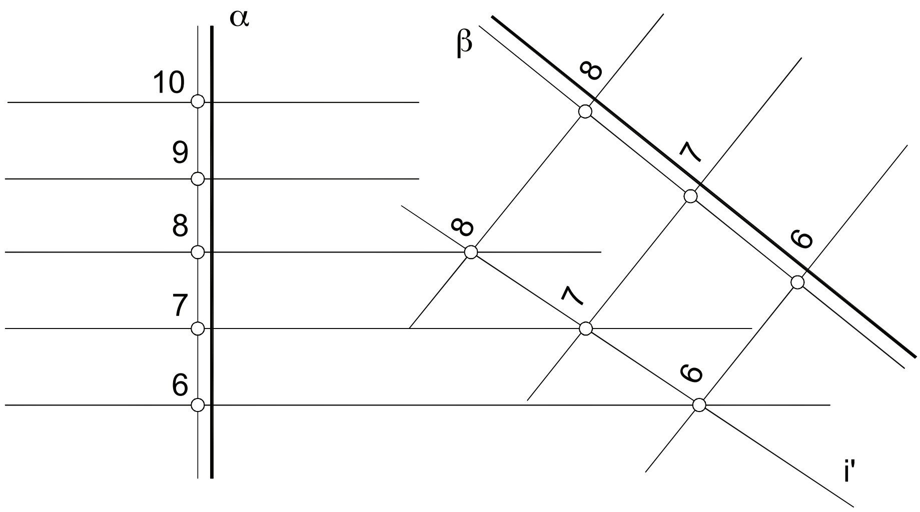


Fig.15

Cuando los dos planos tienen sus l.m.p. paralelas en proyección, es decir, las trazas con el plano del cuadro son paralelas, no se pueden tomar planos horizontales corno planos auxiliares. En este caso se corta a ambos planos por un plano vertical que sea perpendicular a las trazas de los planos, fig.16. En la figura la traza de este plano de perfil es la recta σ_0. Se abaten ahora las dos l.m.p., sobre un plano horizontal, paralelo al de proyección, de cota 4. Estas rectas se abaten según BI_0 y AI_0, obteniendo así los ángulos α y β que forman ambos planos con el plano horizontal de cota 4 que serán los mismos que forman con el de referencia. El punto I_0, intersección de los abatimientos de las dos l.m.p., define la recta horizontal, intersección de ambos planos. Dicha recta siendo paralela, por I_0, a las horizontales del plano, tiene la misma cota que el citado punto. Por lo tanto y como puede verse en el dibujo la recta intersección es i, y tendrá de cota 2.8 + 4 centímetros.

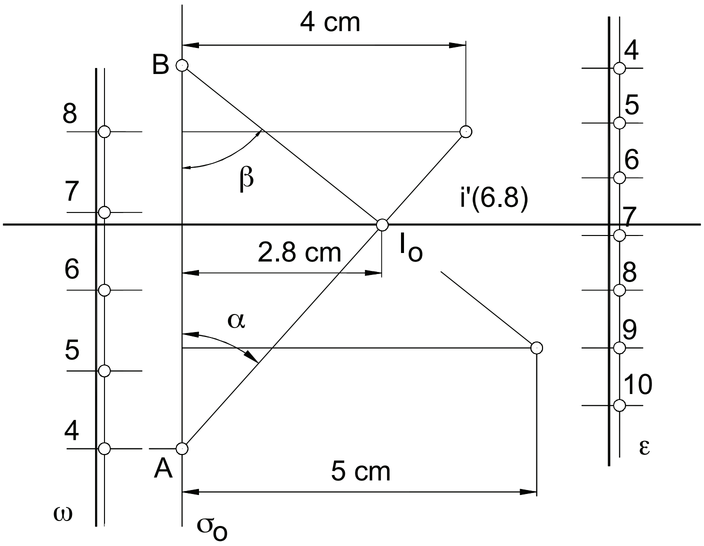


Fig.16

A continuación se muestra un procedimiento distinto al que anteriormente se ha desarrollado.

En la fig. 17 se tienen los planos α y β dados por sus l.m.p. que son paralelas en proyección. El método consiste en trazar rectas que pasen por los puntos de igual cota en ambos planos. Estas rectas se cortarán en un único punto P, punto por el que pasará la recta solución que será además paralela a las horizontales del plano. La cota de esta recta se hallará gráficamente.

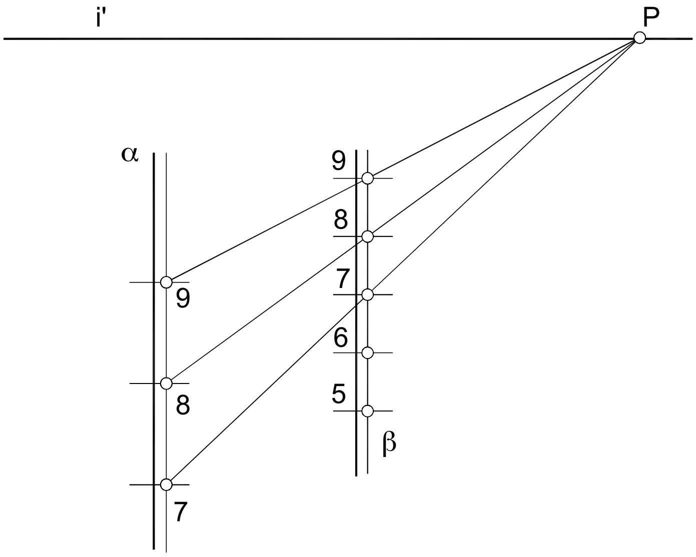


Fig.17

INTERSECCIÓN DE RECTA Y PLANO

El concepto general para la resolución de este caso es el mismo que el utilizado en otros sistemas. Consiste en tomar un plano auxiliar β que contenga a la recta r. La intersección de este plano con el plano α produce otra recta i. La intersección de la recta i con la recta r dará el punto I buscado. Como se ve en la fig.18, el plano auxiliar β que contiene a la recta r y el plano α dado, se cortan según la recta i. Esta recta pasa por los puntos A(3) y B(4), intersección de las horizontales de cota 3 y 4 de ambos planos respectivamente. Al ser la recta i intersección de los planos α y β pertenecerá a ambos y en concreto al plano α. Como la recta r corta a la i, en el punto I(3.5), que es un punto del plano α, quiere decir que la recta r está cortando a dicho plano en el punto I(3.5), punto solución buscado.

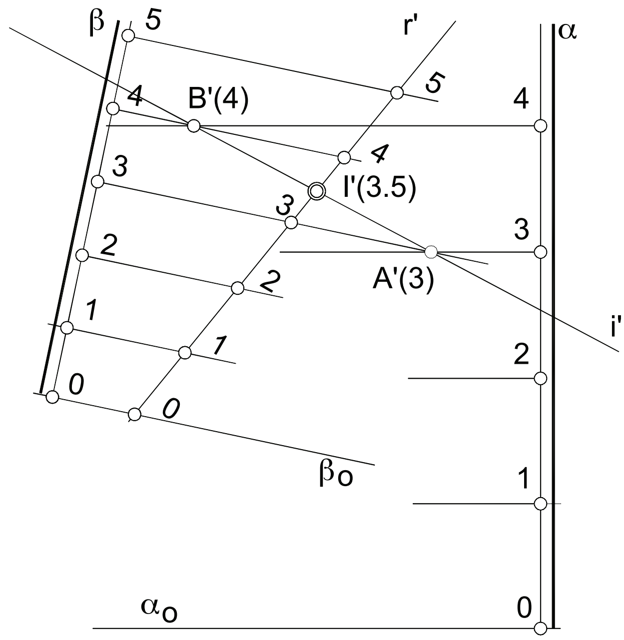


Fig.18

Aplicaciones

Plano definido por una recta y un punto

La figura siguiente muestra inicialmente una recta r´ graduada y un punto A´(4). Ambos elementos determinan, por definición, un plano. Para obtenerlo basta con unir el punto A´(4) con el punto de la recta r´ que tenga la misma cota, trazando posteriormente rectas paralelas, a la así formada, por los restantes puntos de la recta. De esta forma quedan definidas las horizontales del plano α solución. El último paso consiste en trazar la l.m.p. que será perpendicular a dichas rectas horizontales quedando a la vez graduada como puede verse en la fig. 19.

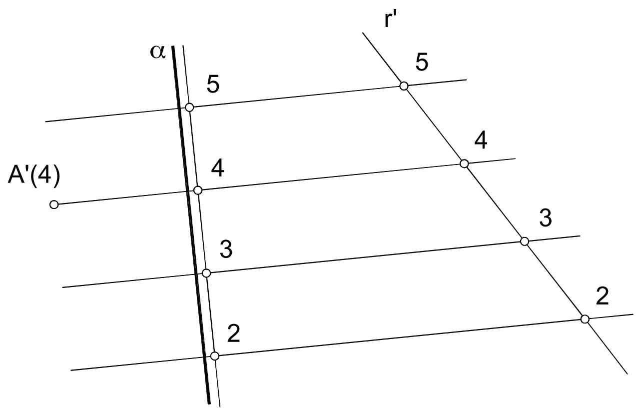


Fig.19

Intersección de dos planos, uno definido por su l.m.p. y el otro por dos rectas

Dadas las recta r´ y s´ que definen el plano α, y dado el plano β definido por su l.m.p., determinar la recta intersección de dichos planos.

Una vez halladas las horizontales del plano α, se hallan las intersecciones con las horizontales de igual cota del plano β.

Los puntos así obtenidos definen la recta i´ intersección de ambos planos.

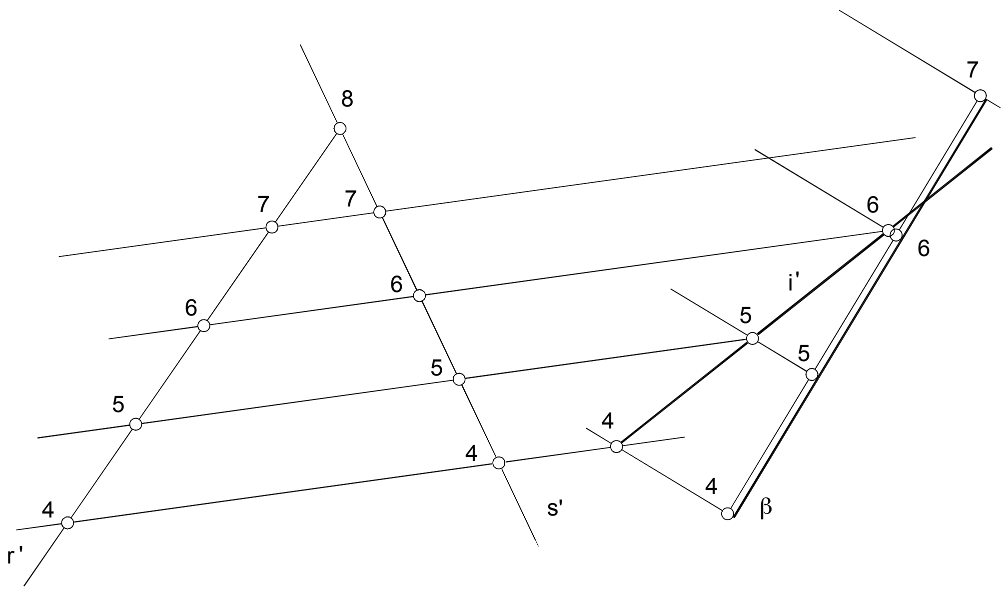


Fig.20

Intersección de un plano oblicuo y otro vertical

Dado el plano oblicuo α por su l.m.p., y el plano vertical β por su traza β_0 con el plano del cuadro, determinar su intersección. La proyección i´ de la recta intersección de ambos planos estará sobre la traza del plano vertical β_0 por pertenecer al mismo.

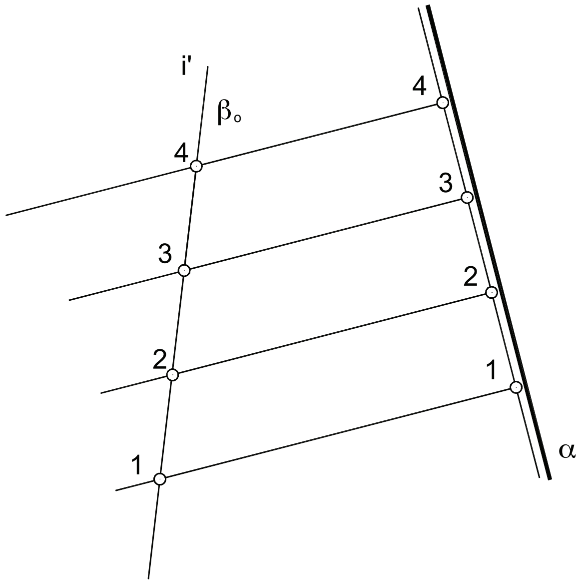


Fig.21

De igual forma y como la recta intersección también pertenece al plano α sus puntos estarán sobre las horizontales de igual cota de dicho plano. Así quedará definida la recta intersección puesto que se conoce su proyección acotada.

Intersección de dos planos definidos, uno por dos rectas concurrentes y el otro por dos rectas paralelas

Sean las rectas concurrentes r´ y s´ y las rectas paralelas m´ y n´ que definen dos planos. Como ya se sabe la recta intersección pasa por los puntos de intersección de las horizontales de igual cota. En la fig.22 se puede observar lo comentado anteriormente.

Intersección de dos planos cuyas l.m.p. son casi paralelas en proyección.

Obsérvese que para resolver este caso no se pueden tomar planos horizontales auxiliares pues las rectas intersección obtenidas son casi paralelas y por tanto los puntos de intersección de las horizontales de igual cota se saldrían del dibujo. Por lo tanto se tomarán planos oblicuos auxiliares. Por ejemplo el plano σ que corta al plano α según la recta r´, y al plano β según la recta m´. Ambas rectas se cortan en el punto I´, punto que pertenecerá a la recta solución.

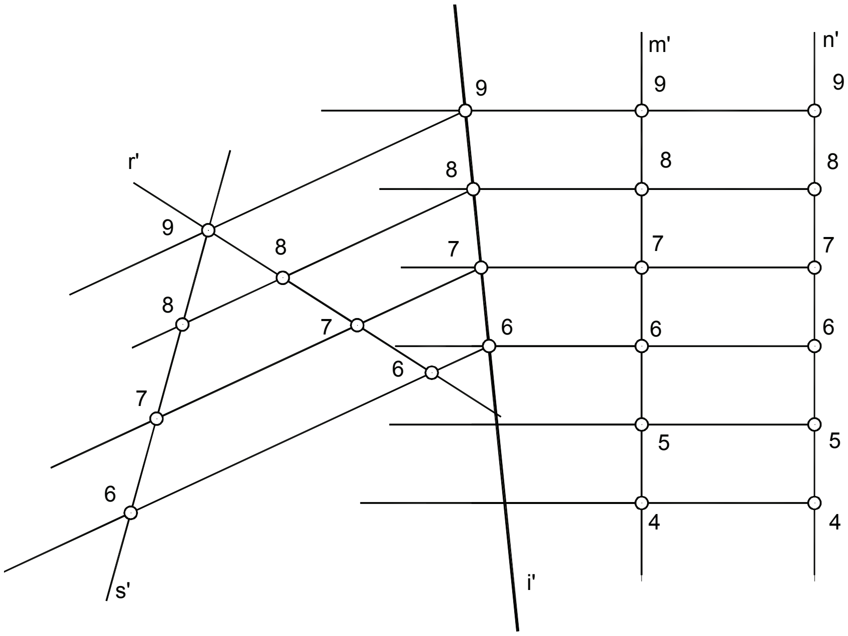


Fig.22

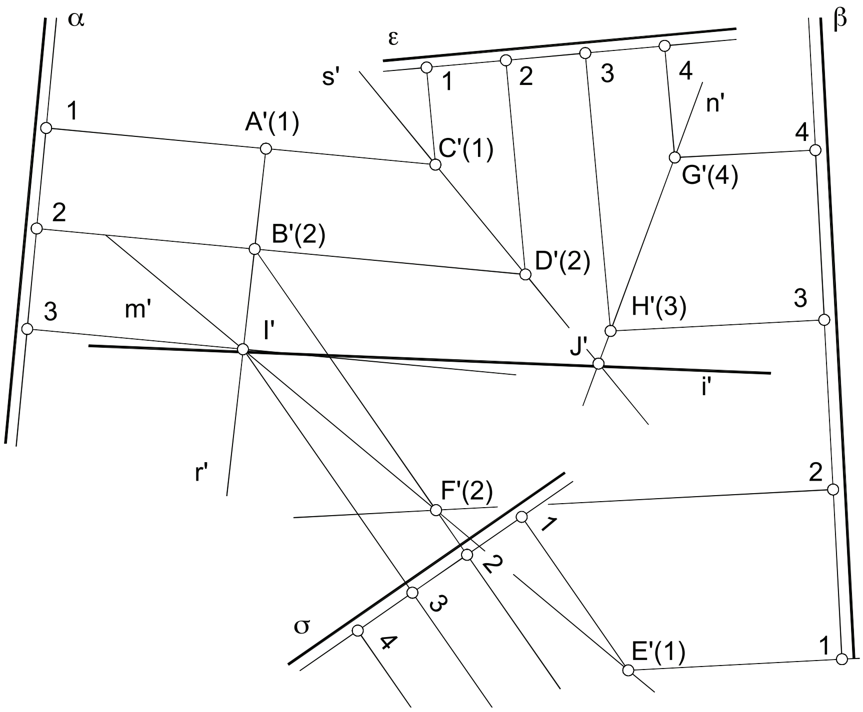


Fig.23

Por otra parte tomando el plano ε como auxiliar, éste corta al plano α según la recta s´ y al plano β según la recta n´. Estas dos rectas se cortan en el punto J´ que también pertenece a la recta solución. Por lo tanto uniendo los puntos I´ y J´ se obtiene la recta intersección i´.

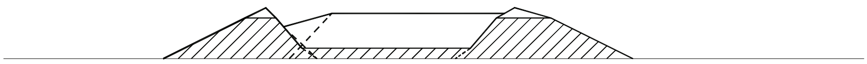
Aplicación

Resolver la cubierta de la figura, sabiendo que las pendientes exteriores son p_e = 1/2 y las pendientes interiores valen p_i = 1.

Dada la planta del tejado de un edificio, en trazo grueso, se numeran los aleros exteriores y los del patio. A continuación se determinan las intersecciones de los faldones que parten tanto de los aleros exteriores como de los del patio. Como la pendiente de los faldones que parten de todos los aleros exteriores es la misma, al igual que ocurre con la pendiente de los faldones que parten de los aleros del patio, las intersecciones exteriores así como las del patio serán las bisectrices de los ángulos que forman los aleros entre sí.

Una vez halladas todas las intersecciones se identifican. Para identificarlas se les asignará la pareja de números correspondientes a los aleros de los que provienen.

Ejemplo, De los aleros 1 y 2 se obtiene la intersección 1-2.



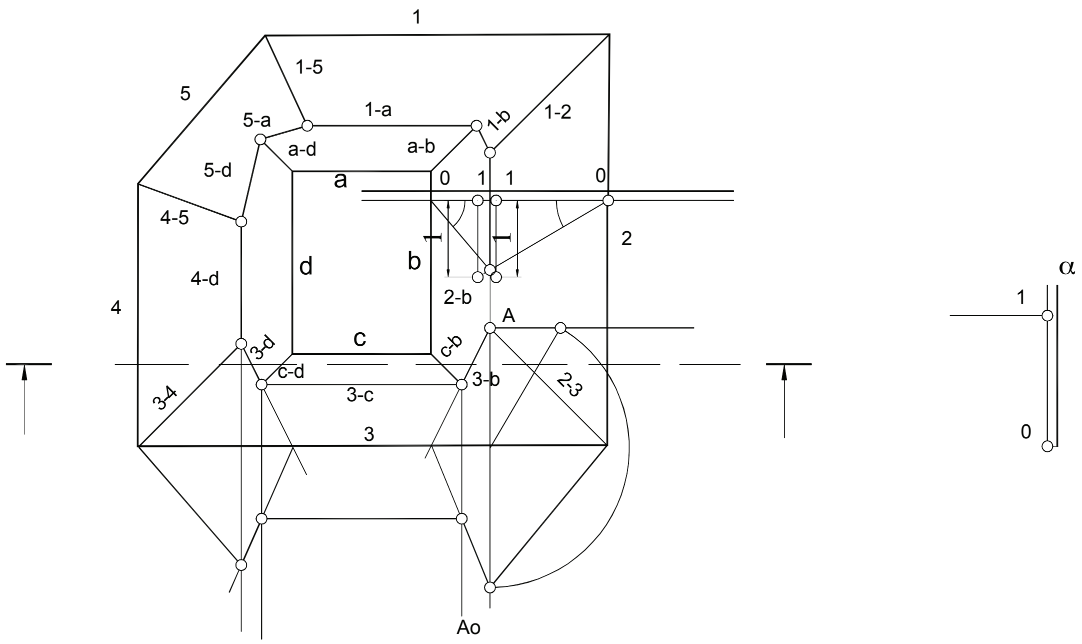


Fig.24

Una vez obtenidas las intersecciones de los faldones que parten de los aleros exteriores, por un lado, y las intersecciones de los faldones que parten de los aleros del patio, se continua con las intersecciones mixtas que son las producidas, por los faldones que parten de los dos tipos de aleros. Para ello se comienza por ejemplo con el alero exterior 2 y el del patio b. Los faldones que parten de los aleros exteriores y del patio son dos planos de pendientes 1/2 y 1, respectivamente, con sus horizontales de cota paralelas. Luego para hallar la intersección de ambos planos, se abatirán sus l.m.p. En el abatimiento se determina el punto de intersección de ambas rectas. Por lo tanto por este punto pasará la intersección de ambos faldones. Dicha intersección se denominará 2-b. Prolongando la intersección 2-b hasta que corte a la primera intersección que encuentre a su paso, en este caso la 2-3, se tienen dos intersecciones que se cortan en un punto. Eliminando el término común de las denominaciones de ambas intersecciones, 2-b y 2-3 en este caso el número 2, se obtiene la denominación de la intersección que partía de este punto, que será la intersección 3-b, que indica que por el punto de corte anterior pasará la intersección producida por los faldones que parten de los aleros 3 y b. Se prolonga, ahora, la intersección 3-b hasta que encuentre a la siguiente intersección, que en nuestro caso es la c-b, repitiendo el proceso anteriormente explicado hasta hallar la cubierta del edificio. En la figura 24 se incluye la sección producida por el corte determinado por la línea discontinua en cuyos extremos se colocan un par de flechas indicando la dirección desde la que se observa la sección. Así mismo se incluye el abatimiento del faldón que parte del alero de nombre 3. Aunque el abatimiento se estudiará más adelante, en la figura se muestra el abatimiento del vértice A, que como puede verse es un procedimiento similar al empleado en otros sistemas.

Intersección de una recta con un plano vertical

Dada una recta oblicua r por su proyección r´, y dado un plano proyectante por su traza α_0, su intersección será, como muestra la fig.25, punto I´. La cota de dicho punto se halla gráficamente en la figura, cuyo valor es I´(5.5).

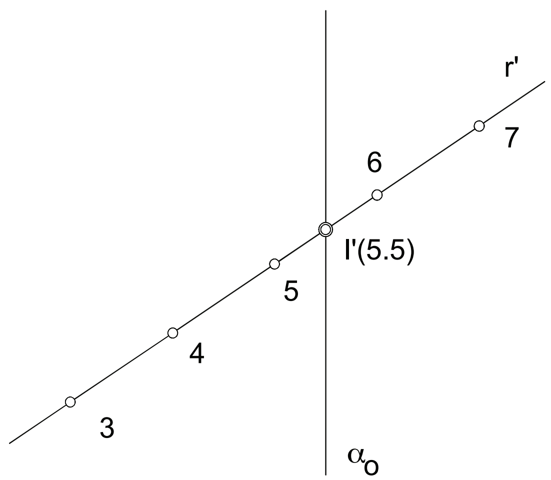


Fig.25

Intersección de una recta con un plano definido por otras dos

Para que el plano dado por las rectas s´ y t´ quede definido, es necesario trazar por los puntos de igual cota en ambas rectas, las horizontales de plano. Una vez halladas éstas, se hará pasar por la recta r´ un plano cualquiera. La intersección del plano definido por s´ y t´ con el plano que pasa por r´ es la recta i´. La intersección de i´ con r´ determina el punto I´ solución.

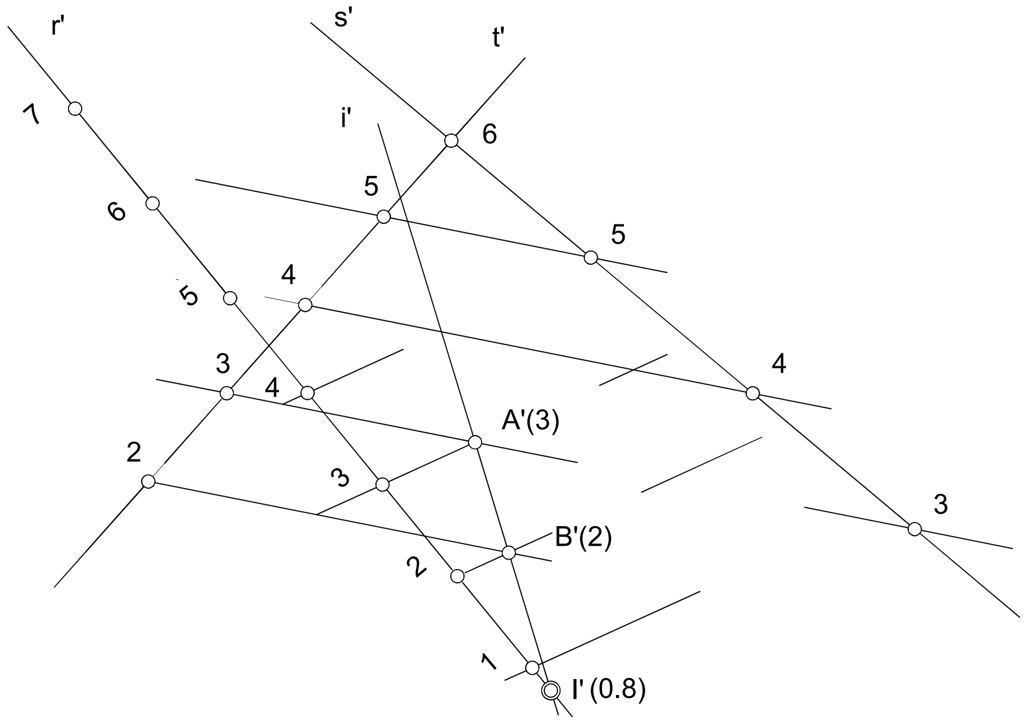


Fig.26

Intersección de una recta vertical con un plano oblicuo

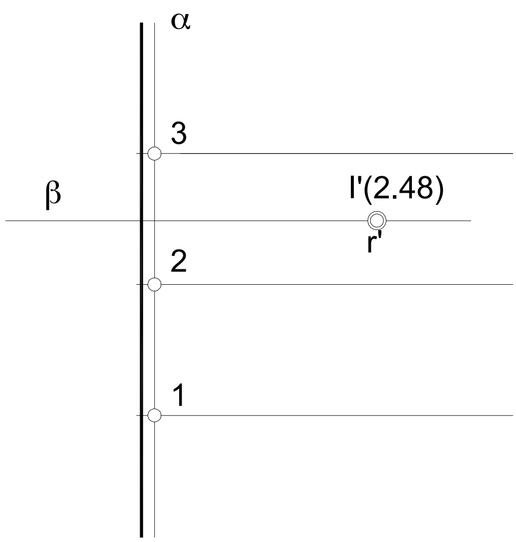


Fig.27

En la fig.27 se tienen la recta vertical r´ y el plano oblicuo α. Para obtener la intersección del plano y la recta se sigue el método general. Se hace pasar por la recta r´ un plano vertical cuya traza β_0 es perpendicular a la l.m.p.. La intersección del plano α y el plano β será una horizontal de plano cuya cota se puede hallar gráficamente.

Por pertenecer esta horizontal al plano β pasará por la proyección r´ de la recta r. Esto quiere decir que dicha horizontal cortará a la recta r en un punto I cuya proyección quedará confundida con la proyección r´, de la recta vertical. La cota de este punto será la misma que la de la horizontal de plano obtenida. De forma gráfica se obtiene la cota de la horizontal de plano así como la del punto I que es 2.48.

Al ser un caso particular, no es necesario aplicar el método general porque la posición de I´ debe coincidir con r´.

Intersección de una recta horizontal con un plano oblicuo

Sea la recta horizontal r´ de cota 6 y el plano oblicuo α. Si se toma un plano auxiliar horizontal de cota 6 que pase por la recta r´. La intersección de este plano auxiliar con el plano α da la horizontal de cota 6. Dicha horizontal de plano corta a la recta r´ en el punto I´(6) solución. Fig.28.

Como se puede apreciar la solución del problema no precisa de la aplicación del método general.

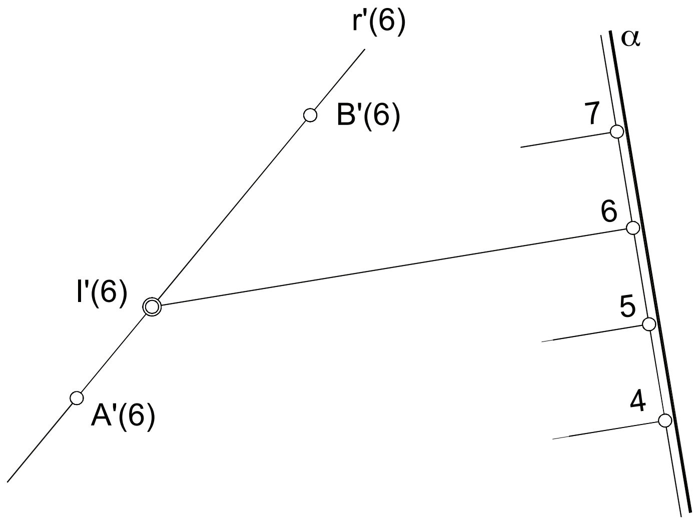


Fig.28

Intersección de una recta oblicua con un plano horizontal

Dada una recta oblicua, de proyección r´, el punto de intersección con el plano horizontal será aquel punto de la recta que tenga la misma cota que el plano.

En la fig.29 el plano horizontal tiene cota 3 y corta a la recta r en el punto I´(3).

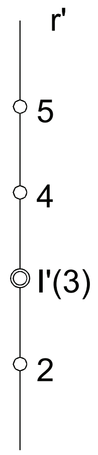


Fig.29

Punto de intersección de tres planos

En la fig.30 se tienen los planos α, β y σ. Para hallar su intersección se determinará primero la de los planos α y σ, obteniendo la recta r´. Posteriormente la intersección de los planos β y σ será la recta s´. El punto I´, de intersección de los tres planos, será la intersección de r´ y s´.

Otro procedimiento para la resolución sería determinar en primer lugar la intersección de dos de los planos α y β por ejemplo, y la recta obtenida incidirá sobre el tercer plano σ en el punto de intersección de los planos dados.

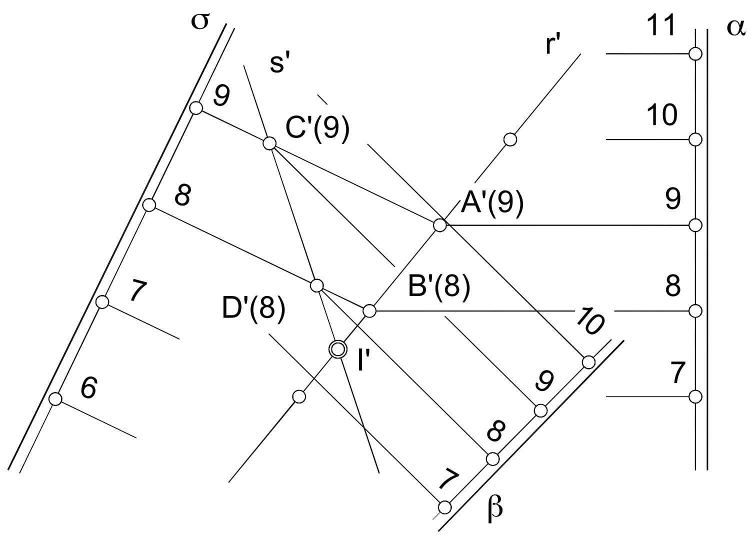


Fig.30

Recta que corta a otras tres dadas que se cruzan dos a dos en el espacio

Sean r´, s´ y t´ las rectas dadas. Por un punto de una cualquiera de ellas, por ejemplo el punto P´(2) de la recta t´, se traza un plano α que contenga a la recta r´.

Posteriormente por ese mismo punto se traza otro plano β que contenga a la recta s´.

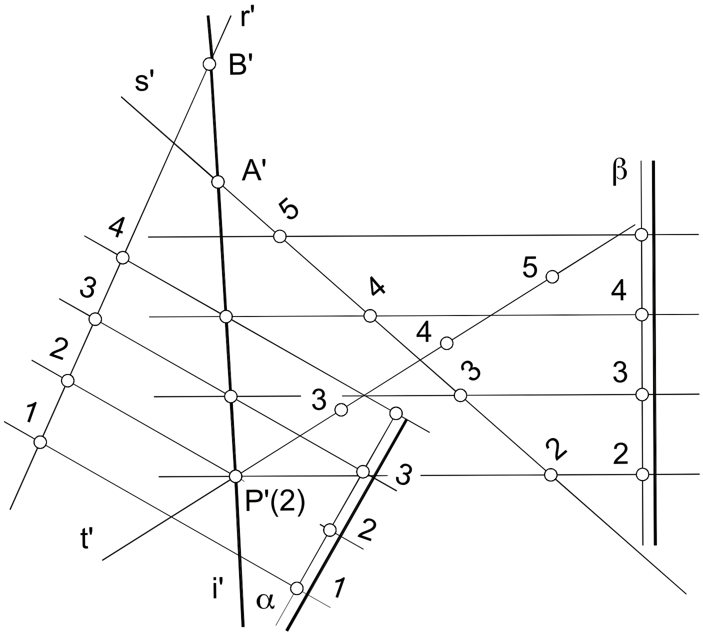


Fig.31

La recta i´ intersección de los planos α y β será la solución a este ejercicio. La recta i´ además de pasar por el punto P´(2) de t´, pasará por los punto A´ de s´ y B´ de r´.

Recta que corta a otras dos y es paralela a una tercera

Se debe encontrar una recta i´ que corte a las r´ y s´ y que sea paralela a la recta t´. Para resolver este ejercicio se determinarán dos planos que sean paralelos a la recta t´ y que a su vez contengan a las rectas r´ y s´. Para obtenerlos se toman los puntos A´(7) y B´(1) de r´ y s´ respectivamente. Por estos puntos se trazan las rectas u´ y v´ paralelas a la recta t´. Con las rectas u´ y r´ se obtiene el plano α y con las rectas v´ y s´ el plano β. La intersección de estos dos planos será la recta i´ solución.

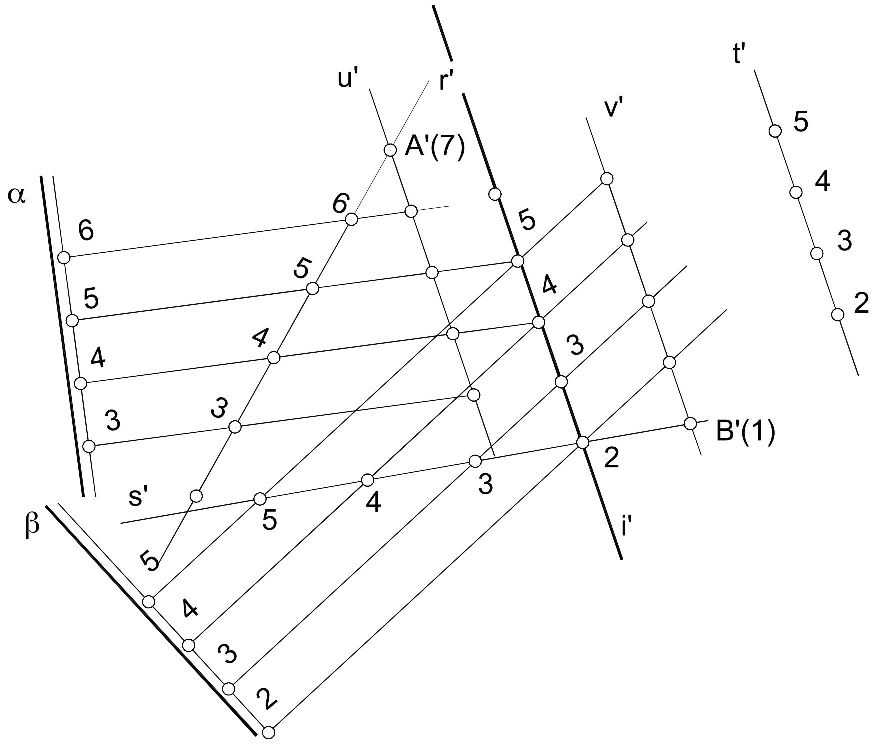


Fig.32

Tema 3

PARALELISMO, PERPENDICULARIDAD Y DISTANCIAS

PARALELISMO

Rectas paralelas

Dos rectas r y s son paralelas en el espacio si se cumple que:

1º. Sus proyecciones r´ y s´ son paralelas.

2º. Tienen el mismo intervalo.

3º. Están graduadas en el mismo sentido.

Como se ve en la fig.33 , las rectas r´ y s´, son paralelas puesto que cumplen las condiciones anteriores.

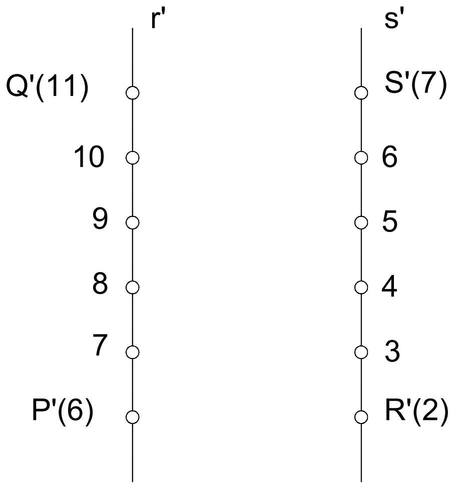


Fig.33

Planos paralelos

Dos planos paralelos cualesquiera tienen, sus l.m.p. paralelas, el mismo intervalo y estarán (están) graduadas en el mismo sentido. Como se ve en la figura 34, para trazar por un punto cualquiera A´(7) un plano paralelo al α dado, basta con trazar la horizontal de cota 7 paralela a las horizontales del plano α, y con un intervalo igual al del plano α trazar, con el mismo sentido, las restantes horizontales de plano. De esta manera se obtiene el plano β paralelo por el punto A´(7) al plano α.

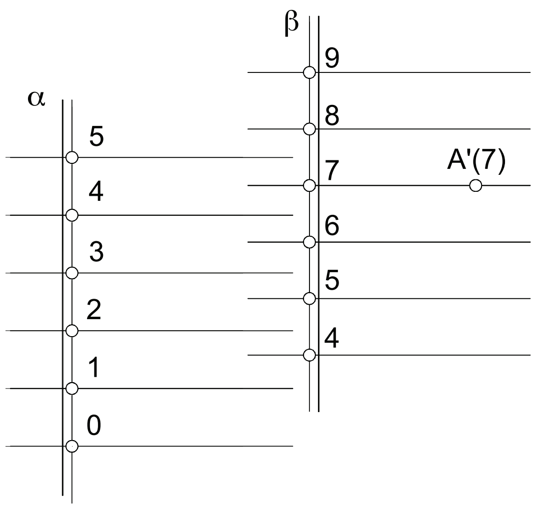


Fig.34

Recta y plano paralelos

Una recta s, dada por su proyección s´, es paralela a un plano α dado, cuando lo es a una recta r cualquiera de dicho plano. En la fig.35 puede verse que la recta s´ es paralela al plano α por serlo también a la recta r, del mismo. Obsérvese que la recta s tiene el mismo intervalo y el mismo sentido que la r´.

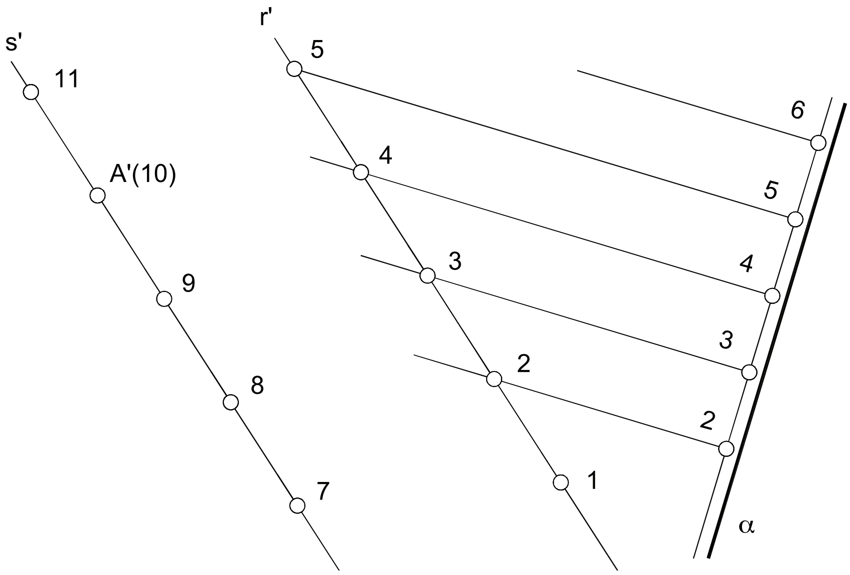


Fig.35

Como ejercicio complementario al paralelismo entre planos y rectas se trazará un plano paralelo, por una recta r´, a la recta s´. Para ello se hace pasar por un punto de r´, punto de cota 2, una recta m´ paralela a la recta s´. El plano α formado por las rectas r´ y m´ será paralelo a s´ por contener a la recta m´ paralela a su vez a s´.

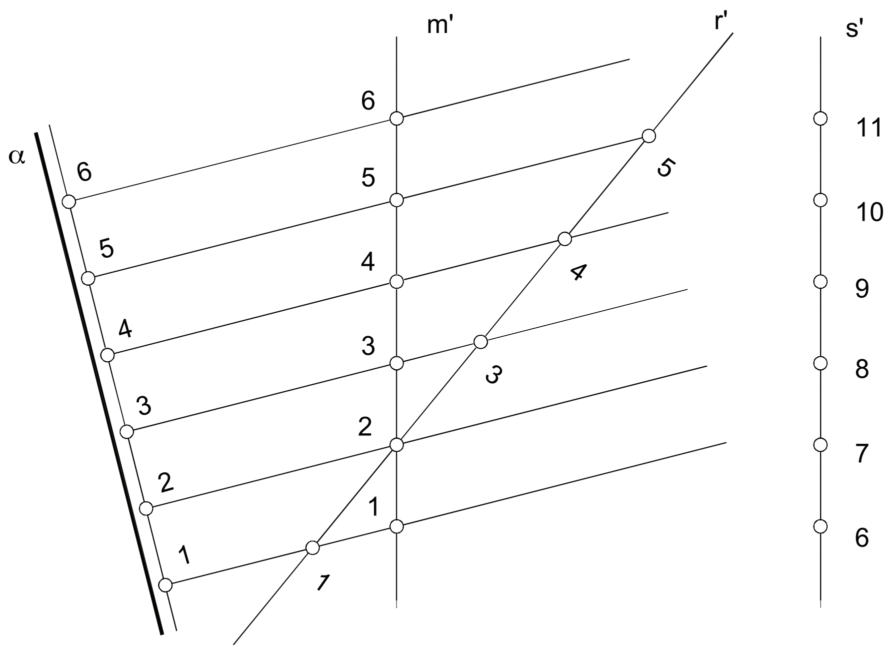


Fig.36

PERPENDICULARIDAD

Rectas perpendiculares

Teorema de las tres perpendiculares: Las proyecciones ortogonales de dos rectas perpendiculares en el espacio generalmente son dos rectas oblicuas entre si, excepto si alguna de estas dos rectas es paralela al plano del cuadro, en cuyo caso sus proyecciones serán perpendiculares.

Como se puede ver en la parte derecha de la fig.37 la recta s es perpendicular en el punto P a la recta horizontal r(1), y sus proyecciones también ya que como dice el teorema enunciado una de las rectas es paralela al plano de proyección.

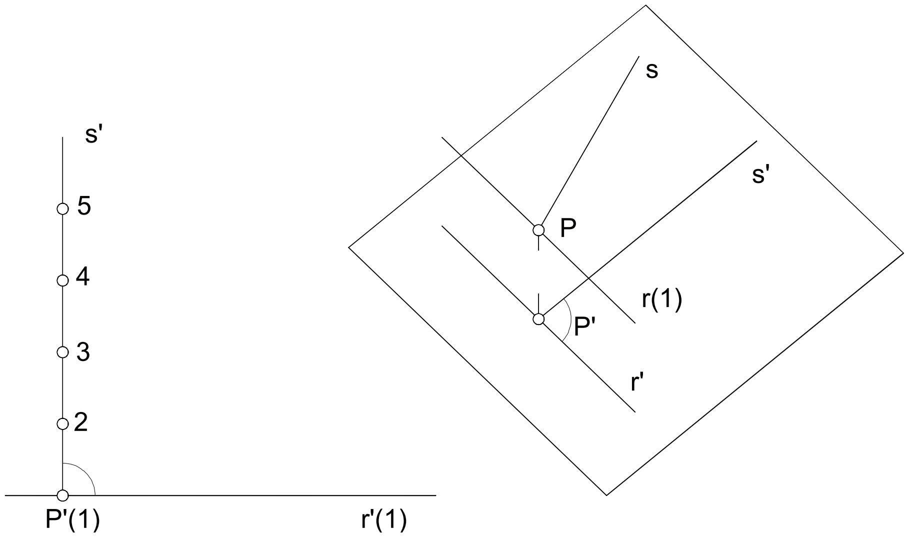


Fig.37

Recta perpendicular a un plano

Las pendientes de una recta y de un plano perpendiculares son inversas. Así mismo también lo son sus intervalos. Por lo tanto hallado uno se puede obtener el otro y viceversa.

En la fig.38 dado un plano α por su l.m.p. graduada, se toma por ejemplo un punto de cota 10. Por dicho punto se traza una perpendicular a la l.m.p. y se lleva 1 centímetro sobre ella, uniendo el extremo obtenido con el punto de cota 11, y trazando una perpendicular por dicho extremo a la recta obtenida, dicha perpendicular corta a la l.m.p. en un punto, quedando definidos en la construcción realizada los intervalos i_α del plano dado e i_r de la recta perpendicular.

Dado el punto A´(3) y como las proyecciones de la recta y de l.m.p. son paralelas, bastará con trazar una recta que pase por A´(3) y que sea paralela a la l.m.p. del plano α dado y graduada con el intervalo hallado gráficamente pero en sentido contrario al del plano.

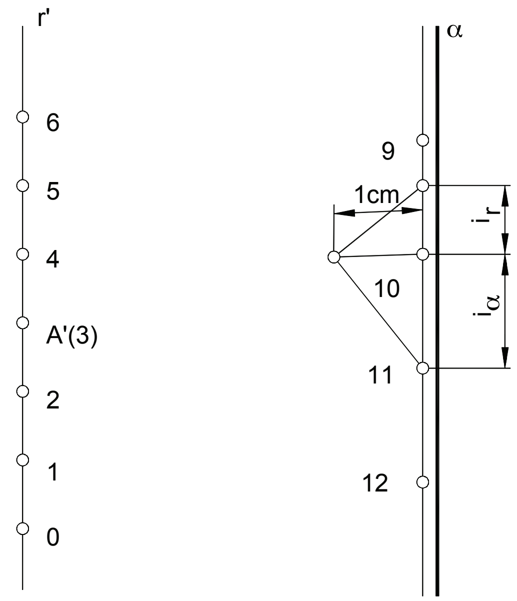


Fig.38

Plano perpendicular a una recta

Sea la recta r´ y A´(7) el punto por donde deberá pasar el plano buscado. Como se explicó en el caso anterior el intervalo del plano solución se hallará a partir del intervalo de la recta. Una vez hallado se hará pasar por el punto A´(7) la horizontal de cota 7 del plano, perpendicular a la proyección r´ de la recta. Posteriormente se traza la l.m.p., graduándola con el intervalo hallado, pero en sentido contrario al de la recta. Fig.39

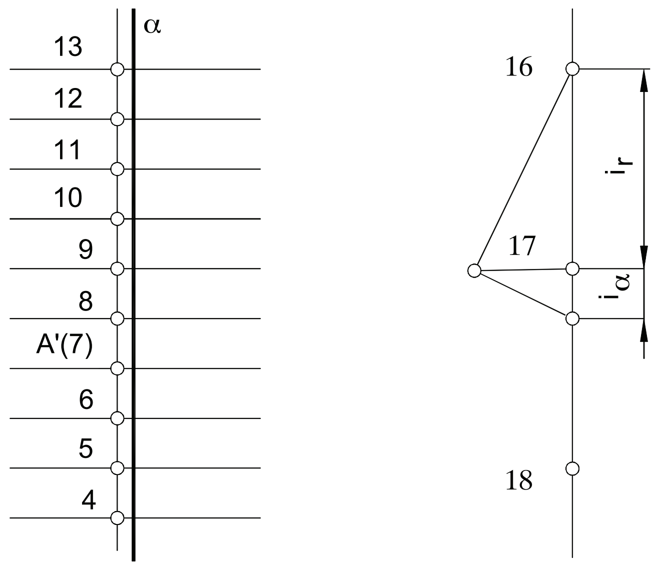


Fig.39

Recta perpendicular a otra recta dada

Sean el punto A´(5) y la recta r, fig.40. Por el punto A´(5) se trazará el plano α perpendicular a r´, obteniendo previamente el intervalo i_α del plano a partir, como se sabe, del intervalo de la recta r´. Posteriormente se determina la intersección de r´ con α, con la ayuda de un plano auxiliar β que contiene a la recta r´ y que se corta con el plano α según la recta i´, definida ésta por los puntos de intersección de las línea de cota 5 y 6 de ambos planos. La recta i´ corta a r´ en el punto I´(5.7), punto intersección de r´ y α. La unión de I´(5.7) y A´(5) define la recta s´ perpendicular por el punto A´(5) a la recta r´.

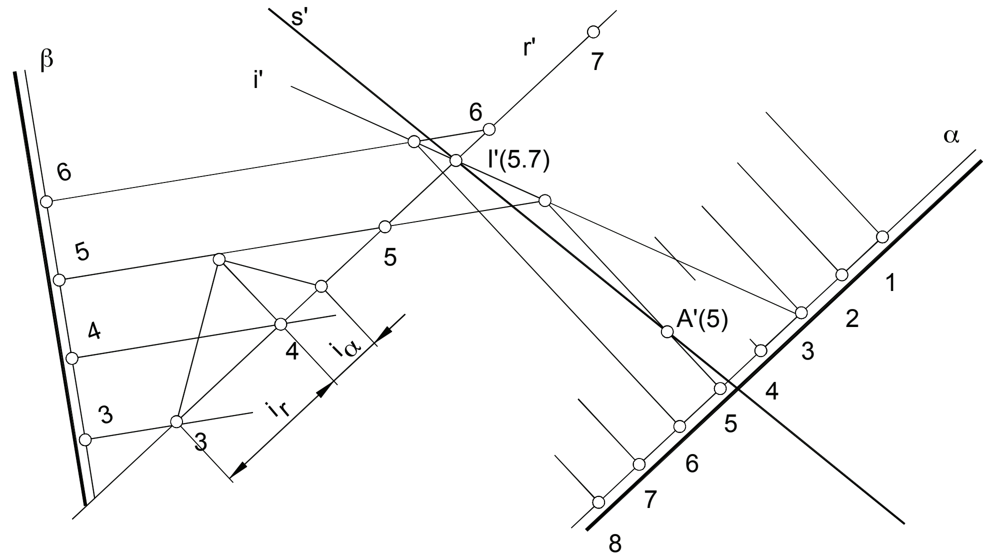


Fig.40

Plano perpendicular a plano

Sean el plano α y el punto A´(8). Por el punto A´ (8) se traza la recta perpendicular al plano α hallando su intervalo a partir del intervalo del plano α. Cualquier plano que contenga a la recta r´ será perpendicular al plano α dado. Fig.41

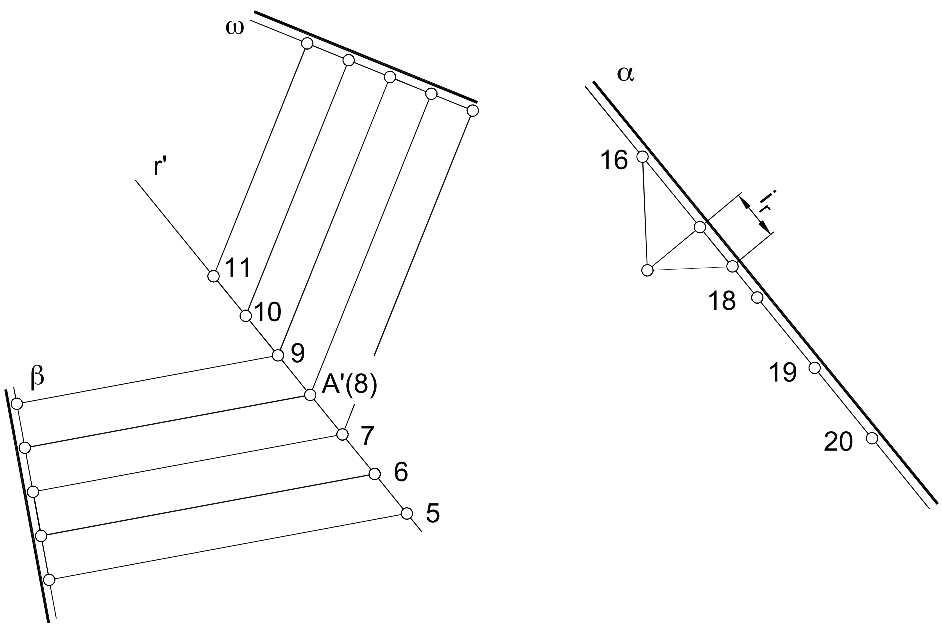


Fig.41

Plano que pasa por una recta y es perpendicular a otro plano

Sean la recta r´ y el plano α. Por un punto cualquiera de r´ , punto de cota 6 en la fig.42, se traza una recta s´ perpendicular a α de la forma indicada anteriormente. Uniendo los puntos de igual cota de r´ y s´ se obtiene un plano β que es perpendicular a α por contener a la recta s´ perpendicular a él y que, además, pasa por la recta r´ dada.

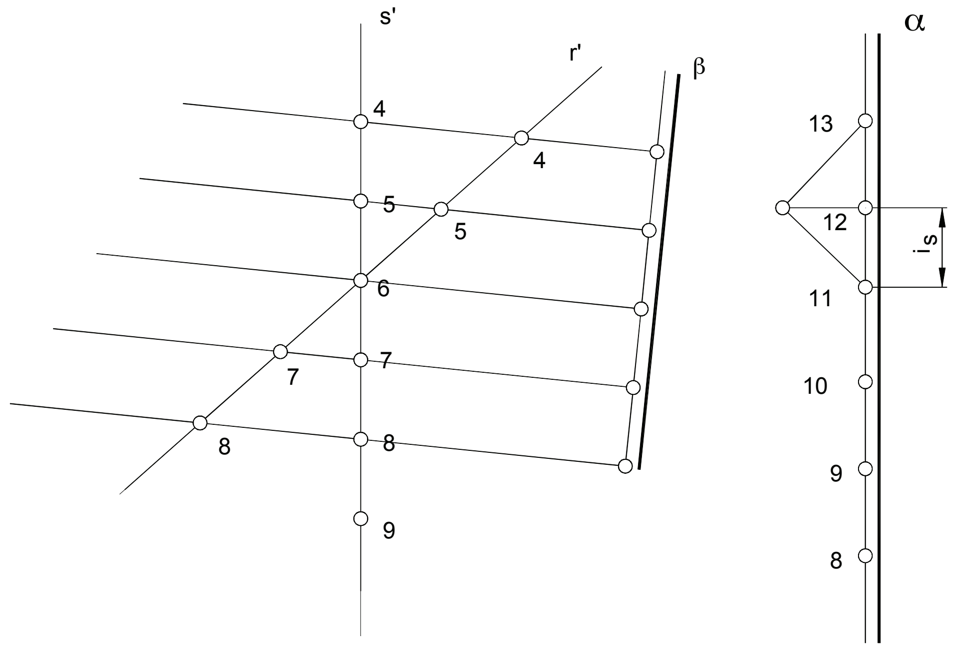


Fig.42

DISTANCIAS

Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos A´(1) y B´(5) de la fig.43, la distancia entre estos dos puntos es equivalente a la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos están definidos uno por la proyección del segmento que une ambos puntos, y otro por la diferencia de cotas entre ellos. El procedimiento general, pues, será el siguiente:

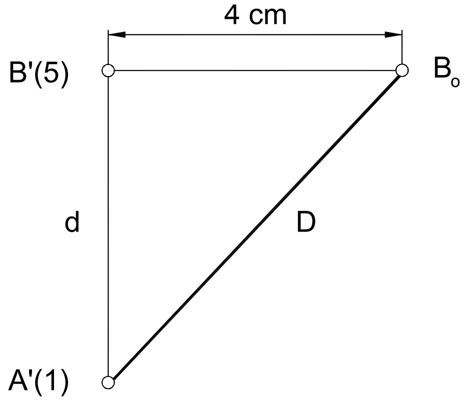


Fig.43

1º. Se traza la recta que une las proyecciones de los puntos dados.

2º. Por el punto de mayor cota se traza la perpendicular a la recta anterior, llevando sobre ésta la diferencia de cotas entre ambos puntos. Se han llevado cms. por considerar la unidad el metro y la escala 1:100.

3º. Se une el punto de menor cota A´(1) en este caso, con el extremo B_0, obteniendo así el segmento D que será la distancia entre ambos puntos en verdadera magnitud.

Distancia de un punto a un plano

El procedimiento general para hallar la distancia de un punto P a un plano α consiste en trazar la perpendicular por dicho punto al plano. La distancia entre el punto P y el de intersección de dicha perpendicular con el plano α será la distancia buscada.

En la fig.44 se tienen el plano α y el punto P´(8). Siguiendo los pasos arriba descritos se traza la recta r´ perpendicular al plano α . Para ello se determina el intervalo de dicha recta a partir del intervalo del plano. Para hallar el punto de intersección de la recta r´ con el plano α basta con seguir el procedimiento descrito en el apartado correspondiente. Para ello se traza un plano β que contenga a la recta r´. La intersección del plano α con el plano β determina la recta i´ que al cortarse con la recta r´ define al punto I´(3.6) buscado. Por lo tanto la distancia del punto P´(8) al plano α queda reducido a hallar la distancia del punto P´(8) al punto I´(3.6). Siguiendo el procedimiento ya conocido para hallar la distancia entre dos puntos se obtiene el segmento D, verdadera magnitud de la distancia del punto P´(8) al plano α.

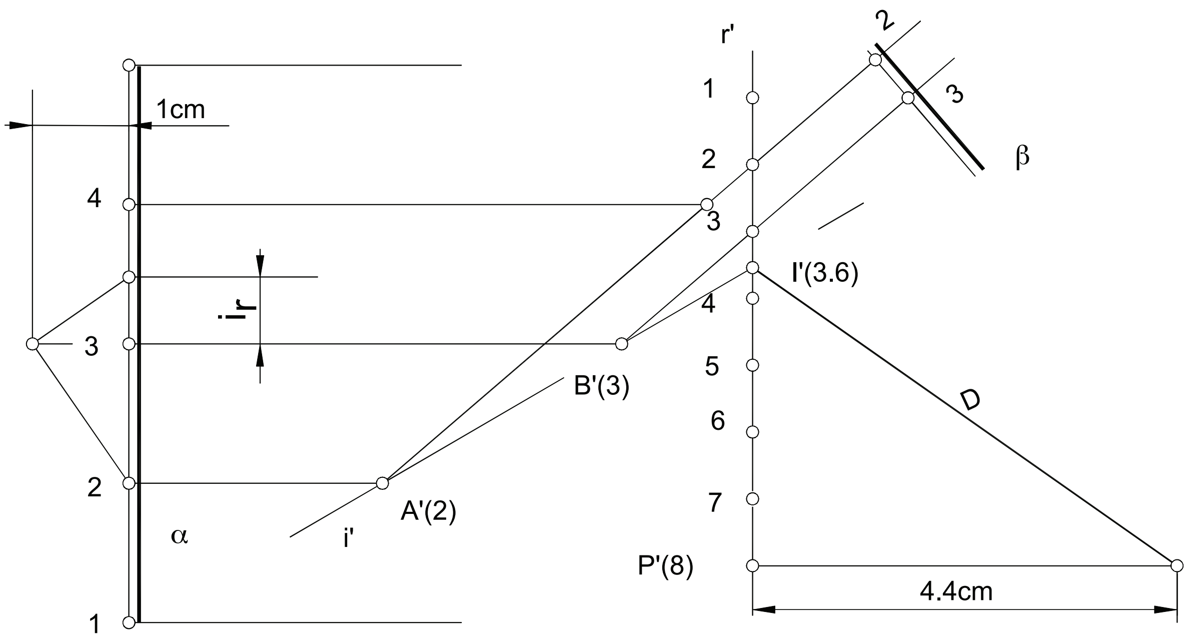


Fig.44

Distancia de un punto a una recta

El procedimiento general para resolver este caso consiste en hallar el plano que pasando por el punto P sea perpendicular a la recta r. Dicho plano cortará a la recta en un punto I. La distancia del punto P a la recta r queda reducido a hallar la distancia entre los puntos P e I.

En la fig.45, los datos son el punto P´(4) y la recta r´ . Por el punto P´(4) se traza un plano α perpendicular a la recta r´ . A continuación se halla la intersección de la recta r´ con el plano α obtenido, para ello se emplea otro plano auxiliar que contenga a la recta r´. La intersección de ambos planos será la recta i´. La intersección de la recta r´ con la i´ obtenida proporciona el punto I de cota 1.8. El desarrollo posterior ya se conoce pues se ha reducido el problema a distancia entre dos puntos.

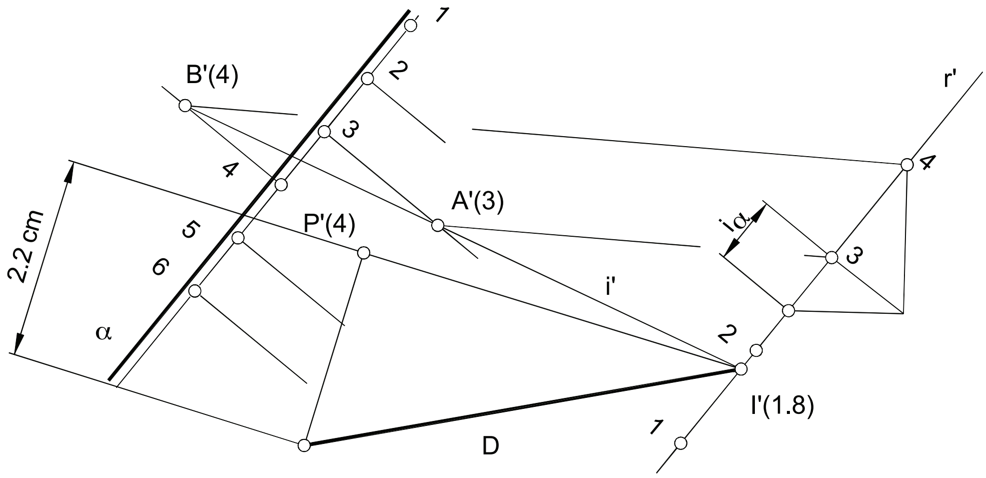


Fig.45

Distancia entre dos rectas paralelas

Para hallar la distancia entre dos rectas paralelas se trazará un plano perpendicular a dichas rectas. Este plano cortará a ambas rectas en sendos puntos. La distancia entre dos rectas paralelas queda reducida a hallar la distancia entre los dos puntos obtenidos.

Sean las rectas paralelas r´ y s´ de la fig.46. A partir del intervalo de las rectas, se obtiene el del plano α perpendicular a ambas, hallando a continuación los puntos de intersección de α con r´ y s´. Para hallar dichos puntos se toman dos planos auxiliares β y σ que contengan a las rectas r´ y s´ respectivamente. La intersección del plano α y el plano β determina la recta m´ que corta en E´(8.1) a la recta r´. Por otro lado el plano σ y el plano α se cortan según la recta n´, cortando a su vez esta recta en el punto F´(4.8) a la recta s´.

El paso final consiste en hallar la distancia entre los puntos E y F obtenidos.

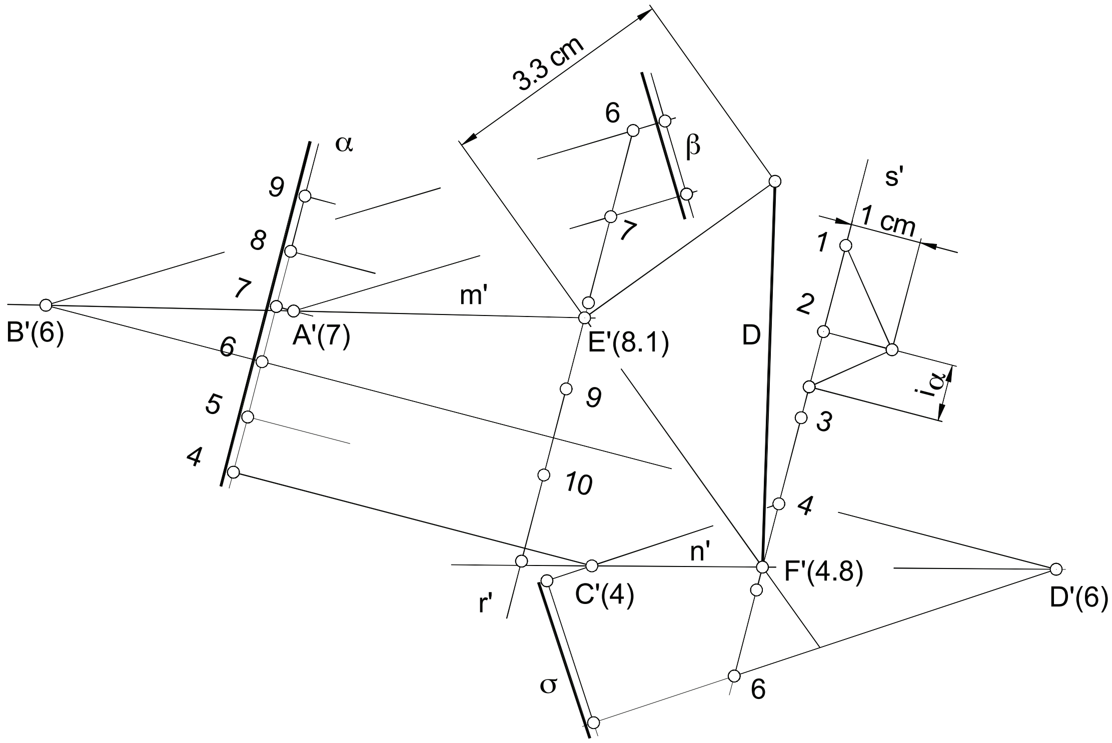


Fig.46

Distancia entre dos planos paralelos

Dados dos planos paralelos α y β de la fig.47. Para hallar la distancia entre ambos se trazará una recta r´ perpendicular a ambos y con un intervalo i_r que se obtiene a partir del intervalo de los planos. Se hallarán los puntos de intersección de la recta con los planos, con la ayuda de dos planos auxiliares σ y δ. Dichos puntos son E´ y F´. Hallando posteriormente la verdadera magnitud del segmento E´ y F´, como se ve en la figura, se obtendrá la distancia entre ambos planos en verdadera magnitud.

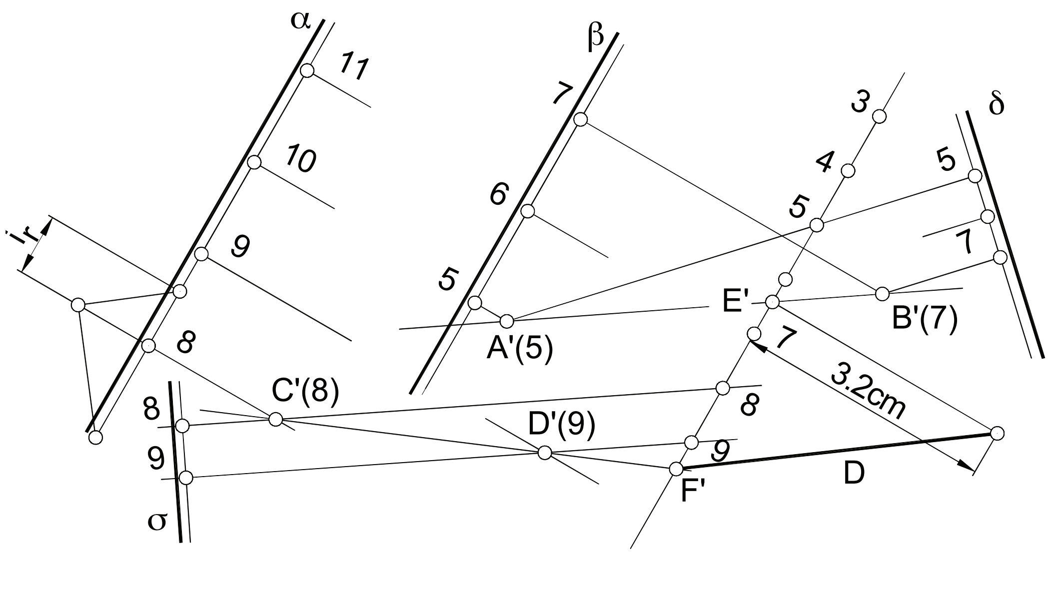


Fig.47

Mínima distancia entre dos rectas que se cruzan

Dadas las recta r´ y s´, fig.48, se toma un punto P´(10), cualquiera, de la recta r´. Por este punto se traza una recta t´ paralela a la recta s´. Las rectas r´ y t´ definen un plano α que es paralelo a s´. Tomando otro punto Q´(8) cualquiera de s´, se traza por él una perpendicular u´ al plano α que corta al mismo en el punto R´. Para hallar dicho punto se utiliza un plano auxiliar β que contiene a la recta u´. La intersección de α y β, recta i´, corta a la recta u´ en el punto R´. Por este punto se traza una recta v´ paralela a la recta s´. Esta recta v´ corta a la recta r´ en el punto F´. Por este último punto se traza una recta paralela a la u´ que corta a la recta s´ en el punto E´. Por lo tanto el segmento F´-E´ será la mínima distancia, entre las rectas r´ y s´. Para hallar la verdadera magnitud de este segmento, se determinarán las cotas de los puntos E´ y F´ y proceder como ya se ha explicado anteriormente.

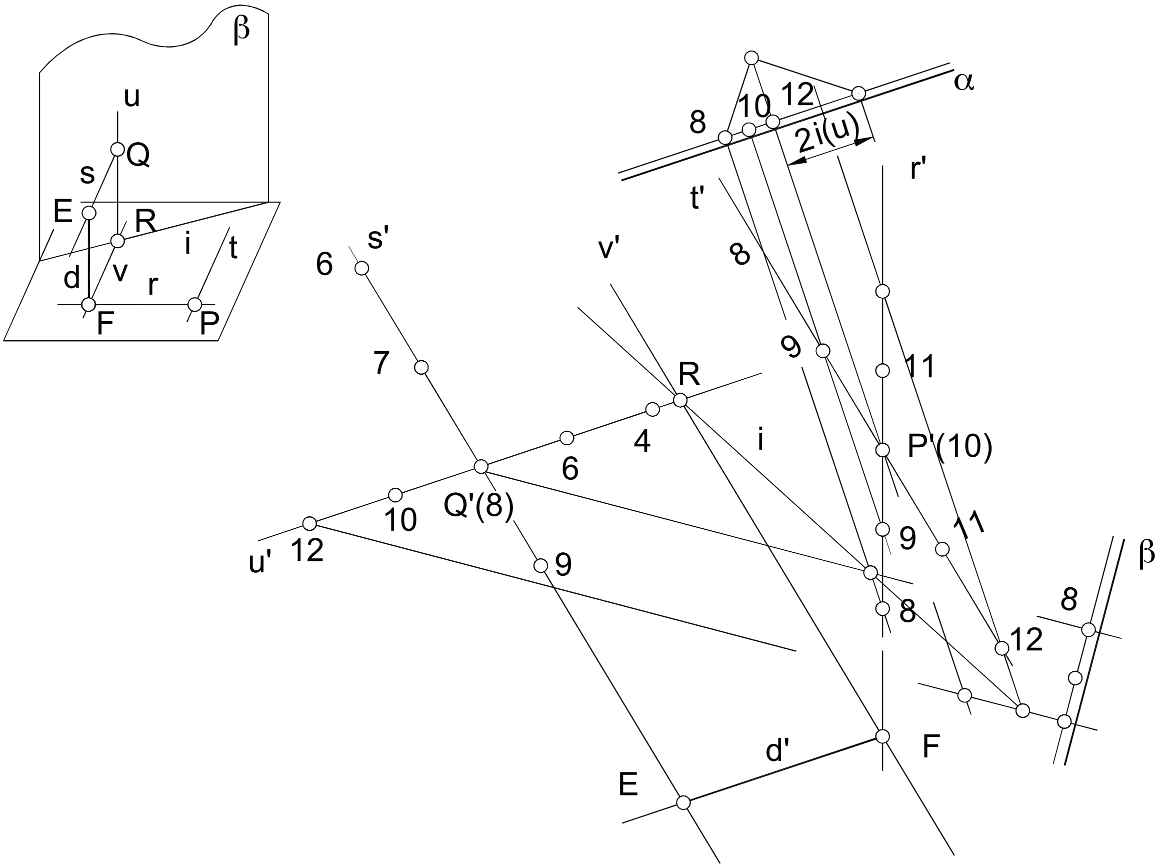


Fig.48

Tema 4

ABATIMIENTOS, ÁNGULOS, GIROS Y TRIEDROS

ABATIMIENTOS

Abatimientos del punto, recta, plano y figura geométrica

Sea el plano α dado por su l.m.p. graduada, fig.49. La horizontal de cota 0 será la traza del plano α con el plano del cuadro. Para abatir este plano bastará con abatir un punto cualquiera del mismo. Sea por ejemplo el punto A´(3) que pertenece a un triángulo contenido en el plano α. A partir del punto A´(3) se llevan 3 centímetros sobre la horizontal de cota 3, obteniendo el punto E´. A continuación se une E´ con el punto de intersección D´(0) de la perpendicular por A´(3) a la traza α_0 del plano. Trazando ahora un arco de radio D´-E´, cortará en A(0) a la recta A´(3)-D´(0). El punto A(0) es el abatido del punto A´(3), y por él pasará la horizontal de cota 3 abatida, que será paralela a las horizontales de plano.

Para abatir cualquier figura del plano, basta con repetir este proceso para todos los puntos de la figura, sabiendo que una recta queda abatida cuando se abaten dos de sus puntos. No obstante existe una forma más rápida una vez hallado el abatimiento del plano α. Este método esta basado en la relación de afinidad que existe entre un conjunto de puntos de un plano y sus abatidos. Una relación de afinidad queda definida cuando se conocen sus elementos:

1º. Eje de afinidad E_a.

La traza α_0 del plano.

2º. Dirección de afinidad D_a.

La perpendicular a la charnela, que une un punto cualquiera con su abatido.

3º. Dos puntos afines.

El punto A´ y su abatido A_0.

Para abatir el triángulo dado, se abaten los vértices B´(2) y C´(1) restantes, apoyándose para ello en las rectas r´ y s´ que los contienen.

La recta r´ corta a la charnela (Eje de Afinidad) en el punto doble G´. Su abatida por lo tanto pasará por dicho punto y por el abatido A_0 del punto A´(3). El punto C_0 abatido del punto C´(1) además de estar sobre la r_0 estará sobre la paralela a la dirección de afinidad trazada por el punto C´(1). Luego el punto de intersección de ambas rectas será el abatido C´(1).

Para hallar el abatido del punto B´(2) se procede de forma similar abatiendo la recta s´ que lo contiene. Dicha recta corta a la charnela en el punto doble F´, y pasa por el punto C´(1), luego su abatida pasará por F´ y por C_0. El punto B_0 abatido del B´(2) se halla en la intersección de s_0 con la paralela a la dirección de afinidad trazada por B´(2).

Luego se ha logrado abatir el triángulo contenido en el plano α al abatir sus tres vértices. En dicho abatimiento se observa el triángulo A´B´C´ en verdadera magnitud.

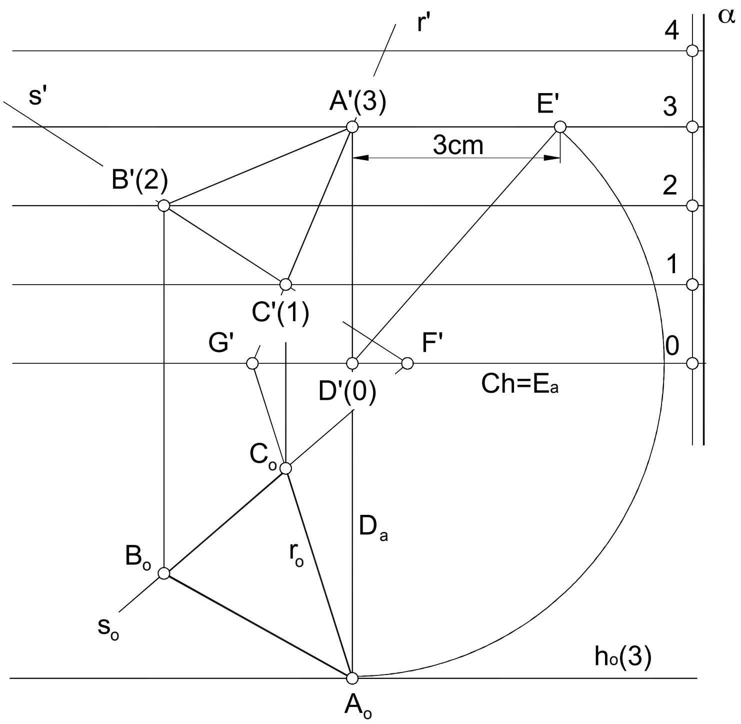


Fig.49

Elevación de una figura plana

Es el proceso inverso al de abatir. Partiendo de una figura dada en verdadera magnitud en el abatimiento se pide obtener la figura en proyección. Para ello y como punto de partida se da un punto en proyección de la figura abatida.

En la fig.50 se tienen los puntos A_0, B_0, C_0 y D_0, vértices de un cuadrilátero abatido. Además se da el punto A´(4) proyección del punto A y la traza α_0 del plano α con el plano del cuadro. Como se sabe que las horizontales del plano son paralelas a la traza del mismo, por el punto A´(4) se podrá trazar una horizontal de cota 4 que será paralela a la traza α_0 de plano. A partir de aquí se podrá obtener la l.m.p. graduada de α.

Como se aprecia en la figura los lados del cuadrilátero abatido son las rectas r_0, s_0, t_0 y u_0 también abatidas. La recta r_0 corta a la charnela en el punto H´ y pasa por el punto A_0 por lo que la recta r´ además de pasar por el punto A´(4) pasará por el punto doble H´. Trazando ahora una paralela por D_0 a la dirección de afinidad definida por los puntos A´(4) y A_0, se obtiene el unto D´ en la intersección de esta recta con la r´. Procediendo de forma similar con los puntos C_0 y D_0, se obtendrán los vértices en proyección del cuadrilátero.

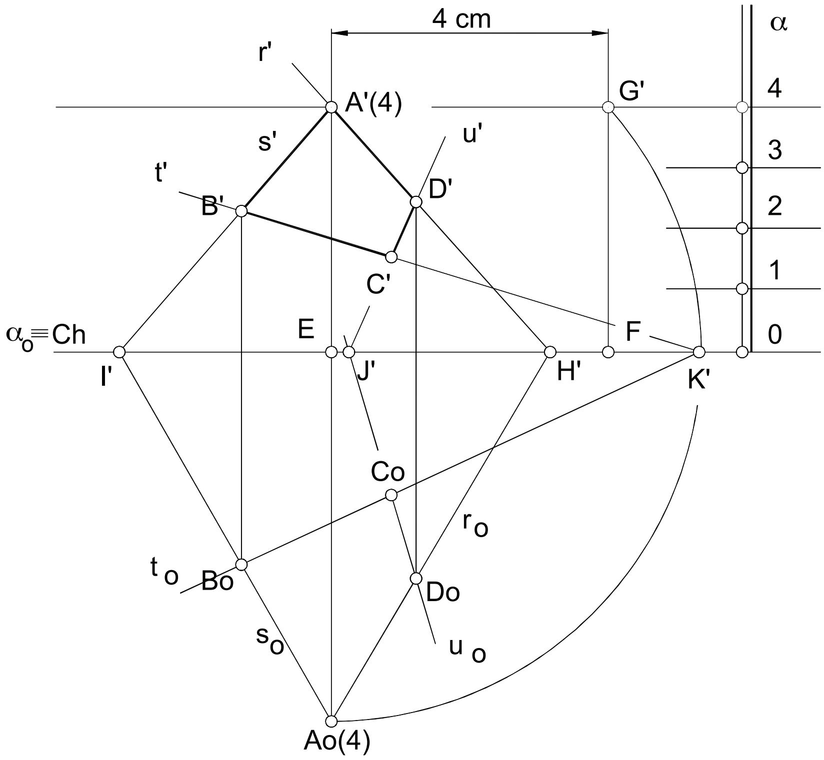


Fig.50

Elevación de una circunferencia determinando los ejes de la proyección

Aplicación

Para hallar la proyección acotada de una circunferencia de 4 cm. de radio, cuyo centro O tiene 4 cm. de cota y sabiendo que la distancia entre la proyección O´ del centro y su abatido O_0 es de 8cm., se procederá de la siguiente manera. Se sitúan los puntos O´(4) y O_0 a una distancia de 8cm., y con centro en O_0 se traza la circunferencia abatida. Sobre la perpendicular a O´-O_0, se toma el segmento O´- P de 4 cm. de longitud. La mediatriz del segmento O_0 - P corta en I a O´-O_0. Por este punto I, que tiene de cota 0, pasa la traza del plano que contiene a la figura. Es decir, lo que se ha hecho es proceder de forma inversa de como se ejecuta el abatimiento. Por lo tanto el plano α que contiene a la figura queda determinado, pues se conoce la horizontal de cota 0 que pasa por I y es perpendicular a O´-O_0 , y la horizontal de cota 4 que es paralela a la anterior y pasa por O´(4).Se desabatirán los ejes sabiendo que el eje horizontal de extremos B_0 y D_0 tiene la misma magnitud en proyecciones al tratarse de una recta horizontal, luego los extremos B_0 y D_0 se desabaten directamente según los puntos B´ y D´ respectivamente. Los extremos A_0 y C_0 del otro eje se desabaten por afinidad obteniendo los puntos A´ y B´. A partir de aquí se construirá la elipse.

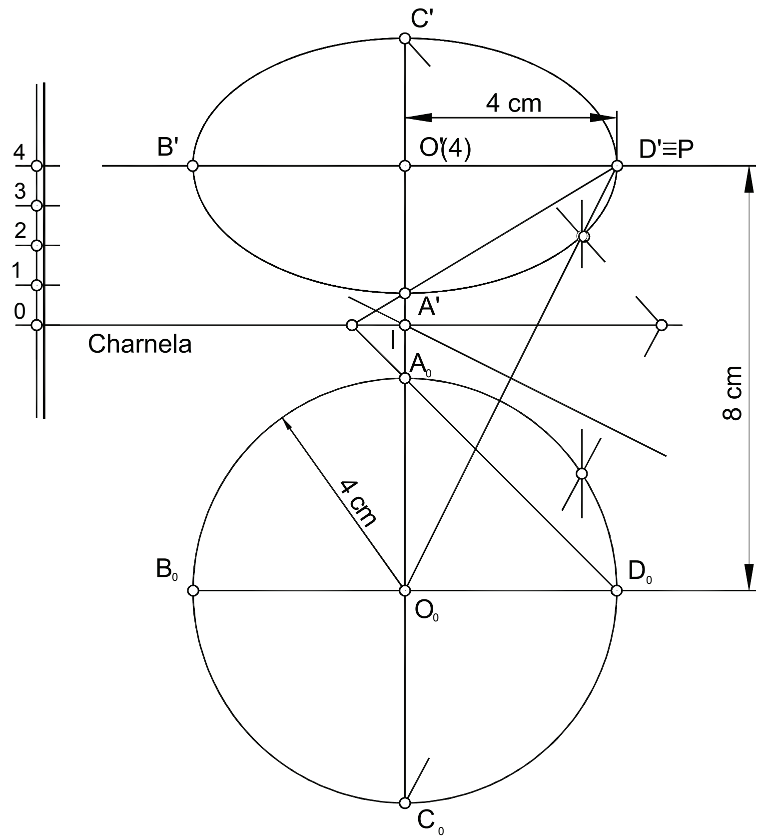


Fig.51

Ejercicios

1º.Determinar la proyección acotada de un pentágono regular de 25 mm de lado y con uno de sus lados situado en el plano del cuadro. Se sabe, además, que una de sus diagonales de menor pendiente forma 30º con su proyección. Determinar, también, el ángulo que con el plano del cuadro forma el plano que contiene al polígono.

Partiendo del pentágono abatido, se toma la diagonal d_0 de extremos B_0-E_0, cuyo valor es de 40 mm.. En la parte inferior izquierda de la figura 52 se muestra la condición de que -d- forme 30º con d´. Como consecuencia de esto, el vértice E´, extremo de la diagonal -d-, tendrá una cota de 20 mm.. Por lo tanto, por B´ se traza un arco de radio igual a d´ que corta a la perpendicular a α_0 por E_0 en E´. Los vértices C´ y D´ se obtendrán por afinidad.

El plano α que contiene al pentágono queda definido al conocer la horizontal de cota 0 y la de cota 2 y abatiendo su l.m.p. se observa que el ángulo que forma el plano α con el del cuadro es de 60º.

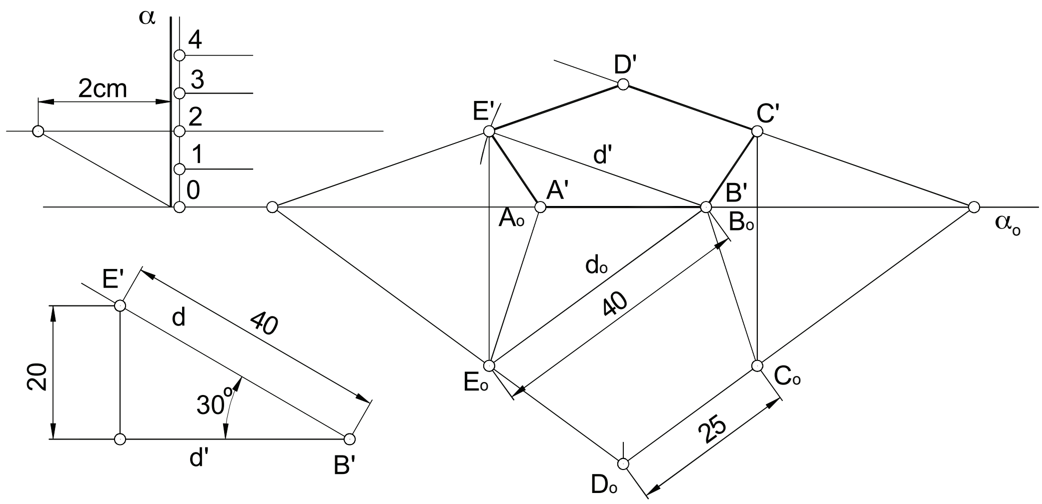


Fig.52

2º. La diagonal mayor de un rombo mide 6 cm. y se reduce, en proyecciones, a 5 cm. formando 45º con la traza α_0 del plano que lo contiene. Determinar la proyección acotada del rombo si la otra diagonal mide 4 cm.

Con los datos del problema, se sitúa el rombo abatido y colocándolo con un vértice en la traza α_0 del plano que lo contiene. Como la diagonal mayor, recta r_0, se proyecta según un segmento de 5 cm, por el punto doble C´(0) se traza un arco de radio 5 cm., que corta en A´ a la perpendicular por A_0 a la charnela. La cota del punto A´ se calcula así:

$$\begin{cases}\cos\varepsilon = \dfrac{5}{6} = 0.833 \qquad \varepsilon = 33^{\circ}30' \end{cases} \quad ; \quad z = 5\operatorname{tg}\varepsilon = 3.3$$

A partir de aquí se puede representar el plano como se muestra en la fig.53. A continuación se determina O´(1.65) proyección del punto medio O_0 de la diagonal mayor. Los puntos B´(0.55) y D´(2.75) extremos de la otra diagonal se obtienen por afinidad.

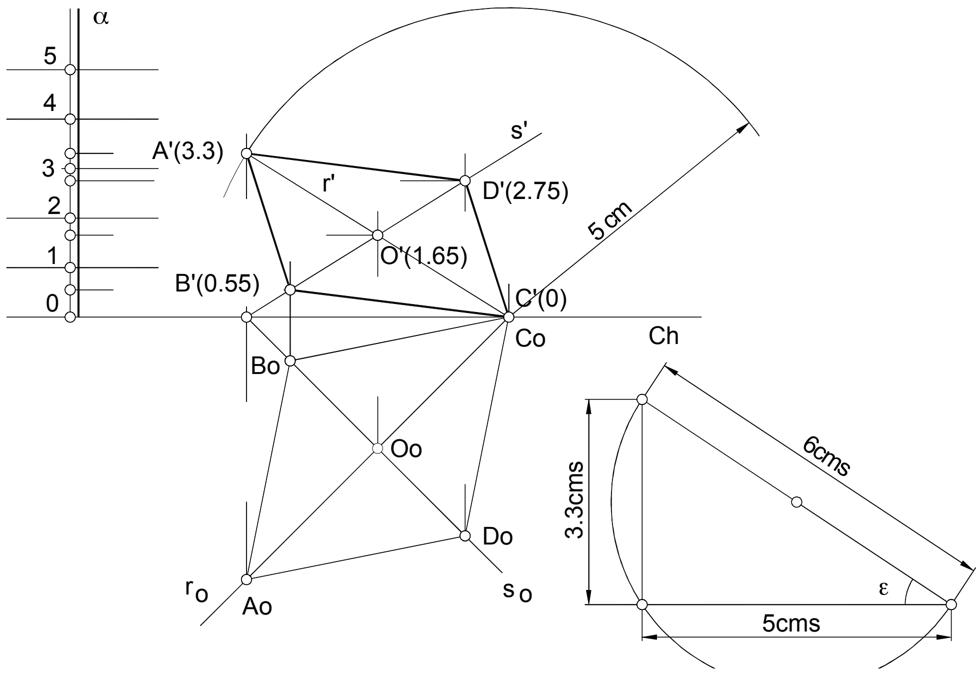


Fig.53

3º. Un cuadrado de lado 30 mm se encuentra situado en un plano que forma 60º con el cuadro. El vértice B tiene 3 cm. de cota y el C, 4 cm.. Obtener su proyección indicando las cotas de A y D.

En primer lugar se determinará el plano α cuyo intervalo será, según la fórmula ya mencionada anteriormente:

$$I = 1/p = 1/tg60º = 0.58cm.$$

Una vez representado el plano, se sitúa en él el punto B´(3) y se abate al igual que la horizontal de cota 4. Por B_0 se traza un arco de radio igual al lado del cuadrado que corta a $h_0(4)$ en el punto C_0 abatido del vértice C´. A partir de B_0 y C_0, se traza el cuadrado en el abatimiento y posteriormente se obtiene su proyección por afinidad.

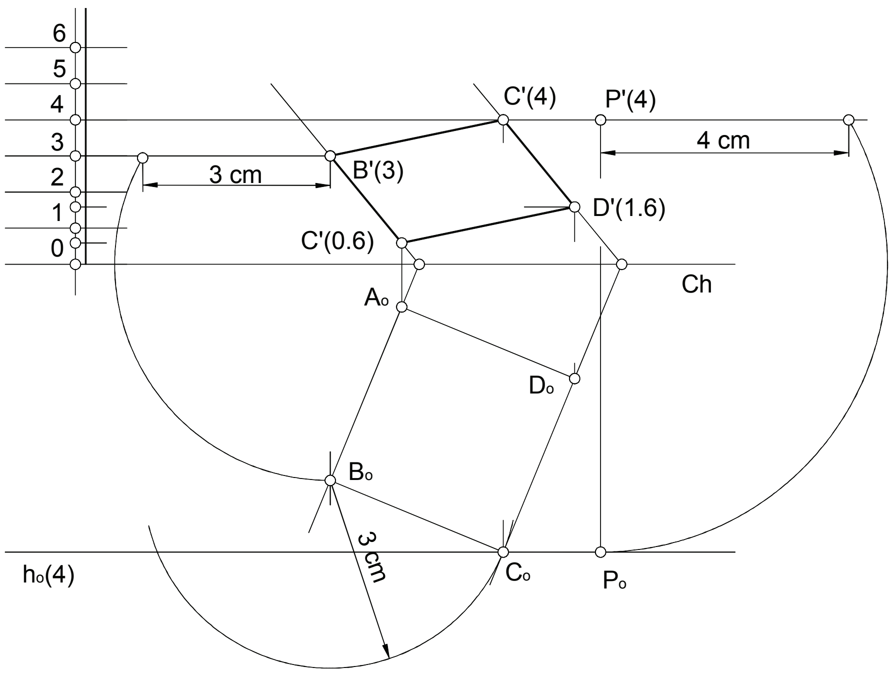


Fig.54

4 º. Dado un plano de pendiente 2/3, hallar la proyección de un triángulo equilátero en él situado. Se sabe, además, que un vértice tiene de cota 3 cm. y otro 4 cm.; el lado del triángulo mide 6 cm.

Una vez representado el plano, obteniendo el intervalo a partir de la pendiente se sitúa en él el punto A´(3). Se abate dicho punto y a partir de él se dibuja el triángulo en el abatimiento. Procediendo de forma análoga al ejercicio anterior se obtiene la proyección del triángulo.

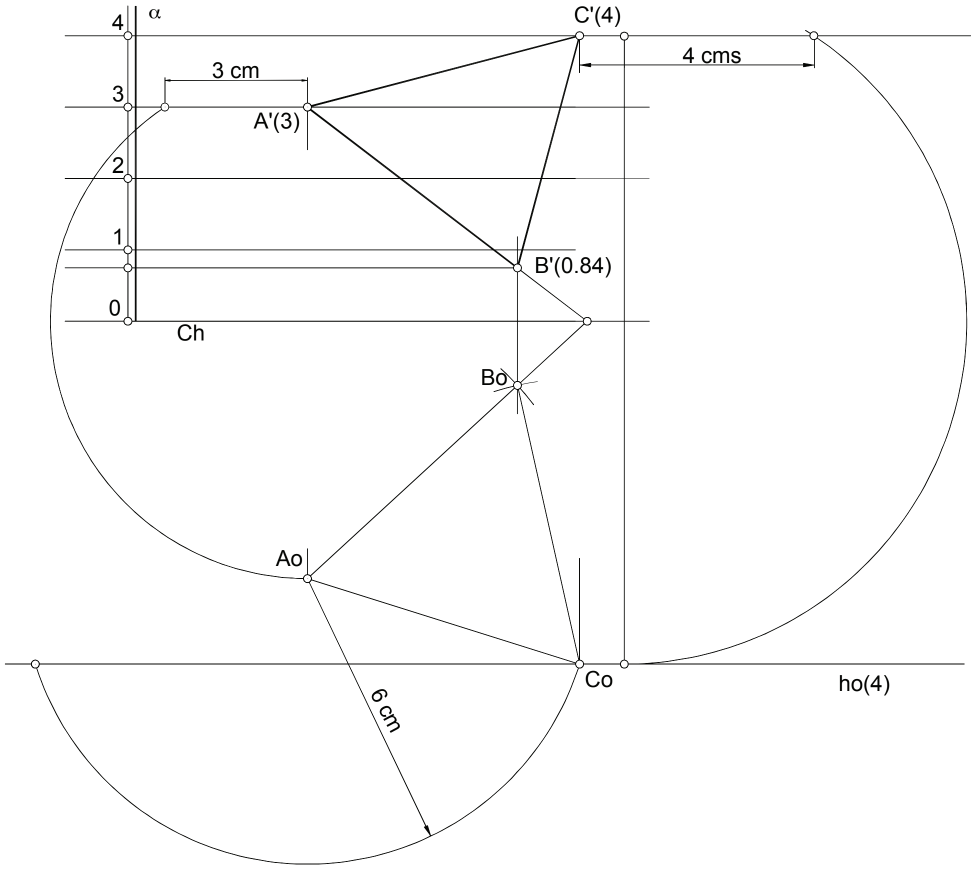


Fig.55

Distancia de un punto a una recta por abatimientos

La distancia de un punto a una recta será el segmento determinado por dicho punto y el de intersección de la recta perpendicular por él a la recta dada.

Sean un punto P´(9) y la recta r´, ambos determinan un plano, definido por su l.m.p. graduada. Para trazar la recta perpendicular por P´(9) a la recta r´ se procederá abatiendo el punto y la recta citados sobre un plano paralelo al del cuadro, utilizando como charnela la horizontal de cota 8. Para abatir la recta r´ basta abatir uno de sus puntos, punto A´(9). El otro punto por el que pasará la recta abatida será el punto doble de cota 8. De esta forma se obtienen el punto P_0 y la recta r_0. Ahora sólo resta trazar la perpendicular por P_0 a r_0 que corta a ésta en el punto Q_0. El segmento P_0-Q_0 será la distancia en verdadera magnitud, D_0, del punto a la recta. Desabatiendo el punto Q_0 se obtiene el punto Q´ que unido con el P´(9) determina la distancia D´, en proyección, del punto a la recta dados.

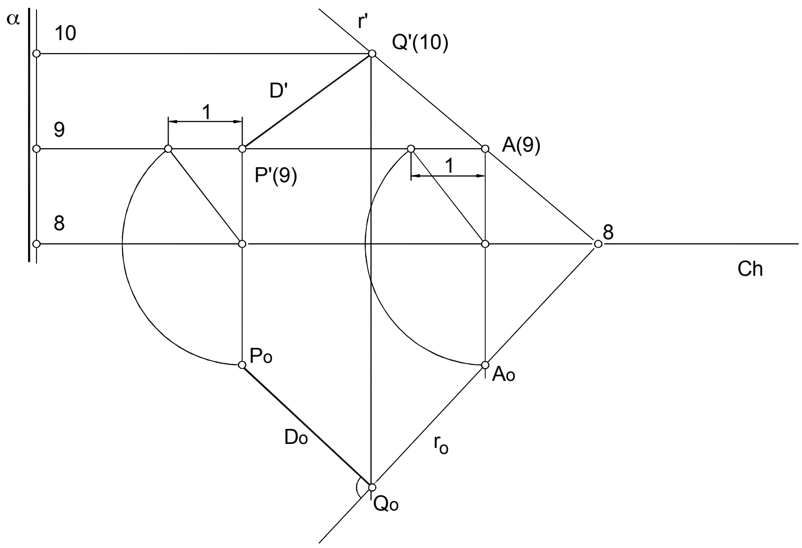


Fig.56

ÁNGULOS

Ángulo de dos rectas que se cortan

Sean las rectas r´ y s´ que se cortan según el punto P´(10). Ambas rectas definen un plano α. Si se abate dicho plano y con él las rectas r´, y s´, se obtendrán las rectas r_0 y s_0 abatidas. En este abatimiento se observa, en verdadera magnitud, el ángulo β que forman las rectas r y s en el espacio.

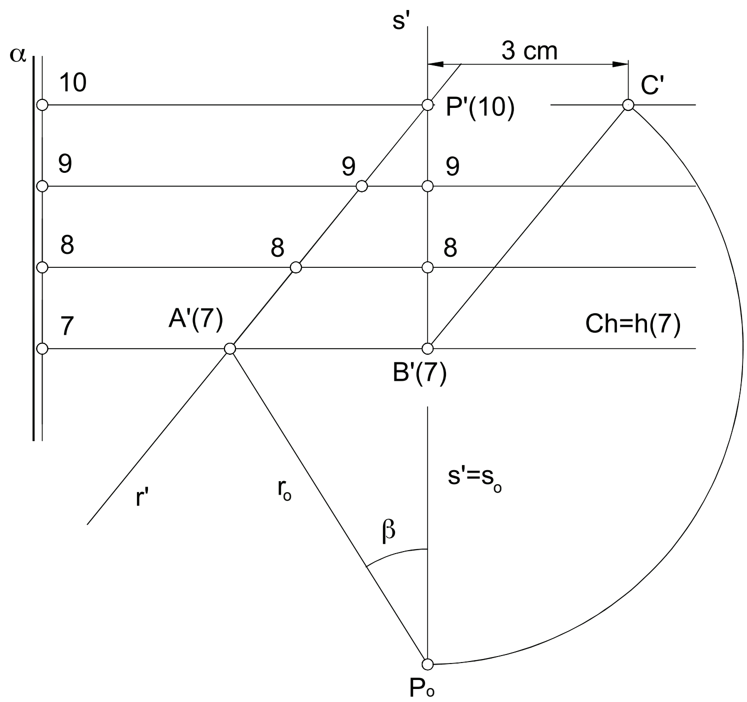


Fig.57

Ángulo de recta y plano

Como se aprecia en la representación espacial de este ejercicio en la parte inferior derecha de la figura 58, hay dos formas de resolución. Bien hallando el ángulo α directamente, o determinando el ángulo β que como se ve es su complementario.

A continuación se resuelve el segundo de los casos, dejando el otro método para que se resuelva como práctica.

Dado el plano σ por su *l.m.p.* y la recta r´ graduada. Por el punto P´(4) de r´ se traza una recta s´ perpendicular al plano σ, hallando su intervalo a partir del intervalo de dicho plano. Las rectas r´ y s´ definen un plano ε **.** Abatiendo este plano y con él las recta r´ y s´, se obtienen las rectas r_0 y s_0 que definen al ángulo β. Como se dijo anteriormente el ángulo β es complementario del ángulo α buscado.

En la figura el valor del ángulo α se obtiene gráficamente.

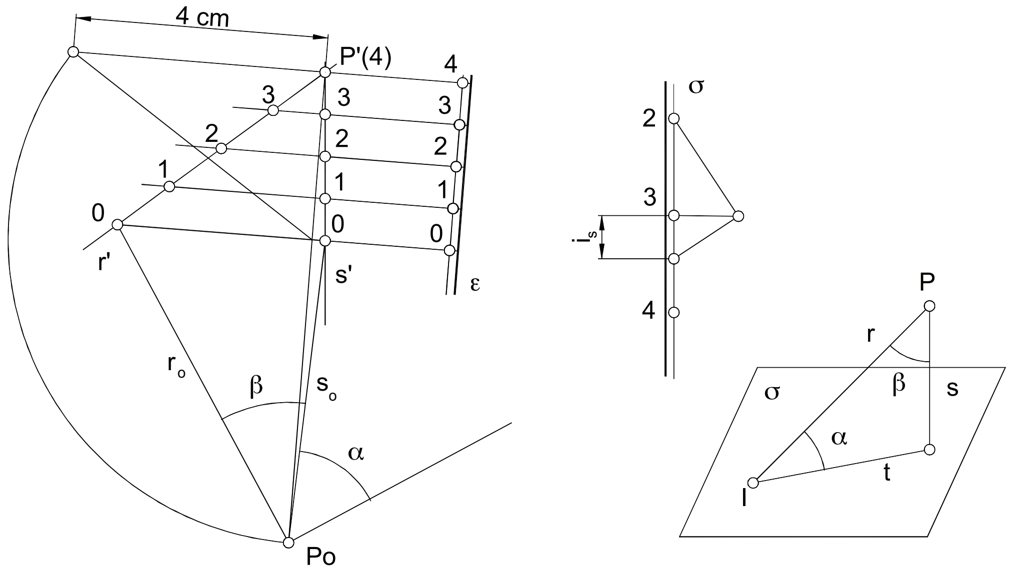


Fig.58

Ángulo de dos planos y planos bisectores

Como en el caso anterior existen dos métodos de resolución. El primero consiste en trazar un plano perpendicular a la recta de intersección de los planos dados.

La intersección de este plano con los otros dos dados determina dos rectas. El ángulo definido por estas rectas es el mismo que el que forman los planos dados.

El segundo método consiste en trazar por un punto cualquiera dos rectas perpendiculares a los planos dados. Estas dos rectas así obtenidas forman un determinado ángulo. El suplementario de dicho ángulo será el buscado.

En la fig.59 se representan los planos α y β. Se halla la recta de intersección i´ de dichos planos. A continuación se traza un plano σ perpendicular a la recta i´ hallando su intervalo a partir del intervalo de i´. Este plano σ corta a los planos α y β según las rectas r´ y s´ respectivamente. Estas rectas se cortan en el punto P´(3). Abatiendo el plano σ y con él las rectas r´ y s´, utilizando para ello la horizontal de cota 1, se obtienen las rectas r_0 y s_0 que se cortan en el punto P_0 abatido del P´(3). El ángulo ε que forman dichas rectas será el que formen los planos α y β dados.

Los planos bisectores de los dos dados, están formados por la recta i´ y por las bisectrices de los ángulos ε y δ. Dichas bisectrices se obtienen en el abatimiento de las rectas r´ y s´, donde los ángulos ε y δ se encuentran en verdadera magnitud. Las bisectrices de los ángulos son las rectas m_0 y n_0. Desabatiendo estas rectas se obtienen sus proyecciones m´ y n´ respectivamente que junto con la i´ forman los dos planos π y μ solución.

En las figuras siguientes se muestra, gráficamente lo explicado.

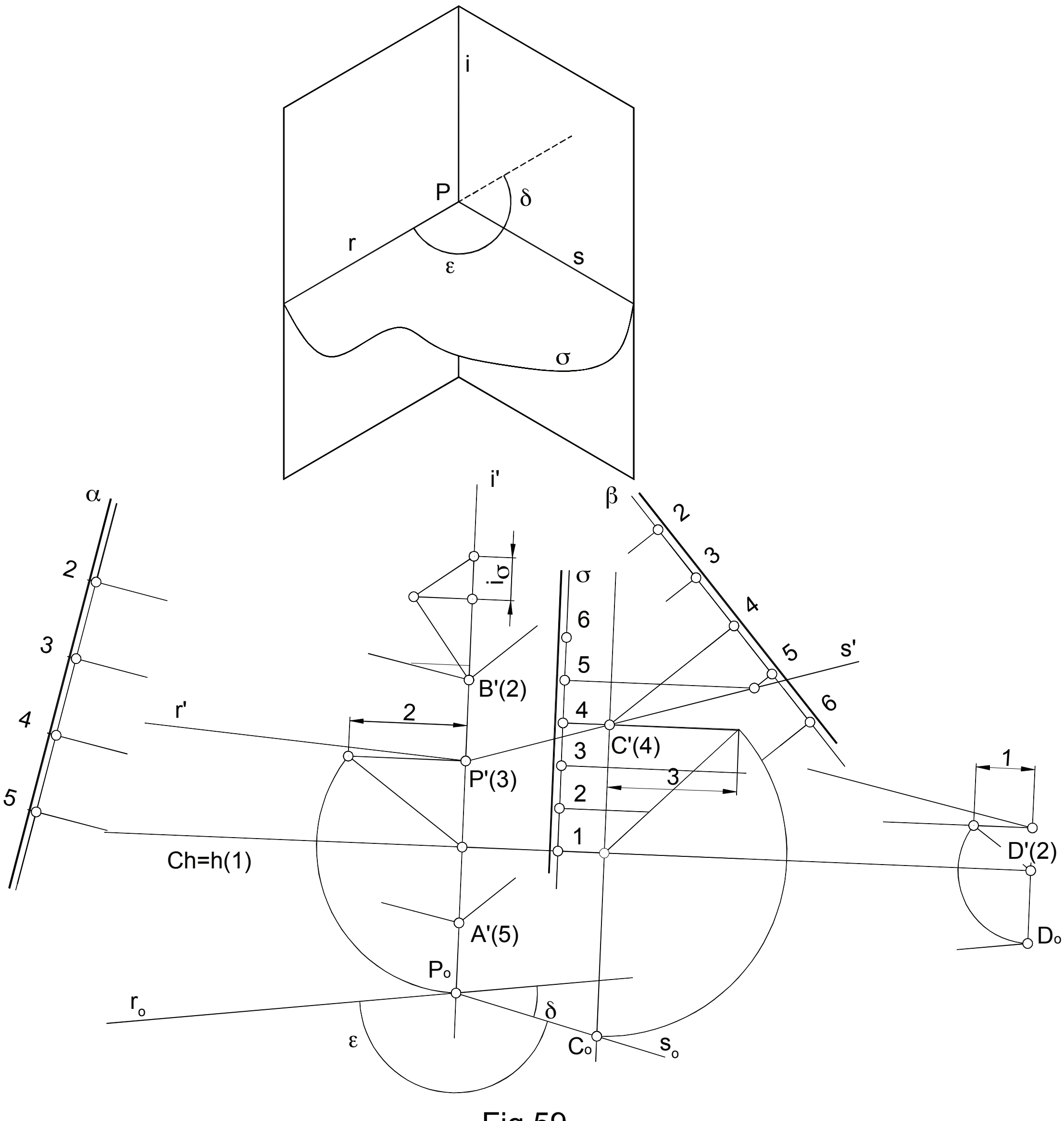
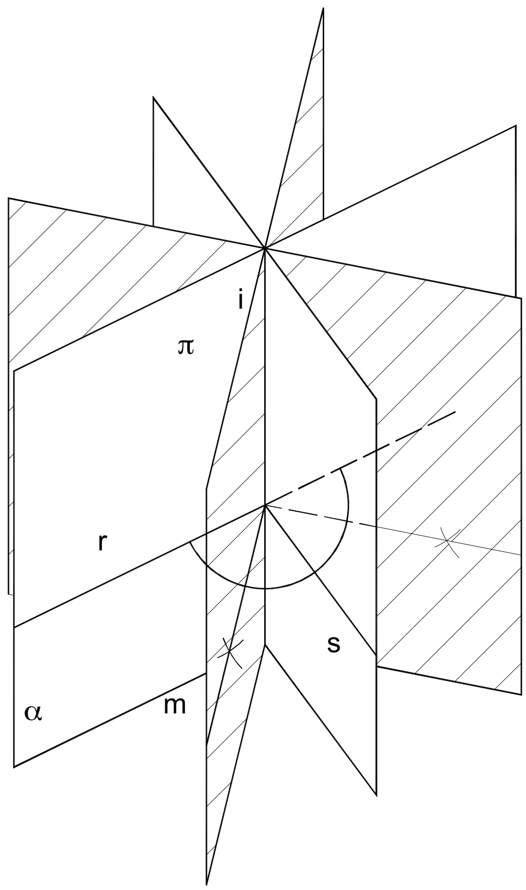
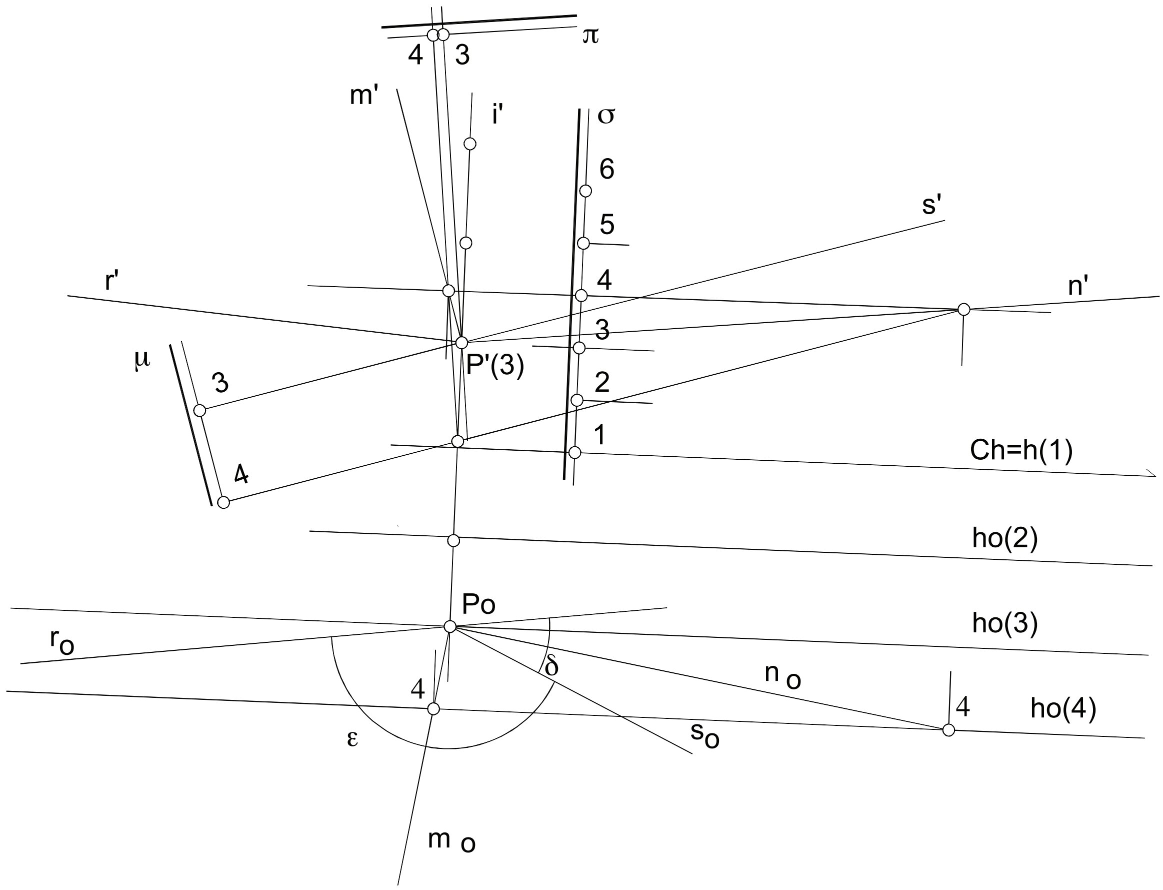


Fig.59


i
π
r
s
α
m


4 3
π
m'
i'
σ
6
5
s'
r'
4
n'
3
μ
P'(3)
3
2
1
4
Ch=h(1)
ho(2)
Po
ho(3)
r o
δ
n o
4
4
ho(4)
ε
s o
m o

GIROS

Giro de un punto alrededor de un eje vertical

Al girar un punto dado alrededor de una recta vertical tomada como eje de giro, dicho punto, en su desplazamiento, ocupará posiciones contenidas en un plano horizontal de cota igual a la del punto dado y describirá una circunferencia sobre el mismo. En la fig. 61 se tiene el punto A´(6) y la recta vertical e´. El punto describe una circunferencia de radio OA´ y centro O. Si el ángulo de giro es el ángulo α de la figura, el punto A´(6) pasará a ser el punto B´(6).

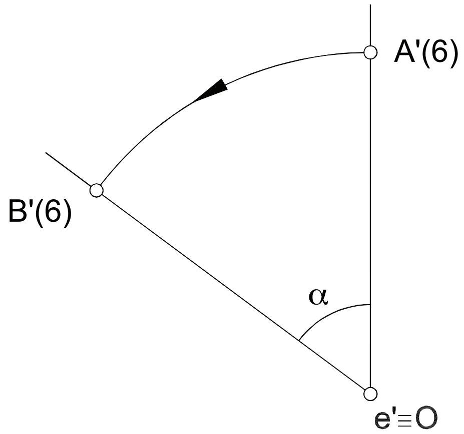


Fig.61

Giro de un punto alrededor de un eje horizontal

Cuando el eje de giro es una recta horizontal el punto dado describe, en su desplazamiento, una circunferencia que estará contenida, en un plano proyectante sobre el plano del cuadro. Para realizar el giro se abate el plano proyectante sobre un plano paralelo al del cuadro de cota igual a la del eje de giro, abatiendo también el punto a girar.

A continuación se realiza el giro como si se tratase de un giro sobre un eje vertical siendo el centro de giro el de intersección de e´ con β_0. Una vez girado el punto un ángulo dado, se obtiene otro punto, que será el abatido del punto girado. Finalmente la proyección del punto girado estará en la intersección de la traza del plano β con la perpendicular a ella por su abatido. En la fig.62 se tienen los puntos A´(8) y B´(8) de la recta horizontal e´ tomada como eje de giro. Además se da el punto C´(11) a girar. A continuación se toma un plano proyectante sobre el plano del cuadro que pase por C(11) y que sea perpendicular a la recta e´, siendo P el punto de intersección de ambos. Dicho plano viene dado por su traza β_0 con el plano del cuadro. Se abate este plano y con él, el punto C´(11) obteniendo el punto D. Se gira el punto D un ángulo α dado, con radio de giro PD y centro el punto P. El resultado de este giro es el punto E abatido del punto girado F´. La cota de este nuevo punto será la suma del valor del segmento EF´ más la cota del eje, que en este caso es 8 cm.

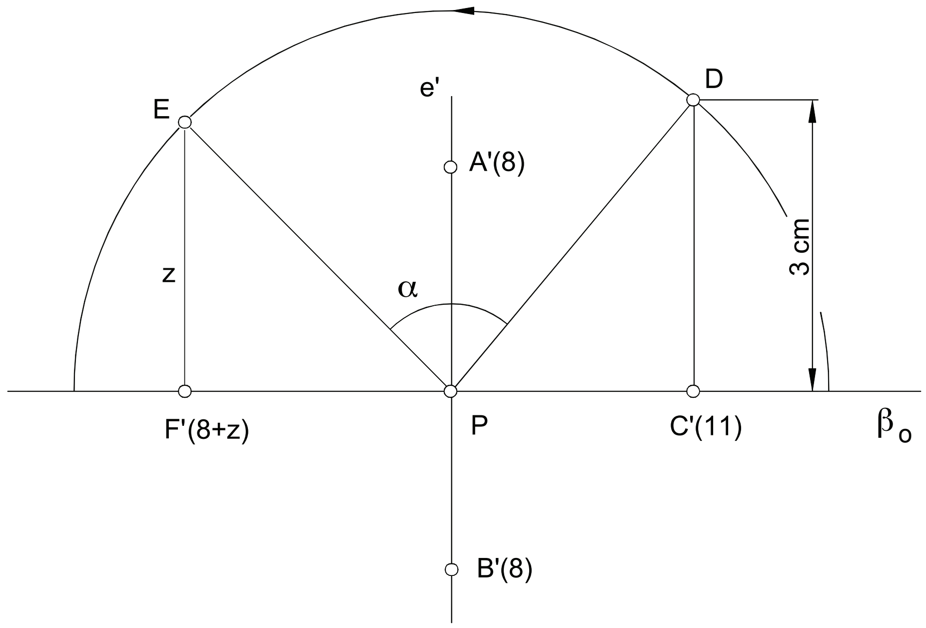


Fig.62

Giro de una recta alrededor de un eje vertical

Girar una recta un ángulo α alrededor de un eje vertical consistirá en girar dos de los puntos, de la recta el mismo ángulo α y unir los puntos girados, obteniendo así la recta girada.

Otra forma más directa de girar la recta r´ es la mostrada en la fig.63 y consiste en girar el punto A´, pie de la perpendicular trazada desde e´, proyección del eje de giro, un ángulo α para obtener el punto B´. La recta s´ girada de la r´ será la perpendicular al radio e´B´ por el punto B´, siendo el intervalo de s´ del mismo valor que el de r´.

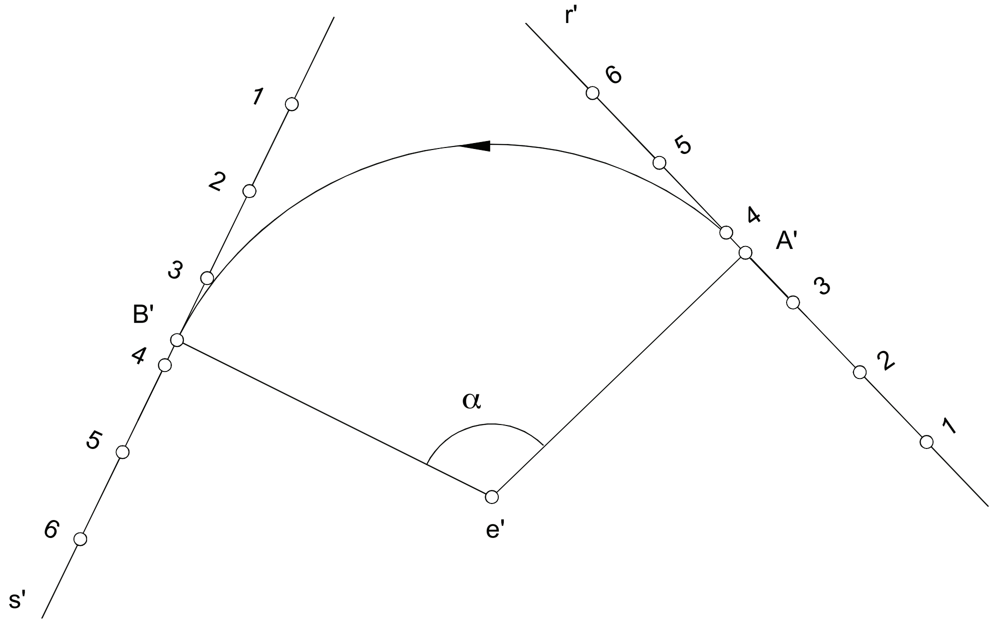


Fig.63

Giro de una recta alrededor de un eje horizontal

Se girarán alrededor del eje los puntos de la recta.

La recta e´ dada por los puntos A´(5) y B´(5) es tomada como eje de giro. Para girar la recta r´, se toman los puntos C´(6) y D´(8). Girando estos puntos 120º por ejemplo, se obtendrán los puntos L´(6.2) y K´(6.3). La recta s´ que une dichos puntos será la girada de la r´. La cota del punto L´ es 6.2 cm. pues, como se sabe, se debe sumar a la cota del eje, 5 cm. en nuestro caso, la del segmento JL´ que es 1.2 cm. De la misma forma la cota de k´ será 6.3 = 5 + 1.3.

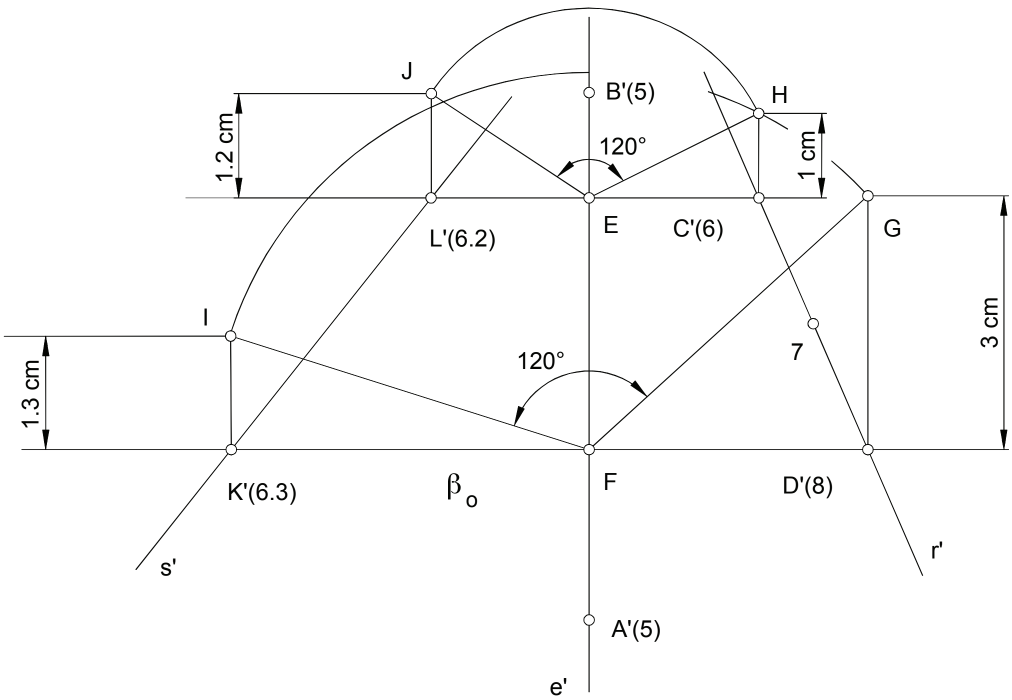


Fig.64

Giro de un plano alrededor de un eje vertical

Sea el plano α *con su l.m.p. debidamente graduada, y con* a_0 como traza con el plano del cuadro. La recta vertical e´ es tomada como eje de giro. Girar el plano equivale a girar la traza α_0 un ángulo dado. Para ello se traza una recta perpendicular por e´ a dicha traza, cortándola en el punto A´. A continuación se gira el segmento e´A´ por ejemplo un ángulo ε, obteniendo el punto B´. Por este punto se trazará una recta perpendicular al segmento e´B´ obteniendo la traza β_0 del nuevo plano β. Este plano conservará el mismo intervalo que el plano α puesto que al girarlo no varía su inclinación.

Finalmente se determina la l.m.p. perpendicular a β_0 llevando sobre ella el mismo intervalo que el del plano α.

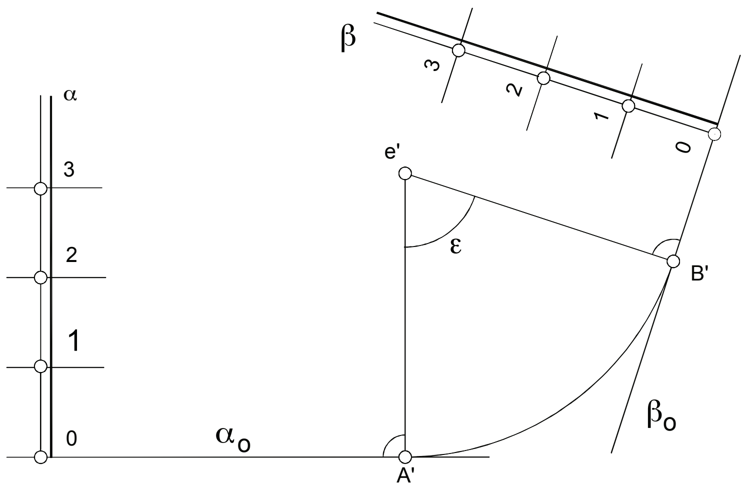


Fig.65

Giro de un plano alrededor de un eje horizontal

Una forma de definir un plano es mediante tres puntos no alineados. Por lo cual para abatir el plano bastará con abatir estos tres puntos. En la fig.66 se tiene el plano α y en él los puntos A´(7), B´(5) y C´(8), siendo el eje de giro la recta horizontal r´(5). Siguiendo los pasos que ya se conocen para girar puntos alrededor de un eje horizontal se giran estos puntos, por ejemplo un ángulo de 150º obteniendo los nuevos puntos J´(5.65), G´(6.25) y K´(3.36). Estos tres puntos girados definen un plano β que se corresponde con el plano α girado 150º.

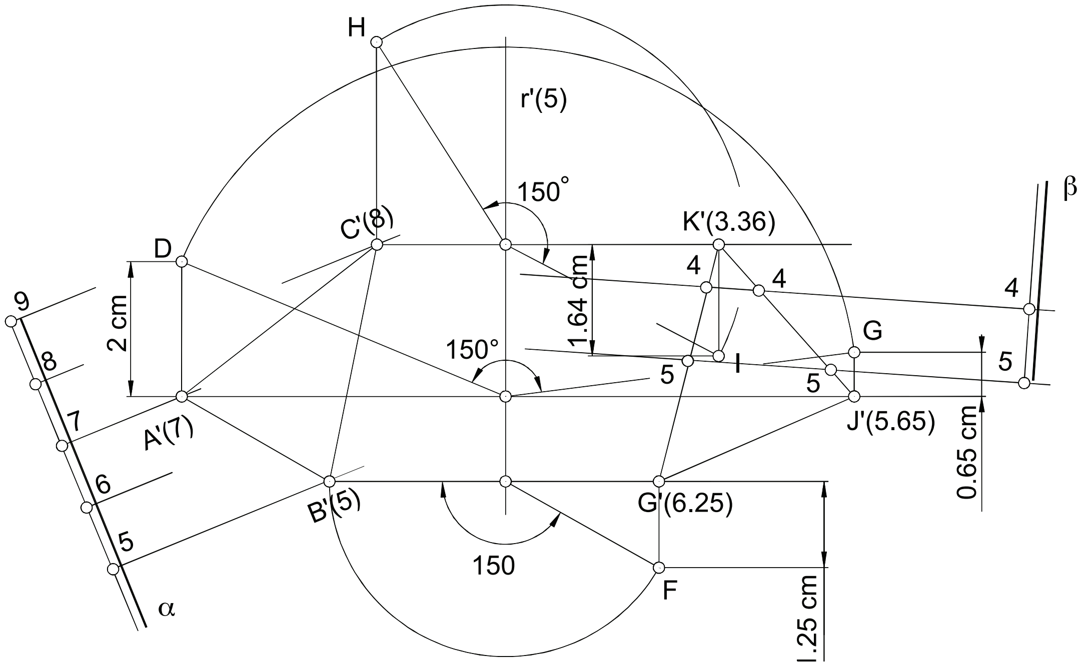


Fig.66

TRIEDROS

Los datos que definen a un triedro son : Sus tres caras o amplitudes A, B y C, y sus tres ángulos diedros α, β y γ. Conociendo tres cualesquiera de estos datos queda definido el triedro.

Los ejercicios tipo que se nos pueden plantear son:

1º. Hallar el triedro si se conocen sus tres amplitudes, A-B-C.

2º. Hallar el triedro si se conocen dos amplitudes y el diedro comprendido, C-B-α.

3º. Hallar el triedro si se conocen una cara y los diedros adyacentes, C-α-β.

4º. Hallar el triedro si se conocen dos amplitudes y el diedro opuesto a una de ellas, C-B-β.

5º. Hallar el triedro si se conocen una amplitud, un diedro adyacente y otro opuesto, B-α-β.

6º. Hallar el triedro si se conocen los tres ángulos diedros, α-β-γ.

Construcción de un triedro conociendo las tres amplitudes

Se supondrá que el triedro apoya su cara A sobre el plano del cuadro. Por lo tanto se comienza dibujando directamente y en verdadera magnitud la cara A. A continuación se suponen las caras B y C abatidas sobre el plano del cuadro, tomando como charnelas las rectas b´ y c´, y dibujándolas en verdadera magnitud. Al abatir dichas caras se abate también la tercera arista dando lugar a las rectas a_0. Si se toman sobre las rectas a_0 puntos P_0 a igual distancia de V´(0), se obtienen los dos abatimientos del punto P de la arista a. La proyección de este punto estará sobre las perpendiculares trazadas por los puntos P_0 al las charnelas c´ y b´. Uniendo V´ con P´ se obtiene la arista a´. Fig.67

Para hallar los ángulos que con la cara A (plano del cuadro) forman las caras B y C, basta con desabatir sus l.m.p., que son los segmentos G P_0 y H P_0 , y en los triángulos GP´I y HP´I se determinan los valores de β y γ.

Para hallar el ángulo α que forman las caras B y C entre sí, se traza un plano ε perpendicular a la intersección de ambas caras, arista -a-, siendo la traza ε_0 de este plano perpendicular a -a´-. El plano ε corta a las caras B y C según dos rectas que partiendo de D y E , respectivamente, son perpendiculares a la arista -a-. Por ello se trazan por D y E sendas perpendiculares a a_0 cortándolas en los puntos T_0. Desabatiendo estos puntos se obtiene el punto T´, vértice del ángulo α. Por lo tanto el ángulo α se corresponde con el ángulo DT´E.

Construcción de un triedro conociendo una cara y los dos diedros adyacentes

Dados los datos en el dibujo, se supone la cara A situada sobre el plano del cuadro. Sobre las aristas b´ y c´ se sitúan las l.m.p. de los planos que contienen las caras C y B respectivamente y que se gradúan a partir de los ángulos β y γ dados. Como la arista -a- es la intersección de las caras B y C, la intersección de estos dos planos dará dicha arista. El punto A´(3) perteneciente a la arista -a-, es abatido tomando como charnelas las rectas b´ y c´ y dando lugar a los puntos A_0, por los cuales pasarán las rectas a_0 abatidas de la arista -a-, definiendo las amplitudes de las caras B y C, tal y como se aprecia en la fig.68.

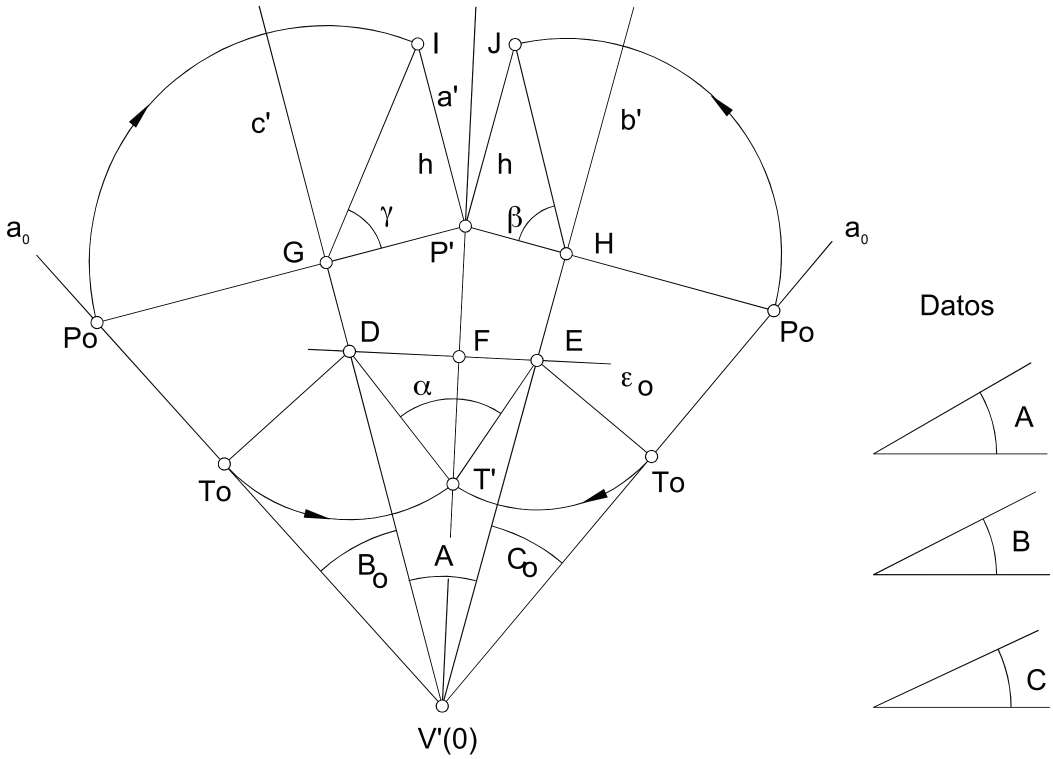


Fig.67

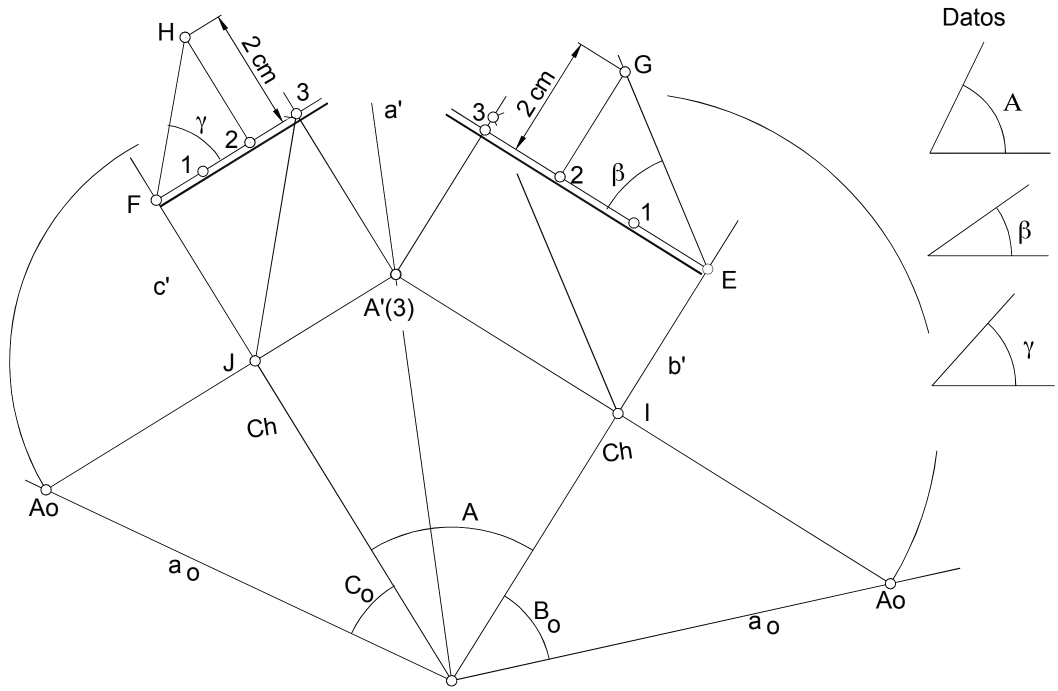


Fig.68

Construcción de un triedro conociendo dos amplitudes y el diedro adyacente

En este caso, se conocen dos amplitudes, A y C y el diedro adyacente β, a partir de los cuales se construirá el triedro.

Para ello se traza una línea auxiliar, para poder colocar la arista b´ de la cara A perpendicular a élla, y a partir de esta arista b´ se coloca la cara de amplitud C abatida.

A continuación se convierte la línea auxiliar en una línea de máxima pendiente que se graduará según el ángulo β dado. Se desabate el punto P_0 según P´, el cual unido con V´ determina la arista a´ .

La amplitud A dada se sitúa sobre el cuadro a partir de b´, obteniendo así la arista c´.

Perpendicular a la arista c´ se traza la línea de máxima pendiente que se graduará a partir del ángulo γ que se obtendrá a continuación. Para ello se parte de que la arista a´ es la intersección de los diedros β y γ, por lo cual basta con prolongar las horizontales de β hasta la arista a´ y de ahí trazar rectas perpendiculares a la recta de máx. pendiente mencionada, obteniendo así el intervalo del plano, con lo cual se obtiene el ángulo buscado γ.

Para hallar la amplitud B se toma un punto 1´ de la arista a´ y se abate según las charnelas b´ y c´, y dado que se conoce una de las proyecciones abatidas de -a- y con ella uno de los abatidos de 1´ que será 1_0, se obtiene el otro punto 1_0 y por lo tanto la otra arista a_0.

El ángulo α se obtiene siguiendo el procedimiento expuesto anteriormente.

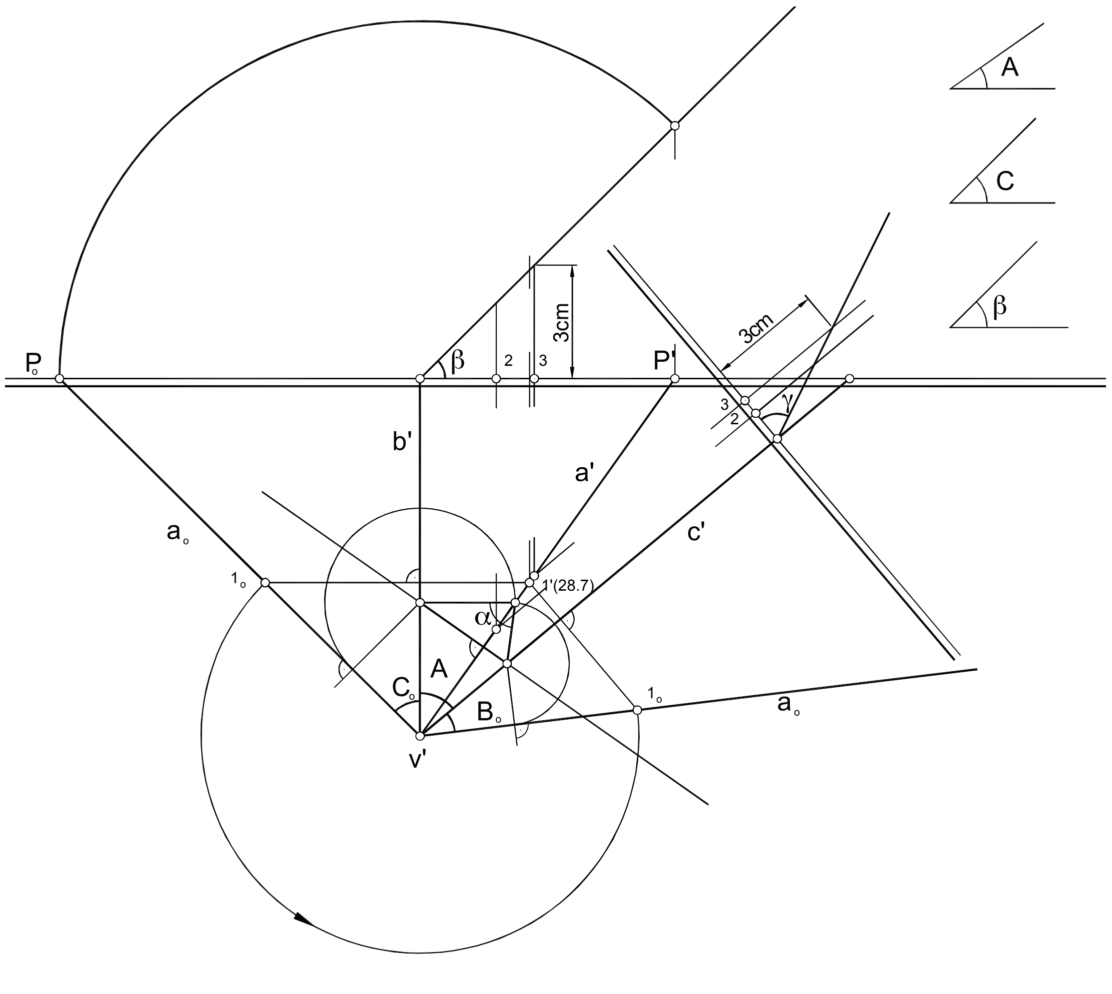


Fig.69

Construcción de un triedro conocida una amplitud, el diedro opuesto y otro adyacente

Para la resolución de este caso, se supone la cara de amplitud A abatida sobre el plano del cuadro de manera que quede la arista b´ perpendicular a una línea auxiliar, se obtiene también la arista c abatida, c_0. Se sustituye la línea auxiliar citada por una línea de máxima pendiente que se graduará a partir del ángulo β, y se desabate el punto P_0, obteniendo el punto P´, el cual tras unirlo con el V´ determina la arista c´.

A partir de el punto J se traza una recta que forme un ángulo α con la l.m.p. la cual se gradúa en función de dicho ángulo. Con centro en P´(6.37) y radio P´I se traza un arco, tangente al cual y por V´ se trazará la arista a´, con lo cual se obtiene la cara C que apoya sobre el plano del cuadro.

Por medio de un punto T´, el cual se abate, se obtendrá abatida la cara B.

El diedro γ se obtendrá del mismo modo que en casos anteriores.

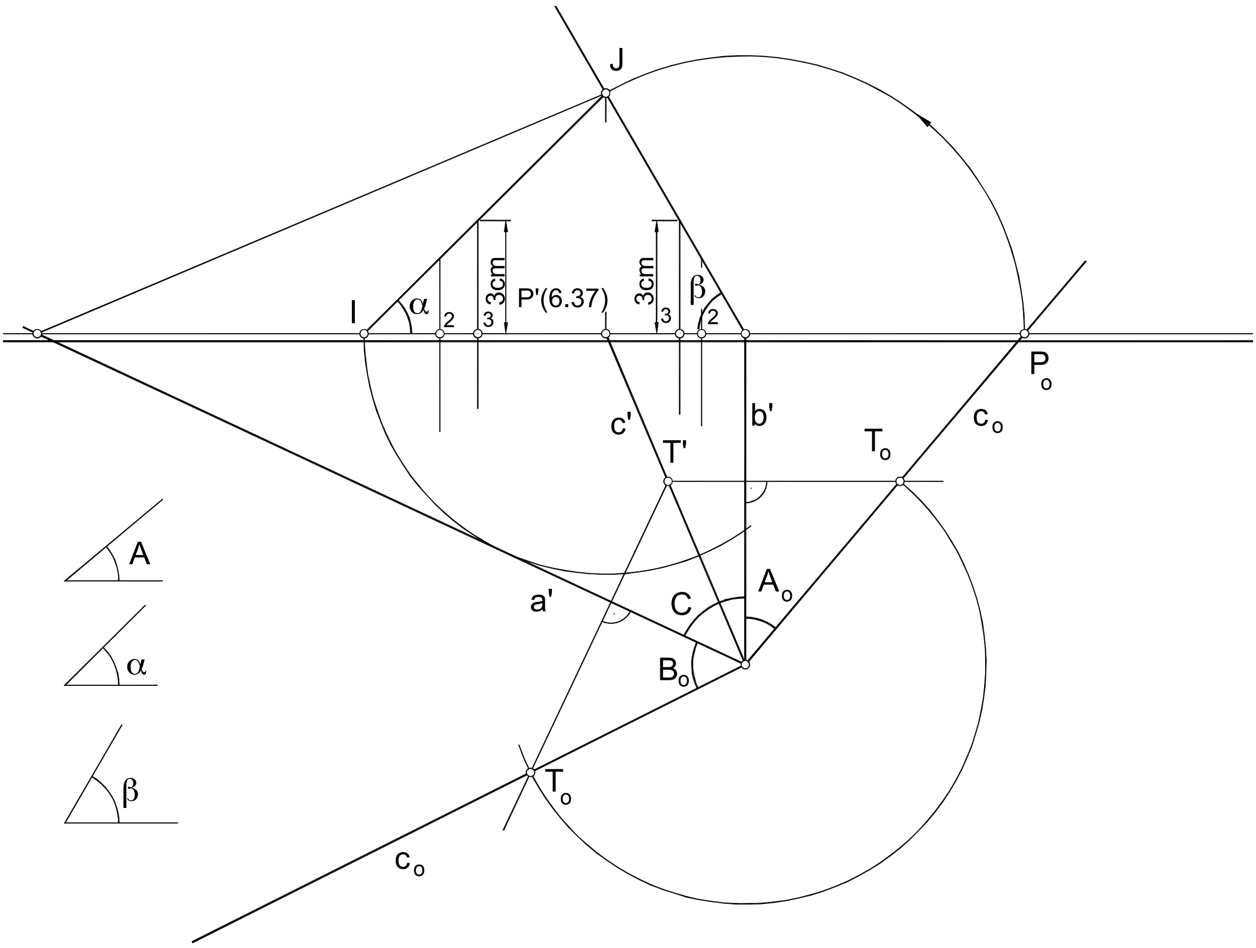


fig.70

Construcción de un triedro conocidas dos amplitudes y el diedro opuesto a una de ellas

Conocidas las amplitudes B y C y el ángulo diedro β se resuelve este caso considerando la cara de amplitud C apoyada sobre el plano del cuadro y la cara de amplitud B abatida, de modo que la arista común a ambas caras -a´- quede perpendicular a una línea auxiliar.

Perpendicular a la arista b´ se coloca una l.m.p. que se graduará en función del ángulo β. A continuación se realiza un cambio de plano para obtener el punto J que se unirá al punto 1´ dando lugar al ángulo α. La línea auxiliar se sustituye por una l.m.p que se gradúa en función de α.

La intersección de los planos de ángulos α y β da lugar a la arista c, de proyección c´ , a partir de la cual y por medio de un punto cualquiera P´ se obtendrá tras abatirlo el valor de la amplitud A.

La obtención del ángulo γ será igual que en los anteriores casos.

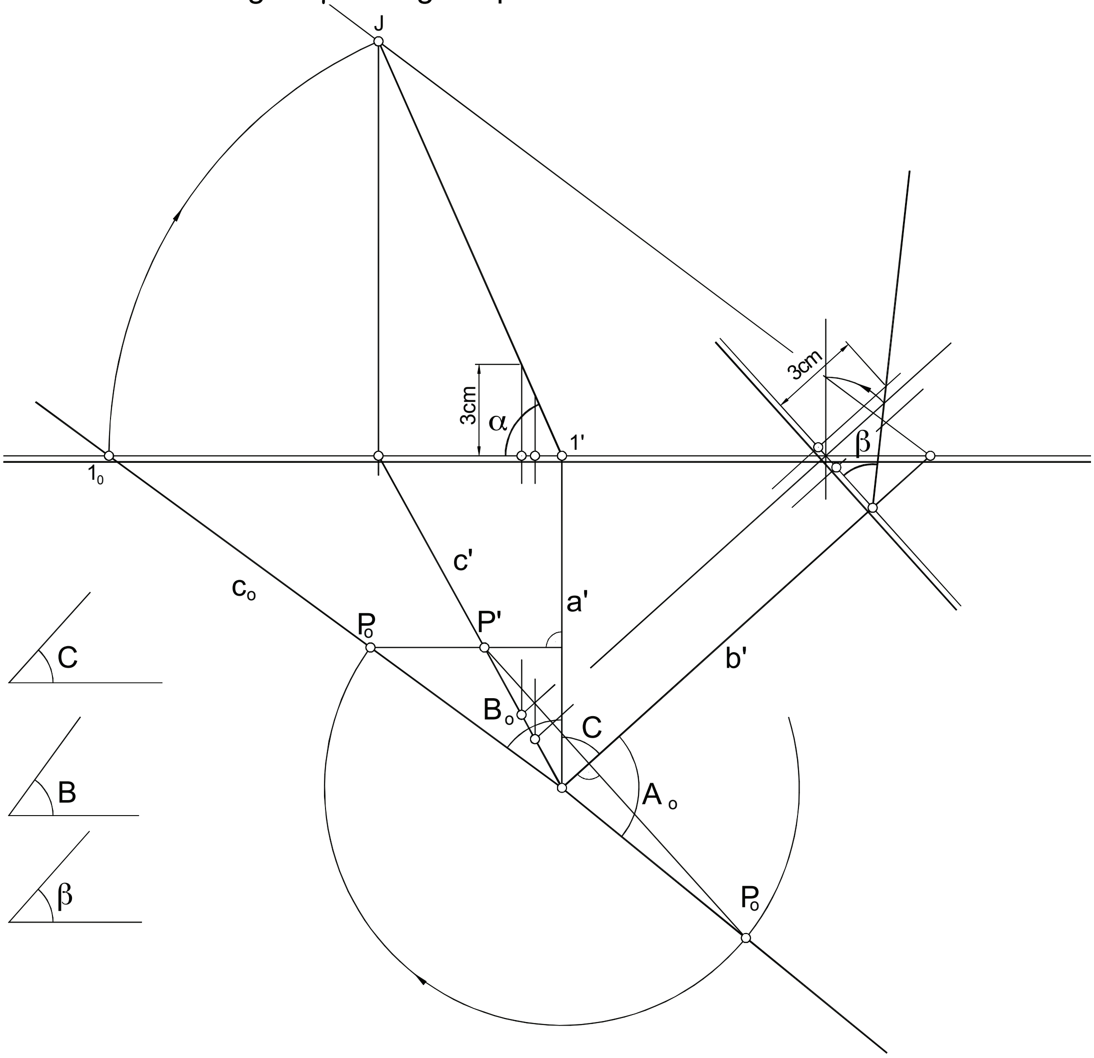


fig.71

Construcción de un triedro conocidos los tres ángulos diedros

Para su resolución se colocará una de las aristas del triedro c´, a la cual se le trazará una línea auxiliar perpendicular, por tratarse de la arista de proyección c´, se dibujará una recta que forme γ grados con la línea auxiliar trazada. Se podrá así definir el plano de l.m.p. la línea auxiliar antes referida y las horizontales del plano en función del ángulo γ que el plano forma con el cuadro.

Los planos que limitan el triedro serán por tanto: el plano del cuadro, el plano que forma γ grados con el cuadro, y un tercer plano que forma α grados con el cuadro y a su vez β grados con el plano citado en segundo lugar.

Para obtener el plano que forma α grados con el cuadro, deberá apoyarse en un cono cuyas generatrices formen α grados con la base apoyada en el cuadro y vértice V_1. Para que a su vez el plano buscado forme β grados con el dibujado en primer lugar, deberá apoyarse en un cono con la base en este plano y cuyas generatrices formen β grados con él, su vértice es el punto V_2.

Ambos conos serán tangentes a una esfera de centro O.

Los planos así obtenidos definen, al hallar su intersección, la arista de proyección a´, así como la de proyección b´ y el vértice del triedro. Sobre el cuadro y por c´ y b´ se limita la amplitud A. Los valores de C y B se obtienen al abatir el punto 1 que pertenece a la arista -a- , y con respecto a las charnelas c´ y b´.

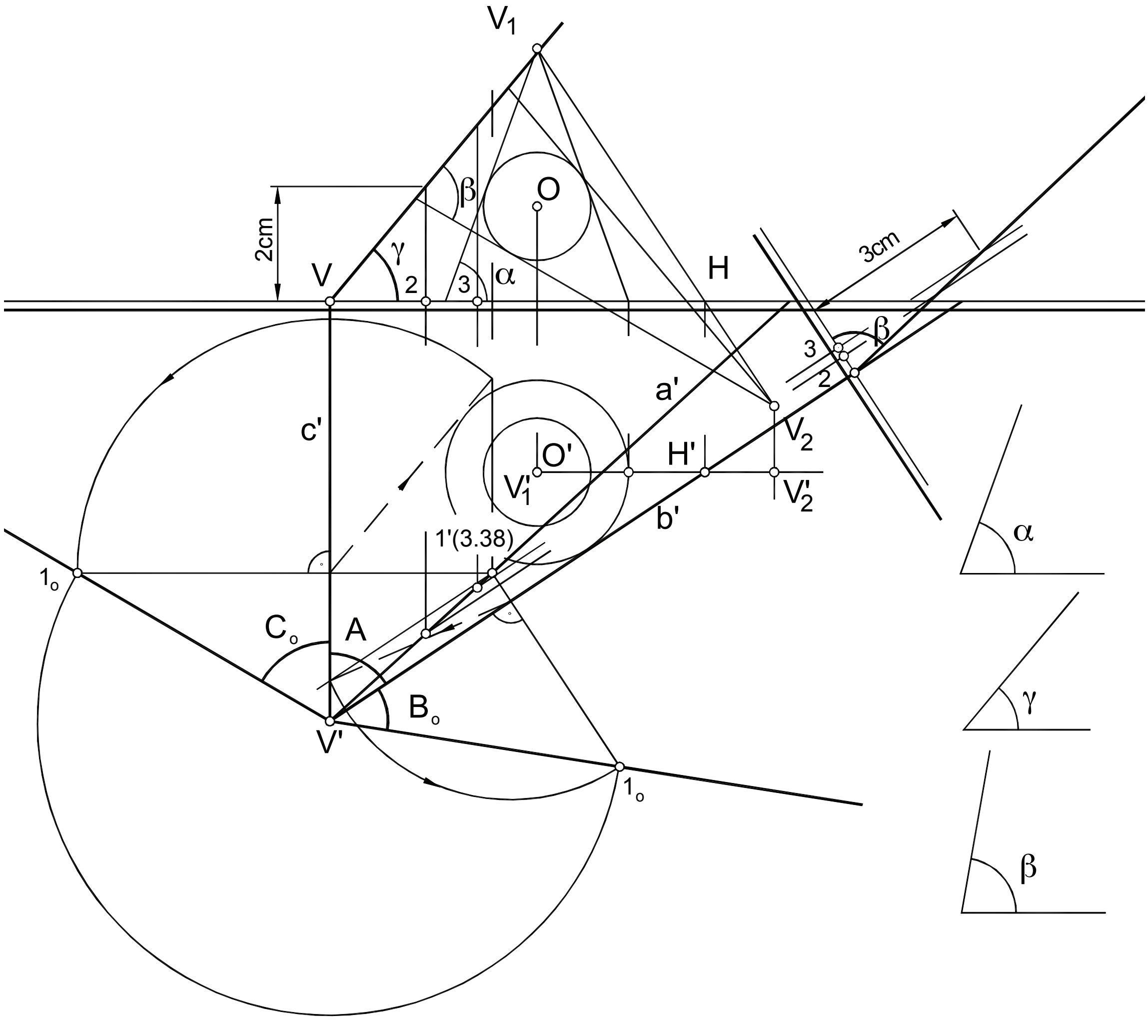


Fig.72

Paso del sistema de planos acotados al sistema diédrico

En el Sistema de Planos Acotados la proyección acotada es una proyección ortogonal sobre el plano del cuadro que es equivalente a la proyección horizontal en el Sistema Diédrico.

En la fig.73a se tiene un plano α en el Sistema de Planos Acotados y en él un triángulo ABC. Llevando este conjunto aparte se tendrá la proyección horizontal en el Sistema Diédrico; fig.73b, pues ésta y la proyección acotada son equivalentes. Así la traza α_0 del plano dado será la traza horizontal α_1 del plano en el Diédrico. Se toma a continuación una línea de tierra cualquiera, y se trazan por los puntos A´, B´ y C´ sendas perpendiculares a dicha L.T. Se llevan las cotas de dichos puntos, sobre estas rectas a partir de la citada L.T., obteniendo las proyecciones verticales A´´, B´´ y C´´ de los puntos A, B y C del espacio.

Para hallar la traza vertical α_2 del plano α, se traza una línea horizontal h´-h´´ que pase por ejemplo por el punto B´-B´´. Hallando la traza vertical V´´ de dicha recta, la traza α_2 del plano α pasará por V´´ y por el punto de intersección de α_1 con la L.T.

Las dos proyecciones A´B´C´ y A´´B´´C´´ son figuras afines, siendo el eje la intersección del plano α con el 2º bisector del diedro formado por los planos del cuadro (horizontal) y el vertical elegido.

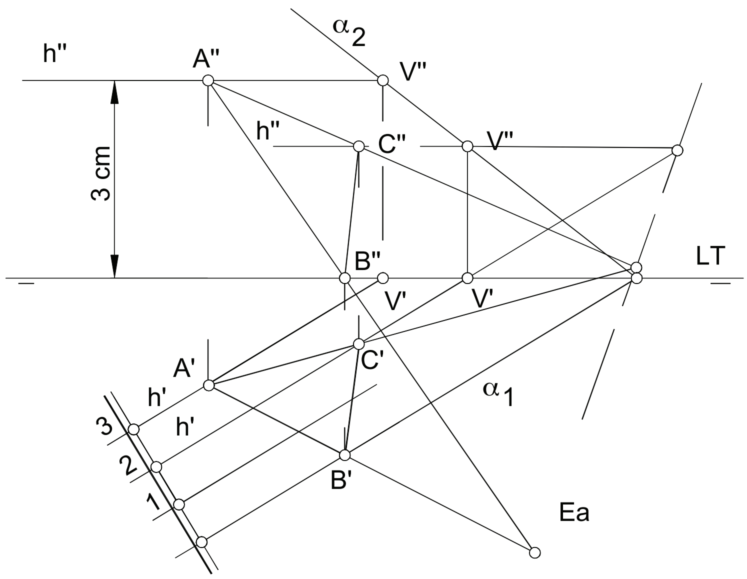


Fig.73b

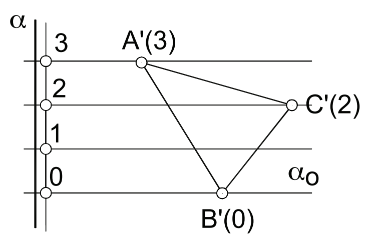


Fig.73a

Tema 5

POLIEDROS. SUPERFICIES RADIADAS.
ESFERA.

POLIEDROS

En el sistema de planos acotados, un poliedro queda representado cuando se conocen las proyecciones acotadas de sus vértices.

Ejercicio

Determinar la proyección acotada de un octaedro, una de cuyas diagonales mide 10 cm. Y forma un ángulo de 60º con el plano de proyección. Uno de los vértices no situados en dicha diagonal tiene 24.5 unidades de cota, siendo el centro del octaedro el punto de cota 25.

Se representa la diagonal d´ graduándola de acuerdo al ángulo de *60º* que forma con el plano del cuadro. Para ello, se aplica el ángulo de 60º a partir del punto O´, centro del octaedro. Sobre dicho ángulo se toma un segmento O´A_0 igual a la mitad de la diagonal (5 cm.). El punto A_0 se proyecta sobre d´, obteniendo el vértice A´. En la fig.74 se ha graduado la diagonal d´ aplicando intervalos después de su obtención y a partir del punto O´ que tiene cota 25. El vértice opuesto a A´ se obtiene llevando sobre d´ y a partir de O´ una distancia igual a O´A´. Los otros cuatro vértices forman un cuadrado que está situado en el plano perpendicular a d´ por O´. Por lo tanto se trazará este plano con un intervalo i_a obtenido a partir del intervalo i_d de la diagonal d. Se abate el plano y con él, el punto O´ tomando como charnela la horizontal de cola 26. Con centro en O_0, abatido de O´, se traza una circunferencia de diámetro 10 cm., igual a la diagonal del poliedro. En esta circunferencia está inscrito el cuadrado que forman los cuatro vértices restantes del poliedro. Como se sabe que uno de los vértices de este cuadrado tiene de cota 24.5 cm, se abatirá la horizontal de cota 24.5 que cortará a la circunferencia en el punto C_0, que será un vértice del cuadrado. A partir de este punto se construye el cuadrado de vértices C_0-D_0-E_0-F_0, tal y como se ve en la figura. Desabatiendo por afinidad dicho cuadrado se obtienen los restantes vértices del octaedro. Todas las aristas que partan de A´ serán vistas, pues es el punto de mayor cota. Por el contrario, las aristas que parten de B´ están ocultas.

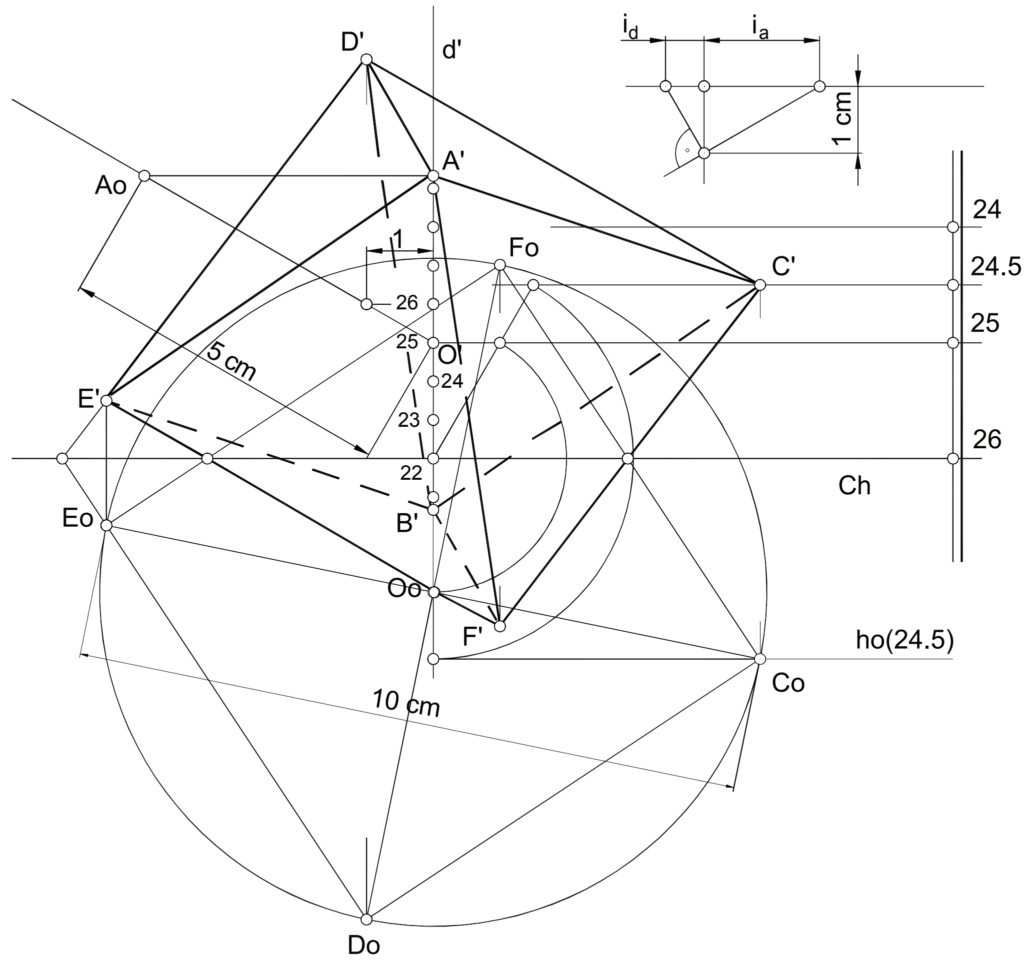


Fig.74

En otra parte del libro se encuentra un anexo dedicado a la resolución de diferentes casos de poliedros en el sistema de planos acotados, por lo que se traslada al lector al mismo para un estudio mas detallado del tema.

SUPERFICIES RADIADAS

La pirámide

La pirámide queda definida cuando se conoce su base o directriz y la proyección acotada del vértice, quedando así también definidas las aristas laterales.

Conociendo la base de una pirámide regular recta situada en un plano cualquiera, el vértice estará en la perpendicular por el centro de la misma y a una altura determinada.

La sección producida en la pirámide por un plano paralelo al plano de la base es un polígono semejante al de la base, y se obtiene determinando uno de los vértices como intersección de una de las aristas con el plano secante, el resto se obtendrá trazando por dicho vértice la sección de lados paralelos a los de la base.

En la fig.75, sin embargo, se tiene la sección producida por un plano oblicuo cualquiera en la superficie piramidal dada. Esta sección y la base A´(0)-B´(0)-C´(0)-D´(0), que es otra sección producida por el plano del cuadro, son figuras homológicas, siendo el eje de homología la traza α_0, del plano secante y el centro de homología el vértice , V´, de la pirámide. Para hallar la sección buscada se comienza determinando por ejemplo el homólogo de B´(0). Dicho punto será el de intersección del plano α secante. con la arista B´(0)-V´(7). Para hallar el punto se tomará un plano auxiliar que contenga a la arista y que cortará al plano α secante según la recta i´, que a su vez corta a la arista en el punto buscado F´.

Se dispone desde ahora de la pareja de puntos homólogos B´ y F´.

Para hallar los restantes vértices de la sección se seguirán procedimientos homológicos. Es decir para hallar el punto G´ homólogo de C´(0) se traza la recta que une B´(0) con C(0) que corta al eje de homología α_0 en el punto I. A continuación se traza la recta que une I con el homólogo, F´, de B´(0). Esta recta cortará a la arista que pasa por C´(0) en el punto G´ homólogo del B´. Realizando este proceso para los demás puntos de la base, tal y como se ve en la figura, se obtendrá la sección producida por el plano α a dicha pirámide.

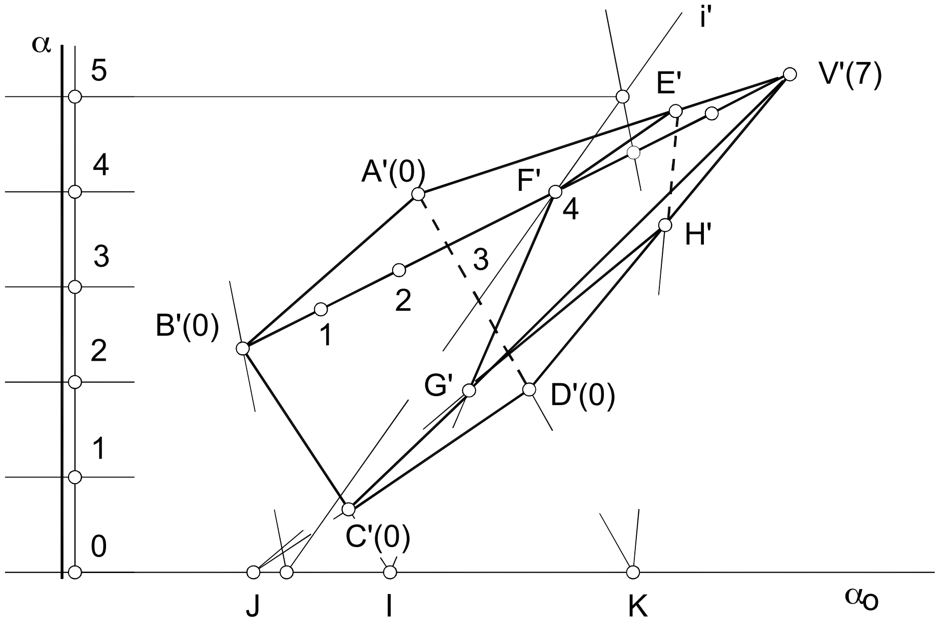


Fig.75

El prisma

La superficie prismática se representa de forma similar a la piramidal, por su base o directriz en un plano y por su arista lateral graduada. La sección producida por un plano oblicuo es una figura afín a la de la base en una homología de vértice impropio. Dicha homología por lo tanto se ha transformado en una afinidad. El eje de afinidad es la traza del plano secante y la dirección de afinidad es la de las generatrices del prisma. Este ejercicio, por su similitud con el anterior, se deja como trabajo práctico a realizar.

El cono

Para que una superficie cónica quede definida es necesario conocer la directriz en el plano de referencia y la proyección del vértice acotada.

Por otra parte se sabe que la base de un cono de revolución sobre un plano y su traza con el cuadro, son figuras homológicas, en una homología de centro el vértice del cono y eje la traza del plano base con el cuadro. En los siguientes ejercicios se explica como obtener la proyección acotada de un cono a partir de una serie de datos dados.

1º. Determinar la traza de un cono de revolución del que se conocen el eje y el semiángulo en el vértice.

Sea el eje e´ definido por los puntos O´(0) y V´(5). Se abate el eje sobre el plano del cuadro obteniendo la recta e_0. A partir de V_0 se construye el semiángulo α por encima y por debajo de e_0, cortando las rectas así obtenidas al plano del cuadro en los puntos A y B, extremos del eje mayor de la elipse que es traza horizontal del cono. El semieje menor de la elipse, segmento N-C, es la semicuerda N-H de la circunferencia, sección que produce en el cono el plano que pasa por el centro N de la elipse y que es perpendicular al eje. Según esto, por N se traza el plano perpendicular a e_0 que cortará al cono según la circunferencia de diámetro R-S. La cuerda N-H, de esta circunferencia, que sea paralela a e_0 es el semieje menor de la elipse. Tomando después N-C = N- D = N-H se obtienen los puntos C y D. Con los ejes AB y CD se construye la elipse y posteriormente se trazan las tangentes desde V´(5) a ella, obteniendo las generatrices aparentes del cono, completando así su representación.

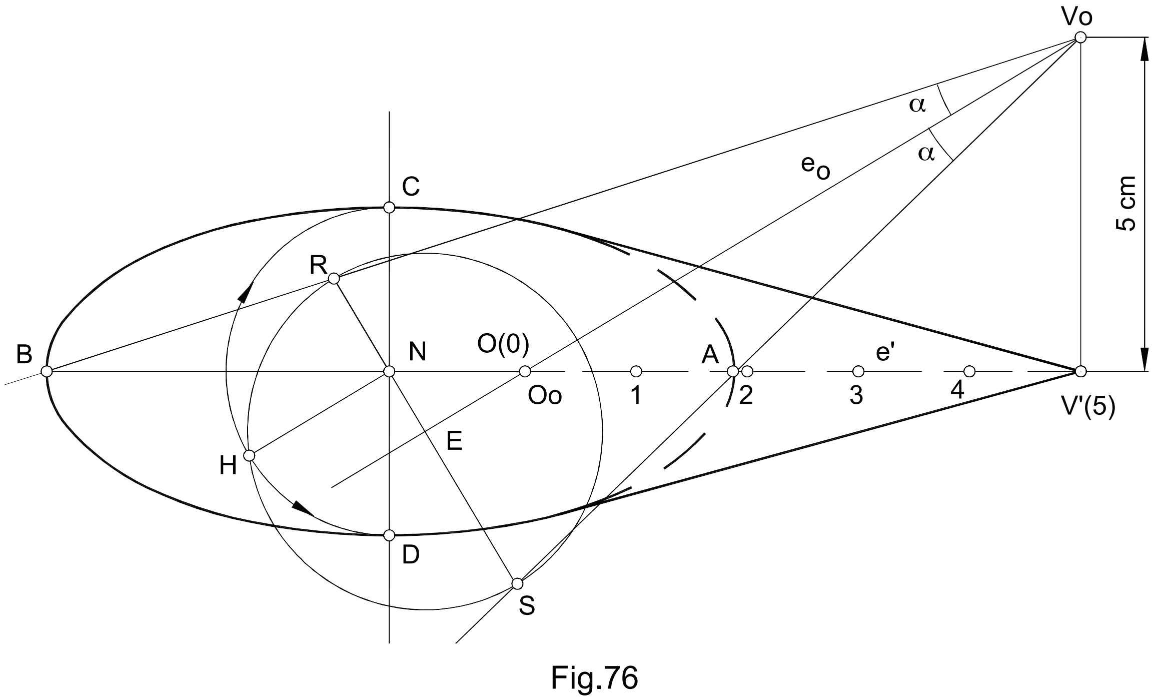


Fig.76

2º. Hallar la proyección de un cono de revolución que descansa en el plano de referencia a lo largo de una generatriz. La generatriz del cono mide 8 cm., y la altura es de 7 cm.

El cono descansa sobre la generatriz g-g´ definida por los puntos N´ y V´ siendo su cota 0 y su longitud 8 cm. Se trazará un arco de radio 7 cm. (altura del cono, h_0) y centro V´. Por N´ se traza la tangente a dicho arco, obteniendo el punto de tangencia O_0, abatido del centro de la base del cono, y siendo el segmento N´-O_0, el radio de la misma. El diámetro será por tanto N´M_0 y el triángulo N´-M_0-V´ es la sección que sobre el cono produce un plano proyectante cuya traza es -g-. Refiriendo M_0 sobre g se obtiene el punto M´ extremo del eje menor de la elipse. El eje mayor pasará por O´ y será igual al diámetro -d- de la base del cono, obteniendo así los extremos A´ y B´ del mismo. A continuación se construye la elipse y por V´ se trazan las tangentes a la misma, quedando así definida la proyección del cono.

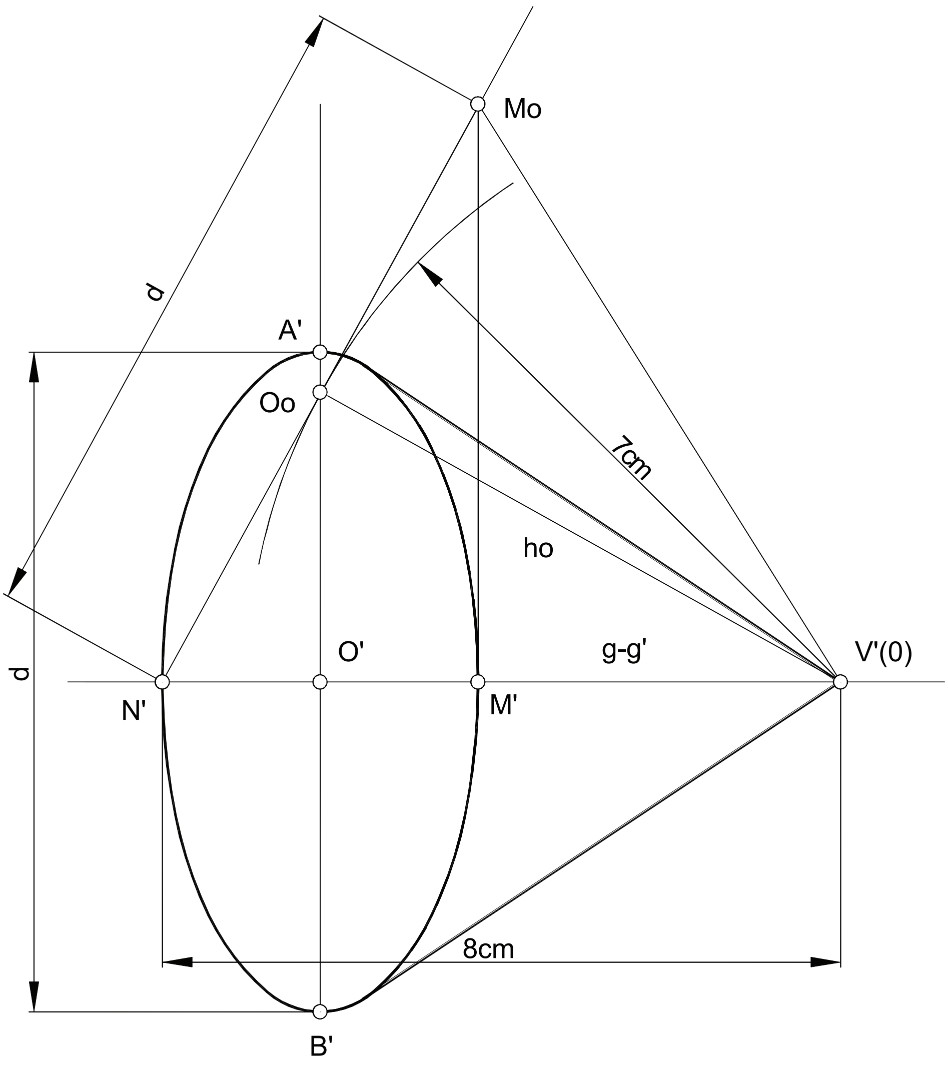


Fig.77

3º. Un círculo situado en el plano del cuadro es la base de un cono de revolución cuyo vértice tiene 6 cm. de cota. Se da un plano por su escala de pendiente y se pide la sección producida en el cono por el plano. El radio de la base del cono es 30 mm.

Se construye la circunferencia base del cono con radio 30 mm, y cuyo centro es V´. Se dibuja el plano α dado por su l.m.p. graduada y se abate el plano de perfil que, pasando por el vértice V, tiene su traza perpendicular a α_0. En este abatimiento se puede observar la sección A_0-B_O que produce el plano α sobre el cono. Los puntos A_0 y B_0 devueltos a la proyección, dan los extremos A´ y B´ del eje mayor de la elipse sección.

En el abatimiento, por el centro O_0 de la elipse, punto medio de A_0B_0, se traza el plano perpendicular al eje del cono que corta a éste según la circunferencia de diámetro N_0M_0. Esta circunferencia, que está en un plano horizontal, se proyecta en verdadera magnitud con el radio V´N. La cuerda C´D´ de esta circunferencia es el eje menor de la elipse proyección de la sección.

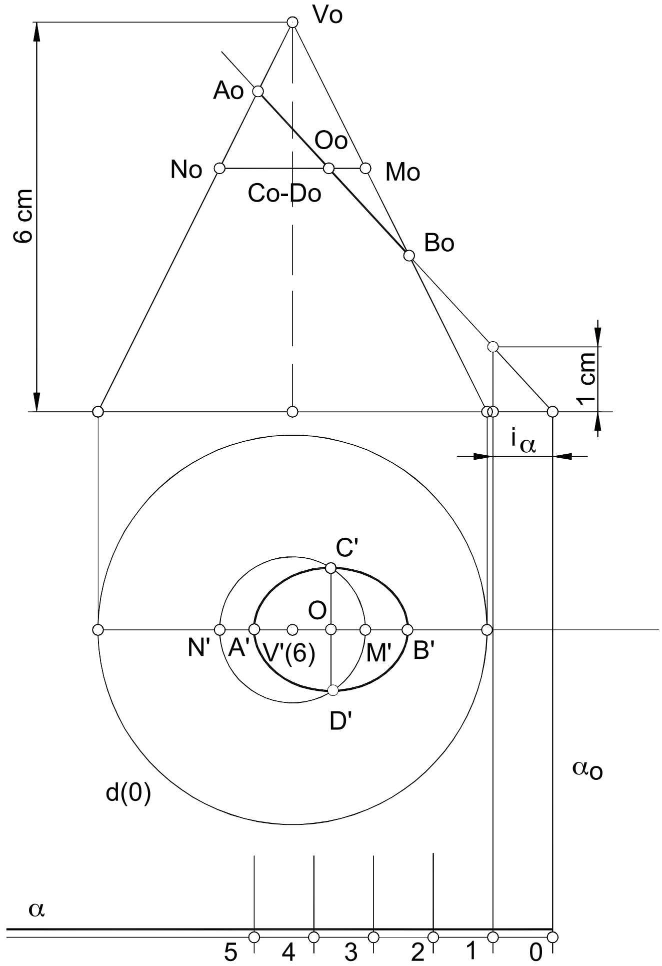


Fig.78

El cilindro

Como se explicó en el caso del cono, un cilindro queda definido cuando se conoce la directriz en el plano de proyección y la proyección graduada de una generatriz.

Entre la traza (elipse) del cilindro de revolución, situado en posición oblicua con respecto al plano del cuadro y la directriz del cilindro (circunferencia) existe una relación de afinidad, en la que la dirección es la misma que la de las generatrices del cilindro.

Este caso es similar al del cono por lo que la resolución gráfica del mismo se deja como trabajo práctico a desarrollar.

Intersección de una recta con una superficie poliédrica o radiada

El método seguido para resolver este caso es, un método válido para cualquier sistema de representación y consiste en, una vez conocida la recta y el poliedro o superficie, trazar el plano proyectante que contenga a la recta hallando la intersección de este con dicha superficie. Posteriormente se abate el plano y con él la recta y la sección producida en dicho corte. En el abatimiento se obtienen los puntos de intersección de la recta y la sección, que serán los mismos que los que produce la recta en la superficie.

Para hallar la proyección de los puntos bastará con desabatirlos sobre la proyección de la recta.

Intersección de una recta y una esfera

Sea la esfera de centro C´(2) y radio conocido de la fig.79, así como la recta r´ definida por los puntos A´(2) y B´(7). Como se explicó en el apartado anterior, se tomará el plano proyectante de traza α_0 que contiene a la recta y que produce en la esfera una sección circular de centro F y de diámetro el segmento GH. Abatiendo este plano y con él la recta y la sección, se tendrán una circunferencia y una recta r_0 abatidas. En el abatimiento se pueden observar los puntos D_0 y E_0 en los que la recta r_0 corta a dicha circunferencia, los puntos D´ y E´ son las proyecciones respectivas de los puntos D y E en los que la recta r corta a la esfera dada.

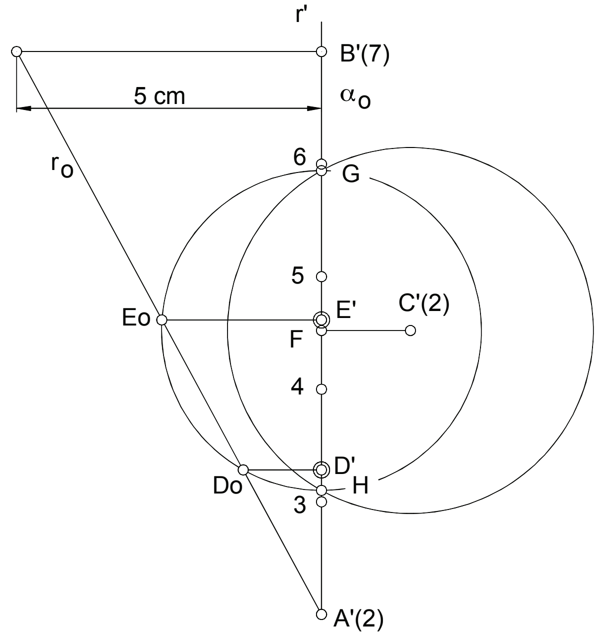


Fig.79

Planos tangentes al cilindro

Como ya se ha visto un cilindro queda definido cuando se conocen la directriz situada en el plano del cuadro y una generatriz acotada.

En la fig.76 un plano α tangente a un cilindro en un punto A´(0) de su directriz, lo es también en todos los puntos de la generatriz $G´_3$ que contiene a dicho punto.

En la figura se resuelve el caso de trazar planos tangentes a un cilindro y paralelos a una dirección dada. Si la dirección viene dada por la recta r´, se traza por un punto cualquiera de ella una recta s´ paralela a las generatrices del cilindro. Las rectas r´ y s´ determinan un plano σ que es paralelo a las generatrices del cilindro por contener a la recta s´. Para hallar los planos solución bastará con trazar dos tangentes β_0 y ε_0 a la directriz del cilindro que serán paralelas a la traza σ_0 del plano σ. De esta manera se obtienen las trazas de los planos solución. Los punto C´(0) y B´(0), de tangencia, son los pies de las generatrices $G_1´$ y $G_2´$,que tienen el mismo intervalo que la generatriz inicial.

Por estas generatrices han de pasar los planos buscados. Para hallar las horizontales de estos planos bastará con trazar paralelas a las trazas β_0 y ε_0 por los puntos acotados de las generatrices $G_2´$ y $G_1´$ respectivamente.

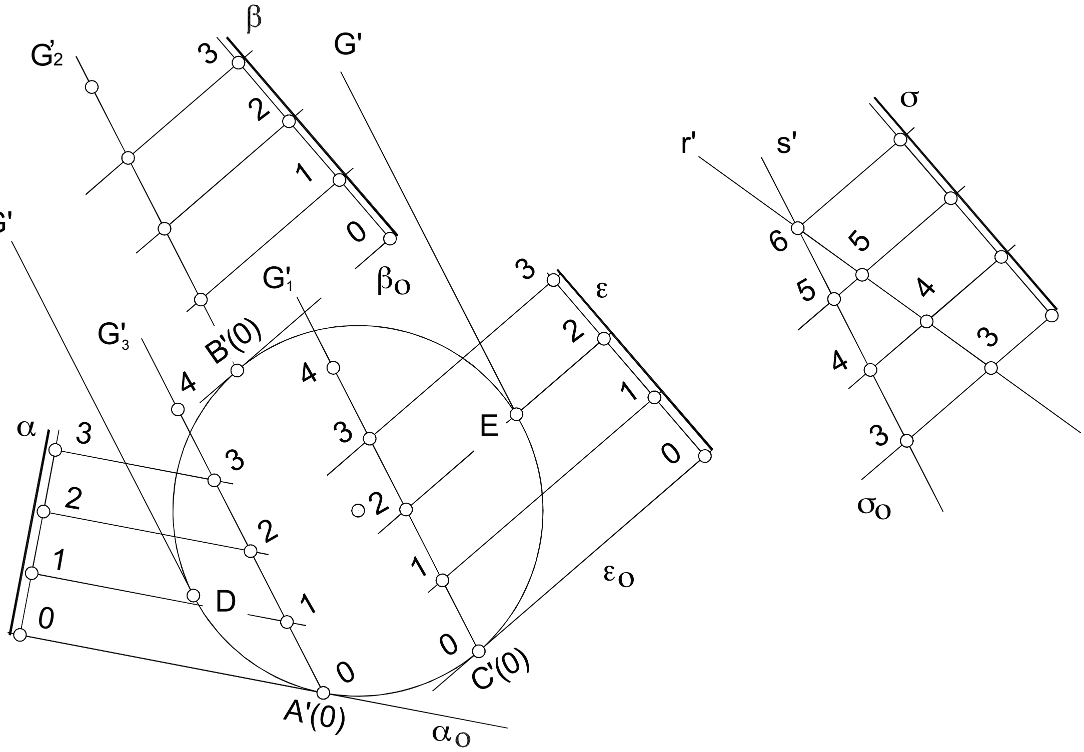


Fig.80

Planos tangentes al cono

Un cono queda definido cuando de él se conoce la directriz situada en el plano de referencia y el vértice acotado del mismo o bien una generatriz debidamente graduada.

Como en el caso anterior en plano tangente al cono lo será a lo largo de toda una generatriz.

En la fig.81 el cono está definido por su directriz circular de centro O´(0) y radio dado y por el vértice V´(8). Deben hallarse los planos que siendo paralelos a la recta r´ dada serán tangentes al cono. Para ello se traza una paralela s´ a r´ por el vértice V´(8).

Por el punto de intersección de s´ con el plano del cuadro, punto de cota 0, se trazan dos tangentes a la directriz del cono. Estas tangentes serán las trazas de los planos buscados. Los puntos de tangencia serán A´(0) y B´(0), pies de las generatrices G_1´ y G_2´ de tangencia de ambos planos. Los planos formados por cada generatriz y por la recta s´ serán los planos, tangentes al cono, buscados.

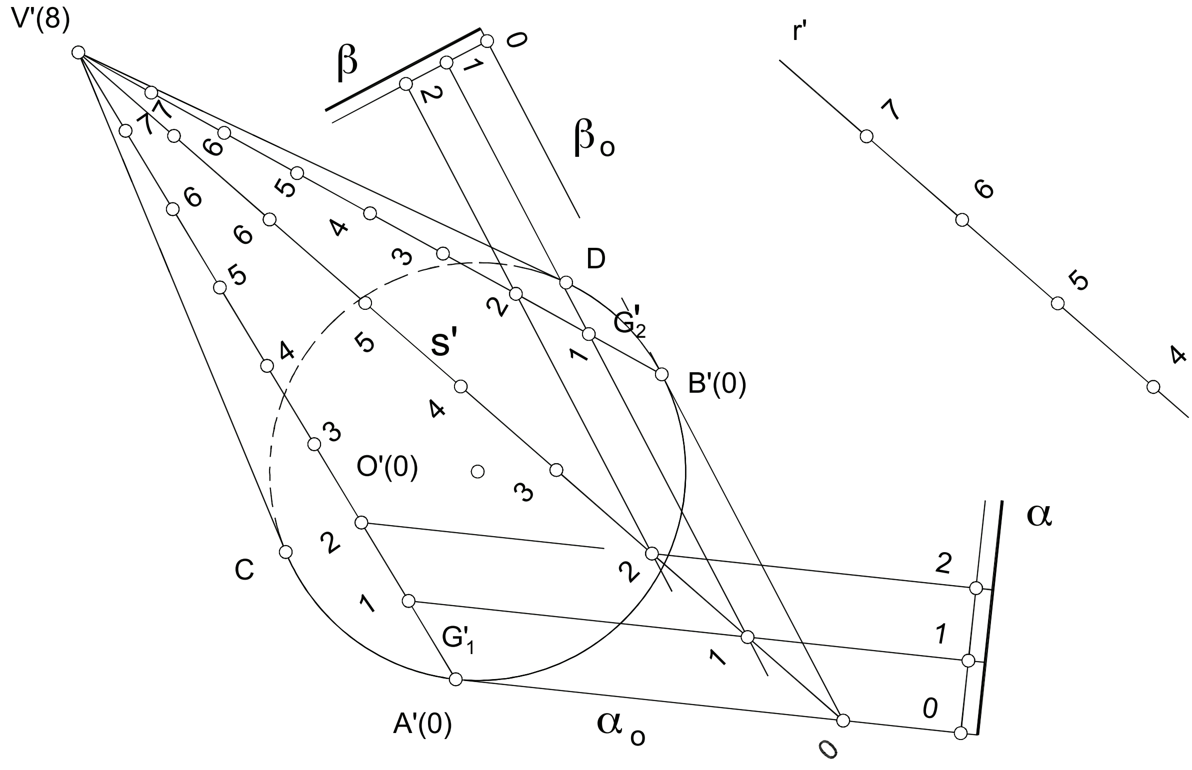


Fig.81

Sección de una superficie cónica oblicua por un plano oblicuo

Sea un cono dado por su directriz circular de cota 0 y centro O y por el vértice V´(5).

Se determinará, la proyección de la sección que le produce un plano oblicuo α mediante homología. El eje de esta homología será la traza α_0 del plano α. El centro será el vértice del cono y la recta límite será la traza β_0 de un plano β paralelo al plano α y que pase por el vértice del cono.

El procedimiento a seguir es el siguiente:

1º. Se determina el conjugado armónico I de V´(5) respecto de la directriz . Para ello se trazan dos tangentes a la directriz del cono por el vértice del mismo (centro de homología). La recta que une los dos puntos de tangencia T´(0) cortará a la recta V´O en el punto I. Cualquier circunferencia que pase por V´e I es ortogonal de la de centro O.

2º. Se traza, por lo dicho, la mediatriz del segmento IV´. Dicha recta corta a la R.L. en el punto Q. Seguidamente se traza la circunferencia de centro Q y que pase por los puntos V´ e I. Esta circunferencia cortará a la R. L. en los puntos conjugados F y G.

Las rectas que unen el vértice V´ con los puntos F y G serán las direcciones de los ejes de la elipse.

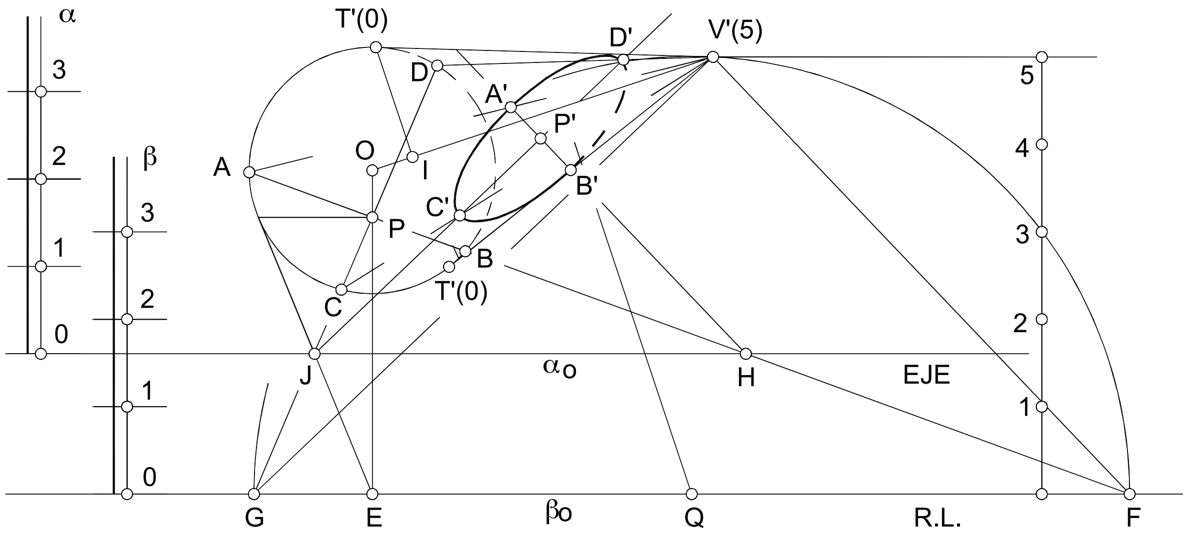


Fig.82

3º. Se determinan las polares de F y G respecto a la directriz O. Estas polares definen los pares de puntos A-B y C-D extremos de un par de cuerdas de la circunferencia de centro O, homólogas de los ejes de la elipse. Además las polares se cortan en el punto P, polo de la R.L. respecto de la directriz y homólogo del centro de la elipse. El triángulo GPF es autopolar.

4º. Los diámetros polares A-B y C-D cortan al eje en los puntos H y J respectivamente. Por el punto H se traza la paralela a la dirección V´F y por J la paralela a la dirección V´G. Estas rectas contienen a los ejes de la elipse y se cortan en el punto P´ homólogo del P.

5º. Se definen los puntos homólogos A´, B´, C´ y D´ de los puntos A, B, C y D, y estos serán los extremos de los ejes de la elipse sección. El paso final será trazarla mediante alguno de los métodos conocidos.

Verdadera magnitud de la sección producida por una plano oblicuo en una superficie cónica

En la fig.83 y con los datos del ejercicio anterior se determina la verdadera magnitud de la sección.

La relación homológica espacial entre la directriz y la sección a obtener se puede transformar en una homología plana mediante un abatimiento. De esta forma la figura homóloga de la directriz se obtendrá abatida y por tanto en verdadera magnitud.

Esta homología queda definida por los siguientes elementos:

Eje de homología: igual que en el caso anterior, la traza α_0 del plano que corta al cono.

Recta límite: La misma que en el caso anterior, es decir, la traza β_0. del plano β paralelo al secante que pasa por el vértice V´(5).

Centro de homología: El punto V_0, abatimiento del punto V´(5) en un abatimiento en el que se toma como charnela la recta límite β_0, ya que el punto V´ está contenido en el plano β.

Como se ve en la fig.83 el proceso para obtener la elipse es el mismo que en el caso anterior salvo que ahora se toma como centro de la homología el punto V_0 abatido del V´(5). El resultado es una elipse de ejes A´B´ y C´D´ que es la verdadera magnitud de la sección producida por el plano α en la superficie cónica.

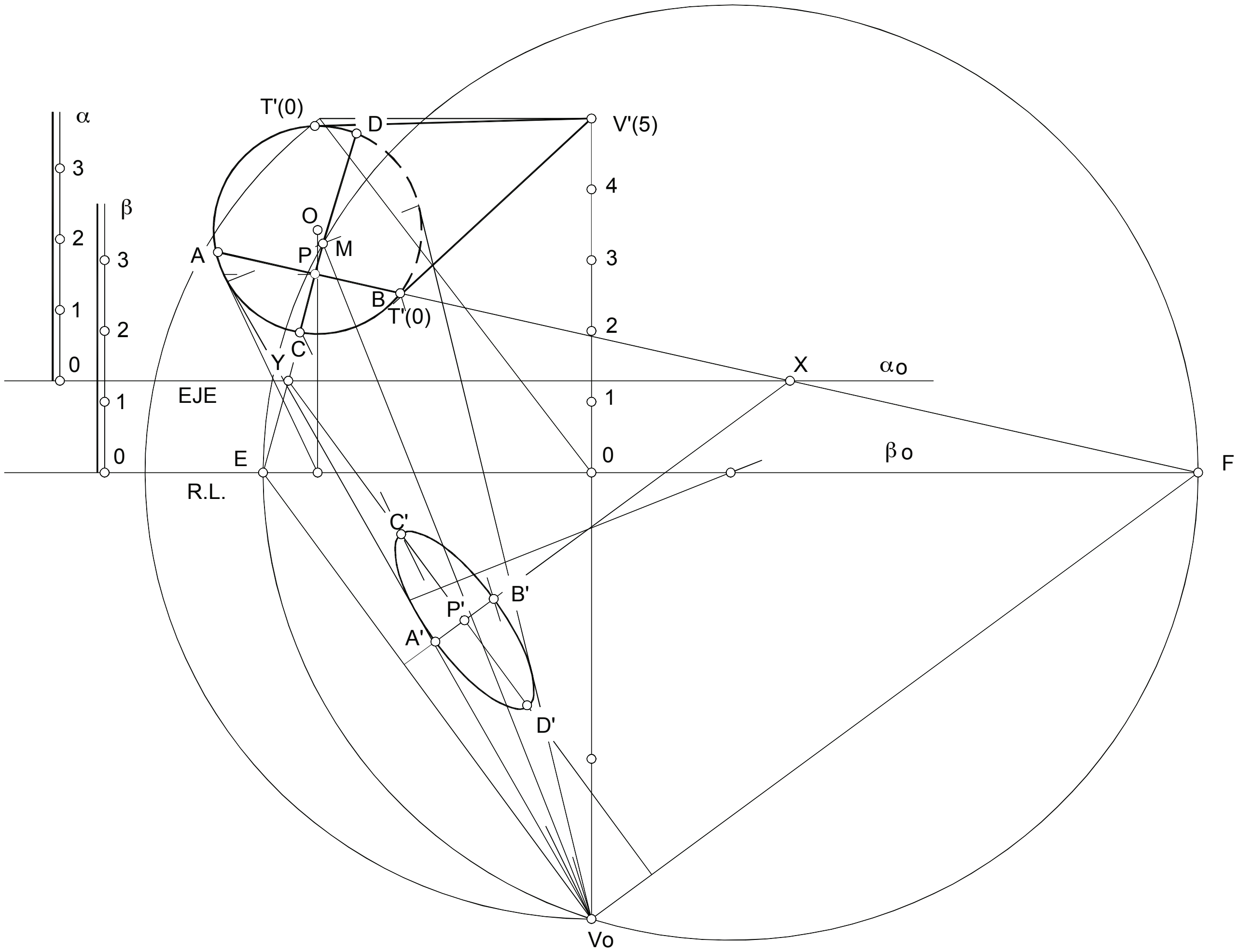


Fig.83

Tema 6

SUPERFICIES TOPOGRÁFICAS

Introducción

La aplicación directa y más importante del sistema de planos acotados es la representación de la superficie terrestre. Para ello se divide en pequeñas áreas en las que se considera que todos los puntos de ella tienen la misma cota, evitando así la curvatura de la superficie terrestre.

La representación se consigue con las proyecciones acotadas de una serie de secciones horizontales producidas por planos horizontales que cortan a la superficie y equidistan entre sí. El contorno de cada una de estas secciones es una curva llamada *curva o línea de nivel* en la que cada punto de ella tiene la misma cota o altitud. La separación fija entre cada dos planos se llama equidistancia.

Como se puede imaginar, cuando es menor la equidistancia mejor será la representación que de la superficie terrestre, ofrezca la superficie topográfica que la representa.

La obtención de las superficies topográficas en su definición, se realiza mediante métodos topográficos que no son el objeto de este tratado.

Sección longitudinal y transversal

Dado un tramo de superficie topográfica representada por sus curvas de nivel, para hallar la sección que en dicha superficie produce un plano oblicuo cualquiera, basta tomar como planos auxiliares secantes los planos horizontales que han producido las curvas de nivel. Según esto, se unen los puntos de intersección de estas curvas con las horizontales del plano secante de la misma cota y la curva que une estos puntos de intersección limita la sección producida. Cuando el plano que produce la sección es un plano vertical o proyectante, la sección recibe el nombre de perfil.

Según lo anterior se denomina perfil longitudinal a la sección producida en un terreno a lo largo de una trayectoria dada, mediante la cual se ve la representación del terreno a lo largo de dicha trayectoria. Así mismo se denomina perfil transversal a toda sección producida al terreno por un plano perpendicular a una dirección dada.

En la presentación de una sección, sea longitudinal o transversal, la escala de las cotas de los puntos puede ser menor que la del plano, con objeto de que resalten las pequeñas diferencias de nivel.

Explanaciones

La construcción de una explanación, es la preparación de una superficie en la que todos los puntos tengan la misma cota. Para insertar dicha explanación en un terreno que presenta desnivel, parte del trabajo consiste en eliminar un determinado volumen de tierra situado por encima de la citada explanación y por otra parte consistirá en añadir otro determinado volumen de tierra por debajo de la explanación. A estas operaciones se les llama desmonte y terraplén respectivamente.

Los pasos a seguir para realizar una explanación de forma correcta son:

-Determinar la cota idónea de la explanación, en función de la economía de trabajos, de forma que no predominen en mayor medida las operaciones de desmonte sobre las de terraplén y viceversa, siempre que no existan condicionantes que lo impidan.

La elección de dicha cota se realiza atendiendo al perfil longitudinal, obtenido según el eje de simetría elegido, del terreno donde deberá construirse la explanación. Es decir, se colocará la explanación de forma que, visualmente, se aprecie el menor predominio posible de los volúmenes de desmonte sobre los de terraplenado o viceversa. Esto se consigue tras realizar un número suficiente de perfiles que permita realizar una correcta apreciación. Una vez elegida la cota que tendrá la explanación y sobre el perfil del terreno se dibuja el perfil de la explanación, donde se reflejen el desmonte y terraplén con sus ángulos correspondientes.

-Teniendo en cuenta la equidistancia gráfica obtenida con anterioridad, se hallarán sobre el perfil, los intervalos de los taludes de desmonte y terraplén.

La citada equidistancia gráfica (e_g) se obtendrá dividiendo la equidistancia real (e_r) en milímetros, por el denominador (n) de la escala empleada para la realización del plano topográfico.

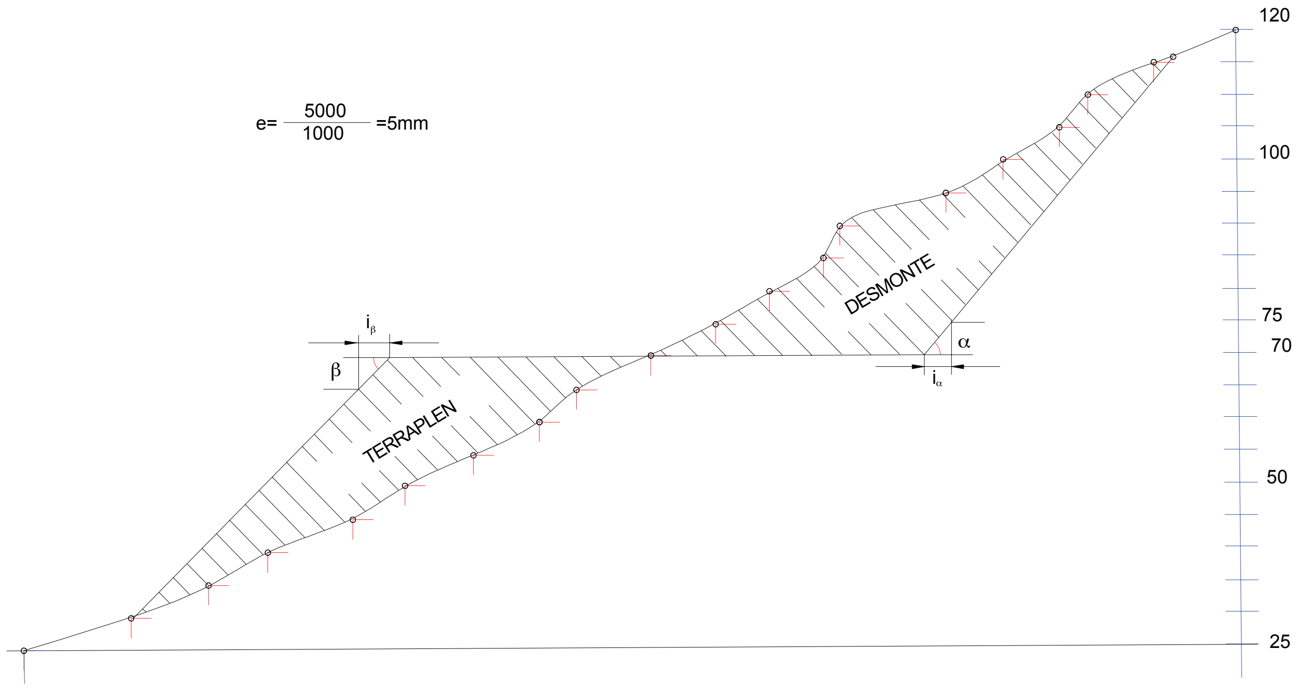
La equidistancia gráfica correspondiente a una equidistancia real de 5 m y escala en el plano 1:10000 será:

$$e_g = \frac{e_r}{n} = \frac{5000}{10000} = 0.5mm \quad \text{por lo que}$$

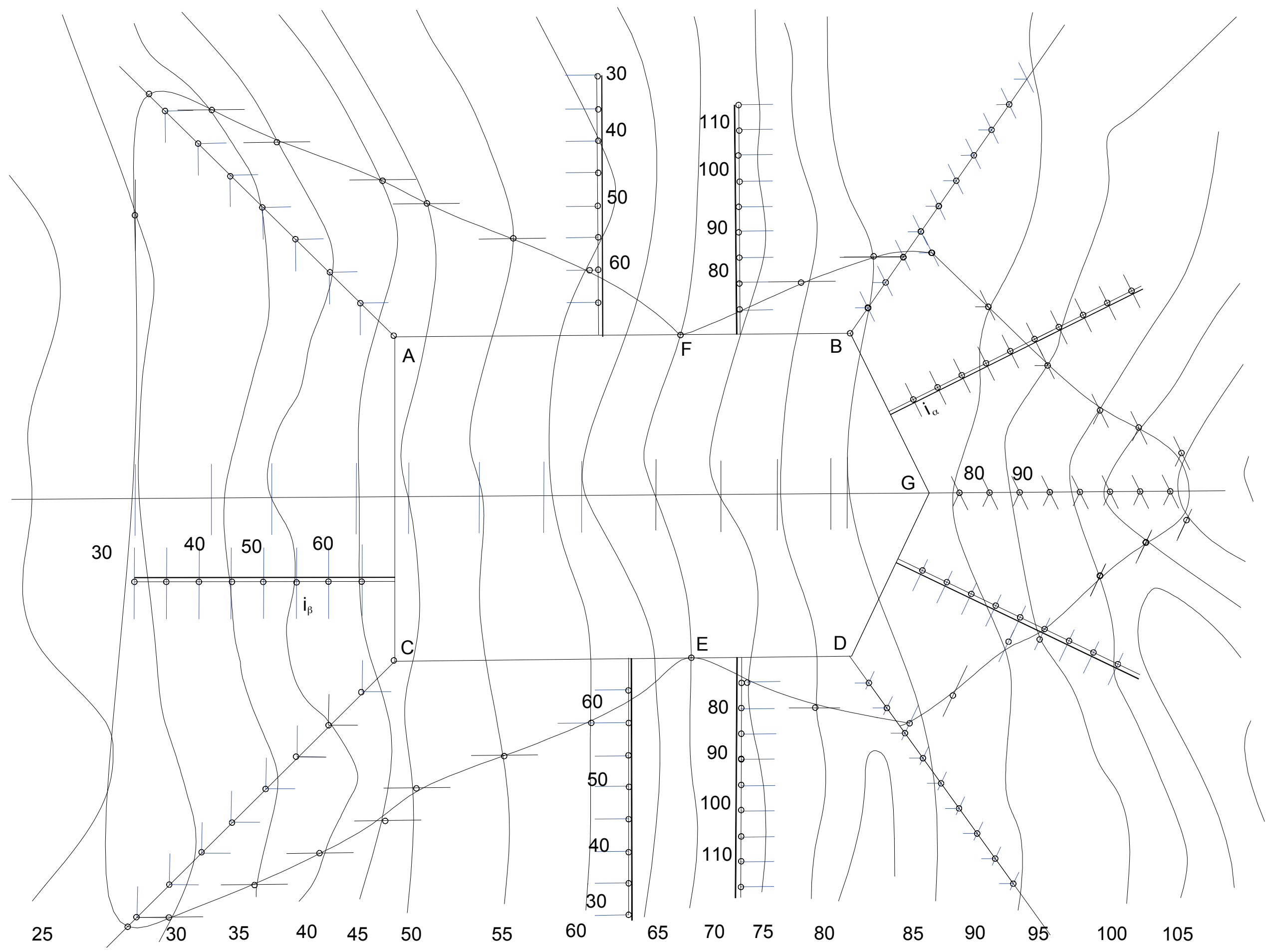
e_g= 5m:0.5mm o 10m:1mm

-Graduar las l.m.p. según las magnitudes de los intervalos de los planos que forman parte de los taludes, cuyas trazas son los límites de la explanación. La curva de nivel cuya cota es igual que la de la explanación, corta a dos límites de ésta en los puntos E y F, delimitando la partes correspondiente al desmonte y la parte correspondiente al terraplén. Por lo tanto dicha curva separa a la explanación en dos partes sobre las que los planos a trazar en cada una de ellas serán de desmonte o terraplén según se observe en el perfil de la explanación.

-Se hallarán las intersecciones de los planos en desmonte o terraplén con el terreno. Para ello proceder como en la intersección de dos planos cualesquiera, hallando los puntos de intersección de las horizontales de los planos con las curvas de nivel de igual cota. Posteriormente se unirán los puntos así obtenidos mediante una línea convencional, obteniendo como resultado, en planta los límites del movimiento de tierras. Todo esto se realiza gráficamente en el ejemplo de la página siguiente.


e= 5000/1000 =5mm
120
100
75
70
50
25
TERRAPLEN
DESMONTE
β
α

E/1:1000


A
F
B
G
C
E
D
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90
95
100
105
110

Alineaciones

Una vez situada la alineación sobre el plano topográfico, se debe practicar una sección longitudinal que, informe sobre en que partes habrá que realizar desmonte y sobre cuales terraplén.

Los casos tipo que pueden aparecer a la hora de realizar una alineación son:

1º. Alineación recta y horizontal.

2º. Alineación recta y con pendiente.

3º. Alineación curva y horizontal.

4º. Alineación curva y con pendiente.

Alineación recta y horizontal

- En primer lugar habrá que determinar el perfil longitudinal de la alineación producido por el plano proyectante que pasa por el eje de la carretera. Si no se da una cota prefijada para dicha carretera, a partir del perfil longitudinal se establecerá la posición ideal de la misma quedando así definida su cota.

- Se hallarán posteriormente los puntos de intersección de la carretera con las curvas de nivel cuya cota sea igual a la de la alineación. Dichos puntos marcan el límite entre los taludes de desmonte y los de terraplén. Posteriormente se trazarán las l.m.p. graduadas de dichos taludes en función del intervalo hallado a partir de la equidistancia gráfica que se habrá obtenido anteriormente según la escala del dibujo y la equidistancia real.

El último paso consiste en hallar la intersección de las horizontales de los planos que representan a los taludes con las curvas de nivel de igual cota, tal y como se realizó en el caso de la explanación, quedando así definida la intersección de dichos taludes con el terreno, y estableciendo así los límites del movimiento de tierras.

Alineación recta y con pendiente

- Como se dijo anteriormente el primer paso es la realización del perfil longitudinal para apreciar de una forma visual y rápida, la posición de la alineación respecto al terreno.

- Seguidamente se obtendrá el intervalo -i- de los taludes así como el intervalo -d- correspondiente a la pendiente de la carretera. A continuación se procede a modular la carretera, trazando líneas modulares, a partir de un punto de cota conocida, espaciadas en un valor igual al valor del intervalo -d-, y colocando a su lado la cifra de cota correspondiente. Se determinarán además, los puntos de intersección de la carretera con las curvas de nivel que tengan su misma cota.

-Posteriormente se trazarán los planos de desmonte o terraplén siguiendo el procedimiento empleado para hacer pasar un plano de pendiente conocida por una recta dada. Por ejemplo si se trata de un plano de terraplenado, la horizontal de cota C será aquella que pasando por el punto de cota C del borde de la carretera, sea tangente a la circunferencia de radio -i-, intervalo de los taludes, y centro el punto de cota C+d. Si se trata de planos de desmonte la horizontal de cota, C´, pasará por el punto de cota C´ del borde de la carreteras y será tangente a la circunferencia de radio -i- y centro el punto de cota C´-d. Posteriormente se trazarán las l.m.p. de dichos planos que serán perpendiculares a las horizontales de cotas halladas.

- El último paso consiste en hallar las intersecciones de los planos de desmonte y terraplén con el terreno, proceso que ya se conoce.

Alineaciones curvas y horizontales

Como es común a todos los casos sobre alineaciones y explanaciones, el primer paso consiste en realizar el perfil de dicha alineación. Es preciso indicar que el perfil longitudinal de una alineación curva precisa de la rectificación del arco de circunferencia al que la curva pertenece. Así mismo deberá hallarse el intervalo de los taludes a partir de la equidistancia previamente calculada.

- La resolución consiste en trazar circunferencias cuyo centro sea el mismo que el del eje de la carretera, y a partir de los límites de la misma y cuyo radio aumentará en un módulo igual al intervalo de los taludes. En los desmontes a mayor radio mayor cota y en los terraplenes a mayor radio cota menor. La intersección de estos arcos con las curvas de nivel definirán las intersecciones de los taludes con el terreno.

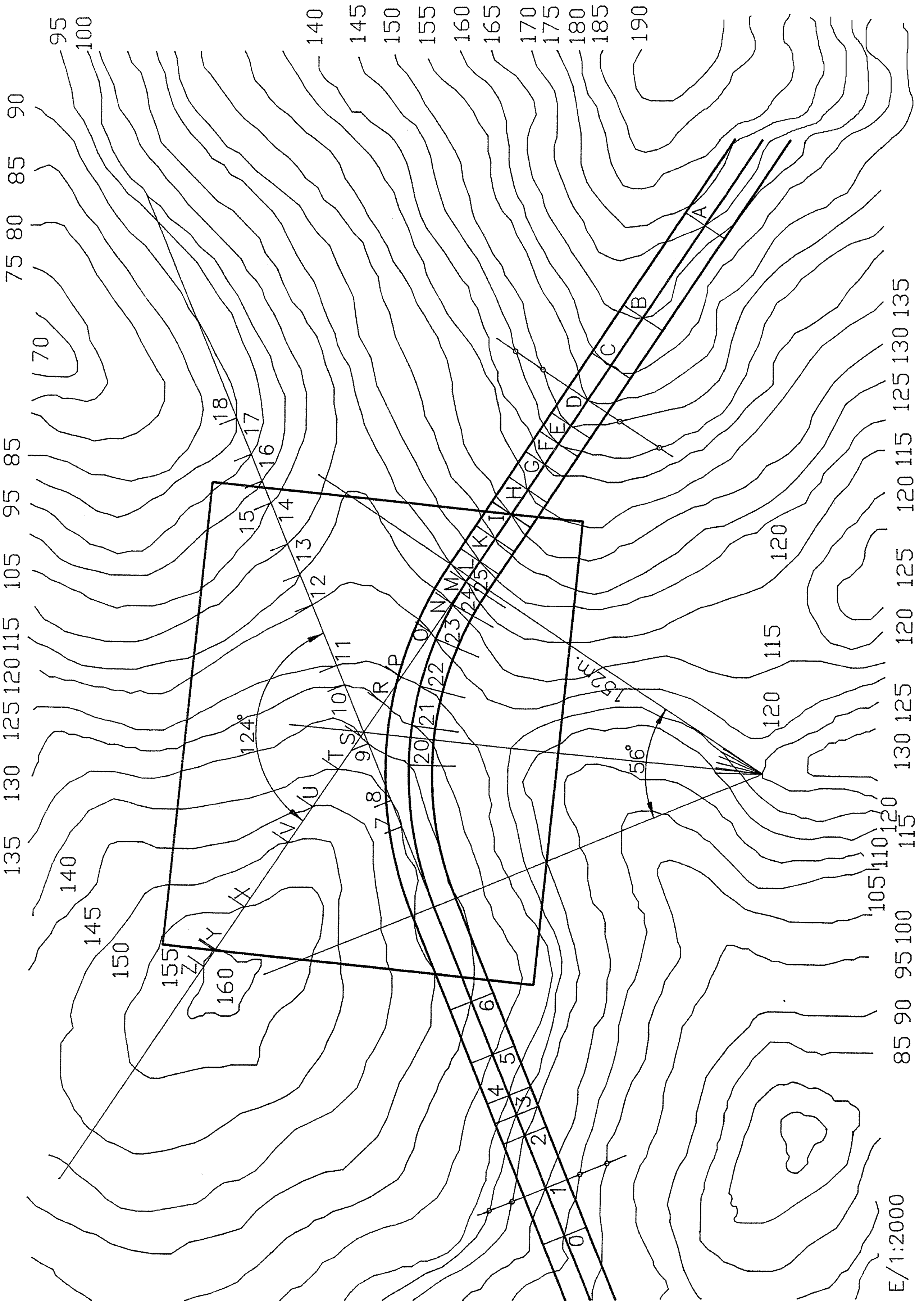
Alineación curva y con pendiente

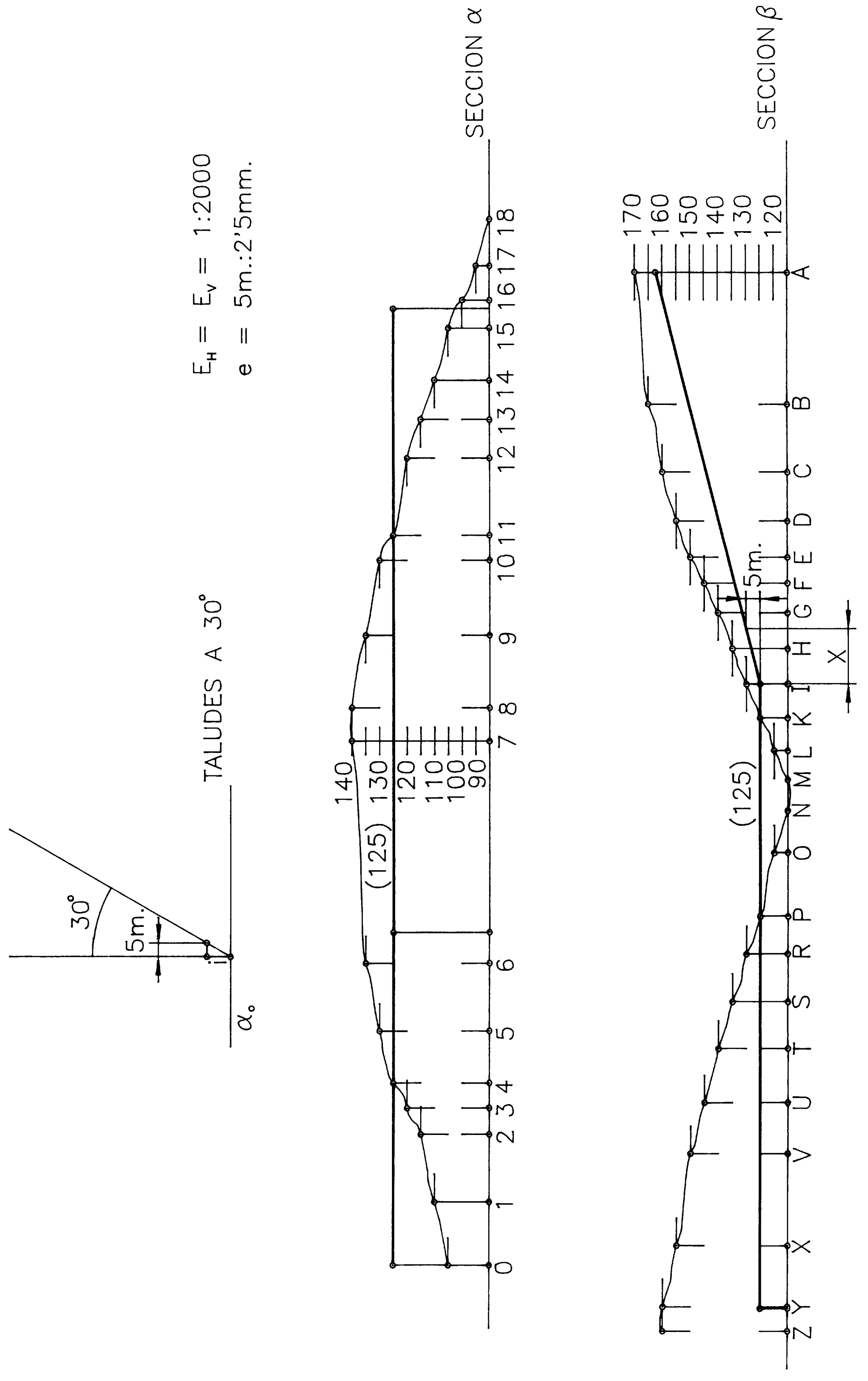
En primer lugar se trazará el perfil longitudinal de dicha alineación para lo cual es necesario rectificar la curva. Posteriormente se hallará el intervalo -i- de los taludes y el intervalo -d- de la pendiente de la carretera en la forma conocida.

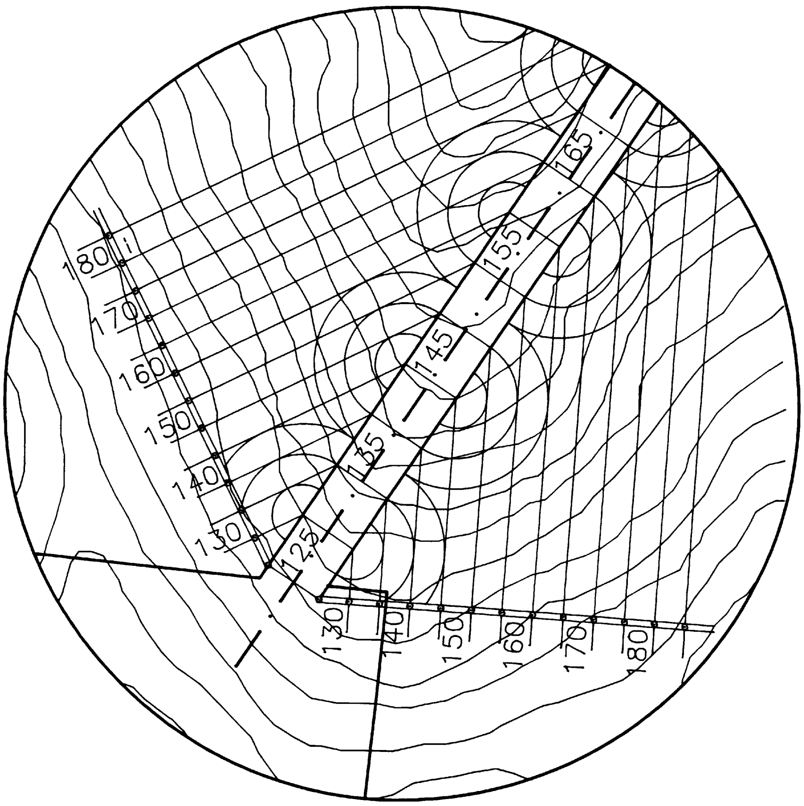
- A continuación se modula la alineación partiendo de un punto de cota conocida, colocando líneas modulares con una separación igual al intervalo. Para realizar esto de forma precisa es necesario que se module sobre la rectificación. de la curva. Al lado de cada línea modular se incluirá la cota de la misma.

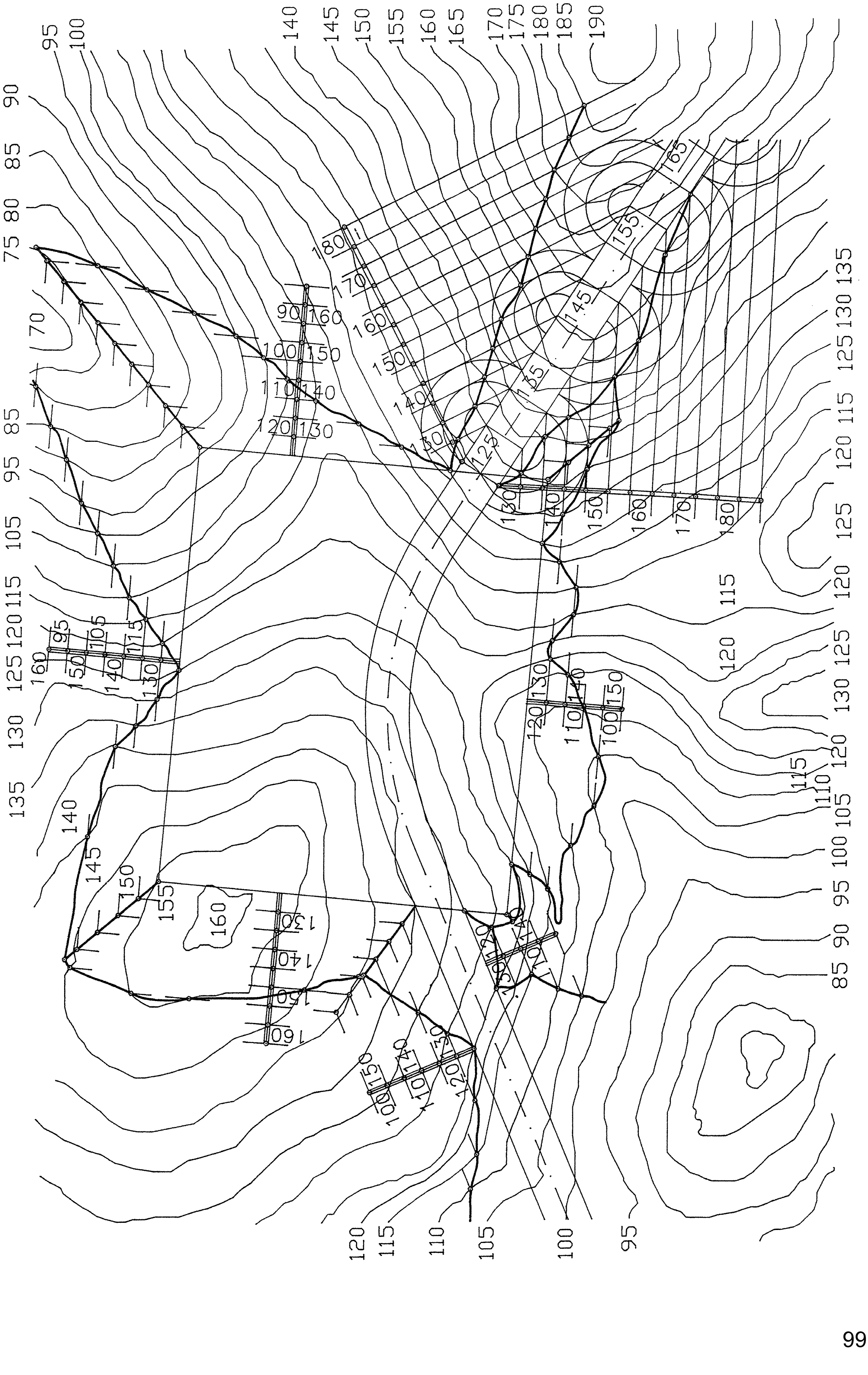
- Posteriormente por los puntos del borde de la carretera cuya cota se ha hallado al modular la misma, se trazarán circunferencias concéntricas, proyecciones de las bases de los conos sobre los que se apoya la superficie de los taludes cuyos radios son el intervalo i y sus múltiplos. Así, en el caso de que se estén hallando taludes de terraplenado y de una forma similar al caso de alineación recta y con pendiente, las horizontales tangentes a las bases de igual cota serán curvas envolventes paralelas entre si. Posteriormente se determinan las intersecciones de dichas curvas con las curvas de nivel, obteniendo así la intersección de los taludes con el terreno.

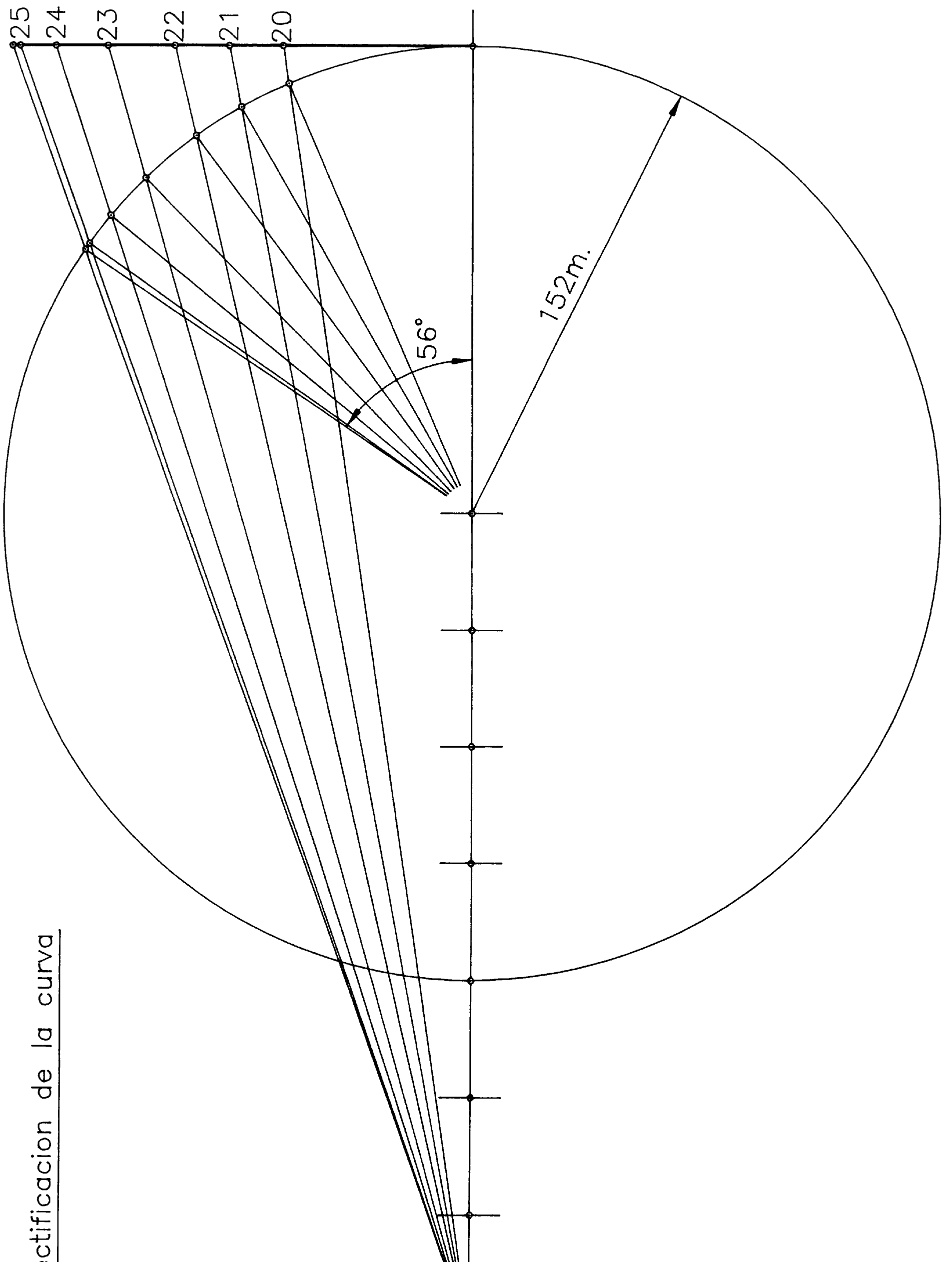
A continuación se expone un ejemplo en el que se combinan parte de los casos anteriores en uno solo. En el ejercicio en cuestión se ha de resolver una carretera de 20 m. de ancho de vía. Dicha carretera tiene un tramo recto y horizontal por el que se accede a una explanación que sirve para el servicio de la vía. El tramo de carretera contenido en la explanación es una alineación curva y horizontal que desemboca en un tramo de carretera recto y con pendiente ascendente del 25%. Se deberán realizar los perfiles longitudinales definidos por las trazas de los planos proyectantes que pasan por el eje de los tramos rectos. Así mismo se realizará el perfil longitudinal de la alineación completa. Para realizar este ejercicio se procede por partes tal y como se muestra en los dibujos, de forma que se facilite la comprensión del mismo.

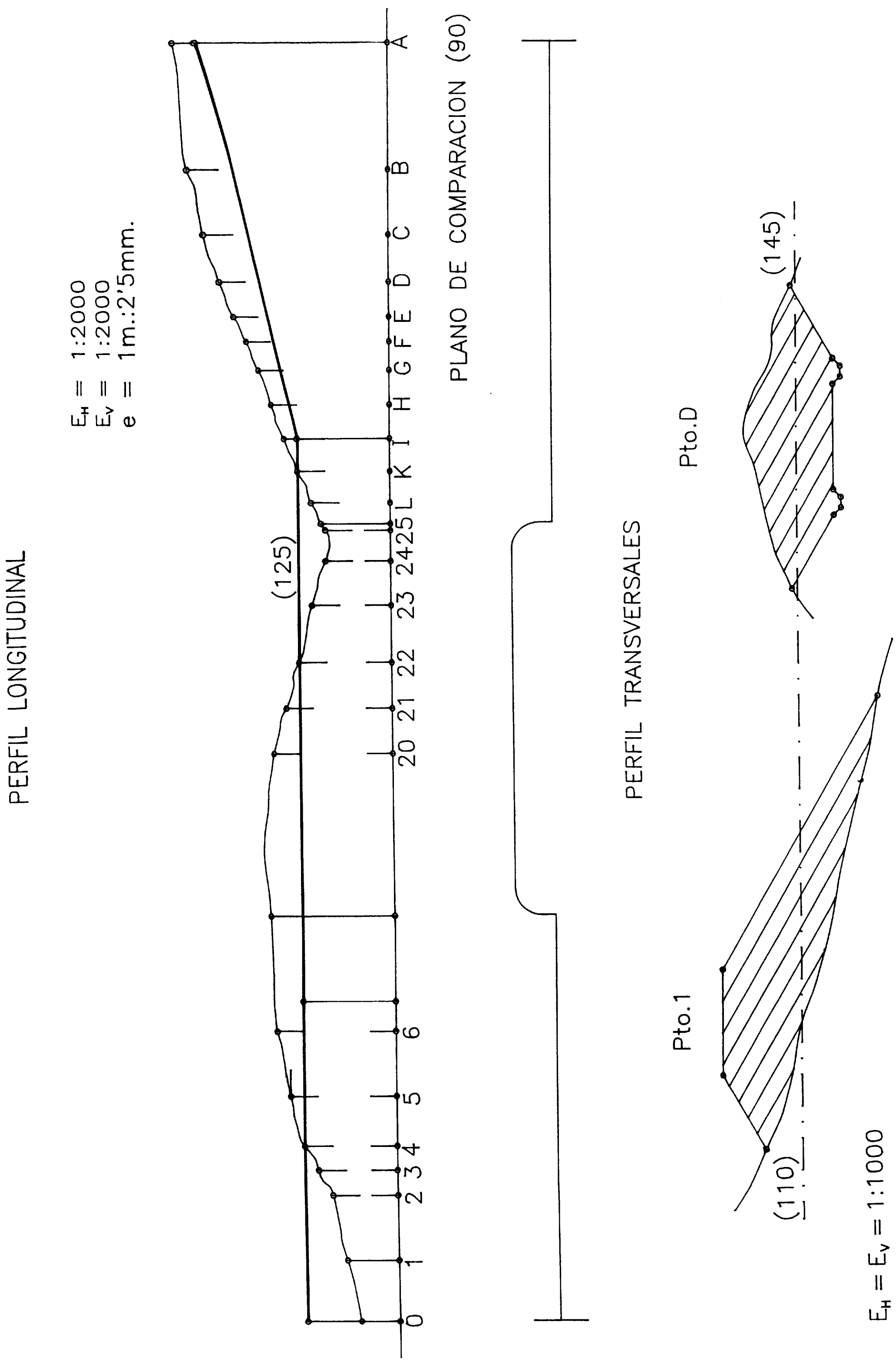

E/1:2000
124°
56°

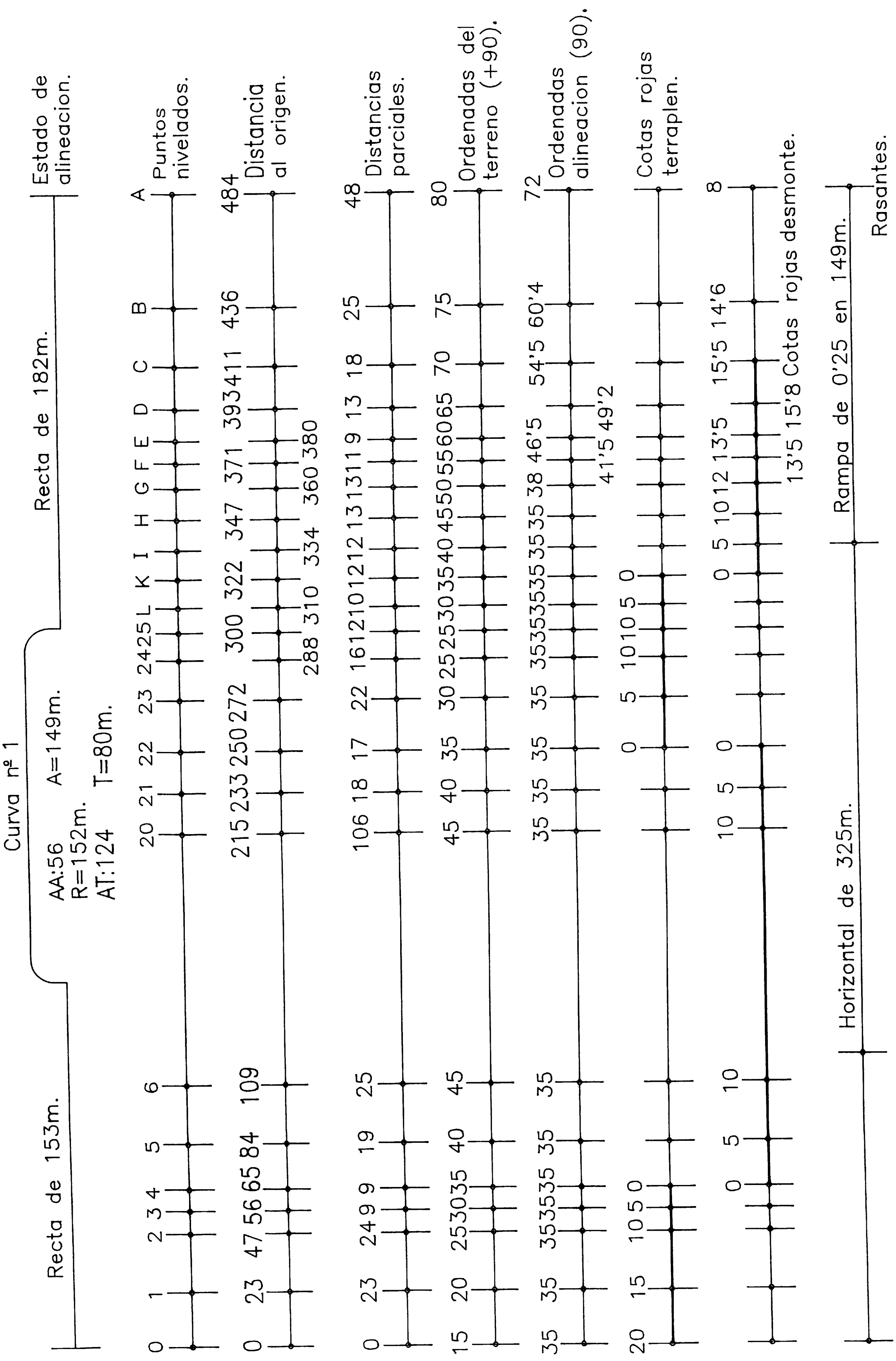

TALUDES A 30°
30°
5m.
$E_H = E_V = 1:2000$
$e = 5m.:2'5mm.$
SECCION α
(125)
140
130
120
110
100
90
SECCION β
170
160
150
140
130
120
5m.
X
(125)

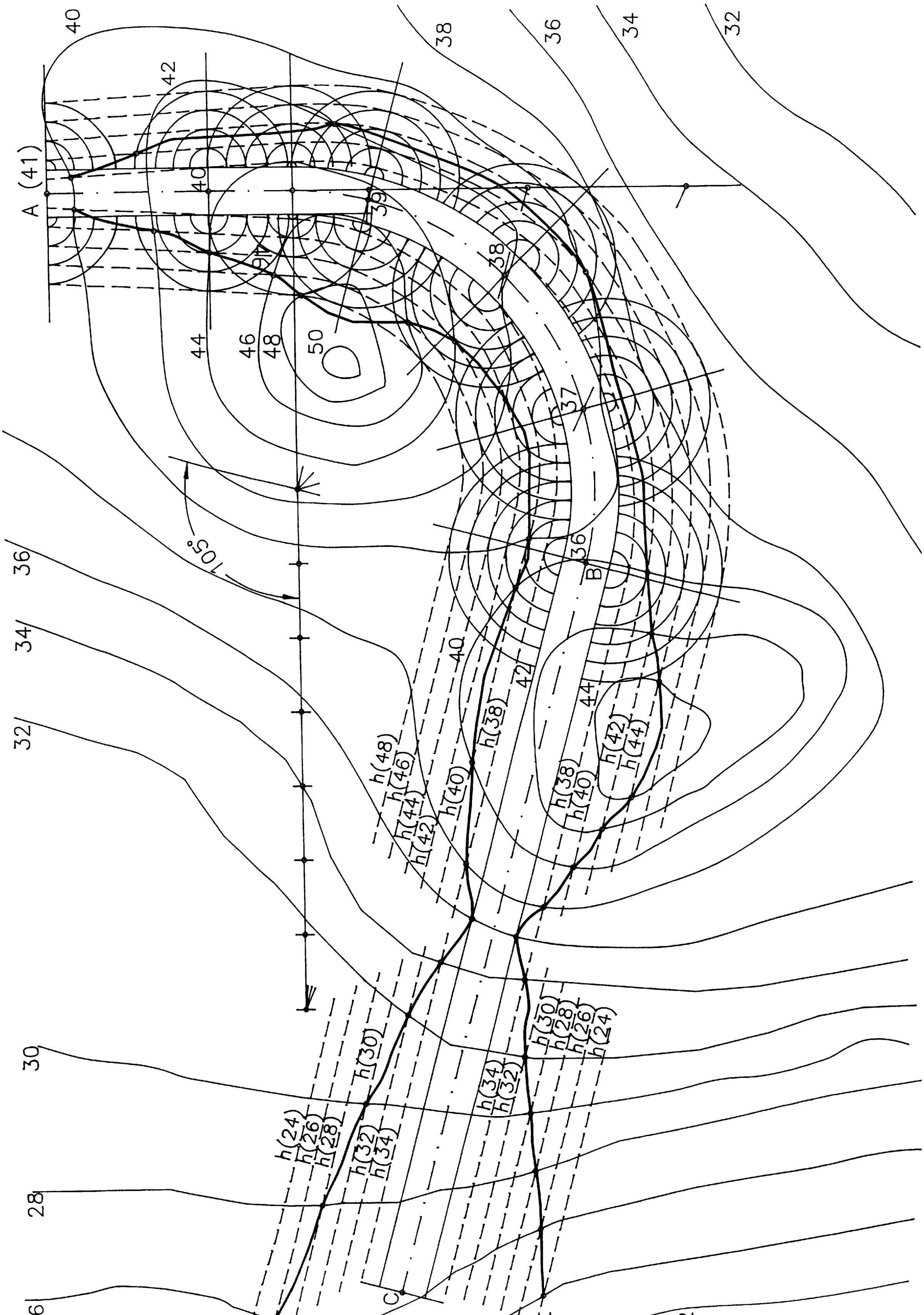

180
170
160
150
140
130
125
135
145
155
165
130
140
150
160
170
180




25
24
23
22
21
20
56°
152m.
Rectificacion de la curva


PERFIL LONGITUDINAL
E_H = 1:2000
E_V = 1:2000
e = 1m.:2'5mm.
(125)
A B C D E F G H I K L 25 24 23 22 21 20
6 5 4 3 2 1 0
PLANO DE COMPARACION (90)
PERFIL TRANSVERSALES
Pto.D
(145)
Pto.1
(110)
E_H = E_V = 1:1000


Estado de alineacion.
Recta de 153m.
Curva nº 1
AA:56 R=152m. AT:124
A=149m. T=80m.
Recta de 182m.
Puntos nivelados.
Distancia al origen.
Distancias parciales.
Ordenadas del terreno (+90).
Ordenadas alineacion (90).
Cotas rojas terraplen.
Cotas rojas desmonte.
Rasantes.
Horizontal de 325m.
Rampa de 0'25 en 149m.


A (41)
B
C
105°
h(48)
h(46)
h(44)
h(42)
h(40)
h(38)
h(36)
h(34)
h(32)
h(30)
h(28)
h(26)
h(24)

CALCULO DE MOVIMIENTO DE TIERRAS. COMPENSACIONES

A. Método numérico o del Prismatoide

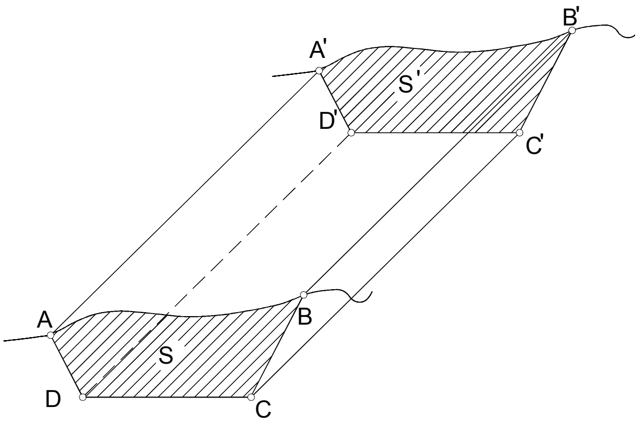


Fig.84

La cimentación de un camino o carretera está generalmente constituida por el terreno natural debidamente compactado. Es una operación por tanto referida en su totalidad a obras de tierra, que son a menudo la partida mayor en importancia económica, sobre todo en caminos rurales. Se debe conocer exactamente el volumen de tierra que es necesario mover para realizar la excavación y cimentación.

Para conocer le presupuesto será necesario determinar:

a) La superficie ocupada por el movimiento de tierras, así como el ancho.
b) La superficie de los taludes, de desmonte o terraplén.
c) El ya citado volumen de movimiento de tierras, así como la distancia media de transporte.

El ancho y la superficie de la zona ocupada por la vía, dependen de la cota roja de desmonte o terraplén y de la inclinación de los taludes.

Mediante el cálculo gráfico, se calculan los volúmenes de desmonte y terraplén en las obras, aplicándose este sistema de cubicación para lograr unas compensaciones entre los citados volúmenes que permitan llevar al mínimo los gastos de transporte.

No es aquí donde se demostrarán las conocidas fórmulas para el cálculo de las cubicaciones de tierras por el método del prismatoide, solo se expondrán con el fin de tenerlas en consideración :

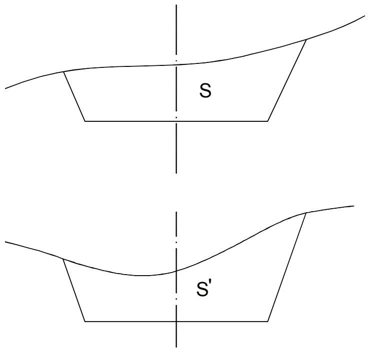


Fig.85

1-.Los dos perfiles transversales son en desmonte o en terraplén: (Fig.85)

$V(Volumen) = \dfrac{S+S'}{2} \cdot D$ (distancia entre perfiles)

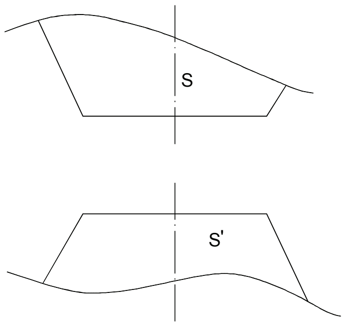


Fig.86

2-.Un perfil transversal en desmonte y otro en terraplén: Fig.86)

$$V_D = \frac{S^2}{S+S'} \cdot \frac{D}{2}$$

$$V_T = \frac{S'^2}{S+S'} \cdot \frac{D}{2}$$

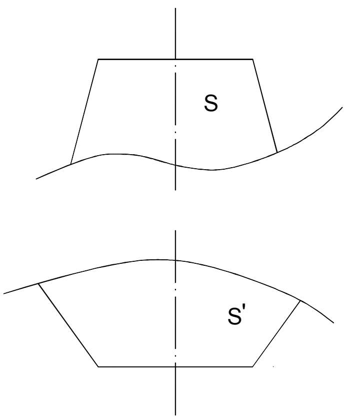


Fig.87

3-.Un perfil transversal en terraplén y otro en desmonte: (Fig.87)

$$V_D = \frac{S'^2}{S+S'} \cdot \frac{D}{2}$$

$$V_T = \frac{S^2}{S+S'} \cdot \frac{D}{2}$$

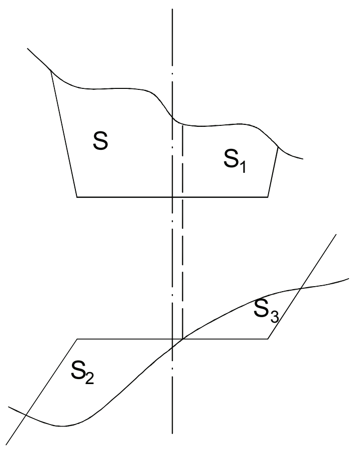


Fig.88

4-.Un perfil transversal en desmonte y otro mixto de terraplén y desmonte: (Fig.88)

$$V_D = \left(\frac{S^2}{S+S_2} + S_1 + S_3 \right) \cdot \frac{D}{2}$$

$$V_T = \frac{S_2^2}{S+S_2} \cdot \frac{D}{2}$$

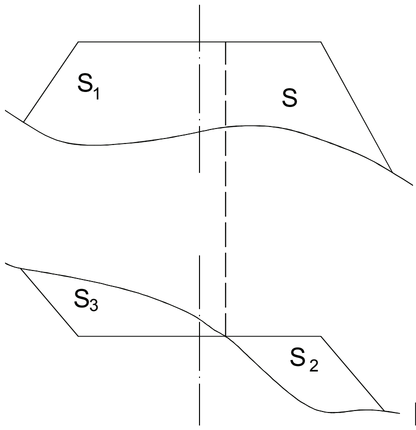


Fig.89

5.-Un perfil transversal en terraplén y otro mixto en desmonte y terraplén: (Fig.89)

$$V_D = \frac{S_3^2}{S_1 + S_3} \cdot \frac{D}{2}$$

$$V_T = \left(\frac{S_1^2}{S_1 + S_3} + S + S_2 \right) \cdot \frac{D}{2}$$

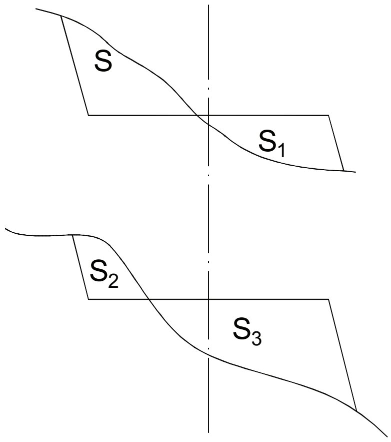


Fig.90

6.-Los dos perfiles transversales mixtos de desmonte y terraplén: (Fig.90)

$$V_D = \frac{S + S_2}{2} \cdot D$$

$$V_T = \frac{S_1 + S_3}{2} \cdot D$$

B. Método gráfico

Las distancias (D) que existen entre cada dos perfiles se trasladan a un eje de abscisas, y de esta forma se obtendrá una recta de longitud similar (a la escala elegida) a la del perfil longitudinal y, en ella, a distancias iguales a las del perfil longitudinal, estarán señalados por puntos los diversos perfiles transversales dados.

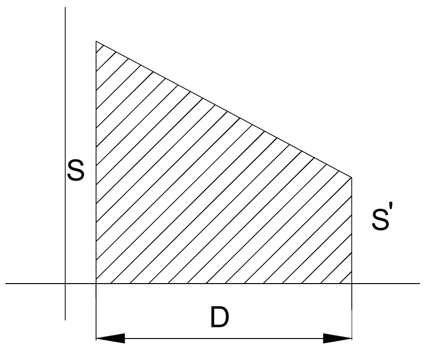
Sobre estos puntos indicadores de cada perfil transversal se levantarán perpendiculares, cuyas longitudes serán las representaciones gráficas de las superficies correspondientes a cada uno de los anteriormente indicados perfiles transversales. Estas perpendiculares serán positivas en caso de terraplén y negativas o por debajo del eje de abscisas en caso de desmonte.

Es aconsejable y generalmente se suele trabajar así, que la escala vertical sea 10 veces la horizontal, aunque se puede estudiar el gráfico según las medidas correspondientes.

Conocido el método, se muestra seguidamente el sistema de cubicación entre perfiles, refiriéndose a los tipos de relaciones reflejadas en el apartado A) estudiado y referido al método numérico.

1º) Los dos perfiles transversales en desmonte o terraplén.

Según lo señalado en el método anterior, ahora se unirán los extremos de las perpendiculares de ordenadas que representan las superficies de los perfiles, y con ello se habrán formado unos trapecios cuyo número indicativo de superficie es igual al que representa el volumen entre dos perfiles transversales consecutivos. Fig.91

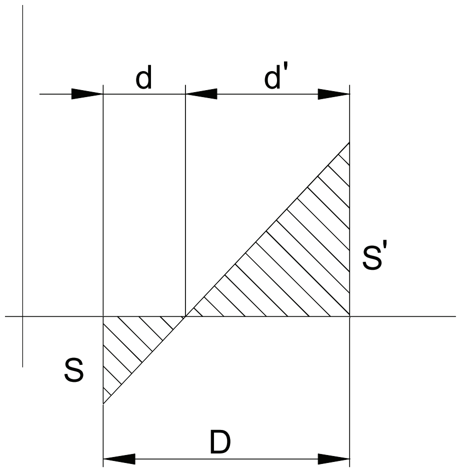


$$S_T = \frac{S + S'}{2} \cdot D \quad \text{y como}$$

$$V_T = \frac{S + S'}{2} \cdot D \quad \text{resulta que} \quad S_T \approx V_T$$

Fig.91

2º) Un perfil en desmonte y otro en terraplén. Fig.92



$$S_D = \frac{S \cdot d}{2}$$

$$S_T = \frac{S' \cdot d'}{2}$$

$$V_D = \frac{S^2}{S + S'} \cdot \frac{D}{2}$$

$$V_T = \frac{S'^2}{S + S'} \cdot \frac{D}{2}$$

Fig.92

Los dos triángulos formados son semejantes por lo que, según lo indicado, se establecerá la siguiente equivalencia:

$$\frac{S}{d} = \frac{S'}{d'} = \frac{S + S'}{d + d'} = \frac{S + S'}{D}$$

$d = \dfrac{S}{S + S'} \cdot D$ y $d' = \dfrac{S'}{S + S'} \cdot D$ y sustituyendo, resultará

$S_D = \dfrac{S^2}{S + S'} \cdot \dfrac{D}{2}$ y $S_T = \dfrac{S'^2}{S + S'} \cdot \dfrac{D}{2}$ de donde

$S_D \approx V_D$ y $S_T \approx V_T$

3º) Un perfil transversal en terraplén o desmonte y el otro mixto en terraplén y desmonte o viceversa. Fig.93

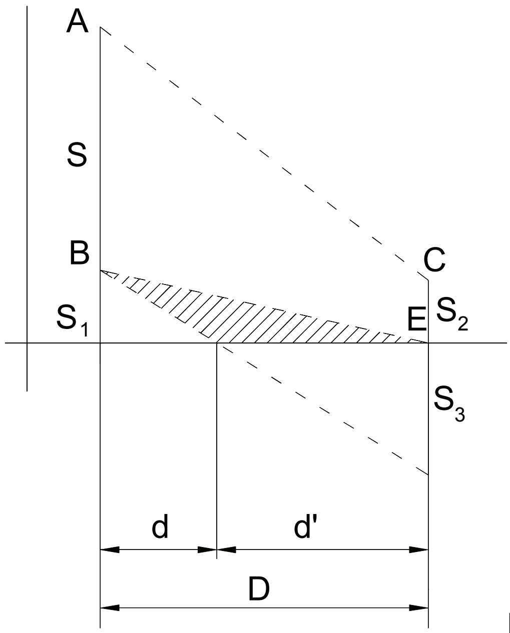


Fig.93

Según el método numérico:

$$V_D = \frac{S_3^2}{S_1 + S_3} \cdot \frac{D}{2}$$

$$V_T = \left(\frac{S_1^2}{S_1 + S_3} + S + S_2 \right) \cdot \frac{D}{2}$$

estudiando el gráfico, resulta que:

$$V_D \approx S_D = \frac{S_3 \cdot d'}{2}$$

Para el terraplén resultará:

$$V_T = \frac{S_1^2}{S_1 + S_3} \cdot \frac{D}{2} + \frac{S + S_2}{2} \cdot D$$

La primera parte es equivalente a la superficie del triángulo, es decir:

$$V \approx S = \frac{S_1 \cdot d}{2}$$

La segunda parte es equivalente a la superficie del trapecio ABEC.

4º) Los dos perfiles mixtos (de desmonte y terraplén).Fig.94

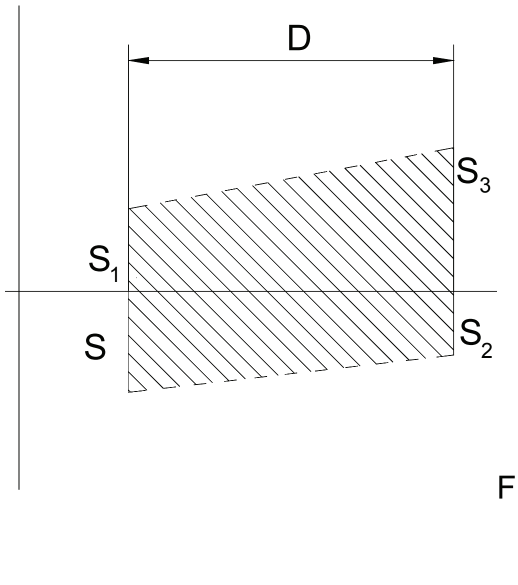


Fig.94

Como se trata de un tipo de relación similar al caso primero, se podrá decir directamente que :

$$V_D \approx S_D$$

$$V_T \approx S_T$$

C. Compensación de tierras

Basándose en los cálculos y gráficos expuestos, se puede llegar a calcular los volúmenes de tierra que se han de mover, así como las distancias que cada una de las máquinas que realizan estos movimientos han de recorrer.

Se comienza por dividir la totalidad del gráfico que representa las superficies de cada perfil en tramos iguales de 100 m . Posteriormente, mediante la planimetría de cada uno de ellos, se calcularán los volúmenes correspondientes dentro de estos tramos y la suma total será el volumen total de terraplén o desmonte, en la página siguiente se reproduce un modelo de impreso utilizado por los técnicos con el que se pueden reflejar esos volúmenes que se pretenden mover, así como las distancias.

Las definiciones y relaciones entre las diversas columnas será:

A = Volumen de terraplén.

B = Volumen de desmonte.

C = Volumen de desmonte que se puede aprovechar dentro de cada tramo para terraplenar

si A<B $\begin{cases} D = B - A \\ D = B - C \end{cases}$ si A>B $\begin{cases} E = A - B \\ E = A - C \end{cases}$ ó $\begin{cases} A - C = E \\ B - C = D \end{cases}$

La columna F se utilizará para calcular la procedencia de la tierras necesarias para subsanar el déficit de las mismas en aquellos tramos en que $V_T > V_D$.

La columna G servirá para conocer el volumen de tierras sobrantes después de terraplenar toda la obra.

En la columna H se indicará el volumen total de tierra desmontada con tractor bulldozer, y que será la que se aprovecha entre perfiles transversales, mas la que es necesario retirar, por sobrante, del camino; es decir, H=C-G.

El resto será desmontada y movida mediante el uso de trailla, cuyo volumen se reflejará en la columna I y por lo tanto I=E=F.

Por este método sencillo y útil se pueden conocer las distancias mínimas de transporte necesarias para lograr la compensación de las deficiencias debidas a los terraplenes y, a partir de su cálculo mediante la tabla reproducida, se puede comenzar a realizar el presupuesto de los movimientos de tierra encaminados a la excavación de la obra. Se deberá también considerar la naturaleza del terreno, los medios empleados, maquinaria, etc.

Tramos 100m gráfico	A	B	C	D	E	F			G	H		I	
	Terraplén m^3	Desmonte m^3	Aprovecha-miento en el perfil	Sobran m^3	Faltan m^3	Transporte de tierra			Tierra sobrante	Volúmenes		Movidos	
						Volumen de tierra	Tramos de proce.	Distancia media		Bulldozer	Traila hasta 150m	Trail. entre 150 y 250m	Trail. mas de 250m

POLIEDROS

EJERCICIOS RESUELTOS

TETRAEDRO

Ejercicio 1:

Proyección acotada de un tetraedro regular con una cara apoyada sobre un plano α de p=2/3. Del tetraedro se conoce un vértice A(4) y el valor de la arista que es 40 mm. La arista que pasa por A y está contenida en el plano forma 30º con α_{o}.

Ejercicio 2:

Proyección acotada de un tetraedro del cual se conoce que una arista AB está apoyada sobre un plano α de p=2/3 y que mide 50 mm. La arista CD forma un ángulo de 15º con el plano α y la arista AB forma con α_o un ángulo de 60º.

Ejercicio 3

Proyección acotada de un tetraedro con una arista apoyada en un plano de p=4/5. La arista tiene una p=30º y 70 mm.

Ejercicio 4:

Proyección acotada de un tetraedro con la sección principal apoyada sobre un plano de p=2/3. Del tetraedro se conoce un vértice B(3); el valor de la arista que es 50 mm. La arista en el plano forma 30º con α_{o}.

Ejercicio 5:

Una de las aristas de un tetraedro regular tiene pendiente p=3/4. Un punto N, que se sabe es el punto medio de la arista opuesta a ésta, tiene de cota 45 y se halla situado en proyección a 5 cm de los puntos de cota 41 y 46 de la arista dada.

Ejercicio 6:

Partiendo de los datos del ejercicio 5, una vez que se tiene construido el tetraedro, inscribir otro tetraedro dentro del primero.

HEXAEDRO

Ejercicio 7:

Proyección acotada de un hexaedro con una cara apoyada sobre un plano α de p=2/3. Del hexaedro se conoce un vértice A(3) y el valor de la arista que es 40 mm. La arista que pasa por A(3) y está contenida en el plano forma 30º con α_0.

Ejercicio 8:

Proyección acotada de un hexaedro conocido un vértice A(3) de éste, por el cual pasa una diagonal -D- del poliedro. Dicha diagonal tiene una pendiente de 45º y mide 70 mm.

Ejercicio 9:

Proyección acotada de un hexaedro, con una arista apoyada sobre un plano α de p=1/2. El hexaedro está en equilibrio. La arista mide 50 mm.

Ejercicio 10:

Proyección acotada de un hexaedro del cual se conoce una arista de 50 mm apoyada sobre una plano de p=2/3. Esta arista forma con α_o un ángulo de 60º. Una de las caras que contiene a esta arista forma 30º con el plano α.

Ejercicio 11:

Proyección acotada de un hexaedro cuya arista tiene una pendiente de 30º y está apoyada sobre un plano de pendiente p=4/5. La arista mide 50 mm.

Ejercicio 12:

Proyección acotada de un hexaedro conocidas las direcciones de las tres aristas concurrentes en un punto A(4); la arista mide 32 mm y el punto A se encuentra sobre un plano de pendiente p=1/2.

Ejercicio 13:

Partiendo de los datos del ejercicio 7, una vez que se tiene construido el hexaedro, inscribir en él un octaedro.

Ejercicio 14:

Partiendo de los datos del ejercicio 10, una vez que se tiene construido el hexaedro, inscribir en él un tetraedro.

Ejercicio 15:

Partiendo de los datos del ejercicio 7, una vez que se tiene construido el hexaedro, construir una pirámide en cada cara de éste de altura la arista del hexaedro.

OCTAEDRO

Ejercicio 16:

Determinar las proyecciones de un octaedro en el sistema acotado, una de cuyas diagonales mide 10 cm y forma un ángulo de 60º con el plano de proyección. Uno de los vértices no situados en dicha diagonal tiene 24.5 de cota, siendo el centro del octaedro el punto de cota 25.

Ejercicio 17:

Representación en proyección acotada de un octaedro con una diagonal que forme 45º con el plano del cuadro y de 50 mm de arista. Una de las diagonales perpendicular a la anterior forma 60º con α_0, traza del plano que la contiene.

Ejercicio 18:

Proyección acotada de un octaedro con una cara apoyada sobre un plano de p=2/3. Del octaedro se conoce un vértice A(4); el valor de la arista que es 40 mm. La arista que pasa por A y está contenida en el plano, forma 30º con α_o.

Ejercicio 19:

Proyección acotada de un octaedro cuya arista tiene una pendiente de 30º y está apoyada sobre un plano de pendiente p=4/5. La arista mide 50 mm.

Ejercicio 20:

Proyección acotada de un octaedro conocidas las direcciones de las tres diagonales concurrentes en un punto O(4); la arista mide 40 mm y el punto O se encuentra sobre un plano de p=1/2.

Ejercicio 21:

Partiendo de los datos del ejercicio 19, una vez que se tiene construido el octaedro, inscribir en él un hexaedro.

Ejercicio 22:

Determinar las proyecciones de un octaedro en el sistema acotado, del cual se conoce que su sección principal está apoyada sobre un plano de pendiente p=2/3. Del octaedro se conoce el centro O(4). La altura de cara del octaedro es 50 mm.

DODECAEDRO

Ejercicio 23:

Proyección acotada de un dodecaedro de arista 30 mm, que se encuentra apoyado por una cara sobre un plano del que se conoce su pendiente p=1/2.

Ejercicio 24:

Proyección acotada de un dodecaedro de arista 30 mm, con una diagonal en posición perpendicular a un plano α con una pendiente de p=2/3.

Ejercicio 25:

Proyección acotada de un dodecaedro de arista 30 mm, cuya sección principal se encuentra apoyada en un plano del que se conoce su pendiente p=3/2.

ICOSAEDRO

Ejercicio 26:

Proyección acotada de un icosaedro de arista 40 mm, con una diagonal en posición perpendicular a un plano α con una pendiente de p=2/3.

Ejercicio 27:

Proyección acotada de un icosaedro de arista 44 mm, que se encuentra apoyado por una cara en un plano del que se conoce su pendiente p=2/3.

Ejercicio 28:

Proyección acotada de un icosaedro de arista 42 mm, cuya sección principal se encuentra apoyada en un plano del que se conoce su pendiente p=1/2.

* * *

En las páginas siguientes se encuentran resueltos estos ejercicios sobre poliedros.

TETRAEDRO

Ejercicio 1:

Proyección acotada de un tetraedro regular con una cara apoyada sobre un plano α de p=2/3. Del tetraedro se conoce un vértice A(4) y el valor de la arista que es 40 mm. La arista que pasa por A y está contenida en el plano forma 30º con α_o.

Con la pendiente dada del plano en el enunciado del ejercicio se halla el intervalo de éste para poder representarlo en proyección. Otro dato conocido es el vértice A que está situado sobre el plano.

Se abate el plano, utilizando como punto de referencia el punto A. En el abatimiento se hace pasar por A_0 una recta r_0 que forma 30º con α_o y en ella, a partir de A_0 se lleva el valor de la arista, obteniendo así B_0. A continuación, se construye la cara del tetraedro apoyada en el plano en verdadera magnitud, A_0, B_0, C_0 y el centro del triángulo $(D_\alpha)_0$.

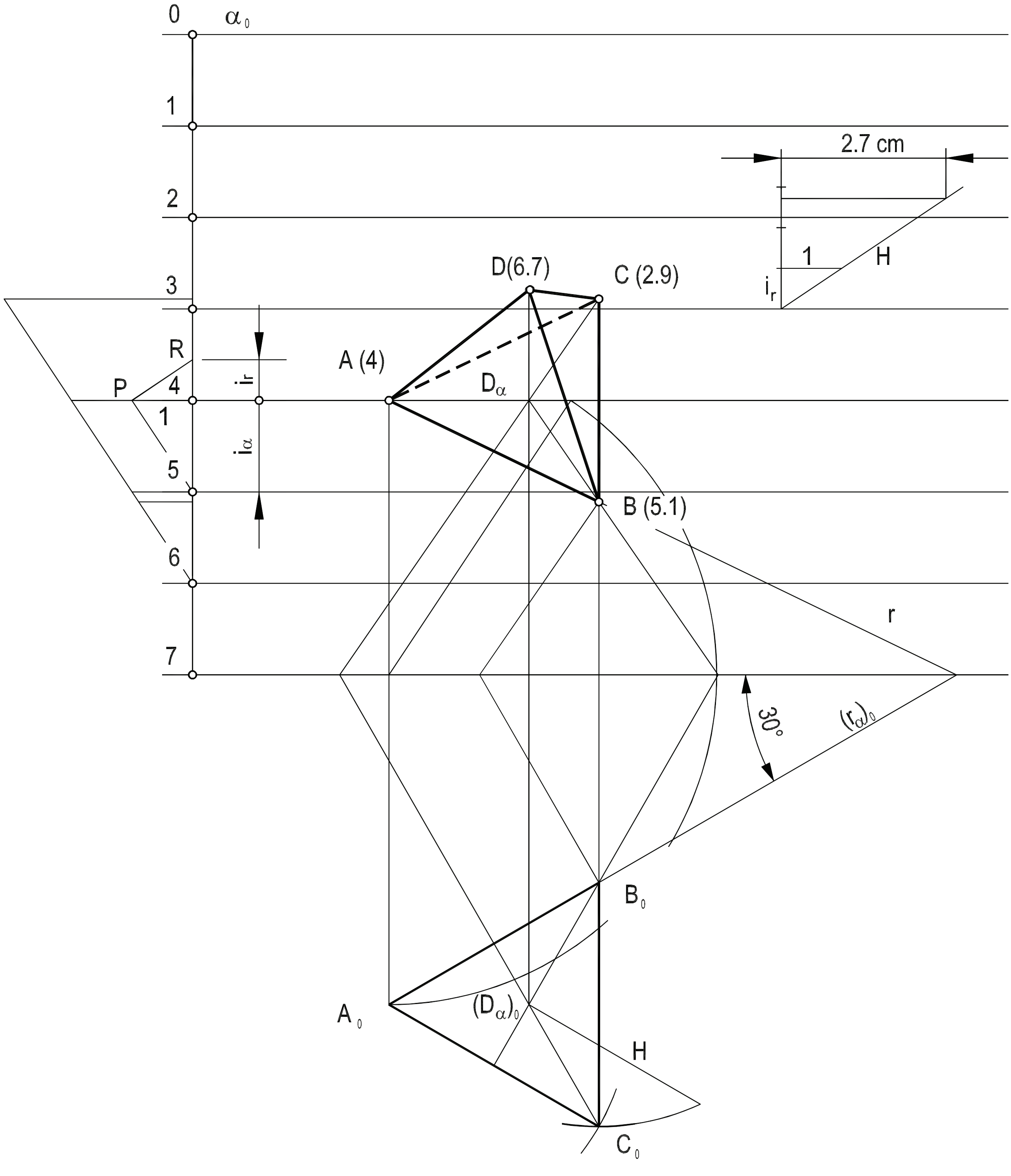
El siguiente paso consiste en desabatir por afinidad el triángulo equilátero correspondiente a la cara apoyada del tetraedro en verdadera magnitud y se obtiene el triángulo de la cara apoyada en proyección, A, B, C y el punto D_α.

Ahora, se traza una recta perpendicular al plano por el punto D_α y en ésta se lleva la distancia correspondiente a la altura del tetraedro, que se ha obtenido en el abatimiento, obteniéndose así el cuarto vértice D. Para trazar una recta perpendicular a un plano se procede de la forma indicada en el tema correspondiente.

Las cotas de los vértices se obtienen de la forma siguiente. Los vértices A, B, C por pertenecer al plano α, tendrán la misma cota que las horizontales del plano que pasan por dichos puntos, A(4) es dato del ejercicio, B(5.1) y C(2.9). Para la obtención de la cota del vértice D, a la cota de D_α(4) se sumará 2.7, magnitud obtenida en el gráfico de la parte superior derecha de la figura, resultando D(6.7).

Sólo resta considerar las partes vistas y ocultas y así queda definido el tetraedro buscado.

EJERCICIO 1



0
α_0
1
2
3
4
5
6
7
R
P
1
2.7 cm
1
H
i_r
i_α
D(6.7)
C (2.9)
A (4)
D_α
B (5.1)
r
30°
$(r_\alpha)_0$
B_0
A_0
$(D_\alpha)_0$
H
C_0

Ejercicio 2:

Proyección acotada de un tetraedro del cual se conoce que una arista AB está apoyada sobre un plano α de p=2/3 y que mide 50 mm. La arista CD forma un ángulo de 15º con el plano α y la arista AB forma con α_o un ángulo de 60º.

Con la pendiente dada del plano en el enunciado del ejercicio se halla el intervalo de éste para poder representarlo en proyección.

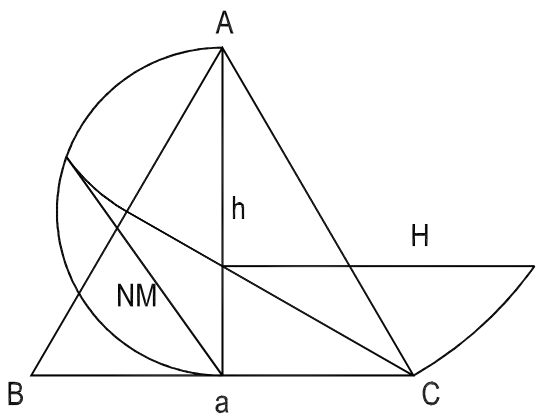
Se abate el plano, utilizando como referencia un punto A perteneciente a éste y en el abatimiento se hace pasar por A_0 una recta r_0 que forma 60º con α_0, por formar 60º con h(10) y ser α_0 y h(10) paralelas entre sí. A partir de A_0 y en r_0 se sitúa el valor de la arista que es conocido y así se obtiene el punto B_0, que es el segundo vértice. A continuación, por B_0 se dibuja una recta perpendicular a la arista y se toma como línea de referencia para construir la sección principal del tetraedro.

En figura aparte se han obtenido todos los datos necesarios para la construcción del tetraedro.

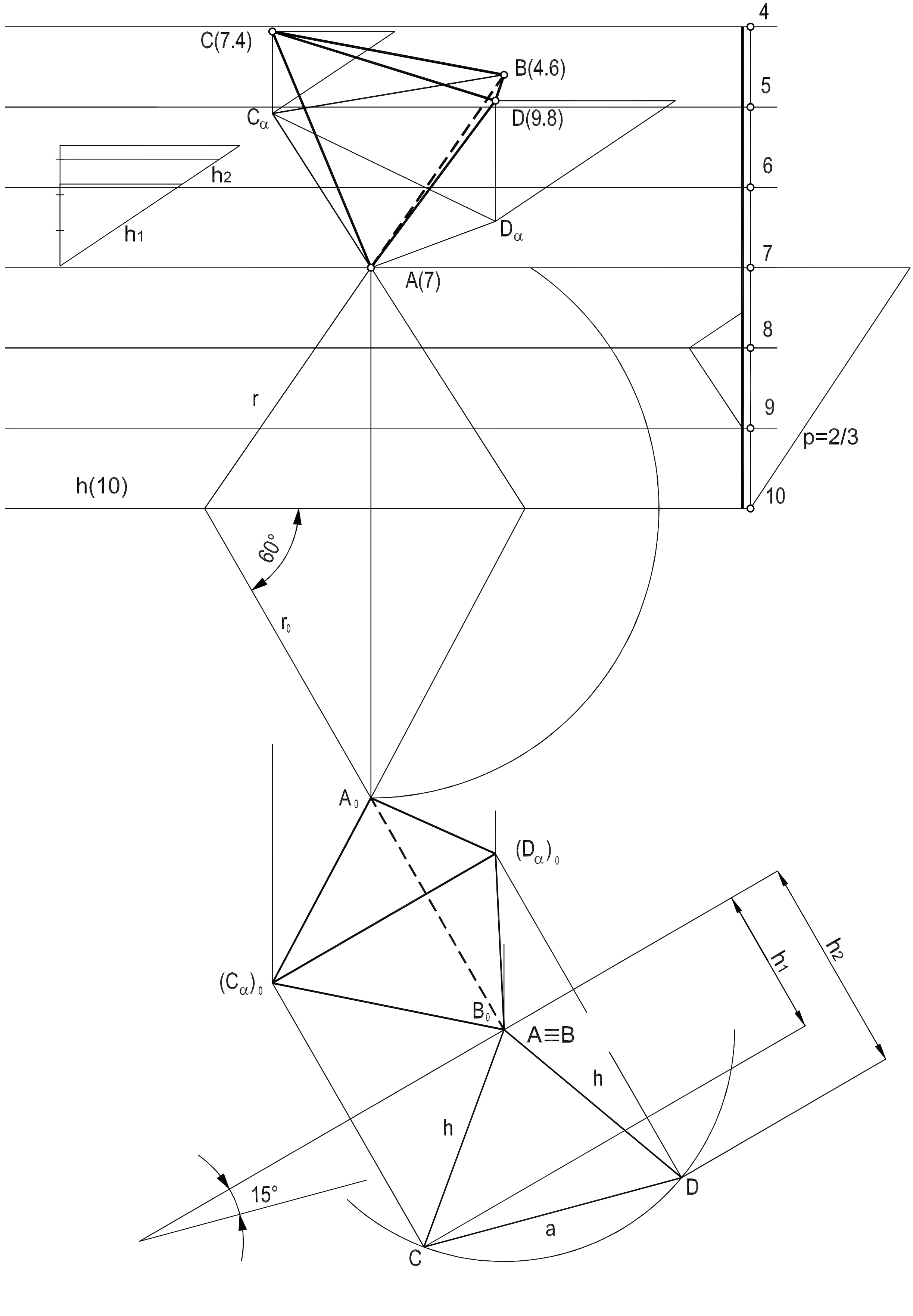
Con el valor de la altura -h- de las caras del tetraedro y con el ángulo que forma la arista CD con el plano α, se construye la sección principal del mismo. Es un segundo abatimiento en el cual se obtienen las alturas de los vértices del poliedro con respecto al plano y la posición relativa respecto al plano de referencia.

Se realiza el primer desabatimiento y se obtienen las proyecciones A_0, B_0, $(C_\alpha)_0$ y $(D_\alpha)_0$ en el abatimiento de α. A continuación se realiza el segundo desabatimiento y se obtienen las proyecciones A, B, C_α y D_α en el plano. A partir de C_α y D_α se trazan rectas perpendiculares al plano y sobre éstas se llevan las alturas h_1 y h_2 y se obtienen los cuatro vértices del poliedro.

Sólo resta definir las partes vistas y ocultas y así queda determinado el tetraedro buscado.



Ejercicio 2



C(7.4)
B(4.6)
D(9.8)
C_α
h_2
h_1
D_α
A(7)
4
5
6
7
8
9
10
p=2/3
r
h(10)
60°
r_0
A_0
$(D_\alpha)_0$
$(C_\alpha)_0$
B_0
A≡B
h_1
h_2
h
h
15°
a
C
D

Ejercicio 3

Proyección acotada de un tetraedro con una arista apoyada en un plano de p=4/5. La arista tiene una p=30º y 70 mm.

Con la pendiente dada del plano en el enunciado del ejercicio se halla el intervalo de éste para poder representarlo en proyección.

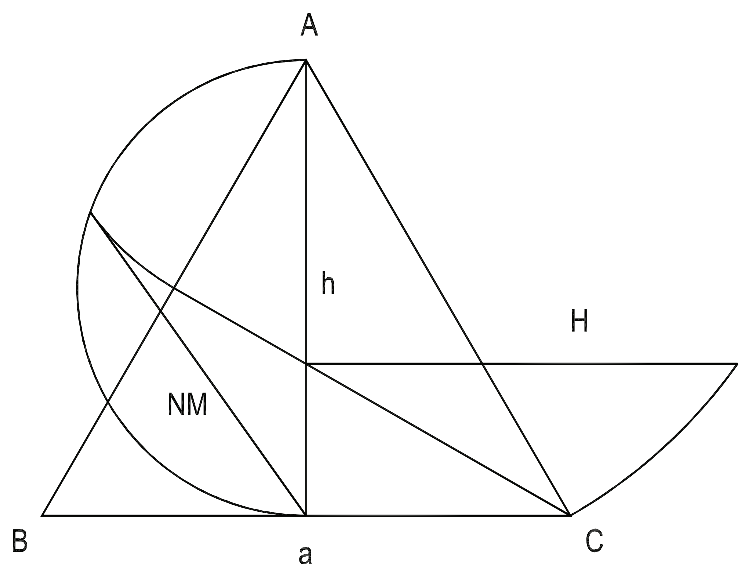
Se abate el plano, utilizando como punto de referencia un punto N que pertenece al mismo. El punto N(8) es el centro de la circunferencia de radio el intervalo de la arista apoyada en el plano, y con pendiente de 30º. Por donde la circunferencia corta a las líneas de cota 7 y 9 se pasa una recta r en la cual va a estar contenida la arista que está apoyada en el plano. A continuación se abate la recta y en el abatimiento de la misma se traslada la magnitud de la arista, que es conocida y así se obtienen los dos primeros vértices del tetraedro, A_0 y B_0.

En el abatimiento se obtienen las proyecciones abatidas de los otros dos vértices que forman el tetraedro, $(C_\alpha)_0$ y $(D_\alpha)_0$.

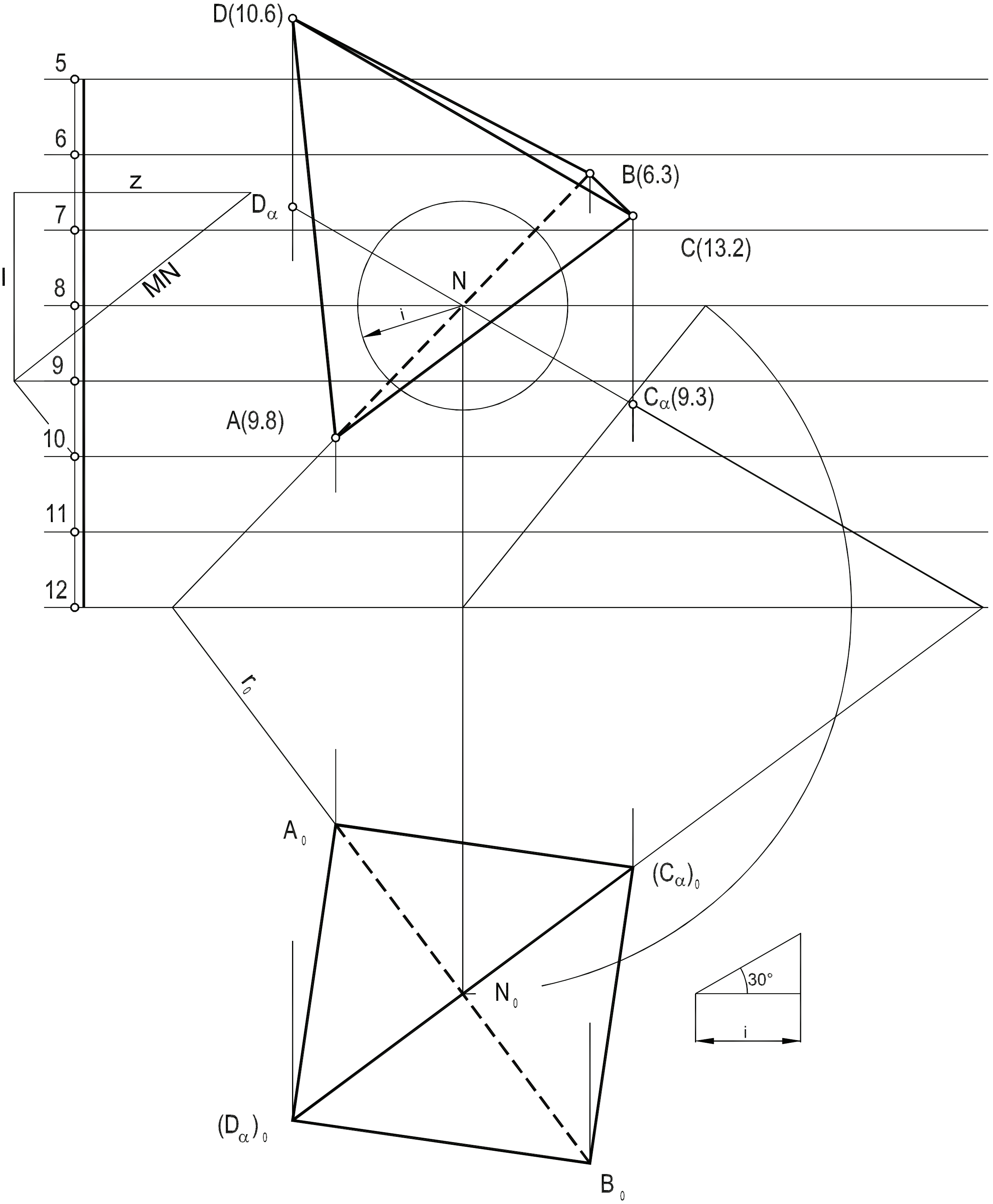
A continuación se desabaten por afinidad estos cuatro puntos para así obtener los A y B que son los vértices de la arista del poliedro apoyada en el plano y C_α y D_α que son las proyecciones sobre el plano de los otros dos vértices del tetraedro.

A partir de C_α y D_α se levanta la altura correspondiente a la distancia entre aristas opuestas MN, que se obtiene en la figura inferior de esta página.

Se definen las partes vistas y ocultas y así queda representado el tetraedro buscado.



Ejercicio 3


D(10.6)
5
6
z
B(6.3)
7
D_α
C(13.2)
l
8
MN
N
i
9
C_α(9.3)
10
A(9.8)
11
12
r_0
A_0
$(C_\alpha)_0$
N_0
30°
i
$(D_\alpha)_0$
B_0

Ejercicio 4:

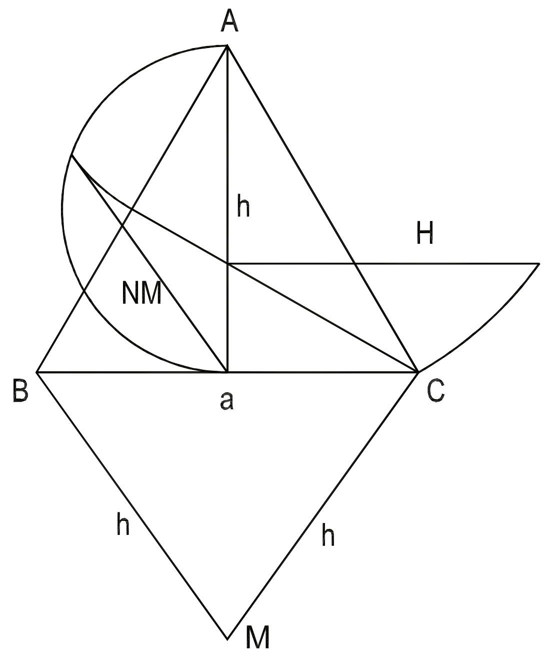
Proyección acotada de un tetraedro con la sección principal apoyada sobre un plano de p=2/3. Del tetraedro se conoce un vértice B(3); el valor de la arista que es 50 mm. La arista en el plano forma 30º con α_o.

Con la pendiente dada del plano en el enunciado del ejercicio se halla el intervalo de éste para poder representarlo en proyección.

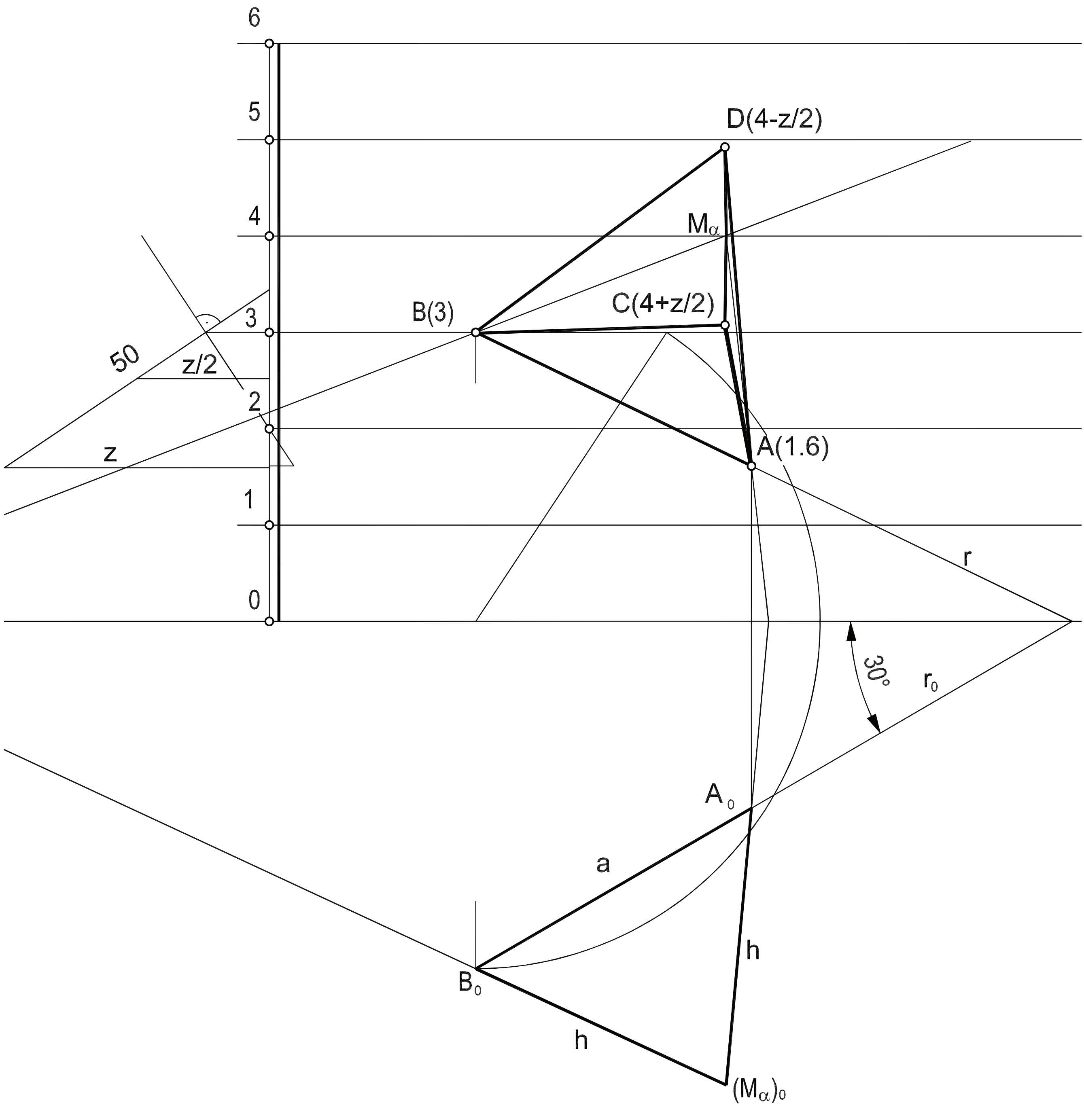
Se abate el plano, utilizando como referencia el punto B y en el abatimiento se pasa por B_0 una recta r_0 que forma 30º con α_0. En esta recta se lleva el valor de la arista y con este dato y el valor de la altura de las caras del tetraedro se construye la sección principal, B_0, A_0 y $(M_\alpha)_0$.

A continuación, se desabate por afinidad la sección principal del poliedro y se obtiene su proyección en el plano, B, A y M_α. Por M_α se traza una recta perpendicular al plano y sobre ésta se llevan el valor equivalente a la mitad de la arista por encima del plano y la otra mitad por debajo de él y así quedan definidos los cuatro vértices del poliedro.

Sólo resta definir las partes vistas y ocultas y así queda definido el poliedro.



Ejercicio 4



Ejercicio 5:

Una de las aristas de un tetraedro regular tiene pendiente p=3/4. Un punto N, que se sabe es el punto medio de la arista opuesta a ésta, tiene de cota 45 y se halla situado en proyección a 5 cm de los puntos de cota 41 y 46 de la arista dada.

Con la pendiente de la arista dada en el enunciado del ejercicio, se halla el intervalo de una recta r para poder representarla en proyección.

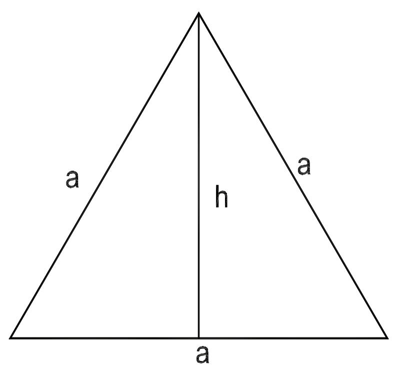
Desde los puntos de cota 41 y 46 de la recta se trazan arcos de radio 5 cm y así se obtiene el punto N(45). Con el punto N y la recta r se halla el plano α que los contiene y a continuación se abate junto con N y r.

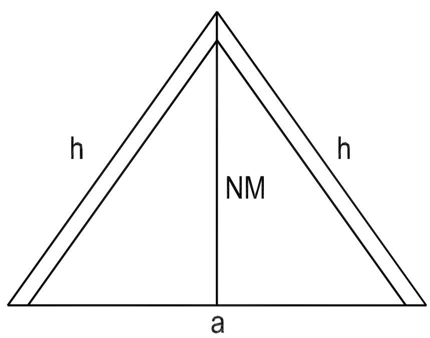
En el abatimiento de α se traza por N_0 una recta perpendicular a r_0 que corta a ésta en el punto M_0. Se obtiene así la verdadera magnitud de MN que es la distancia entre dos aristas opuestas del tetraedro. En figura aparte y con este dato se obtienen el resto de las dimensiones del tetraedro buscado por semejanza.

Tomando como centro N_0 , se traza en el abatimiento del plano la circunferencia de radio h, altura de cara del tetraedro, la cual corta a r_0 en los puntos D_0 y C_0 , obteniéndose así la sección principal del tetraedro.

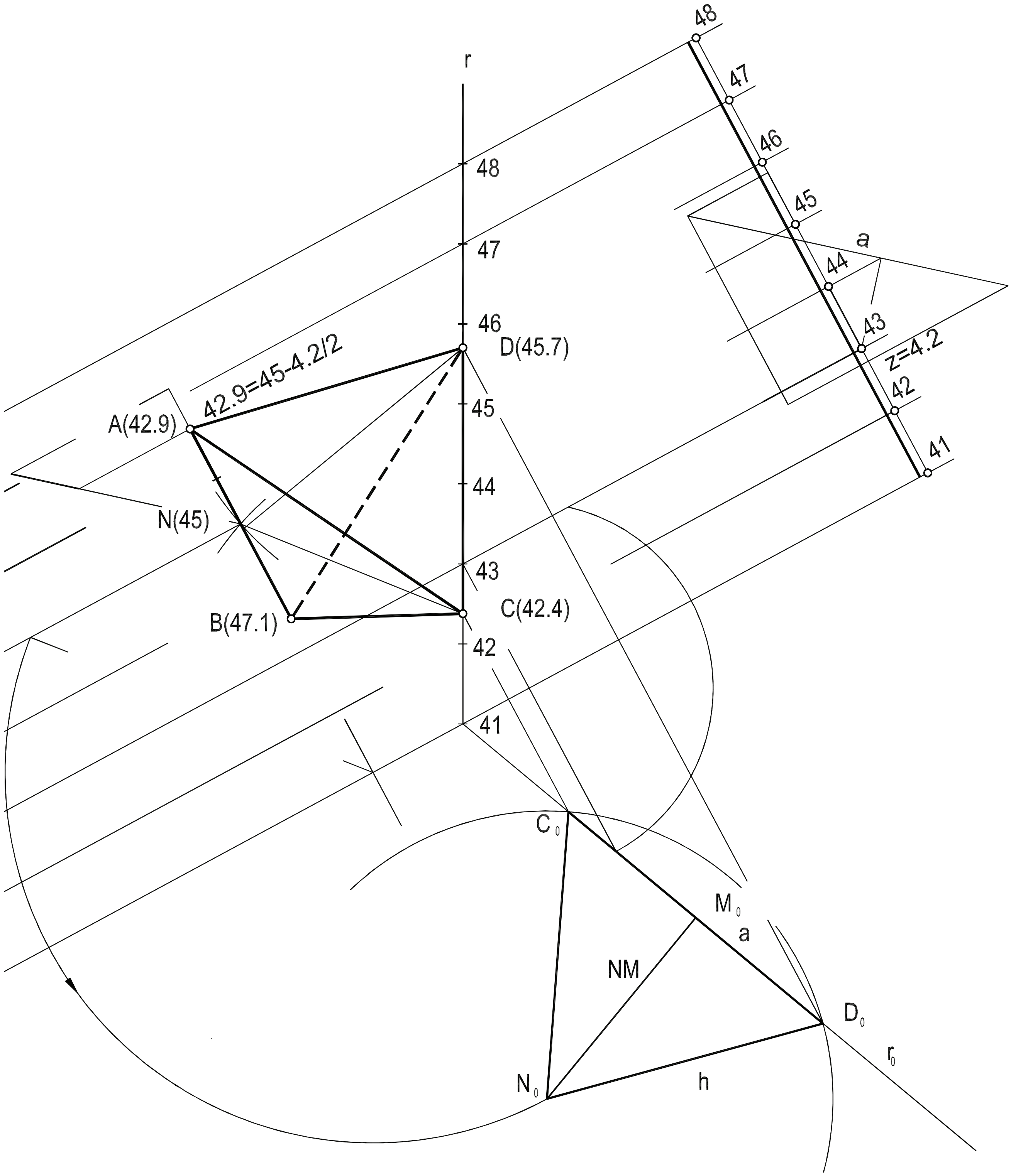
A continuación se desabate la sección principal, obteniendo así los puntos D y C que son dos vértices del poliedro. Por el punto N se traza una recta perpendicular al plano y en ella se toma por encima y por debajo del plano la magnitud correspondiente a -a/2-, obteniéndose así los otros dos vértices del tetraedro A y B.

Sólo resta definir las partes vistas y ocultas y así queda definido el poliedro.





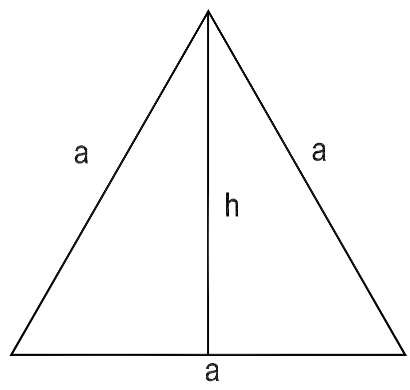
Ejercicio 5

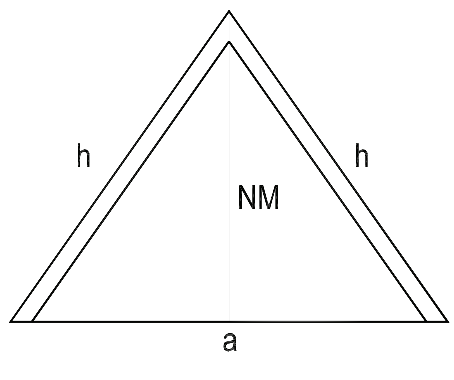

r
48
47
46
45
44
43
42
41
D(45.7)
A(42.9)
42.9=45-4.2/2
N(45)
B(47.1)
C(42.4)
48
47
46
45
a
44
43
z=4.2
42
41
C0
M0
a
NM
D0
r0
N0
h

Ejercicio 6:

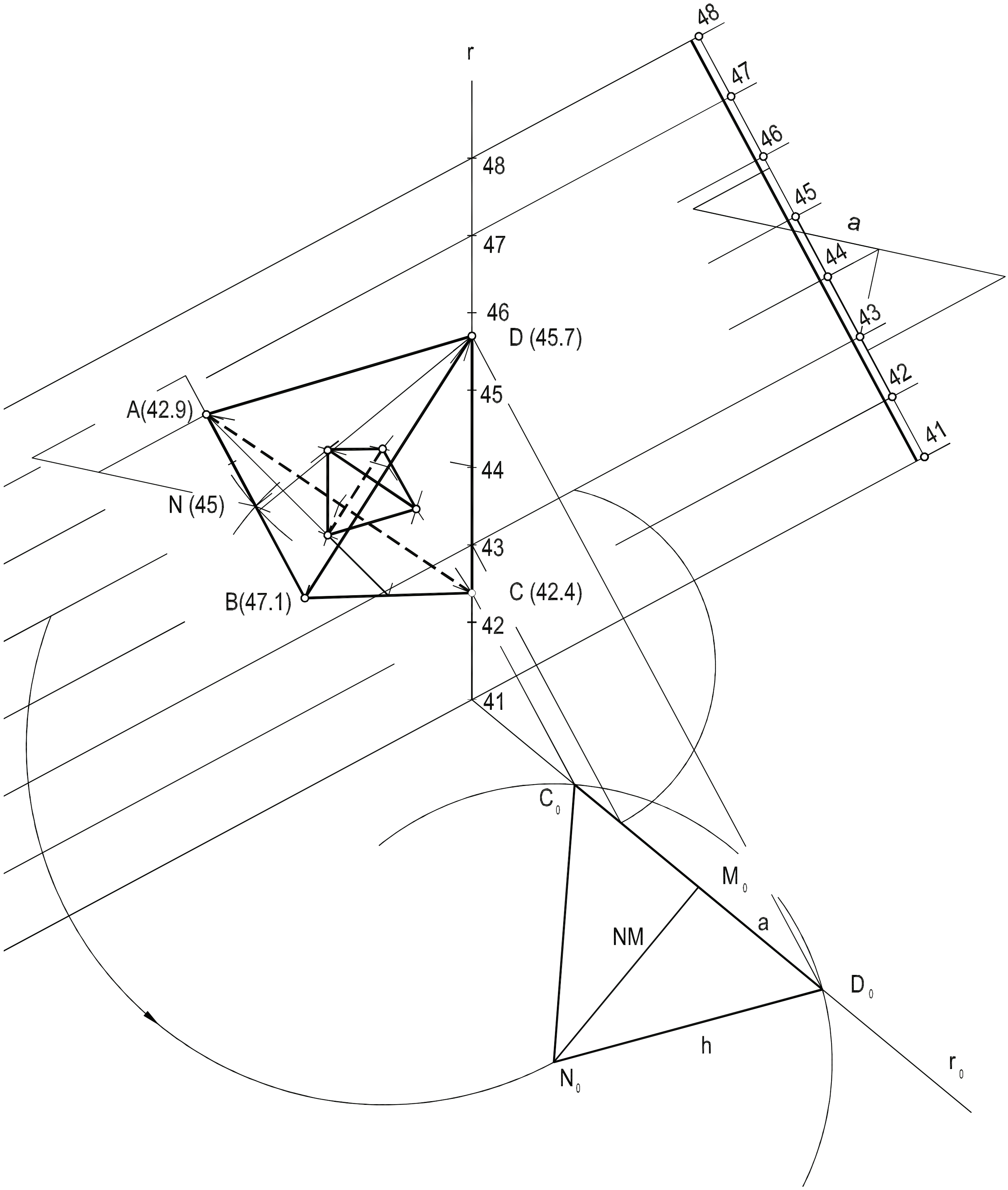
Partiendo de los datos del ejercicio 5, una vez que se tiene construido el tetraedro, inscribir otro tetraedro dentro del primero.

Una vez obtenido el primer tetraedro, se va a proceder a la construcción del tetraedro inscrito. En primer lugar, se obtienen los ortocentros de las caras del poliedro, que son a su vez los vértices del poliedro inscrito.





Ejercicio 6



r
48
47
46
45
44
43
42
41
D (45.7)
A(42.9)
N (45)
B(47.1)
C (42.4)
48
47
46
45
44
43
42
41
a
C_0
M_0
NM
a
D_0
h
N_0
r_0

HEXAEDRO

Ejercicio 7:

Proyección acotada de un hexaedro con una cara apoyada sobre un plano α de p=2/3. Del hexaedro se conoce un vértice A (3) y el valor de la arista que es 40 mm. La arista que pasa por A (3) y está contenida en el plano forma 30º con α_o.

Con la pendiente dada del plano se halla el intervalo de éste para poder representarlo en proyección. Otro dato conocido es el vértice A que está situado sobre el plano.

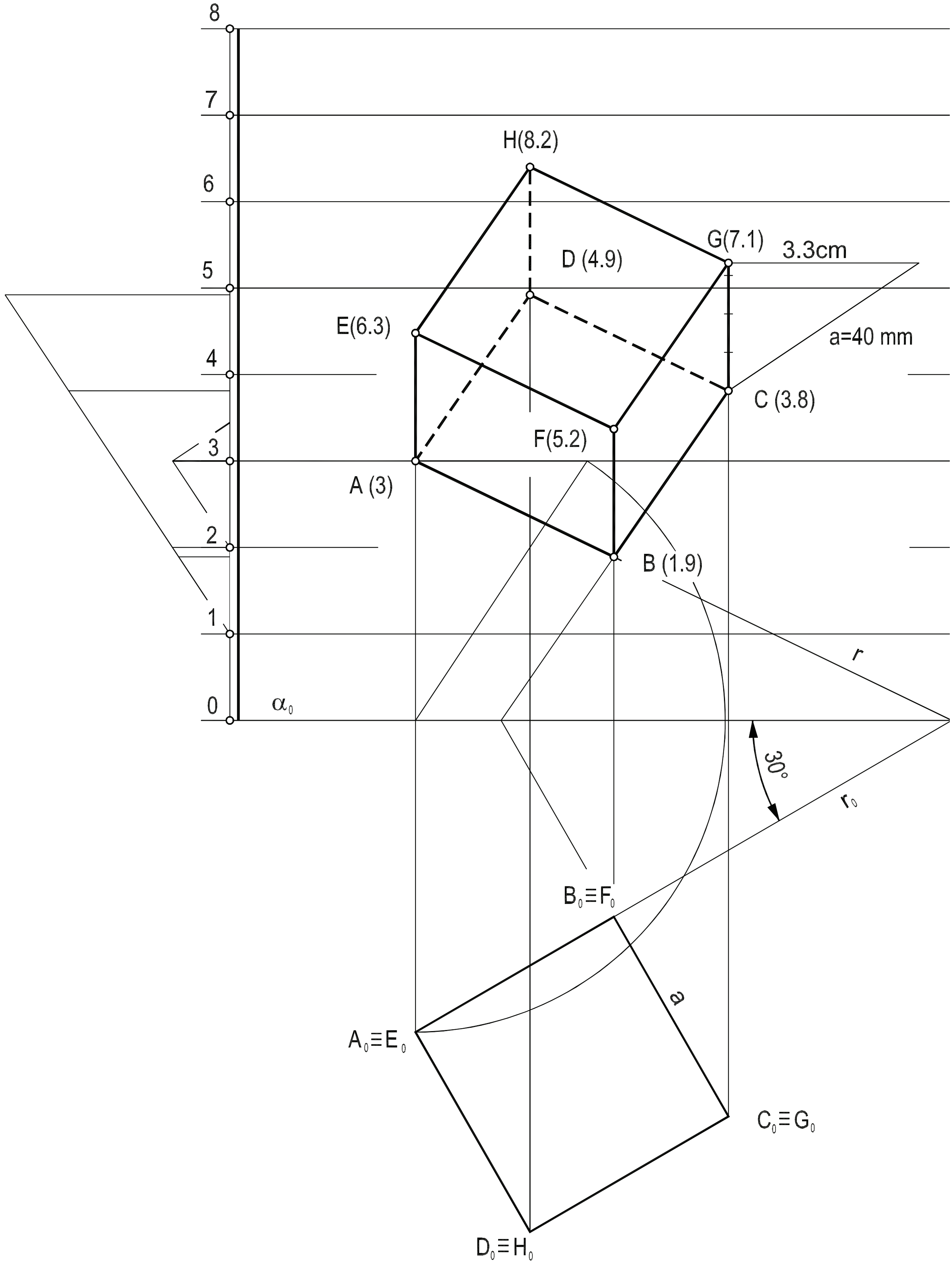
Se abate el plano, utilizando como punto de referencia el punto A. En el abatimiento se pasa por A_0 una recta r_0 que forma 30º con α_o y en ella, a partir de A_0 se lleva el valor de la arista obteniendo así B_0. A continuación, se construye la cara del hexaedro apoyada en el plano A_0, B_0, C_0 y D_0.

El siguiente paso consiste en desabatir por afinidad el cuadrado correspondiente a la cara apoyada del hexaedro y así se obtiene el cuadrado de la cara apoyada, en proyección, A, B, C y D.

Se trazarán rectas perpendiculares al plano por A, B, C y D y sobre ellas se llevarán distancias correspondientes a la arista del hexaedro, obteniéndose así los otros cuarto vértices de éste, E, F, G y H.

Sólo resta definir las partes vistas y ocultas y así queda definido el poliedro buscado.

Ejercicio 7


8
7
H(8.2)
6
G(7.1)
3.3cm
D (4.9)
5
E(6.3)
a=40 mm
4
C (3.8)
F(5.2)
3
A (3)
2
B (1.9)
1
r
0
α_0
30°
r_0
$B_0 \equiv F_0$
a
$A_0 \equiv E_0$
$C_0 \equiv G_0$
$D_0 \equiv H_0$

Ejercicio 8

Proyección acotada de un hexaedro conocido un vértice A(3) de éste, por el cual pasa una diagonal -D- del poliedro. Dicha diagonal tiene una pendiente de 45º y mide 70 mm.

Puesto que es conocido que la diagonal del poliedro forma 45º con el plano del cuadro, se va a trazar un plano α perpendicular a ésta, que a su vez también formará 45º con el plano del cuadro, por consiguiente, se representa en proyección un plano de p=45º.

Una vez dibujado el plano, se conoce también un vértice de la diagonal A(3) que va a ser el punto de corte del plano con la diagonal.

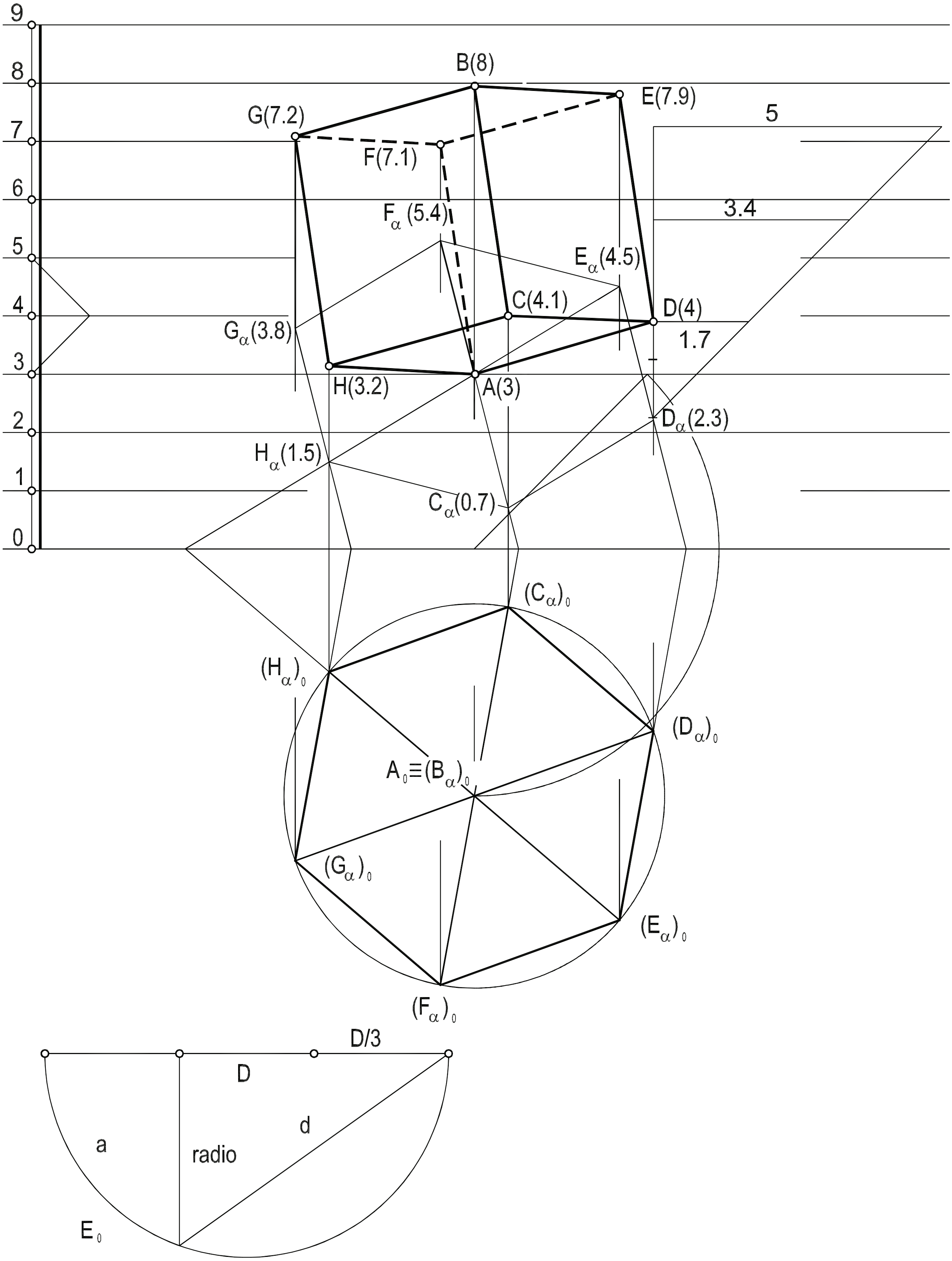
En figura aparte se determina el radio necesario para poder dibujar la proyección del poliedro en el abatimiento de α.

A continuación se abate el plano tomando como referencia el vértice A(3). En el abatimiento de α se dibuja una circunferencia de centro A_0 y radio el obtenido anteriormente y en ella se encontrarán las referencias abatidas de los vértices del hexaedro $(C_\alpha)_0$, $(D_\alpha)_0$, $(E_\alpha)_0$, $(F_\alpha)_0$, $(G_\alpha)_0$ y $(H_\alpha)_0$, además de $(B_\alpha)_0$ que coincide con A_0 por ser la diagonal perpendicular a α.

El siguiente paso consiste en desabatir por afinidad la figura obtenida, obteniendo sobre α: B_α, C_α, D_α, E_α, F_α, G_α y H_α.

Por estos puntos se trazan rectas perpendiculares a α y sobre ellas se llevan los valores correspondientes a sus alturas con respecto a α, obtenidas en figura a parte. A partir de A se lleva el valor correspondiente a la diagonal y así se obtiene el vértice B. A partir de D_α, F_α y H_α el valor de 1/3 de D y a partir de C_α, E_α y G_α el valor de 2/3 de D consiguiendo así el resto de los vértices del poliedro.

Ejercicio 8


9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
B(8)
E(7.9)
G(7.2)
5
F(7.1)
3.4
F_α (5.4)
E_α(4.5)
C(4.1)
D(4)
G_α(3.8)
1.7
H(3.2)
A(3)
D_α(2.3)
H_α(1.5)
C_α(0.7)
$(C_\alpha)_0$
$(H_\alpha)_0$
$(D_\alpha)_0$
$A_0 \equiv (B_\alpha)_0$
$(G_\alpha)_0$
$(E_\alpha)_0$
$(F_\alpha)_0$
D/3
D
d
a
radio
E_0

Ejercicio 9:

Proyección acotada de un hexaedro, con una arista apoyada sobre un plano α de p=1/2. El hexaedro está en equilibrio. La arista mide 50 mm.

Con la pendiente dada del plano se halla el intervalo de éste para poder representarlo en proyección.

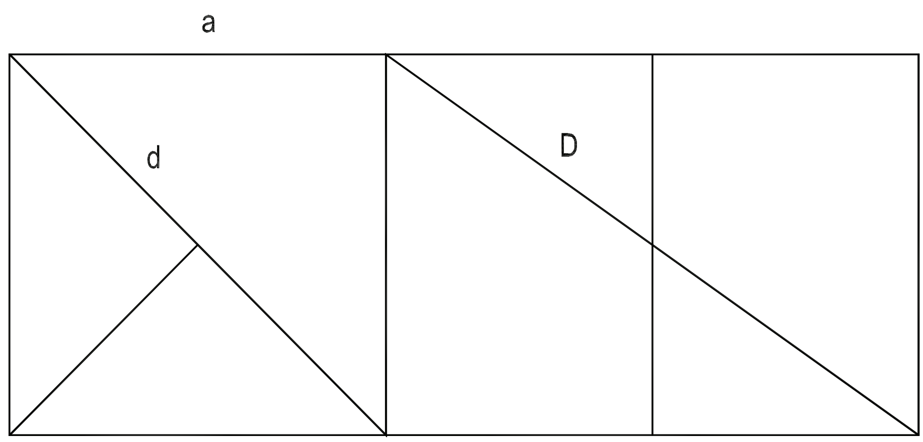
Se abate el plano, utilizando como punto de referencia un punto cualquiera del mismo, en este caso, el punto G. En el abatimiento se construye la proyección del cubo sobre el plano abatido, obteniendo así los puntos A_0, B_0, $(C_\alpha)_0$, $(D_\alpha)_0$, $(E_\alpha)_0$, $(F_\alpha)_0$, $(G_\alpha)_0$ y $(H_\alpha)_0$. Las aristas del tetraedro A_0, B_0 y $(C_\alpha)_0$ (D_α) coinciden en el abatimiento por estar el hexaedro en equilibrio.

A continuación se desabaten por afinidad las proyecciones de los vértices del cubo antes citados, obteniendo las proyecciones de los mismos en el plano A, B, C_α, D_α, E_α, F_α, G_α y H_α.

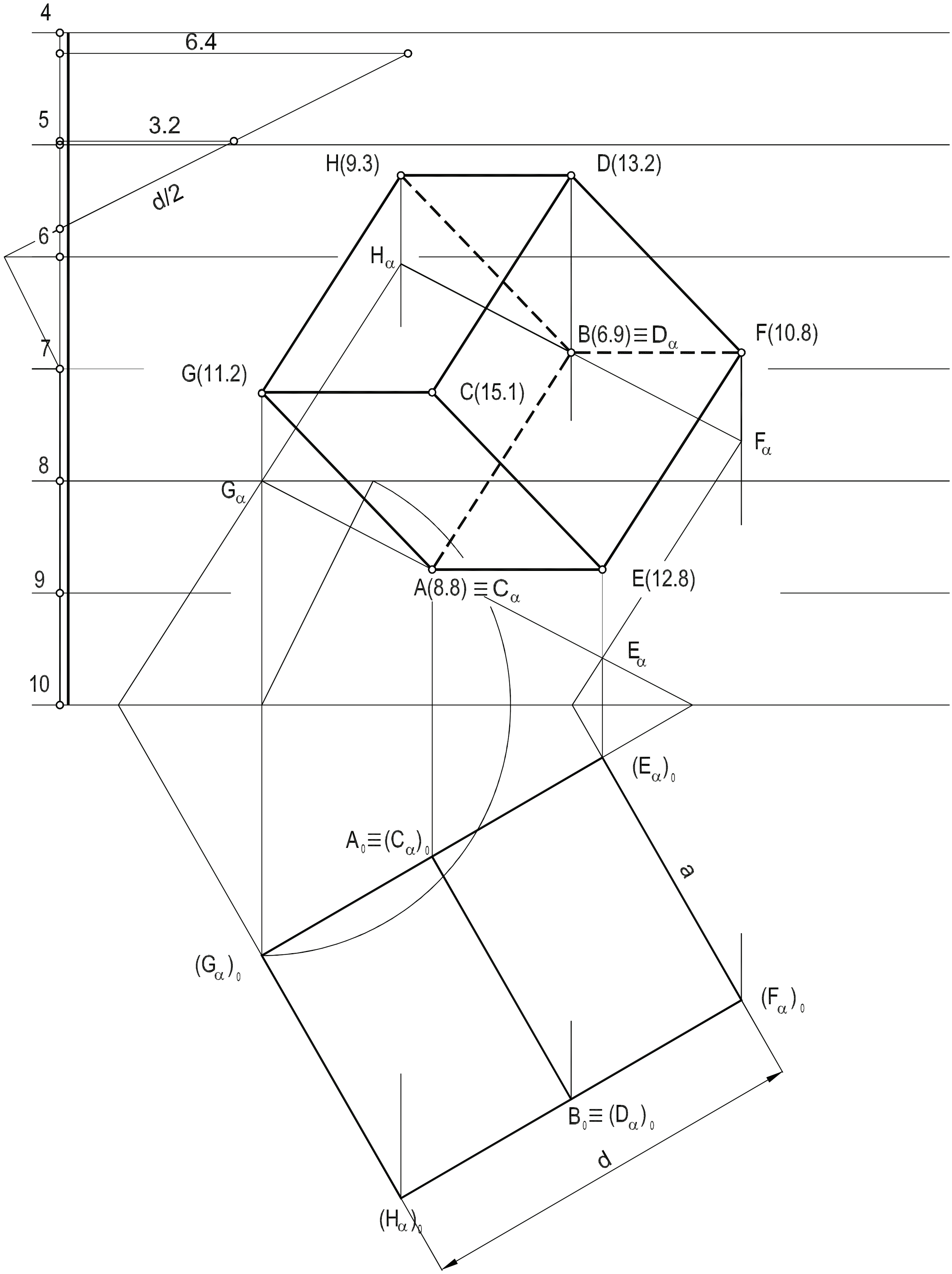
Se trazarán rectas perpendiculares al plano y sobre ellas se llevarán las distancias correspondientes a la diagonal de cara del cubo -d- y a su mitad -d/2- según el caso. En las perpendiculares que se trazan desde los vértices A y B se llevan las distancias correspondientes a la magnitud -d-, obteniéndose los vértices C y D.

En las perpendiculares que se trazan desde los puntos E_α, F_α, G_α y H_α se lleva la distancia correspondiente a la magnitud -d/2-, obteniéndose los otros cuatro vértices del cubo E, F, G y H.

Sólo resta definir las partes vistas y ocultas y así queda definido el hexaedro buscado.



Ejercicio 9


4
6.4
5
3.2
d/2
6
7
8
9
10
H(9.3)
D(13.2)
H_α
B(6.9)$\equiv D_\alpha$
F(10.8)
G(11.2)
C(15.1)
F_α
G_α
A(8.8) $\equiv C_\alpha$
E(12.8)
E_α
$(E_\alpha)_0$
$A_0\equiv(C_\alpha)_0$
a
$(G_\alpha)_0$
$(F_\alpha)_0$
$B_0\equiv(D_\alpha)_0$
d
$(H_\alpha)_0$

Ejercicio 10:

Proyección acotada de un hexaedro del cual se conoce una arista de 50 mm apoyada sobre una plano de p=2/3. Esta arista forma con α_o un ángulo de 60º. Una de las caras que contiene a esta arista forma 30º con el plano α.

Con la pendiente dada del plano se halla el intervalo de éste para poder representarlo en proyección.

Se abate el plano, charnela h(10) y utilizando como referencia un punto B, y en el abatimiento se hace pasar por B_0 una recta r_0 que forma 60º con α_0. A partir de B_0 y sobre r_0 se lleva el valor de la arista y así se obtiene el punto A_0, que es el segundo vértice de la arista del cubo apoyada en el plano. A continuación, por A_0 se traza una recta perpendicular a la arista que se toma como línea de referencia para construir la proyección del hexaedro A≡B, E≡F, C≡D y G≡H, formando 30º la cara ABEF.

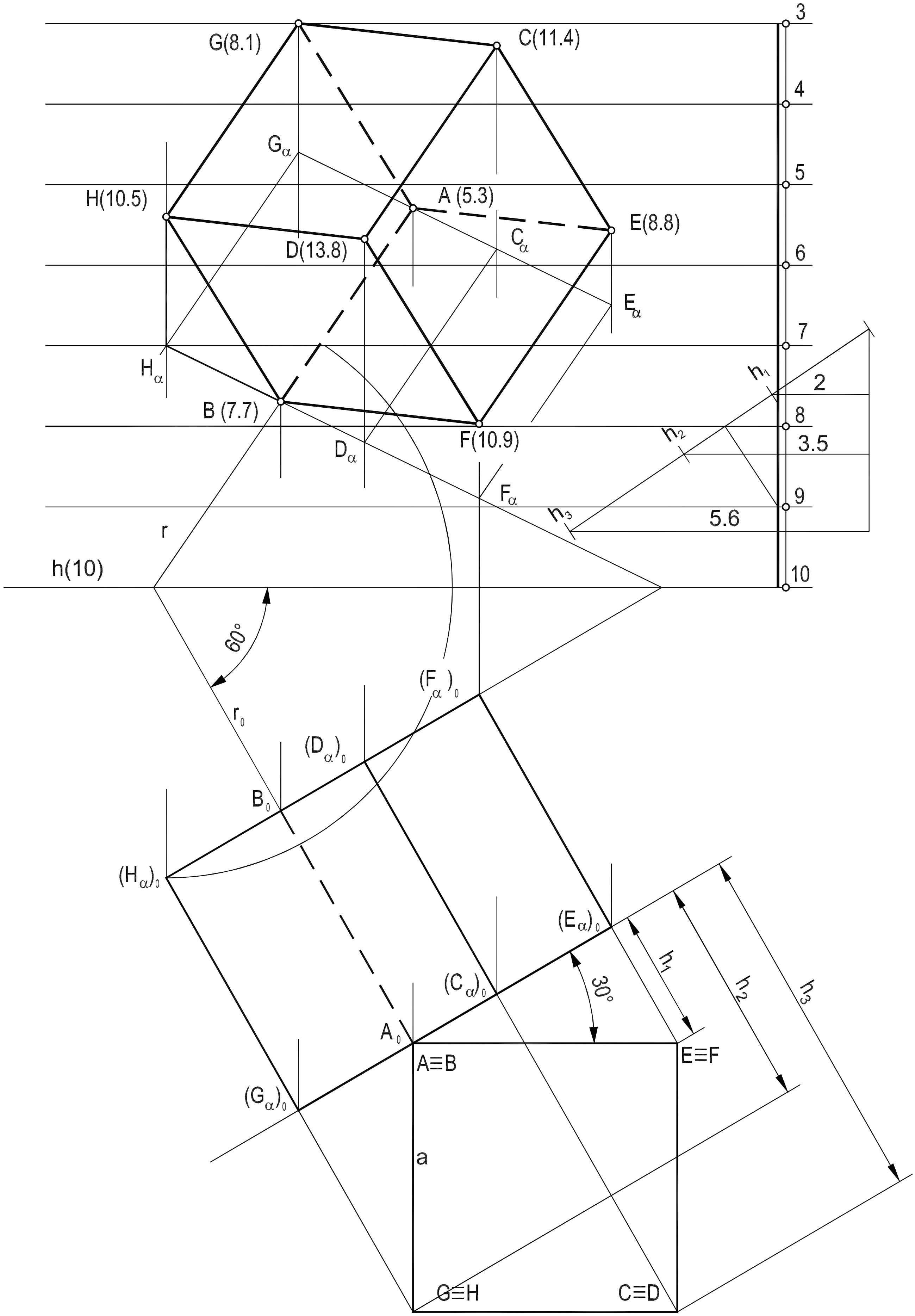
En este segundo abatimiento se obtienen las alturas de los vértices del poliedro con respecto al plano así como la posición relativa de las aristas.

Se realiza el primer desabatimiento y se obtienen las proyecciones A_0, B_0, $(C_\alpha)_0$, $(D_\alpha)_0$, $(E_\alpha)_0$, $(F_\alpha)_0$, $(G_\alpha)_0$, $(H_\alpha)_0$ en el abatimiento de α. A continuación, se realiza el segundo desabatimiento y se obtienen las proyecciones de los puntos en el plano A, B, C_α, D_α, E_α, F_α, G_α, y H_α.

Finalmente, por las proyecciones de los puntos se levantan rectas perpendiculares al plano y sobre ellas se llevan las distancias correspondientes a las tres alturas h_1, h_2 y h_3, obtenidas en el segundo abatimiento, determinándose así los vértices del poliedro

Sólo resta definir las partes vistas y ocultas y así queda definido el hexaedro buscado.

Ejercicio 10



Ejercicio 11:

Proyección acotada de un hexaedro cuya arista tiene una pendiente de 30º y está apoyada sobre un plano de pendiente 4/5. La arista mide 50 mm.

Con la pendiente dada del plano se halla el intervalo de éste para representarlo en proyección.

Se abate el plano, utilizando uno de sus puntos A. El punto A es el centro de la circunferencia de radio el intervalo conocido de la arista apoyada en el plano. Por donde la circunferencia corta a las líneas de cota se hace pasar una recta r en la cual va a estar contenida la arista que está apoyada en el plano. A continuación se abate la recta y en el abatimiento de la misma se traslada la magnitud de la arista y así se obtienen los dos primeros vértices del tetraedro, A_0 y C_0.

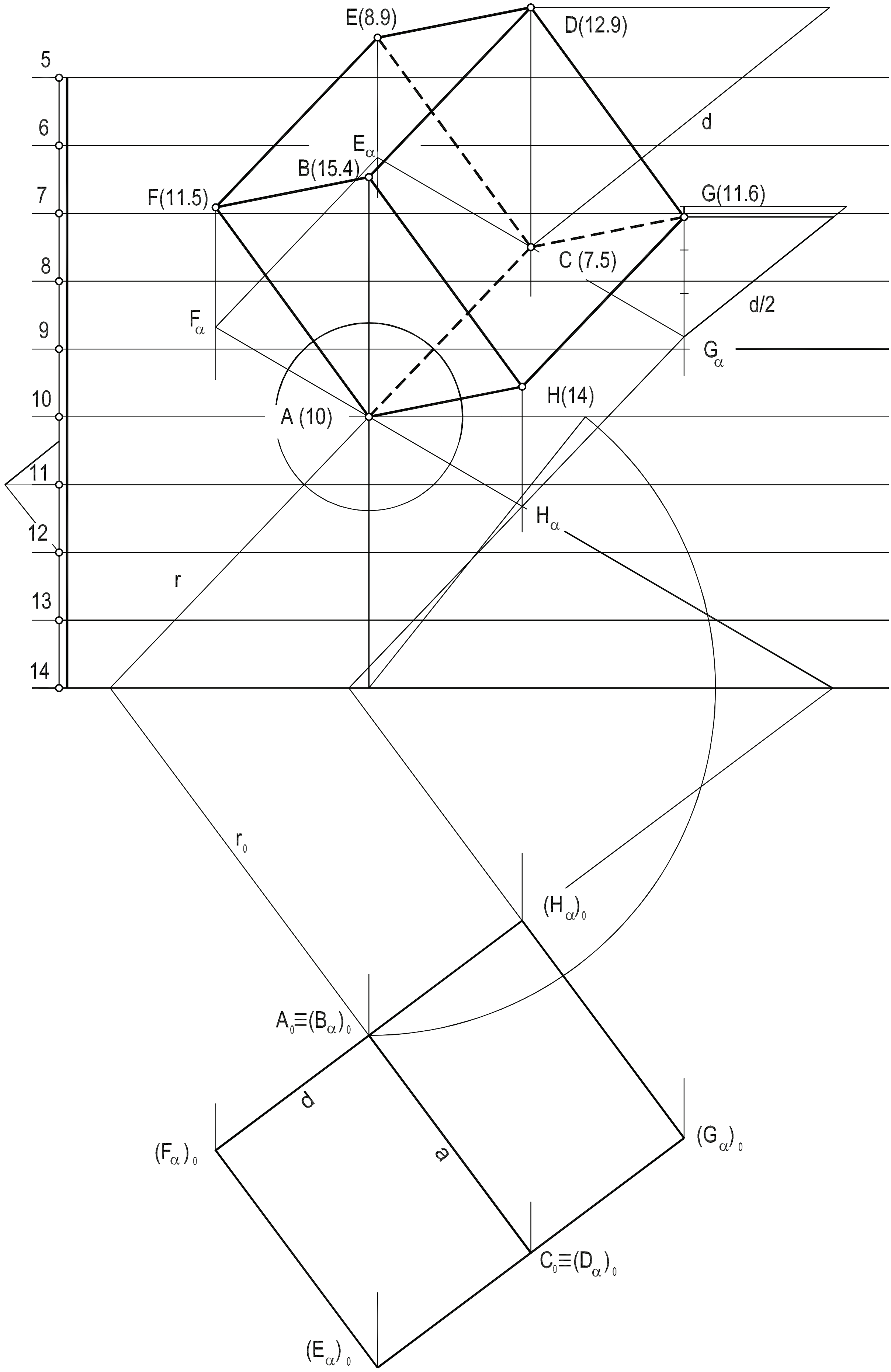
En el abatimiento se obtienen las proyecciones abatidas de los otros vértices que forman el tetraedro, $(B_\alpha)_0$, $(D_\alpha)_0$, $(E_\alpha)_0$, $(F_\alpha)_0$, $(G_\alpha)_0$ y $(H_\alpha)_0$.

A continuación se desabaten por afinidad estos puntos para así obtener los puntos A y C que son los vértices de la arista del poliedro apoyada en el plano y E_α, F_α, G_α y H_α, que son las proyecciones sobre el plano de los otros vértices del hexaedro.

A partir de A y C se levanta la altura correspondiente a la diagonal de cara del cubo, y así se obtienen los vértices B y D que son los vértices de la arista opuesta a la apoyada en el plano. Por E_α, F_α, G_α y H_α se levanta la altura correspondiente a d/2 y se obtienen los vértices restantes del cubo, E, F, G y H.

Sólo resta definir las partes vistas y ocultas y así queda representado el poliedro.

Ejercicio 11



Ejercicio 12:

Proyección acotada de un hexaedro conocidas las direcciones de las tres aristas concurrentes en un punto A(4); la arista mide 32 mm y el punto A se encuentra sobre un plano de pendiente p=1/2.

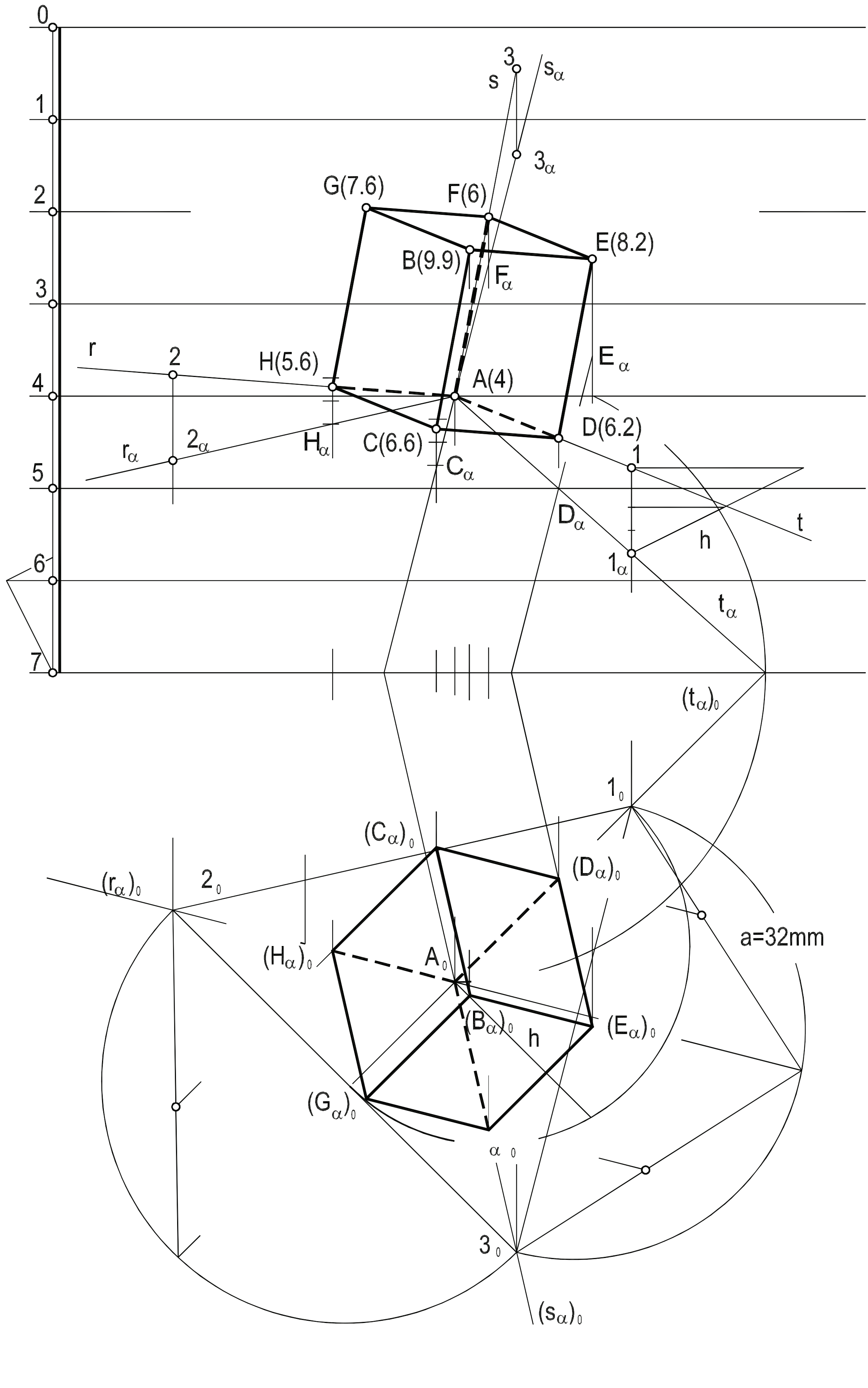
Con la pendiente dada del plano se halla el intervalo de éste para representarlo en proyección.

Se toma el punto A y se abate junto con el plano. El punto A_0 va a ser el punto intersección de las proyecciones de las tres direcciones en el abatimiento de α, en las cuales están incluidas las verdaderas magnitudes de tres aristas del cubo. A_0 es el vértice de un triedro trirrectángulo.

En el abatimiento se dibujan las proyecciones de las tres rectas r_0, s_0 y t_0, en las cuales van a estar incluidas las tres aristas del cubo. Se abaten las caras del triedro trirrectángulo que definen las tres direcciones r, s, y t, situando en los abatimientos de éstas la magnitud de a=32 mm, determinando los extremos $(D_\alpha)_0$, $(F_\alpha)_0$ y $(H_\alpha)_0$, y por paralelismo los $(C_\alpha)_0$,$(G_\alpha)_0$, $(E_\alpha)_0$ y $(B_\alpha)_0$. Se determina la altura -h- de los puntos 1, 2 y 3 por los que pasan las rectas t, r y s respectivamente.

A continuación, se desabate la figura por afinidad y se obtienen las proyecciones de los vértices en plano A, B_α, C_α, D_α, E_α, F_α, G_α y H_α, de las tres rectas r, s y t, y de los tres puntos 1_α, 2_α y 3_α. Por estos tres puntos se trazan rectas perpendiculares al plano y en ellas se traslada la altura -h- obtenida en el abatimiento, consiguiéndose así los puntos 1, 2 y 3 que son los puntos por los que van a pasar las tres rectas r, s y t en las cuales están contenidas tres aristas del cubo y cuyo punto de concurrencia es A. Una vez conseguidas estas tres aristas se obtienen los tres vértices del poliedro D, H y F. Por paralelismo se obtienen el resto de los vértices del cubo y se construye el mismo.

Ejercicio 12



Ejercicio 13:

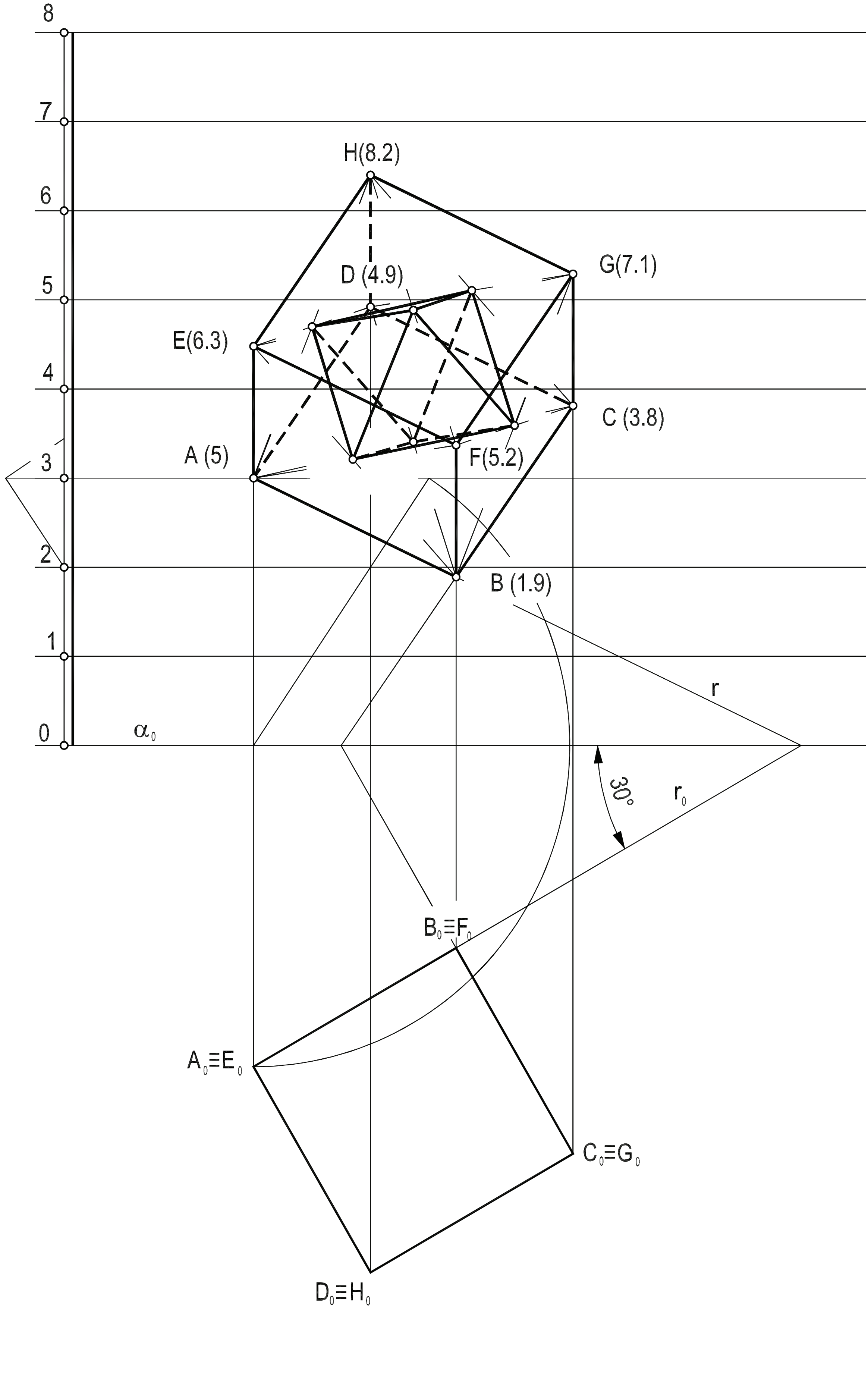
Partiendo de los datos del ejercicio 7, una vez que se tiene construido el hexaedro, inscribir en él un octaedro.

Una vez obtenido el hexaedro, se va a proceder a la construcción del octaedro inscrito.

En primer lugar se trazan las diagonales de las seis caras del cubo para hallar los centros de las caras, que son a su vez los vértices de octaedro. Una vez obtenidos los seis vértices se unen y se construye el octaedro.

Se considerarán las partes vistas y ocultas. El contorno aparente será visto y también lo será el vértice situado en la cara superior del cubo, el vértice opuesto será oculto y por lo tanto las cuatro aristas que a él concurren.

Ejercicio 13

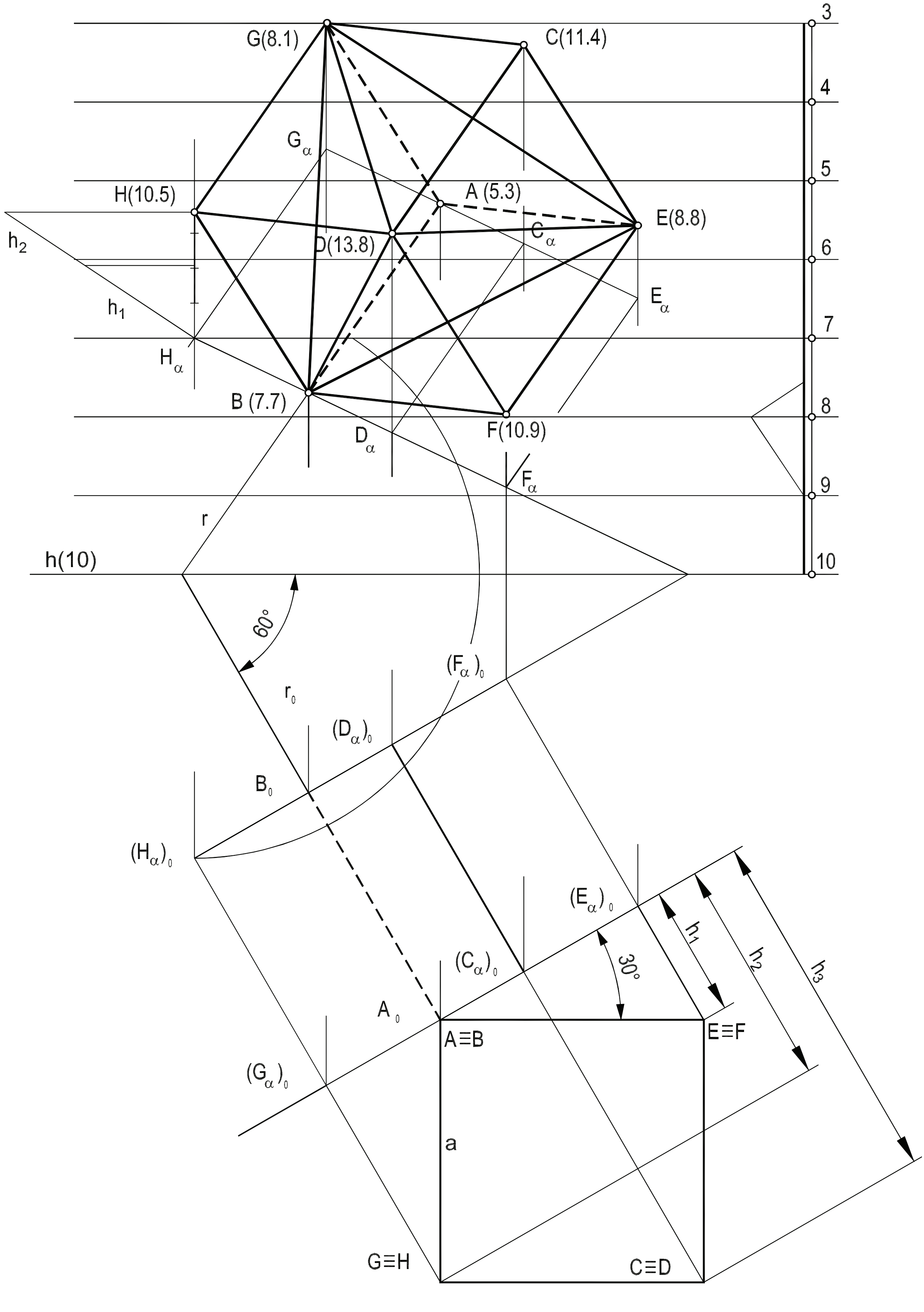


Ejercicio 14:

Partiendo de los datos del ejercicio 10, una vez que se tiene construido el hexaedro, inscribir en él un tetraedro.

Una vez obtenido el hexaedro, se va a proceder a la construcción del tetraedro inscrito. Para ello se trazan las diagonales de cara del cubo; estas van a ser las aristas del tetraedro.

Ejercicio 14



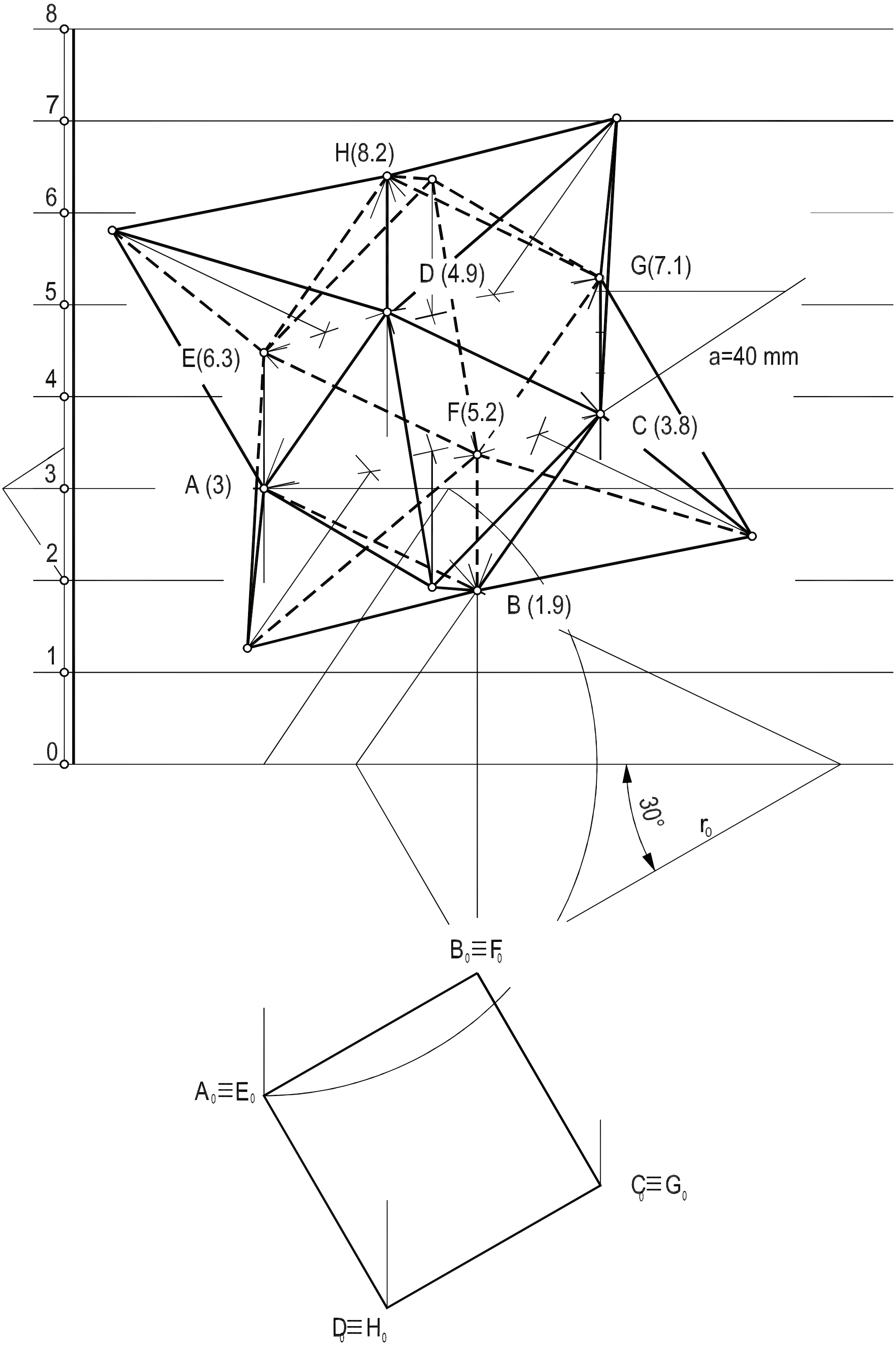
Ejercicio 15:

Partiendo de los datos del ejercicio 7, una vez que se tiene construido el hexaedro, construir una pirámide en cada cara de éste de altura la arista del hexaedro.

A partir del hexaedro dibujado en el ejercicio 7, se va a realizar la construcción pedida. Para ello se obtienen en primer lugar los puntos centrales de las seis caras del cubo, trazando sus diagonales. Una vez obtenidos los seis puntos centrales se levantan las alturas de las pirámides con base en cada cara, que será igual al valor de la arista correspondiente en cada cara. Se llevan paralelas a estas aristas y la altura corresponderá a la medida de estas.

Ahora sólo queda construir cada pirámide y una vez dibujado el conjunto completo dibujar las líneas ocultas para su completa representación.

Ejercicio 15



OCTAEDRO

Ejercicio 16:

Determinar las proyecciones de un octaedro en el sistema acotado, una de cuyas diagonales mide 10 cm y forma un ángulo de 60º con el plano de proyección. Uno de los vértices no situados en dicha diagonal tiene 24.5 de cota, siendo el centro del octaedro el punto de cota 25.

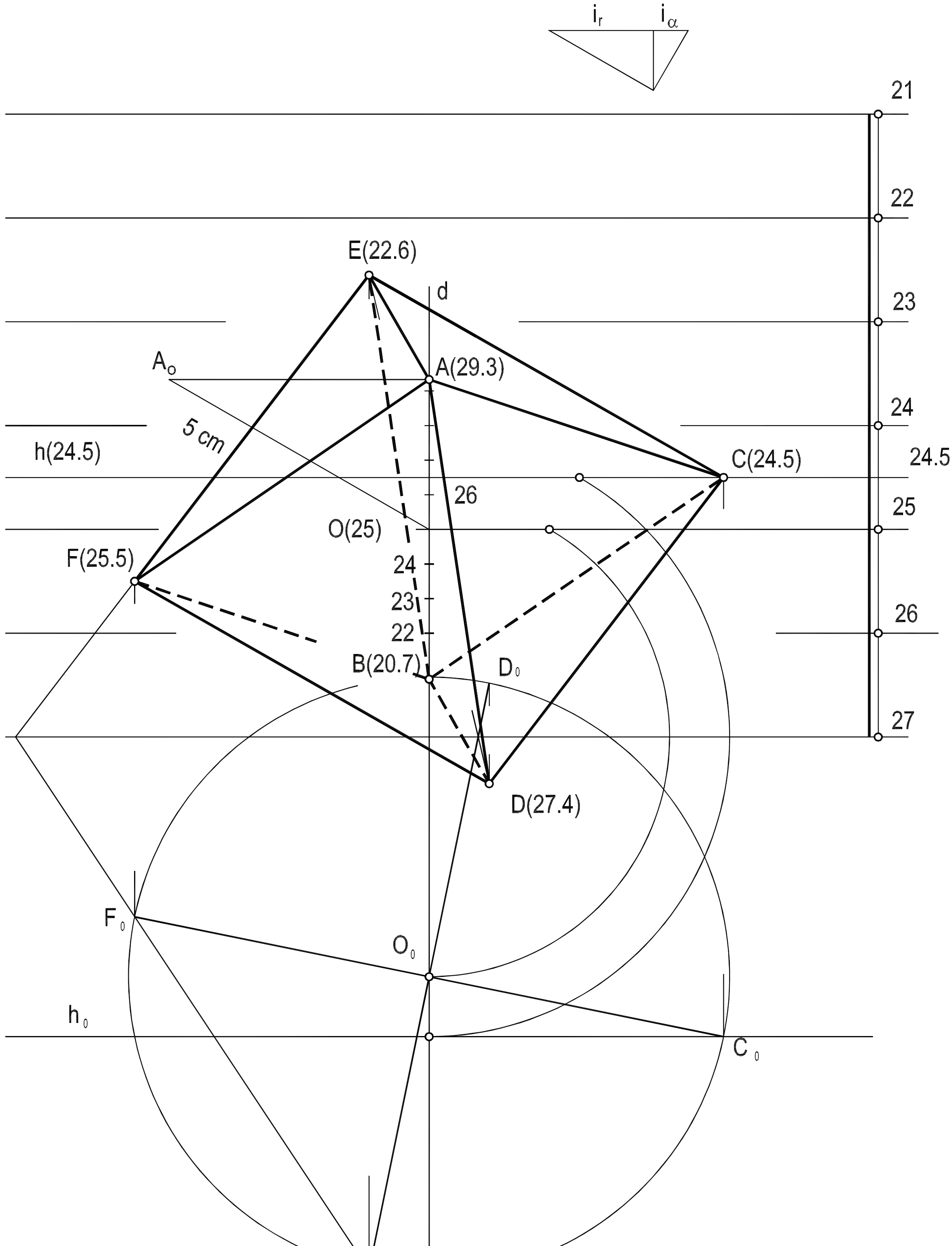
En primer lugar se dibuja la recta -d-, y en ella se sitúa y gradúa la diagonal D del octaedro de acuerdo con el ángulo de 60º que forma con el plano del cuadro.

Para ello, se lleva el ángulo de 60º a partir del punto O(25), que va a ser el centro del octaedro. Sobre dicho ángulo se traza un segmento O-A_0 igual a la mitad de la diagonal (5 cm). El punto A_0 se lleva sobre D obteniendo el vértice A. El vértice opuesto a A será el B simétrico de A con respecto a O. A continuación, se traza por O un plano α perpendicular a la recta d y se abate junto con O; también se abate la recta horizontal del plano h de cota 24.5 En el abatimiento del plano se traza una circunferencia de 10 cm de radio con centro en O_0 y donde ésta corta a h_0 se obtiene el punto C_0. En dicha circunferencia se encuentra el plano diagonal $C_0D_0E_0F_0$.

En el abatimiento y a partir de C_0 y de O_0, se obtienen las proyecciones abatidas de los otros tres vértices del octaedro, D_0, E_0 y F_0 antes citados y que se encuentran en α.

Se desabate el plano y los vértices en él contenidos, se unirán posteriormente los vértices A y B con los C, D, E y F, obteniendo el poliedro.

Ejercicio 16



Ejercicio 17:

Representación en proyección acotada de un octaedro con una diagonal que forme 45º con el plano del cuadro y de 50 mm de arista. Una de las diagonales perpendicular a la anterior forma 60º con α_0, traza del plano que la contiene.

Puesto que es conocido que la diagonal del poliedro forma 45º con el plano del cuadro, se va a trazar un plano α perpendicular a ésta que a su vez formará 45º con el plano del cuadro, por consiguiente, se representa en proyección un plano α de p=45º.

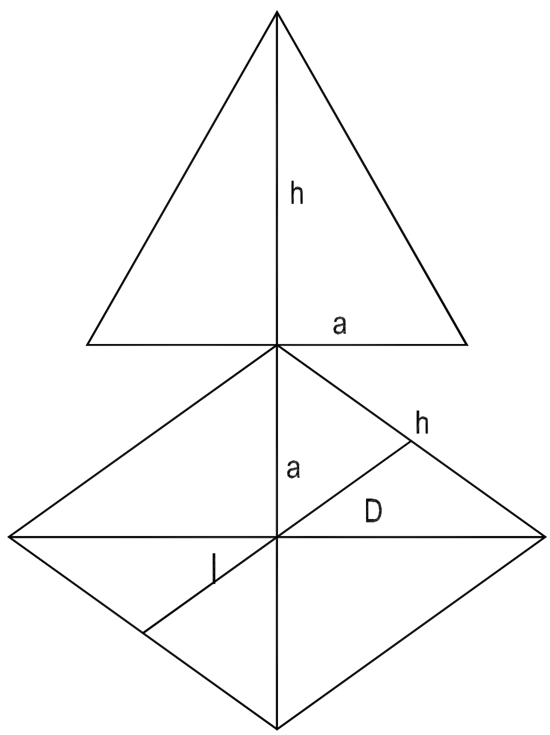
Una vez dibujado el plano, se abate junto con un punto E(7) que pertenece a éste y que va a ser a su vez proyección del vértice E del poliedro en el plano.

Por $(E_\alpha)_0$ se traza una recta d_0 que forma 60º con α_0 y sobre ella se lleva el valor de la diagonal D que se ha obtenido en figura a parte, teniendo así la segunda proyección abatida de un vértice del poliedro, $(C_\alpha)_0$. A continuación, se obtienen las proyecciones abatidas del resto de los vértices del poliedro, $(D_\alpha)_0$, $(B_\alpha)_0$, $(A_\alpha)_0$ y $(F_\alpha)_0$.

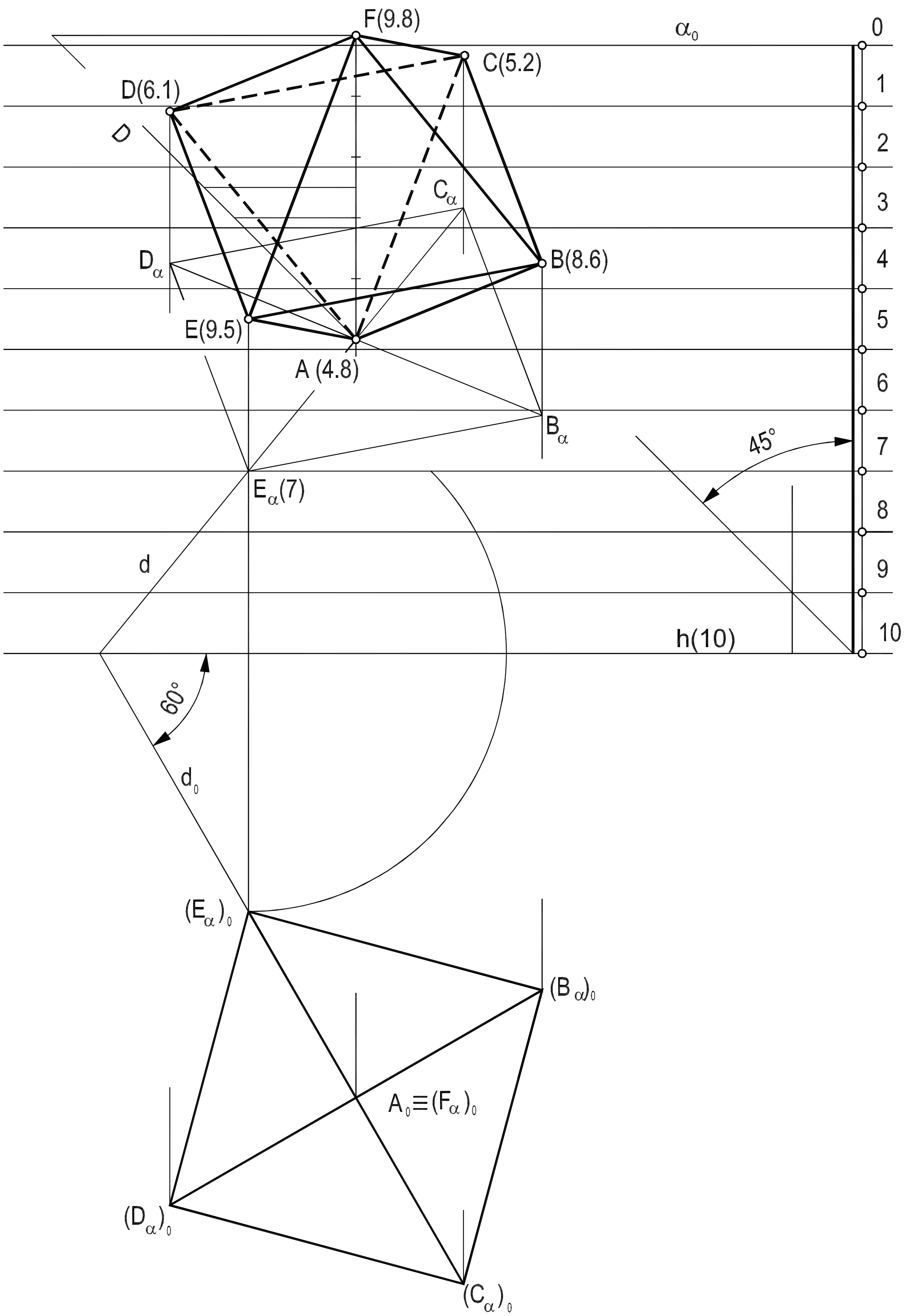
Seguidamente se desabaten por afinidad las proyecciones abatidas de los vértices, obteniendo las proyecciones de los mismos sobre α: A, B_α, C_α, D_α, E_α y F_α.

Por A se traza una recta perpendicular a α y sobre ésta se lleva el valor de la diagonal D, teniendo así el vértice F. Los otros cuatro vértices de poliedro, B, C, D y E, se consiguen llevando sobre rectas perpendiculares al plano la distancia D/2.

Sólo resta unir los puntos y construir el poliedro teniendo en cuenta las partes vistas y ocultas.



Ejercicio 17



Ejercicio 18:

Proyección acotada de un octaedro con una cara apoyada sobre un plano de p=2/3. Del octaedro se conoce un vértice A(4); el valor de la arista que es 40 mm. La arista que pasa por A y está contenida en el plano, forma 30º con α_o.

Con la pendiente dada del plano se halla el intervalo de éste para poder representarlo en proyección. Otro dato conocido es el vértice A que está situado sobre el plano.

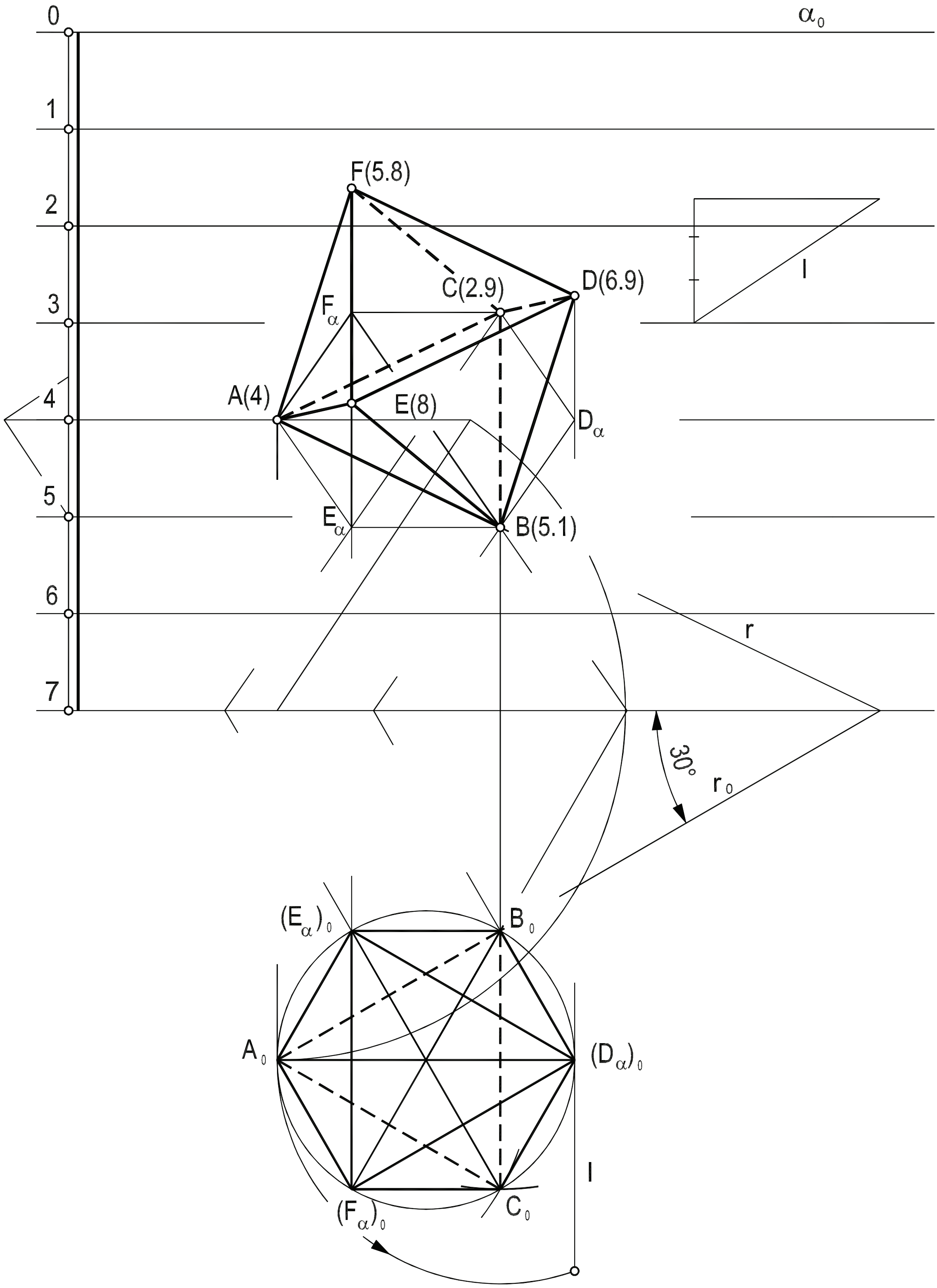
Se abate el plano, utilizando como punto de referencia el punto A. En el abatimiento se traza por A_0 una recta r_0 que forma 30º con α_o y en ella, a partir de A_0 se lleva el valor de la arista obteniendo así B_0. A continuación se construye la cara del octaedro apoyada en el plano en verdadera magnitud, A_0, B_0 C_0. La cara paralela a ésta será $(D_\alpha)_0$, $(E_\alpha)_0$ y $(F_\alpha)_0$, cuyos vértices se encontrarán en la circunferencia que contiene a los otros tres.

El siguiente paso consiste en desabatir por afinidad la figura, obteniendo el triángulo correspondiente a la cara del octaedro apoyada en el plano en proyección, A, B C, y la proyección en el plano de los otros tres vértices del octaedro, E_α, F_α y D_α.

Por estos tres vértices, se trazan rectas perpendiculares al plano y sobre ellas se lleva la distancia -l- correspondiente al valor de la distancia entres caras paralelas, consiguiendo así los otros tres vértices del octaedro, E, F y D.

Sólo resta unir los vértices, considerando las partes vistas y ocultas y así queda definido el poliedro.

Ejercicio 18



Ejercicio 19:

Proyección acotada de un octaedro cuya arista tiene una pendiente de 30º y está apoyada sobre un plano de p=4/5. La arista mide 50 mm.

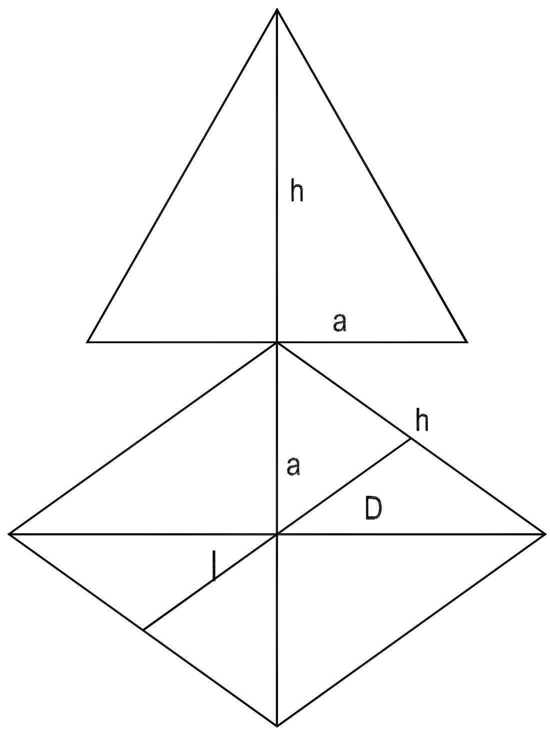
Con la pendiente dada del plano se halla el intervalo de éste para poder representarlo en proyección.

Se abate el plano, utilizando un punto A en él contenido. El punto A es el centro de la circunferencia de radio el intervalo de la arista apoyada en el plano, cuya pendiente es conocida. Por donde la circunferencia corta a las horizontales del plano se hace pasar una recta r en la cual va a estar contenida la arista que está apoyada en el plano. A continuación se abate la recta y en el abatimiento de la misma se traslada la magnitud de la arista, que es conocida y así se obtienen los dos primeros vértices del octaedro, A_0 y C_0.

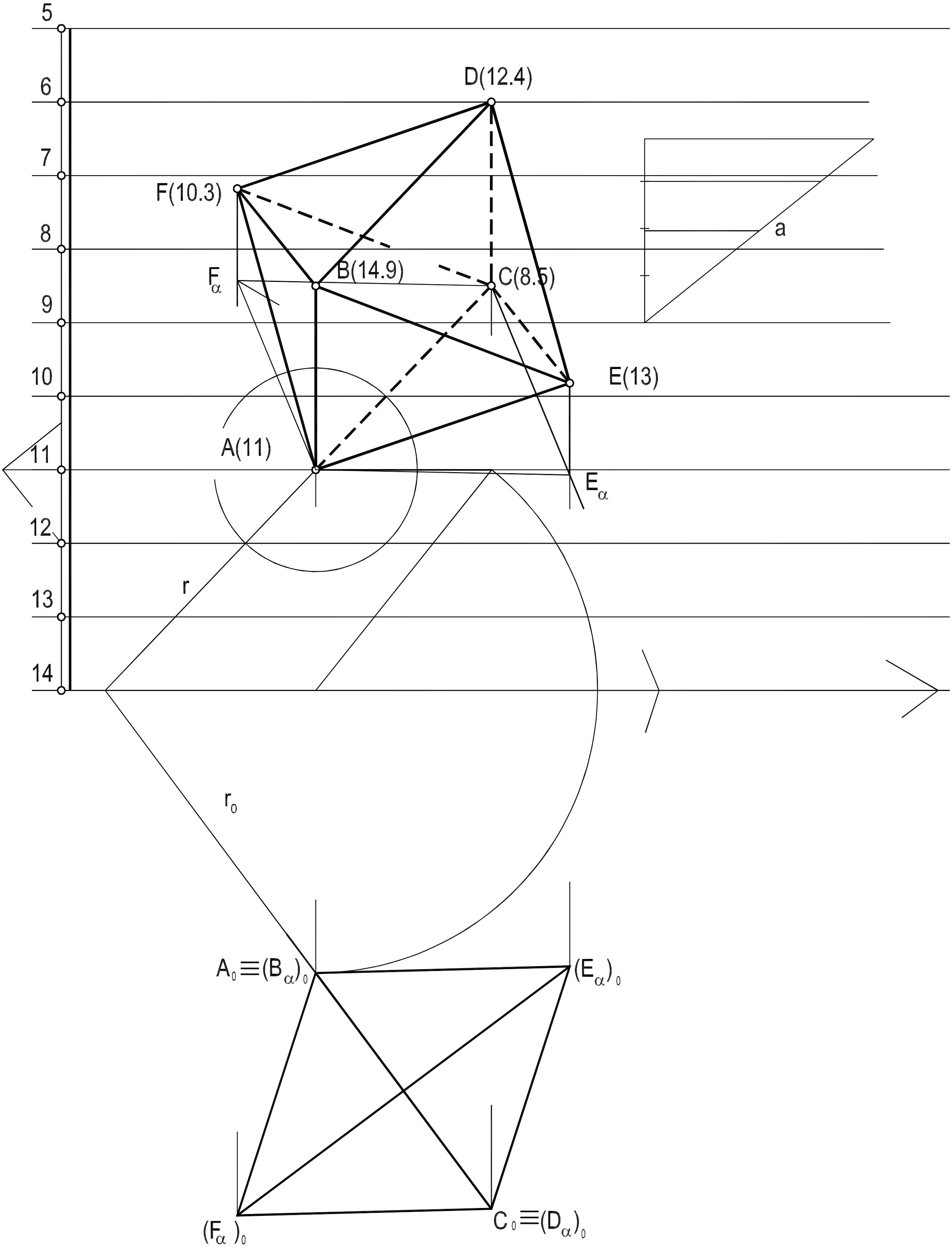
En el abatimiento se obtienen las proyecciones abatidas de los otros vértices que forman el octaedro, $(B_\alpha)_0$, $(D_\alpha)_0$, $(E_\alpha)_0$ y $(F_\alpha)_0$. El siguiente paso consiste en desabatir por afinidad estos puntos y obtenerlos sobre el plano.

A partir de A y C se trazan rectas perpendiculares al plano y sobre ellas se lleva el valor de la arista del octaedro, obteniéndose los vértices B y D que son los vértices de la arista opuesta a la apoyada en el plano. Por E_α y F_α, se levanta la altura correspondiente a a/2 y así se obtienen los otros dos vértices del poliedro, E y F.

Sólo resta definir las partes vistas y ocultas y así queda definido el octaedro buscado.



Ejercicio 19



Ejercicio 20

Proyección acotada de un octaedro conocidas las direcciones de las tres diagonales concurrentes en un punto O(4); la arista mide 40 mm y el punto O se encuentra sobre un plano de pendiente p=1/2.

Con la pendiente dada del plano se halla su intervalo para poder representarlo en proyección.

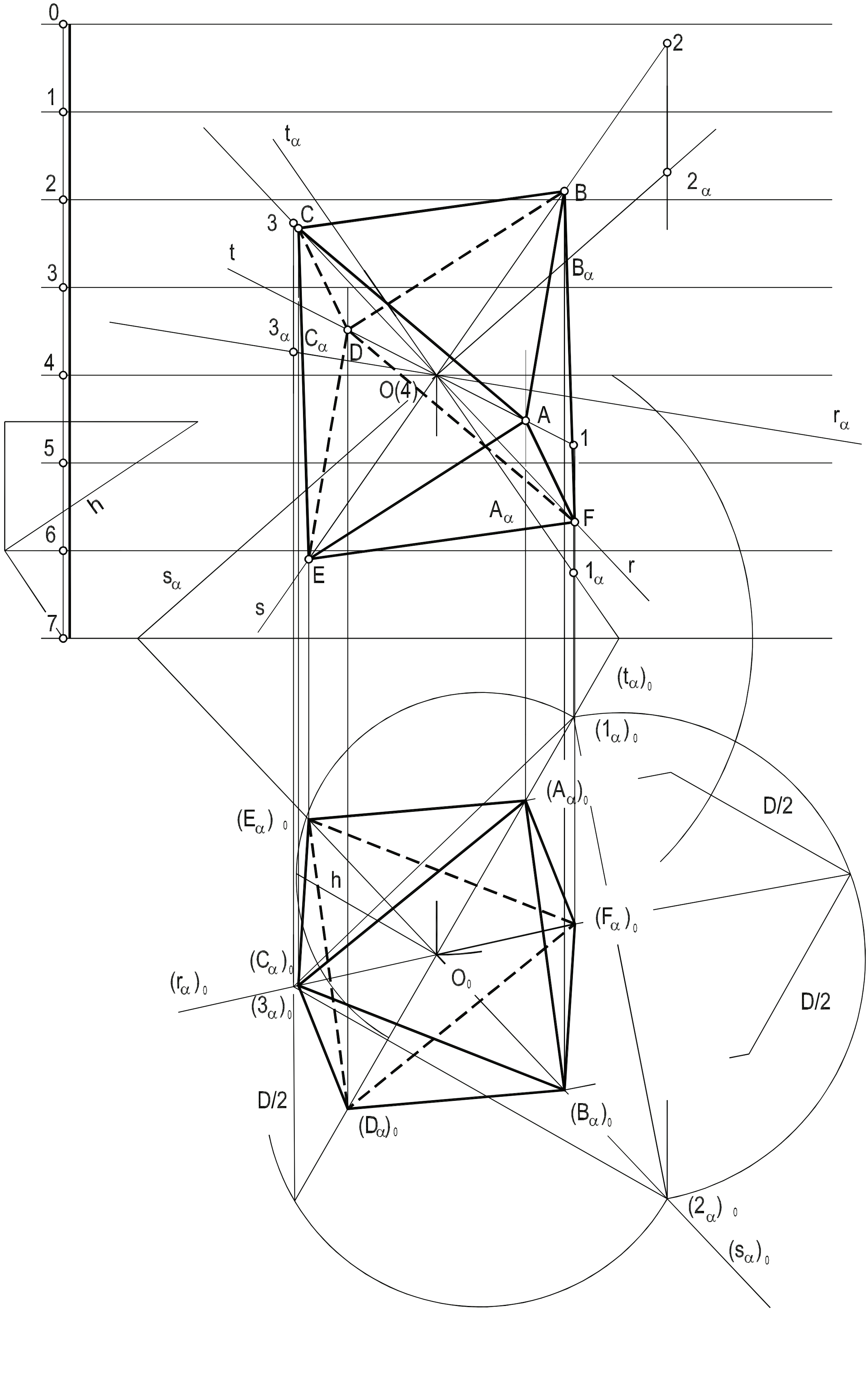
Se toma el punto O y se abate junto con el plano. El punto O_0 del abatimiento va a ser el punto de intersección de las proyecciones de tres rectas, en las cuales se encontrarán las verdaderas magnitudes de las diagonales del octaedro. O_0 es el vértice de un triedro trirrectángulo. La manera de proceder a su resolución es similar a la empleada en el ejercicio 12.

En el abatimiento se dibujan las proyecciones de las tres rectas $(r_\alpha)_0$, $(s_\alpha)_0$ y $(t_\alpha)_0$, en las cuales van a estar incluidas las tres diagonales del octaedro.

Se toman tres puntos de estas rectas $(1_\alpha)_0$, $(2_\alpha)_0$ y $(3_\alpha)_0$ vértices de un triángulo paralelo al plano de referencia y se obtiene la altura de estos -h- con respecto a O, dato que se utilizará más adelante. También se construye la proyección en el abatimiento del octaedro obteniendo las proyecciones abatidas de los vértices de éste, (A_α), $(B_\alpha)_0$, $(C_\alpha)_0$, $(D_\alpha)_0$, $(E_\alpha)_0$, $(F_\alpha)_0$.

A continuación, se desabate la figura por afinidad y se obtienen las proyecciones sobre el plano de los vértices A_α, B_α, C_α, D_α, E_α y F_α. de las tres rectas r_α, s_α y t_α, y de los tres puntos 1_α, 2_α y 3_α. Por estos tres puntos se trazan rectas perpendiculares al plano y a ellas se traslada la altura -h- obtenida en el abatimiento, obteniéndose los puntos 1, 2 y 3 que son los puntos por los que van a pasar las tres rectas r, s y t en las cuales están contenidos los vértices del cubo y cuyo punto de concurrencia es O. Una vez obtenidas estas tres rectas diagonales se obtienen sobre ellas los tres vértices del poliedro A, B y C. Por simetría se obtienen el resto de los vértices del octaedro D, E, F y se construye el mismo.

Ejercicio 20



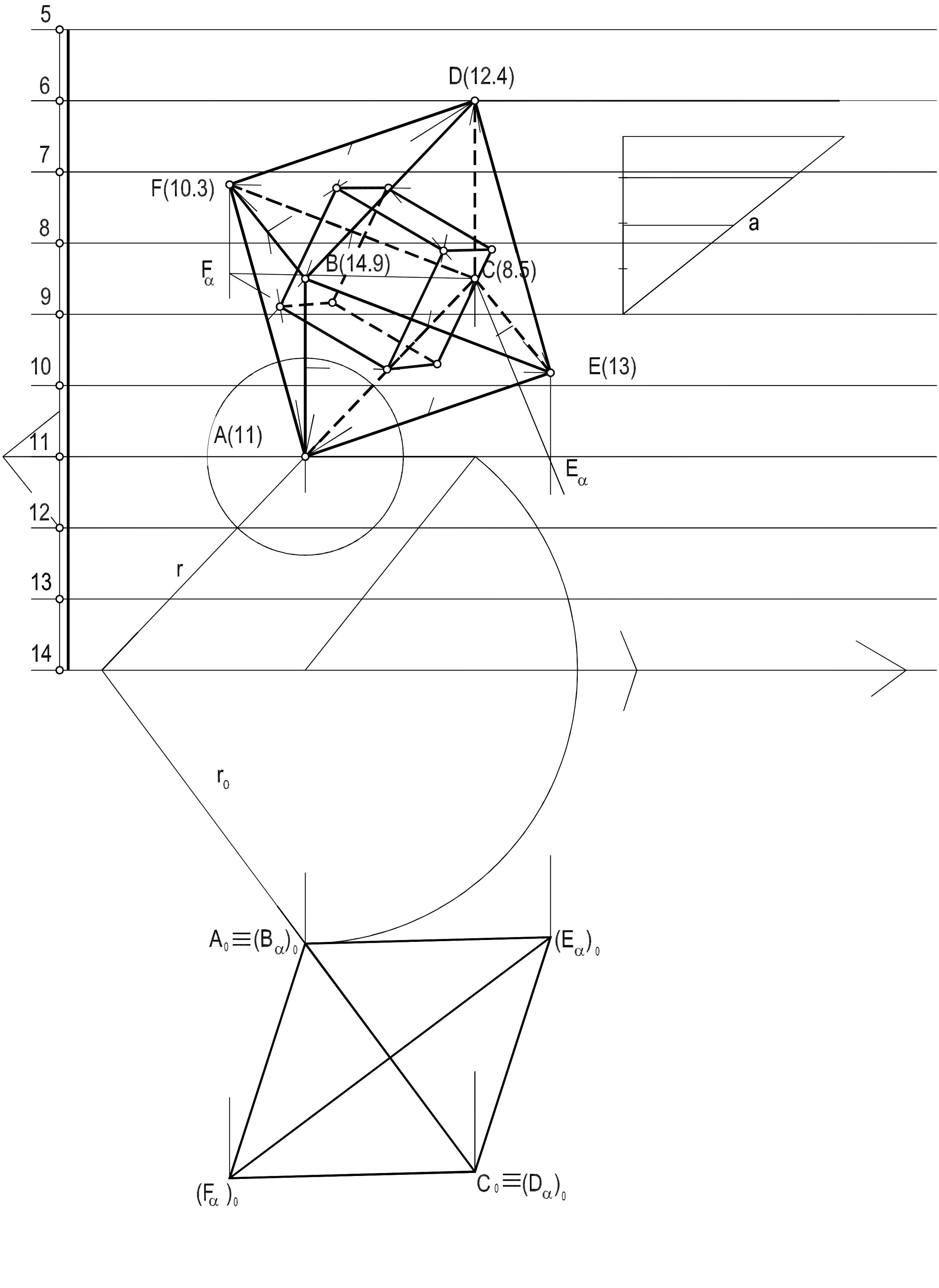
Ejercicio 21:

Partiendo de los datos del ejercicio 19, una vez que se tiene construido el octaedro, inscribir en él un hexaedro.

Una vez obtenido el octaedro, se va a proceder a la construcción del hexaedro inscrito.

En primer lugar se trazan las medianas de las ocho caras del octaedro para hallar los centros de las caras, que son a su vez los vértices del hexaedro. Una vez obtenidos los ocho vértices se unen los centros y se construye el hexaedro.

Ejercicio 21



Ejercicio 22:

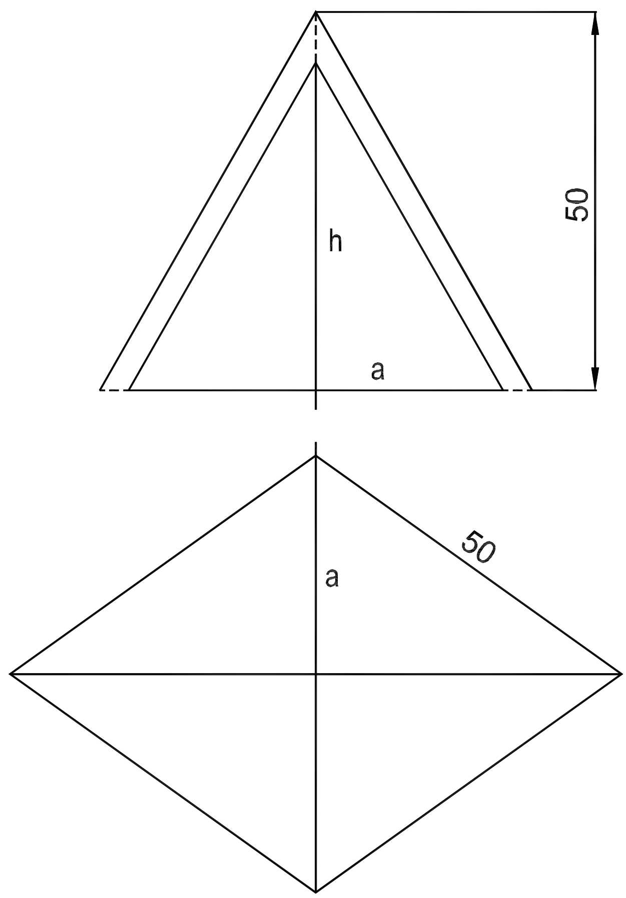
Determinar las proyecciones de un octaedro en el sistema acotado, del cual se conoce que su sección principal está apoyada sobre un plano de pendiente p=2/3. Del octaedro se conoce el centro O(4). La altura de cara del octaedro es 50 mm.

Con la pendiente dada del plano se halla el intervalo de éste para representarlo en proyección.

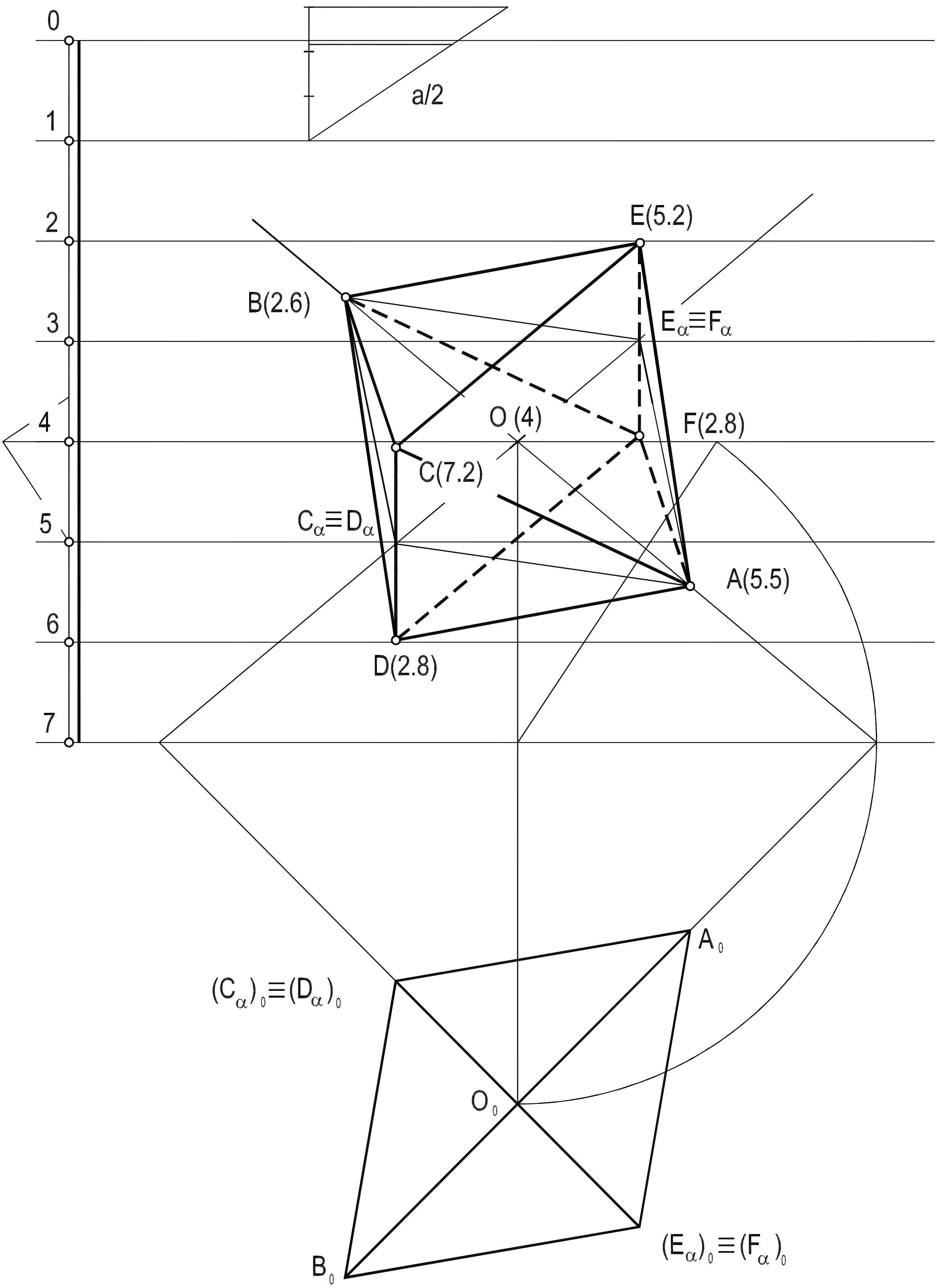
Se abate el plano, utilizando como referencia el punto O. En el abatimiento se construye la sección principal del poliedro y así se obtienen las proyecciones abatidas de los vértices, $(A_\alpha)_0$, $(B_\alpha)_0$, $(C_\alpha)_0$, $(D_\alpha)_0$, $(E_\alpha)_0$ y $(F_\alpha)_0$.

A continuación, se desabate por afinidad la sección principal del poliedro y se obtiene su proyección sobre el plano. Por $C_\alpha \equiv D_\alpha$ y $E_\alpha \equiv F_\alpha$ se trazan dos rectas perpendiculares al plano y sobre éstas se llevan el valor equivalente a la mitad de la arista por encima del plano y la otra mitad por debajo, los vértices A y B se encuentran sobre el plano por pertenecer ambos a la sección principal por lo que quedan definidos los seis vértices del poliedro.

Sólo resta considerar las partes vistas y ocultas para completar la representación.



Ejercicio 22



DODECAEDRO

Ejercicio 23:

Proyección acotada de un dodecaedro de arista 30 mm, que se encuentra apoyado por una cara sobre un plano del que se conoce su pendiente p=1/2.

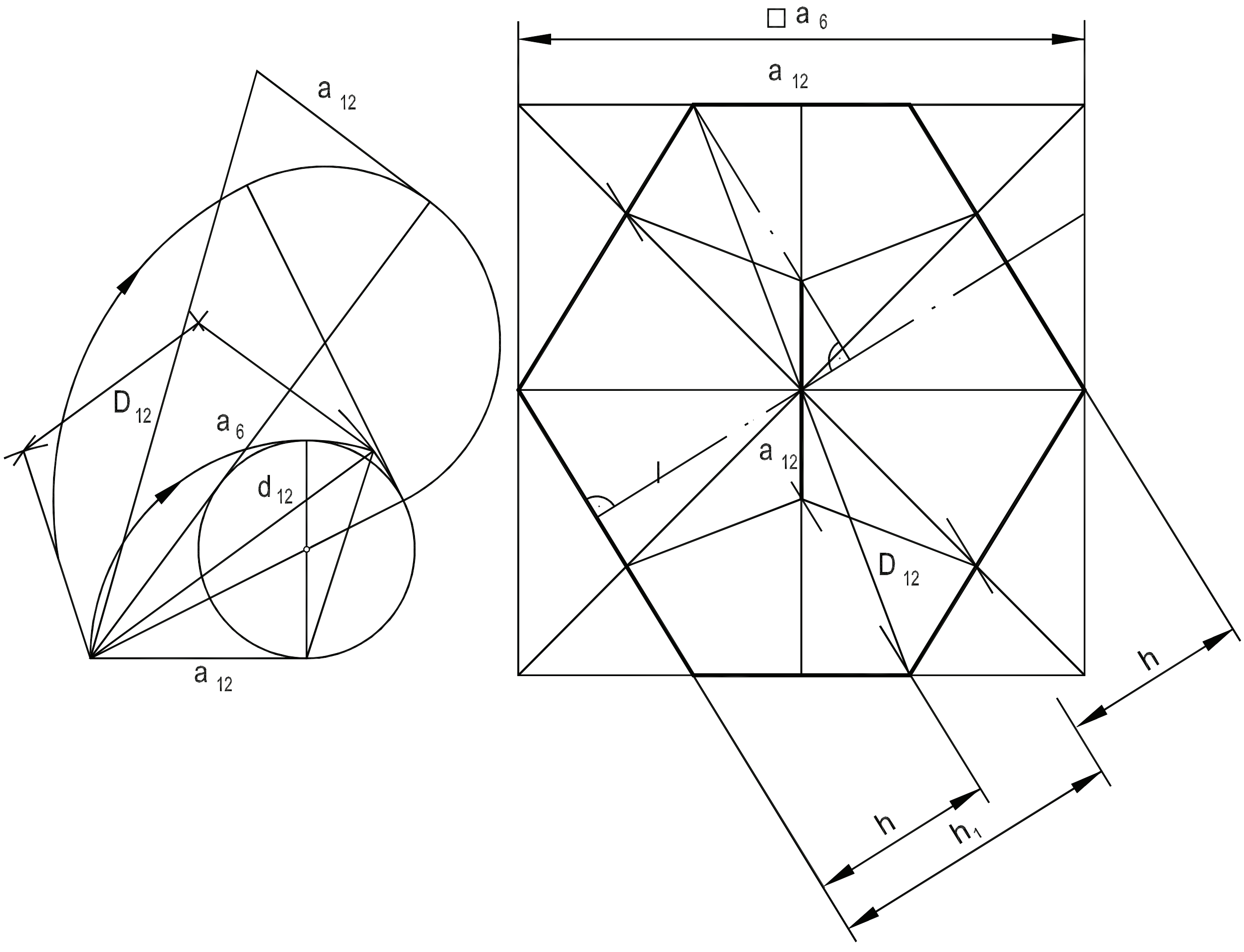
Con la pendiente dada del plano se halla el intervalo de éste para representarlo en proyección.

Se abate el plano, y en el abatimiento se dibuja la proyección del dodecaedro con una cara apoyada sobre éste y en ella se ven la cara apoyada y su paralela en verdadera magnitud. En la sección principal, se determinan las distancias de los vértices al plano.

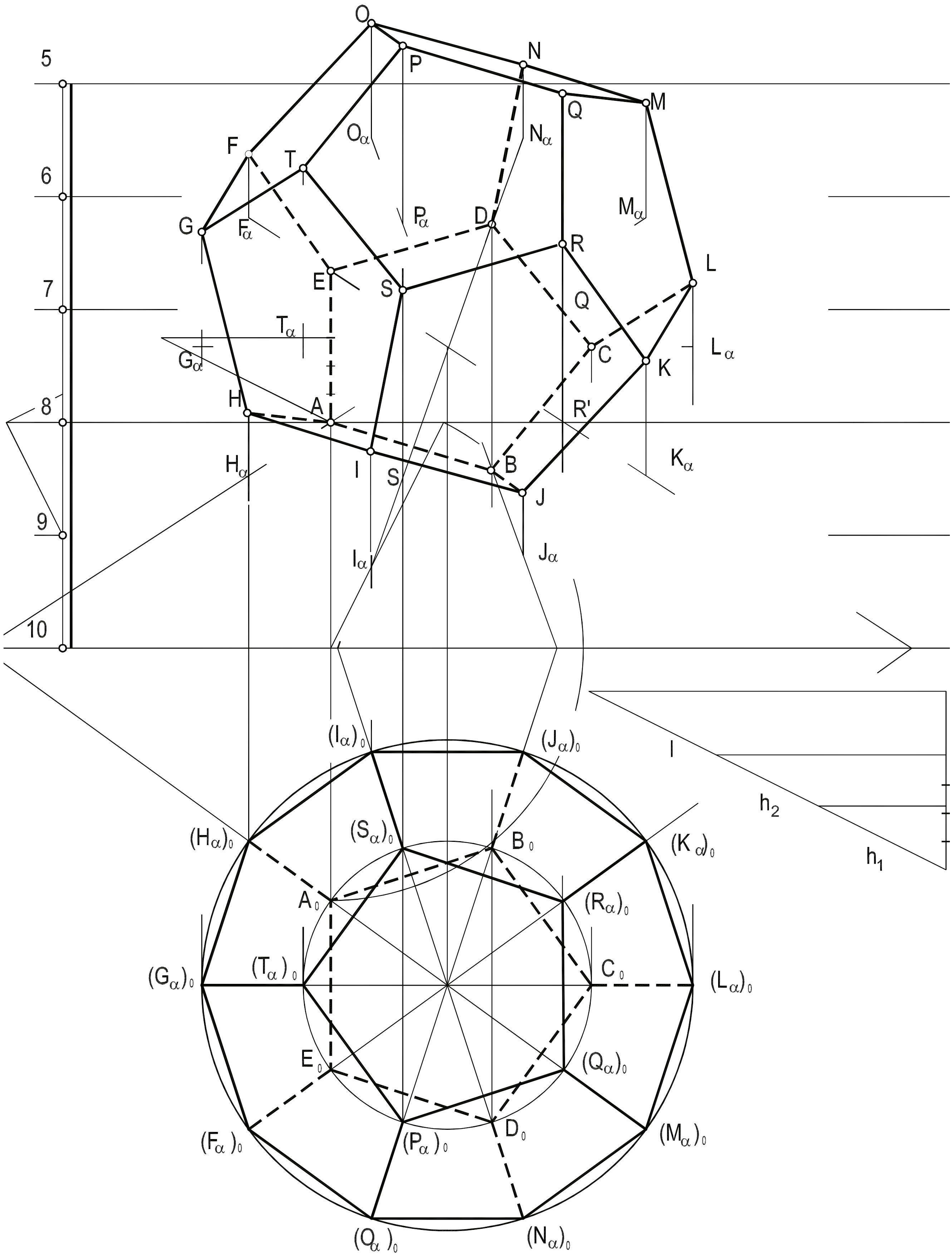
A continuación, se desabate la figura por afinidad obteniéndose las proyecciones de los vértices del poliedro en el plano.

El siguiente paso consiste en trazar por las proyecciones de los vértices rectas perpendiculares al plano y sobre ellas se trasladan las distancias correspondientes h y h_1, para hallar los vértices del dodecaedro.

Sólo resta definir las partes vistas y ocultas y así queda definido el poliedro.



Ejercicio 23



Ejercicio 24:

Proyección acotada de un dodecaedro de arista 30 mm, con una diagonal en posición perpendicular a un plano α con una pendiente de p=2/3.

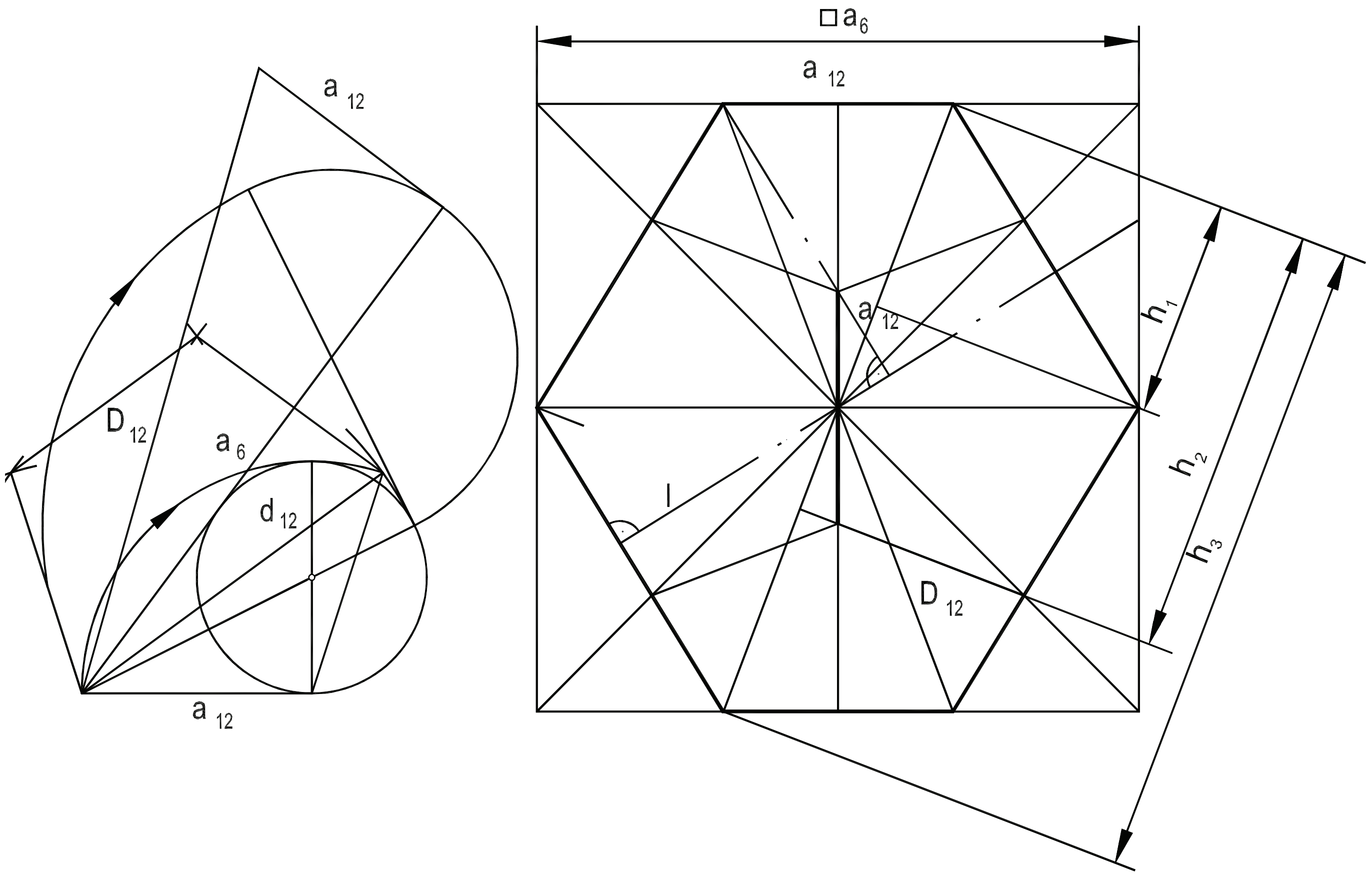
Con la pendiente dada del plano se halla el intervalo de éste para representarlo en proyección.

Se abate el plano, y en el abatimiento se dibuja la proyección del dodecaedro con una diagonal perpendicular a éste, obteniéndose las proyecciones de los vértices. En la sección principal que se ha obtenido en la parte inferior, se determinan las distancias de los vértices al plano de referencia.

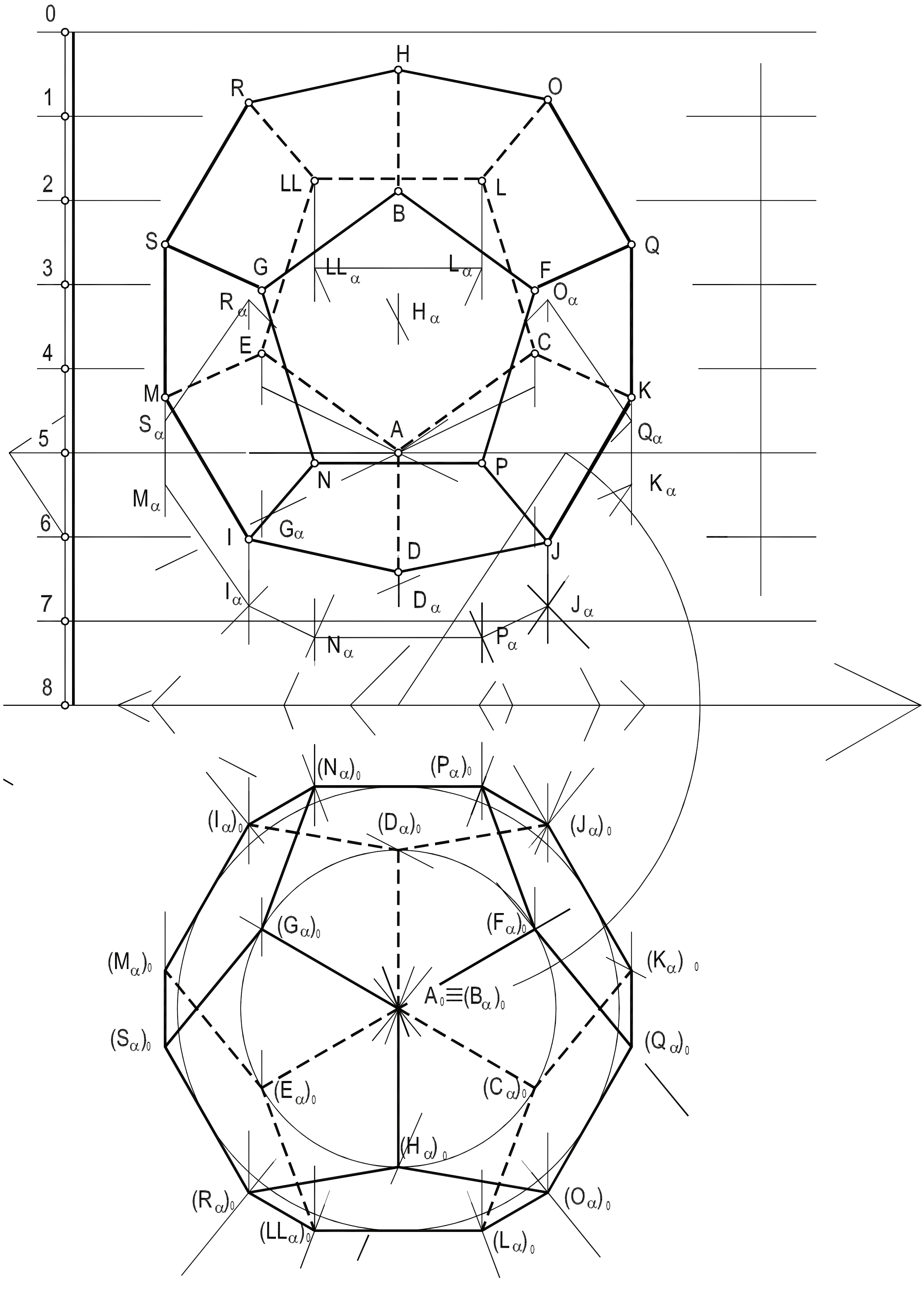
A continuación se desabate la figura por afinidad, obteniéndose las proyecciones de los vértices del poliedro en el plano.

El siguiente paso consiste en trazar por las proyecciones de los vértices rectas perpendiculares al plano y sobre ellas se trasladan las distancias correspondientes para hallar los vértices del dodecaedro.

Sólo resta definir las partes vistas y ocultas y así queda definido el poliedro.



Ejercicio 24



Ejercicio 25:

Proyección acotada de un dodecaedro de arista 30 mm, cuya sección principal se encuentra apoyada en un plano del que se conoce su pendiente p=3/2.

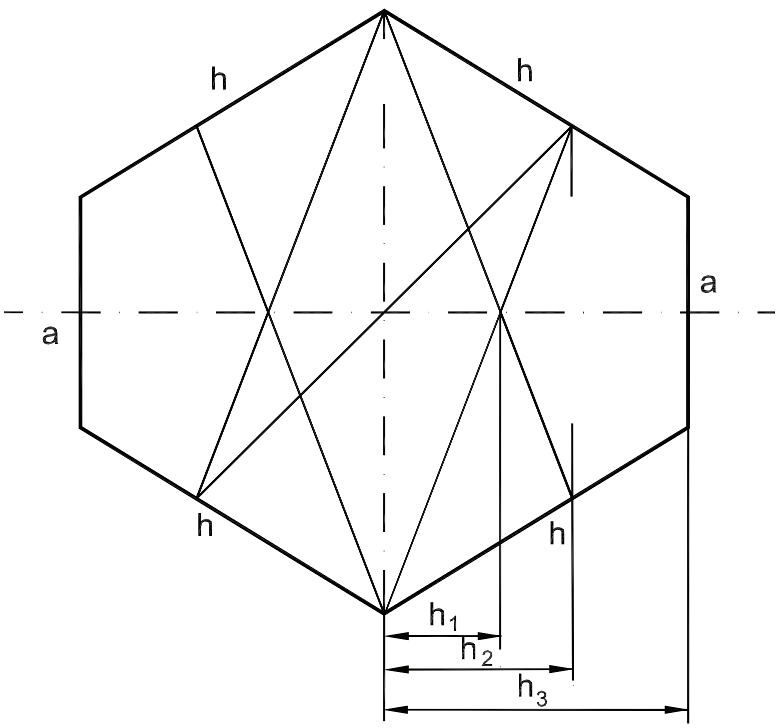
Con la pendiente dada del plano se halla el intervalo de éste para representarlo en proyección.

Se abate el plano, y en el abatimiento se dibuja la proyección de la sección principal del dodecaedro, obteniéndose las proyecciones de los vértices.

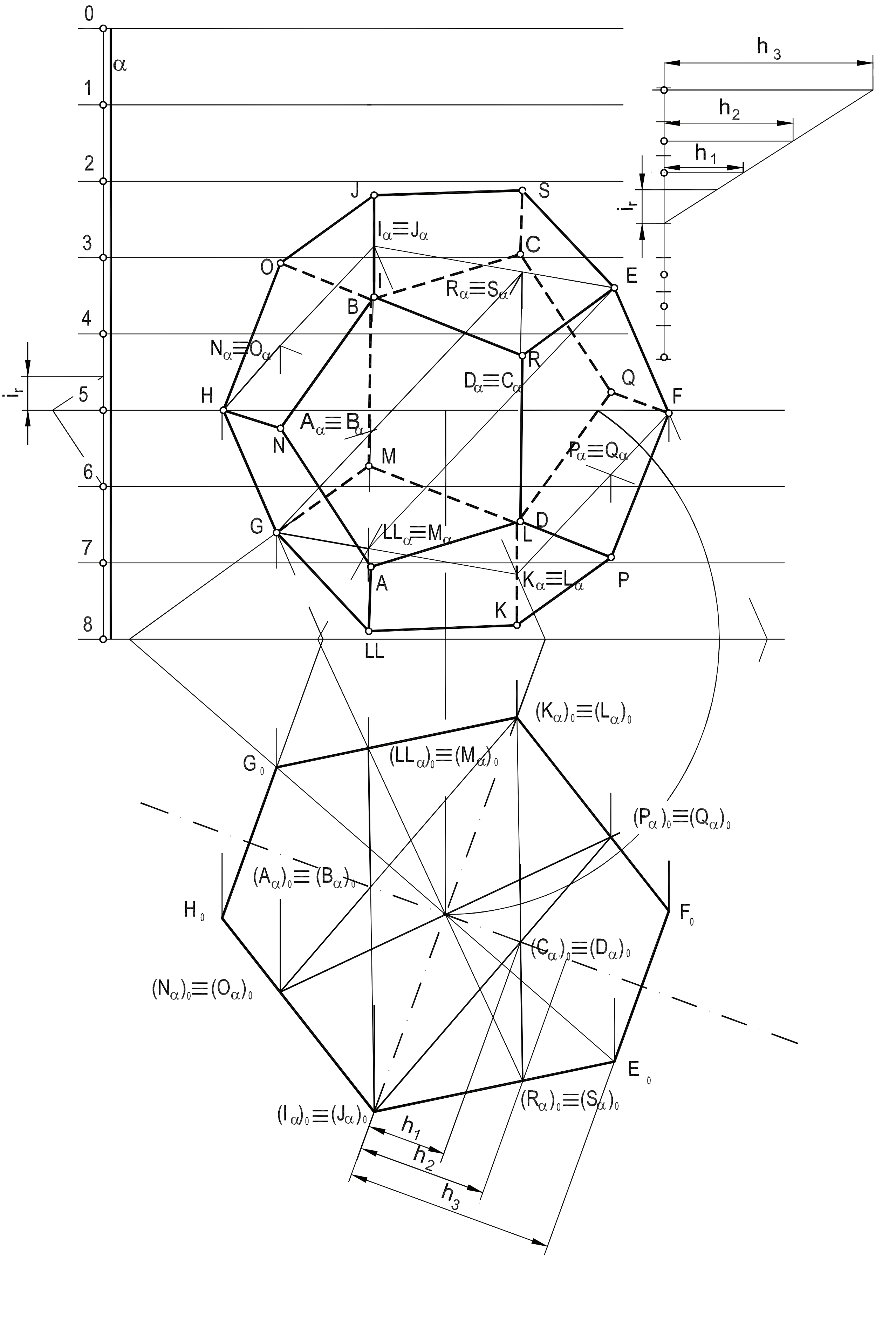
A continuación, se desabate la figura por afinidad obteniéndose las proyecciones de los vértices del poliedro sobre el plano.

El siguiente paso consiste en trazar por las proyecciones de los vértices rectas perpendiculares al plano y sobre ellas se trasladan las distancias correspondientes (h_1, h_2, h_3) obtenidas en la figura de la sección para así hallar los vértices del dodecaedro.

Sólo resta definir las partes vistas y ocultas y de esta forma queda definido el poliedro.



Ejercicio 25



ICOSAEDRO

Ejercicio 26:

Proyección acotada de un icosaedro de arista 40 mm, con una diagonal en posición perpendicular a un plano α con una pendiente de p=2/3.

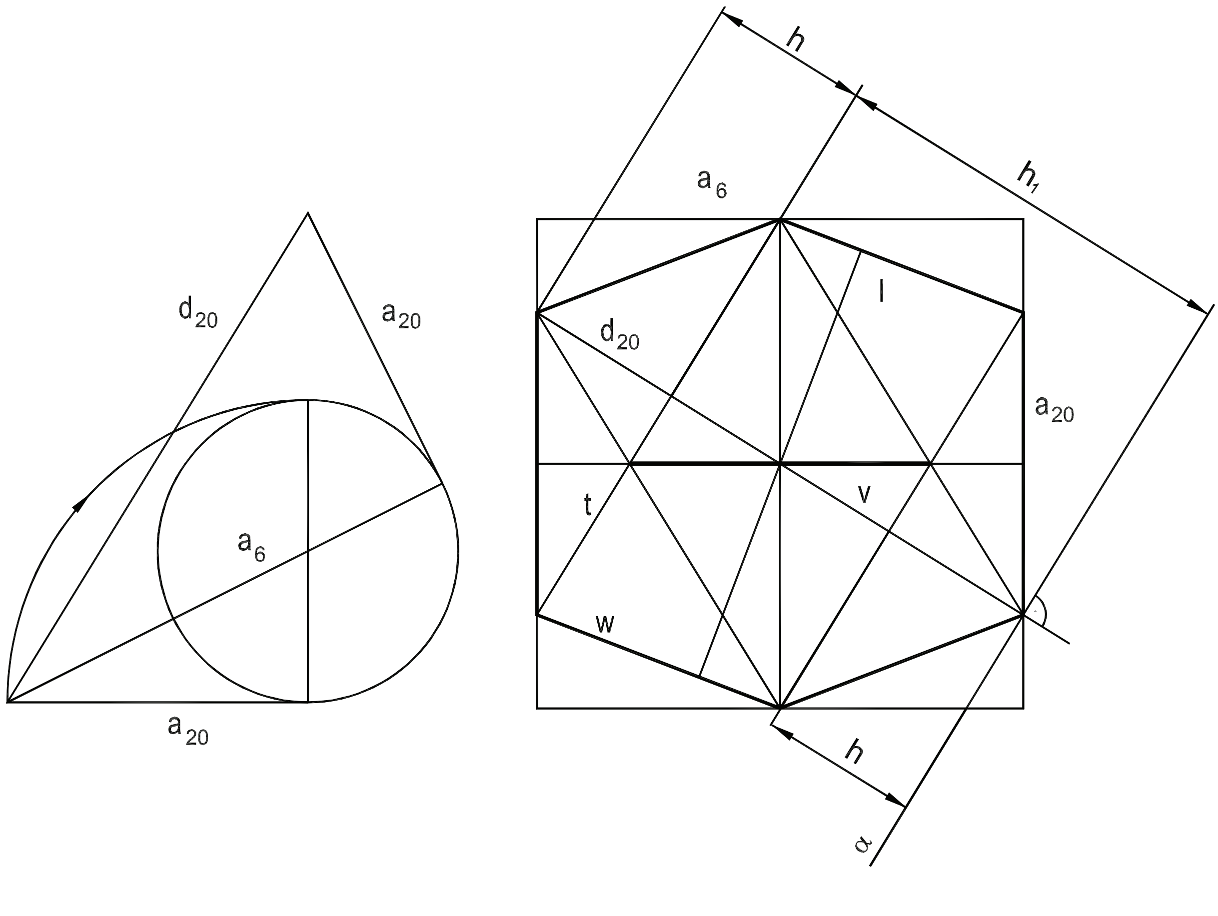
Con la pendiente dada del plano se halla el intervalo de éste para representarlo en proyección.

Se abate el plano, y en el abatimiento de éste se obtiene la proyección del icosaedro con una diagonal perpendicular al plano, obteniéndose las proyecciones de los vértices en el plano abatidas. En la sección principal que se ha obtenido, se determinan las distancias de los vértices al plano de referencia α, h y h_1.

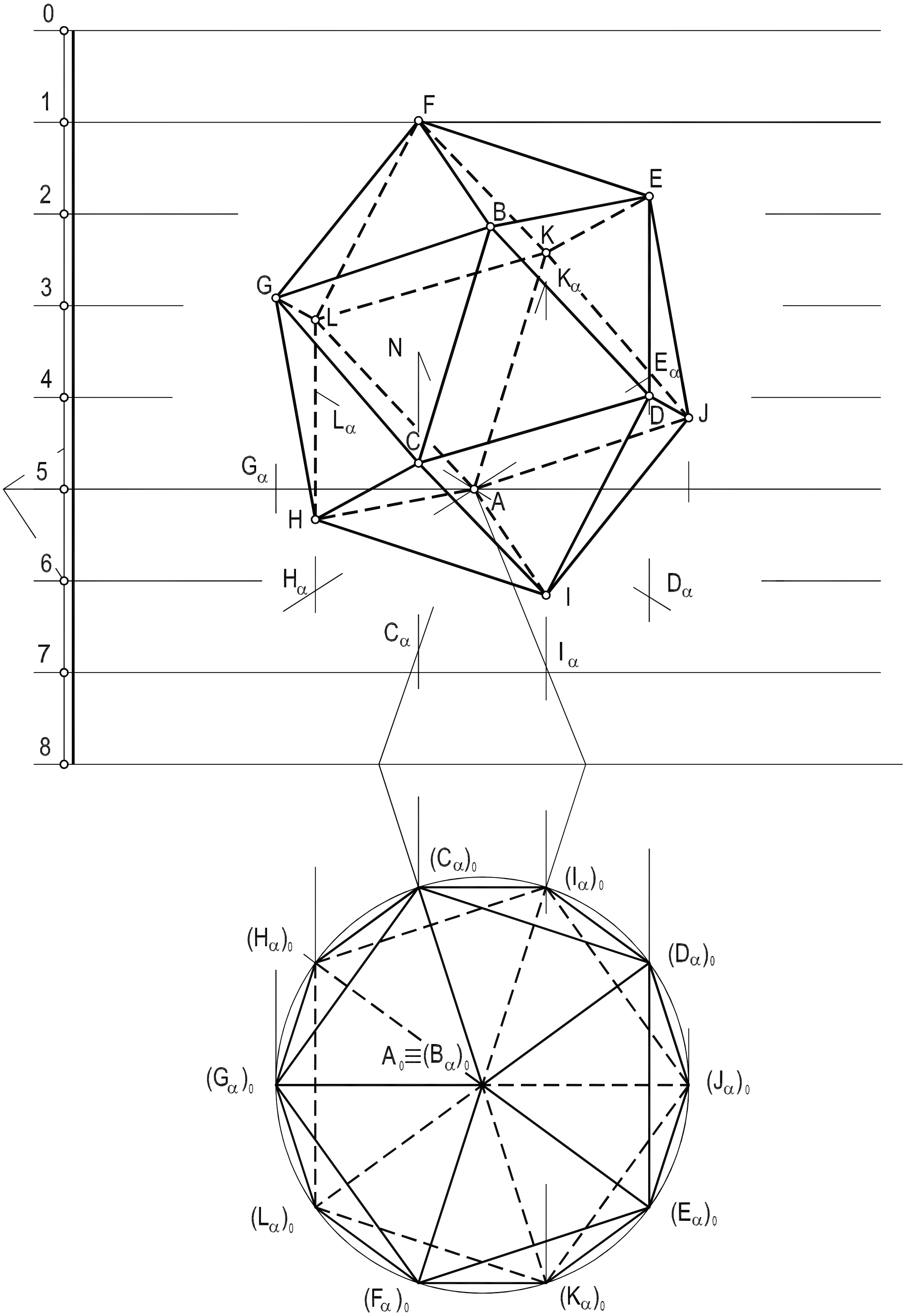
A continuación, se desabate la figura por afinidad, obteniéndose las proyecciones de los vértices del poliedro en el plano.

El siguiente paso consiste en trazar por las proyecciones de los vértices rectas perpendiculares al plano y sobre ellas se trasladan las distancias correspondientes y obtenidas con anterioridad, para hallar los vértices del icosaedro.

Sólo resta definir las partes vistas y ocultas y así queda definido el poliedro.



Ejercicio 26



Ejercicio 27:

Proyección acotada de un icosaedro de arista 44 mm, que se encuentra apoyado por una cara en un plano del que se conoce su pendiente p=2/3.

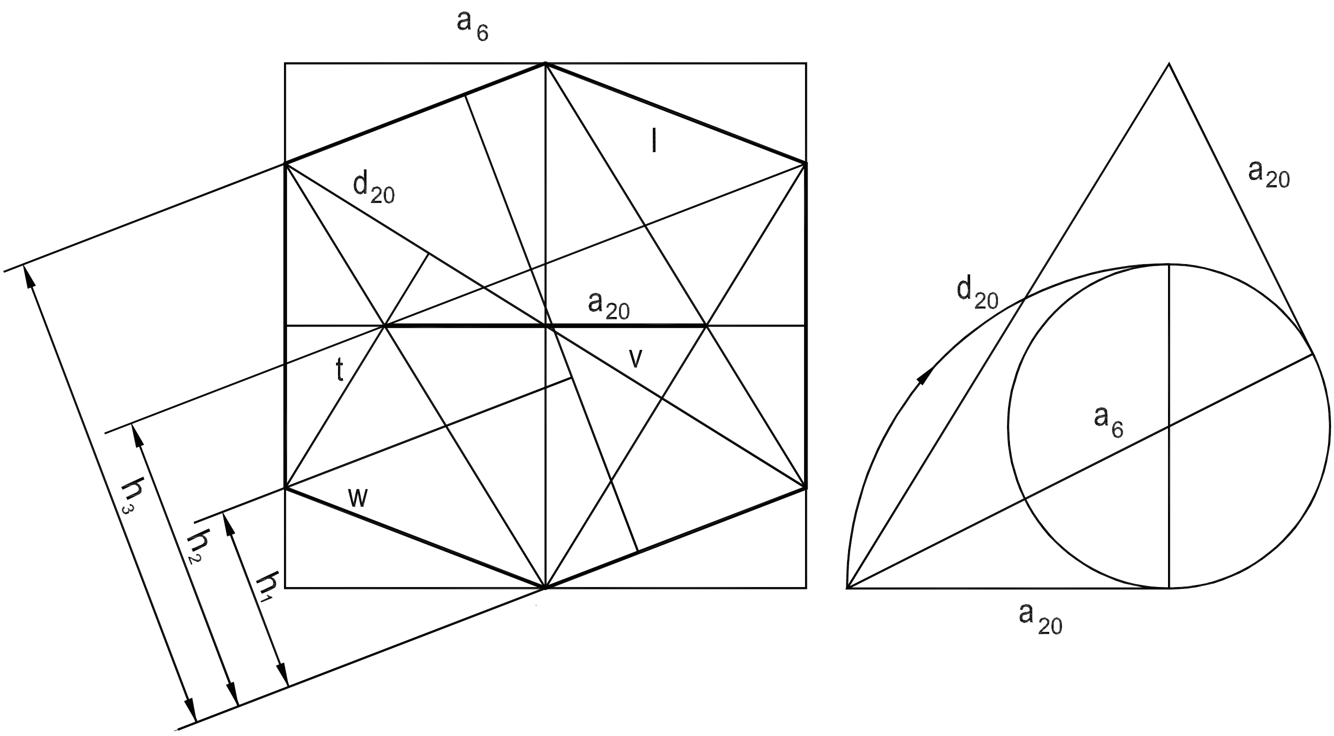
Con la pendiente dada del plano se halla el intervalo de éste para representarlo en proyección.

Se abate el plano, y en el abatimiento de éste se dibuja la proyección del icosaedro con una cara apoyada sobre éste; en esta figura se ven la cara apoyada y la paralela en verdadera magnitud. En la sección principal obtenida, se determinan las distancias de los vértices al plano.

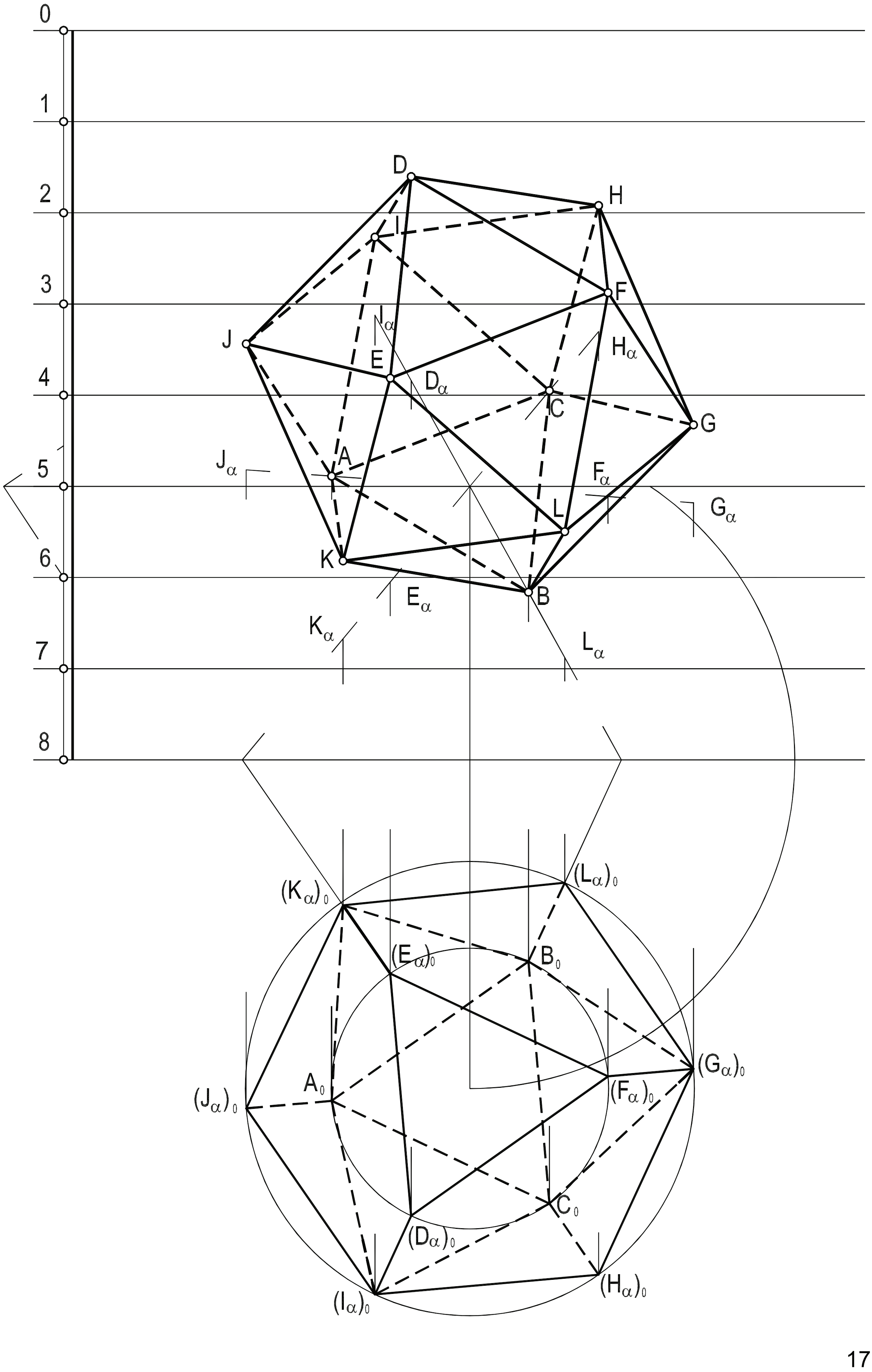
A continuación, se desabate la figura por afinidad, obteniéndose las proyecciones de los vértices del poliedro en el plano.

El siguiente paso consiste en trazar por las proyecciones de los vértices rectas perpendiculares al plano y sobre ellas se trasladan las distancias correspondientes y obtenidas con anterioridad para hallar los vértices del icosaedro.

Sólo resta definir las partes vistas y ocultas y así queda definido el poliedro.



Ejercicio 27



Ejercicio 28:

Proyección acotada de un icosaedro de arista 42 mm, cuya sección principal se encuentra apoyada en un plano del que se conoce su pendiente p=1/2.

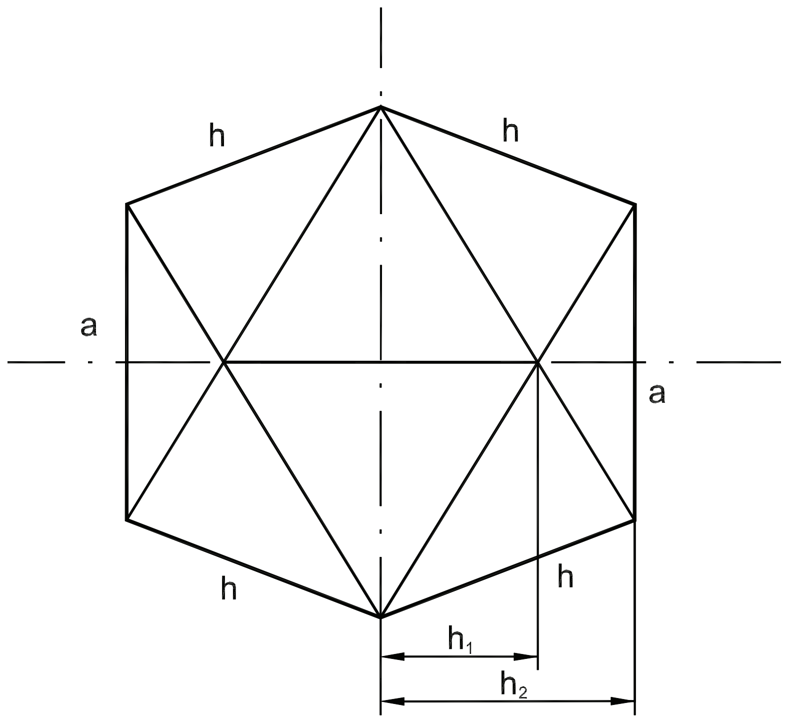
Con la pendiente dada del plano se halla el intervalo de éste para representarlo en proyección.

Se abate el plano, y en el abatimiento de éste se dibuja la proyección de la sección principal del icosaedro, obteniéndose las proyecciones de los vértices sobre el plano .

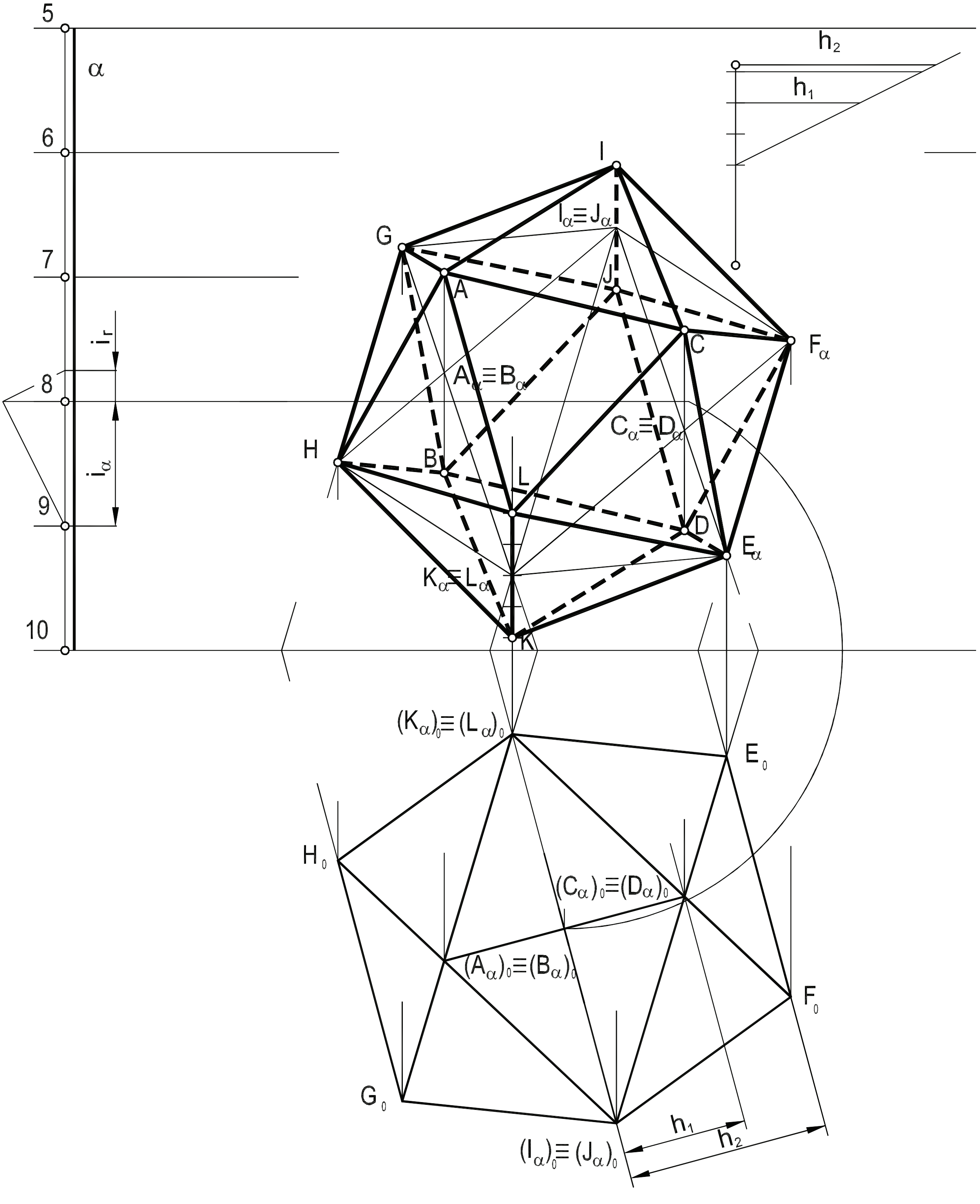
A continuación, se desabate la figura por afinidad obteniéndose las proyecciones de los vértices del poliedro en el plano.

El siguiente paso consiste en trazar por dichas proyecciones de los vértices, rectas perpendiculares al plano y sobre ellas se trasladan las distancias correspondientes (h_1, h_2) obtenidas en la figura de la sección principal, para hallar los vértices del icosaedro.

Sólo resta definir las partes vistas y ocultas y de esta forma queda definido el poliedro.



Ejercicio 28



CUBIERTAS

EJERCICIOS RESUELTOS

ENUNCIADOS

EJERCICIO 1

Determinar los límites de los faldones del edificio cuya planta es la representada en la figura, sabiendo que todas las pendientes de los faldones son de 30º.

Posteriormente, dibujar el alzado del tejado.

EJERCICIO 2

Teniendo en cuenta que la planta del tejado de un edificio está formado por faldones planos, unos con pendiente de 1/2 y otros de 1. Se pide determinar las intersecciones de los faldones.

EJERCICIO 3

Dada la siguiente planta de una cubierta situada a cota 0 y sabiendo que las pendientes de los faldones son p_1=2/3 y p_2=1/2, solucionar la cubierta teniendo en cuenta que ABCD y EFGH son zonas a dos aguas.

EJERCICIO 4

Los aleros horizontales de un tejado están a diferentes cotas, cota 1, cota 2, cota 0.

Cerrar el tejado siendo las pendientes de los distintos faldones de p_1=1 y p_2=45%.

EJERCICIO 5

Se tiene un edificio cuyos muros exteriores acaban en los lados de una forma pentagonal cuyos vértices tienen las cotas siguientes: A(3) B(6) C(8.5) D(7.5) E(4), siendo la pendiente de los faldones de 50º.

Determinar el cierre del prisma.

EJERCICIO 6

Determinar la proyección de la cubierta de ABCD, así como su alzado teniendo en cuenta que se trata de aleros no horizontales, siendo la pendiente de 75º en los faldones que contienen al vértice D y de 60º en los faldones que contienen al vértice B.

Realizar el alzado a una escala 1:200.

EJERCICIO 7

Dada la planta de un tejado compuesta por una parte exterior y por un patio interior de tal manera que las dos partes están al mismo nivel y que la pendiente de faldones en ambos sea única de p=3/2.

Se pide:

a)Cerrar la cubierta, de forma que el patio quede al descubierto.

b)Determinar la verdadera magnitud de uno de los faldones del patio.

c)Sección producida por el plano α.

EJERCICIO 8

Hallar las intersecciones de los faldones del tejado de un edificio de planta irregular, con un patio interior de forma rectangular.

Las pendientes exteriores son de p_1=3/4 y las interiores de p_2=1/2.

EJERCICIO 9

Un tejado está formado por vertientes de dos faldones planos que se cortan a 1m de altura.

Se pide:

1º Resolver la cubierta teniendo en cuenta que el faldón inferior tiene pendiente p_1 =75% y el superior pendiente p_2 =30%.

2º Seccionar con un plano.

EJERCICIO 10

Dada la planta del tejado de la figura, situada a 12 metros. Se pide;

1º Representar las intersecciones de los faldones del tejado que la cubre, cumpliéndose:

a) el patio no quedará cubierto,

b) todos los planos tendrán la misma pendiente.

2º Indicar en %, la pendiente máxima a adoptar, para no sobrepasar los 16 metros de altura máxima permitida para el edificio.

EJERCICIO 11

Se tienen dos plantas de cubierta de un tejado que se encuentran a distintas cotas, estando una de ellas a una altura de 7 metros más alta que la otra. Dibujar el tejado que se encuentra formado por faldones de pendiente p=30º, teniendo en cuenta que deben formar una cubierta única.

Escala 1:1000.

EJERCICIO 12

Resolver sobre la planta dada el tejado correspondiente, considerando que está formado por 2 cubiertas, y formando tejados independientes entre si. Lógicamente una cubierta está a una cota superior a la otra.

La pendiente en las cubiertas es la misma.

EJERCICIO 13

Resolver la siguiente cubierta formada por un patio interior y dos patios exteriores dando a una medianería.

Las pendientes son iguales, tanto para el patio como para la fachada.

EJERCICIO 14

Cerrar la cubierta del edificio, que contiene un patio interior abierto a una pared medianera, y otra pared medianera haciendo esquina. Además se tendrá en cuenta que tienen distintas pendientes, siendo p_1=1 para los faldones del patio y p_2=3/4 para los faldones de las fachadas.

EJERCICIO 15

Construcción de la cubierta de un edificio en cuya planta se ven dos patios interiores.

Los faldones que arrancan de los patios tienen pendiente p_1=1.

Los faldones que arrancan del exterior tienen pendiente p_2=2/3.

Los aleros tanto del exterior como de los patios se suponen en cota cero.

EJERCICIO 16

Definir las cumbreras del tejado del edificio de la figura, sabiendo que las zonas ABCD y EFGH están a dos aguas, además de que el patio tiene una medianería en el alero 1.

Los aleros del patio están situados a cota -1, mientras que la parte exterior se encuentra a cota 0, y las pendientes de los faldones varían entre p_1=1, p_2=2/3 y p_3=1/2.

EJERCICIO 17

Se tiene la cubierta representada de aleros horizontales, a igual cota, con las vertientes a dos aguas; los faldones de la cubierta son de pendiente p_1=3/2. Si se seccionan estos faldones por otros de alero horizontal de cota 2 y pendiente p_2=1/4, representar la cubierta final.

EJERCICIO 18

Se dispone de una planta formada por tres circunferencias que se cortan entre sí, de centros O, O_1, O_2, de las que arrancan superficies de pendiente constante positiva, siendo estas, para la circunferencia de centro O_1 de p_1 = 4/5 y para las de centros O y O_2 de p_2=2/5. Los vértices respectivos de las superficies citadas serán V_1, V y V_2.

EJERCICIO 19

Conocida la planta de una edificación, formada por dos circunferencias secantes y dos rectas corno aparecen en la figura.

Cubrir dicha edificación con faldones de distinta pendiente, para uno de los faldones planos p_1=2, para el otro faldón plano p_2=4/3, y para los faldones cónicos p_2=4/3.

EJERCICIO 20

Determinar el cierre de la cubierta de la figura compuesta por aleros de arcos de circunferencia y recta, cuyas pendientes son p_1 =4/3, p_2= 3/4.

EJERCICIO 21

La planta de una cubierta consta de faldones planos y cónicos, (con directrices circular y elíptica). Además de un detalle de medianería a considerar.

Se pide, resolver la cubierta con las siguientes condiciones:

- Los faldones planos arrancan de cota 0.
- El faldón cónico circular arranca de cota 0.
- El faldón elíptico arranca de cota 1.

Todos tienen la misma pendiente, que será p=60º.

PROBILEMA 22

Resolver la siguiente cubierta, siendo de igual forma y dimensiones que la anterior, pero teniendo en cuenta las distintas cotas de aleros y pendientes de los faldones.

- El faldón circular arranca de cota 1 y tiene una pendiente p_2=45%.
- Los faldones planos arrancan de cota 0 y tienen una pendiente p_1=1/2.

El faldón elíptico arranca de cota 1 y tiene una pendiente p_3=60º.

EJERCICIO 23

Se trata de una cubierta con alero circular, y teniendo la novedad de disponer de un patio también con alero circular.

Las pendientes son de p=45º, y cota 0 para el patio y perímetro exterior.

EJERCICIO 24

Resolver la cubierta con patio, teniendo diferentes pendientes para aleros exteriores e interiores, siendo $p_1=2/5$ y $p_2=3/4$ respectivamente. Las cotas de aleros son también diferentes, cota 0 para exteriores, y cota (-2) para interiores.

EJERCICIO 25

Dibujar las intersecciones del tejado con patio y torre; la cota de los aleros exteriores es de 22 m., excepto el circular de la torre que es de 19 m. Todo el patio tiene aleros a 19 m., dibujar el alzado. Pendiente del tejado exterior $p_2=0{,}5$, del tejado interior $p_3=1$, pendiente de la torre $p_1=2$.

EJERCICIO 26

Trazar el alzado de la cubierta cuyos faldones exteriores son tres planos de pendiente $p_1=2$ que pasan por AB, CD y EF, y sus tres conos de enlace. Las tres pendientes interiores son de $p_2=45º$.

EJERCICIO 27

Determinar las intersecciones de los faldones de la cubierta representada por sus aleros, teniendo en cuenta que las pendientes son de $p_2=45º$ para los faldones exteriores y de $p_1=30º$ para los faldones interiores. En el faldón interior marcado como D existe un cambio de pendiente, de 30º a 45º, a partir de la línea marcada a trazos, que corresponde con su limahoya.

EJERCICIO 28

Se conoce el perímetro de aleros de una cubierta, con su patio interior circular.

Las cotas de los aleros exteriores son de valor 0 y la de los interiores son de valor 1. La pendiente es igual a p=75% en todos los casos.

Determinar la superficie de la cubierta en m^2.

EJERCICIO 29

Determinar la cubierta de un tejado cuya planta se representa en la figura.

Los vértices del perímetro exterior están a la cota que se indica, y el alero del patio se encuentra a cota 0.

Las vertientes tienen las pendientes $p_2=30\%$ y $p_1=45\%$.

Determinar un alzado de la cubierta.

EJERCICIO 30

Definir las cumbreras del edificio de la figura, con un patio, parte circular y parte elíptica, así como un perímetro exterior cuadrado. Las cotas de los aleros son iguales y las pendientes de 120% en exteriores y 100% en patio.

EJERCICIO 31

Construcción de la cubierta de perímetro exterior y patio interior circulares no concéntricos. La pendiente es de 30º en ambos casos.

EJERCICIO 32

Hallar las vertientes del tejado de un edificio con la planta representada.

Consta de dos patios, uno de faldones planos y el otro de faldones cónicos. Las cotas de aleros son iguales, y la pendiente del 150% en todos los casos.

Verdadera magnitud de un faldón a patio.

EJERCICIO 33

Resolver la cubierta de la figura, que se compone de un perímetro exterior cuadrado y una cúpula esférica.

La pendiente de los faldones que parten de AB y CD es de 3/4, y la de los que parten de AD y BC de 1/2; el centro de la cúpula está a cota 1 m.

EJERCICIO 34

Se dispone de una planta de perímetro poligonal no horizontal y una cúpula esférica.

La pendiente de los faldones que parten del perímetro es de p=45%, hallar la intersección de la cubierta con la cúpula.

Los vértices del perímetro exterior son de cotas diferentes, el centro de la cúpula se encuentra en la cota 2.

EJERCICIO 35

Determinar la solución de la cubierta que consta de una cúpula y aleros no horizontales y pendientes distintas, de valores p_1=3/4 y p_2=1/2 según se indican en el gráfico. La cota del centro de la cúpula es de 5 metros.

Determinar la verdadera magnitud del faldón en AD.

EJERCICIO 36

Obtener la proyección acotada de la cubierta de planta rectangular, con patios interiores circulares, V y W, siendo los faldones con pendiente de 75º para los patios y de 60º para los exteriores.

Las cotas son:

- Para el patio V, cota 2.
- Para el patio W, y para los exteriores, cota 0.

EJERCICIO 37

Una forma elíptica de cota 0, que tiene por ejes AB y CD, revoluciona sobre el eje CD, formando un elipsoide. Si se considera el semi-elipsoide como una cúpula de espesor despreciable y se practica una abertura semi-cilíndrica:

a) Determinar dicha abertura.

b) Dibujar el alzado del conjunto obtenido.

EJERCICIO 38

Determinar las intersecciones entre tres cúpulas semiesféricas con los centros situados a cota 0. Obtener un alzado del conjunto según la dirección indicada.

EJERCICIO 39

Los vértices del cuadrado ABCD son los puntos de apoyo de una bóveda laminar esférica de centro O(-2,72), limitada por los planos de las caras de la pirámide de vértice V(-4,55) y las aristas en dirección a los vértices del cuadrado ABCD.

Se pide, dibujar las líneas de nivel así como el alzado del resultado.

EJERCICIO 40

Se conocen los vértices de las torres cónicas de una iglesia, que son los puntos A(5,5), B(5) y C(4,5).

Las pendientes son: p_A=3/4, p_B=4/5, p_C=1. Determinar las intersecciones de las torres.

EJERCICIO 41

Hallar el alzado del ejercicio anterior.

EJERCICIO 42

Determinar del ejercicio 40, el faldón cónico de vértice A en verdadera magnitud, con sus intersecciones con los otros dos conos.

EJERCICIO 43

Dado un paraboloide de base elíptica cuyo vértice es el punto A y el eje la recta AG, siendo A(0) y G(5.25). Contiene al punto P(0) y es simétrico respecto al plano horizontal de proyección.

El paraboloide se limita por un plano α que pasa por el punto G(5.25).
Dibujar la intersección con el plano α y las curvas de nivel.

EJERCICIO 44

La planta de una torre de capilla, arranca de la forma estrellada de cota 0; el cuadrado interior teórico, tiene cota 5, estando el punto mas alto de la torre a 10m. Los faldones de la forma estrellada interseccionan con los de la forma cuadrada interior. Las pendientes que arrancan de la estrella son inicialmente de 60º para finalizar con pendiente de 30º, según se aprecia en la figura.

EJERCICIO 45

Resolver una torre que arranca con planta en cruz de cota 0 hasta la cota 5, de aquí la torre continúa con planta cuadrada, girada 90º con respecto a la cruz, y se eleva con pendiente de 30º hasta una cota tal que el lado del cuadrado se reduce en un 70%.

De aquí la torre continúa con pendiente de 75º.

EJERCICIO 46

La planta del tejado de un edificio está formada por un octógono y un cuadrado, que serán las bases de las pirámides que constituyen su cubierta, hallar las intersecciones de ambas al tener pendientes del 10% y del 100% respectivamente, situándose sus cotas al mismo nivel.

Representar en planta y alzado el tejado resuelto.

EJERCICIO 47

La planta de la torre de una iglesia, está formada por un hexágono convexo exterior y una poligonal estrellada hexagonal en su interior.

La parte hexagonal convexa se encuentra en cota 3 y la parte estrellada en cota 2.

La cota del pico de la torre para la parte convexa será de 7 metros, y para la parte estrellada de 10 metros.

Calcular las pendientes y elementos de intersección de las caras y aristas de las pirámides que forman la torre de la iglesia.

EJERCICIO 48

Resolución de la cubierta de planta cuadrada y pendiente p=30%, la cual intersecciona con la cubierta de planta octogonal concéntrica y de p=60%. Los arranques de ambas se encuentran al mismo nivel.

NOTA: La parte gráfica de los ejercicios propuestos se encuentra en las páginas siguientes, en las que también se da solución a los mismos.

EJERCICIO 1

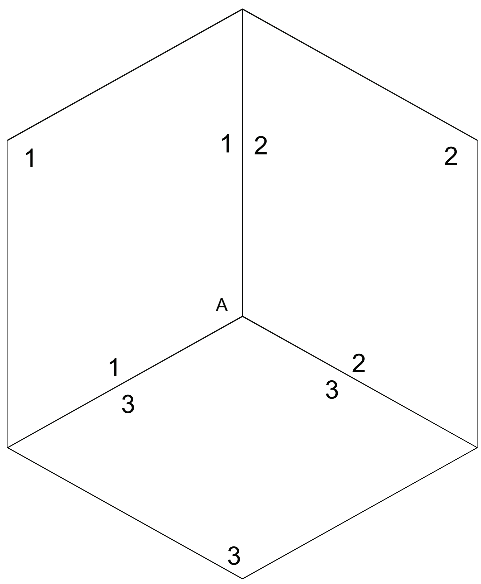
Determinar los límites de los faldones del edificio cuya planta es la representada en la figura, sabiendo que todas las pendientes de los faldones son de 30º.

Posteriormente dibujar el alzado del tejado.

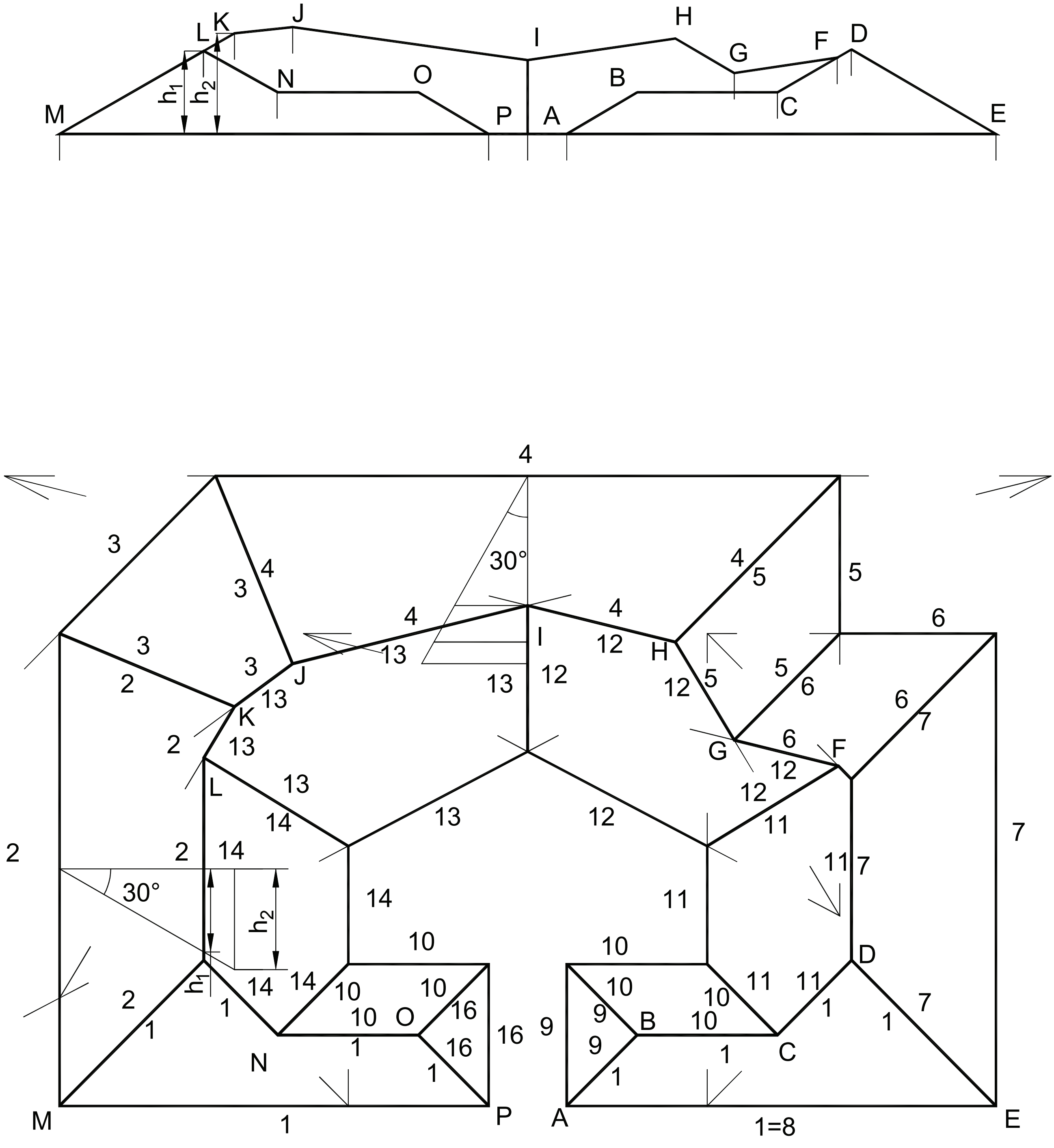
Al ser de igual pendiente los faldones, las intersecciones de los mismos puede obtenerse mediante las bisectrices de los ángulos que forman las horizontales de igual cota de sus planos, en el caso de la figura, las bisectrices se obtendrán en los ángulos que forman los aleros. (p.e. 1 y 2 ⇒ 1-2).

Del mismo modo al tener igual pendiente los aleros paralelos entre sí, tienen como intersección una paralela trazada a igual distancia de los mismos. (p.e. 2 y 14 ⇒ 2-14).

Una vez obtenidas estas intersecciones entre faldones, se soluciona el tejado como se explica en el siguiente método.



EJERCICIO 1



p=30°

EJERCICIO 2

Teniendo en cuenta que la planta del tejado de un edificio está formado por faldones planos, unos con pendiente de 1/2 y otros de 1. Se pide determinar las intersecciones de los faldones.

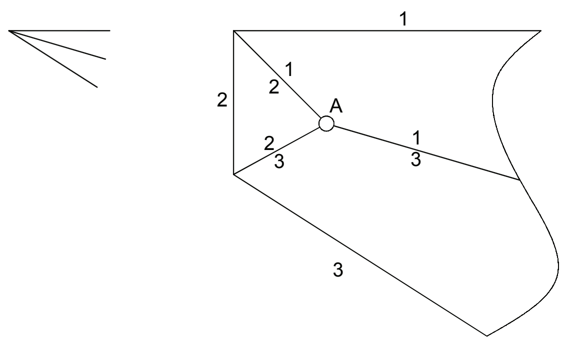
Para obtener la intersección entre faldones de distinta pendiente se representan las líneas de nivel de estos, previamente determinado el intervalo, siendo la intersección la recta que une los puntos de corte de las líneas de nivel de igual cota.

(p.e. 10 y 12 $\Rightarrow$ 10-12).

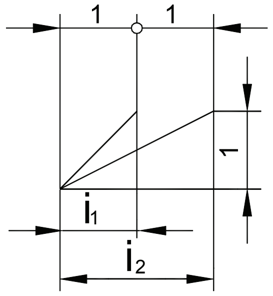
En caso de aleros paralelos, se traza un plano vertical π, y en su abatimiento se observa la intersección de éste con los faldones, obteniendo dos rectas r_0 y s_0; el corte entre estas rectas determina un pto M_0 por el cual se traza una paralela a los aleros, siendo esta la intersección.(p.e. 5 y 13 $\Rightarrow$ 5-13).

Para concluir el ejercicio se sigue el método anterior de las tres o más aristas concurrentes en un punto, teniendo en cuenta que estas solo se podrán cortar cuando sean coplanarias.

Del método anterior se saca como conclusión que si los faldones 1 y 2 de la figura adjunta se cortan según 12 y los faldones 2 y 3 lo hacen según 23, por el vértice A donde se cortan 12 y 23 debe pasar la intersección 13 de los faldones 1 y 3 que no habían intervenido en el "nudo" A mas que una sola vez, teniendo que hacerlo dos veces. Por lo que el método va indicando sucesivamente las intersecciones de faldones que se deberán ir resolviendo, muy importante para la resolución de tejados complicados.

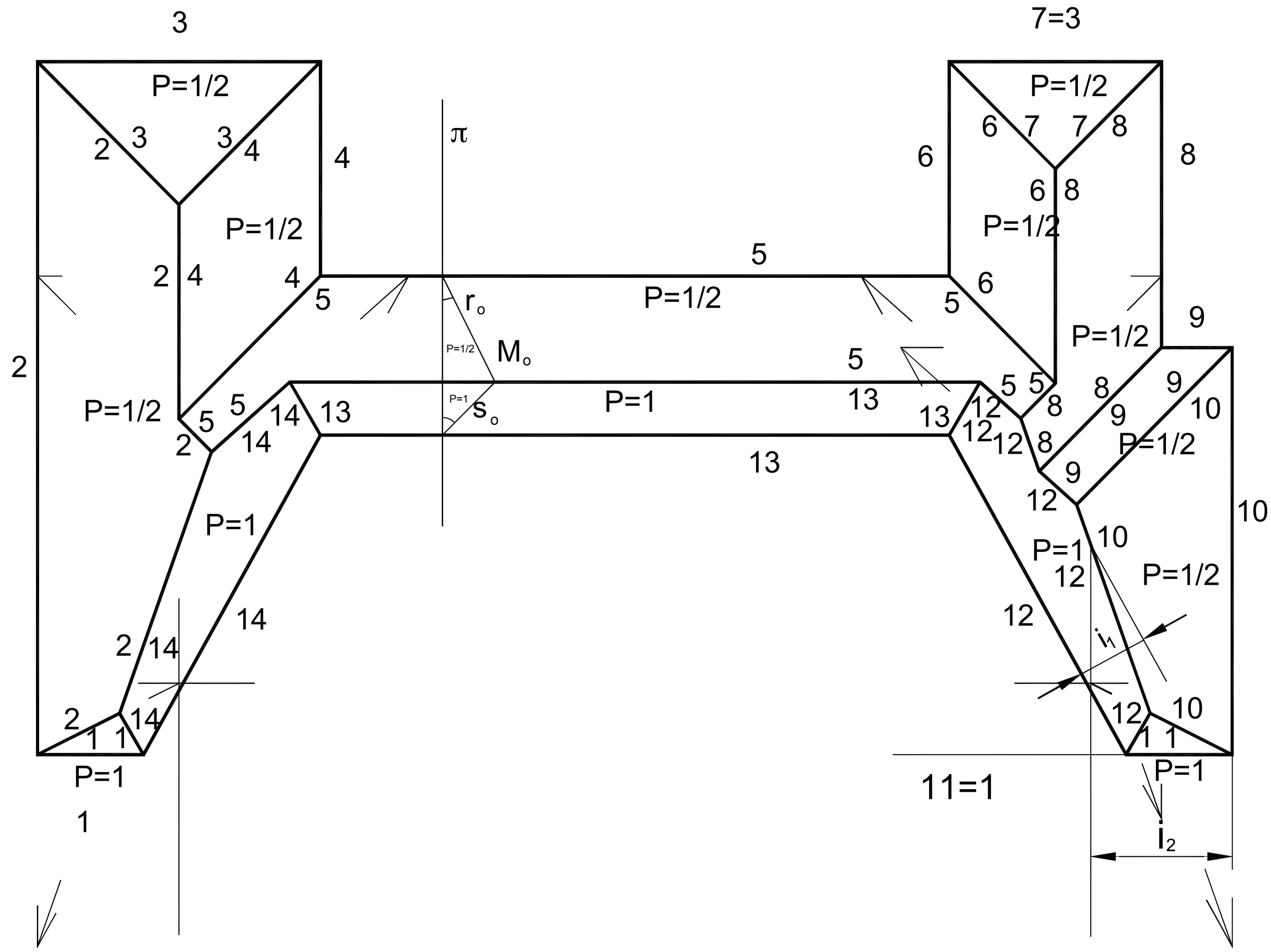


EJERCICIO 2



P=1

P=1/2



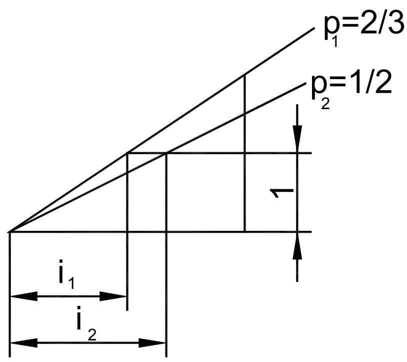
EJERCICIO 3

Dada la siguiente planta de una cubierta situada a cota 0 y sabiendo que las pendientes de los faldones son p_1=2/3 y p_2=1/2, solucionar la cubierta teniendo en cuenta que ABCD y EFGH son zonas a dos aguas.

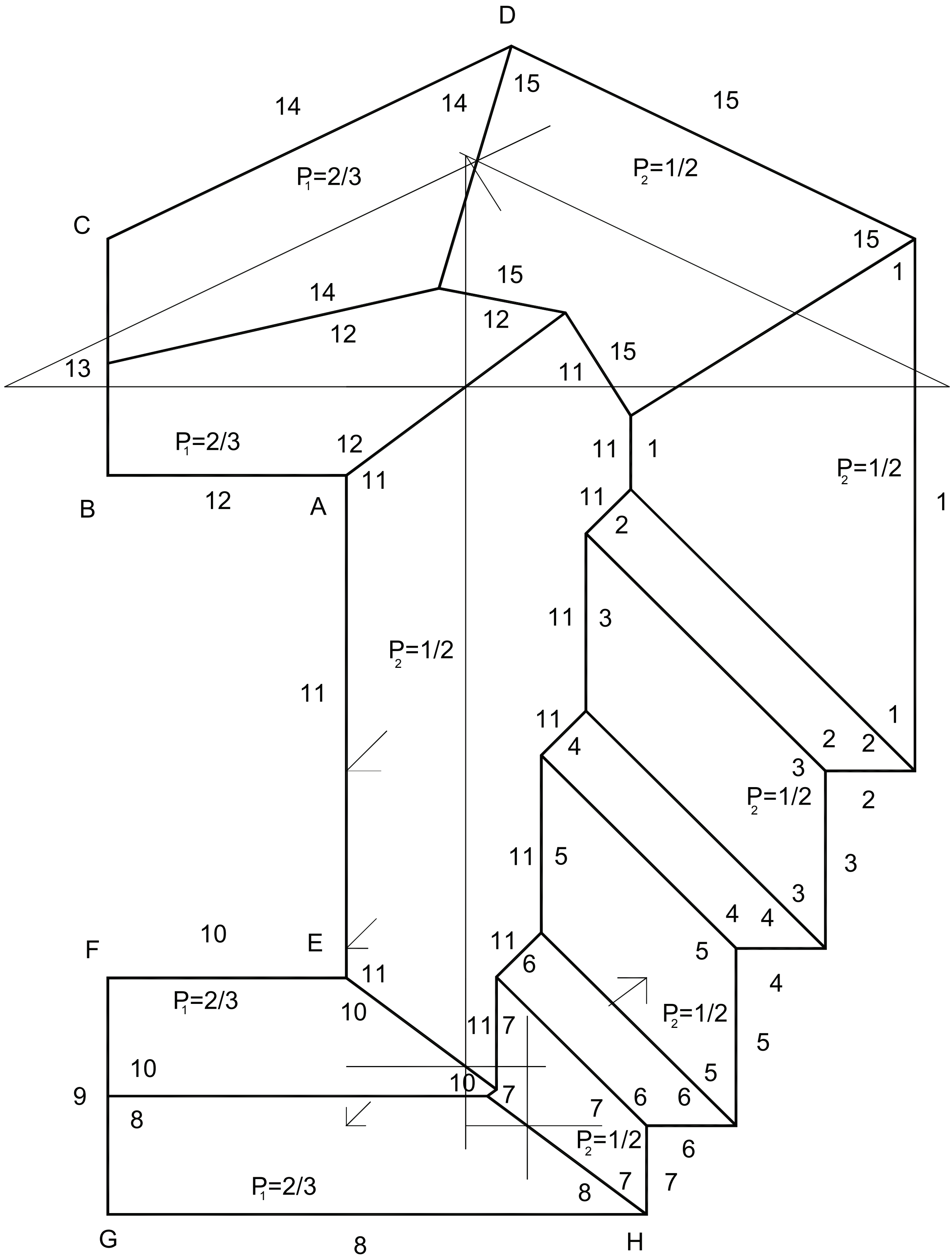
En este ejercicio se tendrán en cuenta las zonas a dos aguas, siendo las partes BC y FG paredes medianeras, solo pudiéndose verter por AB y CD, así como por EF y GH.

Para resolver estas zonas, p.e. EFGH, siendo el faldón FG vertical, se observa que su intersección con el faldón 10 es F9, así como con el faldón 8 es G9.

Se finaliza el ejercicio, obteniendo las intersecciones de faldones siguiendo el método explicado anteriormente.



EJERCICIO 3


D
14
14
15
15
P_1=2/3
P_2=1/2
C
15
1
14
15
12
12
13
15
11
P_1=2/3
12
11
1
P_2=1/2
B
12
A
11
11
1
2
11
3
P_2=1/2
11
11
1
4
2
2
3
P_2=1/2
2
11
5
3
4
4
3
F
10
E
11
5
4
11
6
P_1=2/3
10
P_2=1/2
11
7
5
10
10
7
6
6
5
9
8
7
P_2=1/2
6
P_1=2/3
8
7
7
G
8
H

EJERCICIO 4

Los aleros horizontales de un tejado están a diferentes cotas, cota 1, cota 2, cota 0.

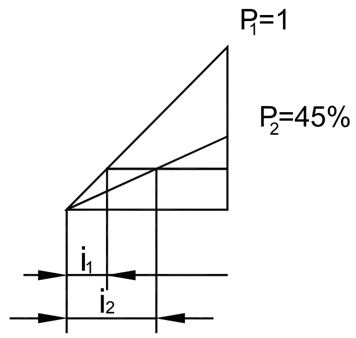
Cerrar el tejado siendo las pendientes de los distintos faldones de p_1=1 y p_2=45%.

Se obtienen los intervalos, i_1=1 e i_2=1/0.45, se trazan las líneas de nivel de los faldones.

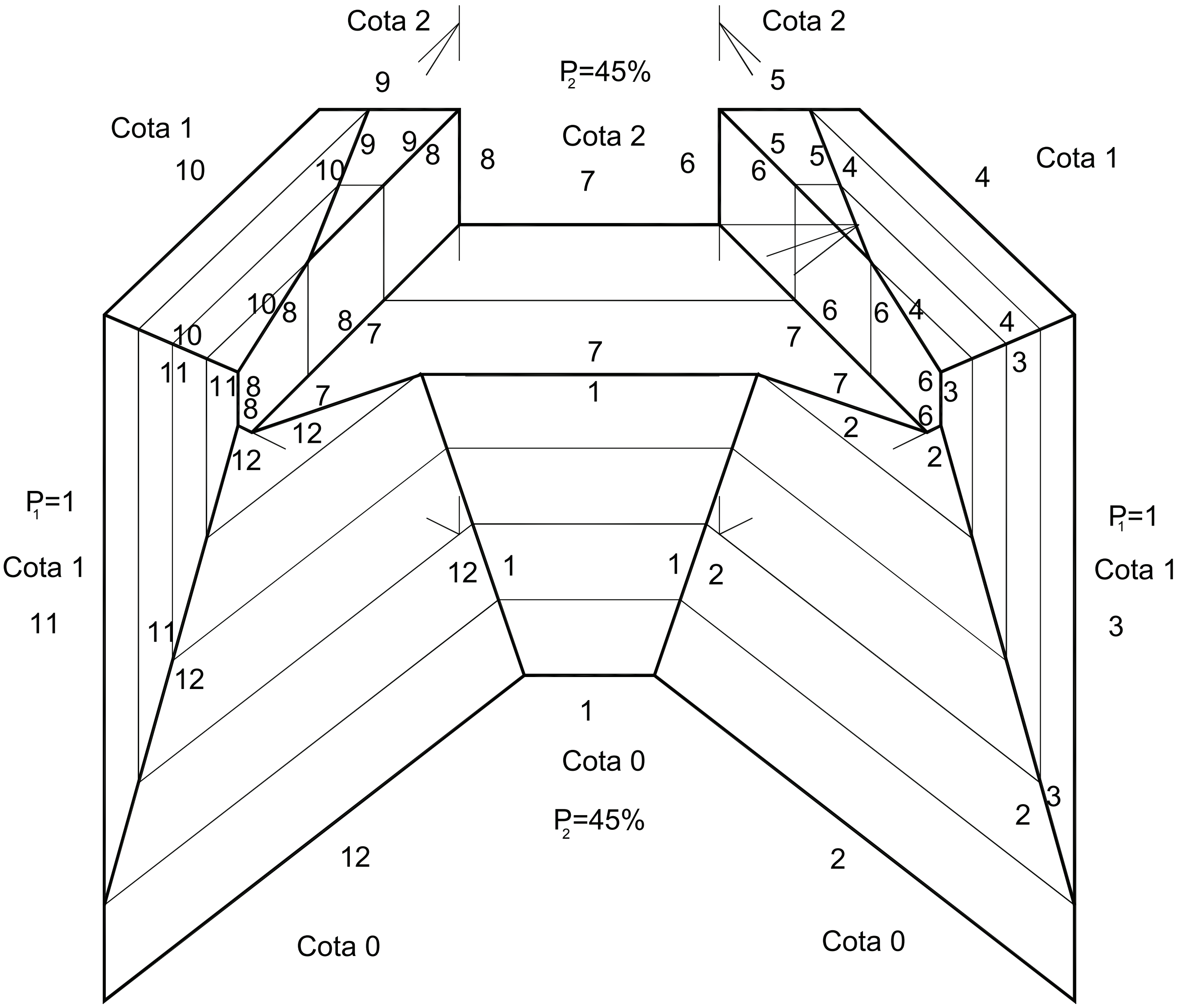
Observando el valor de las cotas de los aleros del tejado, se determina la cota de las líneas de nivel de cada uno de los faldones que intervienen.

Para obtener la intersección de los distintos planos del tejado se halla en cada uno las horizontales de igual cota, los puntos de intersección de estas rectas determinan las rectas de intersección, que se irán limitando unas a otras obteniendo los vértices del tejado.

En este ejercicio se ha tomado como unidad de dibujo 0.5 cm en lugar de 1 cm.



EJERCICIO 4



Cota 2
Cota 2
9
P_2=45%
5
Cota 1
10
Cota 2
7
6
8
4
Cota 1
P_1=1
Cota 1
11
P_1=1
Cota 1
3
1
Cota 0
P_2=45%
12
2
Cota 0
Cota 0

EJERCICIO 5

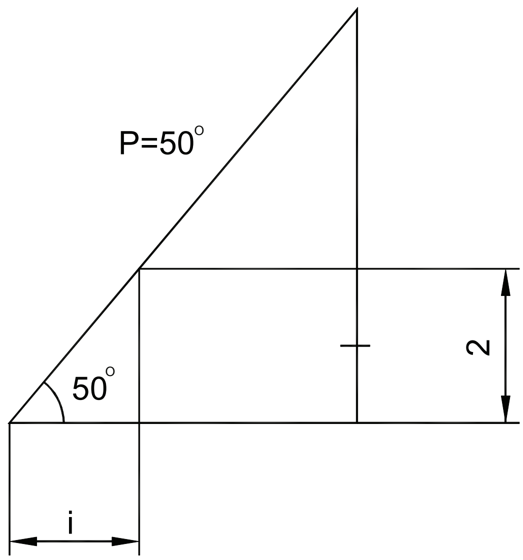
Se tiene un edificio cuyos muros exteriores acaban en los lados de una forma pentagonal cuyos vértices tienen las cotas siguientes: A(3), B(6), C(8.5), D(7.5), E(4), siendo la pendiente de los faldones de 50º.

Determinar el cierre del prisma.

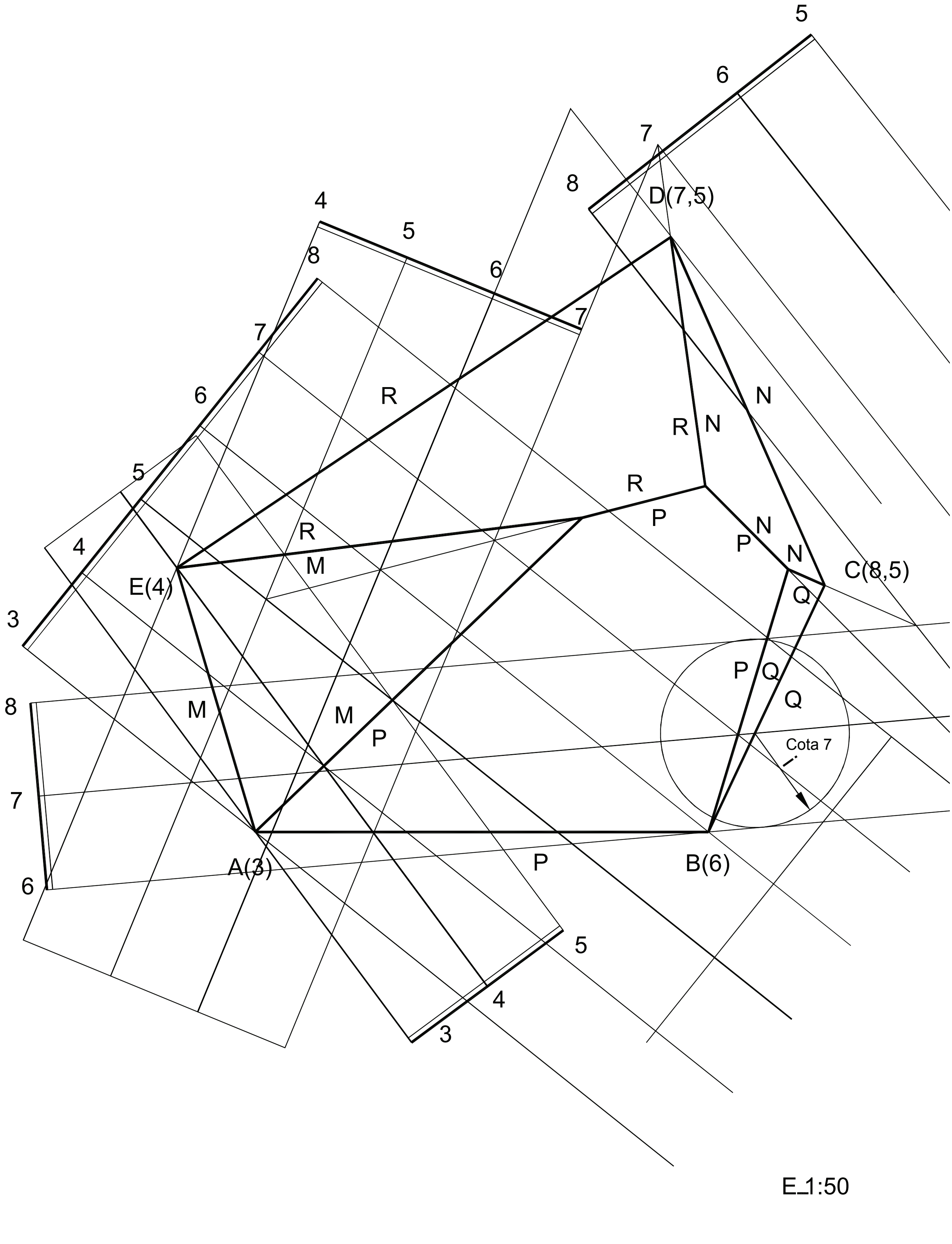
En este caso, al ser aleros no horizontales, para hallar las intersecciones de las diferentes vertientes se sigue este procedimiento: en figura aparte , a escala, se halla el radio de la base del cono de vértice cota 1 e inclinación 50º (la de las vertientes), con centro en los vértices de la planta o en puntos de cota conocida se trazan circunferencias con el radio con el radio obtenido y desde los puntos de igual cota que las circunferencias, tangentes a ellas que serán horizontales (líneas de nivel) de los faldones; donde se cortan las tangentes de igual cota están los puntos de la intersección de las vertientes correspondientes, que se irán limitando entre sí, definiendo los límites de los faldones.

Se puede observar el ejemplo siguiente; por el alero del faldón Q, que arranca según el alero BC de cotas 8.5 y 6 respectivamente, se obtiene el punto de cota (7), al ser dividido el alero en 5 partes iguales [(6),(6.5),(7),(7.5),(8),(8.5)], con centro en este punto se traza una circunferencia de radio el intervalo 0.84 cm , (a escala 1:50 el intervalo es 1.68 cm), y desde la cota 6 del alero se traza una tangente a la circunferencia, obteniéndose así una horizontal del faldón de cota (6), pudiendo después definir su plano.

Una vez obtenidas las líneas de nivel de los faldones, las intersecciones de estos los irá limitando, concurriendo estas rectas de unión en puntos (vértices del tejado) del que partirá otra recta relacionada. (p.e. RM $\cap$MP $\Rightarrow$RP).



EJERCICIO 5



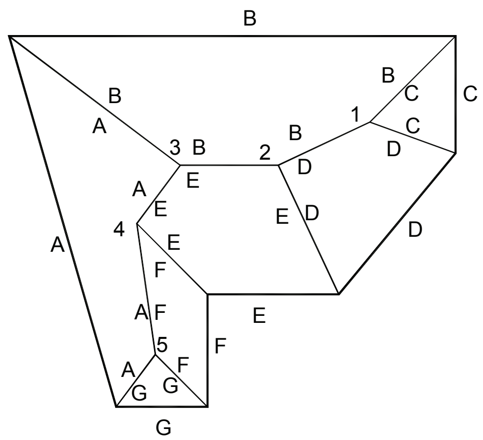
EJERCICIO 6

Determinar la proyección de la cubierta de ABCD, así como su alzado teniendo en cuenta que se trata de aleros no horizontales, siendo la pendiente de 75º en los faldones que contienen al vértice D y del 60º en los faldones que contienen al vértice B.

Realizar el alzado a una escala 1:200.

Para la resolución de este tejado se aplican los fundamentos y trazados que se han utilizado en el anterior ya que no existen particularidades que diferencien ambos casos, solo que los faldones tienen ahora distintas pendientes.

Para dibujar el alzado bastará con llevar la cota de los vértices A, B, C, y D, y obtener la altura de los vértices de la cumbrera RN, todo ello a escala 1:200.

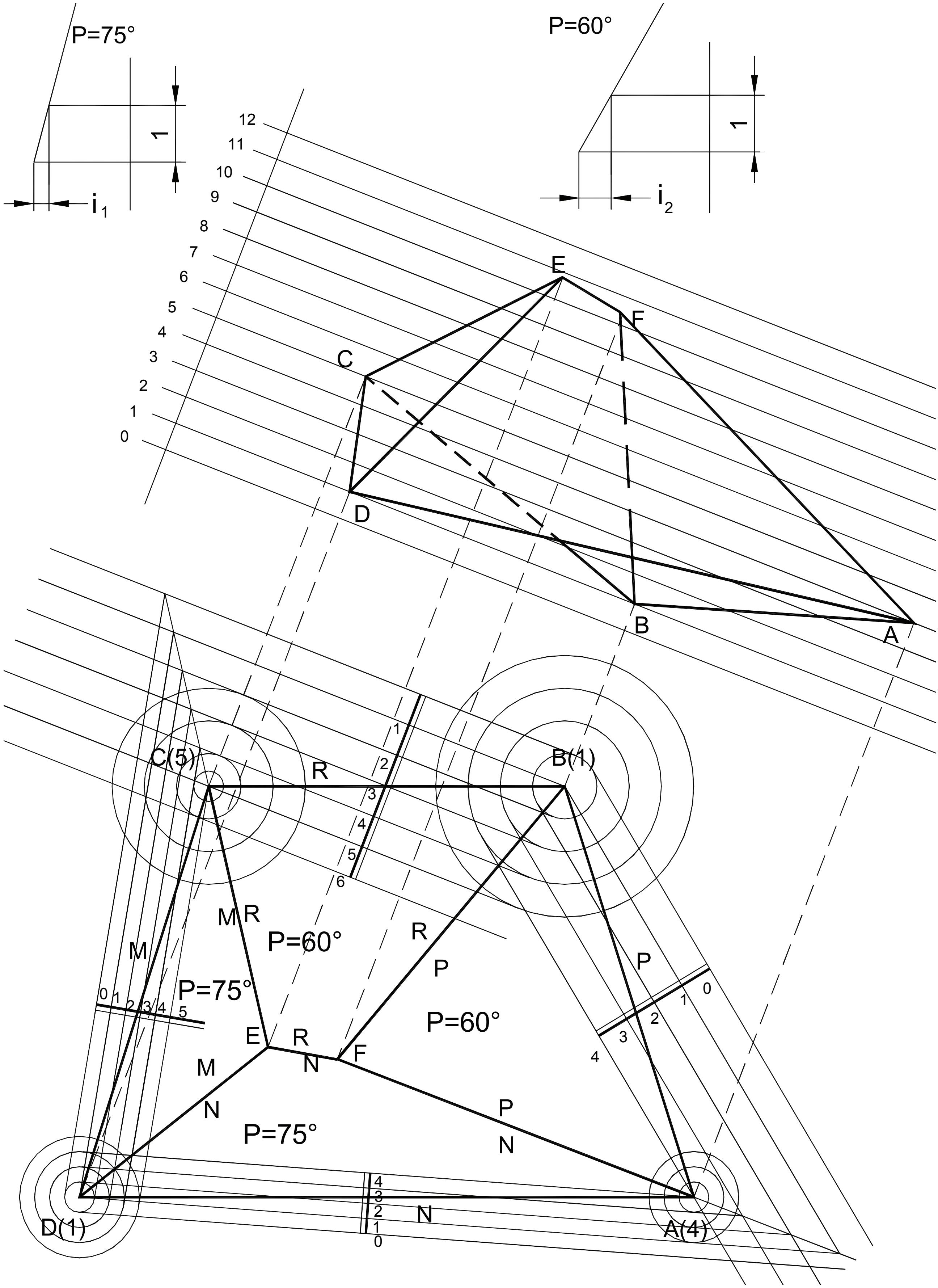


Es muy importante disponer de un método que permita determinar los vértices del tejado, es decir los puntos de intersección de tres planos de los que limitan dicho tejado, según lo explicado en ejercicios anteriores, en la figura adjunta intervienen los planos (A, B, C, D, E, F, G) se cortan entre sí según las rectas (AB, AG, AF, FB, FE, FG, ED, EB, CD, CB, BD); al vértice 1 concurren las rectas CD, CB, BD; al 2 ED, BD, EB; al 3 AB, BE, AE; al 4 AE, EF, AF; al 5 AG, GF, AF.

Analizando uno de los vértices, por ejemplo el 1, se aprecia como es precisamente el punto de intersección de los planos B, C, D; la recta CB se corta con la CD porque ambas pertenecen al plano C; se cortan en el punto 1 que también pertenece a los D y B y por lo tanto, a la intersección DB de ambos.

$$e_r = \frac{e_g}{n} = \frac{1}{n} = \frac{1000}{200} = 5 \qquad 1\text{m} = 5\text{mm}$$

EJERCICIO 6


P=75°
1
i_1
P=60°
1
i_2
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
E
F
C
D
B
A
C(5)
B(1)
R
M
R
P=60°
R
P
M
P=75°
P
P=60°
E
R
F
N
M
N
P=75°
P
N
D(1)
A(4)
N

EJERCICIO 7

Dada la planta de un tejado compuesta por una parte exterior y por un patio interior de tal manera que las dos partes están al mismo nivel y que la pendiente de faldones en ambos casos sea única de p=3/2.

Se pide:

a)Cerrar la cubierta, de forma que el patio quede al descubierto.

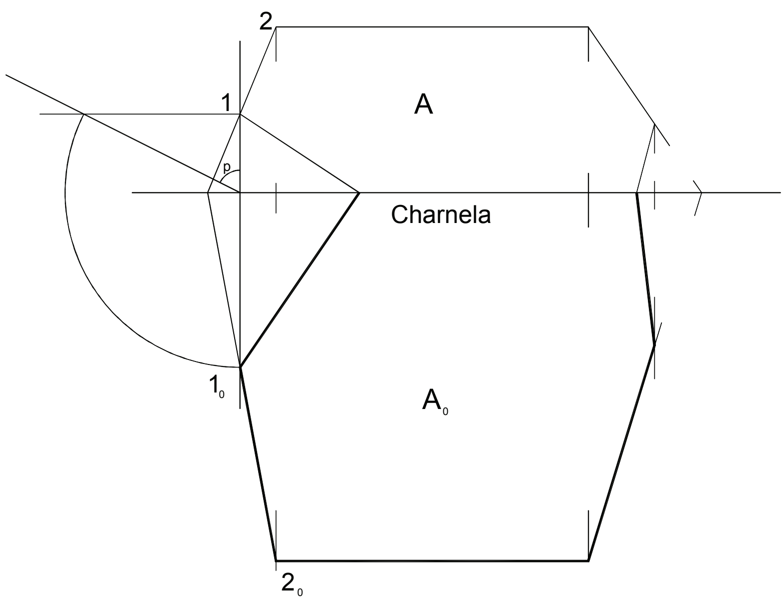
b)Determinar la verdadera magnitud de uno de los faldones del patio.

c)Sección producida por el plano α.

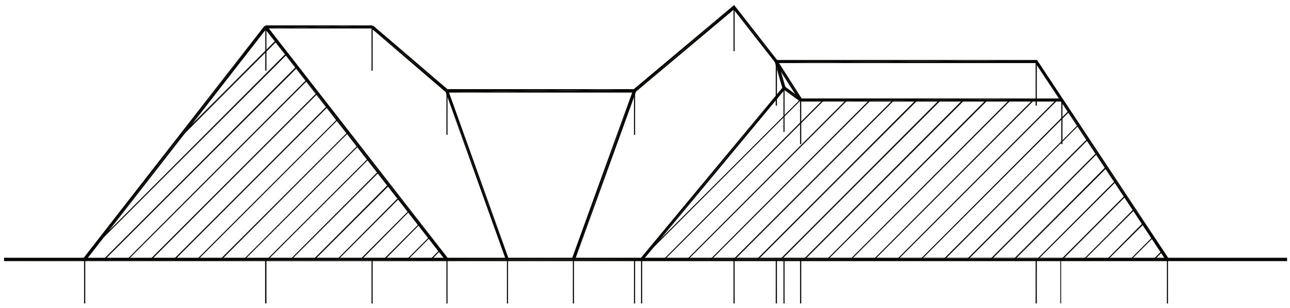
Una vez obtenidas las intersecciones de los faldones exteriores e interiores de igual pendiente como se ha hecho en ejercicios similares anteriores, se procede a obtener la sección producida por el plano secante y la verdadera magnitud del faldón A.

Para obtener la sección marcada, se llevarán al alzado los puntos de intersección de las aristas del tejado con el plano seccionador, para así definir los límites de la sección. Se completa el alzado con los límites de los faldones que se visualizan al otro lado de la sección con respecto al observador.

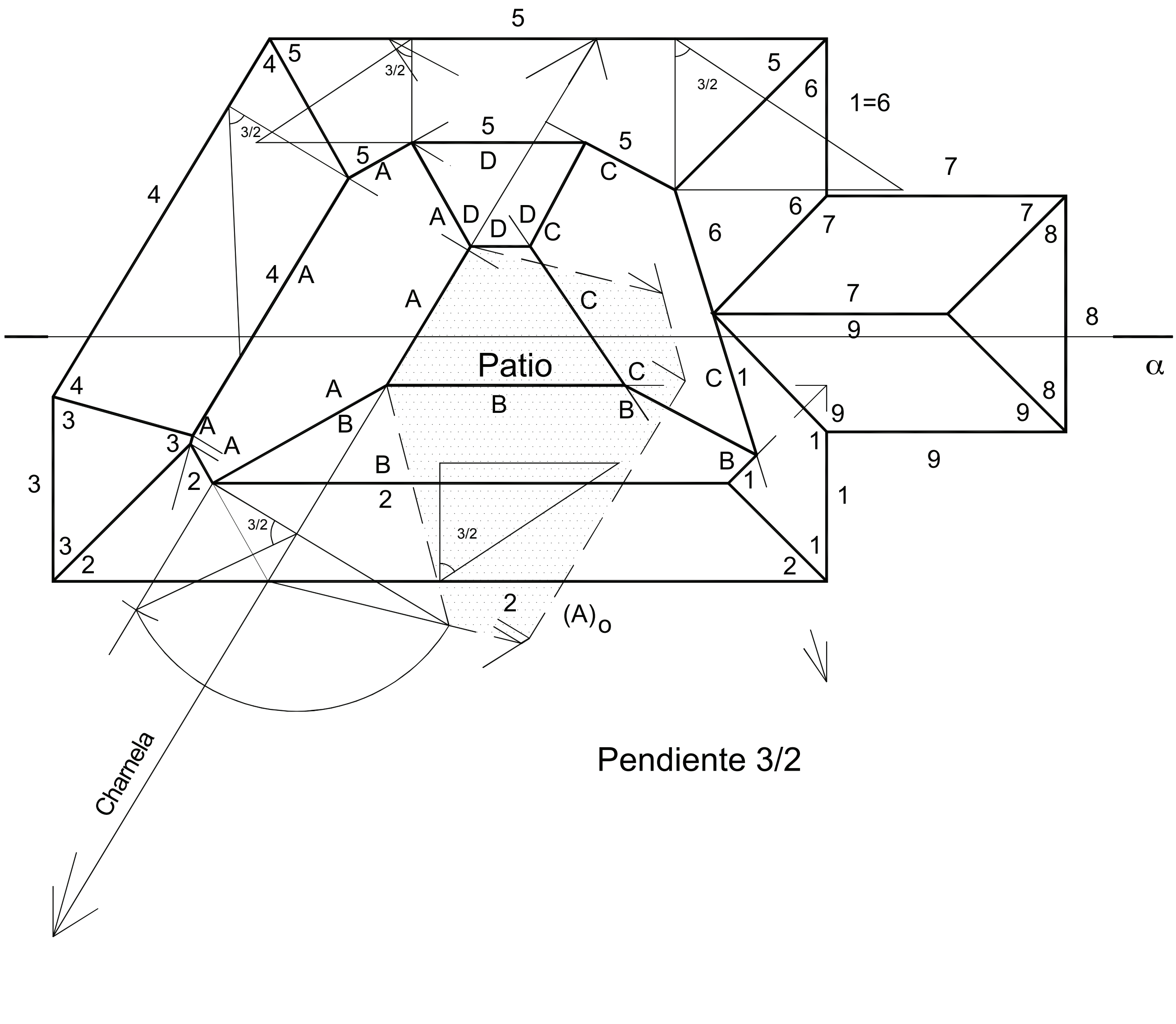
Si se desea determinar la verdadera magnitud de uno de los faldones, se abate utilizando como charnela, su traza con el cuadro. Desde un vértice del faldón se trazan perpendicular y paralela a la charnela; donde la perpendicular corte a ésta se traza un ángulo igual a la pendiente del tejado cuyo lado corta a la paralela (altura), se determina así el radio del giro que se traza hasta cortar a la perpendicular obtenida anteriormente, en dicho punto se encuentra el abatimiento del vértice correspondiente; los demás puntos se obtienen por afinidad debido a que se dispone de una pareja de puntos afines.



EJERCICIO 7



Sección



Pendiente 3/2

EJERCICIO 8

Hallar las intersecciones de los faldones del tejado de un edificio de planta irregular, con un patio interior de forma rectangular.

Las pendientes exteriores son de p_1=3/4 y las interiores de p_2=1/2.

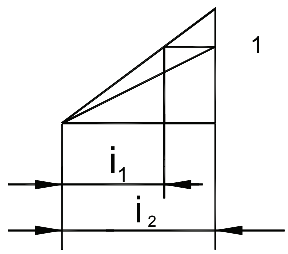
Para dos faldones, exterior e interior, paralelos que tienen distinta pendiente se puede obtener su intersección trazando:

1º Un plano vertical.

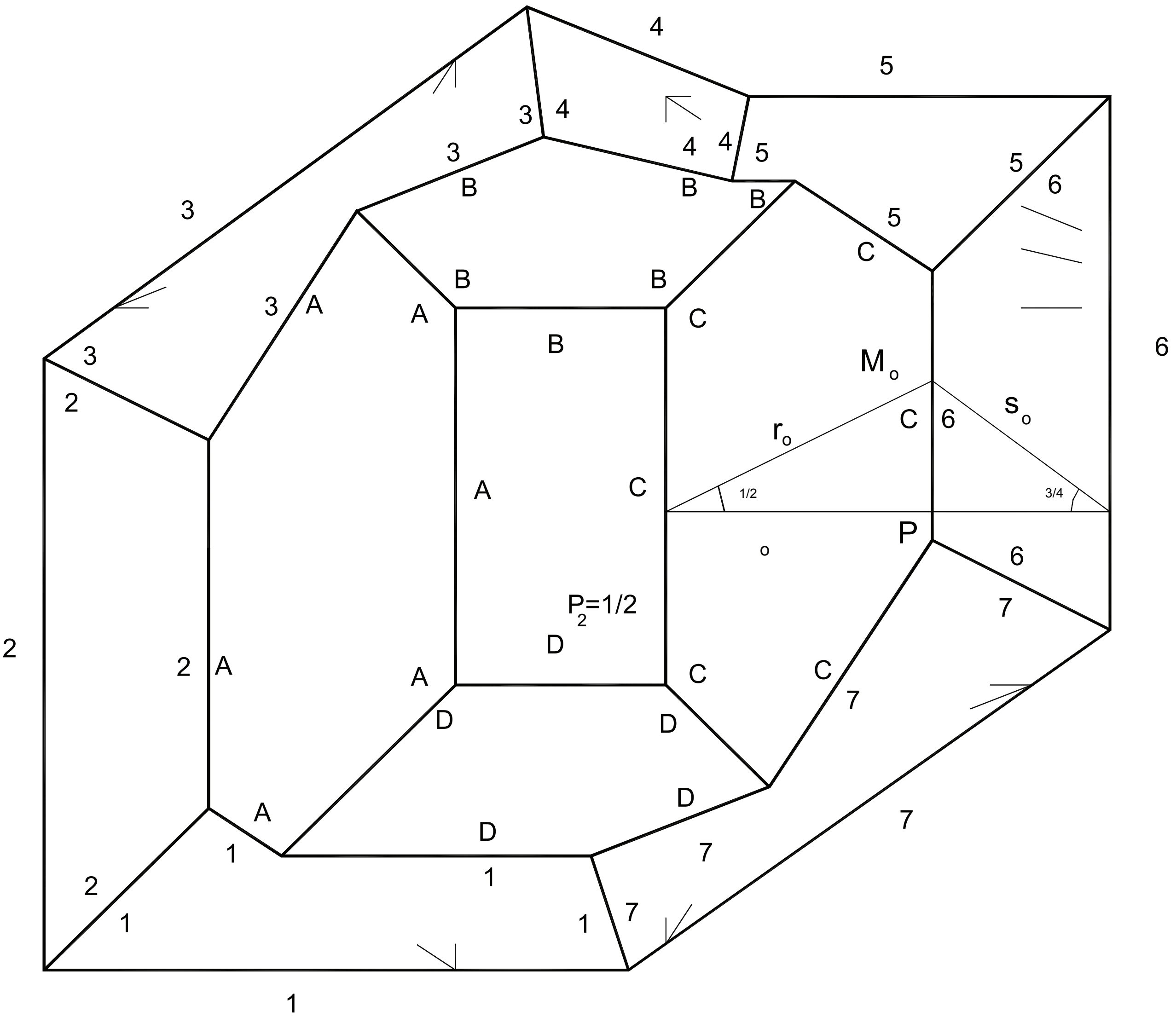
2º Abatiendo este plano y observando la intersección de éste con los faldones C y 6, obteniendo de esta manera las rectas r_0 y s_0 respectivamente.

3º La intersección de r_0 y s_0 determina un punto M_0 por el cual se traza una paralela a los aleros.

En el caso de ser contiguos, la recta que une los puntos de corte de las horizontales de los planos de igual cota será la intersección, finalizando el ejercicio como en los casos anteriores de concurrencia de tres planos en un vértice; p.e. los faldones C ∩ 7 ∩ 6 ⇒ P.



EJERCICIO 8



P_1=3/4

EJERCICIO 9

Un tejado está formado por vertientes de dos faldones planos que se cortan a 1m de altura.

Se pide:

1º Resolver la cubierta teniendo en cuenta que el faldón inferior tiene pendiente p_1=75% y el superior pendiente p_2=30%.

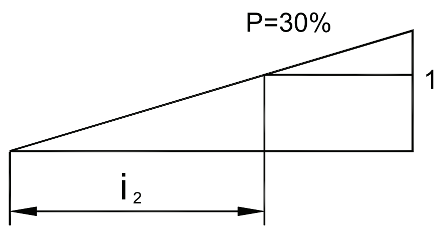
2º Seccionar con un plano.

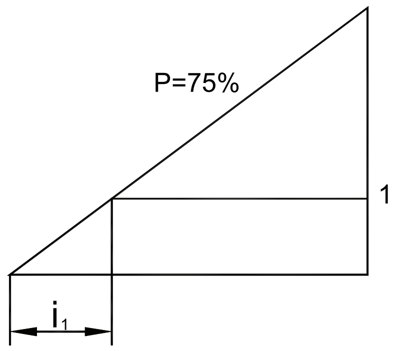
Se obtendrá la cubierta como si se tratara de faldón único sin quebranto.

Se trazará la primera línea de nivel (cota 1) con el intervalo (i_1 =1/0.75) correspondiente a la pendiente de 75%, y a partir de esa línea empezará el faldón de pendiente 30%.

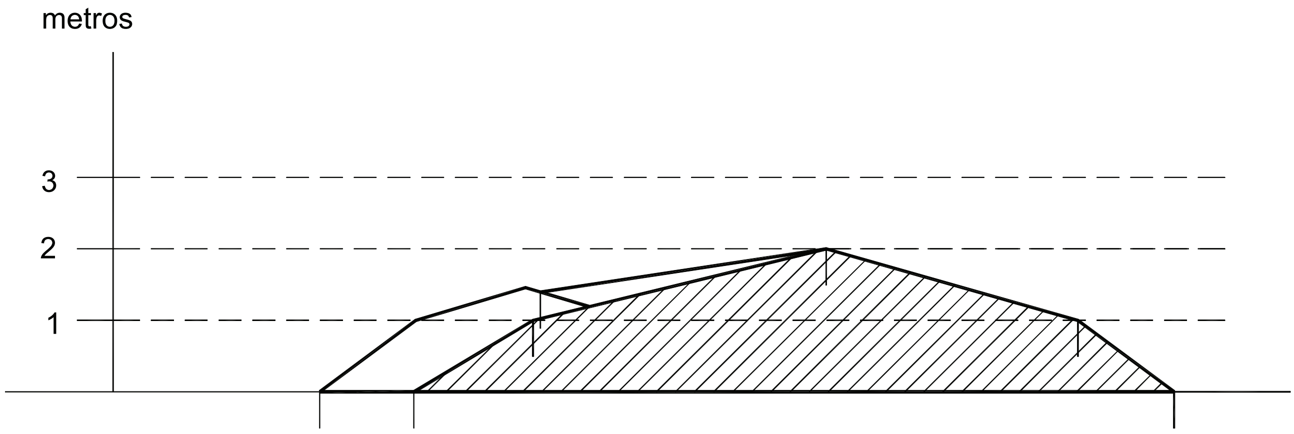
Para comprobar el ejercicio se secciona el tejado mediante un plano π y se observa como cambia la pendiente del faldón en el alzado.

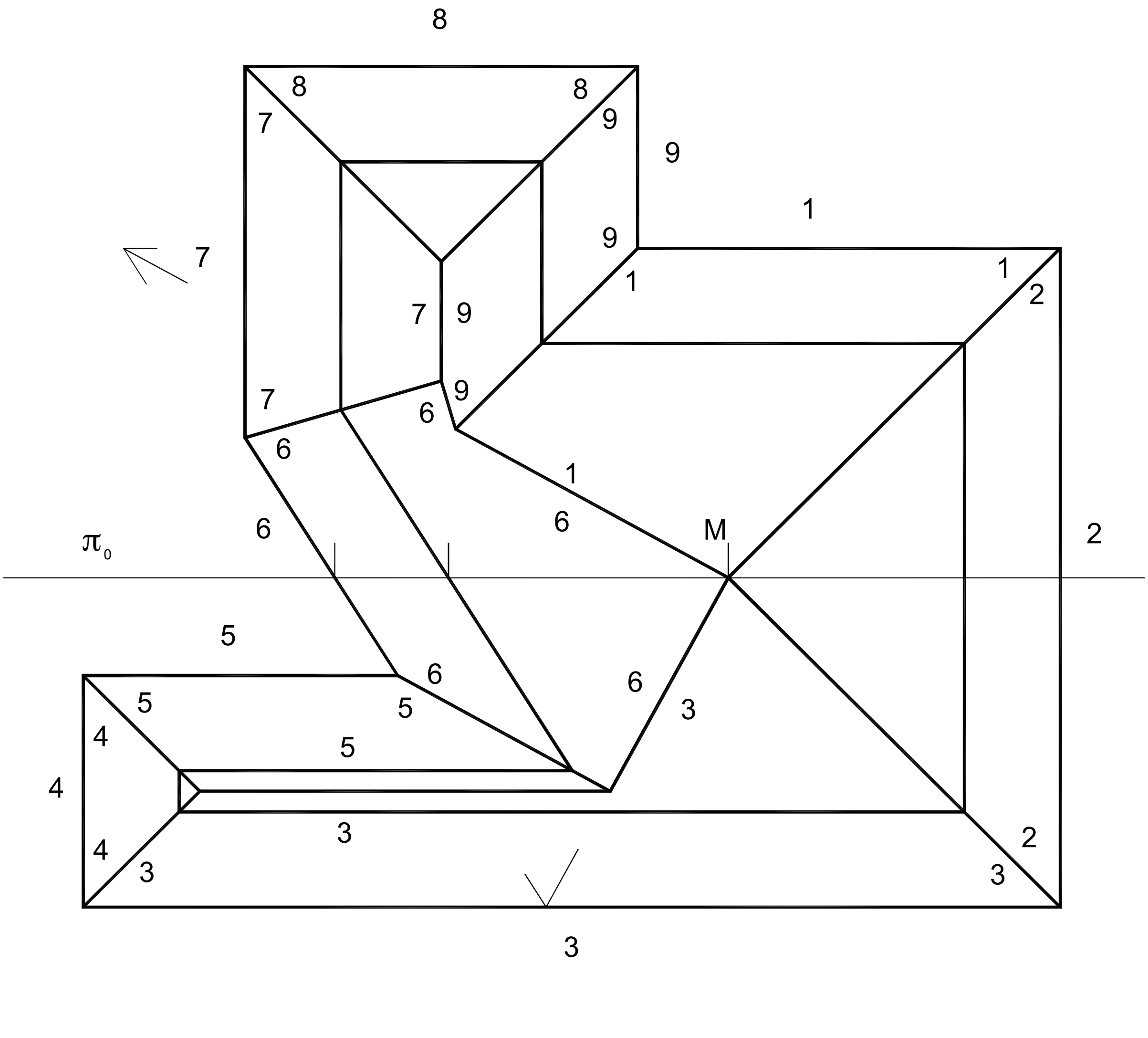
En ejercicios anteriores se dijo que tres o más planos concurren con sus intersecciones en un vértice, en este caso las intersecciones de los faldones 1, 2, 3 y 6 concurren en el punto M.





EJERCICIO 9





EJERCICIO 10

Dada la planta del tejado de la figura, situada a 12 metros. Se pide:

1º Representar las intersecciones de los faldones del tejado que la cubre, cumpliéndose:

a) el patio no quedará cubierto,

b) todos los planos tendrán la misma pendiente.

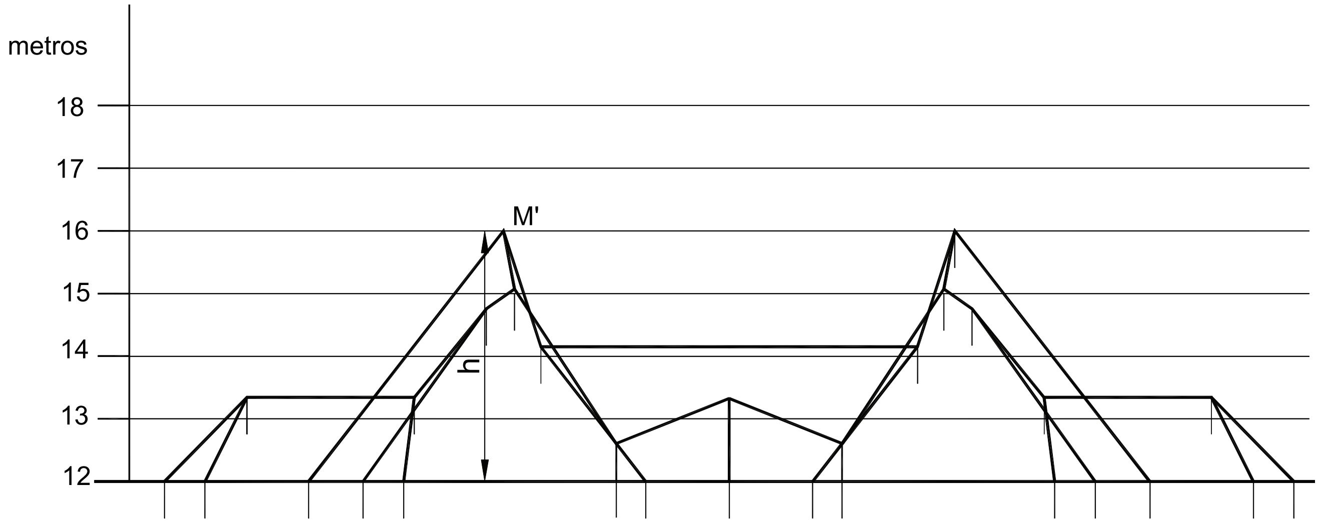
2º Indicar en %, la pendiente máxima a adoptar, para no sobrepasar los 16 metros de altura máxima permitida para el edificio.

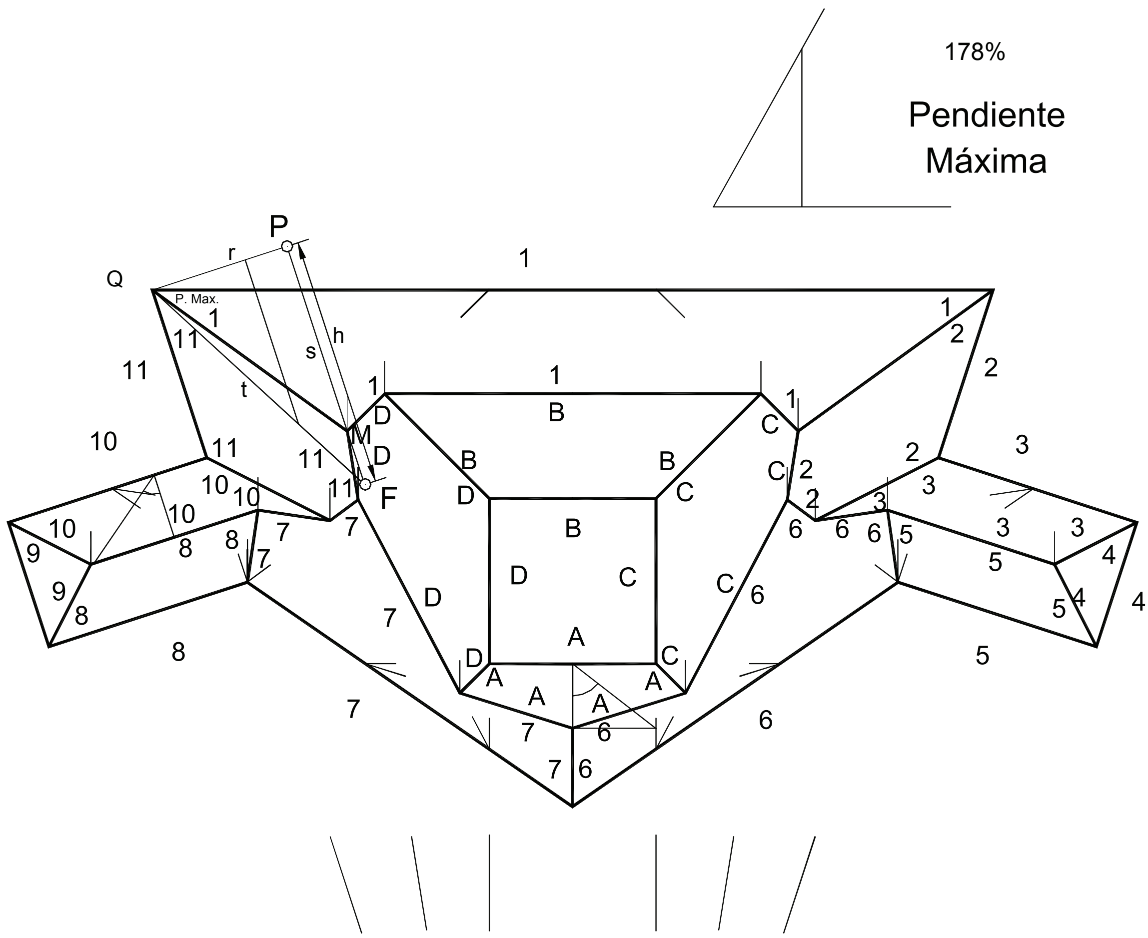
Una vez resuelto el tejado como en casos anteriores, de faldones a fachada y patio de igual pendiente, se determina el punto más alto del tejado, siendo éste, el punto más alejado al alero de un faldón. En este caso el pto M es el más alejado del alero 11 y también del alero D del patio.

Una vez localizado el pto más alto y siendo la altura 4m = 16 - 12 , para obtener la pendiente máxima, se trazará :

- Por el pto Q una recta perpendicular -r- al alero 11.
- Por el pto M una recta paralela -s- al alero 11.
- $r \cap s = P$.
- A partir de P se lleva h=4m sobre la recta -s- $\Rightarrow$ pto F.
- La unión de los puntos Q y F determina la recta -t-.
- La pendiente máxima es la del ángulo formado por -r- y -t-.

EJERCICIO 10





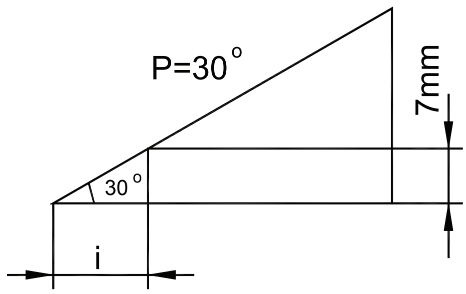
EJERCICIO 11

Se tienen dos plantas de cubierta de un tejado que se encuentran a distintas cotas, estando una de ellas a una altura de 7 metros más alta que la otra. Dibujar el tejado que se encuentra formado por faldones de pendiente p=30º, teniendo en cuenta que deben formar una cubierta única.

Escala 1:1000.

Al tener que cerrar las cubiertas formando una sola, se dibuja la línea de nivel de cota 7 (línea de trazos) para formar una sola planta, formada por la planta a cota 7 y la planta representada por la línea de trazos, y a igual cota.

Una vez hecho esto, se resuelve el ejercicio tratándose de intersecciones de faldones de igual pendiente y a la misma cota, para después alargar las intersecciones de la planta ficticia hasta su cota inicial.

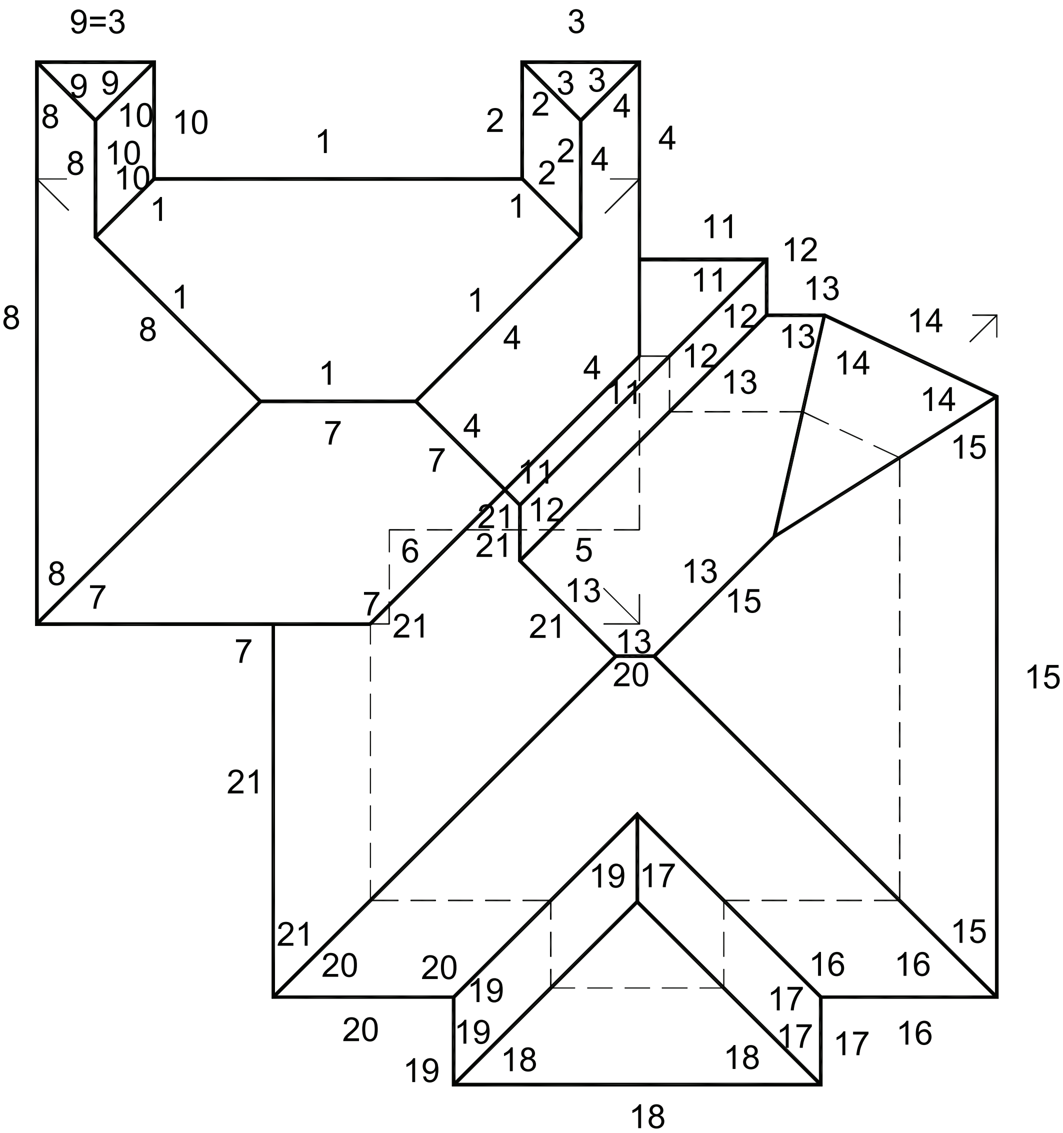


EJERCICIO 11

ESCALA 1:1000

$$e_g = \frac{1000}{1000} = 1$$

1m=1mm



EJERCICIO 12

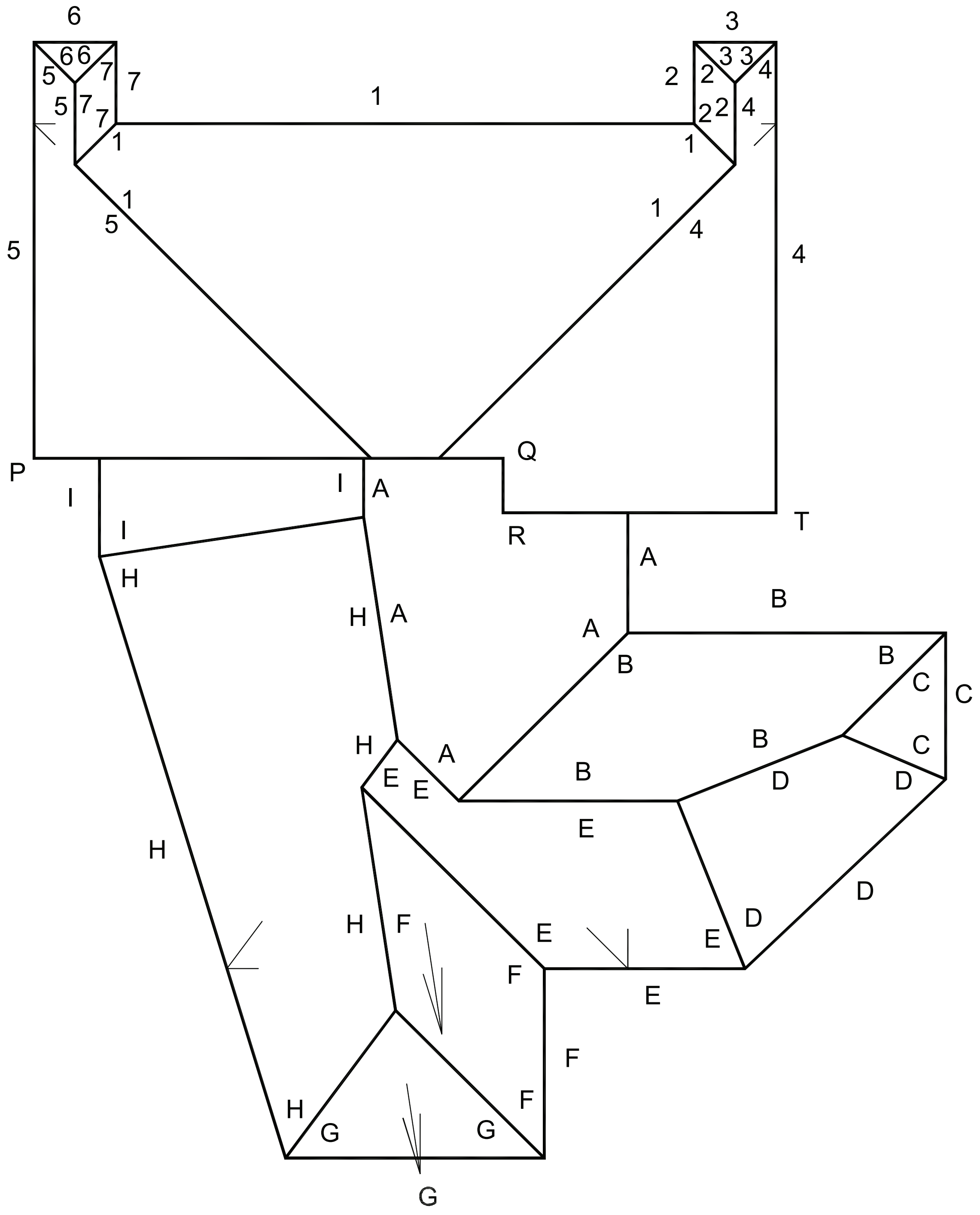
Resolver sobre la planta dada el tejado correspondiente, considerando que está formado por 2 cubiertas, y formando tejados independientes entre si. Lógicamente una cubierta está a una cota superior a la otra.

La pendiente en las cubiertas es la misma.

Al tratarse de formar cubiertas independientes entre sí estas se resolverán por separado, es decir entre las dos cubiertas se interpone una pared medianera PQRT, resultando dos cubiertas independientes; una formada por los faldones 1, 2, 3, 4, 5 ,6, 7 y la pared medianera, la otra cubierta estará formada por los faldones A, B, C, D, E, F, G, H, I y la medianería.

Como se sabe, los faldones no pueden verter agua a la pared medianera, se conseguirá prolongando las intersecciones I-A, así corno 5-1 y 4-1 hasta la medianería, siendo las intersecciones de los faldones restantes las indicadas en el dibujo y obtenidas como en los casos anteriores.

EJERCICIO 12



EJERCICIO 13

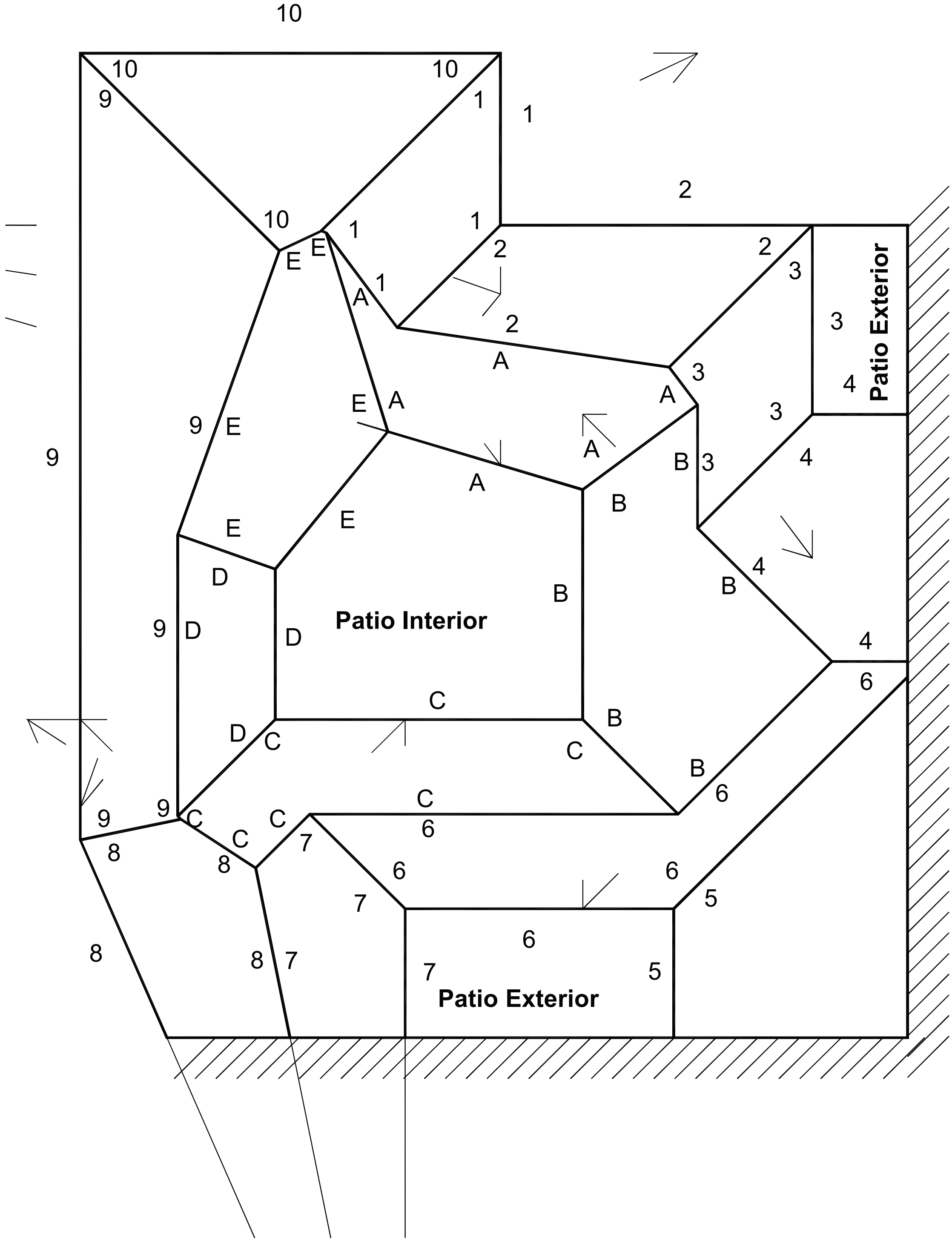
Resolver la siguiente cubierta formada por un patio interior y dos patios exteriores dando a una medianería.

Las pendientes son iguales tanto para el patio como para la fachada.

Al tratarse de faldones con una medianería, la intersección de los mismos con la pared medianera se conseguirá prolongando las limas 8-7 y 6-5 y el caballete 4-6 hasta la medianería correspondiente. Las intersecciones restantes se observan en la figura.

Se tendrá en cuenta que de las medianeras no saldrán nunca intersecciones con otros faldones, porque al ser faldones verticales nunca se verá la intersección en la planta.

EJERCICIO 13

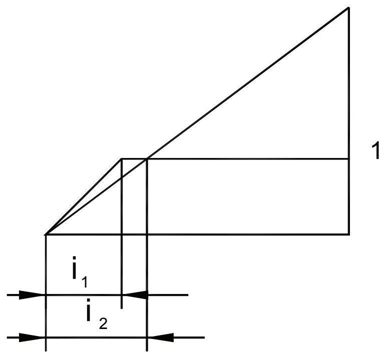


EJERCICIO 14

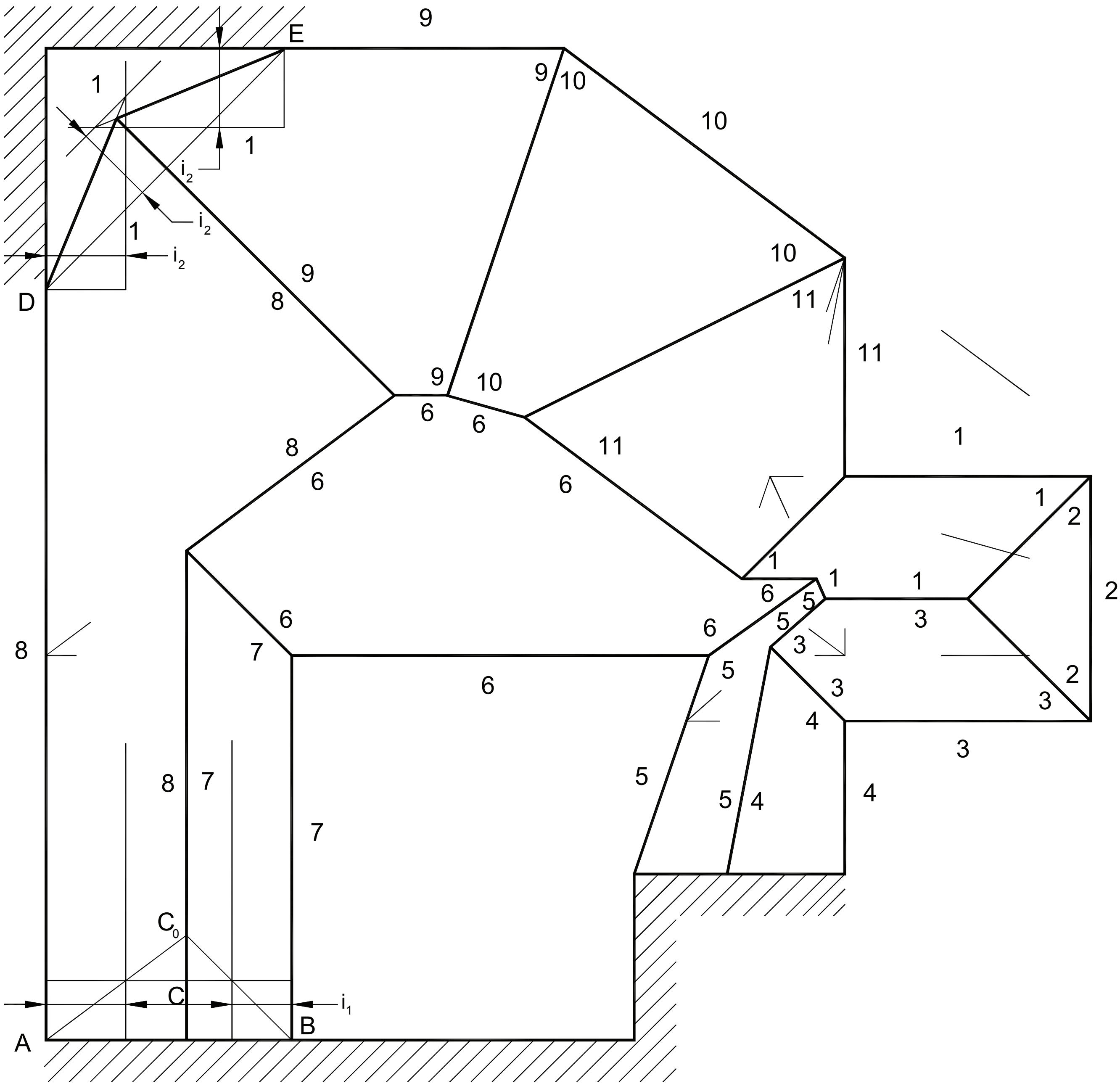
Cerrar la cubierta del edificio, que contiene un patio interior abierto a una pared medianera, y otra pared medianera haciendo esquina. Además se tendrá en cuenta que tienen distintas pendientes, siendo p_1=1 para los faldones del patio y p_2=3/4 para los faldones de las fachadas.

Los intervalos de los faldones pueden hallarse numéricamente, como inversos de las pendientes, o gráficamente, cortando por el plano vertical de traza AB y abatiendo la intersección de éste con los faldones 8 y 7, se obtienen AC_0, y BC_0, rectas de pendiente 3/4 y 1, respectivamente. La paralela a AB, trazada a la unidad de cota de distancia, corta a AC_0 y BC_0 en puntos que determinan los intervalos buscados. Los puntos de corte de las horizontales de igual cota, determinan las intersecciones de los faldones, siendo la intersección de los faldones 8 y 7 una recta paralela a estos trazada por el punto C_0.

Para la esquina medianera, se unen los extremos donde acaba la esquina quedando esa parte de perímetro como un faldón falso DE donde no se pueden verter aguas. Se trazan las líneas de nivel de los faldones contiguos y las del faldón falso en sentido contrario. Las intersecciones de las líneas de nivel de igual cota darán la solución a la medianera de esquina.



EJERCICIO 14



EJERCICIO 15

Construcción de la cubierta de un edificio en cuya planta se ven dos patios interiores.

Los faldones que arrancan de los patios tienen pendiente p_1=1.

Los faldones que arrancan del exterior tienen pendiente p_2=2/3.

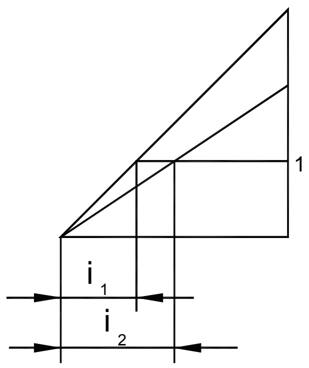
Los aleros tanto del exterior como de los patios se suponen en cota cero.

La intersección de los faldones de igual pendiente se obtendrán mediante la bisectriz del ángulo que forman las horizontales de igual cota de sus planos, en el caso de la figura, las bisectrices se obtendrán con los ángulos que forman los aleros.

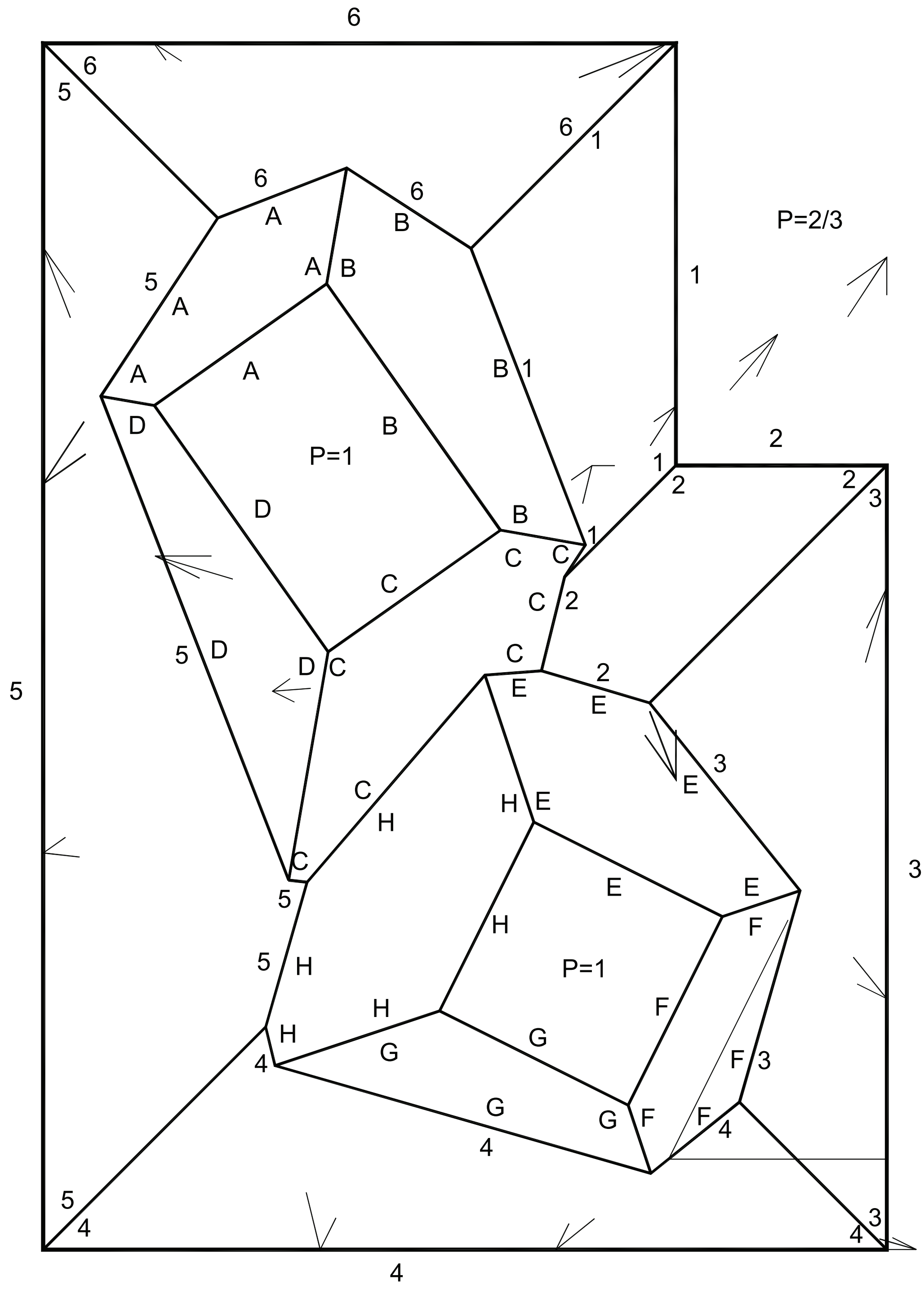
Para comenzar a resolver se toman tres faldones cercanos, obteniendo las intersecciones entre ellos, determinando así los puntos vértices del tejado.

Analizando el vértice M, se ve como es el punto de intersección de los faldones 3, 4, F; siendo la recta F-3 intersección de los faldones 3 y F, la 4-3 de los faldones 4 y 3 y la F-4 de 4 y F.

Al estar formada la cubierta por dos patios interiores se aconseja tener cuidado al dar prioridad a los cortes de las intersecciones de los faldones, por ejemplo la intersección C-1.



EJERCICIO 15

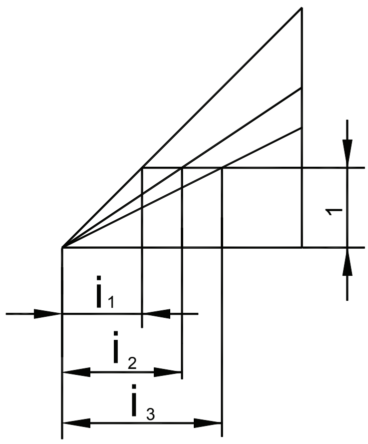


EJERCICIO 16

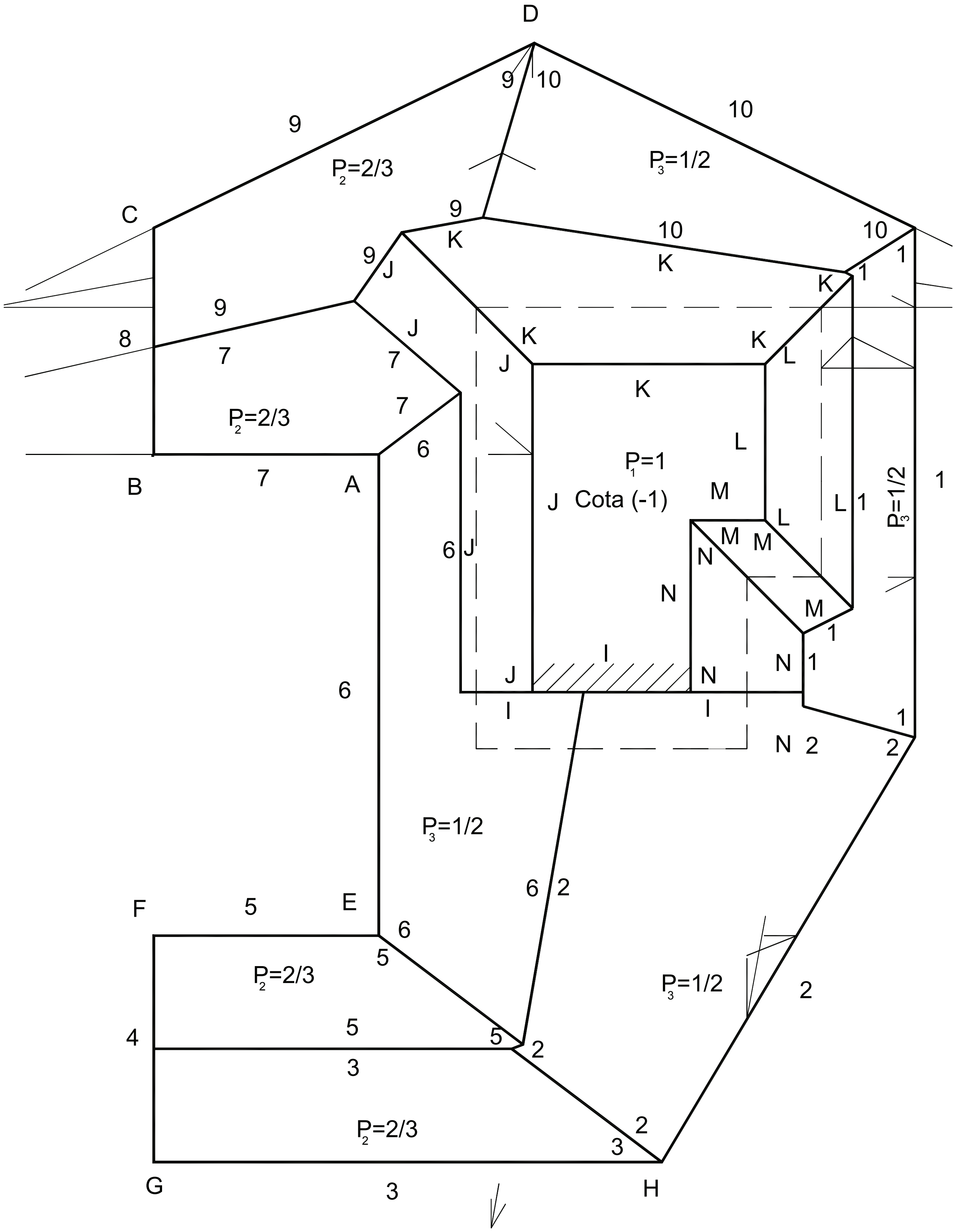
Definir las cumbreras del edificio de la figura, sabiendo que las zonas ABCD y EFGH están a dos aguas, además de que el patio tiene una medianería en el alero I.

Los aleros del patio están situados a cota -1, mientras que la parte exterior se encuentra a cota 0, y las pendientes de los faldones varían entre $p_1=1$, $p_2=2/3$ y $p_3=1/2$.

Una de las características de este tejado estriba en la medianería que existe en una de las paredes del patio, siendo lo restante explicado en ejercicios anteriores. Para solucionar la medianería del patio, se ve que la intersección 6-2 se prolonga hasta la pared medianera, así como que la intersección J-1 corta a la 6-J, formando así un faldón de intersecciones 6-2, 6-5, 6-7, 6-J, J-I, que vierte sus aguas al alero 6; por otra parte el faldón J-I, 6-J, J-7, 9-J, J-K, vierte sus aguas al alero J. El mismo resultado se obtiene en la otra parte del patio vertiéndose aguas a los aleros N y 1.



EJERCICIO 16



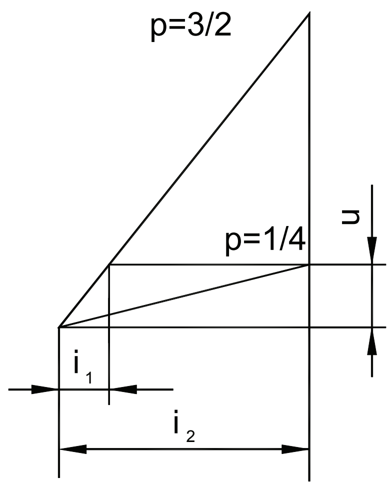
EJERCICIO 17

Se tiene la cubierta representada de aleros horizontales, a igual cota, con las vertientes a dos aguas; los faldones de la cubierta son de pendiente p_1=3/2. Si se seccionan estos faldones por otros de alero horizontal de cota 2 y pendiente p_2=1/4, representar la cubierta final.

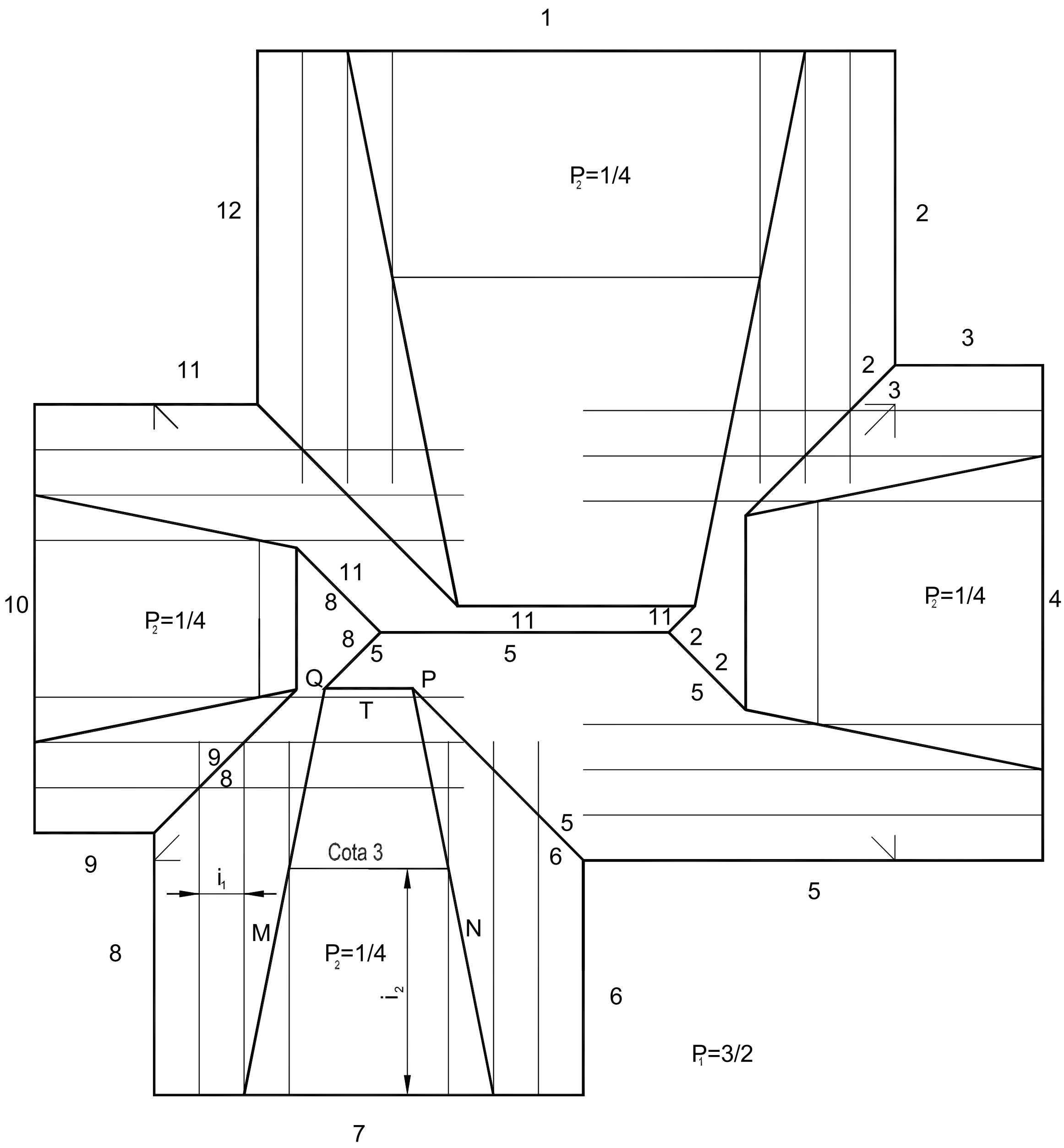
Una vez que se conocen los intervalos, i_1=1,5 e i_2=4, se trazan las horizontales de cota entera de los faldones, considerando paredes medianeras los aleros 1, 4, 7, 10.

Se resuelve la cubierta de faldones con pendiente 3/2, luego se traza el faldón de quebranto, es decir un plano que corta a los faldones anteriores, de pendiente 1/4 desde la cota 2, de este modo, la intersección del faldón de quebranto con el faldón de alero 6 determina la recta de intersección N, para luego N y 5-6 cortarse en P. Del mismo modo se obtiene la recta de intersección M del faldón 8 con el de p=1/4; esta se corta con la intersección 5-8 en el punto Q, y si se unen P y Q se determinará la horizontal T con él. Así en todos los casos.

En este ejercicio se ha tomado 8 mm como unidad de dibujo.



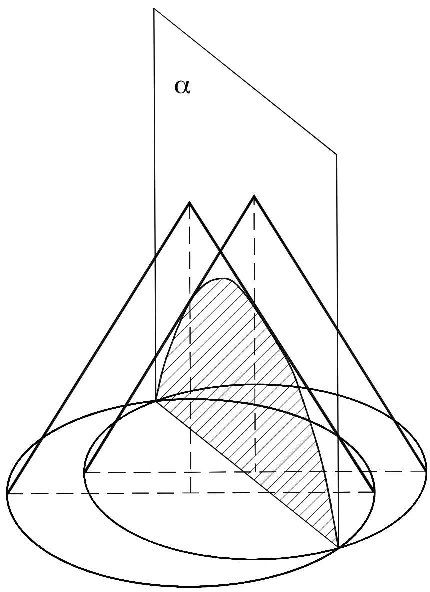
EJERCICIO 17



EJERCICIO 18

Se dispone de una planta formada por tres circunferencias que se cortan entre sí, de centros O, O_1, O_2, de las que arrancan superficies de pendiente constante positiva, siendo estas, para la circunferencia de centro O_1 de $p_1 = 4/5$ y para las de centros O y O_2 de $p_2 = 2/5$. Los vértices respectivos de las superficies citadas serán V_1, V y V_2.

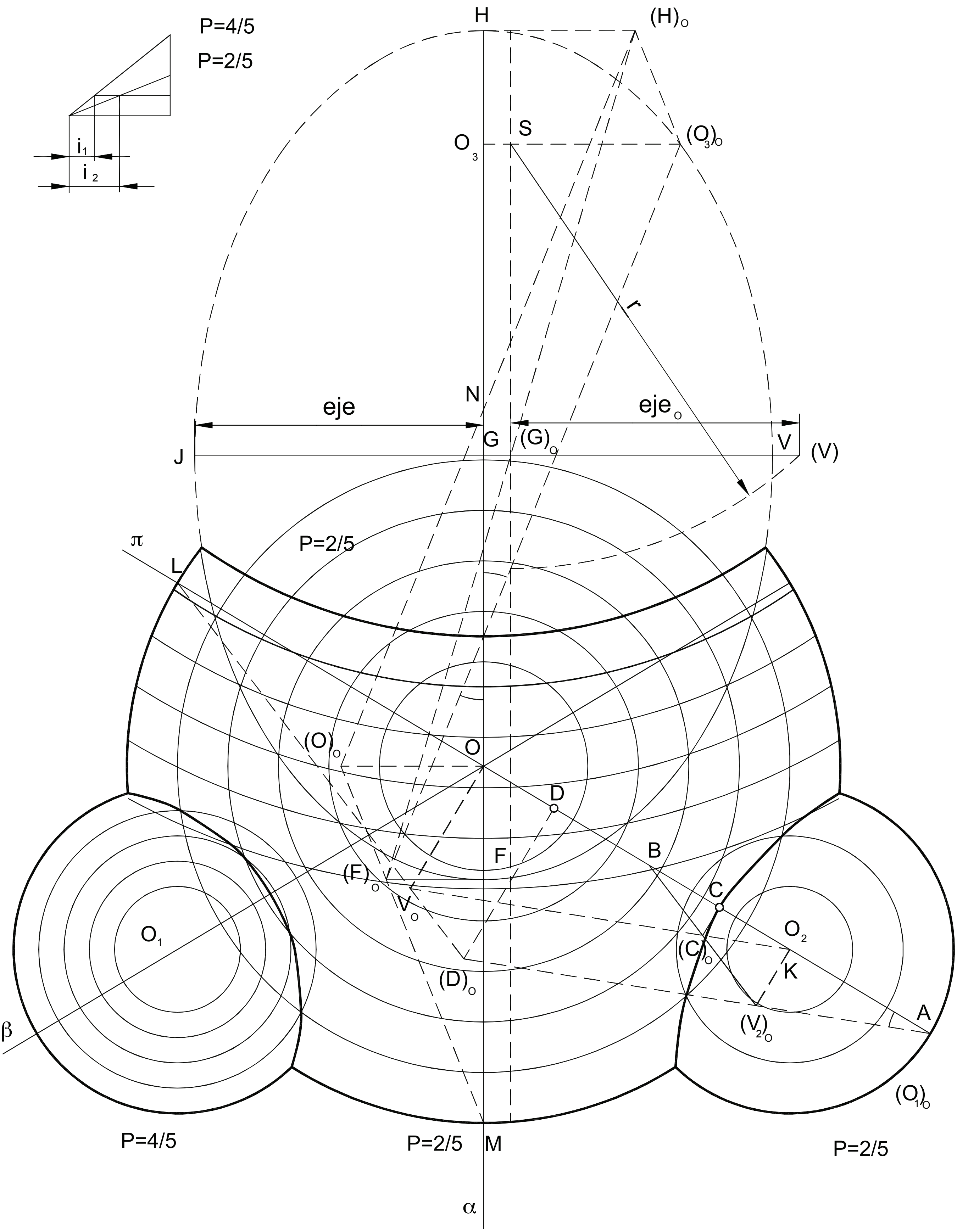
Teniendo en cuenta que la intersección entre faldones cónicos de igual pendiente positiva es un arco de hipérbola. Como se puede ver en la figura, la intersección entre dos conos puede ser incluida en un plano vertical -α- paralelo a dos generatrices, o paralelo al eje de los conos, que es precisamente la condición de la hipérbola “El plano seccionador corta a la superficie cónica paralelamente a dos generatrices”.



Para su resolución se determinan las curvas de nivel y se obtiene la intersección de los faldones cónicos uniendo los puntos de corte entre las curvas de igual cota.

Para obtener los vértices de la hipérbola se corta con un plano vertical -π- a los conos pasando por sus vértices. Se abate el plano y se ve como corta a los conos según sus generatrices. En el cono de vértice V las generatrices abatidas son KV_0 , y LV_0 y para el cono de vértice V_2 las generatrices abatidas son $A(V_2)_0$ y $B(V_2)_0$ los cortes entre estas generatrices son los puntos $(C)_0$ y $(D)_0$, que una vez desabatidos serán los vértices C y D de la hipérbola.

EJERCICIO 18



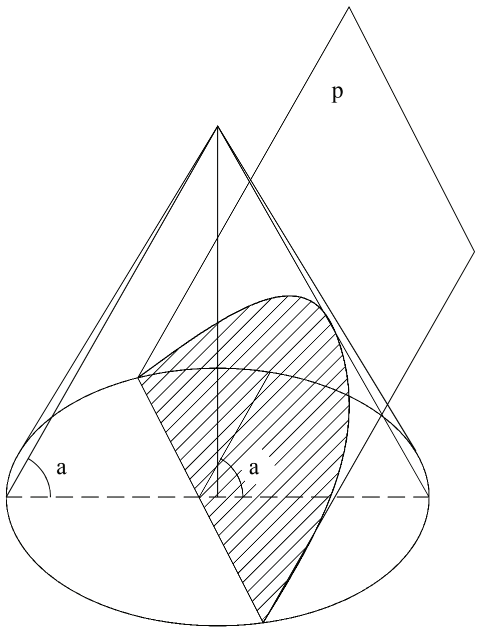
EJERCICIO 19

Conocida la planta de una edificación, formada por dos circunferencias secantes y dos rectas como aparecen en la figura.

Cubrir dicha edificación con faldones de distinta pendiente, para uno de los faldones planos p_1=2, para el otro faldón plano p_2=4/3, y para los faldones cónicos p_2=4/3.

La intersección entre un faldón cónico y otro plano con igual pendiente es un arco de parábola, en la figura representada, un plano seccionador -p- de igual pendiente que la generatriz del cono corta a este según una parábola.

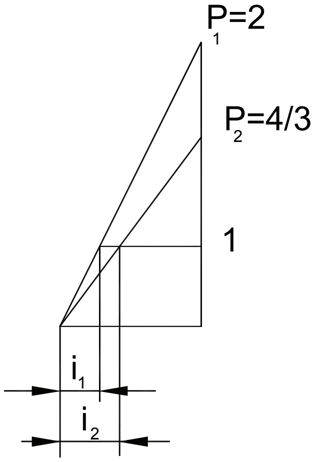
"El plano seccionador corta a la superficie cónica paralelamente a una generatriz".

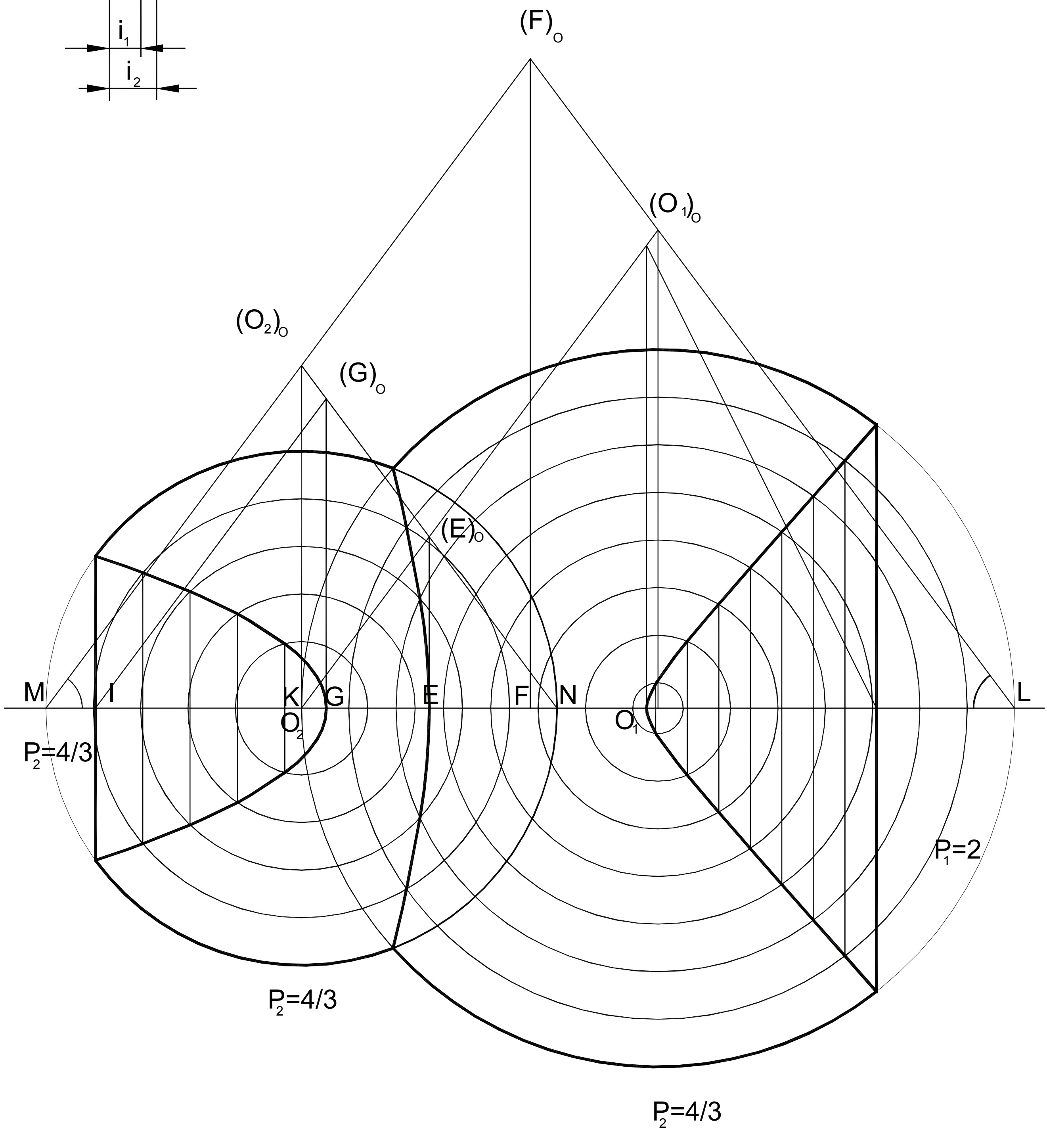


Para resolver el tejado se puede hacer mediante curvas de nivel, ó bien trazando un plano secante que contenga al eje del faldón cónico, y que sea normal al alero recto. Si se abate sobre la planta de la cubierta, se obtendrán dos generatrices abatidas $M(O_2)_0$ y $N(O_2)_0$, que forman el ángulo de la pendiente y la recta $I(G)_0$ correspondiente al faldón plano paralela a la generatriz. Esta recta corta a la otra generatriz en el punto $(G)_0$ desabatiendo este punto se obtendrá el vértice de la parábola G.

Así pues, mediante el vértice G, el eje MG y los puntos de intersección de las líneas de nivel que son puntos de la parábola, queda así definida.

EJERCICIO 19





EJERCICIO 20

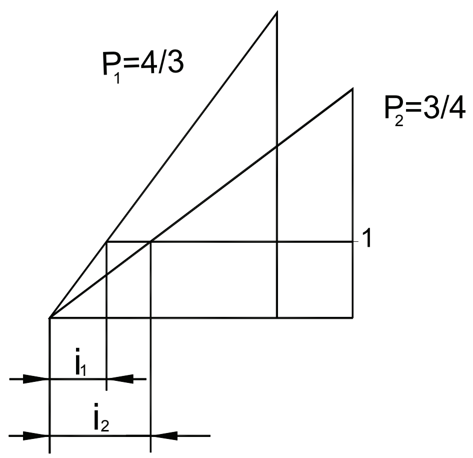
Determinar el cierre de la cubierta de la figura compuesta por aleros de arcos de circunferencia y recta, cuyas pendientes son p_1=4/3, p_2=3/4.

Se determinan los intervalos para trazar las curvas de nivel de los faldones,

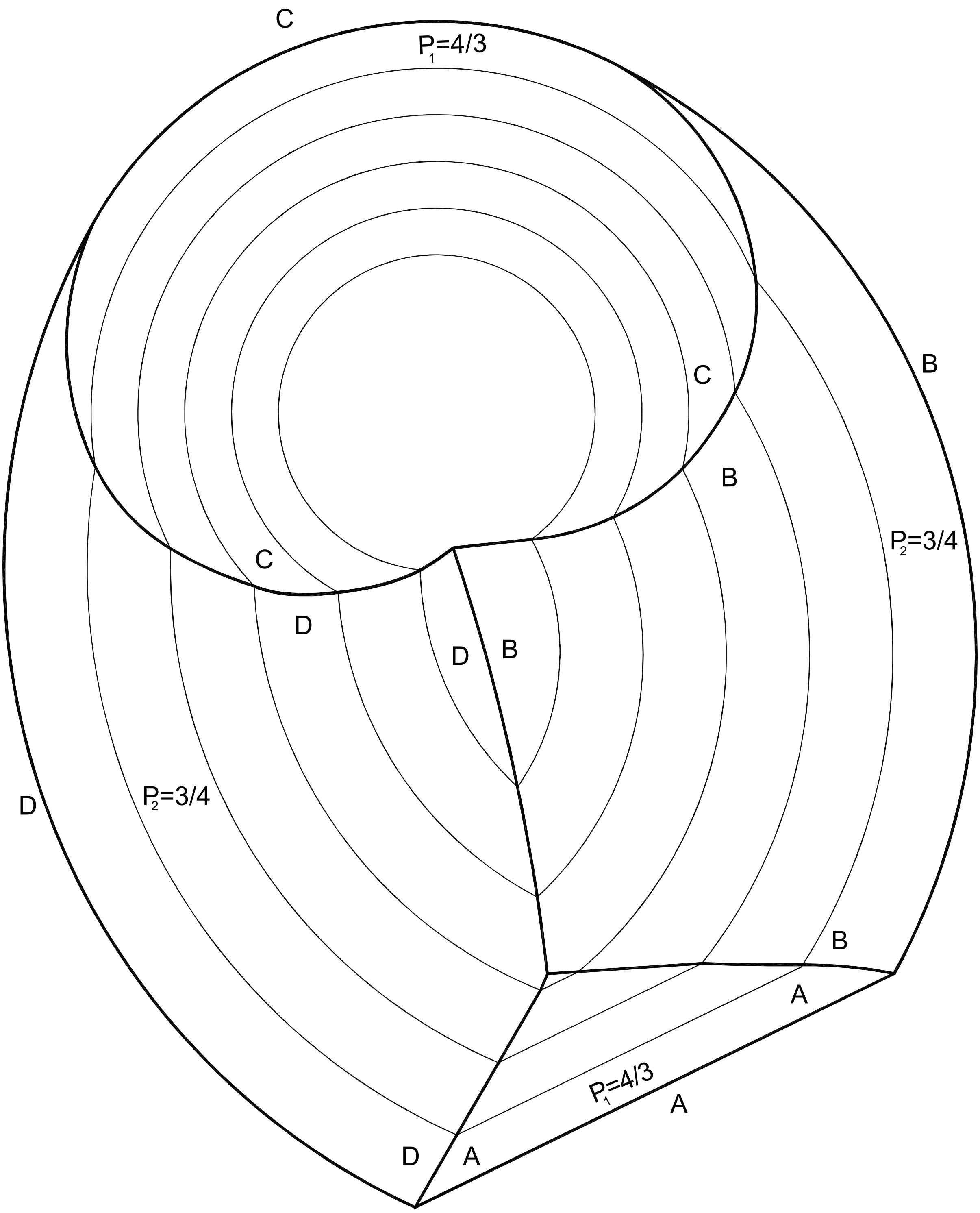
$$i_1 = \frac{1}{p_1} = \frac{1}{1.33} = 0.75. \qquad i_2 = \frac{1}{p_2} = \frac{1}{0.75} = 1.33.$$

Se obtiene la intersección de faldones mediante la unión de los puntos de corte de las curvas de nivel de igual cota.

Al ser de pendientes diferentes las intersecciones no son ni hipérbolas, ni parábolas, sino curvas alabeadas, solamente la intersección DB es un arco de hipérbola, ya que el plano que la contiene es paralelo a dos generatrices de los conos y contiene al vértice de la hipérbola.



EJERCICIO 20



EJERCICIO 21

La planta de una cubierta consta de faldones planos y cónicos, (con directrices circular y elíptica). Además de un detalle de medianería a considerar.

Se pide, resolver la cubierta con las siguientes condiciones:

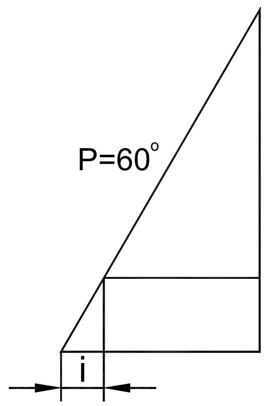
- Los faldones planos arrancan de cota 0.
- El faldón cónico circular arranca de cota 0.
- El faldón elíptico arranca de cota 1.

Todos tienen la misma pendiente, que será p=60º.

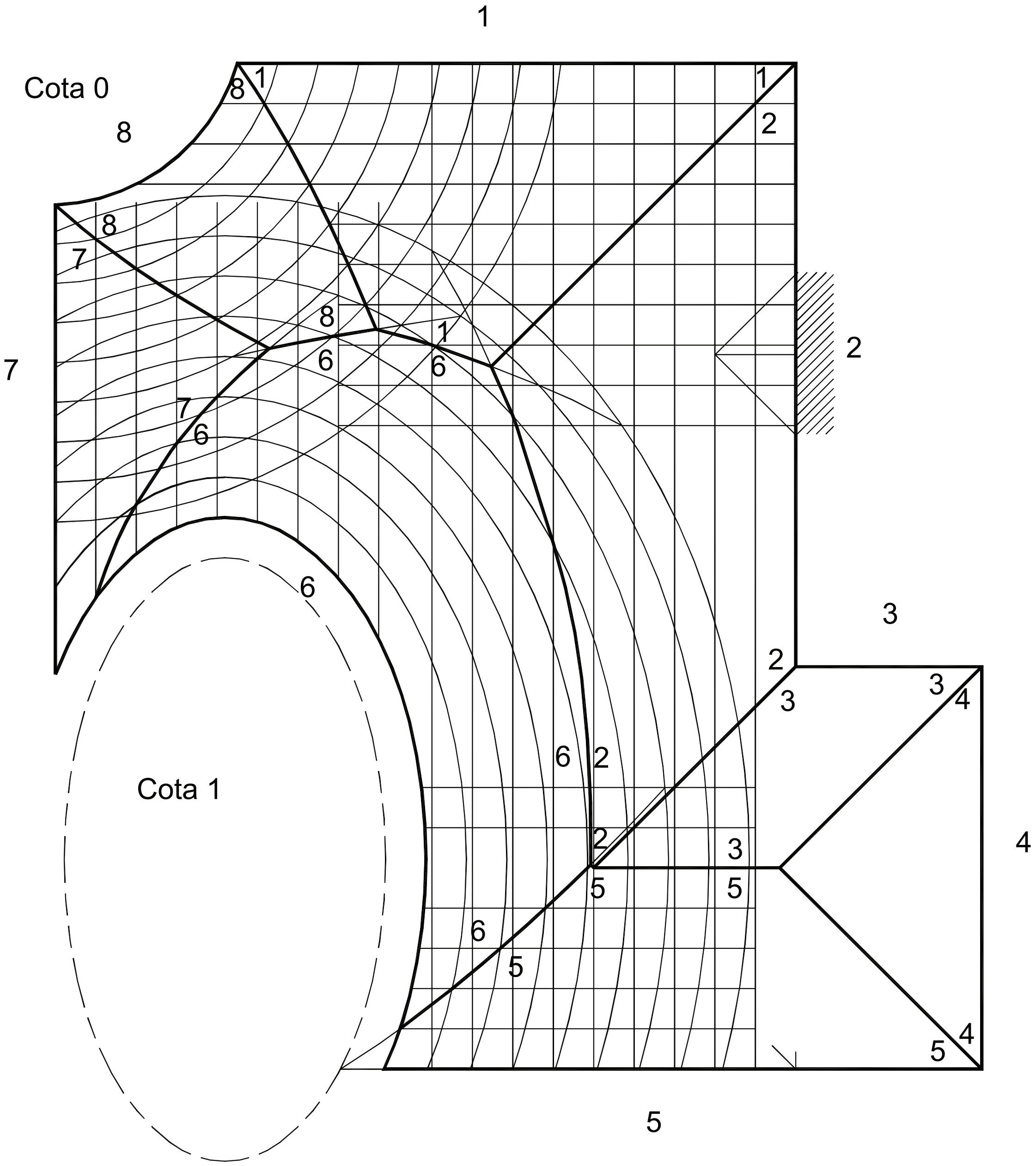
Al tratarse de faldones de pendientes iguales, las intersecciones entre los faldones planos puede obtenerse trazando las bisectrices entre sus horizontales de igual cota, si se trata de un faldón plano y otro cónico de directriz circular se podrá trazar la bisectriz del ángulo mixtilíneo.

En el caso del faldón cónico, de directriz elíptica se hallarán las curvas de nivel de éste para poder obtener sus intersecciones con los otros faldones.

Para resolver la pared medianera de tal forma que el faldón no vierta su agua al medianil, se procede como se puede ver en la figura. Se recomienda ver casos anteriores de medianerías.



EJERCICIO 21



EJERCICIO 22

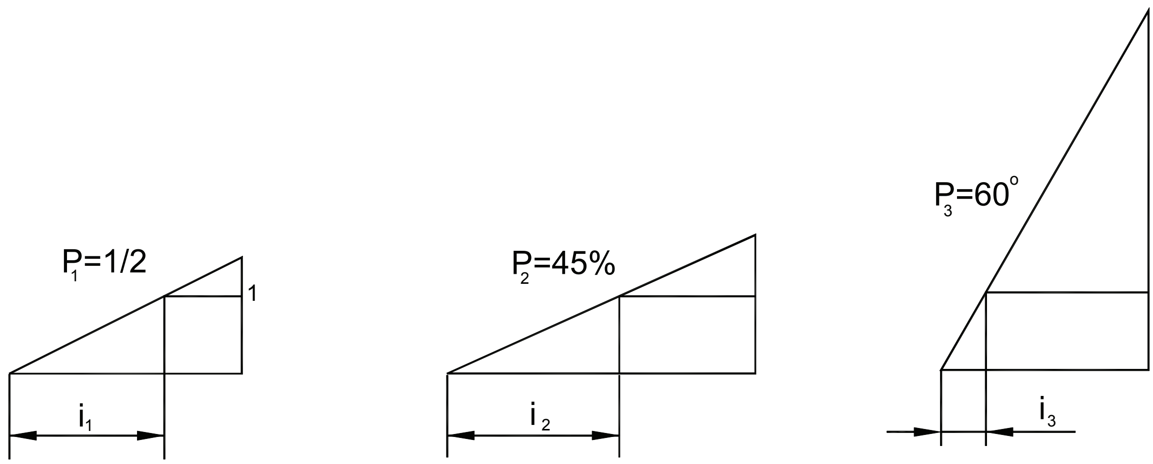
Resolver la siguiente cubierta, siendo de igual forma y dimensiones que la anterior, pero teniendo en cuenta las distintas cotas de aleros y pendientes de los faldones.

- El faldón circular arranca de cota 1 y tiene una pendiente p_2=45%.
- Los faldones planos arrancan de cota 0 y tienen una pendiente p_1=1/2.
- El faldón elíptico arranca de cota 1 y tiene una pendiente p_3=60º.

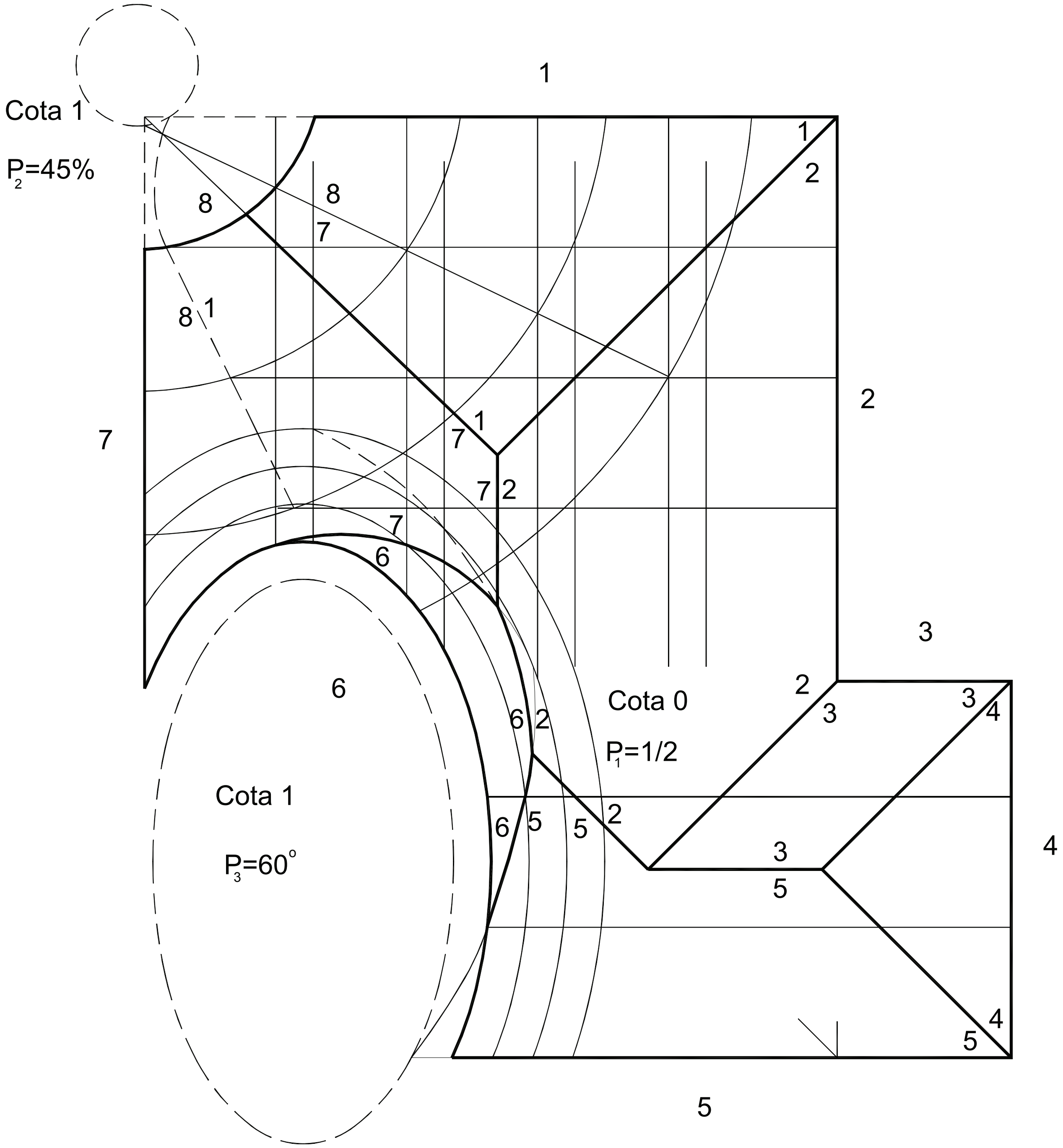
Se calculan los intervalos de las horizontales de los faldones;

$$i_1 = \frac{1}{p_1} = \frac{1}{0.5} = 2. \qquad i_2 = \frac{1}{p_2} = \frac{1}{0.45} = 2.22. \qquad i_3 = \frac{1}{p_3} = \frac{1}{tg60^o} = 0.57.$$

Una vez determinados los intervalos se trazan las líneas y curvas de nivel de cada faldón, para obtener las intersecciones de los faldones corno en casos anteriores.



EJERCICIO 22



EJERCICIO 23

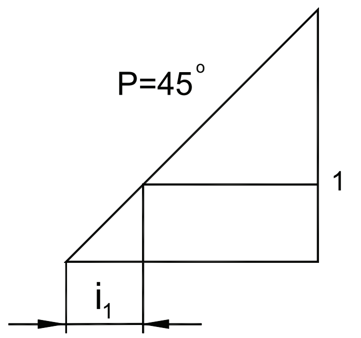
Se trata de una cubierta con alero circular, y teniendo la novedad de disponer de un patio también con alero circular.

Las pendientes son de p=45º, y cota 0 para el patio y perímetro exterior.

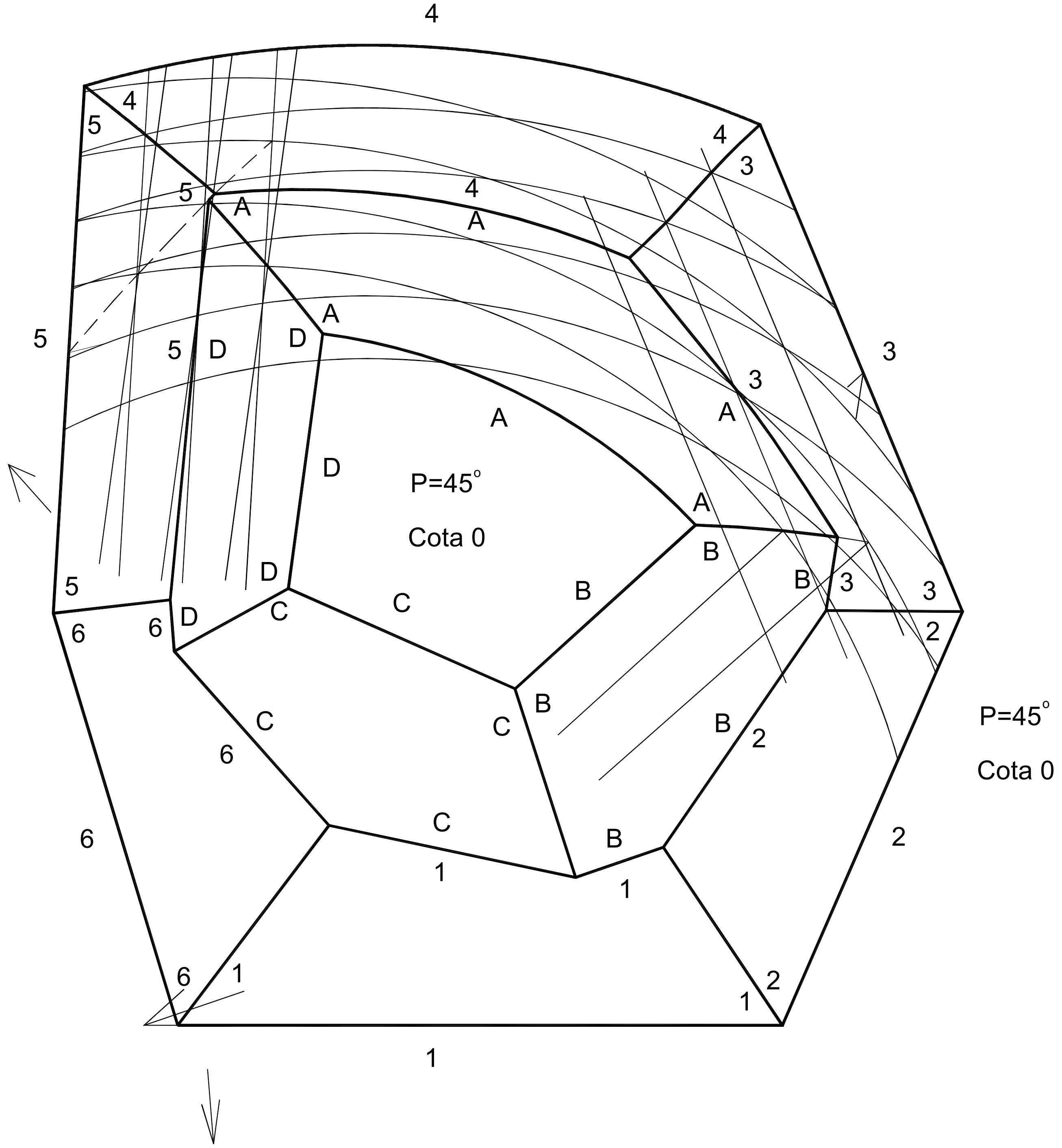
Como todos los faldones tienen la misma pendiente se podrán trazar las bisectrices de los ángulos curvilíneos, mixtilíneos y los formados por dos rectas.

Una vez obtenidas las bisectrices de los faldones contiguos, se resuelve la intersección de tres faldones cercanos; p.e. los planos 1,6,C, siendo la intersección de ellos el punto M.

Se dijo que si 6C ∩ 61 ⇒ M, de M partirá IC, intersección de I con C, así se cumple lo que ya es conocido, tres planos no paralelos 6, C y 1 se cortan en un punto M.



EJERCICIO 23



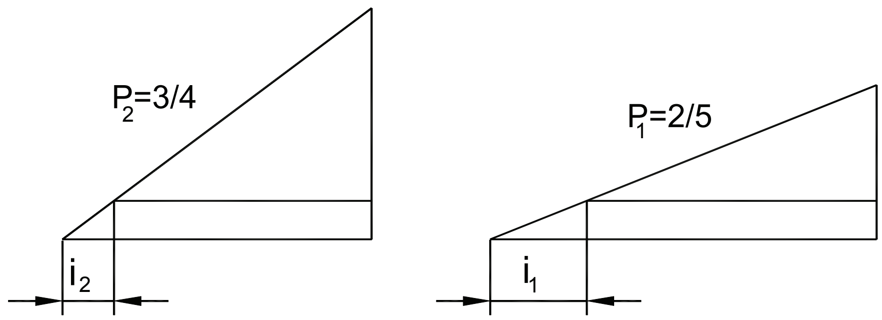
EJERCICIO 24

Resolver la cubierta con patio, teniendo diferentes pendientes para aleros exteriores e interiores, siendo p_1=2/5 y p_2=3/4 respectivamente. Las cotas de aleros son también diferentes, cota 0 para exteriores, y cota (-2) para interiores.

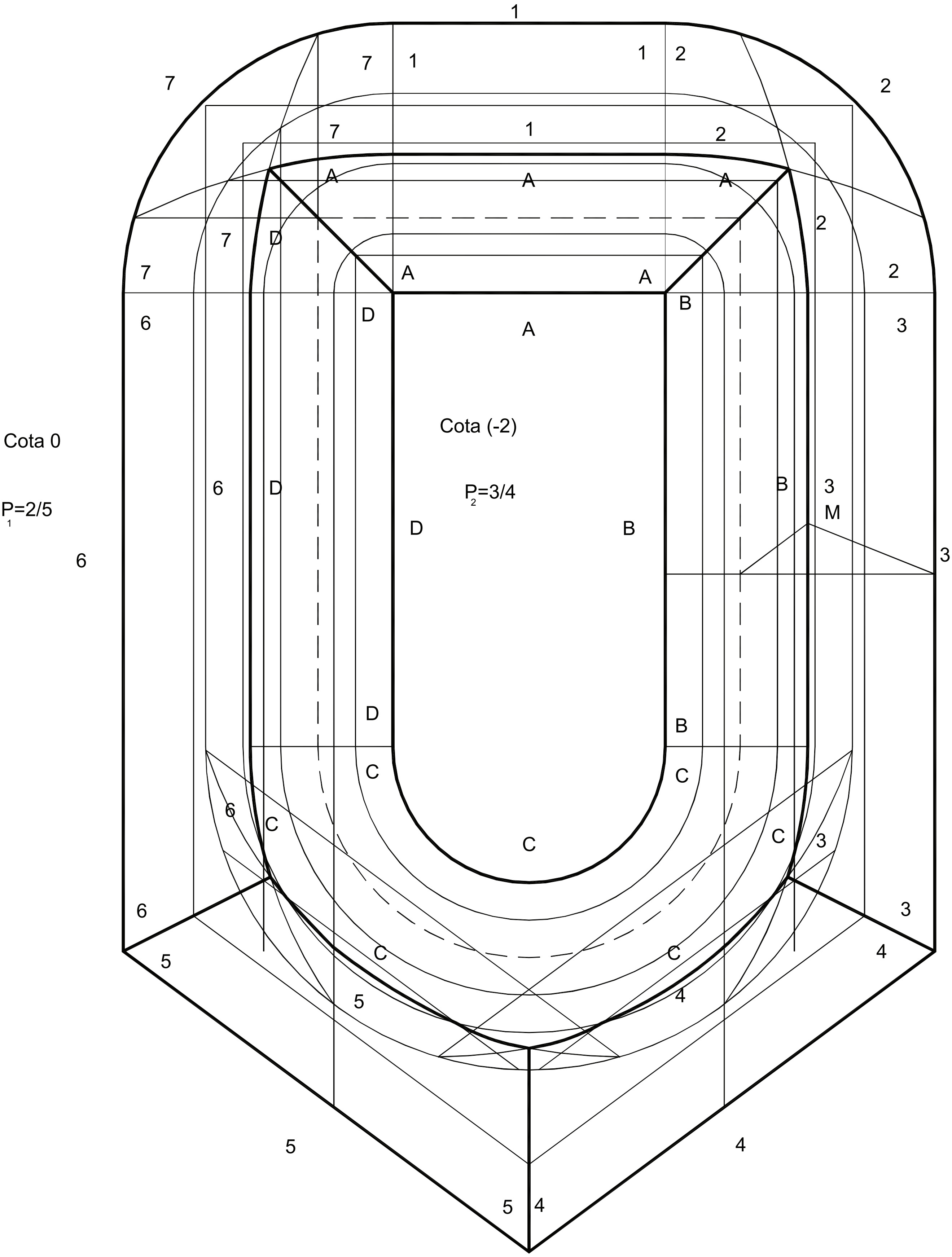
En este ejercicio se ha tomado como unidad de dibujo 0.5 cm, con lo cual los intervalos son i_1=1.25 i_2=0.667, como en casos anteriores se trazan las líneas de nivel.

Para determinar la intersección de los faldones B y 3, a partir de la línea de nivel 0 (línea de trazos) del faldón B, se lleva la pendiente de p_2=3/4 y a partir del faldón la pendiente p_1=2/5, la intersección de ambas rectas determina el punto M del que parte una paralela a los aleros y que se cortará con otra intersección de dos faldones con algún alero en común , por ejemplo B3 y BC se cortan y de ese punto parte 3C.

Las intersecciones teóricas (tangencias) 76, 71, 12, 23, CD, y CB aparecen con línea fina, por no ser aristas propiamente dichas.



EJERCICIO 24



EJERCICIO 25

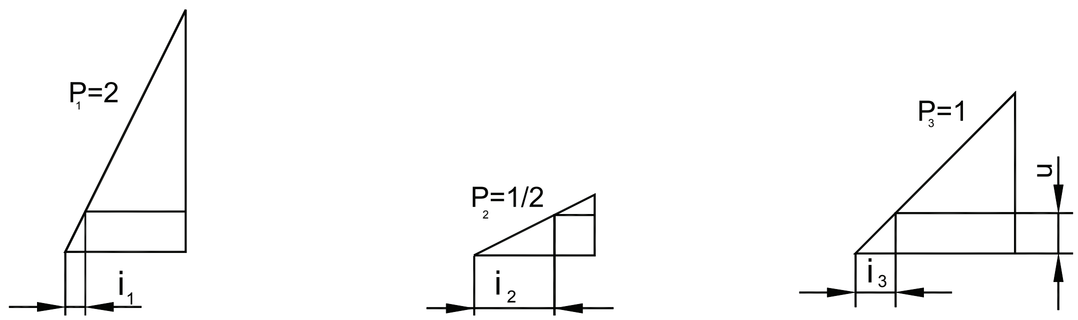
Dibujar las intersecciones del tejado con patio y torre; la cota de los aleros exteriores es de 22 m., excepto el circular de la torre que es de 19 m. Todo el patio tiene aleros a 19 m., dibujar el alzado. Pendiente del tejado exterior p_2=0,5 , del tejado interior p_3=1, pendiente de la torre p_1=2.

En la resolución de este ejercicio se hace uso de los métodos ya conocidos para la determinación de los límites de las vertientes de un tejado, tan sólo hay que tener en cuenta los diferentes intervalos que se han de tomar según se trabaje en la torre, el patio o el alero exterior.

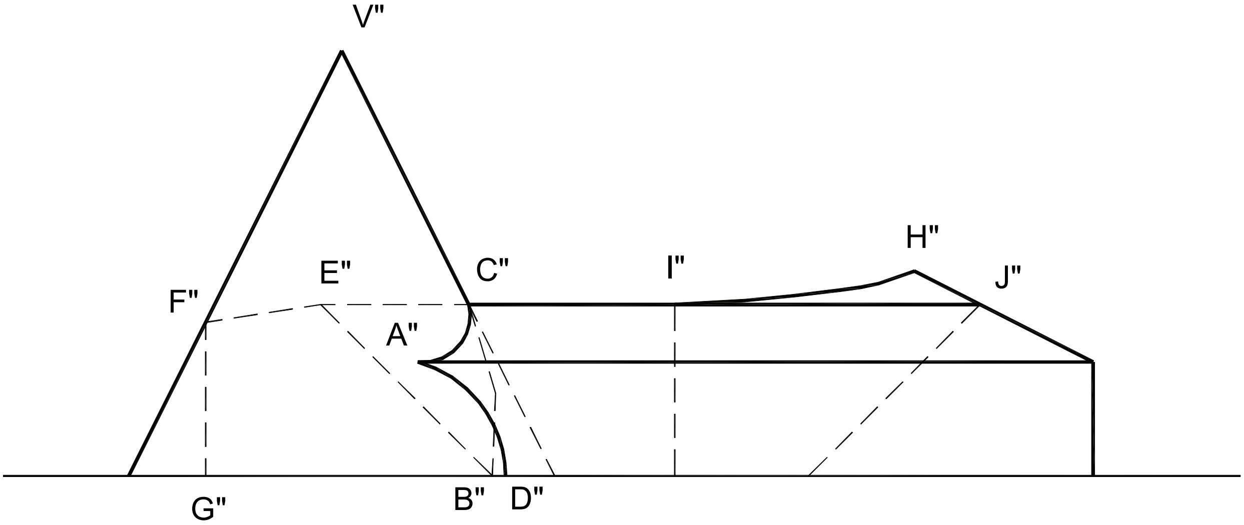
$$i_1 = \frac{0.5}{p_1} = \frac{0.5}{2} = 0.25. \qquad i_2 = \frac{0.5}{p_2} = \frac{0.5}{0.5} = 1. \qquad i_3 = \frac{0.5}{p_3} = \frac{0.5}{1} = 0.5.$$

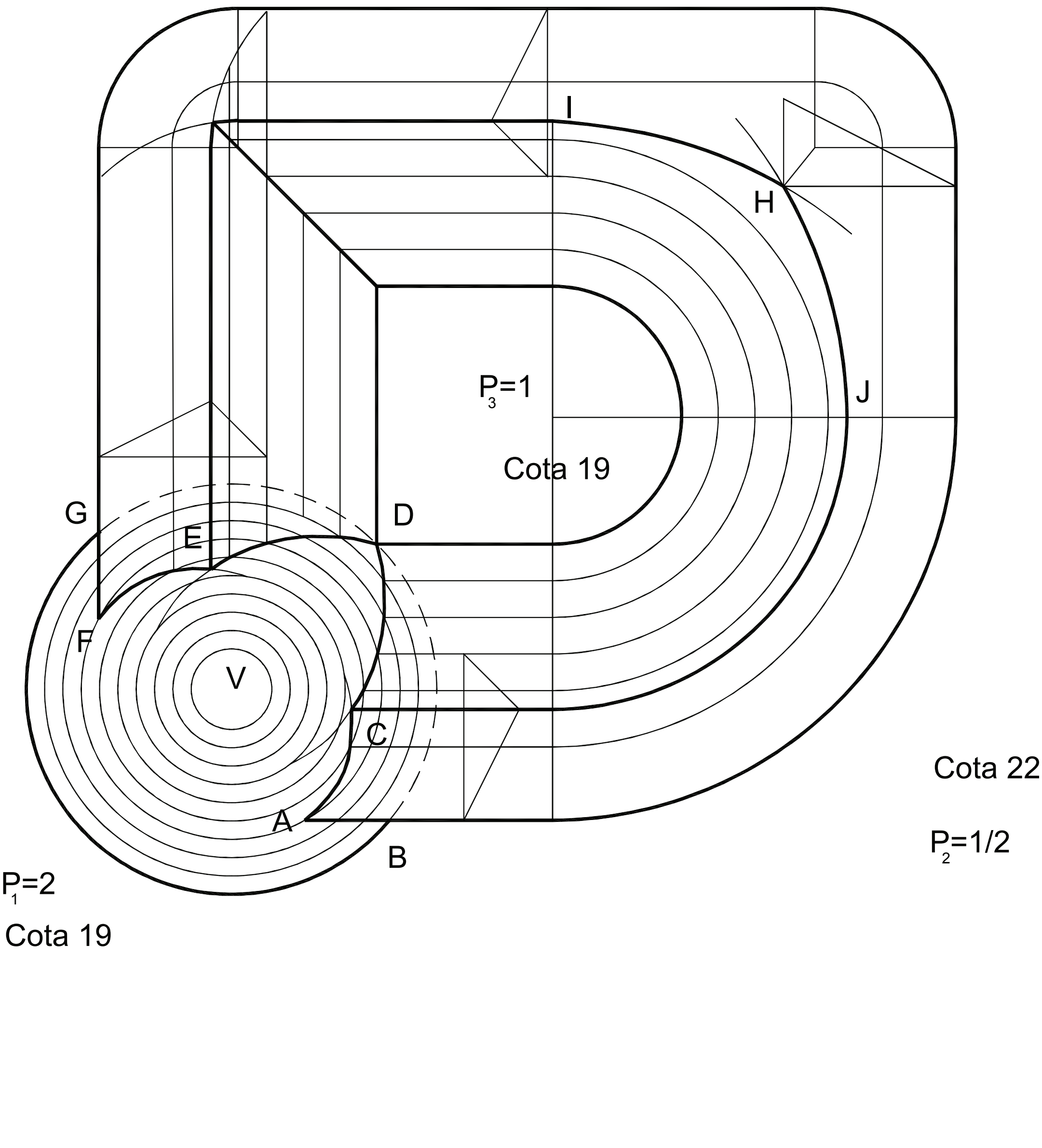
Obtenida la resolución en planta, para determinar el alzado, se referirán al mismo los puntos característicos, asignándoles la cota que en cada caso corresponda. A modo de ejemplo aparece en la figura la obtención de la cota del punto H, punto que se ha considerado incluido en el faldón exterior y por lo tanto de pendiente 0,5.

En este caso se utiliza como unidad de dibujo 0.5 cm en lugar de 1 cm como en casos anteriores.



EJERCICIO 25





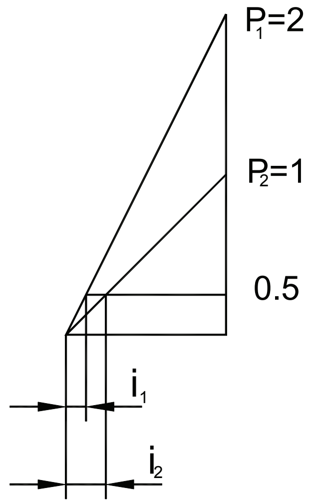
EJERCICIO 26

Trazar el alzado de la cubierta cuyos faldones exteriores son tres planos de pendiente p_1=2 que pasan por AB, CD y EF, y sus tres conos de enlace. Las tres pendientes interiores son de p_2=45º.

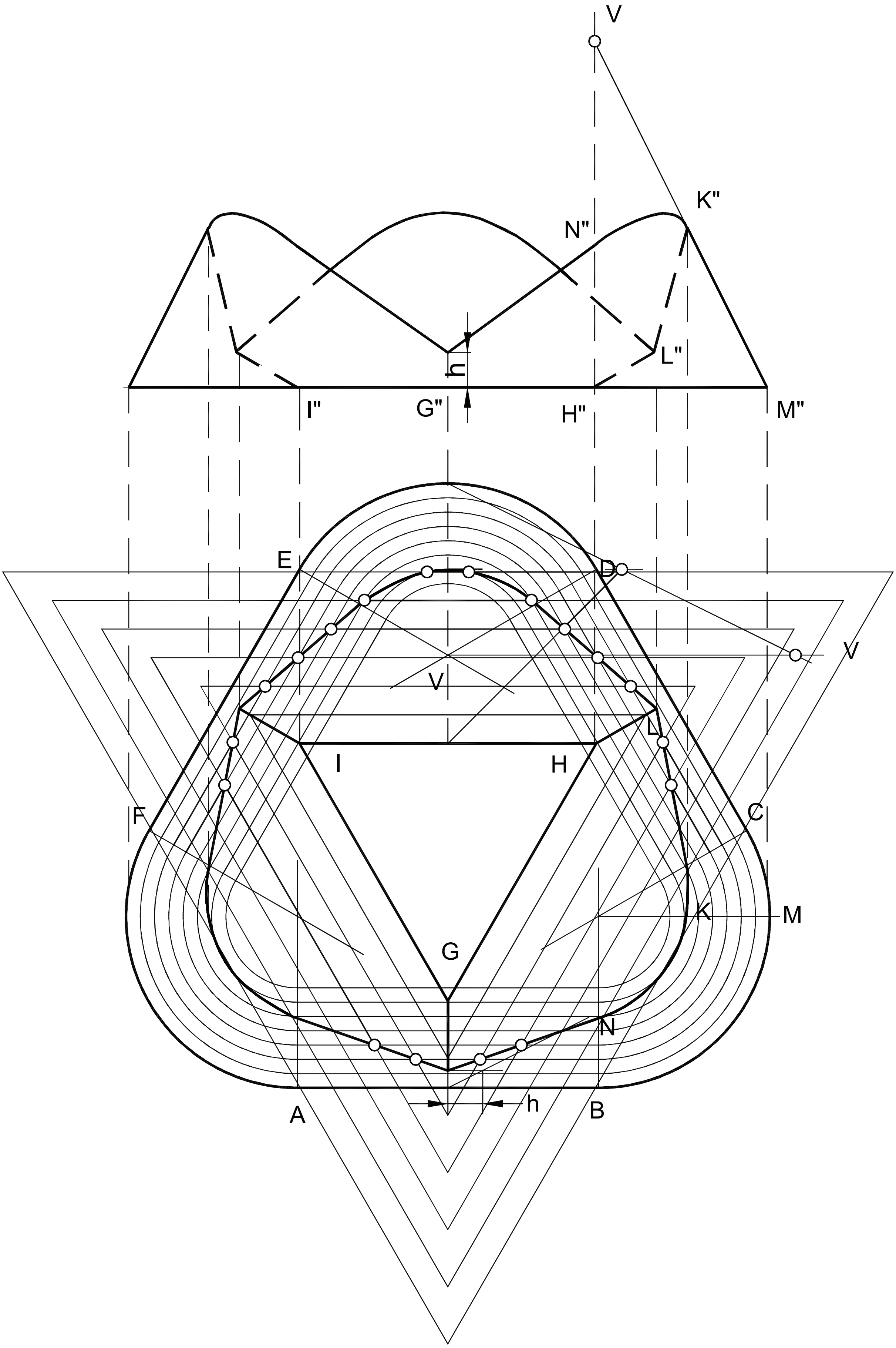
En la obtención de este tejado se han seguido los métodos y procedimientos seguidos en la resolución de casos anteriores, es decir trazando las líneas horizontales de cada una de las superficies que intervienen, y donde se cortan las, de igual cota, se van definiendo puntos que unidos entre sí, definen las líneas convencionales de las sucesivas intersecciones. Se recomienda repasar los anteriores ejercicios de tejados.

Para definir el alzado correctamente habrán de obtenerse además de los puntos notables, los suficientes para definir las partes curvas.

La unidad de dibujo será nuevamente 0.5 cm.



EJERCICIO 26



EJERCICIO 27

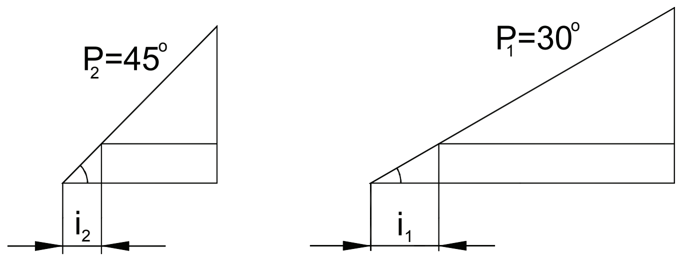
Determinar las intersecciones de los faldones de la cubierta representada por sus aleros, teniendo en cuenta que las pendientes son de p_2=45º para los faldones exteriores y de p_1=30º para los faldones interiores. En el faldón interior marcado como D existe un cambio de pendiente, de 30º a 45º, a partir de la línea marcada a trazos, que corresponde con su limahoya.

Para la resolución de este tejado se obtendrán las intersecciones de los faldones en la forma ya explicada, haciendo incidencia en la definición del faldón D, donde existe un cambio de pendiente.

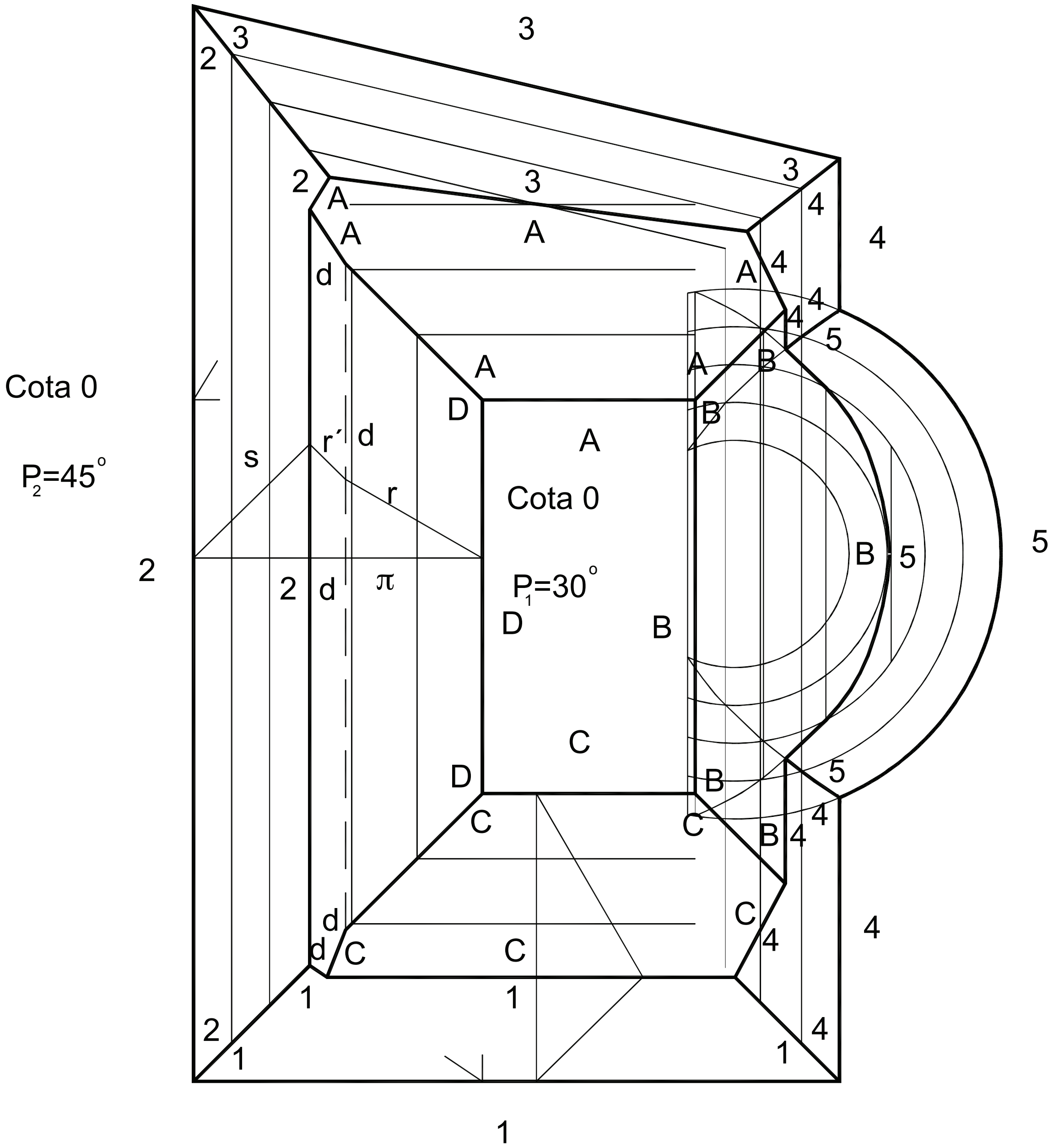
Nombrado el alero interior D, en este mismo faldón se llamará -d- a la línea de trazos, de la figura.

Para hallar la intersección de los faldones 2 y (D, d) se traza un plano π secante transversal, al abatirlo se observa el corte de este con los faldones, siendo la recta -s- de pendiente 45º con el faldón 2 y -r- de 30º con el alero D, siendo -r´- la recta de pendiente 45º que sale a partir de la línea de trazos; del corte de esta última recta -r´- y -s- resulta el punto M por donde se trazará la paralela a los aleros de los faldones referidos.

La unidad de dibujo se toma de 0.5 cm.



EJERCICIO 27



EJERCICIO 28

Se conoce el perímetro de aleros de una cubierta, con su patio interior circular.

Las cotas de los aleros exteriores son de valor 0 y la de los interiores son de valor 1. La pendiente es igual a p=75% en todos los casos.

Determinar la superficie de la cubierta en m^2.

Se hallarán las líneas de nivel de los faldones exteriores y las del interior.

Las intersecciones de las líneas de nivel de igual cota dará la solución al ejercicio, siendo estas intersecciones parábolas al ser la intersección entre faldones planos cónicos de igual pendiente.

Se podría haber utilizado el método al que se hace referencia en el ejercicio 19.

Para determinar la superficie de la cubierta, se deben abatir los faldones de la misma, de modo que se vean en verdadera magnitud.

El faldón de límites M, MN, MO y MR, es simétrico del faldón de límites P, NP, OP y PR, con lo que basta con abatir uno de ellos. En la figura se muestra el abatimiento del faldón citado en segundo lugar.

Pasa lo mismo con los otros dos faldones exteriores, por lo que basta con abatir uno de ellos, el faldón R, PR, OR y MR , como muestra la figura.

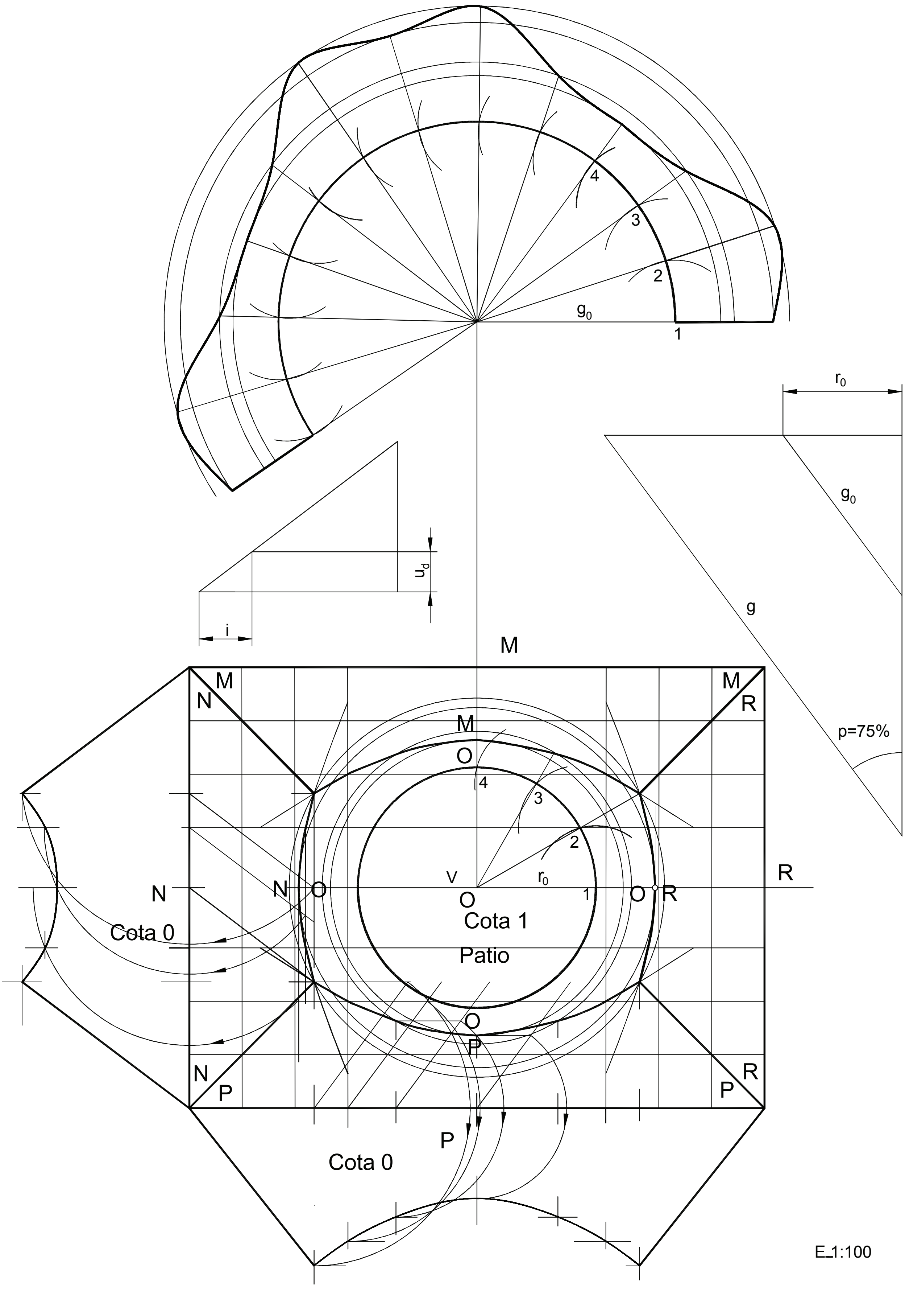
Para hallar la verdadera magnitud del faldón interior se procede de forma distinta.

Como se puede apreciar, está formado por un cono de vértice V, seccionado por cuatro planos de igual pendiente y simétricos dos a dos, por lo que se desarrollará el cono y en él se obtendrán las transformadas de las secciones.

Como en el caso de los faldones exteriores, basta con desarrollar únicamente un cuadrante del mismo, por existir simetría.

Conocidas las verdaderas magnitudes de los faldones, se puede calcular su superficie descomponiendo la misma en otras de superficie conocida como triángulos, cuadrados, etc.

EJERCICIO 28



EJERCICIO 29

Determinar la cubierta de un tejado cuya planta se representa en la figura.

Los vértices del perímetro exterior están a la cota que se indica, y el alero del patio se encuentra a cota 0.

Las vertientes tienen las pendientes p_2=30% y p_1=45%.

Determinar un alzado de la cubierta.

Las líneas límites exteriores M, N, P, R servirán junto con las pendientes correspondientes para poder definir horizontales en los faldones del tejado. Para ello se procederá como en los ejercicios 5 y 6 en los que se utiliza el "Método de los conos".

Tomando 0.5 cm. como unidad en el dibujo, se tendrá:

$$i_1 = \frac{0.5}{p_1} = \frac{0.5}{0.45} = 1.11. \qquad i_2 = \frac{0.5}{p_2} = \frac{0.5}{0.3} = 1.667.$$

Una vez definidas las líneas de nivel, se obtienen las curvas de nivel del faldón cónico de pendiente negativa que forma el patio, de tal manera que serán circunferencias concéntricas con radios que incrementan el valor del intervalo.

Finalmente, se hallan las intersecciones de los faldones, siendo estas las uniones de los puntos de corte de las líneas y curvas (circunferencias) de nivel de igual cota.

Para determinar el alzado basta con levantar cada uno de los puntos hasta su altura correspondiente.

Las cotas de los puntos A, B, C y D, son conocidas, ya que es un dato del ejercicio, para obtener las cotas del resto de los puntos es necesario proceder de la siguiente manera.

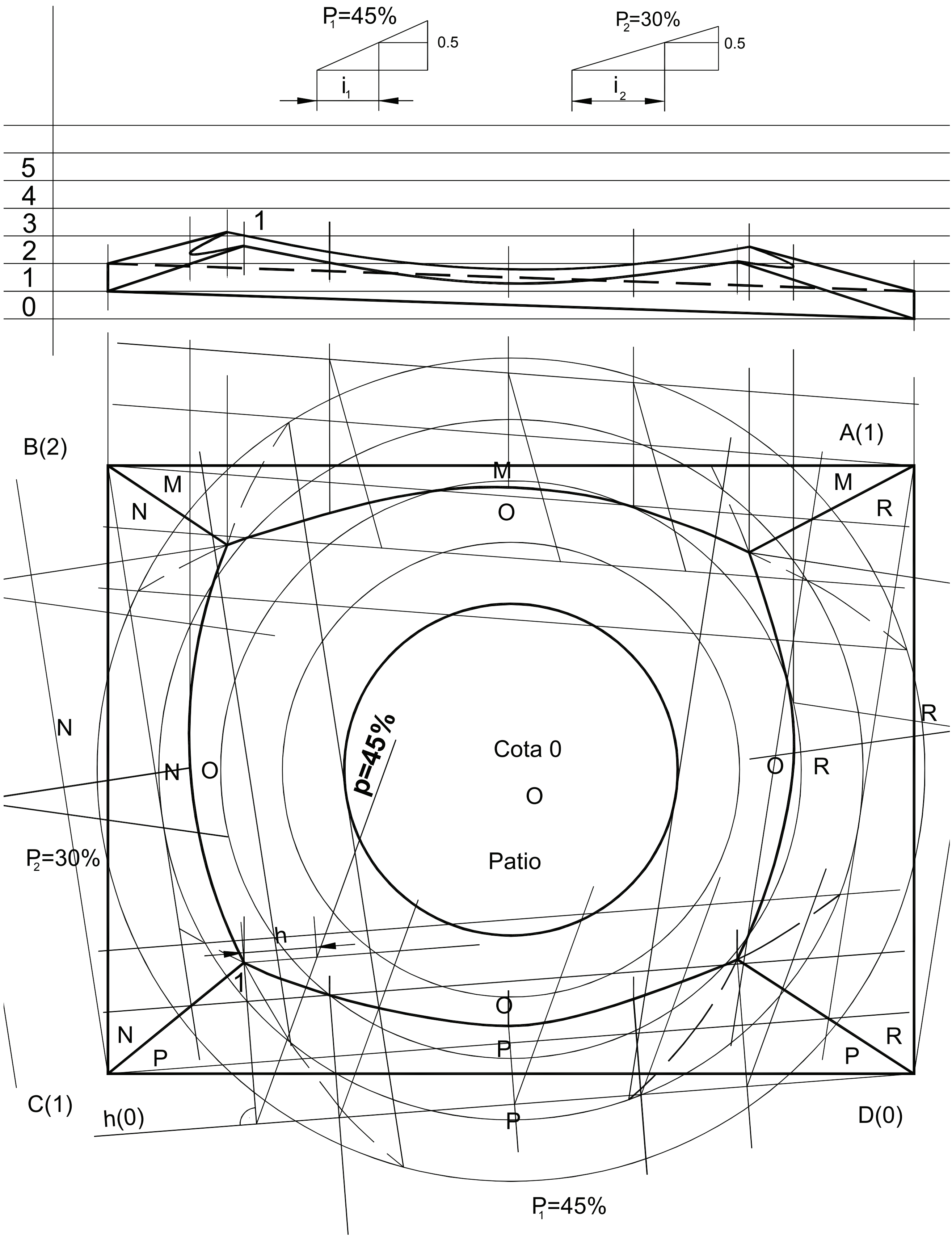
Se traza por un punto, cuya altura se quiere conocer, por ejemplo el punto 1 donde se cortan los faldones planos P y N y el cónico O, una recta perpendicular a la horizontal de cota 0. Sobre esta perpendicular se lleva la pendiente del faldón, obteniendo así la altura -h- del punto 1, como muestra la figura.

Esta es la altura se llevará en el alzado, a partir de la línea de cota 0, para obtener la proyección del punto 1.

Para obtener el resto de puntos se repite esta operación, y una vez obtenidos todos ellos, se unen diferenciando partes vistas y ocultas.

En las partes curvas a mayor cantidad de puntos que se estudien, mayor precisión habrá después en el alzado a la hora de representarlas.

EJERCICIO 29

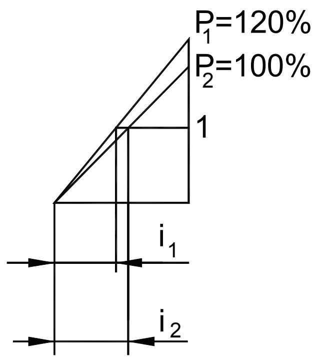


EJERCICIO 30

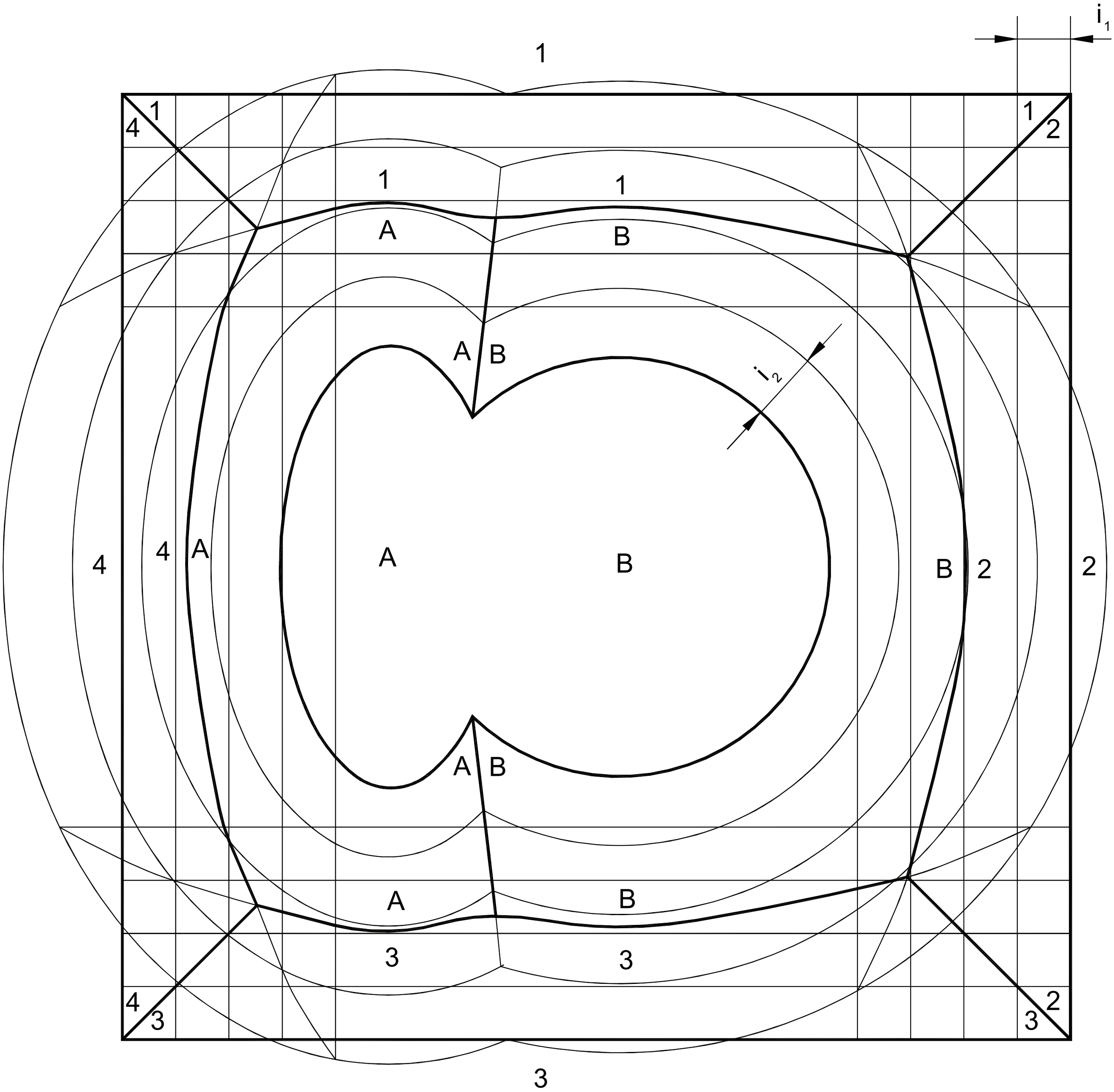
Definir las cumbreras del edificio de la figura, con un patio, parte circular y parte elíptica, así como un perímetro exterior cuadrado. Las cotas de los aleros son iguales y las pendientes de 120% en exteriores y 100% en patio.

Se hallarán las intersecciones de los faldones del patio y de los faldones planos exteriores para ir limitándolos sucesivamente.

Se puede resolver mediante intersección de las líneas de nivel o bien por bisectrices, ángulos mixtilíneos, secciones transversales, etc.



EJERCICIO 30



EJERCICIO 31

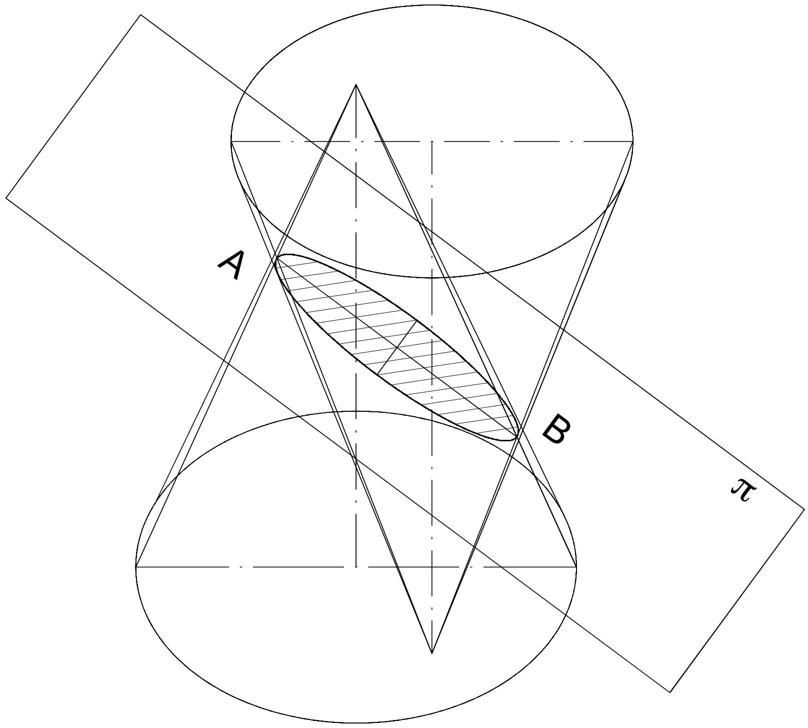
Construcción de la cubierta de perímetro exterior y patio interior circulares no concéntricos. La pendiente es de 30º en ambos casos.

Se sabe que la intersección de dos conos de revolución, invertidos uno con respecto al otro y de igual pendiente, es una elipse si sus ejes no coinciden.

Observando la figura, la intersección entre los dos conos es la sección que les produce un plano que corta a todas las generatrices.

En este caso se puede aplicar el método del plano vertical que pasa por los vértices de los conos que intervienen, para después en el abatimiento de las secciones que produce, poder ver su intersección y así determinar la solución del ejercicio.

Se hallarán A y B, extremos del eje de la elipse, mediante las intersecciones de las generatrices de los conos que definen las directrices y pendiente dadas. La intersección se obtiene en el abatimiento del plano vertical y de traza α_0=RT, desabatiendo luego los puntos de intersección A_0 y B_0.

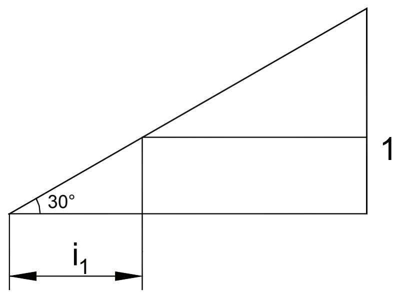


Para, hallar el semieje OD, se obtiene el punto O_0 siendo éste la intersección entre la recta A_0B_0 y la recta perpendicular a MN que pasa por O, punto medio entre A y B.

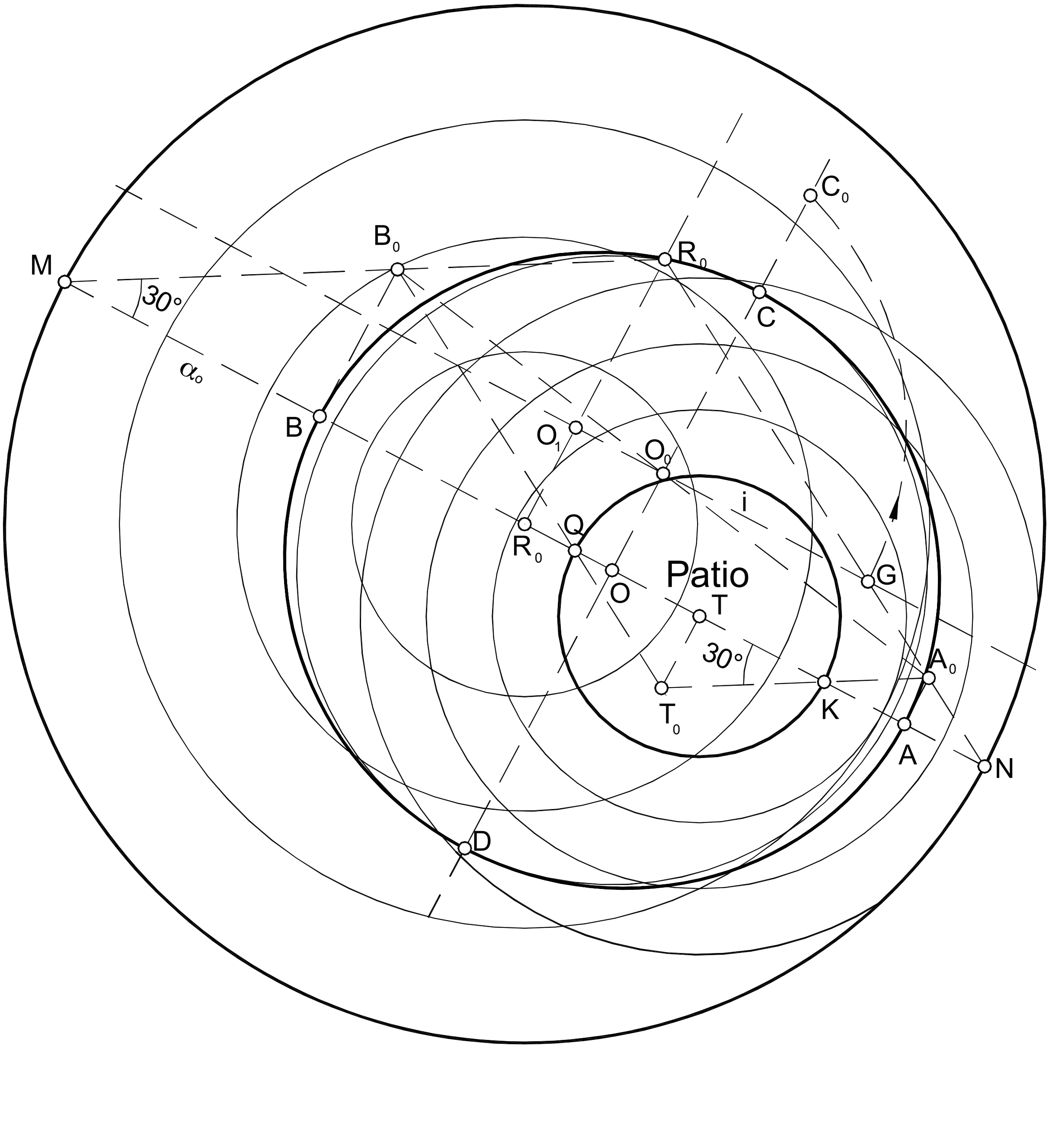
Una vez obtenido O_0 se hace pasar un plano horizontal que se corte *con a seg*ún la recta i, la intersección de la recta i y la recta RR_0 será el punto O_1 centro del arco de radio O_1G que corta a la recta OO_0 en el punto C_0. La magnitud de O_0C_0 es la del semieje OD.

La cumbrera de la cubierta será por tanto la elipse de ejes AB y CD.

EJERCICIO 31



p=30°



EJERCICIO 32

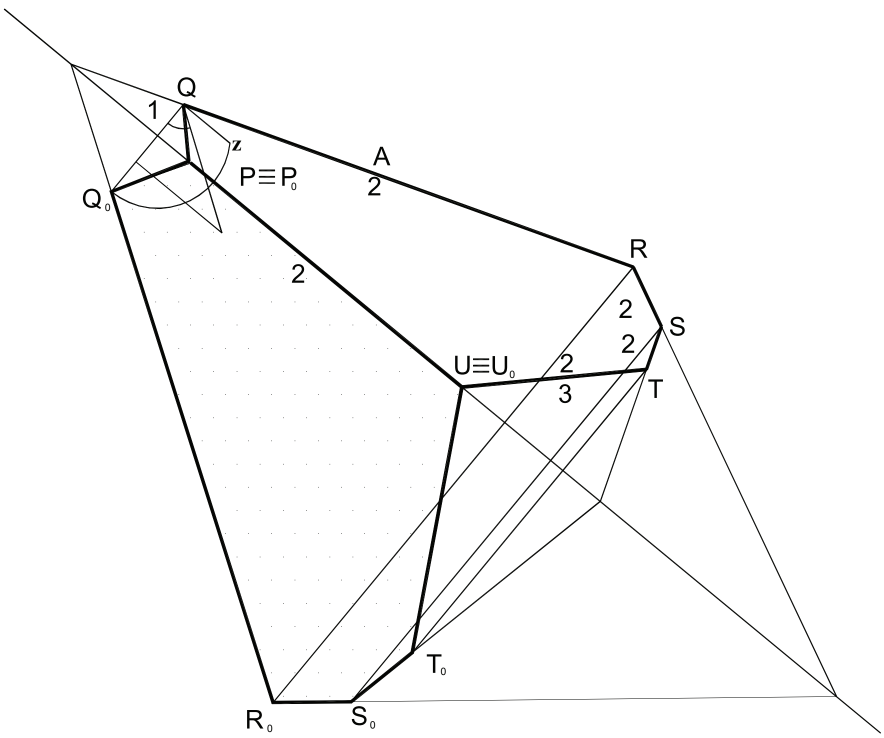
Hallar las vertientes del tejado de un edificio con la planta representada.

Consta de dos patios, uno de faldones planos y el otro de faldones cónicos. Las cotas de aleros son iguales, y la pendiente del 150% en todos los casos.

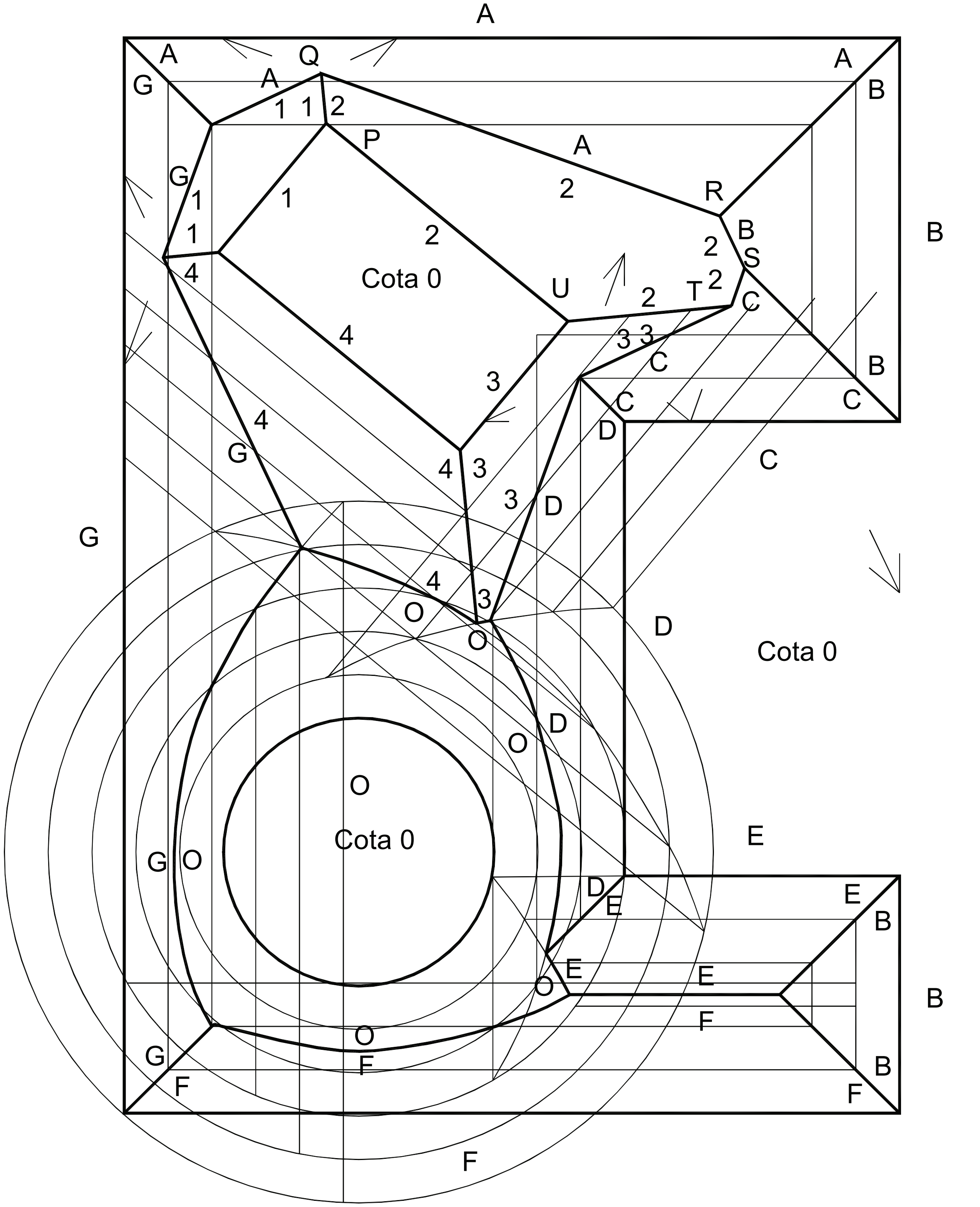
Verdadera magnitud de un faldón a patio.

Al igual que en el ejercicio 15, se determinan las líneas de nivel de los faldones del patio y del exterior para así, ir obteniendo las intersecciones sucesivas, teniendo en cuenta las prioridades al cortarse unos faldones con otros.

Al tener todos la misma pendiente, se podrán trazar las bisectrices para revolver el ejercicio.



EJERCICIO 32



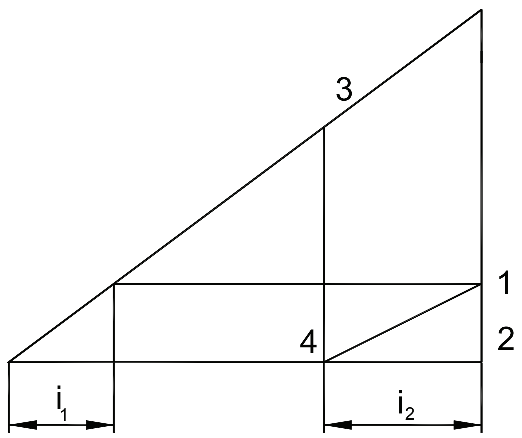
EJERCICIO 33

Resolver la cubierta de la figura, que se compone de un perímetro exterior cuadrado y una cúpula esférica.

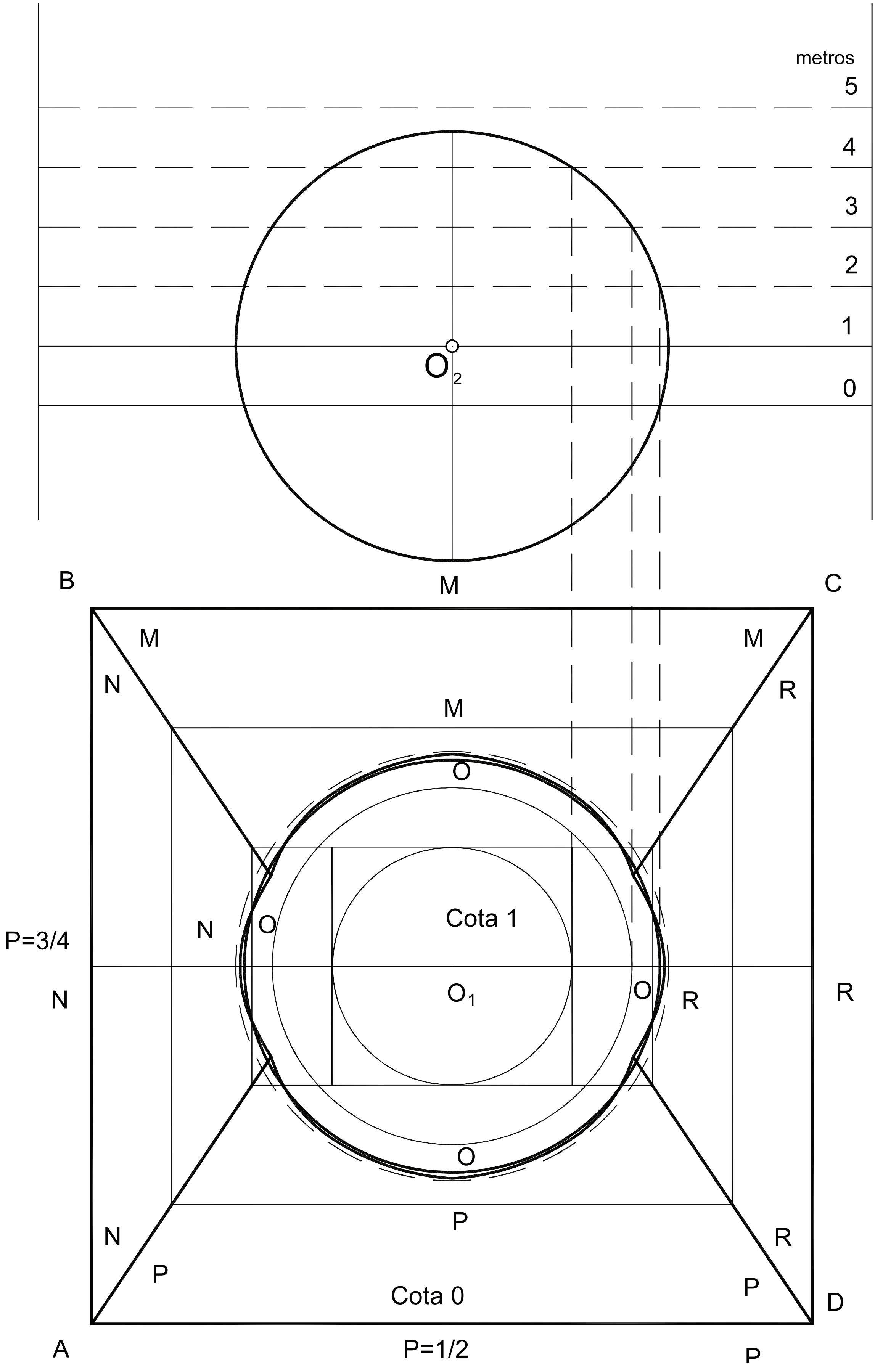
La pendiente de los faldones que parten de AB y CD es de 3/4, y la de los que parten de AD y BC de 1/2; el centro de la cúpula está a cota 1m.

Como se trata de una cúpula esférica, se utilizará la proyección vertical, para obtener las circunferencias horizontales correspondientes a los planos de cota 2, cota 3 y cota 4.

Se trazan las proyecciones horizontales de estas circunferencias de nivel que junto con las líneas de nivel de los faldones se obtendrán las intersecciones respectivas de los faldones y la cúpula.



EJERCICIO 33



EJERCICIO 34

Se dispone de una planta de perímetro poligonal no horizontal y una cúpula esférica.

La pendiente de los faldones que parten del perímetro es de p=45%, hallar la intersección de la cubierta con la cúpula.

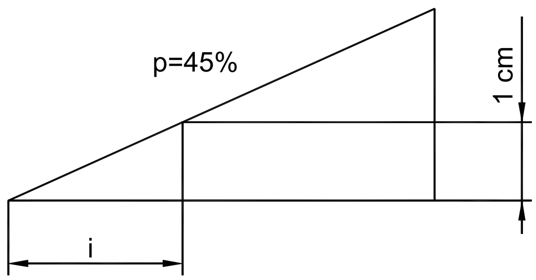
Los vértices del perímetro exterior son de cotas diferentes, el centro de la cúpula se encuentra en la cota 2.

Por tratarse la cúpula de una esfera, se pasará a proyección vertical para la obtención de las circunferencias de nivel 3 y 4, al seccionar la cúpula con los planos horizontales de cotas 3 y 4 respectivamente.

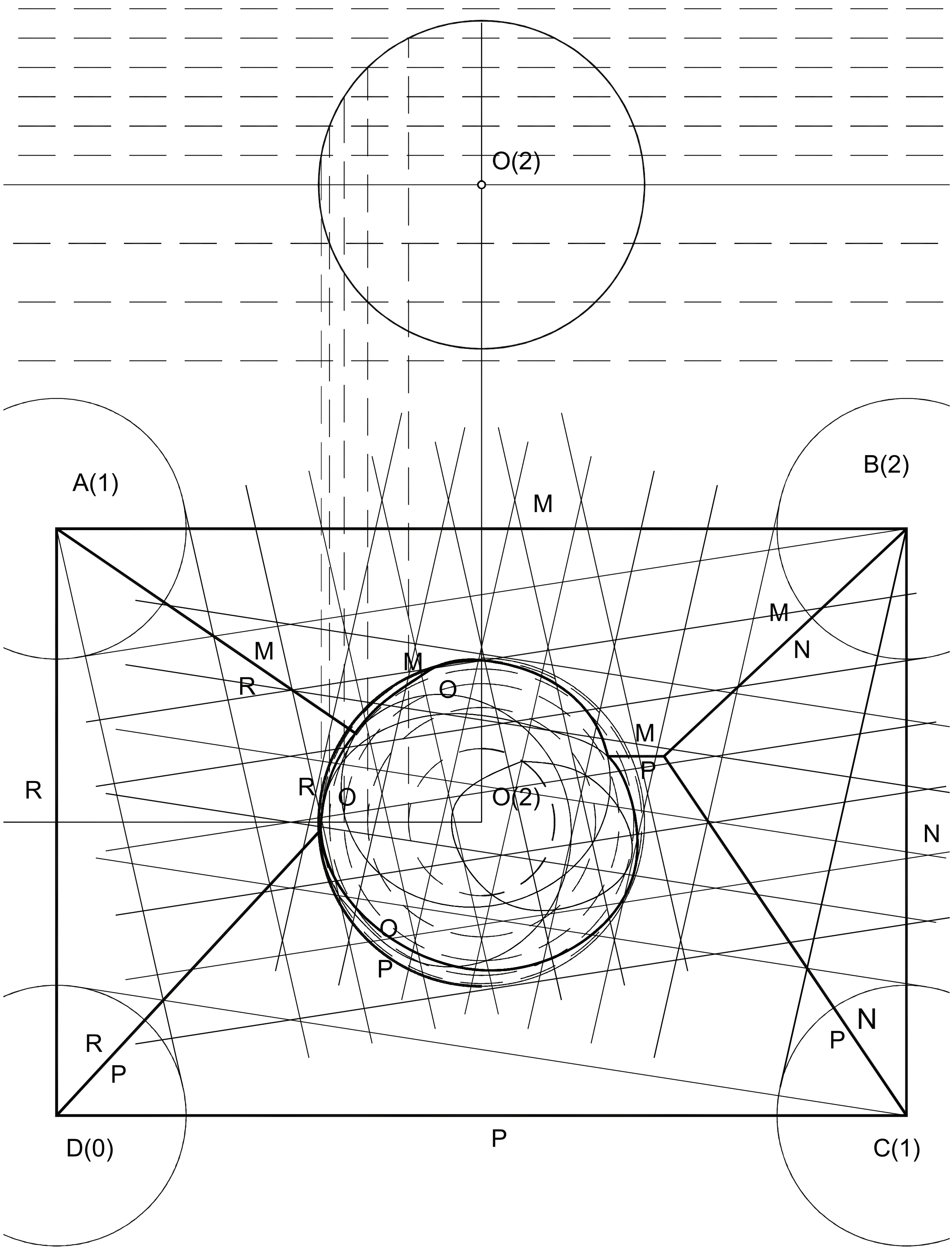
En el caso de la parte poligonal se obtendrán en primer lugar las líneas de nivel, como se ha realizado en ejercicios anteriores, ejercicios 5, 6 y 29.

La unión de las intersecciones de las líneas de nivel de la parte poligonal con las curvas de nivel o, circunferencias de la cúpula, de igual cota resultará ser la solución.

Se tendrán en cuenta las partes vistas y ocultas.



EJERCICIO 34



EJERCICIO 35

Determinar la solución de la cubierta que consta de una cúpula y aleros no horizontales y pendientes distintas, de valores p_1=3/4 y p_2=1/2 según se indican en el gráfico. La cota del centro de la cúpula es de 5 metros.

Determinar la verdadera magnitud del faldón en AD.

Esta cubierta tiene la misma resolución que la del ejercicio 34,se tendrán en cuenta las partes vistas y ocultas. Si el centro de la cúpula se encuentra a 5m, todas las intersecciones producidas por líneas de nivel de la parte poligonal con la cúpula, por debajo de la cota 5 serán de trazo discontinuo.

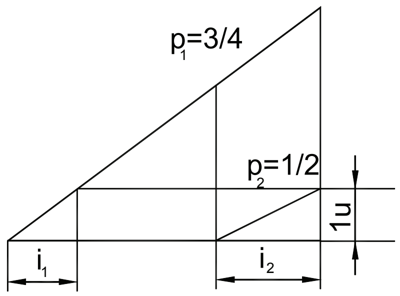
Como se ha visto en ejercicios anteriores, para obtener la verdadera magnitud del faldón solicitado, es necesario abatirlo. En este caso, los puntos A y D no se encuentran a la misma altura con lo que no se puede tomar este alero como charnela para el abatimiento.

Deberá tomarse una horizontal como charnela, en este caso se tomará la horizontal de cota 2 para mayor comodidad, ya que de este modo se tiene un punto del abatimiento directamente y al mismo tiempo, entrará mejor en el dibujo.

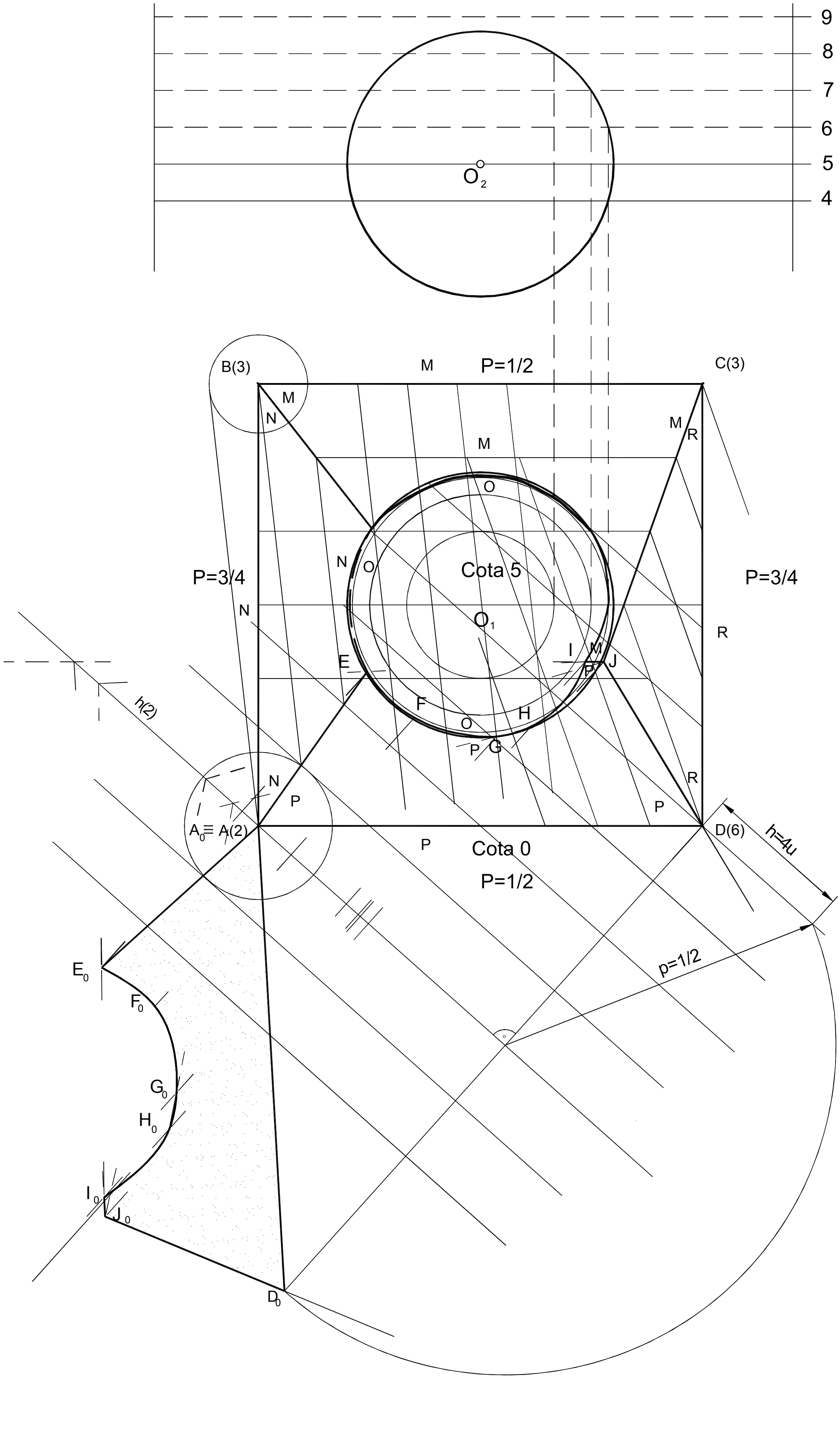
Hay que tener en cuenta a la hora de abatir otros puntos, que la charnela se encuentra a cota 2, con lo que las alturas se tomarán respecto a dicha cota.

Se abate el punto D(6) trazando perpendicular y paralela a la charnela por el mismo punto D, y sobre la paralela se llevan 4 unidades, que es la diferencia de cotas entre el punto D de cota 6 y la charnela que se encuentra a cota 2.

Una vez obtenido el punto abatido D_0 se obtienen el resto por afinidad.



EJERCICIO 35



EJERCICIO 36

Obtener la proyección acotada de la cubierta de planta rectangular, con patios interiores circulares, V y W, siendo los faldones con pendiente de 75º para los patios y de 60º para los exteriores.

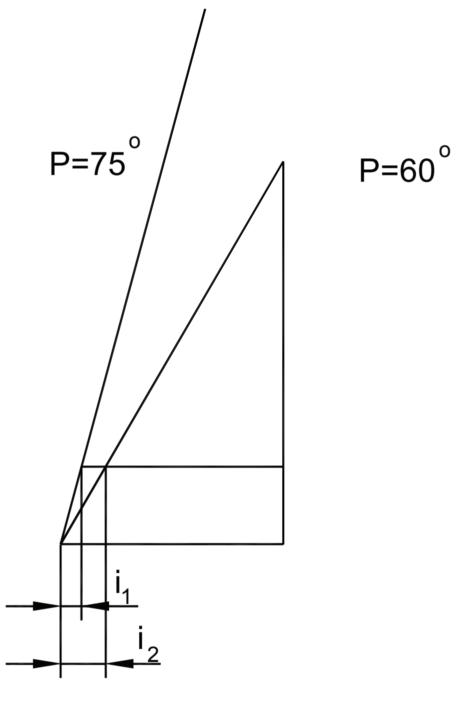
Las cotas son:

- Para el patio V, cota 2.
- Para el patio W, y para los exteriores, cota 0.

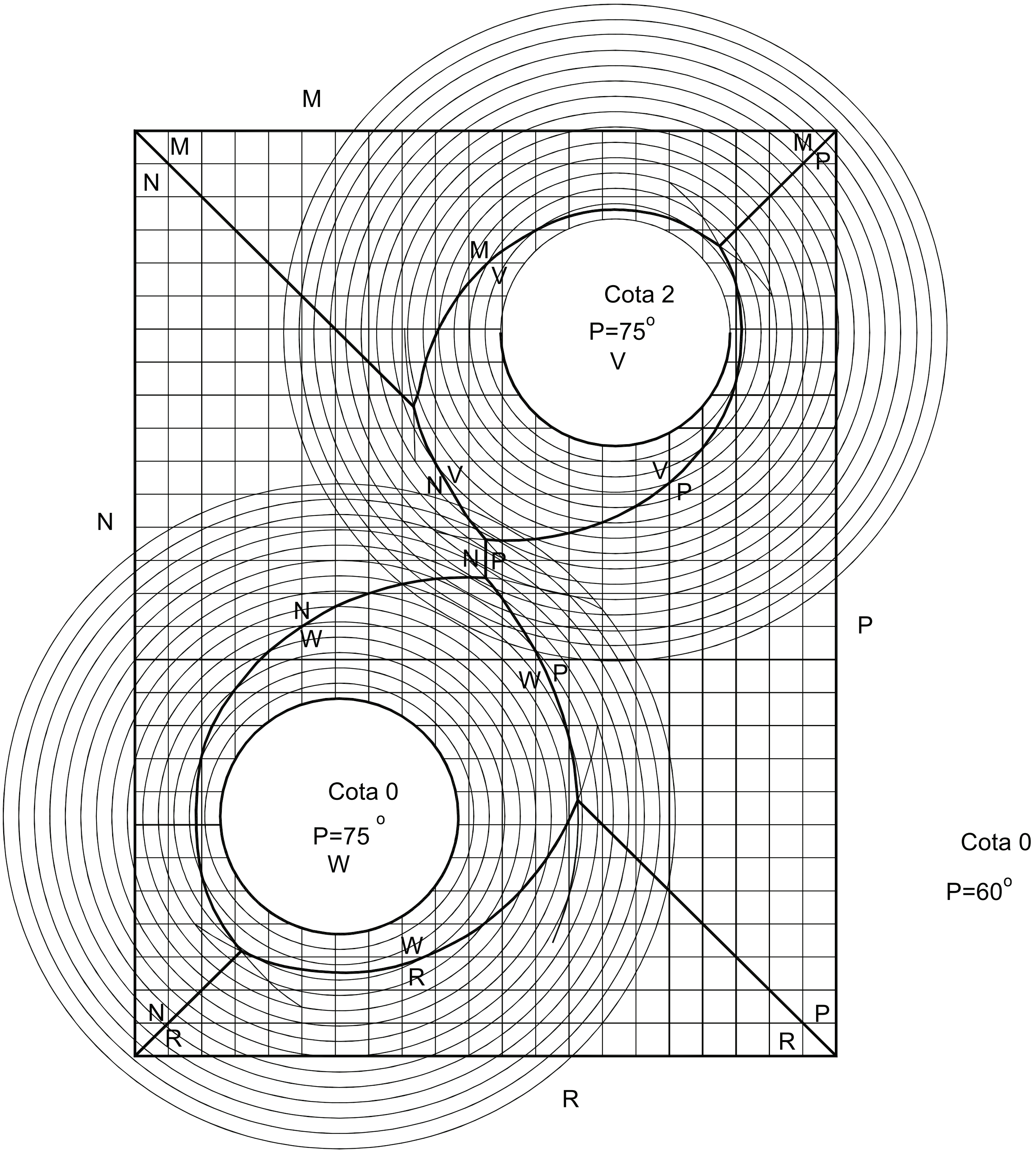
Se determinarán los intervalos :

$$i_1 = \frac{1}{tg75^\circ} = 0.26 \qquad\qquad i_2 = \frac{1}{tg60^\circ} = 0.57$$

Se trazan las líneas de nivel de los patios y exteriores, una vez obtenidas, la unión de los puntos de intersección de las líneas de nivel de igual cota, determinará la solución.



EJERCICIO 36



EJERCICIO 37

Una forma elíptica de cota 0, que tiene por ejes AB y CD, revoluciona sobre el eje CD, formando un elipsoide. Si se considera el semi-elipsoide como una cúpula de espesor despreciable y se practica una abertura semi-cilíndrica:

a) Determinar dicha abertura.

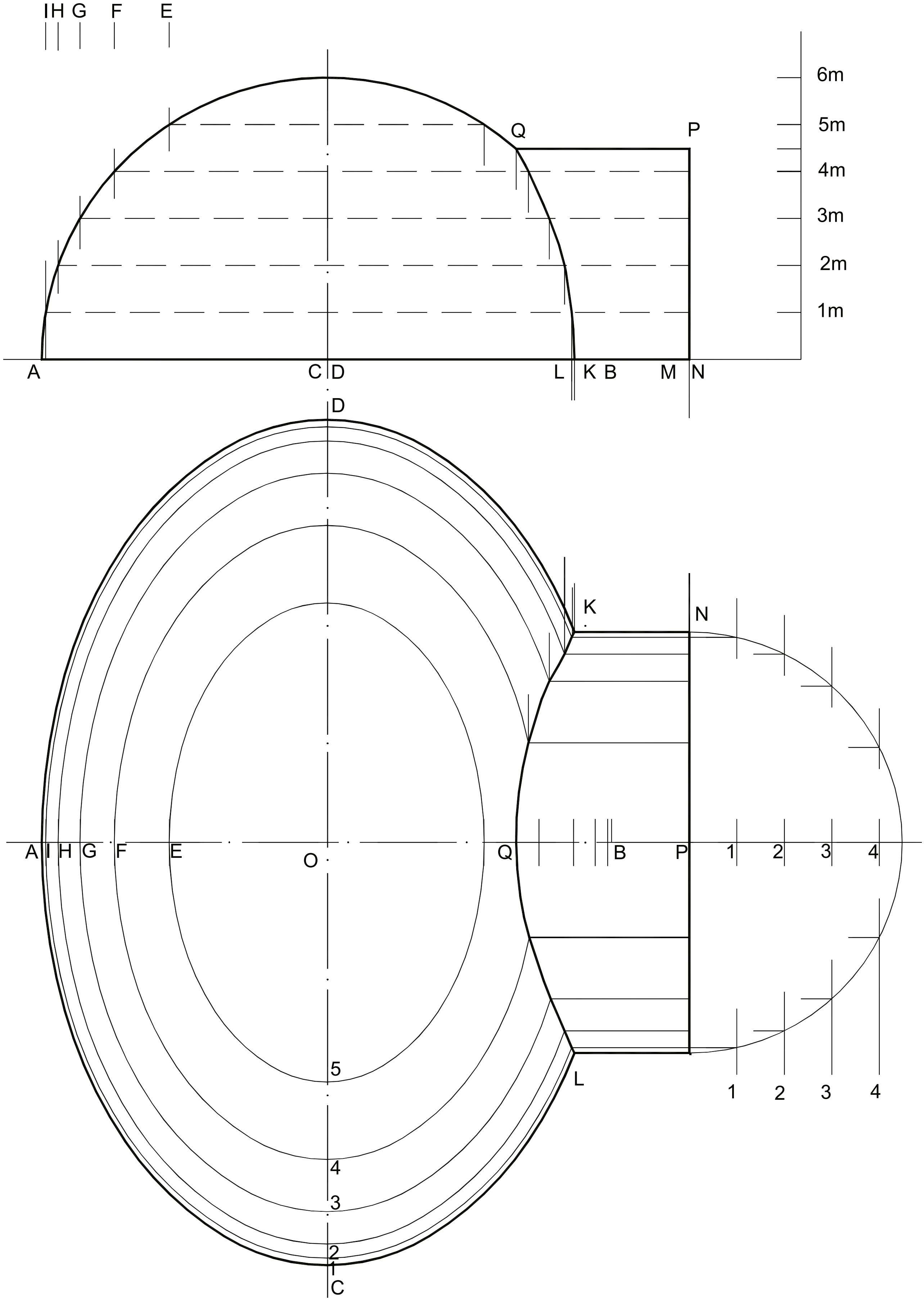
b) Dibujar el alzado del conjunto obtenido.

Se determinan las líneas de nivel de la cúpula, que serán elipses homotéticas, concéntricas y producidas por planos horizontales y a distintas cotas. Las líneas de nivel del semi-cilindro se obtienen abatiendo la sección recta (semicircunferencia) sobre la planta.

La intersección entre las superficies se obtiene mediante la intersección de las líneas de nivel de ambas superficies y con igual cota.

Para hallar el alzado, se tendrá que proyectar la intersección LQK mediante las líneas de nivel del semicilindro y cúpula.

EJERCICIO 37



EJERCICIO 38

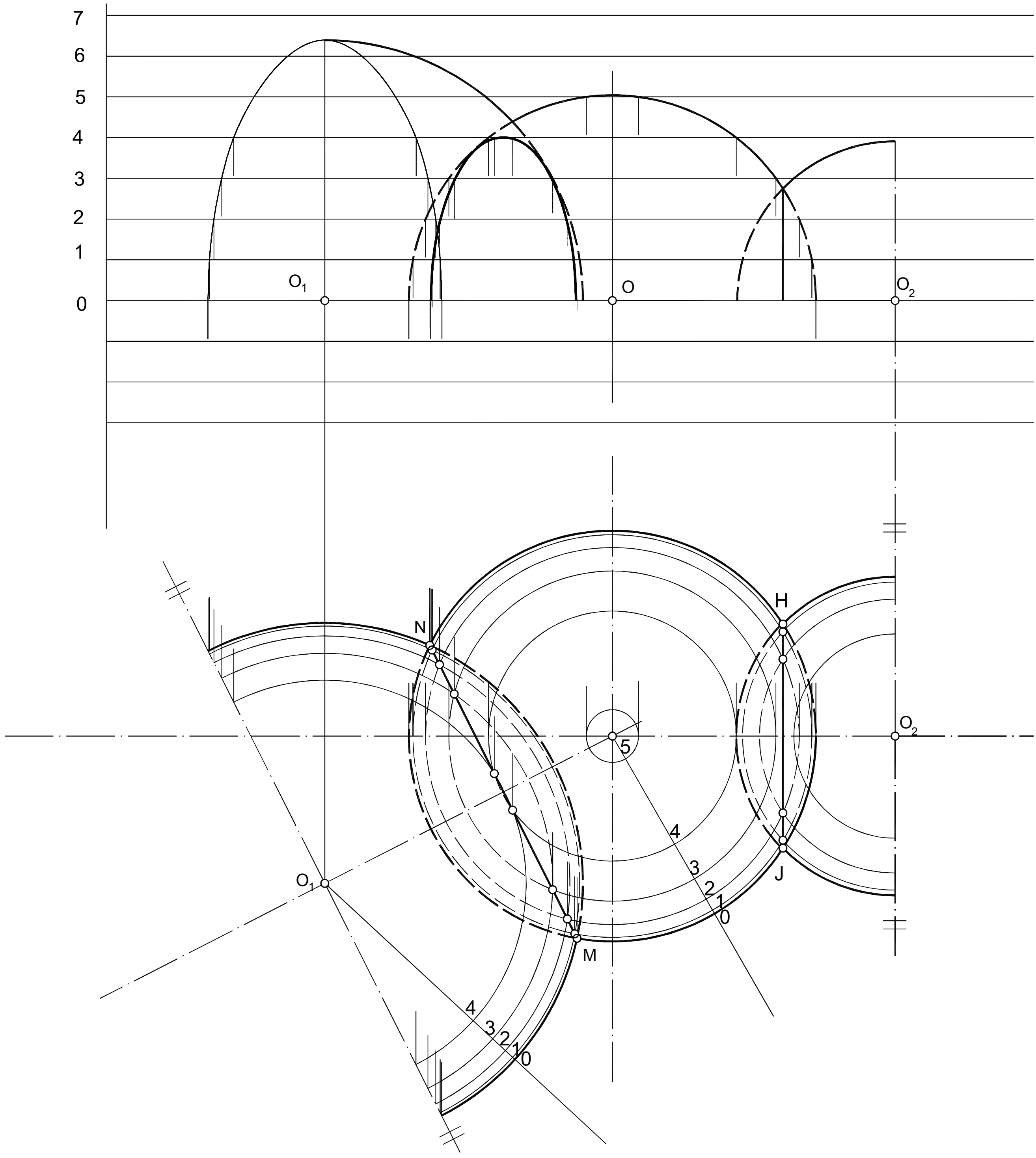
Determinar las intersecciones entre tres cúpulas semiesféricas con los centros situados a cota 0. Obtener un alzado del conjunto.

La intersección entre cúpulas semiesféricas es una semicircunferencia cuyo plano es perpendicular a la línea que une sus centros. Por estar los centros situados a cota cero, la línea que los une es horizontal por lo que la semicircunferencia intersección de las cúpulas se encontrará en un plano proyectante.

La cúpula central se corta con las otras dos según semicircunferencias de diámetros MN y HJ.

Como comprobación de dichas circunferencias se han obtenido puntos de ellas mediante las intersecciones de secciones horizontales de igual cota, obtenidas en cada una de las cúpulas. Los puntos indicados nos permiten la definición de estos elementos en el alzado.

EJERCICIO 38



Cota 0

EJERCICIO 39

Los vértices del cuadrado ABCD son los puntos de apoyo de una bóveda laminar esférica de centro O(-2,72), limitada por los planos de las caras de la pirámide de vértice V(-4,55) y las aristas en dirección a los vértices del cuadrado ABCD.

Se pide, dibujar las líneas de nivel así como el alzado del resultado.

Se trazan los planos paralelos 1, 2, 3, 4, seccionando a la esfera para obtener las curvas de nivel. Al conjunto se le secciona con el plano vertical α, obteniendo al abatirlo las secciones ω_0 y r_0. (ω_0 intersección del plano α y la esfera; r_0 intersección del plano α y la cara V_1DC).

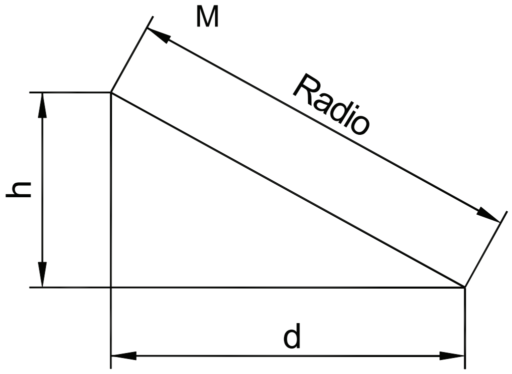
El plano horizontal de cota 2, corta a ω_0 en H_2 y determina el radio, OH de la circunferencia de cota 2.

Lo mismo para los perfiles que se proyectan igualmente con centro 0_2 y radio el resultante.

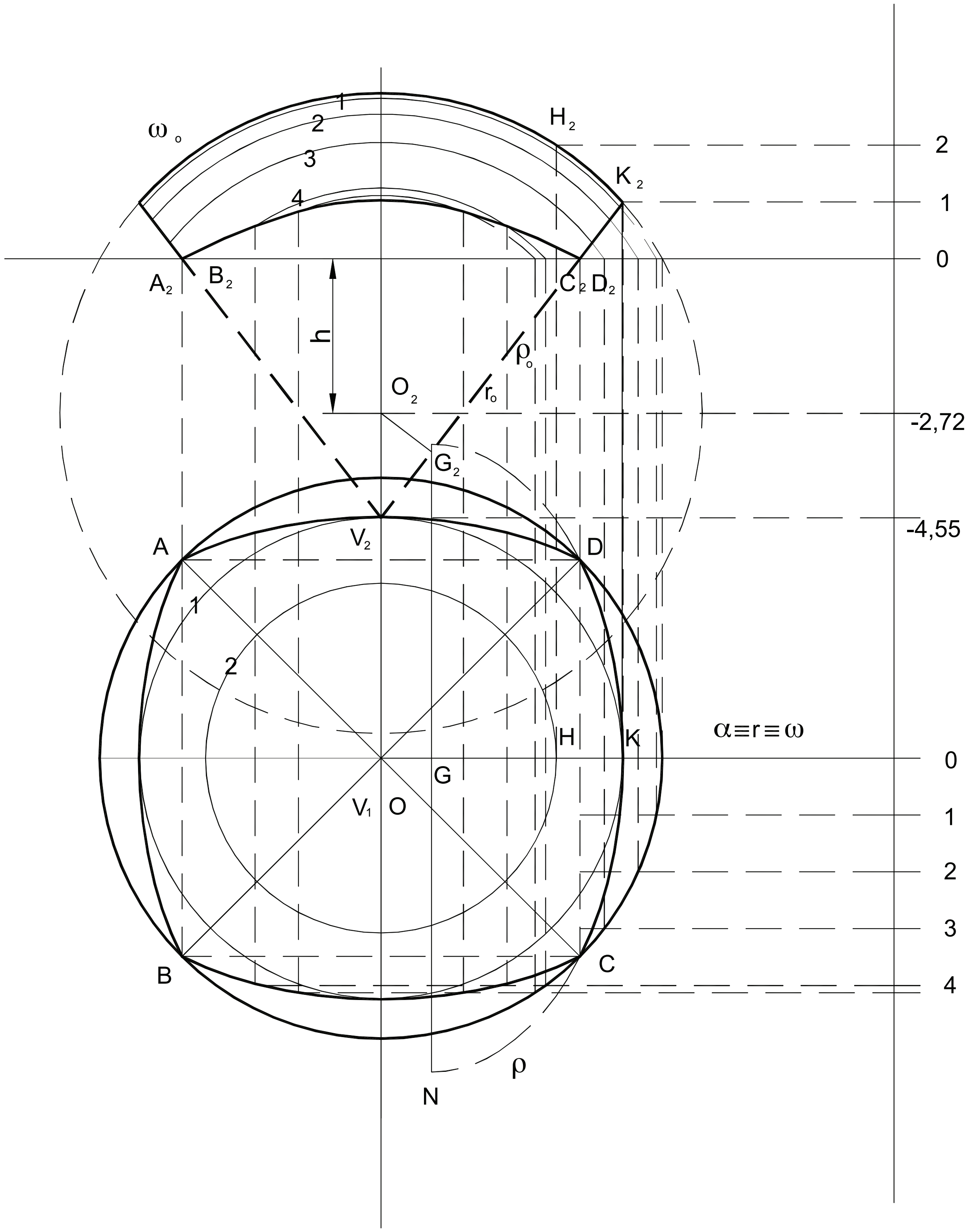
La sección ρ de la esfera por el plano V_1DC es el circulo de proyección $\rho_0=r_0$, centro G_2 y radio G_2K_2, siendo G_2 el pie de la normal a r_0 trazada por O_2 y K_2 intersección de ω_0 y r_0.

La proyección horizontal de CKD por pertenecer a ρ, es un arco de elipse de semiejes GN y GK siendo $GN=G_2K_2$.

El resto del ejercicio se resuelve por simetría.



EJERCICIO 39



EJERCICIO 40

Se conocen los vértices de las torres cónicas de una iglesia, que son los puntos A(5,5), B(5) y C(4,5).

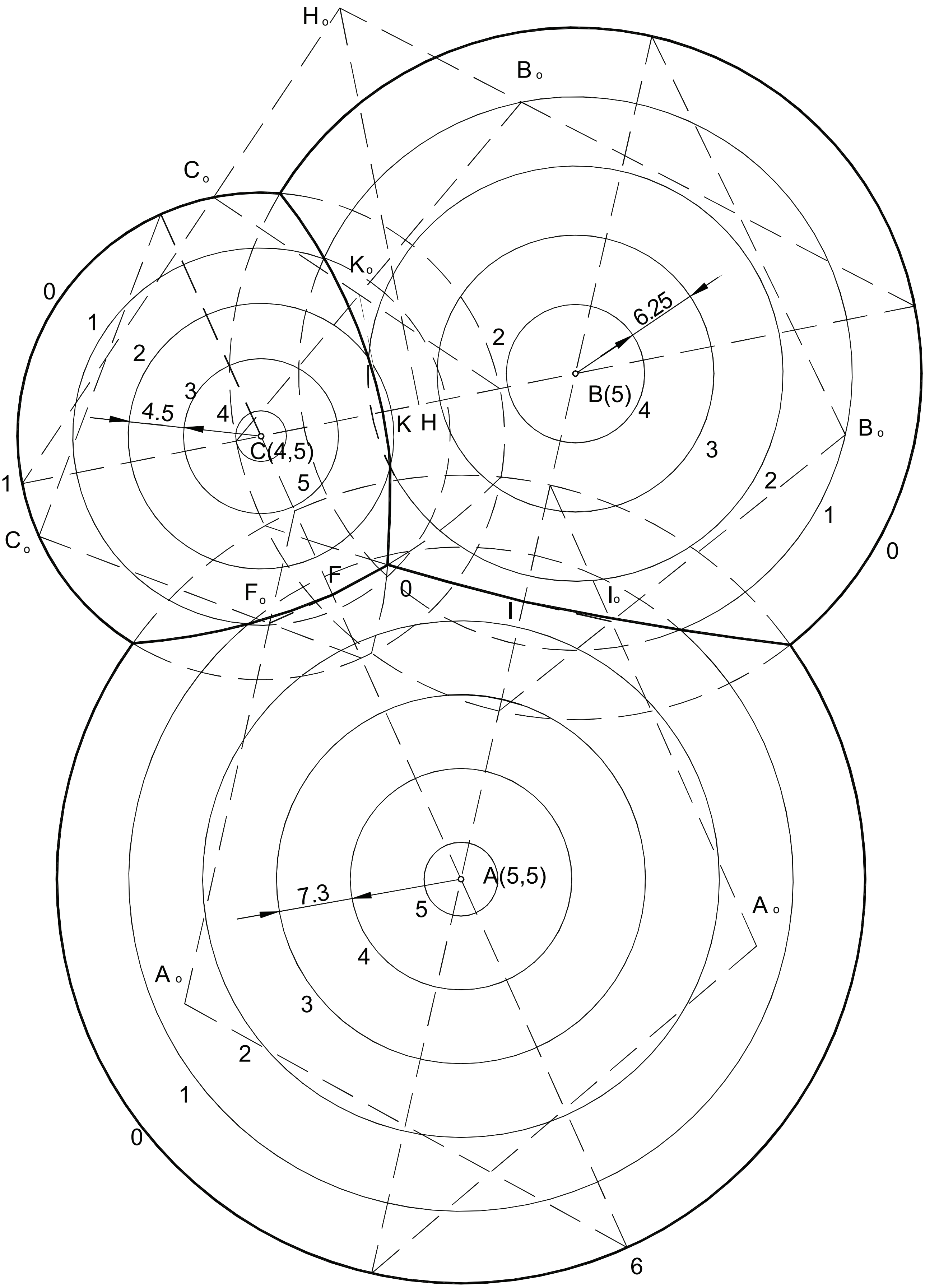
Las pendientes son: p_A=3/4, p_B=4/5, p_C=1. Determinar las intersecciones de las torres.

En principio, teniendo en cuenta las cotas de los vértices y la pendiente, se pueden calcular los radios de las horizontales circulares, de cota cero de los conos:

$$R_A = 5.5\frac{4}{3} = 7.3; \qquad R_B = 5\frac{5}{4} = 6.25; \qquad R_C = 4.5 \times 1 = 4.5$$

Si seguidamente se obtienen las curvas de nivel de cota entera de los conos, la unión de las intersecciones de las de igual cota será la solución, siendo estas curvas obtenidas, alabeadas.

EJERCICIO 40



EJERCICIO 41

Hallar el alzado del ejercicio anterior.

Se determina el alzado de los conos de los que conocemos los vértices y las horizontales circulares de base cero, así como sus respectivas pendientes. Las líneas alabeadas de intersección entre ellos, se obtendrán en el alzado al unir los puntos que se obtienen al elevar sus proyecciones al plano de cota que se corresponde con las horizontales circulares que los producen.

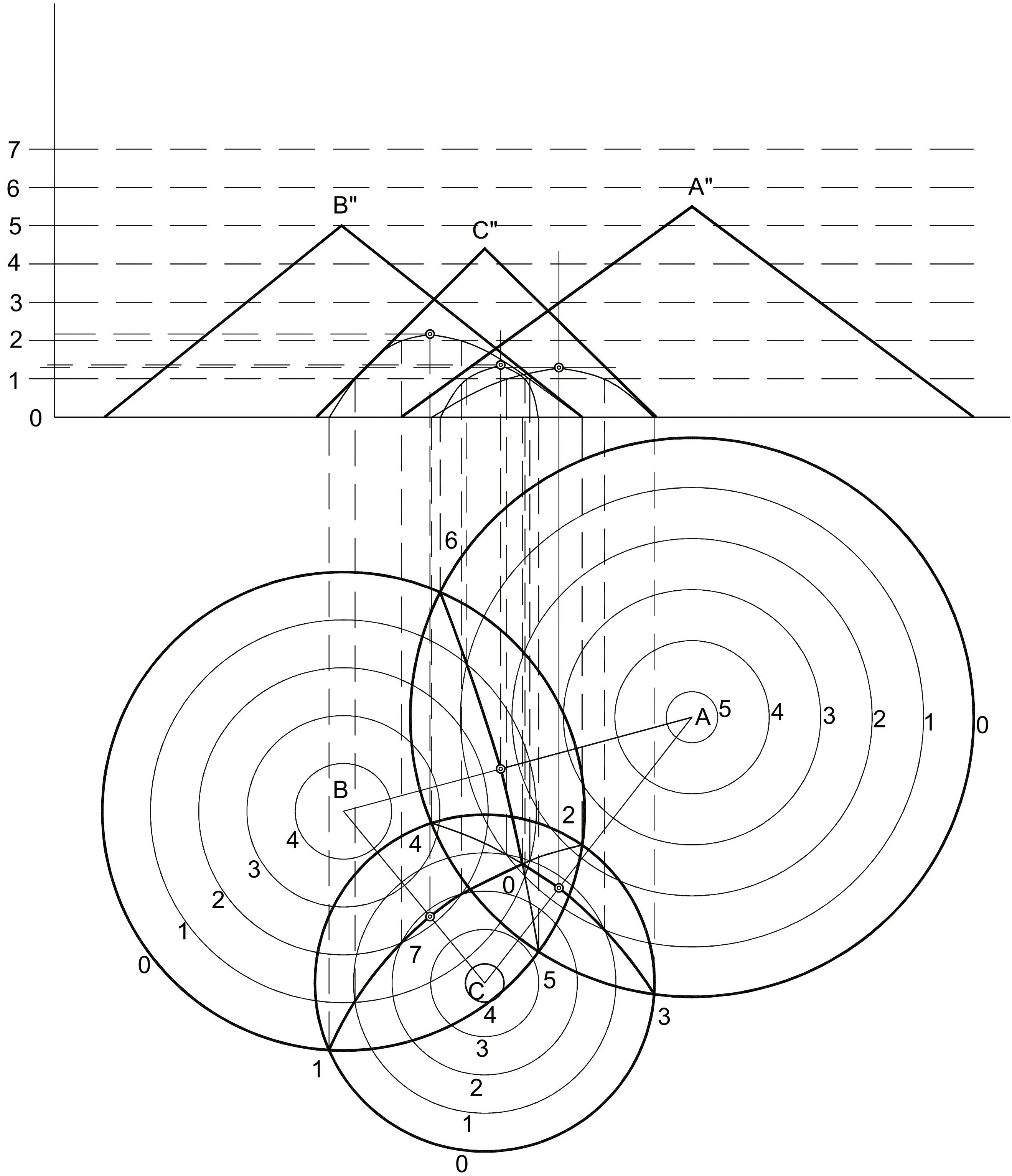
El punto mas elevado de cada una de las curvas de intersección se corresponde con el que en proyección es punto medio entre los extremos de la curva. Su posición coincidirá con el punto donde la curva es cortada por la unión de los vértices de los conos.

Así la unión de A con B corta a la curva de extremos 5 y 6 en el punto P, cuya cota se ha calculado en (1.5).

En el alzado el punto se situará sobre el plano de dicha cota.

En la figura se ha prescindido de la estimación de partes vistas y ocultas, y se ha variado la escala con respecto al ejercicio anterior.

EJERCICIO 41



EJERCICIO 42

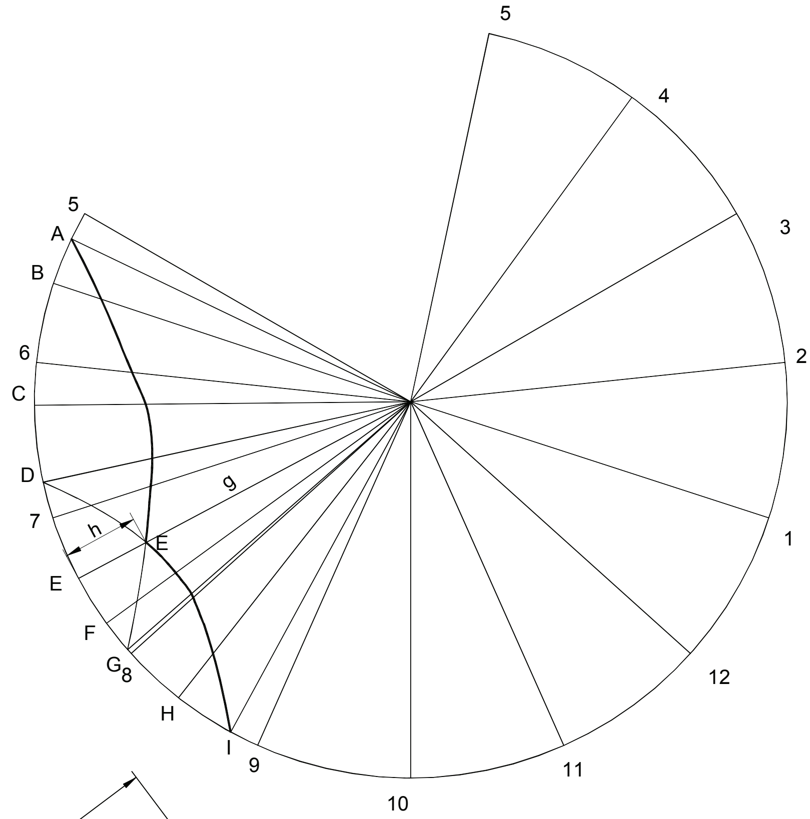
Determinar del ejercicio 40, el faldón cónico de vértice A en verdadera magnitud, con sus intersecciones con los otros dos conos.

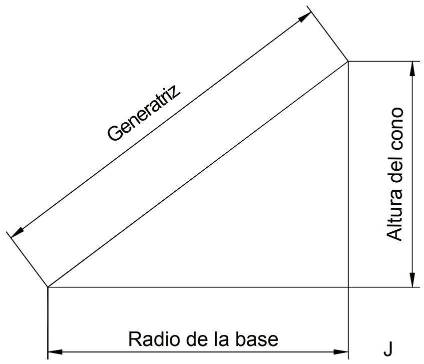
El desarrollo del faldón cónico se corresponderá con un sector circular de radio la generatriz del cono y ángulo en el vértice de valor 360º r/g (r=radio de la base, g=generatriz del cono).

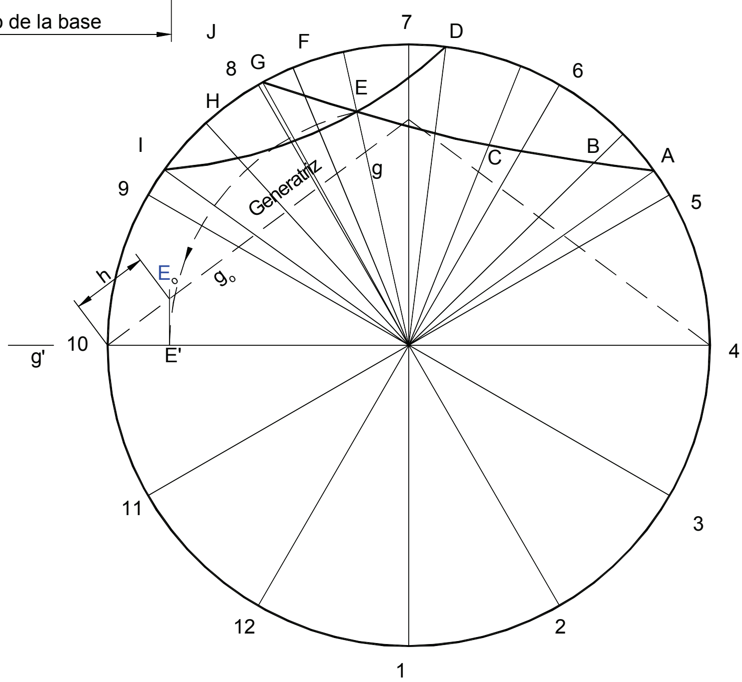
El área del faldón será la mitad del producto de la longitud de la generatriz por la de la circunferencia de la base, es decir $g\pi r^2 / 2$.

Para incluir en el desarrollo la intersección del cono desarrollado con los otros dos, se tomará un mínimo suficiente de generatrices que contengan puntos de las curvas de intersección. Con todos los puntos considerados se procederá como en el caso del punto E. El punto E, que es el de corte de las dos intersecciones se gira alrededor del eje del cono hasta situarlo en la posición E´, pasando su generatriz g a la posición g´. En esta posición y sobre la generatriz abatida g_0 se determina la distancia -h- del punto E al extremo en la base de su generatriz. La distancia obtenida se traslada sobre la generatriz -g- en el desarrollo, obteniendo en él la posición de E.

EJERCICIO 42







EJERCICIO 43

Dado un paraboloide de base elíptica cuyo vértice es el punto A y el eje la recta AG, siendo A(0) y G(5.25). Contiene al punto P(0) y es simétrico respecto al plano horizontal de proyección.

El paraboloide se limita por un plano α que pasa por el punto G(5.25).

Dibujar la intersección con el plano α y las curvas de nivel.

Se dibuja la parábola λ , que es la proyección horizontal del paraboloide, con los datos del vértice A(0), eje AG y un punto P(0).

Para hallar la intersección con el plano *a, se hallar*án las curvas de nivel del paraboloide y las del plano α.

Las curvas de nivel de la parábola son paralelas por traslación en la dirección AG.

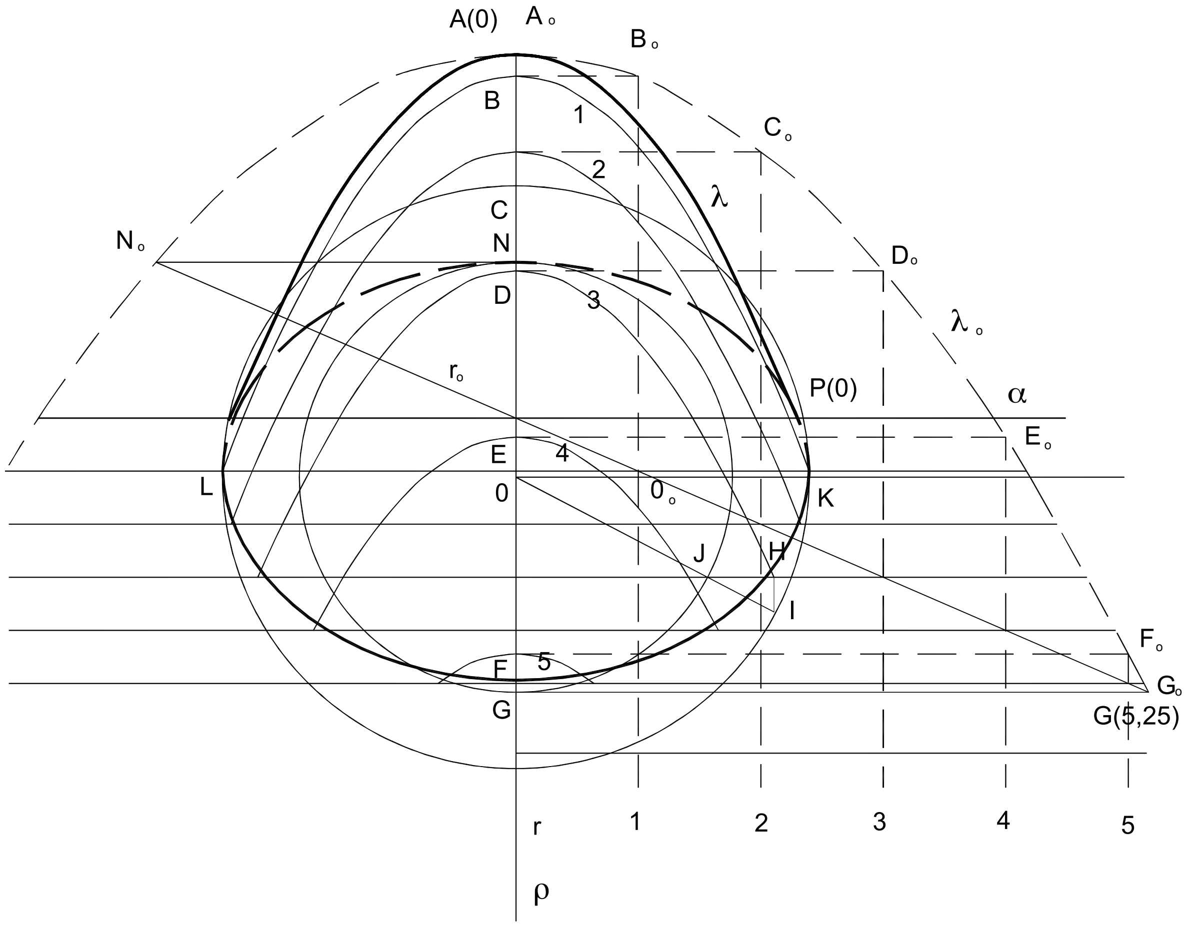
Para hallarlas se utiliza un plano vertical de traza AG, que pasa por G y corta al paraboloide según la parábola abatida $?_0$, y al plano α según una recta de máxima pendiente.

Se trazan planos horizontales de cota 1, 2, 3,..... que cortarán a la parábola λ_0 en A_0, B_0 ,....., que darán lugar a A, B,....., vértices de las curvas de nivel que también serán parabólicas.

Las líneas de nivel del plano son paralelas a la traza α, y se obtienen mediante la intersección de estos planos horizontales de cota 1, 2, 3,...., y la recta de máxima pendiente , a partir de esta intersección se trazan las líneas de nivel paralelas.

Para hallar la intersección, que resulta ser una elipse, se hallará el eje mayor, para lo cual se traza una circunferencia de centro O y radio OG, también la recta HJ perpendicular al eje menor NG por H, y otra paralela al eje menor HI. Uniendo el centro O con J (intersección de la circunferencia y HJ), alargando OJ cortará a HI en el punto I, con centro en O y radio OI, se traza la circunferencia, que corta a la perpendicular a NG por O, en los puntos K y L, extremos del eje mayor.

EJERCICIO 43



EJERCICIO 44

La planta de una torre de capilla, arranca de la forma estrellada de cota 0; el cuadrado interior teórico, tiene cota 5, estando el punto mas alto de la torre a 10m. Los faldones de la forma estrellada interseccionan con los de la forma cuadrada interior. Las pendientes que arrancan de la estrella son inicialmente de 60º para finalizar con pendiente de 30º, según se aprecia en la figura.

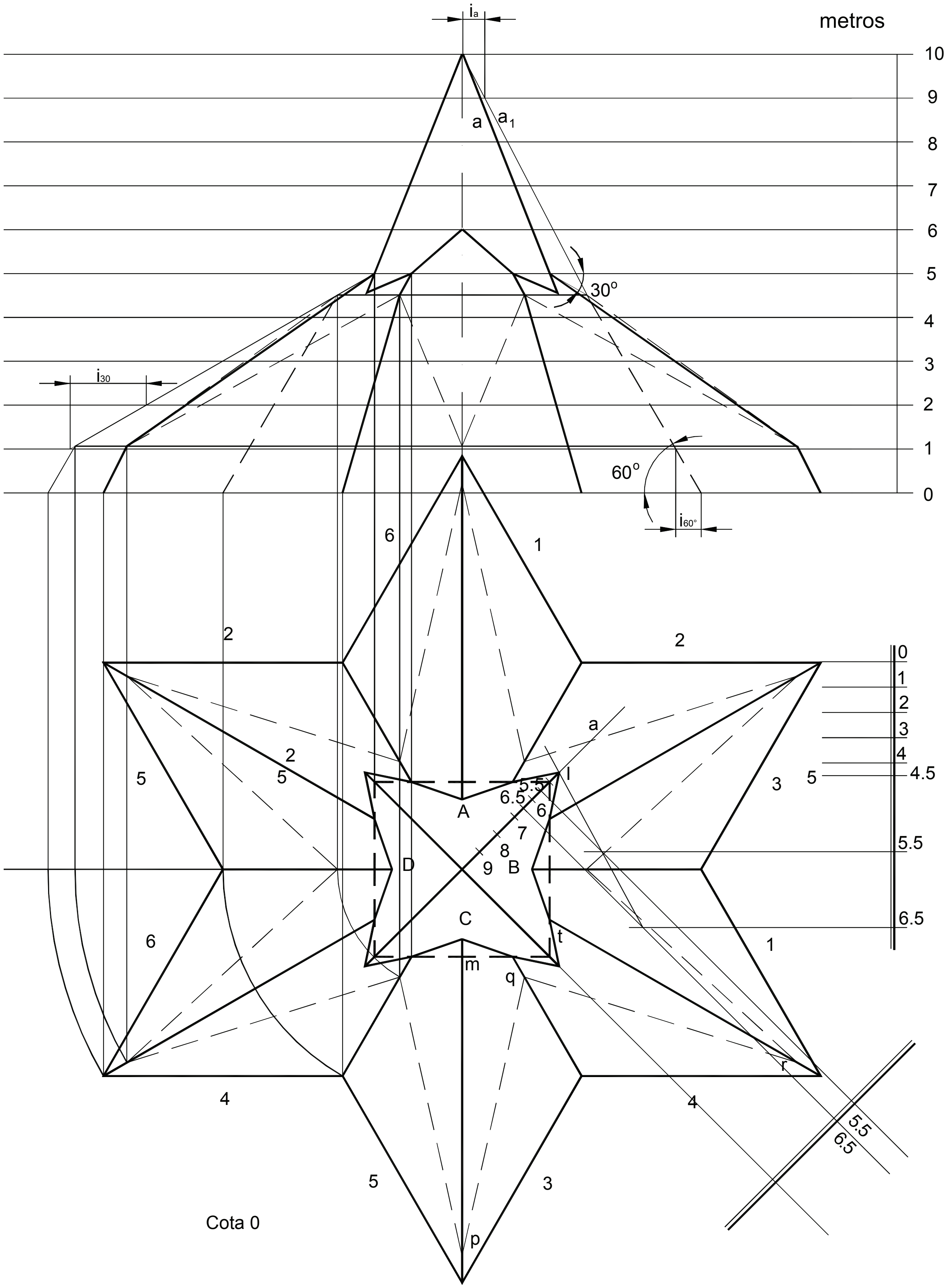
Por tener los faldones de cada una de las plantas (estrellada y cuadrada) pendientes iguales, se trazarán las bisectrices de los ángulos que se corresponden con las respectivas intersecciones de faldones.

Se determinarán los valores de los intervalos según las pendientes (i_{30}, i_{60}, i_a). Con el valor de i_a se gradúa la arista -a- de la torre de base cuadrada; del faldón -2- que tiene dos pendientes, 60º hasta los 4.5 m para finalizar con 30º, se obtiene una de sus líneas de máxima pendiente con la graduación correspondiente. Por la arista -a- se hace pasar un plano *auxiliar ß, para poder determinar su punto de intersecci*ón I con el faldón -2-.

De la misma forma se procede para determinar los puntos de intersección de las aristas de la parte estrellada con las caras de la torre cuadrada. El resto por simetría.

El alzado se obtendrá levantando los puntos de las bases y los de intersección obtenidos. También se pueden obtener resultados en el alzado para trasladarlos a la planta, en la figura se han convertido en frontales las aristas lo que facilita la resolución y obtención de datos.

EJERCICIO 44



EJERCICIO 45

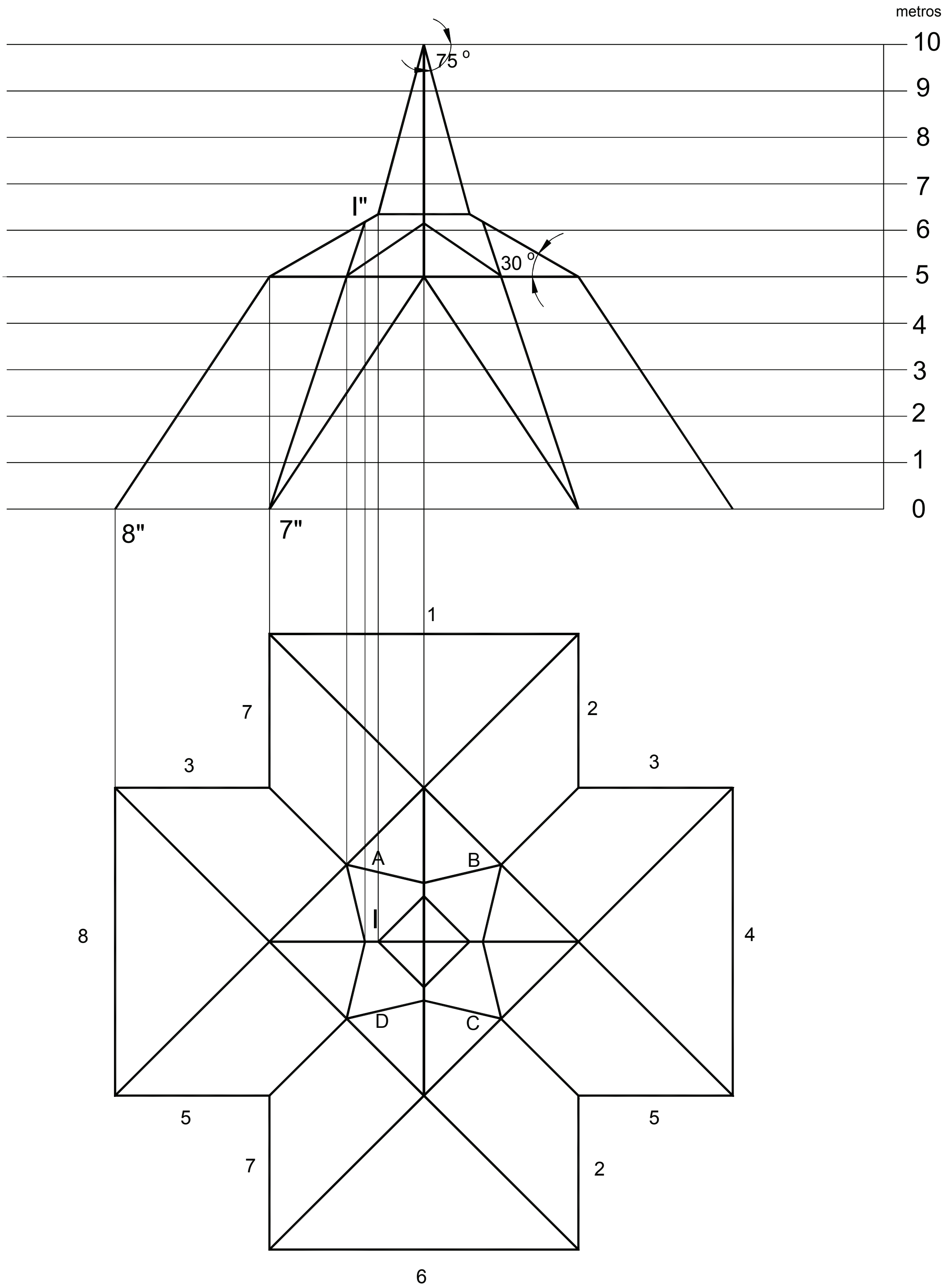
Resolver una torre que arranca con planta en cruz de cota 0 hasta la cota 5, de aquí la torre continúa con planta cuadrada, girada 90º con respecto a la cruz, y se eleva con pendiente de 30º hasta una cota tal que el lado del cuadrado se reduce en un 70%.

De aquí la torre continúa con pendiente de 75º.

Para su resolución se seguirán las pautas establecidas en el ejercicio anterior por ser de similares características.

Se determina así que la altura total de la torre es de 10m.

EJERCICIO 45



EJERCICIO 46

La planta del tejado de un edificio está formada por un octógono y un cuadrado, que serán las bases de las pirámides que constituyen su cubierta, hallar las intersecciones de ambas al tener pendientes del 10% y del 100% respectivamente, situándose sus cotas al mismo nivel.

Representar en planta y alzado el tejado resuelto.

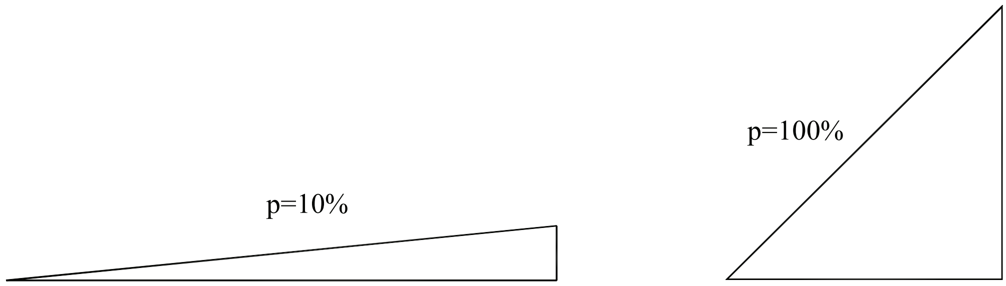
Los puntos V y V´ son los vértices de las pirámides.

Se traza el plano vertical π, que corta a la cara de la pirámide 12V´ según la recta NV´, y a la otra pirámide, según la arista FV. Los abatimientos de estas rectas sobre el plano de cota 0, son: $NV_0´$ de pendiente 100% y FV_0 , siendo la altura de V_0 el 10% de VP.

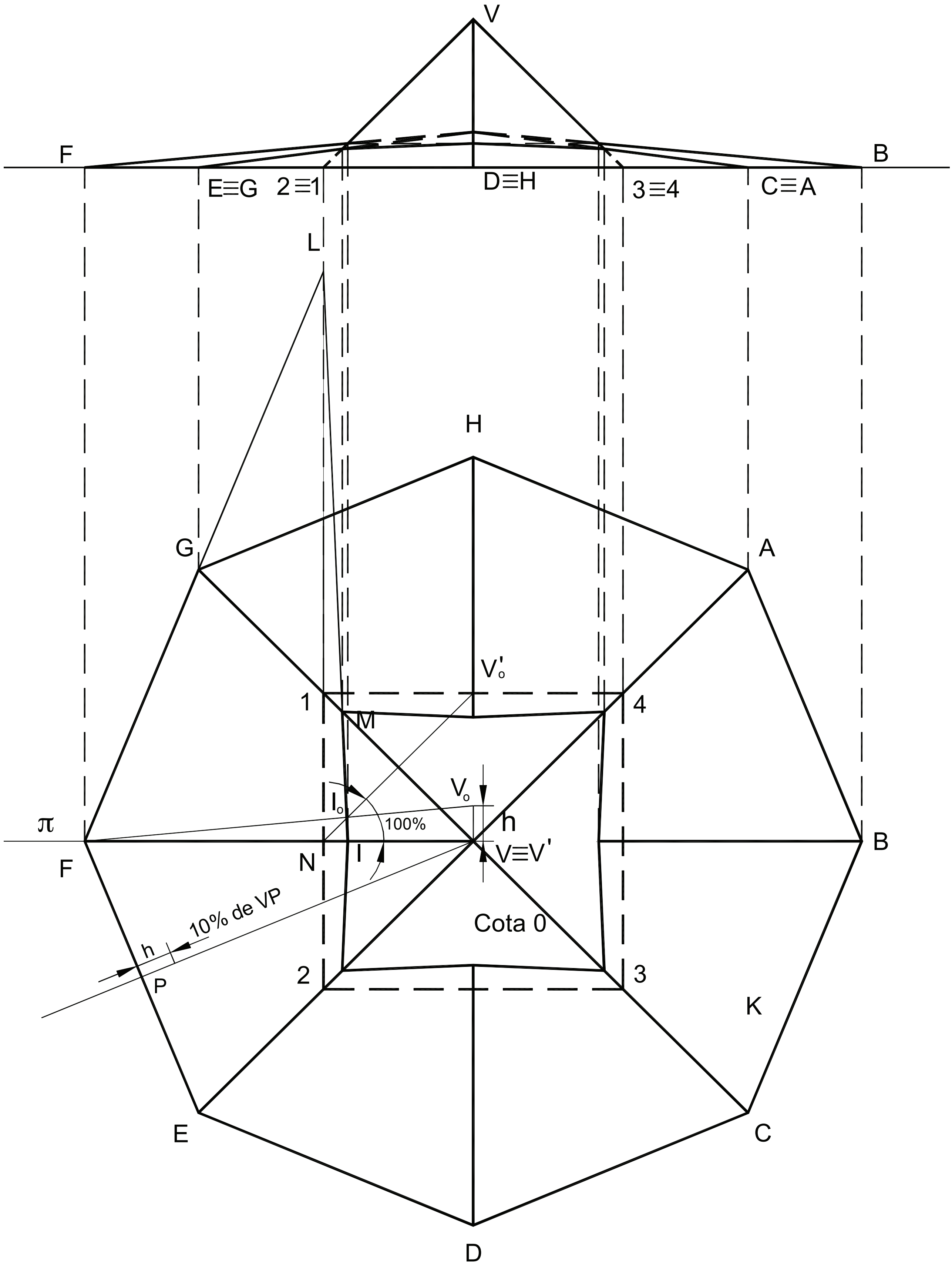
La intersección I_0 de ambas rectas, desabatida en I, determina la intersección de la arista FV con la cara l2V´.

Las prolongaciones de las aristas 12 y FG, se cortan en el punto L, uniendo L con I, se corta a GV´ en el punto M, la recta MI será la intersección entre la cara VFG y la cara V´12.

El resto de la intersección entre ambas pirámides se obtiene por simetría.



EJERCICIO 46



Cota 0

EJERCICIO 47

La planta de la torre de una iglesia, está formada por un hexágono convexo exterior y una poligonal estrellada hexagonal en su interior.

La parte hexagonal convexa se encuentra en cota 3 y la parte estrellada en cota 2.

La cota del pico de la torre para la parte convexa será de 7 metros, y para la parte estrellada de 10 metros.

Calcular las pendientes y elementos de intersección de las caras y aristas de las pirámides que forman la torre de la iglesia.

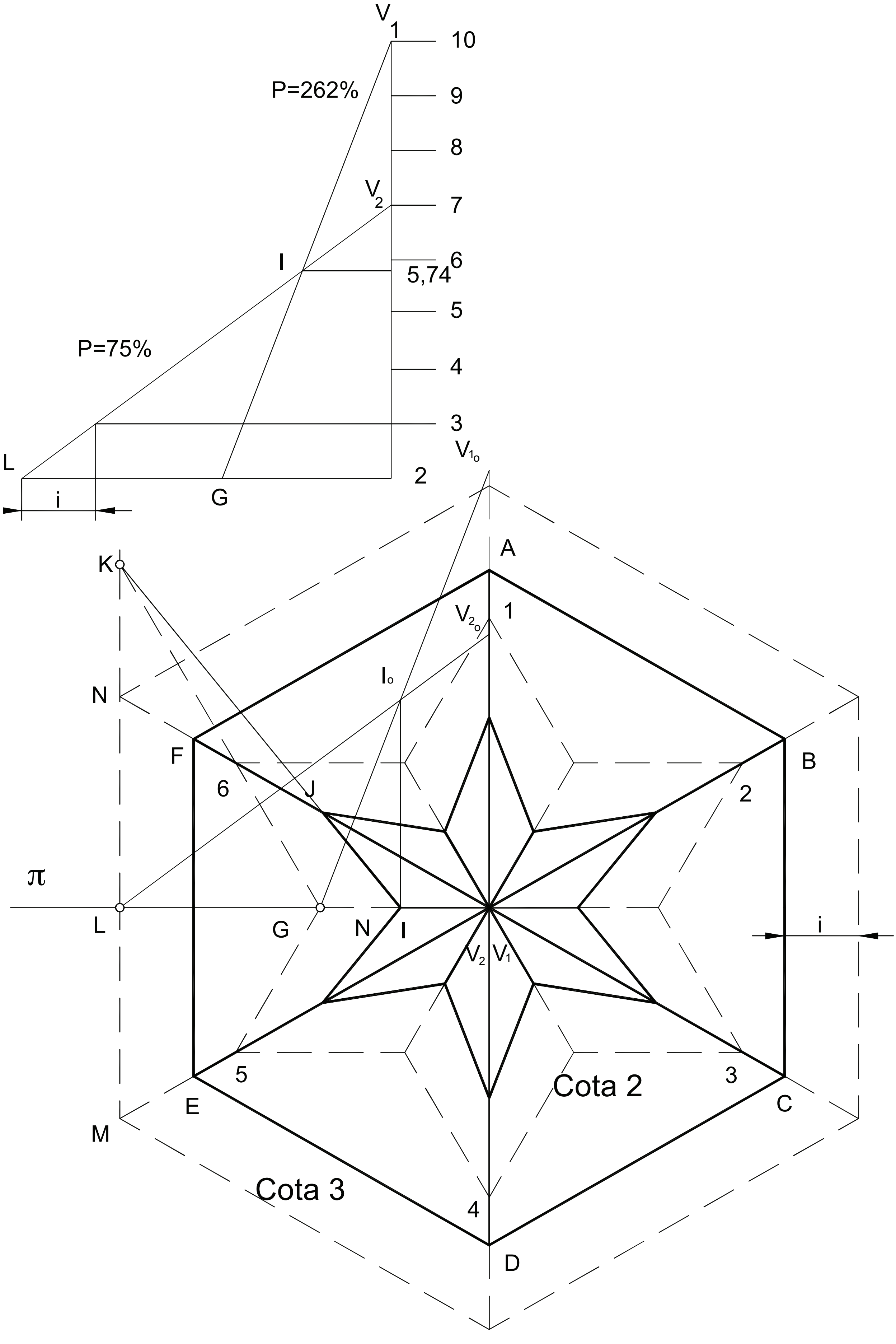
Trácese un plano π que corte a ambas pirámides pasando por los vértices $V_2 \equiv V_1$.

El plano corta a la base hexagonal convexa de cota 2 en el punto L y a la base estrellada de cota 2 en el punto G.

Se abate el plano siendo la recta $L(V_2)_0$ la intersección del plano π con la cara V_2FE, y la recta $G(V_1)_0$ la intersección del plano π con la pirámide de arista V_1G. La intersección de estas dos rectas es el punto I_0 , que al desabatirlo dará el punto I.

Los lados de las bases de cota 2, MN y G6 se cortan en el punto K, punto que se unirá con I, KI corta a FV_2 en el punto J. La intersección de la cara V_2FE con la cara V_1G6 será por tanto la recta IJ, el resto de las intersecciones se obtendrá por simetría.

EJERCICIO 47



EJERCICIO 48

Resolución de la cubierta de planta cuadrada y pendiente p=30%, la cual intersecciona con la cubierta de planta octogonal concéntrica y de p=60%. Los arranques de ambas se encuentran al mismo nivel.

Se determina el alzado de las pirámides teniendo en cuenta que son pirámides rectas y que se conocen las pendientes.

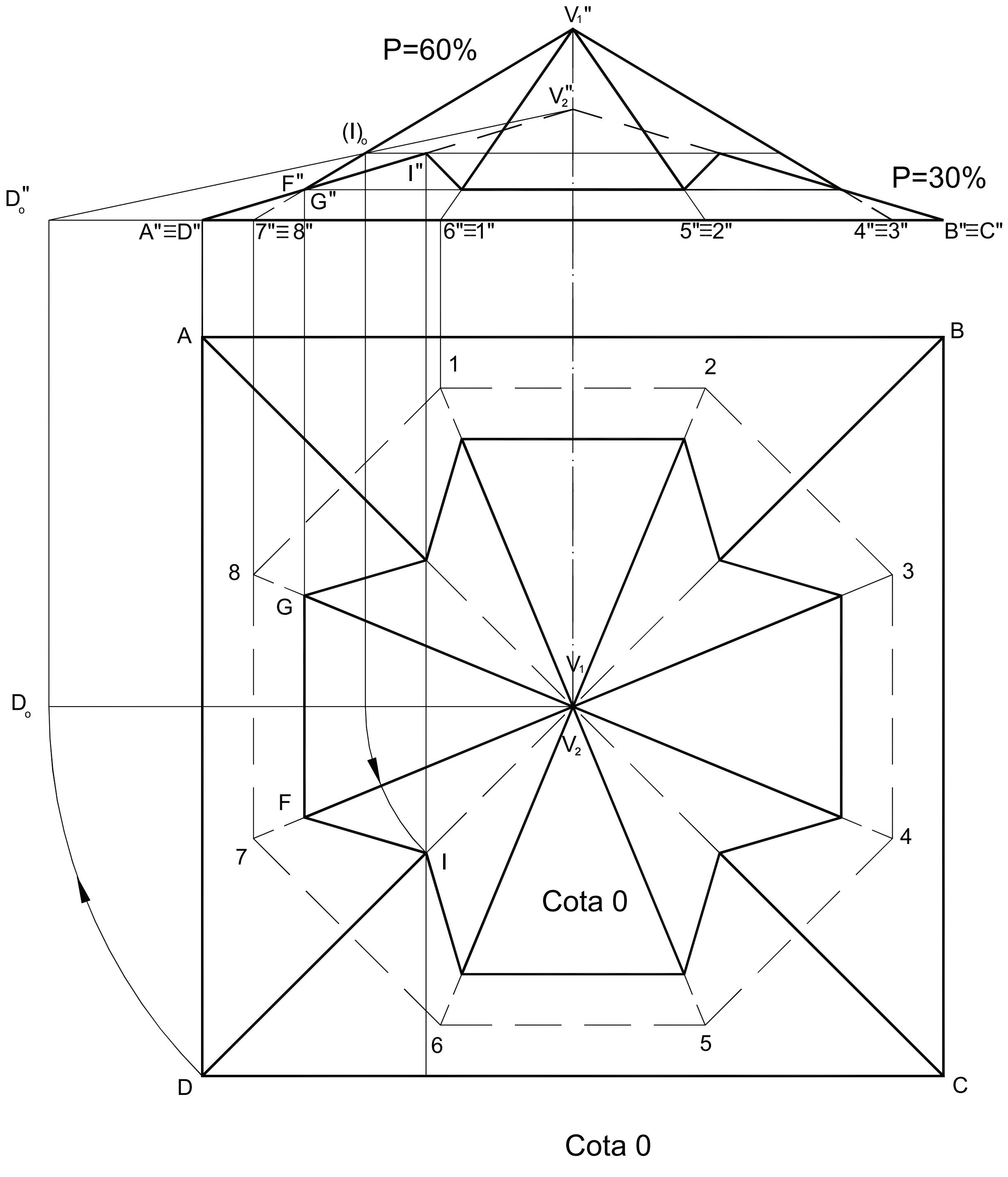
Seguidamente se gira la arista V_2D, hasta la posición V_2D_0. En el alzado se ha obtenido el punto $(I)_0$ de intersección de la arista girada V_2D_0 con la cara $V_1 87$ y deshaciendo el giro se obtiene el punto I y en el alzado el I´´, intersección de la arista V_2D con la cara $76V_1$.

Para determinar este punto en el alzado al deshacer el giro, se sitúa dicho punto en la cara V_2´´7´´6´´ según la recta V_2´´D´´.

La intersección entre las caras. ADV_2 y $87V_1$, se obtiene en el alzado; siendo el corte de las proyecciones D´´A´´V_2´´ y 8´´7´´V_1´´ , la arista F´´G´´ determinada en proyección horizontal será FG.

El resto de la cubierta se resolverá por simetrías.

EJERCICIO 48



EJERCICIOS PROPUESTOS PARA SU RESOLUCIÓN

CONVENCIONES Y NOTACIÓN

En esta selección de ejercicios propuestos, se utilizarán las convenciones que se presentan a continuación:

Unidades de origen y de escala en la representación:

En el caso de que no se haga referencia explícita, las unidades referentes a las magnitudes y/o coordenadas, serán metros, y la escala de representación de 1:100.

El origen de coordenadas se sitúa en la esquina inferior izquierda del recuadro límite del formato A4. Los ejes, tal como muestra la figura, corresponden al eje X, el límite inferior; y al eje Y, el límite izquierdo. El eje Z, corresponde al eje vertical cuyo sentido positivo se situará por encima del plano del dibujo XY.

Notación de los elementos

Los puntos se representan por letras mayúsculas, siendo las mas utilizadas las primeras letras del abecedario, A, B, C,...., y también algunas como P, Q,....

Las coordenadas de los mismos pueden ser expresadas de dos maneras: (Fig.95)

- P(6)(2.5,3), siendo la primera coordenada, la que corresponde a la altimetría del punto, (eje Z), y las dos siguientes corresponden a los ejes X e Y respectivamente, lo que equivale a la notación **P(z)(x,y)**.
- P(6,3,2.5), que corresponde en este caso a la notación **P(z,y,x)**.

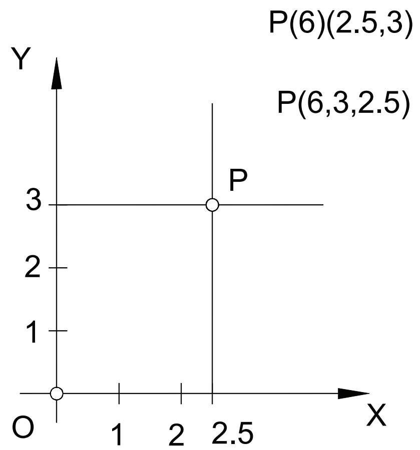


Fig.95

Las rectas se representan con letras minúsculas, siendo las mas utilizadas las letras r, s, t, ... Una recta vendrá definida normalmente por las coordenadas de dos puntos contenidos en ella, de esta manera, una recta s, que pasa por los puntos A y B, vendrá definida de la siguiente manera:

s [A(3)(5,2) – B(2)(3,4)]

Para la representación de los planos se utilizan las letras minúsculas del alfabeto griego, siendo las mas utilizadas $\alpha,\beta,\delta,\sigma,\rho,\varepsilon,\chi$....

Los planos se representan por su línea de máxima pendiente graduada y por la letra correspondiente. Fig.96.

La notación simplificada de un plano sería la siguiente: α(Z,Y,X) que es la forma de expresar el plano que pasa por los puntos: [(0,0,X) - (0,Y,0) - (Z,0,0)].

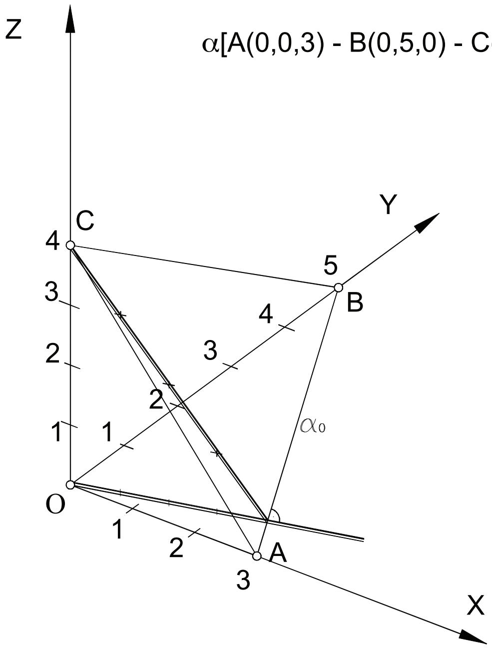


Fig.96

La traza del plano se obtiene al unir los puntos situados en los ejes X e Y cuya cota es 0 y la graduación se realiza trazando una recta perpendicular a dicha traza por el origen y dividiendo el segmento en tantas partes como el valor de la cota del punto en el eje Z. Fig.97.

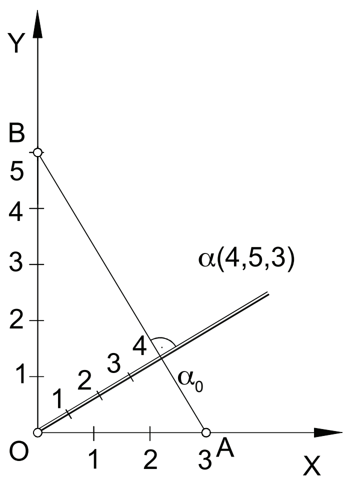


Fig.97

Un caso particular, es el de el plano paralelo a uno de los ejes de coordenadas, en cuyo caso la coordenada correspondiente al eje al cual es paralelo es ∞. En la siguiente figura se muestran los planos $\beta[4, \infty, 3]$ y el a(-4,3, ∞). Fig.98

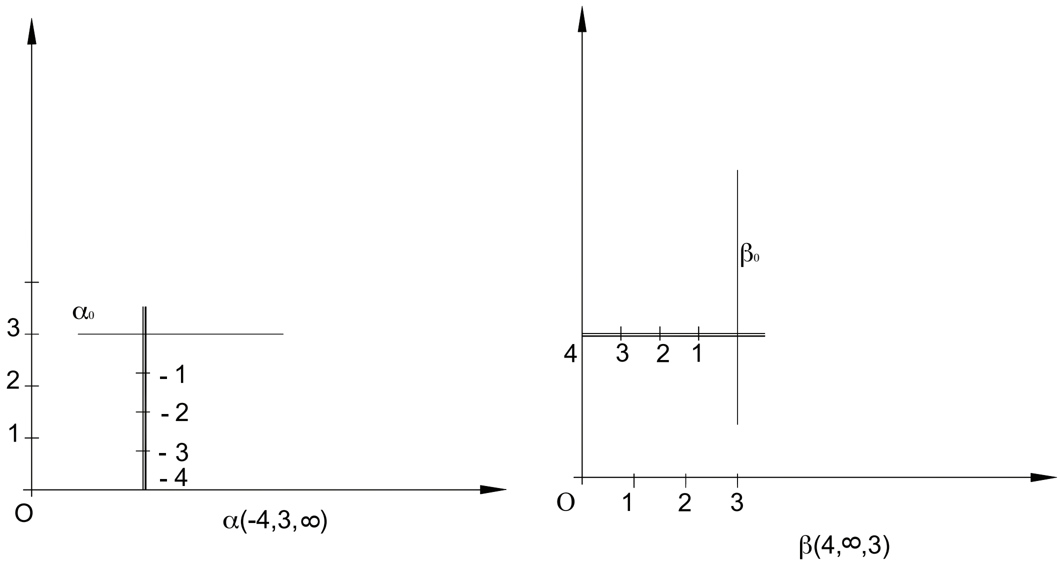


Fig.98

Cuando el elemento se encuentra abatido, se le nombra con su letra correspondiente, acompañada del subíndice -$_0$-, como por ejemplo A_0 , r_0 , σ_0.

Ejercicios Propuestos

1 Determinar las rectas que pasan por el punto A(6)(9,22), se apoyan en la recta r [B(10)(4,6) – C(4)(16,19)] y tienen una pendiente del 25%.

Obtener los puntos acotados de apoyo en la recta dada.

2 Determinar los puntos de incidencia de la recta r [A(5)(2,5) – B(1)(16,19)] con los planos que se cortan en la recta s [C(8)(3,17) – D(1)(15,10)] y tienen pendientes respectivas de 30% y 75%.

3 Se desean unir dos tramos rectos de las tuberías r [A(9)(6,4) – B(15)(18,18)] y s [C(12)(1,18) – D(4)(15,24)] mediante una tubería de longitud mínima.

Hallar su longitud y las cotas de sus extremos en r y s.

4 Conectar el punto A(2)(7,5) con la tubería de eje r[B(2)(8,18) – C(1)(17,4)] mediante un enlace de longitud mínima.

Una vez determinado el punto de conexión en r, unir dicho punto con la recta s [D(6)(17,16) – E(2)(1,20)] mediante otra tubería de 9 m. de longitud.

5 Determinar el ángulo que forman los planos de los triángulos ABC y DEF, siendo las coordenadas de los vértices: A(10)(10,21), B(4)(8,14), C(3)(12,14), D(1.5)(7,11), E(0)(13,11), F(0)(5,7).

6 La recta -r- representa el eje de una tubería que desciende según una dirección que forma 15º con la vertical del dibujo y con una pendiente de 1/10. Se sabe también que la recta pasa por el punto P(8)(6,25).

Determinar el punto de intersección de la recta r con el talud definido por los puntos A(12)(3,17), B(5)(14,22), C(2)(13,12).

7 El camino de eje recto AB es de pendiente ascendente del 40% de A(35)(2,17) hacia B.

Se desea conectar el punto C(40)(10,14) con el eje del camino por el recorrido más corto.

Determinar el punto de enlace con el eje del camino, la pendiente del enlace y su longitud.

8 Enlazar mediante un canal de pendiente 2‰ y de trayectoria recta el punto P(3)(9,15) con una acequia que pasa por los puntos A(2)(5,21), B(z)(11,22) y C(5)(15,17).

9 Hacer pasar por tres rectas dadas r, s, t, tres planos que se corten según una misma recta.

Datos:

r [A(0)(100,15) – B(32,140,0)] , s [C(0)(87,-10) – D(8)(80,0)], t [E(0)(45,15) – F(27)(0,0)].

10 Hallar la recta que siendo paralela a una recta s [A(0)(48,-6) – B(7)(53,0)] encuentra a dos rectas no coplanarias:

r [C(0)(70,18) – D(32)(117,0)] y t [E(0)(37,14) – F(32)(0,0)].

11 Encontrar dos planos, uno debe de contener a la recta -r-, el otro a la recta -s-, también dada. La intersección de ambos planos ha de ser paralela a una recta conocida -t-. Las rectas dadas son las mismas que las definidas en el ejercicio anterior.

12 Situar en proyección acotada cuatro puntos cualesquiera no coincidentes y obtener cuatro planos paralelos y equidistantes que pasen por cada uno de los puntos. Indicar el proceso y obtener resultados.

13 Dados dos puntos A y B, trazar un plano por un punto conocido P que pase a igual distancia de A y B. Indicar el proceso y resolver.

14 Dados los puntos A(6)(3,5) y B(2)(10,18), determinar la trayectoria mas corta para ir de A hasta B pasando por un punto situado en el cuadro.

15 Una recta pasa por los puntos A(3)(20,26) y B(19)(65,60), determinar:

La representación acotada de la recta, graduándola. Suponiendo que los datos dados son en metros, obtener la representación a escala 1:500.

Determinar la pendiente y la distancia entre A y B.

16 Dos galerías cuyos ejes son las rectas r [(0.5)(2,9) – (5)(13,10] y s [(3.5)(3,18) – (0)(11,4)] están enlazadas mediante un pozo vertical, determinar las cotas de los extremos del pozo en su unión con las galerías.

17 Determinar la línea de máxima pendiente del plano que definen los puntos A(3)(12,6), B(9)(13,13), C(12)(1,15). Introducir en el plano una recta que pase por el punto B y tenga pendiente de valor 0.8.

18 Determinar el plano que contenga a la recta r [(4)(2,8) – (15)(12,18)] y cuya pendiente sea 3. Posteriormente y por la misma recta hacer pasar el plano de menor pendiente.

19 Una circunferencia se proyecta según una elipse cuyo eje menor es AB. Obtener el otro eje y definir la elipse sabiendo que el punto A tiene menor cota que el B.

Datos: Radio de la circunferencia 5cms. , A(2.5)(10,10), B(z)(4,13).

20 Se conocen las bases de un tronco de pirámide, ABCD es la mayor y EFGH la base menor. Trazar a partir de A un recorrido de pendiente p = 0.4 que recorra las caras del tronco en sentido ascendente.

21 Determinar el vértice del triedro que definen los planos α(-4,22,10), β(10,20,-50), γ(5,-14,7) y obtener la sección horizontal que pasa por punto P(2.5)(10,16).

22 Determinar el ángulo que forman los planos α(-3,∞,4) y β(10,∞,12).

23 Que punto del plano α(-12,11,15) se encuentra en la recta -r- que se indica r [(5)(7,12) – (9)(14,15)].

24 Dadas dos rectas r y s obtener otra t que pase por un punto dado A y corte a las dos primeras.

Datos: r [(2)(3,10) – (5)(7,9)], s [(4)(2,16) – (6)(12,11)], A(7)(7,18).

25 Determinar el punto en el cual la recta r incide sobre la figura ABC, realizando el estudio de visibilidad de la recta suponiendo opaca la superficie de la figura.

Datos: r [(2)(4,5) – (12)(12,19)], A(12)(6,9), B(3)(12,11), C(1)(2,15).

26 Determinar la incidencia del plano α(-6,16,13) con el prisma de directriz ABC y aristas orientadas como la recta r.

Datos: A(0)(6,10), B(0)(12,8), C(0)(10,15), r [(12)(6,4) – (2)(14,18)].

27 Obtener la proyección cónica de la figura ABC sobre el plano α(-6,10.5,9), siendo el centro de proyección V(20)(0,0).

Datos de la figura: A(12)(7,6), B(10)(12,12), C(15)(6,15).

28 Determinar la incidencia del triángulo ABC sobre el paralelogramo DEFG. Considerando ambos opacos, determinar la visibilidad.

Datos: A(12)(7,8), B(8)(12,14), C(15)(6,17), D(3)(2,9), E(4)(12,11), F(20)(14,19), G(z)(x,y).

29 Obtener la recta que pase por el punto R(6)(11,12) y sea perpendicular a la recta r [(4)(7,7) – (4)(12,9)]. Trazar también un plano por r que sea perpendicular al definido por los puntos A(2)(4,9) – B(5)(12,10) – C(3)(6,15).

30 Dadas dos rectas r y s, hacer pasar por un punto A(8)(7,8) la recta que se apoya en la -s- y se cruce ortogonalmente con la -r-.

Datos: r [(4)(1,3) – (15)(5,15)], s[(2)(7,17) –(8)(13,2)].

31 Trazar una galería horizontal que comunique con recorrido mínimo los túneles de ejes: r [(3)(3,10) – (10)(14,14)] y s[(0)(1,20) – (18)(10,3)].

32 Se desea diseñar una conducción con un 2% de pendiente que enlace otras dos r y s conocidas. El punto de unión de la nueva conducción con la r deberá tener con respecto a su unión con la s un desnivel de –3 m.

Datos: r [(55)(24,182) – (95)(263,258)], s [(60)(44,46) – (95)(166,377)].

Realizar la representación a escala 1:2000. Datos dados en metros.

33 Obtener el camino mínimo que enlaza, las rectas r [(1)(1,7) – (7)(9,15)] y s [(11)(14,2) – (3)(12,14)]. Determinar el valor de la magnitud.

34 Dada una recta r y los puntos A y B, determinar en r un punto C que cumpla la condición de que la suma de distancias de C a los puntos A y B sea mínima.

Datos: A(2)(2,12), B(8)(8,10), r[(0)(3,19) – (5)(13,8)].

35 Dados dos puntos A y B y la recta -r-, obtener los planos que pasando por -r- equidisten de los puntos dados.

Datos: A(2)(4,12), B(-3)(12,7), r [(5)(10,9) – (2)(8,11)].

36 La recta -r- es línea de máxima pendiente de un plano. Determinar la proyección de un hexágono regular, de 4 cm de lado, contenido en el plano. Uno de los vértices es el punto A(0)(8,y) y el opuesto el D(4)(>8,y).

37 Determinar la proyección de la circunferencia que pasa por los puntos A(3)(4,13), B(-4)(6,16.5), C(2)(11,9). Obtener los ejes de la proyección pedida.

38 Obtener la proyección de un triángulo equilátero de lado A(2)(12,14) B(6)(6,10) y vértice C en el plano α(15,15,∞).

39 Los vértices A, B y C son consecutivos de un hexágono regular. La recta -h- es una horizontal de su plano, obtener dicho plano y las cotas de los vértices del hexágono.
Datos: A(Z_A)(6.1,10.3), B(Z_B)(8,12), C(Z_c)(11,11.7), h [(3)(3,12.5) – (3)(14,12.5)].

40 Determinar el recorrido mínimo que une el punto A(2.5)(8,12) y el B(0)(6.5,13) ambos situados en caras opuestas de un cubo. El punto B en la cara C(0)(6,11), D(0)(8.5,11), E(0)(8.5,13.5), F(0)(6,13.5).

41 Dada una pirámide de vértice V(4)(8.5,11) y base A(0)(5.5,9), B(0)(11.5,10), C(0)(12.5,12), D(0)(7.5,15), E(0)(4.5,13), determinar el camino mas corto que une el punto P(Z_p)(6.5,10) con el Q(Z_q)(9,12) recorriendo la pirámide.

42 Un triángulo equilátero se encuentra sobre un plano perpendicular a una recta r [(2)(14,13) – (20)(10,17)] y en ella uno de los vértices. Otro de los vértices se sitúa sobre la recta s [(4)(2,11) - (8)(8,18) y el tercero pertenece al plano α(-9,9,∞).

43 El punto A(6)(6,y) se encuentra sobre el plano α(22.2,14.5,39.5). Determinar las rectas de α que pasan por A y forman ángulo de 66º con el plano β(-16, ∞,8).

44 Obtener los planos que forman 15º con la recta r [(10)(8,8) – (-1)(7,2)] y cuya intersección sea la recta i [(22)(4.5,21.5) – (14)(8,17)].

45 Un plano vertical α contiene al punto A(3)(5.5,y) y a la recta r [(0)(4.5,8.5) – (6.5)(1.5,11.5)]. Determinar los planos que pasan por A son paralelos a r y forman 60º con α.

46 Determinar los planos que forman un ángulo de 65º con el plano α(-16, ∞,8) y pasan por la recta r[(6)(6,10.5) - (0)(8.8,4.8)].

47 Determinar los planos que forman con la recta r [(2.5)(4,7) – (0.5)(9,14.5)] un ángulo de 30º. Los citados planos solución serán paralelos a la recta s [(5)(6,2) – (2)(4,6)].

48 Determinar los planos que pasando por el punto A(2)(13,10.5) formen ángulos iguales con los planos α (7,8,-5) y β (13.7,16,22).

49 Obtener la proyección de un cuadrado de lado 3 cm situado en un plano α(6.1,6.7,-7.3). Se sabe que el punto A(1.5)(7.5,Y) es uno de sus vértices y que el lado AB forma 60º con un plano β de pendiente 5/2 y traza h [(0)(9,16.5) – (0)(12.5,9)], estando orientado de tal forma que aumenta su cota al acercarse al origen de coordenadas planimétricas.

50 Representar el triedro del que se conocen las amplitudes de las caras A=25º, B=17º, C=21º. La cara A se encuentra sobre el plano de comparación, la arista c es la recta [(0)(7,4) – (0)(3,20.5)] y la arista b se sitúa a la derecha de la anterior.

Obtener los valores de los diedros que se forman.

51 Se conoce la arista de un tetraedro regular A(Z_A)(9,14), B(Z_B)(13,10); dicha arista y el centro de gravedad del poliedro pertenecen al plano α(-12,20,12). Representar el tetraedro y obtener la intersección de sus caras con la esfera tangente a las aristas.

52 Un plano produce en un tetraedro regular una sección cuadrada, de vértices: A(3)(7,12), B(z_B)(10,13), C(3)(11,16), D(Z_D)(X_D,Y_D).

Determinar dicho plano y representar el poliedro de forma que la arista que pasa por A tenga la menor pendiente.

53 Representar el tetraedro en el cual el plano α(-10.5,17.5,13.5) produce una sección rectangular ABCD en el que BC=20 mm.

Datos: A(Z_A)(6.5,10.5), B(Z_B)(10.5,7)

54 Una de las caras de un tetraedro está sobre el plano α (-13,∞,10.4), el vértice opuesto es A(4.5)(5,15). El vértice B tendrá cota cero y la menor ordenada posible.

55 Una de las diagonales de un octaedro es el segmento A(1)(5.5,5), B(10)(11,15). Otro de los vértices del poliedro pertenece al plano α(-33,8.4,2.6) y tiene la menor abscisa posible.

Representar el poliedro y determinar los puntos comunes con la recta r [(0)(14,0) – (10)(0,16)].

56 Una de las diagonales de un octaedro mide 8 cm, perpendicular a dicha diagonal un plano α (-5,15,5) produce en el poliedro la sección ABCD en la que el lado CD tendrá la mayor cota posible, siendo AB: A(Z_A)(12,10), B(Z_B)(9,10.5).

Representación del octaedro tomando como solución la de cota mayor

57 Una de las aristas de un octaedro es A(5)(8.5,10), B(1)(14.5,14).

Representar el poliedro sabiendo que el otro vértice C de la cara se encuentra a cota cero y con la menor abscisa posible.

58 Uno de los vértices de un hexaedro es el punto A(5)(4,13), la arista opuesta de la misma sección principal pertenece a la recta r [(1)(6,17) – (6)(11,12)]. Representar el poliedro con la cara del vértice A por debajo de la opuesta.

59 Los centros de dos caras contiguas de un cubo son los puntos M(1.5)(5,11) y N(4)(9,15). La sección cuadrada que pasa por dichos puntos es perpendicular al plano α(-11,11,∞). Obtener la representación del poliedro dándole la mayor cota posible.

60 En un plano vertical se encuentra la diagonal A(7)(7.5,18), B(0)(X,18) de un hexaedro, así como dos aristas opuestas que parten de A y B. La esfera tangente a las aristas se apoya en el cuadro.

Representar el poliedro, la esfera y las secciones que en la esfera producen las caras que concurren en el vértice A.

61 En un hexaedro de arista 3 cm, el plano α(-4,10,20) produce una sección hexagonal regular. Representar el poliedro.

62 Sobre el plano α(0.75,∞,1.5) se encuentra la base hexagonal regular de un prisma recto, siendo el lado A(Z_A)(3.5,6.7), B(Z_B)(3.5,5) el mas alto de la base. El plano β(-0.75, ∞,1.5) limita al prisma por su parte superior. Representar el prisma y desarrollarlo.

63 Representar el prisma de base pentagonal regular situada sobre el cuadro. El lado de la base mas próximo al origen de coordenadas es el A(0)(2,7), B(0)(4,6). Las aristas laterales miden 10 cm y forman 45º con la base orientándose en dirección al eje de abscisas. Sección producida por el plano α(10,19,22), resolución por afinidad.

64 Sobre un plano *a de traza* α_0 [(0)(3,9) – (0)(14,13)] se encuentra el cuadrado sección a una pirámide de vértice V(4)(6,19). Dicho cuadrado se proyecta según A(Z_A)(7,11), B(Z_B)(9.8,13), C(Z_C)(7.8,15), D(Z_D)(X_D,Y_D).

El plano α asciende acercándose al rigen coordenado.

Determinar la sección de la pirámide por un plano β(-11,∞,13.2) como figura homóloga de la que produce el plano α. Desarrollo del tronco de pirámide limitado por los planos α y β.

65 Una pirámide es seccionada por un plano α, obteniendo un cuadrilátero ABCD. Otro plano β que forma 45º con el plano de comparación y de cota creciente acercándose al origen, le produce una sección de proyección cuadrada y lado 5 cm.

Si el vértice de la pirámide se coloca lo mas alejado posible del citado origen, resolver por homología la determinación de la superficie radiada.

Datos: A(3)(6.8,13.5), B(0)(8.8,10.5), C(2)(9.7,14.4), D(Z)(8.3,15.1).

66 Sobre un plano α de traza α_0 (∞,13) se sitúa el vértice V de una pirámide, siendo un cm su cota. La base es el triángulo ABC: A(0)(8,10.5), B(0)(4,9),C(0)(7.5,4.5).

Un plano β paralelo al α secciona a la pirámide según un triángulo equilátero de 2.5 cm de lado. Resolver dicha sección y determinar la pirámide.

67 Sobre el plano α(34.4,27,16) se encuentra la base ABCD de una pirámide de vértice V(3)(8,19). Obtener sobre la pirámide una sección que en proyección es un paralelogramo de 2 cm los lados mayores.

Datos: A(Z_A)(8.5,9.5), B(Z_B)(10,5), C(Z_C)(5,9), D(Z_D)(6,10.5).

68 Un cilindro recto de revolución de radio 2 cm, altura 6 cm y centro de la directriz, punto C(Z_C)(12.8,14.5), tiene su directriz sobre un plano α(-21,18.1,25.7).

Representar el cilindro y trazarle los planos tangentes que forman 60º con el cuadro.

69 Sobre el plano α(-20,27.8,16) descansa la base de un cono recto de revolución, la base es tangente a α_0 y el vértice se situará sobre el plano β(6,-7,4.2) y a cota 6, acercándose lo mas posible al origen coordenado.

Representar el cono y determinar los puntos comunes con la recta horizontal de cota 3 perteneciente al plano β.

70 De un cono de revolución se conoce que el vértice es el punto V(9.5)(13,11), que un punto de su superficie es el P(4.5)(4,9) y que el eje pasa por el punto E(3.5)(6.5,11).

Representar el cono comprendido entre el vértice y un plano horizontal que pasa por el punto E.

71 La directriz horizontal de un cono de vértice V(9)(11.5,15.2), es una circunferencia de 3.5 cm de radio y centro O(0)(4,11.8).

Representar el cono y determinar sobre él una sección parabólica mediante un *plano a del que se conoce su traza* α_0 [(0)(14.5,0) – (0)(0,17.8)].

72 Inscrita en el cono recto de revolución de vértice V(7)(1,6), se encuentra una esfera de 4 cm de diámetro y centro en el punto O(2.5)(5,6). Determinar la línea de contacto del cono con la esfera y limitar al cono mediante el plano del cuadro.

73 Trazar los planos tangentes a la esfera de 3 cm de diámetro y centro O(1.5)(10,10) y al cilindro de diámetro 4 cm y eje la recta e [(0)(4,6) – (10)(9,14)].

74 Determinar los planos tangentes a tres esferas dadas, de centros: O_1(2)(4.8,10), O_2(1)(8.8,11.3), O_3(5)(4.8,16.3) y radios respectivos: r_1=1.5 cm, r_2=1.5 cm, r_3=2.5 cm.

75 Dos esferas se apoyan sobre el cuadro, una de ellas es fija, tiene 3 cm de radio y centro en el punto O_1(3)(11,11); la otra tiene 1.5 cm de radio y centro en el punto O_2(1.5)(2.5,17). Esta se desplaza en la dirección de la recta r [(3)(11,11) – (1.5)(13,7)] entrando en contacto con la primera.

Determinar las coordenadas del punto de contacto y trazar en dicho punto el plano tangente a ambas.

76 Representar la esfera tangente al plano del cuadro y que pasa por los puntos A(4)(4,8.3), B(3)(8.6,2.6), C(1)(11.6,8.6).

77 Los vértices de un tetraedro son los puntos: A(0)(5,8), B(0)(13,9), C(0)(7,17), D(10)(3,14). Determinar la esfera inscrita en el poliedro.

78 Los vértices de un tetraedro son los puntos: A(0)(11,9), B(0)(12,15), C(5)(12,16), D(7)(7,15). Determinar la esfera circunscrita al poliedro.

79 Representar las esferas que pasan por el punto A(1)(8,12), son tangentes a los planos α(-3,∞,*4) y ß(4.5,* ∞,4) y tienen 3 cm de radio.

80 Un pentágono de 5 m de lado y a 9 m de altura es la forma y posición de la planta de un tejado. Para la resolución de la cubierta se tendrá presente que el centro del pentágono será la proyección del punto más alto (17m). Si los vértices de aleros son ABCDE, AB y AE confluyen en el punto más alto. Las pendientes iguales de las vertientes DE y BC son de valor doble que la de AB.

Trazar las líneas de nivel de cota impar. Resolver la cubierta y obtener un alzado sobre un plano paralelo a DC.

81 Determinar las vertientes de pavimentación de una plaza rectangular, A(1)(2,15), B(1.5)(7,15), C(1)(12,15), D(2)(12,8), E(1.5)(7,8), F(1)(2,8).

El drenaje vierte en los puntos G(0.5)(9,11.5) y H(0.5)(5,11.5).

Trazar las líneas de nivel cada 0.20 m.

82 Obtener una plataforma de cota 20 y máxima superficie en el interior de una parcela cuyos límites se definen por los puntos siguientes: A(20)(2,10), B(20)(3.5,16), C(23)(7.5,15), D(19)(11.5,14), E(17)(12,7.5), F(23)(6,9).

Taludes: De desmonte (1/3), de terraplén (2/3).

83 En el centro geométrico de la explanación a realizar sobre el terreno representado, se instalará un poste de antena de 32 m. de altura, tres cables lo sujetan al terreno y sus proyecciones llevan las direcciones OA, OB y OC. Los anclajes de los cables al poste se encuentran a cota 30 m. y los cables forman 45º con el eje del poste.

Resolver la explanación; obtener los límites del movimiento de tierras, siendo 60º el valor del ángulo de taludes; y determinar los puntos de anclaje al terreno.(Pág.293).

84 Sobre el terreno representado se quiere construir una plataforma horizontal de cota 34 y forma rectangular y otra circular de cota 29, unidas ambas por un camino.

Resolver el conjunto planteado, con el movimiento de tierras necesario, considerando que el talud de desmonte es ½ y el de terraplén 1. Representar líneas de nivel del conjunto cada metro. Para evitar la invasión de tierras procedentes del terraplenado sobre alguna de las plataformas, y si procede, indicar los tramos en los que sea necesario disponer muros de contención. (Pág.294).

85 Los ejes de dos galerías subterráneas son las rectas AB y CD: A(24)(6,4.7), B(33)(10.6,20.1), C(24)(12.4,4.2) y D(30)(4.5,19.3).

Se determinarán los puntos de entrada y salida de los ejes de las galerías en el terreno representado.

Por el punto P(24) hacer pasar el eje de una galería recta que enlace con los ejes de las otras dos dadas. (Pág.295).

86 Sobre la topografía idealizada por los tres planos de la figura se diseña una carretera de 12 m. de anchura y eje ABCD.

La rasante de la carretera comienza en A y asciende con pendiente uniforme del 10% hasta llegar a D. Los ángulos de taludes son de 45º para desmonte y de 65º para terraplenes.

Resolver el trazado de la carretera obteniendo los límites del movimiento de tierras y representar líneas de nivel de la topografía cada 2 metros. (Pág.296).

87 Se da una superficie idealizada por el plano α de la figura.

Un camino de 4m. de ancho tiene una plataforma de descanso de la forma y dimensiones indicadas.

La pendiente ascendente de A hacia D es 1/20 y las pendientes de desmontes y terraplenes son respectivamente de 2/3 y 1/2.

Resolver la intersección entre los distintos elementos definidos. (Pág.297).

88 En el terreno representado en el ejercicio nº 84 y en el punto P(90,210) existe un pequeño manantial de agua. Dibujar el recorrido aproximado del agua sobre el terreno. (Pág.294).

89 Sobre el plano dado se ha proyectado una carretera de 10 m. de ancho de vía y pendiente constante entre los puntos A y F.

Consta de tramos rectos y curvos definidos en el plano.

Determinar la pendiente, taludes de desmonte (p=1) y terraplén (p=2/3). (Pág.298).

90 El tramo de carretera trazado sobre el plano será horizontal y de cota 60 m., presenta un ensanchamiento cuya geometría está definida. El ancho de vía es de 5 m.

Determinar los taludes, sabiendo que las pendientes son: para desmonte (1) y para terraplenes (2/3). (Pág.299).

91 Sobre un terreno horizontal y supuesto a cota cero se desea formar un vertedero constituido por un camino de acceso de 16% de pendiente, traza de su plano h_0 y 22 m. de anchura.

A partir de la horizontal h(12) del camino, este se ensancha formando una plataforma de pendiente 10% y planta circular de radio 22 m. centro en m y tangente a h(12).

Resolver gráficamente estos planteamientos, obteniendo las curvas de nivel de los taludes considerando la pendiente de 2/3.

Dibujar la planta y el alzado del vertedero. (Pág.300).

92 En el terreno de la figura se dispone de la parcela indicada a la que se accede por un camino horizontal de eje e(70) y centro O(70). Determinar la explanación máxima de cota 70 que puede realizarse sin que los taludes sobrepasen los límites de la parcela. (Pág.301).

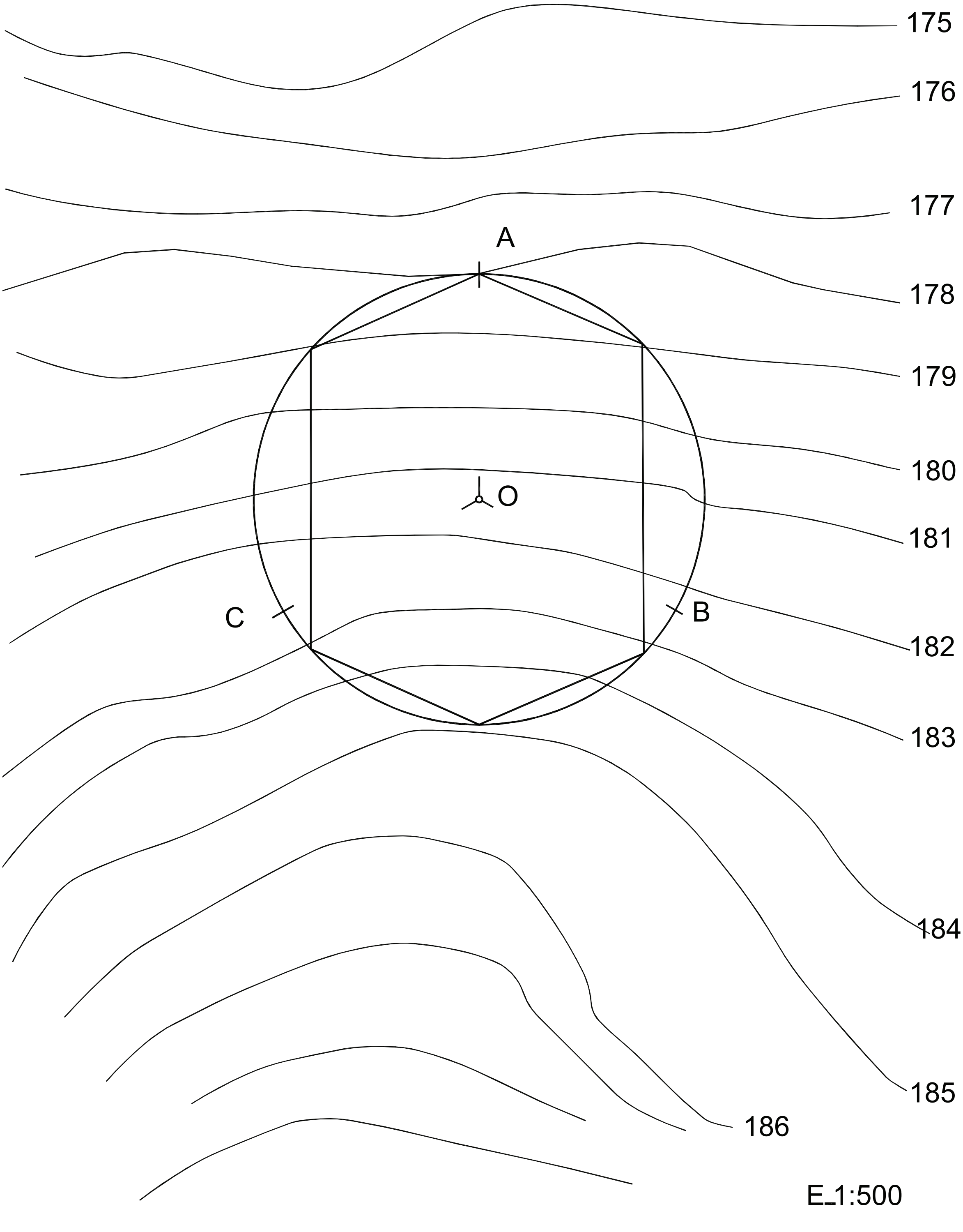
Pendiente de los taludes:

- De desmonte: 4/3.
- De terraplén: 2/3.

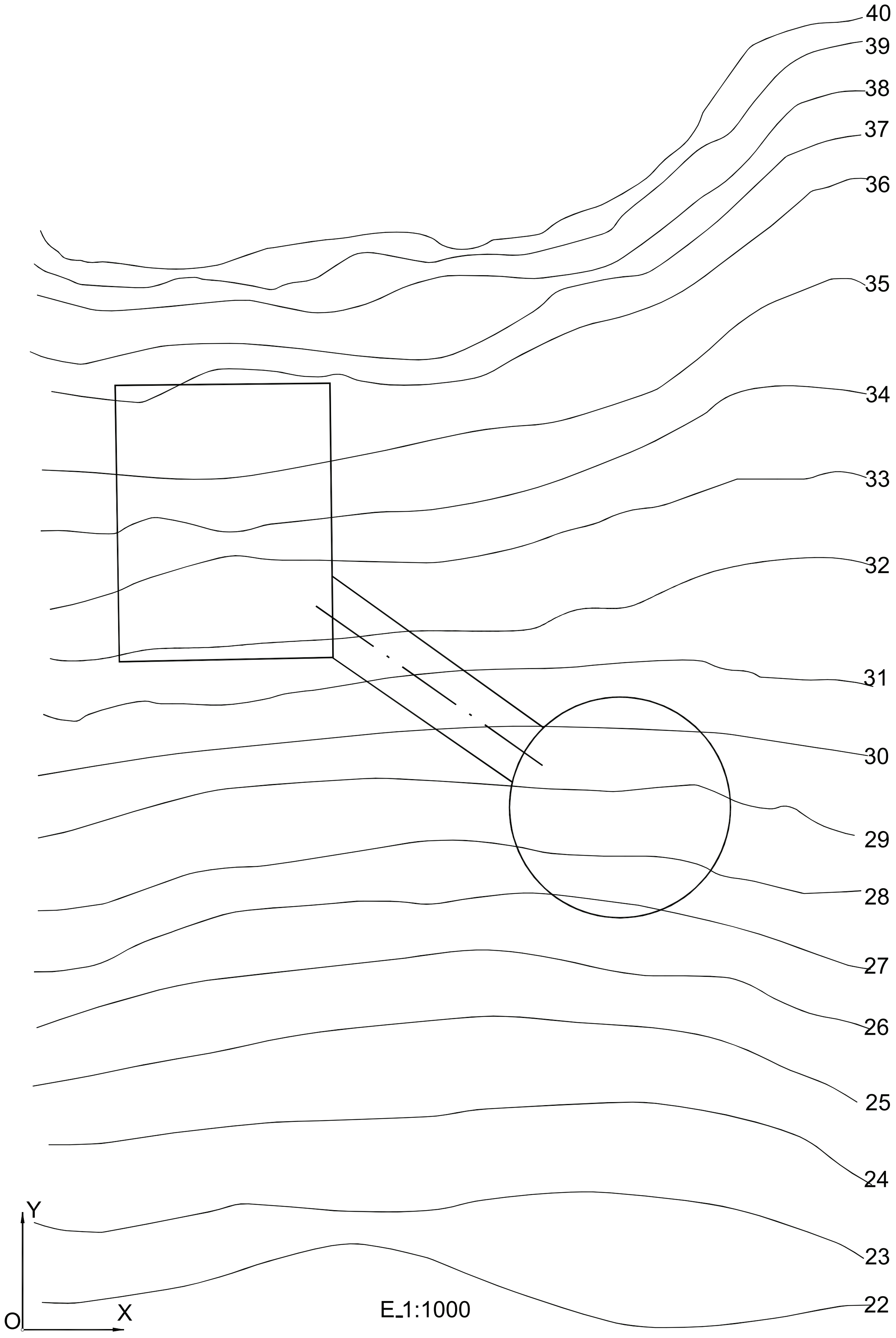
93 Un observatorio forestal se ha instalado en el punto V(220).

Determinar las zonas vistas y ocultas desde el observatorio, en el terreno representado. (Pág.302).

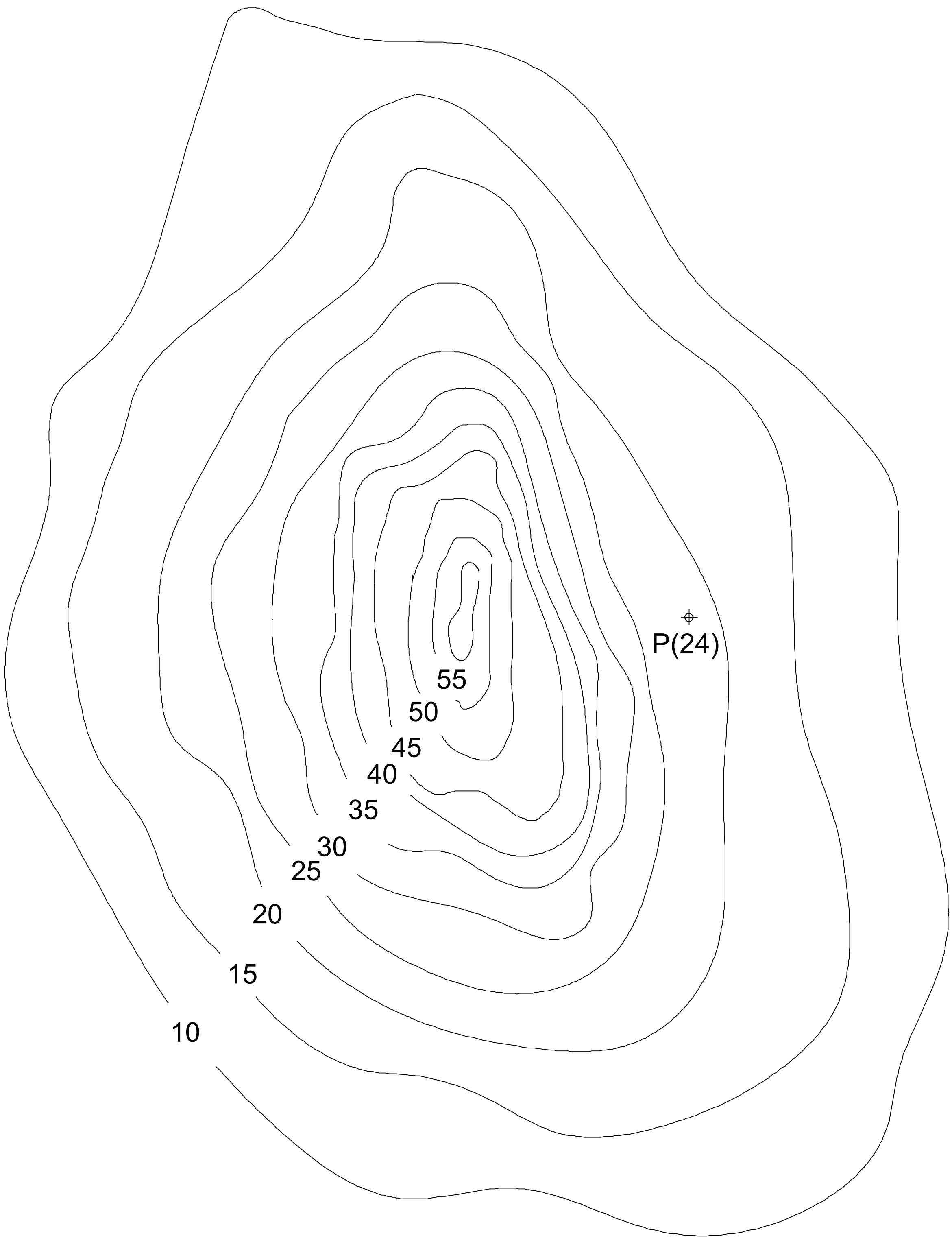
EJERCICIO 83



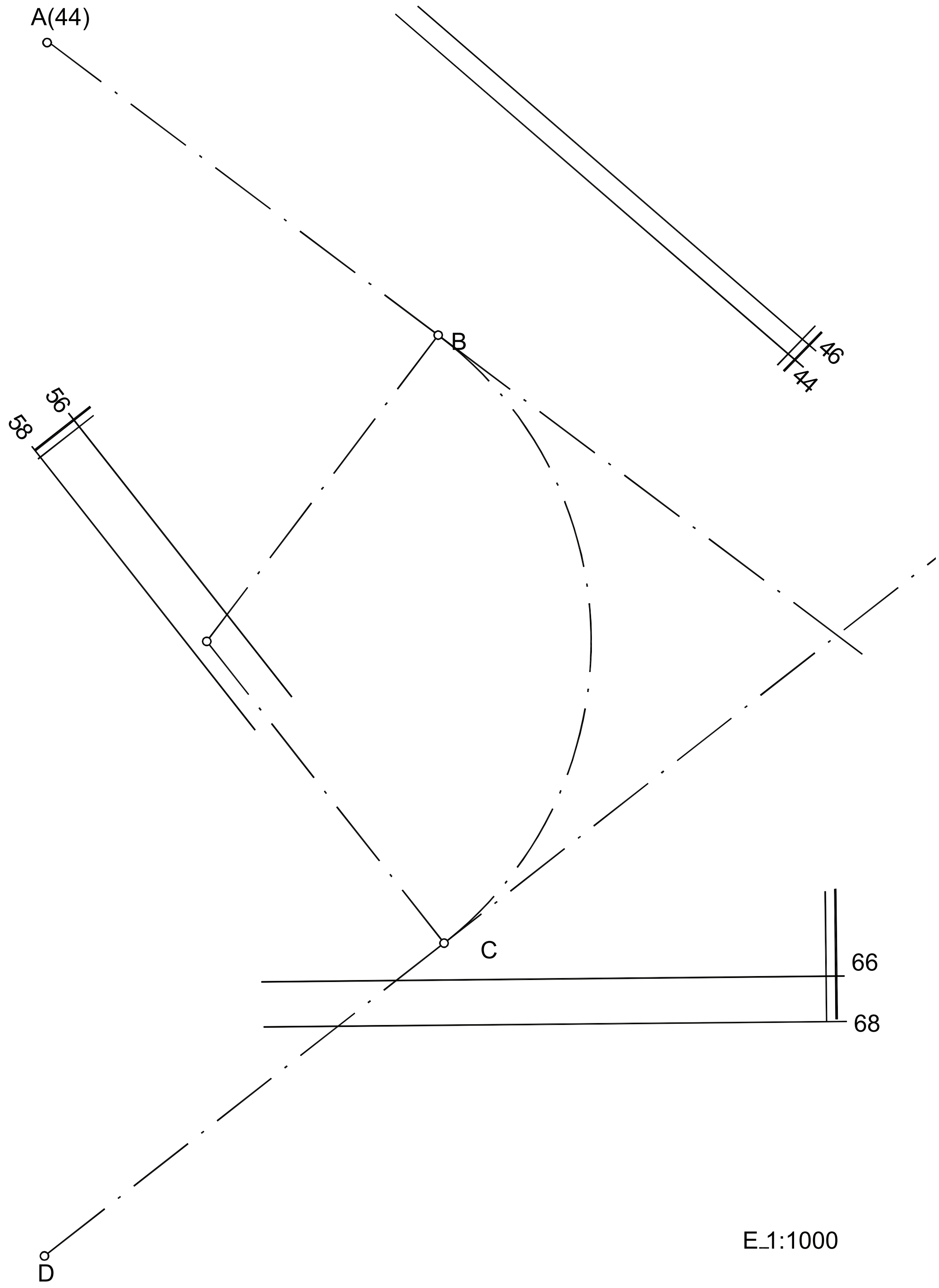
EJERCICIO 84



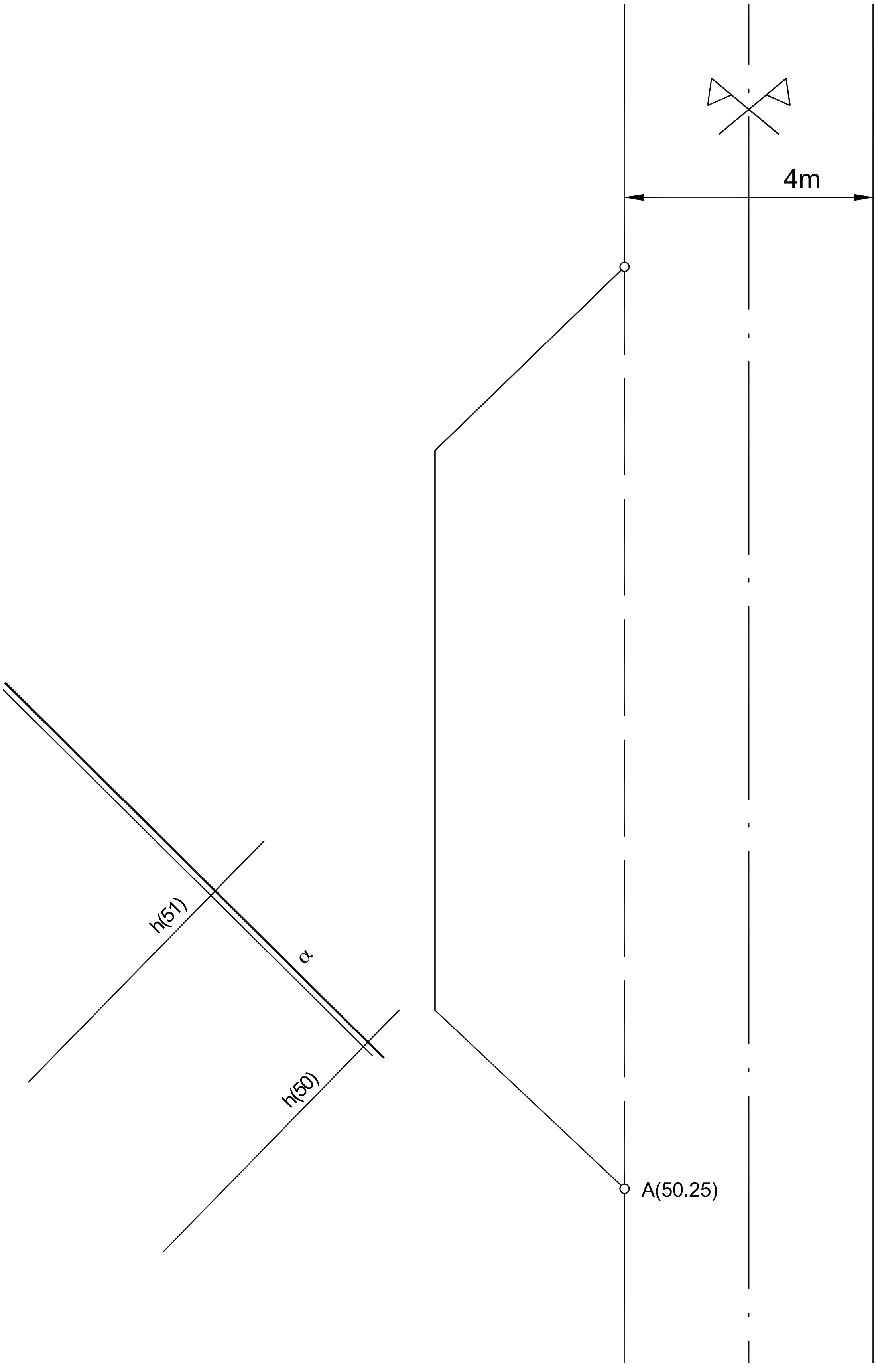
EJERCICIO 85



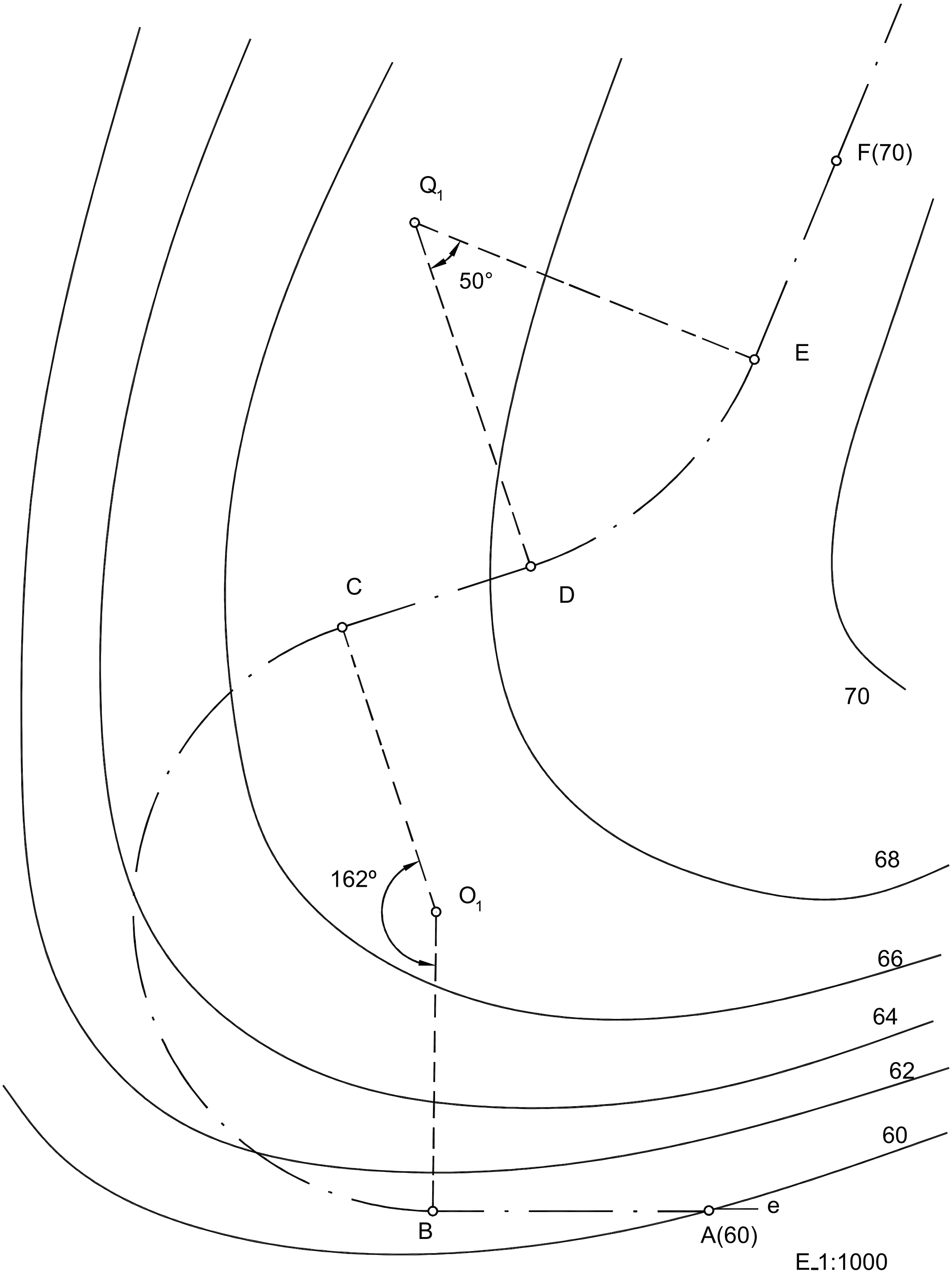
EJERCICIO 86



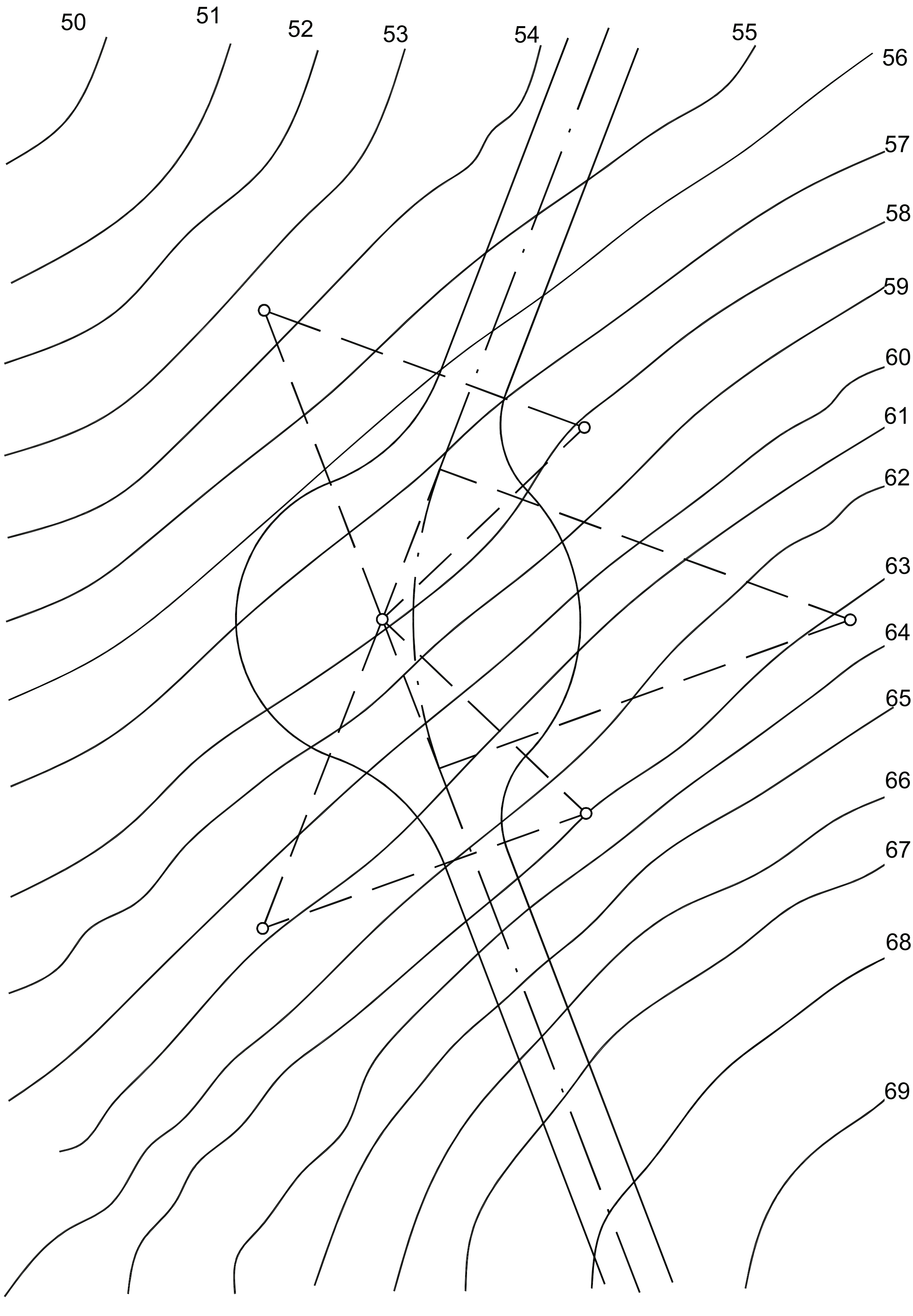
EJERCICIO 87



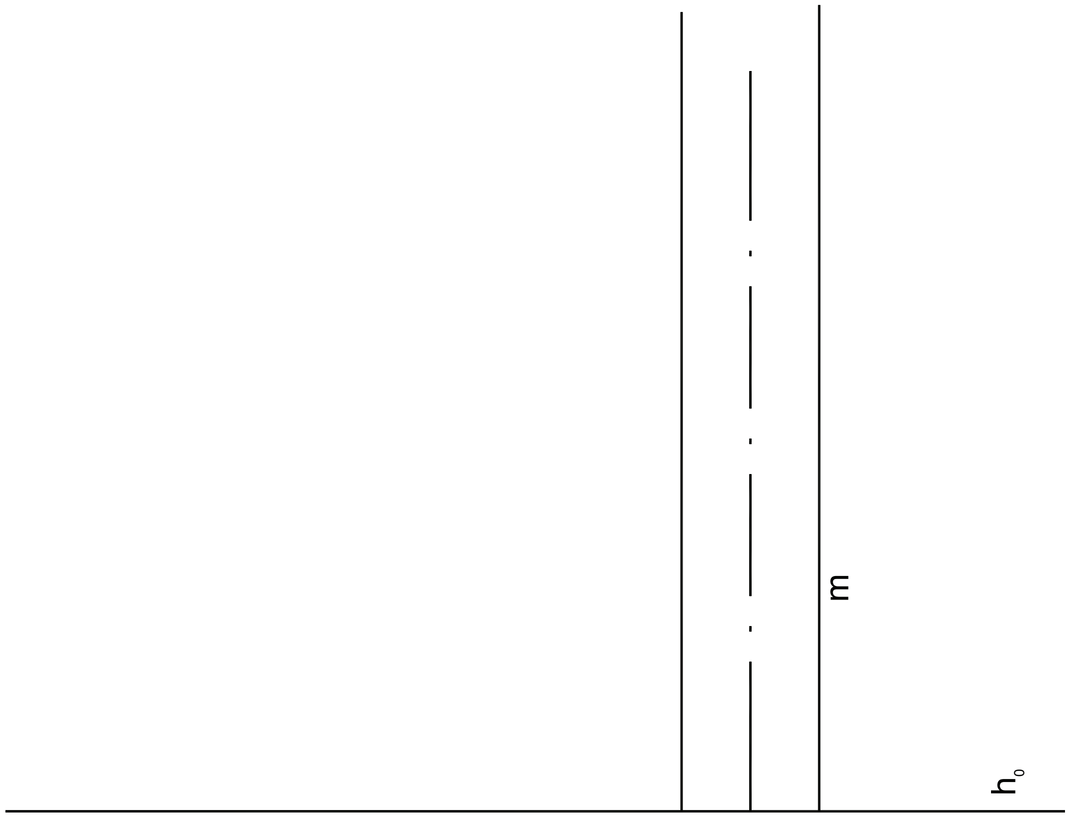
EJERCICIO 89



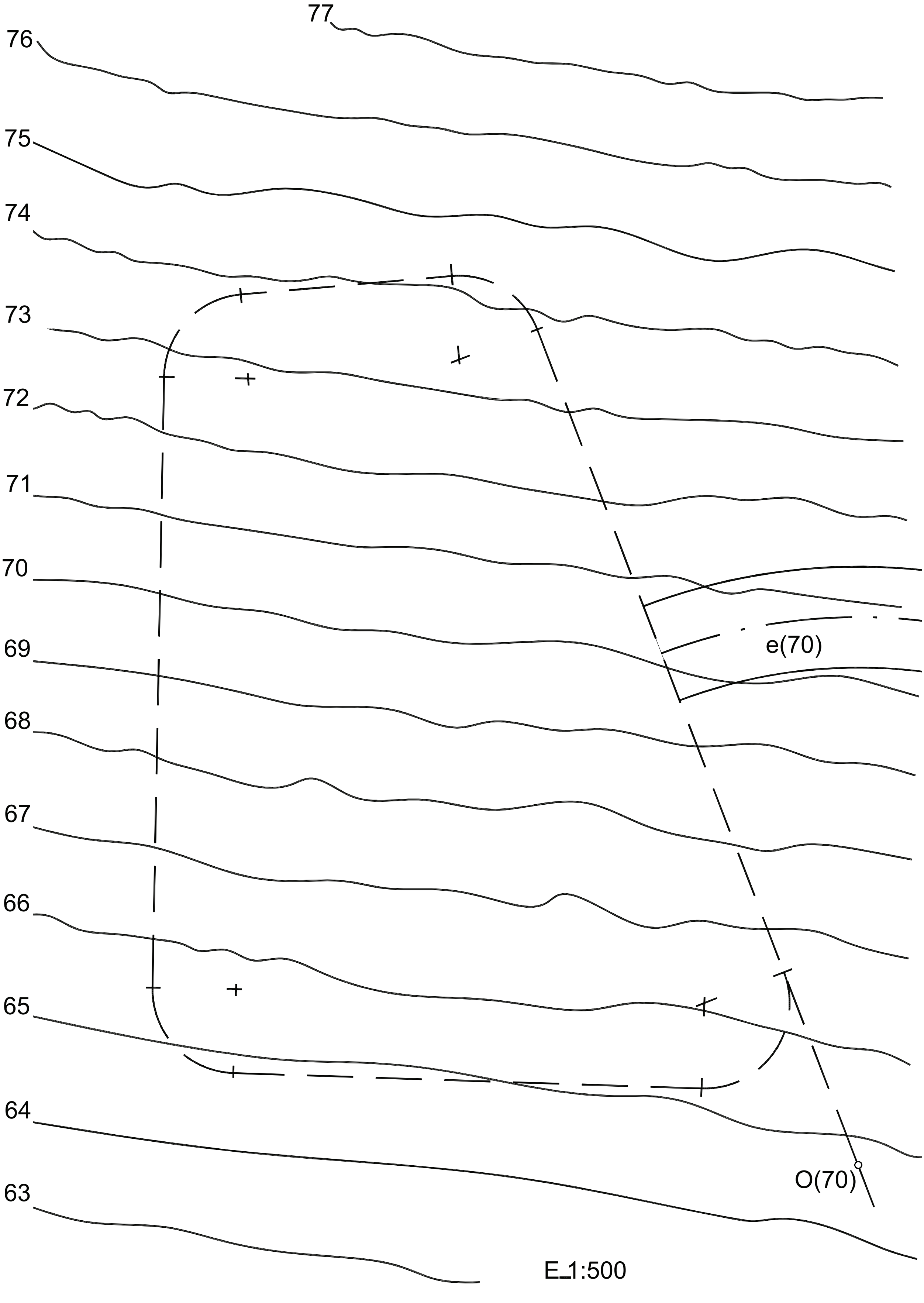
EJERCICIO 90



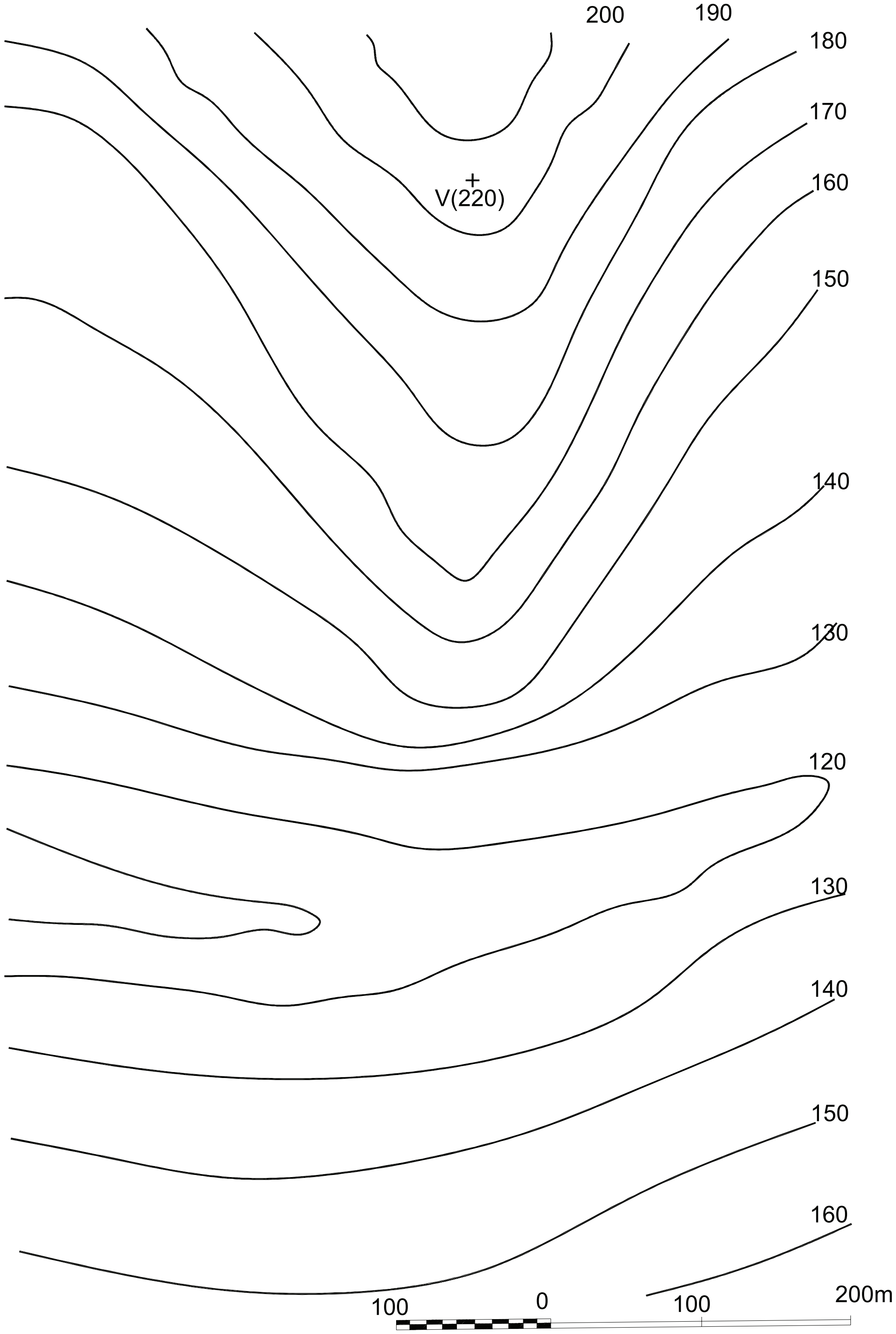
EJERCICIO 91



EJERCICIO 92



EJERCICIO 93



ÍNDICE

Ejercicios Propuestos para su resolución

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

material didáctico ·1· ingenierías