Construcciones euclidianas con GeoGebra: un estudio sobre producción de significados con futuros profesores

Juan Luis Prieto G., Rafael Enrique Gutiérrez-Araujo y Elizabeth-H. Arredondo

Este trabajo trata sobre la producción de significados alrededor del triángulo rectángulo durante la resolución de un problema de construcción con GeoGebra, por futuros profesores de matemáticas. Asumiendo una perspectiva multimodal del aprendizaje, analizamos la actividad de los participantes desde cuatro categorías que enfatizan la naturaleza semiótica y encarnada del pensamiento en geometría. Concluimos que, por un lado, la explicación de un procedimiento de construcción con GeoGebra está vinculada a la comprensión que se tiene del objeto a construir, en razón del espacio de trabajo utilizado y, por otro lado, el formador cumple un rol importante para lograr esta comprensión.

Términos clave: Actividad multimodal; Análisis semiótico; Construcciones euclidianas; Procesos de objetivación

Euclidean Constructions with GeoGebra: A Study on the Production of Meanings with Pre-service Teachers

This article deals with the production of meanings around the right triangle during the resolution of a construction problem with GeoGebra, by pre-service mathematics teachers. Assuming a multimodal perspective of learning, we analyze the semiotic activity of the participants, from four categories that emphasize the semiotic and embodied nature of thinking in geometry. We conclude that the explanation of a construction procedure with GeoGebra is linked to the understanding of the geometric object to be built, due to the workspace used and the teacher educator plays an important role for achieving this understanding.

Keywords: Euclidian constructions; Multimodal activity; Processes of objectification; Semiotic analysis

Prieto, J. L., Gutiérrez-Araujo, R. E. y Arredondo, E.-H. (2024). Construcciones euclidianas con GeoGebra: un estudio sobre producción de significados con futuros profesores. *PNA, 18*(4), 339-368. https://doi.org/10.30827/pna.v18i4.27166

Construções euclidianas com GeoGebra: um estudo sobre produção de significados com futuros professores

Este artigo trata sobre a produção de significados em torno do triângulo retângulo durante a resolução de um problema de construção com o GeoGebra, por futuros professores de matemática. Assumindo uma perspectiva multimodal da aprendizagem, analisamos a atividade dos participantes, a partir de quatro categorias que enfatizam a natureza semiótica e incorporada do pensamento em geometria. Concluímos que, por um lado, a explicação de um procedimento de construção com o GeoGebra está vinculada à compreensão do objeto a construir, em virtude do espaço de trabalho utilizado e, por outro lado, o formador cumpre um papel importante para alcançar esta compreensão.

Palavras-chave: Análise semiótica; Atividade multimodal; Construções euclidianas; Processos de objetivação

En la perspectiva histórico-cultural, el profesor de matemáticas no es visto como un sujeto con las funciones de planificar, gestionar y evaluar los aprendizajes adquiridos. En el aula de matemáticas, el profesor se involucra en la actividad de sus estudiantes al punto de *producir y compartir significados* conjuntamente con ellos sobre los saberes del currículo escolar (Dias y Souza, 2017). Autores como Arzarello y Paola (2007) y Cedro y Moura (2017) han afirmado que los profesores en situación de enseñanza toman parte en la producción de instrumentos simbólicos que emergen y evolucionan para favorecer la aprehensión de los conceptos matemáticos, revelando ciertas estrategias de intervención que resultan de gran interés para la formación inicial de profesores de matemáticas. En este contexto, el aprendizaje de la geometría por parte de los futuros profesores de matemáticas (FPM) implica un proceso de *significación* que pone en juego diferentes recursos semióticos para pensar acerca de los saberes geométricos movilizados (Sabena, 2018).

En esta visión del aprendizaje geométrico de los FPM subyace una concepción de la producción de significados distinta de aquella que considera la oralidad y la escritura como los recursos semióticos por excelencia para caracterizar este proceso. Según Radford (2023), se hace necesaria una perspectiva encarnada[1] de la significación en torno a los saberes matemáticos que tenga en cuenta las relaciones entre el cuerpo y la cultura material. En efecto, entender las matemáticas en su naturaleza material, esto es, como entidades visuales, táctiles, auditivas,

[1] De acuerdo con Maffia y Sabena (2015), la encarnación es una corriente en la ciencia cognitiva que asigna al cuerpo un papel central en la configuración del pensamiento.

materiales, artefactuales, gestuales y cinestésicas (Radford y Santi, 2022), sugiere que la producción de significados alrededor de los saberes geométricos que los FPM encuentran durante la formación inicial involucra relaciones entre el cuerpo, la percepción y el uso de signos/artefactos que se establecen en una actividad multimodal (Radford y Sabena, 2015).

En este artículo ofrecemos una comprensión de la actividad multimodal que hace posible la producción de significados en torno a la idea de triángulo rectángulo, durante la resolución de un problema de construcción euclidiana con GeoGebra que involucra a FPM y al formador. Consideramos que una comprensión de esta actividad nos aporta información sobre el aprendizaje de las construcciones euclidianas con GeoGebra versión 5.0 (Hohenwarter, 2002) en un contexto de formación inicial. Específicamente, buscamos responder la pregunta: ¿Cómo el cuerpo, la percepción y el uso de signos/artefactos operan coordinadamente para producir significados alrededor del triángulo rectángulo en una actividad de construcción con GeoGebra, en la que participan futuros profesores y el formador?

MARCO TEÓRICO

En este artículo asumimos la perspectiva de aprendizaje de la Teoría de la Objetivación (TO) como un proceso colectivo, cultural e históricamente situado, que destaca el trabajo social humano, el cuerpo, las emociones y el mundo material (Radford, 2023). En esta perspectiva, el aprendizaje tiene que ver no solo con los procesos de producción de saberes en el aula de matemáticas, sino también con el devenir de los individuos que se transforman y reafirman como sujetos de la educación en el encuentro con estos saberes (Radford, 2014b).

Para investigar el aprendizaje de las matemáticas, la TO introduce las categorías conceptuales de *objetivación* y *subjetivación*. En líneas generales, la objetivación denota el proceso a través del cual los individuos se encuentran con los saberes históricos y culturales (matemáticos, científicos, artísticos, pedagógicos, etc.), mientras que la subjetivación da cuenta del proceso mediante el cual los individuos se expresan, reafirman y posicionan críticamente ante estos saberes. Ambos procesos ocurren simultáneamente en determinado espacio y tiempo educativo. De acuerdo con el propósito de esta investigación, conviene prestar atención a los procesos de objetivación, es decir, aquellos "procesos sociales de toma de consciencia progresiva de sistemas histórico-culturales de pensamiento y de acción, algo de lo que nos damos cuenta gradualmente y a la vez lo dotamos de significado" (Radford, 2023, p. 96).

Por lo anterior, consideramos que el aprendizaje producido en contextos de formación inicial de profesores de matemáticas implica la ocurrencia de procesos de objetivación, es decir, de actos progresivos de toma de conciencia de determinados saberes docentes en matemáticas (reconocidos como tales por las instituciones de formación docente), dentro de una actividad de formación particular. En esta concepción de aprendizaje se ponen de manifiesto tres ideas importantes para esta investigación que explicamos seguidamente.

Saber acerca de las construcciones euclidianas con GeoGebra

Por construcciones euclidianas entendemos aquellas construcciones geométricas con regla y compás que aparecen en la obra "Elementos" de Euclides y que hacen parte del currículo escolar chileno, aunque de forma más sofisticada. Así mismo, llamamos Saber Acerca de las Construcciones Euclidianas con GeoGebra (SACEG) al saber docente que se moviliza cuando el profesor, por ejemplo, resuelve un problema de construcción con GeoGebra con el fin de reconocer en éste su potencial geométrico para el alcance de un objetivo de aprendizaje (Groenwald y Llinares, 2022). En particular, el SACEG es una forma corpórea, sensible y material de expresión, acción y pensamiento (Radford, 2017), nutrida por saberes específicos de la formación inicial de profesores de matemáticas que incluyen el saber disciplinario[2] (Tardif, 2002), producido por la tradición cultural y difundido por medio de asignaturas de geometría euclidiana y su didáctica.

Las construcciones con regla y compás portan modos de proceder en geometría que han evolucionado con el tiempo[3], en atención a una axiomática moderna y al uso de artefactos de construcción sofisticados, entre los cuales citamos el software dinámico (Arnal-Bailera y Oller-Marcén, 2020; Prieto y Arredondo, 2022). En Chile, GeoGebra ha adquirido una relevancia notable en los procesos de formación didáctica y disciplinaria del profesorado de matemáticas (MINEDUC, 2021). En su faceta de software dinámico, GeoGebra destaca por ser un artefacto cultural de naturaleza digital (Radford, 2014a) que ofrece tanto una serie de contenidos conceptuales en la forma de herramientas de construcción, como un espacio de trabajo estructurado conceptualmente para experimentar con los contenidos, producir formas novedosas de construir diagramas dinámicos (Laborde y Laborde, 1995) y validar estas construcciones.

[2] Además del saber disciplinario, el SACEG "se alimenta de un saber profesional originado en investigaciones sobre el conocimiento, habilidades y actitudes del profesor de matemáticas" (Prieto y Arredondo, 2022, p. 21). Aunque la intención no es compartimentar el SACEG, esta vertiente profesional puede otorgarle un lugar entre aquellos saberes necesarios para la enseñanza de las matemáticas.

[3] Investigaciones como la de Iranzo y Fortuny (2009) han dado cuenta de las diferencias entre los modos de proceder geométricos de los estudiantes cuando usan diferentes artefactos de construcción. En particular, estos autores exploran la influencia conjunta del uso de GeoGebra y del lápiz y papel en el aprendizaje de estos sujetos.

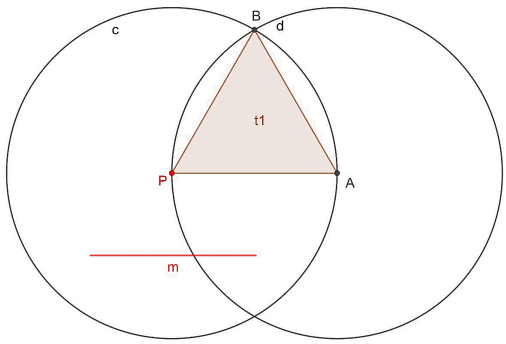
Por ejemplo, para construir con GeoGebra un triángulo equilátero conocidos el tamaño de sus lados (representado por el segmento m) y uno de sus vértices (punto P), la herramienta *Polígono* ofrece un modo de proceder guiado por la localización de los vértices del triángulo (figura 1), que toma la forma de un conjunto de acciones de construcción que llevan a producir la respuesta esperada.

Figura 1. Conceptualización del polígono por la herramienta correspondiente

La tabla 1 muestra un *procedimiento de construcción* con GeoGebra para el ejemplo anterior, formado por tres acciones y cinco operaciones[4].

Tabla 1

Ejemplo de acciones y operaciones con GeoGebra

Procedimiento de construcción del triángulo equilátero	Diagrama dinámico
A_1: Localizar el segundo vértice	
O_1: Construir la circunferencia c con centro P y radio m – *Circunferencia: centro y radio*	
O_2: Fijar un punto A en la circunferencia c – Punto	
A_2: Localizar el tercer vértice	
O_3: Construir la circunferencia d con centro A y que pasa por P – *Circunferencia (centro, punto)*	
O_4: Intersecar las circunferencias c y d en el punto B – *Intersección*	
A_3: Dibujar el triángulo	
O_5: Dibujar el triángulo t_1 con vértices P, A y B – *Polígono*	

Nota. A_n: Acción n-ésima; O_n: Operación n-ésima.

[4] Una *operación* de construcción es aquella realizada con el software y que produce una construcción auxiliar orientada al logro de la *acción* de construcción correspondiente.

Sin importar el tipo de triángulo que se construya, en el empleo de la herramienta Polígono subyace una idea moderna del triángulo (contenido conceptual) como "[...] una porción de plano limitada por tres segmentos unidos, dos a dos, por sus extremos" (Godino y Ruiz, 2002, p. 465), cuyas propiedades esenciales pueden ser reconocidas por los FPM en la construcción. Estos procedimientos son importantes para esta investigación ya que en su producción habitan procesos de objetivación del SACEG.

Toma de conciencia del SACEG

En la TO, la toma de conciencia del saber implica una reflexión, es decir, un movimiento dialéctico entre la cultura y el individuo "que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios" (Radford, 2006, p. 108). Por lo tanto, tomar conciencia del SACEG constituye un acto de reflexión y discernimiento crítico sobre determinado objeto geométrico, cuyo procedimiento de construcción puede revelar o no las propiedades esenciales que le caracterizan. Por ejemplo, el hecho de que un futuro profesor produzca una respuesta correcta al problema de la tabla 1 no implica que este sujeto reconozca inmediatamente en la desigualdad triangular esa propiedad esencial que valida la construcción realizada.

Por medio de la toma de conciencia, los FPM se encuentran con el SACEG, orientándose e interviniendo responsablemente en la resolución de los problemas de construcción euclidiana que se les proponen. Esta forma de encuentro con el SACEG implica un esfuerzo físico, mental y emocional, un desgaste de energías que la TO denomina labor conjunta.

Labor conjunta

El hecho de que los procedimientos de construcción con GeoGebra revelen o no las propiedades esenciales de los objetos geométricos evocados en un problema dado, hace necesario que los FPM transiten por un camino que los lleve al encuentro con el SACEG. En la TO, el saber "[...] se crea y recrea por medio de la actividad histórico-cultural sensual y sensible. El saber solo puede llegar a la existencia sensible mediante la actividad practica y colectiva; es decir, la actividad con otros" (Radford, 2023, p. 35).

En esta investigación, la labor conjunta hace alusión a una manera social, corpórea, sensorial y artefactual de trabajo colectivo entre los FPM y el formador, alrededor de la solución a un problema de construcción euclidiana con GeoGebra. Esta labor ocurre en contextos de formación inicial que están repletos de medios, fines, instrumentos y esfuerzos particulares y colectivos (Kosík, 1976), con los cuales se favorece tanto el encuentro progresivo con el SACEG como la transformación de los individuos en sujetos éticos y responsables. De esta manera, la labor conjunta de los FPM y el formador crea condiciones para la toma de conciencia del SACEG por la vía de la reflexión y del discernimiento crítico sobre los modos de proceder para resolver un problema de construcción.

Este posicionamiento implica aceptar que el SACEG se convierte en objeto de conciencia para los FPM cuando este saber adquiere una forma particular a través de la labor, es decir, al cobrar vida como objeto de discurso, percepción, simbolización y acción táctil (Radford y Santi, 2022). Esto significa que las formas particulares del SACEG son, al mismo tiempo, formas visuales, táctiles, auditivas, materiales, artefactuales, gestuales y cinestésicas, producidas por la labor conjunta de los FPM y el formador cuando resuelven problemas de construcción euclidiana con GeoGebra. Por lo tanto, la labor conjunta es una actividad semiótica multimodal (Radford et al., 2009), en la que intervienen diferentes recursos semióticos como palabras, gestos, símbolos y diagramas para la producción de significados sobre los objetos geométricos que subyacen en los procedimientos de construcción de los FPM.

Sobre los gestos, destacamos que éstos pueden ser deícticos, icónicos y de escritura. Según Alibali y Nathan (2007), los gestos deícticos se usan para indicar elementos visualmente perceptibles en un espacio de trabajo o que se mencionan en un espacio gestual, pero que no están visualmente presentes. Los gestos icónicos constituyen acciones o movimientos del cuerpo que representan ideas, entidades o eventos singulares o abstractos que se transmiten en palabras. Los gestos de escritura son inscripciones escritas o dibujadas sobre un soporte material que, junto al habla, enfatizan una idea o registran un dato o decisión que se tome.

Lo anterior nos permite formular los siguientes objetivos de investigación:

- ♦ Describir el modo en que futuros profesores de matemáticas y el formador usan coordinadamente palabras, gestos, símbolos y diagramas para producir significados en torno a la idea de triángulo rectángulo, durante la resolución conjunta de un problema de construcción euclidiana con GeoGebra;
- ♦ Ofrecer una explicación de la actividad semiótica multimodal desplegada por futuros profesores de matemáticas y el formador, en función de las relaciones entre el cuerpo, la percepción y el uso de signos/artefactos.

METODOLOGÍA

Contexto y participantes

En esta investigación participaron FPM cursantes del último año de la carrera de "Pedagogía en matemática y computación" de una universidad al sur de Chile. Durante las actividades del curso Didáctica de la matemática IV, estos FPM se involucraron en la resolución de construcciones euclidianas con GeoGebra. El primer autor de este trabajo actuó como formador durante el desarrollo de este tópico, bajo la supervisión de la profesora responsable del curso.

La resolución de estos problemas se organizó en tres momentos, de entre los propuestos por Radford (2023): (a) presentación del problema; (b) búsqueda de respuestas; y (c) puesta en común. Durante la puesta en común, los FPM y el formador dialogaban acerca de los procedimientos de construcción con GeoGebra producidos durante la búsqueda de respuestas. Este diálogo tenía el propósito de provocar en los FPM la reflexión y el posicionamiento crítico ante las acciones y operaciones de la construcción empleadas por ellos y, de esta manera, hacer que surgieran relaciones entre sus modos de proceder, la conceptualización detrás de la herramienta de GeoGebra utilizada y la teoría geométrica.

Uno de los problemas propuestos consistió en construir con GeoGebra un triángulo rectángulo a partir de un vértice (punto P) y del tamaño de dos de sus lados (representados por los segmentos m y n, con $m < n$). El problema admitía dos respuestas posibles: cuando m y n representan los tamaños de los catetos (para el caso 1), y cuando n representa el tamaño de la hipotenusa (caso 2). Este problema se acompañó de la hoja de trabajo que se muestra en la figura 2, esto es, un archivo de GeoGebra en la versión 5.0 (Hohenwarter, 2002) que contenía las condiciones iniciales para la construcción (P, m y n).

Problema

El archivo GGB-4 muestra los segmentos m y n, y un punto P. Con estos elementos, construir un triángulo rectángulo para el cual dos de sus lados tengan el tamaño de los segmentos m y n, y uno de sus vértices sea P.

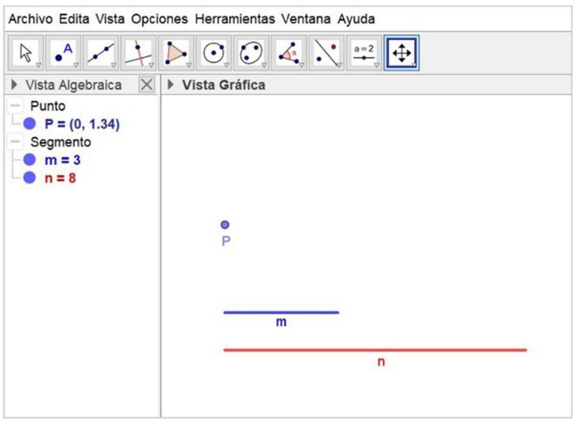
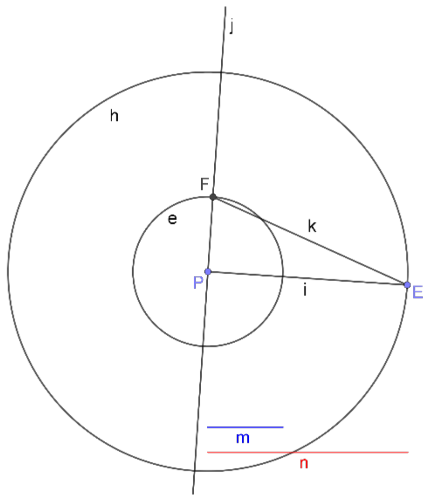


Figura 2. Enunciado del problema y hoja de trabajo correspondiente

La tabla 2 muestra una respuesta al problema, asociada al caso 1, que Raúl (uno de los FPM) compartió durante la puesta en común. En este procedimiento destaca el hecho de no haberse empleado la herramienta *Polígono* para trazar el triángulo con vértices P, E y F. Además, la respuesta incluye la operación O_7 que puede considerarse innecesaria en la construcción, según la conceptualización que ofrece esta herramienta (ver figura 1). Ambos aspectos fueron considerados por el formador como una oportunidad para reflexionar con los futuros profesores acerca de la relación entre la respuesta esperada y el espacio de trabajo de GeoGebra en donde se produce esta respuesta.

Tabla 2
Respuesta de Raúl

O_n: Descripción de la operación - Herramienta empleada	Diagrama dinámico
O_1: Se construye la circunferencia e con centro P y radio m - *Circunferencia: centro y radio*	
O_2: Se construye la circunferencia h con centro P y radio n - *Circunferencia: centro y radio*	
O_3: Se fija el punto E sobre la circunferencia h - *Punto*	
O_4: Se traza el segmento i con extremos P y E - *Segmento*	
O_5: Se construye la recta j perpendicular al segmento i por el punto P - *Perpendicular*	
O_6: Se intersecan la recta j y la circunferencia e, dando lugar al punto F - *Punto*	
O_7: Se traza el segmento k con extremos F y E - *Segmento*	

Al colocarse en diálogo, la respuesta de Raúl se tornó en la materia prima para la toma de conciencia de la idea de triángulo rectángulo (SACEG en movimiento) como porción de plano, asociada a la conceptualización detrás de la herramienta *Polígono*. En este artículo analizamos el diálogo acerca de la respuesta de Raúl al problema, durante la puesta en común.

Datos de la investigación

Los datos de la investigación se produjeron en dos momentos. Por un lado, recabamos la información necesaria mediante dos registros: (a) una cámara de vídeo, para capturar la complejidad de las interacciones sociales producidas durante la puesta en común; y (b) la hoja de trabajo con la respuesta inicial de Raúl (ver tabla 2).

Por otro lado, utilizamos un instrumento para transcribir la información de la grabación en vídeo (figura 3). En este instrumento, organizamos las enunciaciones en líneas numeradas (de manera ascendente) que mostraban lo dicho/hecho por cada participante. En algunos casos, fue necesario hacer precisiones sobre las enunciaciones, agregándoles información entre corchetes ([...]) y/o alimentándolas con imágenes del instante en el que se producía una intervención. Con esto, fue posible destacar los elementos de interacción interpersonal y de comunicación no verbal que eran difíciles de traducir con palabras (Powell y Silva, 2015).

<table>
<tr><th>Vídeo</th><th colspan="2">Materia prima</th></tr>
<tr><td>Enunciado:</td><td rowspan="3">Procedimiento de construcción:</td><td rowspan="3">Diagrama dinámico</td></tr>
<tr><td>Herramienta usada (H):</td></tr>
<tr><td>Definición de H:</td></tr>
<tr><td>Línea Nº</td><td>Contenido de la transcripción</td><td>Comentarios</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Figura 3. Instrumento para la transcripción

Análisis de los datos

Los datos de la investigación aluden a una realidad particular y caótica, en cuyo seno ha ocurrido un proceso de objetivación en torno a la idea de triángulo rectángulo, que puede explicarse según las acciones y reflexiones multimodales de los participantes. Para ofrecer esta explicación, el análisis de los datos se inspiró en el método dialéctico-materialista (Gadotti, 1995), el cual consiste en analizar sistemáticamente las tensiones y los conflictos presentes en una realidad para comprenderla en el conjunto de su movimiento.

Desde esta perspectiva, realizamos un análisis de los datos en dos etapas. En la primera etapa describimos la orientación que tomó la labor de los FPM y el formador, hacia la toma de conciencia del SACEG movilizado. Para ello, realizamos lecturas sucesivas de la transcripción que nos permitieran identificar la dinámica y estructura de la puesta en común (Moura, 2004), observando todo lo dicho/hecho por los participantes en procura de la solución al problema. De esta forma, develamos tres acciones formativas (percibir, reconocer y posicionarse) que, en su conjunto, daban cuenta tanto de las tensiones y los conflictos en el encuentro con el SACEG, como de la forma de lidiar con ello para hacer avanzar la labor hacia su objetivo. Decidimos llamar episodio al conjunto formado por estas acciones formativas.

Dado que el cuerpo es fundamental en el acto de conocer (Arzarello, 2006; Radford et al., 2009), en la segunda etapa del análisis elaboramos explicaciones de las relaciones entre el cuerpo, la percepción y el uso de signos/artefactos que, dentro de una dinámica de acciones y reflexiones multimodales, hicieron surgir y evolucionar los significados del triángulo rectángulo producidos en el episodio. De acuerdo con Radford y Sabena (2015), estas relaciones se manifiestan en el uso coordinado de palabras, gestos, símbolos, inscripciones y algunas funcionalidades de GeoGebra, para expresar una intención o una idea (la sustancia del significado) que se quiere compartir, dentro del marco de sistemas histórico-culturales de pensamiento y acción acerca del triángulo rectángulo en el espacio del software.

Para hacer esto, empleamos en el análisis los constructos de nodo semiótico y contracción semiótica de la TO. Por un lado, los nodos semióticos se definen como partes de la actividad multimodal de los estudiantes en la que diferentes recursos semióticos operan en sintonía y de forma crucial en la producción de significados (Radford, 2023; Radford et al., 2003). Por otro lado, la contracción semiótica se refiere al proceso de reorganización de los recursos semióticos que refleja un nivel más profundo de conciencia sobre los significados puestos en juego (Radford, 2023; Radford y Sabena, 2015). A partir de estas ideas, logramos identificar tanto fragmentos del episodio en las que los participantes operaron distintos recursos semióticos para producir significados acerca del triángulo rectángulo como porción de plano, como la manera en que estos sujetos reorganizaron sus recursos semióticos para alcanzar un nivel más profundo de conciencia sobre la relación entre este objeto geométrico y el espacio de trabajo que GeoGebra ofrece para su materialización como diagrama dinámico.

En atención a los objetivos de la investigación, organizamos las explicaciones ofrecidas según cuatro categorías de la actividad semiótica multimodal analizada: (a) las formas de expresión del procedimiento de construcción empleado; (b) los significados compartidos en el episodio; (c) el papel de los gestos y el diagrama para la toma de conciencia del SACEG; y (d) los cambios en la configuración de los recursos semióticos. Formulamos estas categorías a priori con base en el estudio del *Survey Team Geometry* del ICME-13 (Sinclair et al., 2017) que enfatiza el papel de los procesos semióticos y artefactos en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, desde perspectivas histórico-culturales.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación, presentamos los resultados del análisis y los discutimos a la luz de otros hallazgos.

Acciones formativas

Las acciones formativas revelan la orientación que tomó la puesta en común sobre el procedimiento de construcción del triángulo rectángulo de la tabla 2. Raúl realizó la explicación del procedimiento directamente sobre la hoja de trabajo, proyectada en la pizarra. En su explicación, el futuro profesor utilizó la *Vista Algebraica* de GeoGebra para mostrar progresivamente los elementos (esenciales y auxiliares) generados por las operaciones empleadas. Antes de comenzar, Raúl ocultó los elementos de su construcción (cónicas, puntos, rectas y segmentos), dejando al descubierto sólo los datos del problema (m, n y P, figura 4).

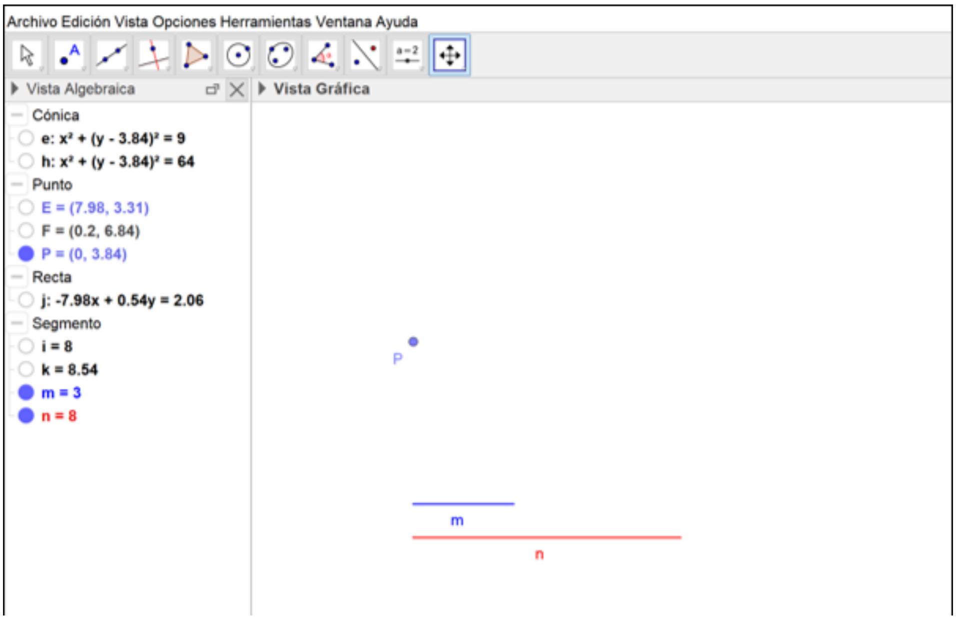


Figura 4. Apariencia de la hoja de trabajo antes de la explicación de Raúl

La explicación de Raúl reveló un conflicto determinado por las diferencias entre: (a) el modo de proceder del futuro profesor para resolver el problema, controlado por una forma de pensar en el triángulo rectángulo como la reunión de sus lados (Moise y Downs, 1972); y (b) el modo de proceder para construir este objeto geométrico con GeoGebra, controlado por la idea de triángulo como una porción de plano (Godino y Ruiz, 2002) que subyace en la herramienta *Polígono*. La tensión entre estos modos de proceder dio origen a las tres acciones formativas que describimos seguidamente.

Percibir

La primera acción formativa da cuenta del modo en que los participantes percibieron inconsistencias en el diagrama de Raúl (figura 5), a partir de la explicación que él ofreció del procedimiento de construcción. Los datos muestran que percibir estas inconsistencias no fue un asunto fácil para los FPM ya que, como muestra el análisis, la mayoría de ellos coincidía con Raúl en que la reunión de $\overline{PF}$, $\overline{FE}$ (k en la figura 5) y $\overline{PE}$ (i en la figura 5) era la solución al problema.

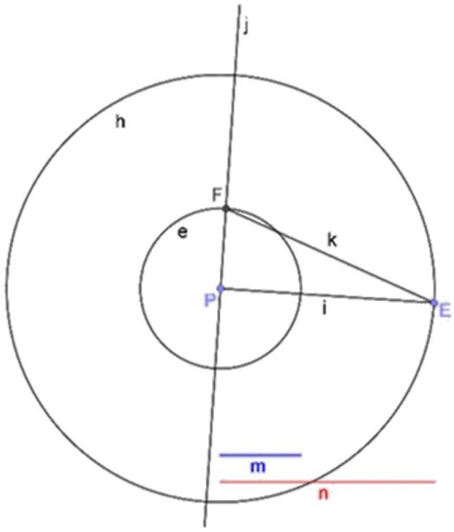


Figura 5. Diagrama producido por Raúl

Esta forma de pensar en el triángulo rectángulo surgió desde los primeros instantes de la explicación de Raúl. De hecho, al responder la pregunta del formador sobre el papel de h (O_2) en su construcción (línea 5), el futuro profesor mostró estar pensando en el trazado del lado del triángulo de tamaño n y no en la localización del segundo vértice de este objeto (línea 6), como lo sugiere la herramienta *Polígono*. Además de este aspecto, los primeros instantes de la explicación de Raúl revelan dos cuestiones que afectaron el desarrollo del episodio. Por un lado, el futuro profesor explicó las operaciones de la construcción en un orden diferente al de la tabla 2 (la línea 2 muestra a Raúl explicando O_2 antes que O_1). Por otro lado, el formador estableció vínculos entre las operaciones del procedimiento y las acciones correspondientes, empleando distintos recursos semióticos (línea 7).

2. Raúl: ¡Ya! Lo primero que hice fue marcar una circunferencia con centro en P y radio n, que es la circunferencia h [muestra a h en la interfaz (figura 6)].

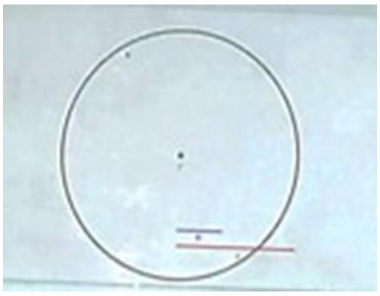


Figura 6. Circunferencia h con centro P y radio n

5. Formador: Con esto que hiciste [refiriéndose a O_2], ¿qué se garantiza, Raúl?

6. Raúl: Que ya tenemos en este momento un lado cuya longitud es de medida n.

7. Formador: Exacto. Sabemos en qué parte del plano puede estar localizado el segundo vértice del triángulo. Porque éste es un vértice [señala a P (figura 7a)], pero hay un segundo vértice que debe estar por aquí [señala a h con un giro del dedo índice por la curva (figura 7b)], en alguno de estos puntos [...] en esta curva que se llama h.

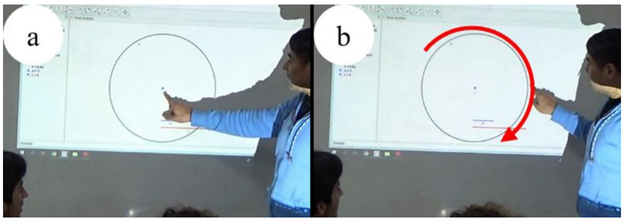


Figura 7. El formador señala el centro y borde de la circunferencia h

Estas cuestiones continuaron surgiendo cuando Raúl explicó las operaciones O_3 y O_4 (tabla 2). Por ejemplo, la línea 23 muestra el primer inconveniente que el futuro profesor tuvo para realizar su explicación, cuando mostró a k en lugar de i, generando un conflicto porque k se mostraba sólo con uno de sus extremos. Lo anterior fue resuelto tras la intervención del formador (línea 24). Por su parte, la línea 25 muestra que Raúl pensó el triángulo rectángulo como reunión de sus lados, al considerar a i como cateto. Además, la línea 16 muestra al futuro profesor arrastrando E hacia otra posición en h para hacer "más cómoda" la explicación, dando cuenta de la necesidad que él tuvo de orientar los catetos del triángulo en posición horizontal y vertical.

16. Raúl: Luego, se traza un punto E [muestra a E sobre h (figura 8a)]. Yo lo voy a poner por acá [arrastra a E a otra posición en h (figura 8b)] porque es más cómodo, pero pertenece a la circunferencia h.

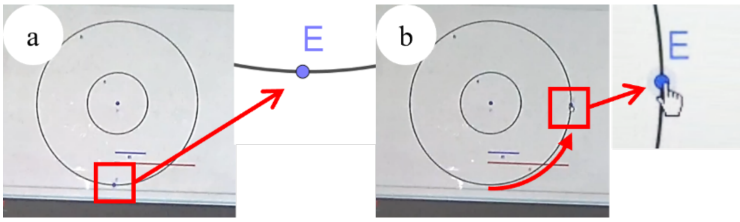


Figura 8. Arrastre del punto E sobre la circunferencia h

23. Raúl: Y luego se traza un segmento... [muestra a k (figura 9)].

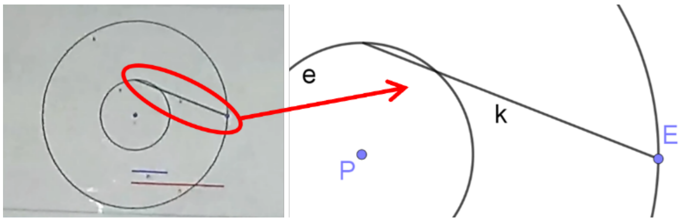


Figura 9. Segmento k con extremos F y E

24. Formador: Ése no es [se refiere a k].

25. Raúl: Un segmento i que une P y E [oculta a k y muestra a i (figura 10)], que representa un cateto del triángulo que tiene la medida n.

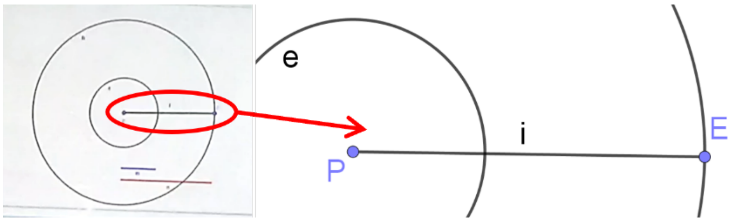


Figura 10. Segmento i con extremos P y E

Más adelante, Raúl continuó teniendo inconvenientes para realizar su explicación. Esta vez, el conflicto surgió cuando el futuro profesor explicó O_6 antes de O_5. Con respecto a esto, la línea 31 muestra que, al expresar O_6, Raúl mencionó a F sin destacarlo como la intersección entre e (O_1) y j (O_5), haciendo que su forma de expresar la operación entrara en conflicto con la del formador. Para superar este conflicto, el formador guio la atención de los FPM hacia el atributo de color que GeoGebra otorga a los puntos dibujados en su interfaz (línea 32). En respuesta, Claudio (otro de los FPM) trató de hacer ver a Raúl que el trazado de j precedía la localización de F (línea 33), logrando que él cayera en cuenta (líneas 34 y 36). El diálogo sostenido por Claudio y el formador en las líneas 35, 37, 38 y 39 revela que el futuro profesor reconoció en el color de F su dependencia de j.

31. Raúl: Por lo tanto, ahora se traza otro punto F [muestra a F sobre e (Figura 11)].

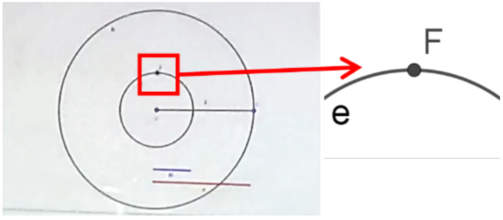


Figura 11. Punto F, generado a partir de la intersección de j y e

32. Formador: ¿En la circunferencia? ¿En e? [señala a e haciendo un movimiento circular sobre el trazado (figura 12a)]. Pero... es raro ese punto, porque cuando él [refiriéndose a Raúl] colocó este punto [señala a E sobre h (figura 12b)] aparece de color azul.

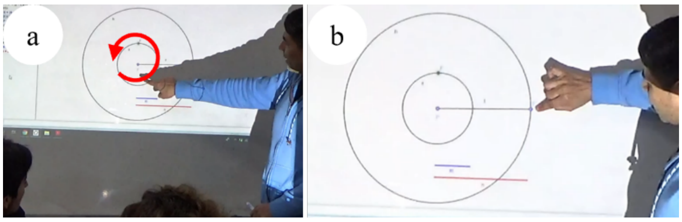


Figura 12. El formador señala la circunferencia e y el punto E

33. Claudio: Es que trazaste la recta primero [dirigiéndose a Raúl, Claudio se refiere a la recta j perpendicular a i por P].

34. Raúl: ¡Ah! Sí, sí.

35. Formador: ¡Ah...! ¿Qué te hizo pensar que le faltaba algo? [dirige la pregunta a Claudio].

36. Raúl: Para sacar la perpendicularidad.

37. Formador: Pero ¿qué te hizo pensar que a él [a Raúl] le faltaba algo en su explicación? [dirige la pregunta a Claudio].

38. Claudio: El puntito es negro [se refiere al color de F sobre e].

39. Formador: ¡El color del punto! Porque cuando [un punto] aparece negro [en la interfaz de GeoGebra], ése debe ser un punto de intersección.

Tras la intervención de Claudio, Raúl explicó O_5, y al hacerlo, su forma de expresar la operación volvió a entrar en conflicto con la del formador. En esta ocasión, Raúl mencionó a j sin destacar el punto por donde ésta pasa (P) y el objeto que le otorga dirección (i), elementos necesarios para su trazado (línea 40). Esta situación se superó a medida que el formador, Raúl e Inés (otra de los FPM) fueron complementando esta forma de expresión (líneas 43 a la 47). En esta dinámica, se observa que Raúl: (a) recurrió a la descripción que GeoGebra proporciona de los objetos construidos en su interfaz (línea 44); y (b) utilizó el cursor para indicar la intersección que dio origen a F, haciendo ver que “ahí se forma el punto” (línea 47).

40. Raúl: Sí. Se traza la perpendicular j [muestra la recta j perpendicular a i por P (figura 13)].

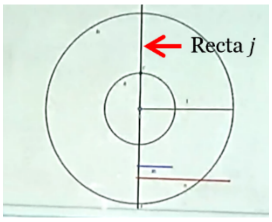


Figura 13. Recta j perpendicular a i por P

43. Formador: A ver, ¿cómo se llama la recta, la que trazaste?

44. Raúl: [coloca el cursor sobre j para leer la descripción del objeto (figura 14)]. Pasa por P y es perpendicular a i.

Figura 14. Descripción de la recta j proporcionada por el software

45. Inés: Recta j.

46. Formador: Se llama j. “Se construye la recta j que es perpendicular...” ¿a quién?, ¿por dónde? [escribe en la pizarra y dirige las preguntas a Raúl].

47. Raúl: [j es perpendicular] A i por P. Por lo tanto, ahí [en la intersección de e y j] se forma el punto F [desplaza el cursor hasta el punto (figura 15)].

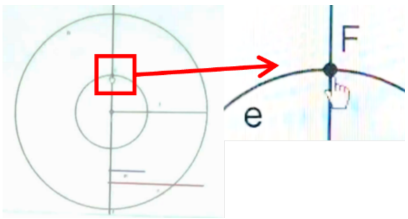


Figura 15. Punto F, generado por la intersección de j y e

Luego de la explicación, el formador pidió al resto del grupo fijar posición sobre la respuesta de Raúl (línea 82), considerando los objetos dados en el enunciado del problema (línea 107). Los datos revelan que los FPM cuestionaron la ausencia de ciertos elementos en el diagrama. Por un lado, Alberto notó la falta del trazado del lado $\overline{PF}$ del triángulo (línea 83). Por otro lado, Raúl notó la falta de la marca (el símbolo) característica del ángulo recto en P (línea 86). Finalmente, las intervenciones de Inés y Claudio parecieron estar más próximas a la percepción de la ausencia del polígono. En el caso de Inés, ella advirtió que al diagrama le faltaba "el final" (línea 84). Por su parte, al preguntar "¿ingresaste los vértices?" a Raúl, Claudio pareció pensar en la herramienta *Polígono* de GeoGebra (línea 108).

82. Formador:	¿Qué opinión tienen ustedes de esta respuesta? [dirige la pregunta a los FPM].
83. Alberto:	¡Le falta un lado!
84. Inés:	¡Le falta el final!
86. Raúl:	¡Ah! ¿El ángulo?
107. Formador:	m y n deben ser lados del triángulo y P debe ser vértice. Claudio, ¿estás de acuerdo con esta respuesta?
108. Claudio:	Es que... ummm... es que, como uso la... o sea, ¿ingresaste los vértices? [dirige la pregunta a Raúl].

A pesar de los acercamientos de Inés y Claudio a la idea de triángulo como polígono, los datos revelan que la observación directa del diagrama dinámico no fue suficiente para que los FPM lograran percibir del todo las inconsistencias existentes. Esto hizo necesario otros esfuerzos que permitieran lograr tal cometido, los cuales comentamos a continuación.

Reconocer

La segunda acción formativa tuvo un doble propósito. Por un lado, se buscó que los FPM reconocieran la ausencia del triángulo rectángulo con vértices P, E y F en el diagrama de Raúl, es decir, que no se contaba con una respuesta. Por otro lado, se buscó que ellos reconocieran la razón de esta ausencia en la falta de uso de la herramienta *Polígono*. Para lograr ambas cosas, fue necesario evocar la idea de triángulo como porción de plano y hacer que ésta entrase en conflicto con la idea de triángulo como la reunión de sus lados —compartida por los FPM en la acción formativa anterior—.

Según los datos, la idea de triángulo como porción de plano surgió en la actividad a partir de una intervención del formador (línea 111) que cuestionó la respuesta ofrecida por Raúl y guio la atención de los FPM hacia la "naturaleza" del triángulo en el espacio de trabajo de GeoGebra. Tras una dinámica de preguntas y respuestas (líneas 111 a la 120), el formador se dirigió hacia la *Vista Algebraica* del software para mostrar a los estudiantes que el triángulo rectángulo, representado como polígono, no fue construido por Raúl (línea 121), provocando reacciones en señal de convencimiento (línea 122).

111. Formador:	¡Eso! Eso es lo que necesito ahora, que seamos críticos con el diagrama. Aparentemente, eso es una respuesta [refiriéndose al diagrama de Raúl], pero no lo es del todo. No lo es, porque el objeto que me están pidiendo, "triángulo", todavía no está aquí construido [coloca su mano sobre el diagrama]. Les recuerdo una cosa muy importante, y así voy a defender a Raúl. Si estuviéramos en el siglo XVIII, en los tiempos de Tosca [se refiere al autor del tratado Compendio Mathematico], ¿cómo se referían a esta tarea? No sé si se lo recuerdan, pero Tosca decía "y tírense los segmentos tal y tal" y ahí se tenía la respuesta. Eso está bien en [el entorno de] regla y compás. Nosotros estamos [sumergidos] en un medio diferente y, en este medio tecnológico, el resultado que debo entregar debe ser de la naturaleza del objeto que me están pidiendo que construya. ¿Qué nos están pidiendo que construyamos aquí? [dirige la pregunta a los FPM].
112. Claudio:	Un triángulo.
113. Formador:	Un triángulo. ¿Y qué es un triángulo, en esencia?
114. Claudio:	Un cuerpo geométrico... ¡Una figura geométrica!
115. Alberto:	Es una figura geométrica.
116. Formador:	Es una figura. ¿Y qué tipo de figura es?
117. Claudio:	Plana.
118. Alberto:	Plana.
119. Formador:	¿Y cómo se llama la figura plana a la que pertenecen los triángulos?
120. Claudio:	Polígonos.
121. Formador:	¡Polígono! ¿Y dónde está el polígono construido aquí? [desplaza su mano por el diagrama en la pizarra (figura 16)] ¡No existe!

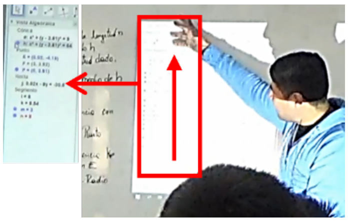


Figura 16. El formador señala la vista algebraica en la hoja

122. FPM:	[se sonríen y murmuran].

Esta dinámica permitió a Alberto pasar de una forma de pensar en el triángulo como la reunión de sus lados —al cuestionar el trazado de k— a la idea de este objeto como polígono —al sugerir el uso de la herramienta *Polígono*— (línea 123).

En otras palabras, la interacción con el formador logró que Alberto tomara conciencia del modo de proceder para construir el triángulo en el espacio de trabajo de GeoGebra. Finalmente, el formador aprovechó la intervención de Alberto para destacar el papel de i en la construcción de Raúl (línea 124), como elemento que garantiza el ángulo recto del triángulo.

123. Alberto: En ese caso, en vez de haberse trazado el segmento que utilizaron por hipotenusa [se refiere a k], teniendo los tres puntos [vértices del triángulo], [Raúl] debió haber utilizado la herramienta Polígono y ya.

124. Formador: ¡Y ya está! Incluso, ustedes pueden pensar que él [se refiere a Raúl] no debió dibujar el segmento i, pero no. Eso fue importante porque sin el segmento i no hay perpendicularidad. Ésa es la función que tiene i, pero, en el fondo, no necesito dibujar segmentos si debo dibujar un polígono.

La necesidad de utilizar la herramienta *Polígono* sentó las bases para que Raúl ofreciera una verdadera respuesta al problema, como mostramos a continuación.

Posicionarse

La tercera acción formativa revela dos cuestiones. Por un lado, Raúl se posicionó ante su respuesta tras añadir una nueva operación (O_8) al procedimiento de construcción que consistió en dibujar el triángulo con vértices P, F y E, usando la herramienta *Polígono*. Este posicionamiento surgió en respuesta a los cuestionamientos del formador durante la acción formativa de reconocer. Además de lo anterior, Raúl ocultó los elementos auxiliares de su construcción, en medio de la discusión que Alberto y Claudio sostenían sobre qué elementos ocultar para ofrecer la respuesta al problema (líneas 126, 128, 129, 135 y 136).

126. Alberto: Importan la recta [j] y el segmento i [se refiere a ocultar estos elementos].

128. Claudio: No, importa la pura recta y listo [sugiriendo a Alberto ocultar sólo a j].

129. Alberto: No, pero el segmento i igual. Ya se dibujó el triángulo. No se necesita para...

135. Claudio: Pero si ya todo está oculto. [En la pantalla] solo está el triángulo, no más.

136. Alberto: ¡No! [mientras tanto, Raúl oculta a i (figura 17)]. Ahora sí.

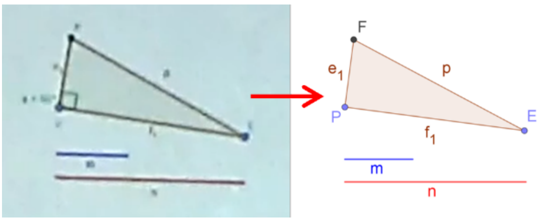


Figura 17. Triángulo con vértices F, P y E

Por otro lado, el formador se posicionó ante la demanda de GeoGebra para construir un triángulo rectángulo con las propiedades declaradas en el problema. Al respecto, él llamó la atención de Raúl sobre la necesidad de construir este triángulo con la herramienta *Polígono* para ofrecer una respuesta al problema, e insistió en diferenciar los modos estático y dinámico de proceder para construir el triángulo rectángulo (línea 139).

139. Formador: Raúl, éste es un entorno diferente al de regla y compás, pero que cumple con las reglas de la geometría. Debemos tratar de ajustar nuestro pensamiento a esto nuevo. Con regla y compás es suficiente con trazar los segmentos y ya, tengo mi triángulo. Aquí en GeoGebra, sí se debe dibujar el polígono. Y como dice Alberto, con hallar los vértices es suficiente. Entonces, aquí, en tu procedimiento [señala el procedimiento escrito en la pizarra] hay operaciones que se deben incluir, como la construcción del polígono, y hay cosas que eliminar como, por ejemplo, la construcción de k. El segmento k no es necesario. El segmento i sí lo es porque para dar la perpendicular necesitaba a i.

La actividad semiótica en el episodio

Sobre las formas de expresar el procedimiento de construcción del triángulo rectángulo con GeoGebra, identificamos tres nodos semióticos que dan cuenta de ciertas variaciones.

En primer lugar, observamos un nodo semiótico en la forma en que Raúl expresó las operaciones O_2, O_3 y O_4, mediante enunciaciones constituidas por palabras y símbolos para caracterizar cada elemento construido, según el requerimiento de la herramienta utilizada. Por ejemplo, al expresar O_2, el futuro profesor dijo haber trazado “una circunferencia con centro en P y radio n, que es la circunferencia h” (palabras y símbolos, línea 2). En este ejemplo, vemos cómo la enunciación de Raúl aportaba la información necesaria (centro y radio) para utilizar adecuadamente la herramienta *Circunferencia: centro y radio*.

En segundo lugar, identificamos un nodo semiótico en la forma en que Raúl expresó O_5 y O_6, operaciones referidas a las relaciones geométricas de perpendicularidad e intersección. En estos casos, la forma de expresar cada operación demandaba al futuro profesor enunciar los elementos que tenían lugar en estas relaciones. Al hacer esto, notamos que Raúl se apoyó más en el diagrama que en los signos lingüísticos, produciendo un cambio en la actividad semiótica desplegada con respecto al nodo anterior. Por ejemplo, para expresar O_6, él dijo "ahí se forma el punto F" (palabras y símbolos, línea 47) y utilizó el cursor para señalar el punto en el diagrama (a manera de gesto deíctico). El uso coordinado del pronombre demostrativo "ahí" y del cursor sirvió a Raúl para expresar la idea de intersección entre e y j.

Finalmente, reconocimos un nodo semiótico en la forma de expresar las operaciones del procedimiento por el formador, la cual era similar a la de Raúl para el primer nodo en el sentido de emplear enunciaciones con las cuales se caracterizaba a cada elemento construido, según la conceptualización detrás de la herramienta utilizada. Esta forma de expresión del formador entró en conflicto con la de Raúl para el segundo nodo, produciendo tensiones en la explicación de O_5 y O_6, que el primero buscó resolver deliberadamente. Por ejemplo, la forma de expresar O_5 de Raúl (línea 40) fue utilizada por el formador como punto de partida para acercar al futuro profesor a la forma de expresión que él puso de manifiesto en el primer nodo (líneas 43 a la 47).

En cuanto a los significados compartidos en el episodio, el análisis muestra dos formas de pensar en el triángulo rectángulo que se mantuvieron en conflicto.

El primer significado del triángulo –como reunión de sus lados– surgió de la mano de Raúl quien, en varias ocasiones, manifestó su intención de trazar los lados del triángulo para entregar una respuesta. Por ejemplo, al explicar O_4, el futuro profesor afirmó que i "representa un cateto del triángulo" (línea 25), otorgando a este elemento un estatus de lado que opacaba su papel como referente para el trazado de j por P. Esta misma idea sobre i fue evocada por Claudio durante la acción formativa de posicionarse, al no reconocerle como un elemento auxiliar de la construcción (línea 128). Además, el hecho de arrastrar a E para colocarlo en una posición "más cómoda" sobre h (línea 16) mostró que Raúl le atribuyó al triángulo una propiedad no esencial referida a sus lados, según la cual los catetos se orientan vertical y horizontalmente. Esto da cuenta de un fenómeno de rigidez geométrica que, según Larios (2003), puede interpretarse como la incapacidad de Raúl de pensar y operar sobre el triángulo cuando el diagrama dinámico asociado se muestra de un modo no prototípico.

El segundo significado del triángulo –como porción de plano– fue compartido por el formador en la segunda acción formativa, cuando trató de hacer ver a los FPM que el modo de proceder de Raúl para responder al problema no entregaba una solución acorde a las características del espacio de trabajo de GeoGebra (línea 111). Esto culminó con el uso de la *Vista Algebraica* por el formador como un medio semiótico para mostrar a los estudiantes la inexistencia de la categoría "triángulo", de entre los objetos expuestos en esta vista (línea 121).

Con relación al papel de los gestos y el diagrama para la toma de conciencia del SACEG, encontramos que ambos recursos semióticos cumplieron funciones específicas en el episodio. Por un lado, los gestos fueron recurrentes en las enunciaciones de Raúl y del formador para expresar las operaciones de la construcción. No obstante, existieron diferencias notables sobre el modo de materializar estos gestos.

En el caso del formador, los gestos deícticos e icónicos surgieron a partir de la interacción entre el cuerpo y el diagrama proyectado en la pizarra. En consecuencia, estos gestos se realizaron directamente sobre el diagrama para indicar y/o representar los objetos de la construcción (p. ej., ver línea 7). En el caso de Raúl, estos gestos se materializaron mediante la interacción entre el cursor –como una extensión perceptiva del cuerpo (Bairral, 2020), que permitió al futuro profesor llegar hasta donde su mano no podía– y el diagrama manipulado en el computador. A diferencia del formador, los gestos deícticos e icónicos de Raúl se realizaron dentro del espacio de trabajo de GeoGebra, aunque con un propósito similar al del primero (p. ej., ver línea 47). Ambas formas de materialización de los gestos responden al lugar que ellos ocuparon en la sala: Raúl se mantuvo frente al computador, mientras que el formador permaneció frente a la pizarra.

Por otro lado, el diagrama fue utilizado junto a otros recursos semióticos para atender situaciones de conflicto que demandaban respuestas inmediatas, en pro de avanzar en la actividad. Una de estas situaciones surgió en medio de la explicación de O_5, en la cual Raúl sólo mencionó a j sin hacer explícitas las relaciones conceptuales con P e i (línea 40). Ante la exigencia del formador de completar la enunciación de esta operación, el futuro profesor utilizó el diagrama a su favor, recurriendo a la descripción que GeoGebra ofrecía de j (línea 44). Otra situación de conflicto se presentó a partir de la inconsistencia en el orden en que Raúl explicó O_5 y O_6. En respuesta a esto, el formador recurrió al diagrama para llamar la atención del estudiante sobre el hecho de mostrar a F (O_6) sin relación con los objetos que lo determinaban (e y j). Específicamente, el formador se apoyó en el atributo de color de GeoGebra para distinguir entre puntos libres y dependientes de otros objetos (línea 32), permitiendo con ello que Raúl reorganizara la explicación de esas operaciones.

Finalmente, observamos un cambio en la configuración de los recursos semióticos por parte de Raúl hacia el final de la acción formativa de percibir, manifestado en medio de las dificultades que él tuvo para explicar O_5. Como se mencionó, al expresar esta operación, Raúl produjo una enunciación que sólo consideró a j pero no a los objetos que la generaron (línea 40), dejando entrever que no era totalmente consciente de la relación de perpendicularidad subyacente en su construcción.

Ante esto, el formador intervino para hacer ver al futuro profesor la importancia de describir los elementos que determinaban la construcción de j para expresar O_5, mediante una dinámica de preguntas y respuestas (líneas 43 a la 47) guiada por la conceptualización detrás de la herramienta *Perpendicular*. Al caer en cuenta, Raúl recurrió a la descripción de j en GeoGebra (línea 44), logrando refinar la enunciación de O_5. Esto es evidencia de una contracción semiótica, ya que el Raúl produjo un refinamiento de su enunciación, al sustituir la frase "se traza la perpendicular j" por la descripción de GeoGebra "Recta j: Recta que pasa por P perpendicular a i". Este modo de proceder confirma los resultados de Schacht (2018) sobre la tendencia de los estudiantes de adoptar diferentes expresiones léxicas que GeoGebra ofrece para comunicar sus procedimientos de construcción geométrica.

Conclusiones

En este artículo ofrecimos una comprensión de la actividad multimodal que permitió producir significados alrededor de la idea de triángulo rectángulo, cuando FPM y el formador se involucraron en la resolución de un problema de construcción euclidiana con GeoGebra. Para esto, realizamos un análisis de los datos en dos etapas que nos permitió describir el modo en que los FPM y el formador emplearon coordinadamente palabras, gestos, símbolos y diagramas para dotar de significado al SACEG movilizado durante la resolución del problema, y ofrecer una explicación de las relaciones entre el cuerpo, la percepción y el uso de signos/artefactos para la toma de conciencia de este saber.

Del análisis se desprenden dos conclusiones. La primera tiene que ver con la explicación de las operaciones del procedimiento de construcción, la cual resultó en un acto más o menos complicado para los FPM dada: (a) la naturaleza del objeto explicado, en razón del espacio de trabajo de GeoGebra; y (b) la manera de ofrecer la explicación.

Con respecto a (a), para Raúl fue complicado explicar las operaciones referidas a relaciones geométricas debido a que éstas requieren explicitar los elementos que las definen. Esto hace necesario recuperar el papel que la descripción de los procedimientos de construcción ha tenido históricamente en la actividad geométrica y que, actualmente, se ha visto relegada a un segundo plano en el aula de matemáticas, dado el énfasis otorgado a la reproducción de estos procedimientos como algoritmos preestablecidos (Kuzle, 2013).

En cuanto a (b), Raúl decidió explicar su procedimiento de construcción apoyado en la *Vista Algebraica*. La dificultad con esta decisión estuvo en mostrar y ocultar los elementos del dibujo obedeciendo a la lista de objetos creados en esta vista del software y no a la secuencia de las operaciones empleadas por el futuro profesor. Sin embargo, desde la perspectiva dialéctica-materialista, consideramos que esta manera de explicar de Raúl no constituyó un error de su parte, sino una oportunidad para que la producción de significados alrededor del triángulo rectángulo ocurriera de la forma mostrada en el episodio.

La segunda conclusión tiene que ver con el papel del formador en la producción de significado para el triángulo rectángulo como porción de plano. Al respecto, el análisis dio cuenta de que este sujeto aportó al diálogo sus formas idiosincráticas de pensar, actuar y sentir geométricamente como un formador de profesores, cumpliendo así un rol ético en la labor (Radford, 2017). No obstante, asumir este rol para desempeñarse en la puesta en común no le libró de exponerse a las tensiones y diferencias inherentes a todo acto de significación. Radford (2023) señala que "la labor conjunta y, con ella, la enseñanza y el aprendizaje, [...] aparecen como mucho más que una interacción social. Es portadora de múltiples y controvertidos hilos de historia y cultura, de tensiones y conflictos" (p. 282). Esto se corresponde con lo complejo que resulta la labor de un profesor/formador que trata constantemente con la variedad de recursos semióticos que sus estudiantes traen a la actividad del aula para producir y compartir significados históricamente constituidos (Moura et al., 2017).

Consideramos que la comprensión de la actividad multimodal analizada en el artículo constituye un aporte a la Educación Matemática, en cuanto al aprendizaje en geometría de FPM. A partir del estudio, reconocemos una cierta dimensión digital de los signos que aparece cuando se resuelven problemas de construcción euclidiana con GeoGebra, al mismo tiempo que somos conscientes de la necesidad de profundizar en nuestra comprensión de las implicaciones de esta dimensión para el aprendizaje del profesor en formación inicial. En futuros estudios, una mejoría que podría tenerse en cuenta, en lo que respecta a la implementación de las tareas, es crear condiciones para la emergencia de actividades multimodales de los FPM organizados en pequeños grupos, en el momento de búsqueda de respuestas a los problemas planteados.

Para finalizar, destacamos la importancia de seguir promoviendo encuentros entre los FPM con el SACEG, en tanto saber necesario para enseñar matemáticas. Aún queda trabajo por hacer, desde el estudio y la promoción del aprendizaje del futuro profesor de matemáticas, para que el encuentro con el SACEG permita a los futuros profesores reconocer y dar sentido a las propiedades esenciales de los objetos geométricos que subyacen en los procedimientos de construcción con

GeoGebra empleados por ellos. También queda camino por recorrer para investigar la toma de conciencia de saberes docentes en general y del SACEG en particular, como procesos mediados por la dimensión material de la cultura de formación inicial de profesores de matemáticas y por las interacciones sociales que en ella tienen lugar.

REFERENCIAS

Alibali, M. W. y Nathan, M. J. (2007). Teachers' gestures as a means of scaffolding students' understanding: evidence from an early algebra lesson. En R. Goldman, R. Pea, B. Barron y S. J. Derry (Eds.), *Video research in the learning sciences* (pp. 349-365). Erlbaum.

Arnal-Bailera, A. y Oller-Marcén, A. M. (2020). Construcciones geométricas en GeoGebra a partir de diferentes sistemas de representación: un estudio con maestros de primaria en formación. *Educación Matemática*, *32*(1), 67-98. https://doi.org/10.24844/EM3201.04

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking*, *9*(1), 267-299.

Arzarello, F. y Paola, D. (2007). Semiotic games: the role of the teacher. En J. Woo, H. Lew, K. Park y D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 2* (pp. 17-24). The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Bairral, M. (2020). Not only what is written counts! Touchscreen enhancing our cognition and language. *Global Journal of Human-Social Science*, *20*(5-G), 1-10. https://doi.org/10.34257/GJHSSGVOL20IS5PG1

Cedro, W. L. y Moura, M. O. (2017). O conhecimento matemático do professor em formação inicial: uma análise histórico-cultural do processo de mudança. En V. D. Moretti y W. L. Cedro (Eds.), *Educação matemática e a teoria histórico-cultural: um olhar sobre as pesquisas* (pp. 87-121). Mercado de Letras.

Dias, M. S. y Souza, N. M. M. (2017). A atividade de formação do professor na licenciatura e na docência. En M. O. Moura (Ed.), *Educação escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural* (pp. 183-209). Edições Loyola.

Gadotti, M. (1995). *Concepção dialética da educação: um estudo introdutório. 9ª edição*. Cortez.

Godino, J. D. y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf

Groenwald, C. L. O. y Llinares, S. (2022). Aprendiendo a mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza de las matemáticas. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, *2*(2), e202202. https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.29

Hohenwarter, M. (2002). *GeoGebra* (Versión 5.0) [Software o aplicación móvil]. https://www.geogebra.org

Iranzo, N. y Fortuny, J. M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(3), 433-446. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3653

Kosík, K. (1976). *Dialectics on the concrete. A study on problems of man and world*. D. Reidel Publishing Company.

Kuzle, A. (2013). Constructions with various tools in two geometry didactics courses in the United States and Germany. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the eighth congress of the European Society of Research in Mathematics Education* (pp. 675-684). CERME.

Laborde, C. y Laborde, J. M. (1995). What about a learning environment where euclidean concepts are manipulated with a mouse? En A. A. diSessa, C. Hoyles, R. Noss y L. D. Edwards (Eds.), *Computers and Exploratory Learning* (pp. 241-261). Springer.

Larios, V. (2023, February 28–March 3). *Geometrical rigidity: An obstacle in using dynamic geometry software in a geometry course*. Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Bellaria, Italy. http://erme.site/cerme-conferences/cerme3/cerme-3-proceedings/

Maffia, A. y Sabena, C. (2014, July 20–24). Networking of theories as resource for classroom activities analysis: the emergence of multimodal semiotic chains. En B. Di Paola y C. Sabena (Eds.), *Teaching and learning Mathematics: Resources and obstacles, Proceedings of the CIEAEM 67, Quaderni di Ricerca didattica, 25-2* (pp. 405-417). Aosta.

Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2021). *Estándares pedagógicos y disciplinarios para carreras de pedagogía en matemática*. MINEDUC.

Moise, E. y Downs, F. (1972). *Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company.

Moura, M. O. (2004). Pesquisa colaborativa: um foco na ação formadora. En R. L. L. Barbosa (Ed.), *Trajetórias e perspectivas da formação de educadores* (pp. 257-284). Unesp.

Moura, M. O., Sforni, M. S. F. y Lopes, A. R. L. V. (2017). A objetivação do ensino e o desenvolvimento do modo geral da aprendizagem da atividade pedagógica. En M. O. Moura (Ed.), *Educação escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural* (pp.71-99). Edições Loyola.

Powell, A. B. y Silva, W. Q. (2015). O vídeo na pesquisa qualitativa em educação matemática: investigando pensamentos matemáticos de alunos. En A. B. Powell (Ed.), *Métodos de pesquisa em educação matemática usando escrita, vídeo e internet* (pp. 15-60). Mercado de Letras.

Prieto, J. L. y Arredondo, E.-H. (2022). Diseño de un entorno de aprendizaje del saber docente acerca de las construcciones euclidianas con GeoGebra. *Educación Matemática*, *34*(2), 7-38. https://doi.org/10.24844/EM3402.01

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. *Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking*, *9*(1), 103-129.

Radford, L. (2014a). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(3), 405-422. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9527-x

Radford, L. (2014b). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132-150.

Radford, L. (2017). Ser, subjetividad y alienación. En B. D'Amore y L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 137-165). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. (2023). *La teoría de la objetivación: Una perspectiva Vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Facultad de Educación de la Universidad de Los Andes.

Radford, L. y Sabena, C. (2015). The question of method in a vygotskian semiotic approach. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education* (pp. 157-182). Springer.

Radford, L. y Santi, G. (2022). Learning as a critical encounter with the other: prospective teachers conversing with the history of mathematics. *ZDM – Mathematics Education*, 1-14. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01393-z

Radford, L., Demers, S., Guzmán, J. y Cerulli, M. (2013, July 13–18). Calculators, graphs, gestures, and the production meaning. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME27 - PMENA25)* (vol. 4, pp. 55-62). Universidad de Hawaii.

Radford, L., Edwards, L. y Arzarello, F. (2009). Introduction: beyond words. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 91-95. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9172-y

Sabena, C. (2018). Multimodality and the semiotic bundle lens: A constructive resonance with the theory of objectification. *PNA, 12*(4), 185-208. https://doi.org/10.30827/pna.v12i4.7848

Schacht, F. (2018). Between the conceptual and the signified: how language changes when using dynamic geometry software for construction tasks. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *4*, 20-47. https://doi.org/10.1007/s40751-017-0037-9

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2017). Geometry education, including the use of new technologies: a survey of recent research. En G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education.* (pp. 277-287). ICME-13 Monographs. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_18

Tardif, M. (2002). *Los saberes del docente y su desarrollo profesional*. Narcea Editores.

Juan Luis Prieto G.
Universidad Arturo Prat, Chile
juprieto@unap.cl

Rafael Enrique Gutiérrez-Araujo
Asociación Aprender en Red, Venezuela
rafael.gutierrez0593@gmail.com

Elizabeth-H. Arredondo
Universidad de los Lagos, Chile
elizabeth.hernandez@ulagos.cl

Recibido: enero, 2023. Aceptado: octubre, 2023
doi: 10.30827/pna.v18i4.27166

ISSN: 1887-3987

EUCLIDEAN CONSTRUCTIONS WITH GEOGEBRA: A STUDY ON THE PRODUCTION OF MEANINGS WITH PRE-SERVICE TEACHERS

Juan Luis Prieto G., Rafael Enrique Gutiérrez-Araujo, and Elizabeth-H. Arredondo

From a historical-cultural educational approach, learning geometry in the school context involves developing processes of meaning-making in which various semiotic resources come into play, allowing students and teachers to produce and share their ideas about the geometric knowledge. In this regard, individuals not only resort to oral and written communication to produce meanings but also think about school geometry content in close relation to the body, perception, and the use of signs/artifacts. Taking into account this historical-cultural conception of meaning production in pre-service mathematics teacher education, this article analyzes the semiotic activity carried out by a pre-service teacher and the teacher educator to produce meanings around the concept of a right triangle while collaboratively solving a Euclidean construction problem using GeoGebra. Drawing on the learning principle of the theory of objectification, we offer a perspective on learning Euclidean constructions with GeoGebra as objectification process that occur in the context of pre-service mathematics teacher education. In alignment with this perspective, our unit of analysis is the semiotic activity produced by the study participants when constructing a right triangle with GeoGebra, starting from given initial conditions. Adopting a multimodal perspective on human thought, we conduct the data analysis focusing on: (a) the forms of expression of the construction procedure employed in the activity; (b) the meanings shared by the participants; (c) the role of gestures and diagrams during the production of meaning; and (d) the changes in the configuration of the semiotic resources brought into play. We conclude that, on one hand, explaining a construction procedure with GeoGebra is linked to one's understanding of the geometric object to be constructed, influenced by the workspace used, and on the other hand, the teacher educator plays a crucial role in achieving this comprehension.