REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Journal of Research in Mathematics Education
Volume 13, Issue 2, 21th June, 2024, Pages 132 – 163

http://dx.doi.org/10.17583/redimat.14302

Mathematical Thinking of Fifth-Grade Students when Inventing and Solving Problems

Walter F. Castro [1], & Catalina Herrera-Restrepo[2]

1) *University of Antioquia, Medellín,* Colombia
2) *Educational Institution Presbítero Luís Rodolfo Gómez Ramírez,* Colombia

Abstract

The article investigates the mathematical thinking manifested by fifth-grade students when they invent and solve mathematical problems. The research problem refers to the need for more knowledge of students' mathematical thinking and how it is usually undervalued when it is done through standardized tests. Knowing students' mathematical thinking helps to build study processes that recognize them. The research was conducted over one year; it is qualitative and naturalistic; invention and problem-solving were used to determine students' mathematical thinking and solution strategies. The records were taken from the written production of forty-fifth graders when they invented problems to be proposed and solved by their classmates. The results report that children invent problems of an arithmetic nature, prefer operations between numbers over relations between them, and manifest difficulties in proposing problems when given information.

Keywords

Mathematical knowledge, mathematical problems, problem invention, problem-solving

---

To cite this article: Castro, W.F. & Herrera-Restrepo, C. (2024). Mathematical thinking of fifth-grade students when inventing and solving problems. *Journal of Research in Mathematics*, *13*(2), pp. 132-163 http://dx.doi.org/10.17583/redimat.14302
Corresponding author(s): Walter F. Castro G
Contact address: walter.castro@udea.edu.co

REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Journal of Research in Mathematics Education
Volumen 13, Número 2, 21 de junio de 2024, Páginas 132 – 163

http://dx.doi.org/10.17583/redimat.14302

Pensamiento Matemático de Estudiantes de Quinto Grado cuando Inventan y Solucionan Problemas

Walter F. Castro [1], y Catalina Herrera-Restrepo[2]

1) *Universidad de Antioquía, Medellín,* Colombia
2) *Institución Educativa Presbítero Luis Rodolfo Gómez Ramírez,* Colombia

Resumen

El artículo indaga sobre el pensamiento matemático manifestado por estudiantes de quinto grado, cuando inventan y resuelven problemas matemáticos. El problema de investigación refiere al desconocimiento del pensamiento matemático de los estudiantes y cómo se suele infravalorar cuando se hace mediante pruebas estandarizadas. Conocer el pensamiento matemático de los estudiantes ayuda a construir procesos de estudio que los reconozca. La investigación se realizó durante un año, es cualitativa y naturalista, se utilizó la invención y solución de problemas para determinar tanto el pensamiento matemático de los estudiantes como estrategias de solución. Los registros se tomaron de la producción escrita de cuarenta niños de quinto grado, cuando inventaron problemas para ser propuestos y resueltos por sus compañeros. Los resultados informan que los niños inventan problemas de naturaleza aritmética, prefieren las operaciones entre números sobre las relaciones entre ellos, y manifiestan dificultades para proponer problemas cuando se les da información.

Palabras clave

Conocimiento matemático, problemas matemáticos, invención de problemas, resolución de problemas

Cómo citar este artículo: Castro, W.F. y Herrera-Restrepo, C. (2024). Pensamiento matemático de estudiantes de quinto grado cuando inventan y solucionan problemas. *Journal of Research in Mathematics, 13*(2), pp. 132-163 http://dx.doi.org/10.17583/redimat.14302
Correspondencia Autores(s): Walter F. Castro G
Dirección de contacto: walter.castro@udea.edu.co

Algunas investigaciones indagan sobre la invención de problemas (Singer et al., 2015; Zhang y Cai, 2021; English, 1998; Lowrie y Whitland, 2000; Ayllón et al., 2010; Espinoza et al., 2013a; Espinoza et al., 2013b; Fernández y Molina, 2016; Rico et al., 1998; Espinoza et al., 2014). Estas se interesan por revisar la estructura sintáctica, matemática y semántica de los problemas inventados por los estudiantes. Otras investigaciones estudiaron un entorno de aprendizaje interactivo con estudiantes de primer grado, quienes plantearon problemas en un entorno virtual (Yamamoto et al., 2012).

Otras investigaciones refieren los procesos, las estrategias, las competencias y los resultados, correctos e incorrectos, que manifiestan los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos (Suarsana et al., 2019; Coronel y Curotto, 2008; Noda, 2001; Juvanteny et al., 2015; Guerrero y Rey, 2013).

El informe del Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (2022) reporta las competencias en comunicación, representación y modelación; planteamiento y resolución de problemas; razonamiento y argumentación. El informe sugiere incrementar oportunidades de formación matemática para estudiantes de quinto grado, dado que presentan desempeños con puntuaciones por debajo de lo esperado.

De acuerdo con los resultados de las Pruebas SABER 5°, el (25%) de los estudiantes en Colombia se encuentran en el Nivel 1 y 2. Estos, no logran resolver problemas de menor complejidad y utilizan procedimientos rutinarios. Un 40% utilizan propiedades matemáticas para resolver problemas en los diferentes componentes (Numérico-Variacional, Espacial-Métrico y Aleatorio). El 35% de los estudiantes mostró competencias matemáticas para resolver problemas en los Niveles 3 y 4 de complejidad. Se evidencia que una cantidad reducida de estudiantes manifiesta competencias para resolver problemas que requieran patrones estandarizados y no estandarizados, para representar datos y establecer equivalencias. Los resultados informan que los niños de quinto grado puntúan bajo en el proceso de planteamiento y resolución de problemas.

El puntaje promedio 391 obtenido en la Prueba PISA 2018 fue más bajo que el puntaje en lectura y en ciencias. Colombia obtiene puntajes por debajo de la media en Latinoamérica (489 puntos) y del promedio de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2019).

Según la OCDE (2019) y de acuerdo con los cinco niveles de desempeño, el 78.2% de los jóvenes colombianos se ubican en los niveles más bajos (Cero, Uno y Dos) y logran resolver problemas simples en situaciones conocidas. El 21.8% de los estudiantes están en los niveles superiores (Tres, Cuatro y Cinco) y expresan habilidades para resolver problemas de poca dificultad. Con estos resultados, Colombia se ubica en el Nivel Dos de competencia en matemáticas, que refiere a que los estudiantes logran interpretar y reconocer situaciones en contextos que solo requieren una inferencia directa para representar una situación simple.

El objetivo de la investigación es determinar el pensamiento matemático de los estudiantes cuando inventan y resuelven problemas. En los siguientes apartados, se presenta el pensamiento matemático en relación con los procesos de invención y resolución de problemas; posteriormente se informa sobre el proceso de elección de los problemas, planteados cuando los estudiantes inventan los problemas. También se presenta la clasificación: Problemas Generales y Problemas Aritméticos de Enunciado Verbal. Después, discuten los resultados obtenidos, se analizan los problemas y sus soluciones. Se concluye con una sesión de comentarios.

Marco Teórico

Conocimiento y Pensamiento Matemático

Reyes (2012) define el conocimiento matemático como una elaboración cultural, que utiliza "Metodologías hipotético deductivas y un lenguaje común para comunicarse, el cual permite no tan solo expresarse, sino que también facilita procedimientos y abrevia las ideas. […] Constituyéndose en herramienta valiosa también para otros campos del conocimiento" (p. 152).

El 'conocimiento matemático' se asume en términos de significados reconocibles en el lenguaje, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos (Godino et al., 2007) que los estudiantes usan en su actividad matemática, a partir de la construcción interactiva de significados asociados al enunciado y solución de problemas (Godino, 2000) en diferentes contextos. Un sujeto 'comprende' el significado del objeto, o ha 'captado el significado' de un concepto cuando es capaz de reconocer sus propiedades representaciones y características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en variedad de problemas. La comprensión alcanzada por un sujeto en un momento dado difícilmente será total o nula, sino que abarcará aspectos parciales de los diversos componentes y niveles de abstracción posibles. Godino et al. (2007) definen el conocimiento (y la comprensión) en términos de trama de funciones semióticas.

De otro lado, Reyes (2012) afirma que "El pensamiento matemático es un proceso cognitivo que incluye la percepción, pensamientos relacionados con el contenido matemático, los procedimientos y las estrategias, así como los procesos y capacidades no racionales" (p. 83). El Pensamiento Matemático es un conjunto de procesos neuropsicológicos que requieren integración de distintas modalidades sensoriales y cognitivas, tiene como vehículo de comunicación, el diálogo, metáforas y representaciones. Además, el desarrollo del Pensamiento Matemático se puede manifestar en la estructura y en la forma, que van mostrando los conocimientos del estudiante.

El pensamiento matemático (PM) según Vergel et al. (2022), es la cognición de procesos, mediante la generalización de objetos matemáticos, y lo caracteriza como un solapamiento, entre pensamiento aritmético sofisticado y proto-formas de pensamiento algebraico en una zona conceptual.

El conocimiento matemático, para el currículo colombiano (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006), es de dos 2 tipos: conocimiento conceptual y conocimiento procedimental. El primero "Se caracteriza por ser un conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, muy rico en relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el saber qué y el saber por qué" (P. 50). El segundo tipo, está relacionado con las técnicas y estrategias utilizadas, para representar conceptos con habilidad y destreza, para comparar, ejercitar y argumentar algoritmos matemáticos de una forma convincente (MEN, 2006).

Si bien el currículo colombiano asume cinco Pensamientos Matemáticos (MEN, 1998): Numérico, Espacial, Métrico, Variacional y Aleatorio. Los Pensamientos Matemáticos se agrupan, según los Estándares Curriculares de Competencias en tres componentes: Numérico-Variacional, Geométrico-Métrico y Aleatorio (MEN, 2006). En este trabajo se usa esta propuesta curricular para nombrar los problemas inventados por los estudiantes en uno de tales "pensamientos". Para el currículo colombiano el conocimiento matemático debe ser usado para encontrar soluciones a problemas, basados en las matemáticas, en situaciones de la vida diaria o en otras ciencias. Las situaciones problema son "contextos propicios para acercar a los estudiantes a las matemáticas, contribuyendo significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas" (MEN,1998, p. 24).

En esta investigación se asume el pensamiento matemático en términos de un proceso cognitivo (Reyes, 2012), y el conocimiento se asume en términos de significados reconocibles en el lenguaje, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos (Godino et al., 2007) que los estudiantes usan en su actividad matemática, a partir de la construcción interactiva de significados de problemas (Godino, 2000) en diferentes contextos. La manifestación externa del pensamiento matemático se evidencia en términos de los significados matemáticos que los estudiantes usan para inventar y para resolver problemas matemáticos.

Invención y Resolución de Problemas

Diversos autores refieren a la invención de problemas (Schindler y Bakker, 2020; Ayllón et al., 2010; Espinoza et al., 2013a; Fernández y Molina, 2016; Espinoza et al., 2014) como una manera para promover la actividad matemática. Armstrong (2014) considera que la invención de problemas por grupos de estudiantes es un fenómeno emergente para promover la resolución de problemas. Diversas investigaciones han explorado el desempeño de estudiantes cuando inventan problemas (Caí, 2003; Caí et al., 2013; Caí y Hwang, 2002, Silver y Caí, 2005).

La invención de problemas no solamente ayuda a evidenciar el pensamiento matemático de los estudiantes, sino que también ayuda a usarlo como indicador de la comprensión de los objetos matemáticos implicados (Toluk-Uçar, 2009; Kontorovich et al., 2012). Los profesores usan la invención de problemas para ampliar su comprensión sobre la comprensión de los estudiantes (Caí et al., 2013; Kotsopoulos y Cordy, 2009; Leung, 2013; Silver, 1995). Arıkan y Ünal (2015) reportan una fuerte correlación ($r = 0{:}76$; $p < 0{:}01$) entre la resolución de problemas y la invención de problemas.

Inventar problemas promueve tanto ampliar la comprensión de los conocimientos matemáticos como explorar problemas y soluciones (Stoyanova, 1998; 2003). Se identifican tres formas de inventar problemas: problemas libres, semi-estructurados y estructurados[1] . En este artículo, interesan los problemas planteados por los estudiantes sin ninguna condición o restricción impuesta por el profesor (Stoyanova, 1998) ya que favorece el estudio del pensamiento matemático que los estudiantes poseen y expresan, para inventar y resolver problemas.

Brown y Walter (1993) informan que los estudiantes que inventan tareas se motivan más que aquellos a quienes se les proponen o replican los propuestos por el profesor. La invención de problemas es una herramienta para el aprendizaje de las matemáticas ya que se requiere relacionar conceptos matemáticos con situaciones de la vida cotidiana (Ayllón, 2005) y contribuye a mejorar la capacidad de los niños para resolver tareas matemáticas.

Se presentan a continuación, tres tablas que fueron construidas con base en el marco de referencia y que fueron usadas para el análisis de las tareas como de las soluciones. La Tabla 1 presenta la clasificación de las tareas planteadas y resueltas por los estudiantes. La Tabla 2 presenta la clasificación de las tareas aritméticas de enunciado verbal, mientras que la Tabla 3 presenta la categorización de las soluciones de las tareas propuestas por los estudiantes. Las tres tablas, muestran conjuntamente, la complejidad y variedad de características que tienen las tareas planteadas por los estudiantes.

Tabla 1

Clasificación de Problemas Generales Inventados por Estudiantes de Quinto Grado

		PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE TAREAS									
		TAREAS GENERALES									
TAREAS		Definidas (D) y no definidas (NO D)		Abiertas (A) y cerradas (C)		De encontrar (E) y de probar (P)		Rutinarias (R) y no rutinarias (NO R)		Estructuradas (E) y no estructuradas (NO E)	
		D	NO D.	A	C	E	P	R	NO R.	E	NO E.
Tareas inventadas por estudiantes	1	X			X	X		X		X	
	2	X			X	X		X		X	
	3	X			X	X		X		X	
	4	X			X	X		X		X	
	5	X			X	X		X		X	
	6		X	X		X			X		X
	7	X			X	X		X		X	
	8	X			X	X		X		X	
	9		X	X		X			X		X
	10		X	X					X		X
	11		X	X		X			X		X
	12		X	X		X			X		X
	13		X	X		X			X		X
	14	X			X	X		X		X	
	15	X			X	X		X		X	
	16	X			X	X		X		X	
	17	X			X	X		X		X	
	18	X			X	X		X		X	
	19	X			X	X		X		X	
	20	X			X	X		X		X	
	21		X	X		X			X		X
	22		X	X		X			X		X
	23	X			X	X		X		X	
	24	X			X	X		X		X	
	25	X			X	X		X		X	
	26	X			X	X		X		X	
	27		X	X		X			X		X

TAREAS	PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE TAREAS									
	TAREAS GENERALES									
	Definidas (D) y no definidas (NO D)		Abiertas (A) y cerradas (C)		De encontrar (E) y de probar (P)		Rutinarias (R) y no rutinarias (NO R)		Estructuradas (E) y no estructuradas (NO E)	
	D	NO D.	A	C	E	P	R	NO R.	E	NO E.
28	X			X	X		X		X	
29		X	X		X			X		X
30	X			X	X		X		X	
31	X			X	X		X		X	

Tabla 2

Clasificación de Tareas Aritméticas de Enunciado Verbal Inventadas por Estudiantes de Quinto Grado

PROBLEMAS		INVENCIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS									
		TAREAS ARITMÉTICAS DE ENUNCIADO VERBAL									
		Tareas aditivas				Tareas multiplicativas					
		Cambio	Combinación	Comparación	Igualación	Isomorfismo de medidas	Producto de medida	Simétricos (S)/ Asimétricos (A)	Partición (P)/ cuotición		Adición repetida
								S	A	P	
Comp. Numérico-variacional (C. N-V)	1								X	X	
	2	X							X		X
	3	X									
	4								X	X	
	5		X								
	7	X									
	8	X									
	14								X	X	
	15	X									
	16				X	X			X		X
	17								X	X	X
	18	X									
	19									X	
	20	X									
	23			X							
	24		X								

		INVENCIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS										
PROBLEMAS		**TAREAS ARITMÉTICAS DE ENUNCIADO VERBAL**										
		Tareas aditivas				**Tareas multiplicativas**						
		Cambio	**Combinación**	**Comparación**	**Igualación**	**Isomorfismo de medidas**	**Producto de medida**	**Simétricos (S)/ Asimétricos (A)**	**Partición (P)/ cuotición**		**Adición repetida**
								S	**A**	**P**	
	25								X	X	
	28	X									
	30					X			X		X
Comp. Geométrico métrico (C. G-M)	31						X	X			
Comp. Aleatorio (C. A)	26	X									

Tabla 3

Categorización de Soluciones de Tareas Inventadas por Estudiantes de Quinto Grado

		PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE TAREAS					
TAREAS		**RESOLUCIÓN DE TAREAS**					
		Resolución por investigadores		**Resolución ‘grupo proponente’**		**Resolución ‘grupo solucionador’**	
		Criterio	**Categoría**	**Criterio**	**Categoría**	**Criterio**	**Categoría**
Componente Numérico-variacional (C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2	(C. N-V)	4
	2	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2
	3	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1
	4	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	4
	5	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	4
	6	(C. N-V)	2	(C. N-V)	2	(C. N-V)	2
	7	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2	(C. N-V)	2
	8	(C. N-V)	1	(C. G-M)	2	(C. N-V)	2
	10	NO SOLUCIÓN	5	NO SOLUCIÓN	5	NO SOLUCIÓN	5
	11	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1
	12	(C. N-V)	2	(C. N-V)	4	(C. N-V)	2

		PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE TAREAS					
TAREAS		RESOLUCIÓN DE TAREAS					
		Resolución por investigadores		**Resolución 'grupo proponente'**		**Resolución 'grupo solucionador'**	
		Criterio	**Categoría**	**Criterio**	**Categoría**	**Criterio**	**Categoría**
	13	NO SOLUCIÓN	5	(C. N-V)	4	(C. N-V)	4
	14	(C. N-V)	1	(C. G-M)	4	(C. G-M)	4
	15	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1
	16	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	NO SOLUCIÓN	5
	17	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2
	18	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1
	19	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2
	20	(C. N-V)	1	(C. G-M)	4	(C. N-V)	4
	21	NO SOLUCIÓN	5	R. VERBAL	4	NO SOLUCIÓN	5
	22	NO SOLUCIÓN	5	R. VERBAL	4	(C. N-V)	4
	23	(C. N-V)	1	R. VERBAL	2	(C. N-V)	2
	24	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2	(C. N-V)	2
	25	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	NO SOLUCIÓN	5
	27	NO SOLUCIÓN	5	(C. N-V)	4	(C. N-V)	4
	28	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2
	30	(C. N-V)	1	(C. N-V)	3	(C. N-V)	2
Componente Geométrico-métrico (C. G-M)	**9**	(C. N-V)	2	(C. N-V)	2	(C. N-V)	2
	31	(C. N-V)	1	(C. N-V)	4	NO SOLUCIÓN	5
Componente Aleatorio	26	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	NO SOLUCIÓN	5

TAREAS		PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE TAREAS					
		RESOLUCIÓN DE TAREAS					
		Resolución por investigadores		**Resolución 'grupo proponente'**		**Resolución 'grupo solucionador'**	
		Criterio	**Categoría**	**Criterio**	**Categoría**	**Criterio**	**Categoría**
(C. A)	**29**	NO SOLUCIÓN	5	(C. N-V)	4	NO SOLUCIÓN	5

Método

La investigación fue desarrollada con estudiantes de grado quinto, en una institución educativa mixta oficial, que atiende a una población de estratos[2] 1, 2 y 3 de un municipio del Departamento de Antioquia en Colombia.

Los estudiantes conformaron, por afinidad, grupos de dos, tres y hasta cuatro integrantes; y se les pidió inventar problemas con sus soluciones, para ser propuestos y resueltos por sus compañeros, en un esquema de competencia entre grupos, los ganadores recibirían un premio. Los grupos se nombran en términos de nombres ficticios de sus integrantes. El profesor no intervino en asignación de roles para los estudiantes, y no se indagó sobre las discusiones grupales sostenidas para inventar y resolver los problemas.

Para analizar las tareas matemáticas y las soluciones propuestas por los estudiantes, se usa la propuesta de Zhang et al. (2022) quienes examinaron el proceso cognitivo para resolver el problema, que se compone de tres etapas: a) entrada: comprender la tarea, b) procesamiento: construir el problema, y c) resultado: expresar el problema. Este proceso se adapta bien a la propuesta de Ayllón (2013), que favorece analizar tanto los enunciados verbales de los problemas inventados por los estudiantes como sus respuestas. Se adaptaron instrumentos propuestos por Ayllón (2013): la coherencia del enunciado (datos numéricos, historia verosímil, planteamiento de la pregunta, relación pregunta-datos), el tipo de problema (etapas de resolución, estructura operatoria y semántica) y el método de solución.

Se realizaron posteriormente, entrevistas semiestructuradas tanto a los estudiantes que presentaron habilidades para inventar y resolver problemas como a estudiantes que exhibieron dificultades para inventar y resolver problemas.

Análisis

A continuación, se analizan los enunciados y soluciones de las tareas propuestas por los estudiantes. El análisis incluye: conocimientos matemáticos, dificultades para inventar o resolver las tareas, coherencia, estructura semántica y operatoria de los enunciados. En las gráficas, se consideran los enunciados y las soluciones por separado. La Solución Uno corresponde a la solución dada por el 'equipo proponente' de la tarea, las soluciones Dos y Tres, corresponden a las repuestas de estudiantes solucionadores.

Tareas Matemáticas Aditivas

La Gráfica 1, muestra el análisis de una tarea aritmética de enunciado verbal, aditiva de cambio, inventada por los estudiantes.

Gráfica 1

Problema Aditivo de Cambio

Problema n°. 2					
Transcripción del enunciado	Laura compró 2 cajas de regalo para sus hijas y 1 para su sobrino. Si las dos valieron 40.000 y una valió 20.000 ¿Cuánto fue por todo?				
Coherencia del enunciado	Historia verosímil	Datos numéricos	Pregunta	Relación pregunta-datos.	Solución
	Si	Si	Si	Si	Si
Tipo de problema	N° de etapas	Estructura operatoria	Estructura semántica		Tipo de números
Cambio	1	Aditiva	Relaciones entre cantidades y precios, pero no con tamaños de las cajas. Ausencia de símbolo ($)		cinco cifras, naturales

La tarea n°. 2, Gráfica 1, se ubica en ‘Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos’, su solución requiere el uso de conocimientos asociados con los números y con las operaciones para comunicar sus ideas (MEN,1998). La tarea tiene estructura aditiva (Castro et al., 1995) de una etapa y se clasifica como tarea de cambio, dado que plantea una transformación entre cantidades, al operar aditivamente dos cantidades del mismo tipo (Nesher, 1982).

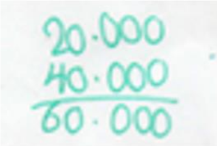
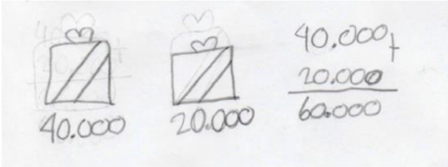
La tarea es estructurada, presenta información necesaria (Ayllón et al., 2010), es simétrico, porque sus cantidades pueden ser conmutables. La solución de la tarea n°. 2, Gráfica 1, se logra mediante sumas y multiplicaciones.

Las estudiantes no establecen relación entre los tamaños de las cajas con su valor. La imagen recrea tres cajas con tamaños diferentes, pero los proponentes omiten los tamaños y solo tienen en cuenta la cantidad de cajas. Los estudiantes manifiestan dificultades para representar la situación exhibida en la imagen en un contexto variacional (MEN, 2006).

Las estudiantes no utilizan expresiones matemáticas en la pregunta. Utilizan lenguaje informal y ofrecen información limitada para establecer relaciones entre las cantidades y el valor a encontrar. Tampoco usan el símbolo ‘pesos ($)’, para informar que el número representa precio. La ausencia de términos matemáticos puede interferir en la comprensión de la tarea, y parece que solo prestan atención a los números. La Gráfica 2, muestra el análisis de la solución de la tarea aritmética de enunciado verbal, aditiva de cambio.

Gráfica 2

Solución de una Tarea Aditiva de Cambio

Enunciado de la tarea n°. 2	Laura compró 2 cajas de regalo para sus hijas y 1 para su sobrino. Si las dos valieron 40.000 y una valió 20.000 ¿Cuánto fue por todo?	
Solución de la tarea	Solución 1 	Solución 2 

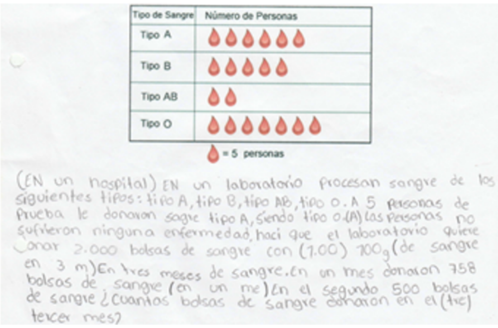
La Gráfica 2 presenta dos soluciones estudiantiles para la Tarea 2. Ambas soluciones se consideran correctas, en tanto que ubican, las cantidades, alinean las cifras y realizan la operación esperada. En ambos procedimientos no se reconoce el símbolo ($) ni lo relacionan con los precios de los regalos.

La Solución Uno, presenta errores de símbolo (Jimeno, 2006), no se reconoce el signo suma (+) en la operación. La Solución Dos, de Yeferson, muestra una representación pictórica de la tarea. Estos dibujos parecen representar diferencias en el tamaño de los regalos, según los precios. Yeferson no comprendió el enunciado y solo representó dos regalos.

La Gráfica 3, muestra el análisis de una tarea aritmética de enunciado verbal, aditiva de combinación.

Gráfica 3

Problema Aditivo de Combinación

Tarea n°. 5					
Transcripción del enunciado	En un laboratorio procesan sangre de los siguientes tipos: tipo A, tipo B, tipo AB, tipo O. A 5 personas de prueba le donaron sangre tipo A, siendo tipo O. Las personas no sufrieron ninguna enfermedad. Así el laboratorio quiere donar 2.000 bolsas de sangre con 100 g en tres meses de sangre, en un mes donaron 758 bolsas de sangre. En el segundo 500 bolsas de sangre ¿Cuántas bolsas de sangre donaron en el tercer mes?				
Coherencia del enunciado	Historia verosímil	Datos numéricos	Pregunta	Relación pregunta-datos.	Solución
	Si	Si	Si	Si	Si
Tipo de tarea	N° de etapas	Estructura operatoria	Estructura semántica		Tipo de números
Combinación	2	Aditiva	Coherencia entre los componentes del problema, con cantidades y la solución.		Tres y cuatro cifras, naturales

La tarea 5, Gráfica 3, se ubica en 'Pensamiento Numérico y en Sistemas Numéricos', en tanto que requiere que se formule y que se ejerciten procedimientos para operar cantidades de tres y cuatro cifras (MEN,1998). La tarea tiene estructura aditiva (Castro et al., 1995) de más de una etapa y se clasifica como una tarea de combinación, que relaciona tres cantidades distintas (Nesher, 1982).

La tarea n°. 5 es estructurada y contiene información necesaria para resolverla (Ayllón et al., 2010) mediante suma y resta. La tarea representa la cantidad de gotas de sangre; las estudiantes cuentan las gotas de sangre (20 gotas) y las multiplican por la cantidad de personas que representa cada gota (5), y obtiene el número 100 (gotas), que es la cantidad de sangre que tendrá cada bolsa. Sin embargo, el enunciado tiene datos innecesarios (la cantidad de sangre por bolsa) y redacción confusa. La organización de la información podría generar conflictos en la comprensión del enunciado de la tarea.

Juan Esteban, durante la presentación de la tarea, expresa que "el problema está mal elaborado", porque falta plantear otra pregunta: "¿cuánta cantidad de sangre falta por donar en el tercer día?" para dar sentido al dato 100 g en la tarea (Presentación Tarea 5, del 31 /03 /2022). Para el estudiante, es importante plantear preguntas que sugieran el procedimiento para encontrar la respuesta.

En el enunciado, se aprecian dificultades en el uso de las magnitudes; Sara R., Paula y Deisy, escriben la unidad de masa (gramos) en lugar de la unidad de volumen, litros (L), para representar la cantidad de sangre que contiene cada bolsa. Estas dificultades, pueden tener su origen en la falta de comprensión sobre unidades de medida.

La Gráfica 4, muestra el análisis de la solución del problema aritmético de enunciado verbal, aditivo de combinación, planteado por los estudiantes.

Gráfica 4

Solución de Tarea Aditiva de Combinación

Enunciado de la tarea n°. 5	En un laboratorio procesan sangre de los siguientes tipos: tipo A, tipo B, tipo AB, tipo O. A 5 personas de prueba le donaron sangre tipo A, siendo tipo O. Las personas no sufrieron ninguna enfermedad. Así el laboratorio quiere donar 2.000 bolsas de sangre con 100 g en tres meses de sangre. en un mes donaron 758 bolsas de sangre. En el segundo 500 bolsas de sangre ¿Cuántas bolsas de sangre donaron en el tercer mes?	
Solución de la tarea	Solución 1	(758 + 500 = 258) 758 + 500 = 1258 2.000 − 1.258 = 0.742 R// en el tercer dia donaron 742 bolsas de sangre
	Solución 2	+ 758 500 100 = 1.358 tienen que donar en el tercer mes (1.258) 1.358

La solución 1 de la Tarea n°. 5, Gráfica 4, muestra un procedimiento adecuado con suma y resta. El proceso de solución es sistemático, usa símbolos operacionales, y evidencia uso apropiado de algoritmos. Las estudiantes también responden la pregunta 'en el tercer mes donaron 742 bolsas de sangre'.

La solución 2 de la Tarea n°. 5, Gráfica 4, realizada por Alison, presenta errores en el cálculo aditivo (Jimeno, 2006). La suma es errónea, dado que escribe el resultado sin considerar el valor posicional de cada cifra, escribe las unidades y decenas en posición errónea, las centenas debajo de las unidades, y las unidades de mil, en medio de las decenas y centenas.

Otra característica refiere a la adición del número 100, que representa el contenido de cada bolsa de sangre, con las cantidades de bolsas donadas. La suma se plantea con estas cantidades sin prestar atención a la diferencia de significados vinculados con cada dato. Esto evidencia dificultades para distinguir las unidades de medida de las unidades de volumen.

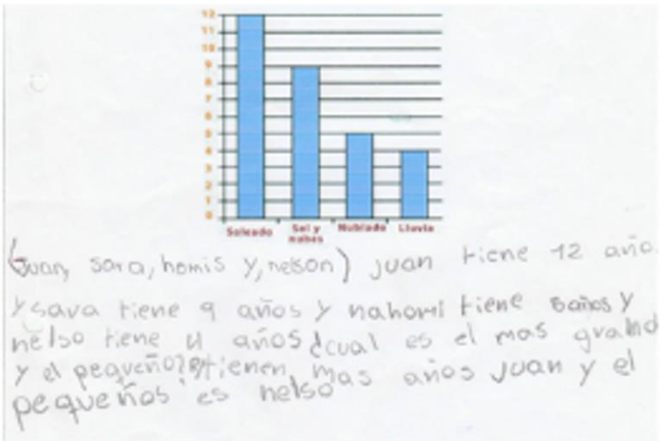
Entre los errores encontrados: relación entre las cantidades y la operación matemática, inadecuada escogencia de la estrategia de solución, e incorrecta interpretación del enunciado. En la entrevista Deisy afirmó: “Alison leyó mal el problema, lo entendió mal, no lo supo interpretar” (Presentación del problema 5, del 31 /03 /2022).

La Gráfica 5, muestra el análisis de una tarea aritmética de enunciado verbal, aditivo de comparación.

Gráfica 5

Tarea Aditiva de Comparación

Problema n°. 23



Transcripción del enunciado	Juan tiene 12 años y Sara tiene 9 años y Nahomi tiene 5 años y Nelson tiene 4 años ¿Cuál es el más grande y el pequeño?				
Coherencia del enunciado	Historia verosímil	Datos numéricos	Pregunta	Relación pregunta-datos.	Solución
	Si	No	Si	Si	Si
Tipo de tarea	N° de etapas	Estructura operatoria	Estructura semántica		Tipo de números
Comparación	No	No	Presenta enunciado, datos pregunta y solución sin procesos aditivos.		De una y dos cifras-naturales

La tarea n°. 23, Gráfica 5, corresponde al ‘Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos’ y al ‘Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos’, contiene aspectos asociados con fenómenos de variación y de cambio, representados en gráficas (MEN, 1998; 2006). Es estructurada (Ayllón et al., 2010), contiene información suficiente para resolverla (Reitman, 1964).

El enunciado sugiere relacionar cantidades de una y dos cifras, mediante los términos ‘mayor que’ y ‘menor que’; se clasifica como tarea de comparación (Nesher,1982). La pregunta pide establecer relaciones numéricas entre los datos, sin usar operaciones algorítmicas.

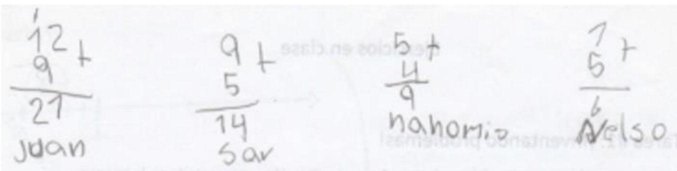
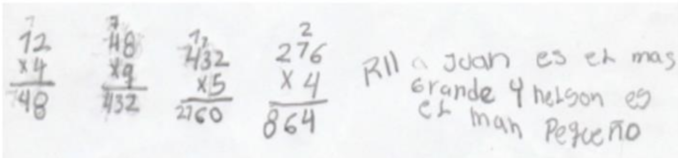
Para la Tarea n°. 23, Sara D., Nelson y Nahomi utilizaron los datos de las barras para asignar las edades, pero no utilizaron las palabras ‘soleado, sol y nubes, nublado, lluvia’. Para los estudiantes, es más fácil proponer la tarea con los nombres de los niños en lugar de los nombres asociados con la descripción del clima. Aunque diferencian términos para describir el estado del tiempo (soleado, sol y nubes, nublado, lluvia), afirman que “no lograron tener una idea con estas palabras para inventar el problema” (entrevista 2, del 25 /04 /22).

El planteamiento del enunciado exhibe dificultades para relacionar términos cotidianos con objetos matemáticos; que están asociadas con los usos y con los significados que los estudiantes confieren (Rico, 2012) además de exhibir falencias para plantear problemas en diversos contextos y en diferentes formas de representación (Jimeno, 2006). Este es el argumento más probable, por el cual los estudiantes no lograron reconocer información de la imagen para enunciar la tarea.

La Gráfica 6, muestra el análisis de la solución de la tarea aritmética de enunciado verbal, aditiva de comparación.

Gráfica 6

Solución de la Tarea Aditiva de Comparación

Enunciado de la tarea n°. 23	Juan tiene 12 años y Sara tiene 9 años y Nahomi tiene 5 años y Nelson tiene 4 años ¿Cuál es el más grande y el pequeño?	
Solución de la tarea	Solución 1	
	Solucion 2	

En ambas soluciones de la tarea n°. 23, Gráfica 6, se aprecia que los estudiantes no compararon cantidades, no organizan los datos, y no utilizan los términos ‘mayor que’ o ‘menor que’ para comparar.

En la solución 1 de la Tarea n°. 23, Gráfica 6, Sara D., Nelson y Nahomi proponen sumas sucesivas con las edades de los niños: efectúan la suma de las dos primeras edades, luego suman la segunda edad con la tercera, y luego la tercera con la cuarta, después suman 1 a la edad de Nahomi para obtener la edad de Nelson.

En la primera suma, los niños manifiestan dificultades en el procedimiento de cálculo, al alinear inadecuadamente los sumandos (Jimeno, 2006). Parece que adivinan las respuestas (Salgado y Terán, 2008) dado que efectúan procedimientos de solución inconsistentes (Jimeno, 2006).

En la solución 2 de la tarea n°. 23, Gráfica 6, Angie efectúa multiplicaciones sucesivas entre las edades de los niños, inicia multiplicando la edad de Juan por la cantidad total de niños: 12

x 4 = 48, luego multiplica el resultado, por la edad de cada niño, así: 48 x 9 = 432; 432 x 5 = 2.160; 216 x 4 = 864.

En la última operación, olvida escribir el cero correspondiente a 2.160, por tanto, no lo tiene en cuenta para multiplicar. Se identifican errores relacionados con cálculos incorrectos (Jimeno, 2006; Salgado y Terán, 2008). La solución de la tarea también presenta errores de procedimiento (Jimeno, 2006).

En ambas soluciones, los niños escriben una respuesta acorde con sus razonamientos ‘tiene más años juan y es más pequeño Nelson’, que, aunque resulta de un procedimiento erróneo, es acertada para responder la pregunta.

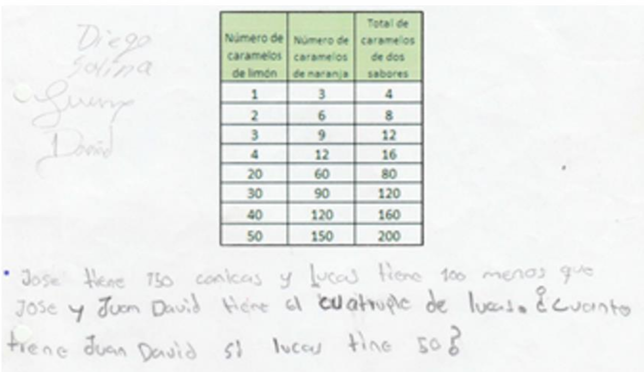
Durante la entrevista, Angie explica que realizó los procedimientos porque no sabía que operación debía hacer y no quería dejar la hoja en blanco. Al parecer, el equipo de Sara D., Nelson y Nahomi tuvieron la misma dificultad. Tienen deficiencias en procesos, habilidades y estrategias en la resolución de tareas (Jimeno, 2006; Coronel y Curotto, 2008).

La Gráfica 7, muestra el análisis de una tarea aritmética de enunciado verbal, aditiva de igualación.

Gráfica 7

Tarea Aditiva de Igualación

Tarea n°. 16



Diego
Salina
Juan
David

Número de caramelos de limón	Número de caramelos de naranja	Total de caramelos de dos sabores
1	3	4
2	6	8
3	9	12
4	12	16
20	60	80
30	90	120
40	120	160
50	150	200

• José tiene 150 canicas y Lucas tiene 100 menos que Jose y Juan David tiene el cuatruple de lucas. ¿Cuanto tiene Juan David si lucas tine 50?

Transcripción del enunciado	José tiene 150 canicas y Lucas tiene 100 menos que José y Juan David tiene el cuádruple de Lucas. ¿Cuánto tiene Juan David si Lucas tiene 50?				
Coherencia del enunciado	Historia verosímil	Datos numéricos	Pregunta	Relación pregunta-datos.	Solución
	Si	Si	Si	Si	Si
Tipo de tarea	N° de etapas	Estructura operatoria	Estructura semántica		Tipo de números
Igualación	1	Aditiva	Existe relación entre lenguaje, propiedades, procedimientos y conceptos matemáticos.		Dos y tres cifras, naturales

La tarea-Gráfica 7- corresponde al ‘Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos’, su solución requiere procedimientos para operar, transformar y relacionar cantidades (MEN, 1998). Se vincula con el Pensamiento Variacional ya que permite representar fenómenos de variación y cambio de cantidades en eventos sociales (MEN, 1998). Es una tarea de estructura aditiva (Castro et al., 1995) de una etapa, de igualación, y de composición mixta entre tareas de cambio y comparación (Nesher,1982).

La Tarea n°. 16, es estructurada, porque tiene los datos necesarios, establece relación entre las tres variables (las edades), tiene reglas específicas para encontrar la solución (Reitman, 1964). El enunciado, incluye los términos ‘menos que’ y ‘cuádruple’. Se requiere tener una comprensión adecuada, para no conferir una interpretación errónea al problema (Jimeno, 2006), además, del uso de los conocimientos previos para proponer una solución.

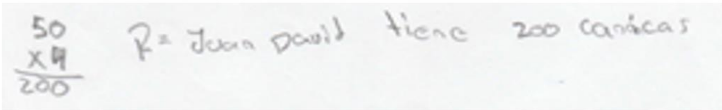
Los números de tres cifras simplifican la solución de la tarea, representa una situación cotidiana, es de fácil comprensión, y uno de los datos está dado en la pregunta.

Los datos de la Tarea n°. 16, no están relacionados con la situación propuesta en la imagen, solo representan los últimos números de la tabla. Existen relaciones numéricas entre los datos, basadas en expresiones ‘menos que’ y ‘cuatro veces’, pero no establecen regularidades y patrones entre los datos.

La Gráfica 8, muestra el análisis de la solución de la tarea aritmética de enunciado verbal, aditiva de igualación.

Gráfica 8

Solución de la Tarea Aditiva de Igualación

Enunciado de la Tarea n°. 16	José tiene 150 canicas y Lucas tiene 100 menos que José y juan David tiene el cuádruple de Lucas. ¿Cuánto tiene juan David si Lucas tiene 50?	
Solución de la tarea	Solución 1	

La solución 1 de la Tarea n°. 16, Gráfica 8, propuesta por Juan David, Diego y Juan José, propone multiplicación entre la edad de Lucas y el número 4, el cual representa “el cuádruple” que aparece en el enunciado. Los estudiantes responden ‘Juan David tiene 200 canicas’ que evidencia comprensión conceptual y procedimental requeridos para encontrar el resultado. Los estudiantes dieron respuesta a la pregunta, no consideraron las relaciones entre los datos para dar sentido a la tarea.

La solución es algorítmica, los estudiantes no proponen soluciones que incluyan sistemas de ecuaciones para establecer igualdades numéricas, tampoco usan variables que permitan encontrar el número desconocido. Estas situaciones exhiben deficiencias en el desarrollo del Pensamiento Algebraico.

Tareas Matemáticas Multiplicativas

La Gráfica 9, muestra el análisis de una tarea aritmética de enunciado verbal, multiplicativa de isomorfismo de medidas.

Gráfica 9

Tarea Multiplicativa de Isomorfismo de Medidas

Tarea n°. 30	 				
Transcripción del enunciado	En una bomba de gasolina venden el galón a 34.000 y el mínimo lo venden a 15.000 y a las mulas[3] le cobraron el galón a 39.000 y el mínimo a 20.000 ¿si un camión tanquea 4 galones cuanto le cobrarían en total?				
Coherencia del enunciado	Historia verosímil	Datos numéricos	Pregunta	Relación pregunta-datos.	Solución
	No	Si	Si	Si	Si
Tipo de tarea	N° de etapas	Estructura operatoria	Estructura semántica		Tipo de números
Isomorfismo de medidas-asimétrico	1	Aditiva	Componentes coherentes en el enunciado, con valores descontextualizados		cinco cifras, naturales

La tarea en Gráfica 9, corresponde al ‘Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos’ y al ‘Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos’, porque plantea situaciones de variación y cambio de cantidades, mediante procedimientos matemáticos (MEN, 1998; 2006). Tiene estructura multiplicativa (Castro et al., 1995) de una etapa, con números de cinco cifras. Es un isomorfismo de medidas, porque es de proporcionalidad entre dos magnitudes (Vergnaud, 1983).

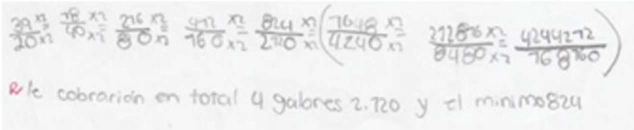
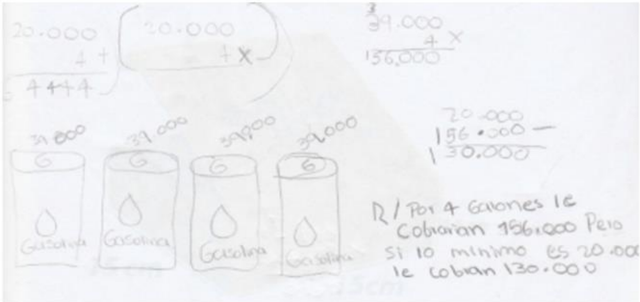
La Tarea n°. 30 se considera estructurada, presenta información necesaria (Reitman, 1964), que se puede obtener mediante multiplicación o adición repetida. Es asimétrica, porque sus cantidades no se pueden intercambiar (Bell et al., 1989).

Esta tarea representa una situación cotidiana, relacionada con medios de transporte, que requiere diferenciar entre los términos ‘galón’ y ‘mínimo’. Para Yuri, Wendy y María Paula, del equipo proponente, un ‘galón’ es lo que representa cierta cantidad de gasolina, mientras que la palabra ‘mínimo’, es la menor cantidad de gasolina que pueden comprar (Entrevista 2, 25 /04 /22). Los datos de la tarea están descontextualizados, cuyos valores son muy superiores al valor real del galón de gasolina.

El equipo de Yuri, Wendy y María Paula tienen dificultades para representar unidades monetarias, dado que las niñas no escribieron el signo ($) para indicar precios de la gasolina, tampoco los consideran cuando leen estos valores. La Gráfica 10, muestra el análisis realizado a la solución del problema aritmético de enunciado verbal, multiplicativo de isomorfismo de medidas, planteado por las estudiantes.

Gráfica 10

Solución de tarea Multiplicativa de Isomorfismo de Medidas

Enunciado de la tarea n°. 30	En una bomba de gasolina venden el galón a 34.000 y el mínimo lo venden a 15.000 y a las mulas le cobraron el galón a 39.000 y el mínimo a 20.000 ¿si un camión tanquea 4 galones cuanto le cobrarían en total?	
Solución de la tarea	Solución 1	
	Solución 2	

El equipo de Yuri, Wendy y María Paula, manifiestan dificultades para resolver la tarea. El enunciado no considera la solución, por lo cual, tuvieron inconvenientes para comprenderlo y resolverlo adecuadamente. María Paula expresa: “profe es que no sabemos cómo hacer la solución” (Diálogo 4,17 /03 /2022).

La solución 1 de la tarea n°. 30, Gráfica 10, muestra un procedimiento alternativo mediante fracciones equivalentes (Jimeno, 2006) propuesto por Wendy como solución. Este tipo de respuestas se consideran “soluciones novedosas”, porque exhiben conocimientos matemáticos creativos (Gráfica 10), pero exhiben dificultades en la resolución de tareas. Yuri, Wendy y María Paula, manifiestan dificultades para diferenciar conjuntos numéricos y sus propiedades.

Las niñas proponen una fracción inicial ‘ $\frac{39}{20}$ ’donde el numerador es “el valor del galón de gasolina que cobran a las mulas[3]”, pero reducido en cifras (de 39.000 a 39). El denominador es “el valor mínimo que le cobran a las mulas”, también reducido en sus cifras (de 20.000 a 20), para la cual hallan cuatro fracciones equivalentes, por amplificación.

Para las estudiantes, las cuatro fracciones amplificadas representan los cuatro galones; las amplificaciones están mal planteadas, no se utilizan propiedades que consideren tanto al numerador como al denominador. Las estudiantes escriben los productos intermedios (decenas) en la solución, en lugar de ‘llevarlas’ al siguiente producto (Jimeno, 2006).

Al hallar la cuarta fracción equivalente ($\frac{824}{2.120}$) escriben ‘le cobraron en total cuatro galones a 2.120 y el mínimo a 824’; asumen al denominador como el valor de los cuatro galones de gasolina y al numerador como valor mínimo de los cuatro galones. Las estudiantes no agregan los ceros suprimidos en las fracciones. Se evidencian dificultades en el uso de hechos aritméticos (Jimeno, 2006), cuando las estudiantes invierten el significado del numerador y el denominador en la cuarta fracción equivalente, y en la operación de los números de cinco cifras.

Durante el desarrollo de la Tarea 1, las niñas expresaron su deseo de plantear tareas que se respondieran mediante fracciones. Para María Paula es más fácil resolver tareas con fracciones, porque “se puede multiplicar más rápido y hacer el resultado más sencillo” (Diálogo 4, 17 /03 /2022). Esta respuesta considera una resolución basada más en la necesidad de dar una respuesta que, en mostrar conocimientos matemáticos, lo que llevo a realizar una indebida representación de la solución.

En el proceso de solución 2, Tarea n°. 30, Gráfica 10, propuesto por María J, se observa el planteamiento de suma y multiplicación, que luego fueron descartadas. El total de la suma muestra una operación aditiva inadecuada entre cantidades de una y cinco cifras y la multiplicación está incompleta, lo que supone errores en el uso de hechos aritméticos y errores algorítmicos en el cálculo escrito (Jimeno, 2006).

María J representa la tarea n°. 30 con dibujos y efectúa una multiplicación correcta y una resta incorrecta, luego, escribe una respuesta. Los dibujos no representan adecuadamente la tarea dado que falta información. En la exposición de su solución, expresa “yo los hice [los dibujos] solo por representar los galones, pero no vale nada eso”. De esta expresión se colige que utilizó los dibujos como ayuda visual para dar un sentido a los datos, pero que no son relevantes para responder a la tarea. Esta forma usar los números y representarlos, presupone problemas de comprensión (Rico, 2012).

María J lee correctamente las cantidades, y explica el procedimiento ‘‘los cuatro galones son 39…”. Suprime los ceros en la cantidad, y asume como iguales ambas cantidades (Presentación de la tarea 30, 04 /04 /2022) y exhibe dificultades para representar unidades monetarias, al suprimir el signo ($) en su respuesta.

Jimeno (2006) considera que, aunque los estudiantes manifiesten dificultades para el cálculo escrito, pueden hacer operaciones de cálculo mental. Los estudiantes mediante procedimientos informales o estrategias alternativas, plantean un cálculo matemático informal para resolver tareas aditivas y multiplicativas con números no muy grandes. Yuri, Wendy, María Paula y María J, presentan esta característica cuando suprimen los ceros en cantidades de cinco cifras. Mediante estrategias de descomposición y conteo, pretenden operar con los números de forma fácil, rápida y segura, y obtener una solución a la tarea, aunque se les dificulte realizar procedimientos algorítmicos.

La Gráfica 11, muestra el análisis de una tarea aritmética de enunciado verbal, multiplicativa de producto de medida.

Gráfica 11

Tarea Multiplicativa de Producto de Medida

Tarea n°. 31

Transcripción del enunciado	Lorena desde Medellín quiere a su mamá en Bogotá y le manda en una caja con los siguientes datos profundidad 15 cm, ancho 15 cm y alto 4,5 cm ¿Cuánto miden todos los lados?				
Coherencia del enunciado	Historia verosímil	Datos numéricos	Pregunta	Relación pregunta-datos.	Solución
	Si	Si	Si	No	Si
Tipo de tarea	N° de etapas	Estructura operatoria	Estructura semántica		Tipo de números
Producto de medida- simétrico	1	multiplicativa	Falta coherencia entre el enunciado y los conceptos matemáticos implicados.		cinco cifras, naturales

La Tarea n°. 3, Gráfica 11, corresponde a ‘Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos’ y del ‘Pensamiento Métrico y Sistemas Métricos o de Medidas’, y requiere diferentes cálculos para obtener medidas de longitudes en objetos tridimensionales (MEN, 1998). Se clasifica como tarea de producto de medidas, ya que establece relaciones multiplicativas entre las cantidades (Vergnaud, 1983). Es simétrico, porque sus cantidades se pueden intercambiar (Bell et al., 1989).

La tarea n°. 31 es estructurada, incluye enunciado, datos, pregunta e información necesaria para resolverla (Reitman, 1964). Sin embargo, no hay correspondencia entre los datos, la pregunta y los conceptos matemáticos involucrados, según intención del equipo proponente. Yuri, Wendy, María Paula, inventaron la tarea para ser resuelta mediante producto de las tres medidas que describen a la caja, y hallar su volumen, pero la pregunta sugiere un proceso aditivo, para encontrar el perímetro de la caja.

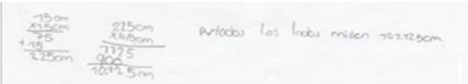
La anterior situación, se evidenció en la respuesta de las niñas a la pregunta: “¿Qué querían que los otros equipos hicieran para resolver la pregunta?” ellas esperaban que el equipo solucionador realizara “una multiplicación…primero largo por ancho y el resultado por el alto”, para encontrar la medida de todos los lados (entrevista 2, del 25/04/22).

Esta disociación entre el enunciado y la pregunta presupone dificultades en la comprensión de volumen, aunque las estudiantes reconozcan: largo, ancho y alto y los relacionen correctamente con las dimensiones de la caja (Diálogo 4, 17 /03 /2022). La redacción de la pregunta supone confusión entre perímetro y volumen, al proponerse el procedimiento para uno de ellos cuando quieren hallar el otro. Las estudiantes manifiestan dificultades para distinguir las particularidades de estos conceptos matemáticos (Socas, 2011).

La Gráfica 12, muestra el análisis de la solución de la tarea aritmética de enunciado verbal, multiplicativa de producto de medida.

Gráfica 12

Solución de Tarea Multiplicativa de Producto de Medida

Enunciado de la Tarea n°. 31	Lorena desde Medellín quiere a su mamá en Bogotá y le manda en una caja con los siguientes datos profundidad 15 cm, ancho 15 cm y alto 4,5 cm ¿Cuánto miden todos los lados?	
Solución de la Tarea	Solución 1	

En la solución 1 de la Tarea n°. 31, Gráfica 12, el equipo proponente, multiplica: profundidad por el valor para el ancho, y el resultado por el valor para la altura. La primera operación está planteada de forma adecuada, y evidencia habilidades en el cálculo escrito con números naturales. En la segunda operación, hay una omisión de la coma en el resultado, necesaria para representar números decimales. Esta omisión, ocurre cuando un estudiante tiene dificultades en la recuperación de hechos numéricos (Jimeno, 2006).

Yuri, Wendy, María Paula, manifiestan dificultades en el lenguaje de cómputo matemático (Salgado y Terán, 2008) cuando no hacen un correcto uso de las unidades de medición. Ubican el símbolo (cm) al lado de los factores y de los productos, sin establecer diferencias entre las unidades de longitud, de superficie y de volumen, con lo cual no establecen diferencias entre unidades y conceptos asociados.

Esta solución, aunque presenta errores en el cálculo escrito y aunque no responde la pregunta de la tarea, es una estrategia de solución adecuada para tareas matemáticas de producto de medidas con objetos tridimensionales.

La Gráfica 13, muestra el análisis realizado a una tarea aritmética de enunciado verbal, multiplicativa de partición, planteada por los estudiantes.

Gráfica 13

Tarea Multiplicativa de Partición

Tarea n°. 25					
Transcripción del enunciado	A la pirámide de Egipto fueron 100 personas y los egipcios le tenían 4.200 jugos. ¿Cuántos jugos recibe cada persona?				
Coherencia del enunciado	Historia verosímil	Datos numéricos	Pregunta	Relación pregunta-datos.	Solución
	Si	Si	Si	Si	Si
Tipo de tarea	N° de etapas	Estructura operatoria	Estructura semántica		Tipo de números
Partición	1	multiplicativa	Relación entre enunciado-datos- pregunta-solución		cuatro cifras, naturales

Esta tarea, Gráfica 13, corresponde al ‘Pensamiento Numérico y los Sistemas Numéricos’, porque considera formular y ejercitar procedimientos para operar y relacionar cantidades (MEN, 1998). La tarea tiene estructura multiplicativa (Castro et al., 1995) de una etapa con cantidades entre tres y cuatro cifras. Se clasifica como tarea de partición, donde un conjunto de objetos se divide en partes iguales (Vergnaud, 1983).

La Tarea n°. 25 es estructurada (Reitman, 1964), tiene coherencia entre sus componentes y el proceso de solución (Ayllón et al., 2010). Es asimétrica, porque sus cantidades no pueden ser conmutables (Bell et al., 1989). La solución de la tarea puede obtenerse mediante multiplicación y división.

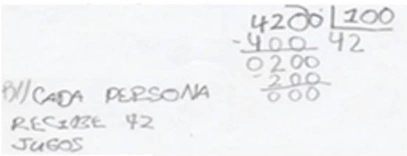
El enunciado se relaciona con algunos aspectos de la imagen. Valentina M., Sofía B. y Meggan enfocaron su atención en las personas y establecieron relaciones sociales para contextualizar su tarea. Aunque la pirámide resalta en la foto por su tamaño, no fue tenida en cuenta en el planteamiento.

La pirámide, contienen elementos numéricos y geométricos (la forma, su tamaño, su estructura, su posición, sus escalones, su material, entre otros) que podrían servir para la redacción del enunciado y para respaldar el enunciado de una pregunta que involucre objetos matemáticos, pero para los niños esta información no fue relevante. Parece ser que los niños relacionan más fácilmente las cantidades de objetos con los números y los algoritmos, que los objetos con los conceptos matemáticos. Puede ser que los estudiantes no estén acostumbrados a relacionar objetos de su entorno con ideas, conceptos o procedimientos matemáticos.

La Gráfica 14, muestra el análisis realizado a la solución del problema aritmético de enunciado verbal, multiplicativo de partición.

Gráfica 14

Solución de Problema Multiplicativo de Partición

Enunciado del problema n°. 25	A la pirámide de Egipto fueron 100 personas y los egipcios le tenían 4.200 jugos. ¿Cuántos jugos recibe cada persona?	
Solución del problema	Solución 1	

La solución 1 del problema n°. 25, Gráfica 14, representa una situación partitiva, en el que se reparte la cantidad de jugos equitativamente entre los turistas. La división está planteada y desarrollada de forma adecuada. En la solución, las niñas escriben la respuesta verbal ‘cada persona recibe 42 jugos’. Las estudiantes exhiben conocimientos matemáticos, para proponer y para resolver problemas multiplicativos de partición en números con varias cifras.

Problema Matemático Multiplicativo con Solución de Adición Repetida

Los problemas 2, 16, 17 y 30, aunque clasifican en varios tipos de problemas, se pueden resolver por adición repetida (Fischbein et al., 1985). De estos, se ha tomado el problema 17 como ejemplo, para analizar las soluciones.

La Gráfica 15, muestra el análisis realizado a un problema aritmético de enunciado verbal, multiplicativo con solución de adición repetida, planteado por los estudiantes.

Gráfica 15

Problema Multiplicativo de Partición con Solución de Adición Repetida

Problema n°. 17

Transcripción del enunciado	Don Wilson quiere sacar sus 20 cajas de la bodega y las quiere repartir entre sus 4 amigos. ¿Cuántas cajas le toca a cada uno de sus amigos?				
Coherencia del enunciado	Historia verosímil	Datos numéricos	Pregunta	Relación pregunta-datos.	Solución
	Si	Si	Si	Si	Si
Tipo de problema	N° de etapas	Estructura operatoria	Estructura semántica		Tipo de números
Partición	1	multiplicativa	Coherencia entre sus componentes y la solución.		Una y dos cifras, naturales

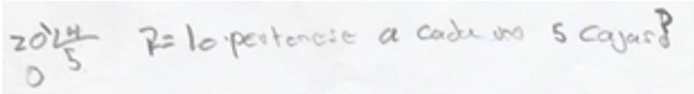
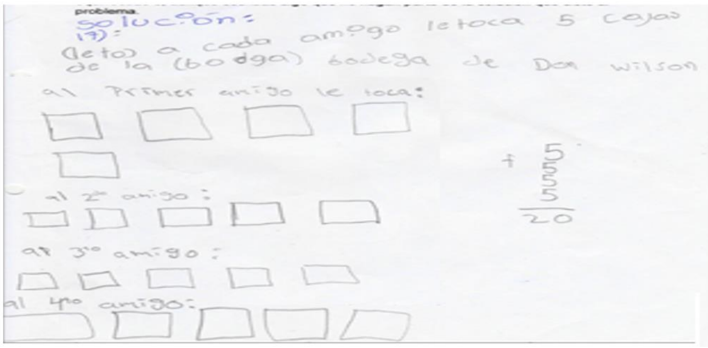
El problema de la Gráfica 15, pertenece al ‘Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos’, representa la ‘numerosidad’ de las magnitudes a través de diversos medios y sistemas de representación (MEN,1998), tiene estructura multiplicativa (Castro et al., 1995) de una etapa, y clasifica como problema de partición (Vergnaud, 1983).

El problema n°. 17 es estructurado (Reitman, 1964), coherente, y presenta relación entre sus componentes (Ayllón et al., 2010); es asimétrico, porque sus cantidades no se pueden intercambiar (Bell et al., 1989). La solución del problema puede encontrarse mediante procesos multiplicativos de división y de adición repetida.

El enunciado, representa el contexto de la imagen: el escenario (la bodega), el sujeto y la cantidad de cajas. Diego, Juan y David, lograron integrar los elementos de una situación real para estructurar adecuadamente su problema, manifestando habilidades matemáticas para proponer problemas matemáticos (Jimeno, 2006). La Gráfica 16 muestra el análisis realizado a la solución de adición repetida del problema aritmético de enunciado verbal, multiplicativo de partición.

Gráfica 16

Solución de Adición Repetida a Problema Multiplicativo de Partición

Enunciado del problema n°. 17	Don Wilson quiere sacar sus 20 cajas de la bodega y quiere repartir entre sus 4 amigos. ¿Cuántas cajas le toca a cada uno de sus amigos?	
Solución del problema	Solución 1	
	Solución 2	

A continuación, se compara resolución de dos estudiantes para el problema. En la solución 1 del problema n°. 17, Gráfica 16, el equipo proponente divide la cantidad de cajas entre los 4 amigos. Luego responden "le pertenece a cada uno cinco cajas". El proceso de solución usado por los estudiantes es adecuado para resolver problemas partitivos.

La solución 2 del problema n°. 17, Gráfica 16, se realiza mediante multiplicaciones de adición repetida. Luis Fernando representa el total de las cajas, y suma cuatro veces la cantidad de cajas que le corresponde a cada amigo. Representa pictóricamente el problema y responde 'a cada amigo le toca 5 cajas de la bodega'. Esta solución responde acertadamente al problema, y evidencia conocimientos matemáticos relacionados con procesos de recuento (Geary, 1994). Una propuesta alternativa al método de adición repetida es la multiplicación de factores, la solución fue propuesta por Alison 'multiplicar 4 x 5 da 20' basada en hechos aritméticos básicos (Geary, 1994). Las soluciones ofrecen evidencias de conocimientos matemáticos que los estudiantes poseen para resolver problemas multiplicativos de partición y adición repetida (Jimeno, 2006) propuestos por ellos mismos.

Discusiones y Conclusiones

Los estudiantes inventaron problemas estructurados, coherentes, con estructura operatoria de una etapa con números de entre una y cinco cifras, en la competencia planeamiento y resolución de problemas. En su mayoría son problemas de procesos aditivos y multiplicativos, incluida la división. Los tipos de problema predominantes son de cambio (Nesher, 1982), de isomorfismo de medidas y de partición (Vergnaud, 1983).

Los Pensamientos Matemáticos (MEN, 1998) más desarrollados en los problemas inventados por los estudiantes son el 'Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos' y el 'Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos'. En algunos casos, se desarrollaron problemas en el ‘Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos’ y el ‘Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas’. No hay registros de problemas en el ‘Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos’.

Los estudiantes exhiben habilidades para inventar problemas matemáticos, sus argumentos, coinciden con los aportes teóricos de Ayllón et al. (2010), Espinoza et al. (2013a), Rico et al. (1998) sobre los componentes que debe tener un problema: enunciado, datos y una pregunta, la cual requiere de un proceso de solución (Entrevistas 25 /04 /17 y 26 /04 /22).

Los estudiantes del grado quinto exhiben conocimientos matemáticos, comprenden y definen conceptos matemáticos, realizan procedimientos algorítmicos, exponen ideas y opiniones sobre los problemas y proponen diversos métodos de solución. En la propuesta de los problemas, los estudiantes manifiestan reconocer conceptos numéricos como mitad, cuádruple, doble; conceptos geométricos como triángulo, cuadrado, clases de líneas y ángulos, área; conceptos de medición y longitud; y algunos niños, leen e interpretan datos en gráficas.

Se aprecian dificultades en el uso de símbolos matemáticos en los algoritmos y cantidades; en la diferenciación de unidades de masa y volumen, para distinguir los conceptos de perímetro y volumen, y para interpretar gráficos circulares; los estudiantes manifiestan dificultades para distinguir las particularidades de estos conceptos y los procedimientos matemáticos implicados.

La recuperación de hechos numéricos, la representación y organización de la información y la elaboración de los conceptos matemáticos son las causas más comunes en las dificultades que presentaron los estudiantes en la resolución de problemas aritméticos verbales.

En la Invención y Resolución de problemas, algunos estudiantes manifestaron dificultades para proponer problemas relacionados con el contexto de la situación exhibida en la imagen propuesta. Solo tienen en cuenta los elementos que puedan ser representados mediante procedimientos ‘matemáticos’, y no logran relacionar conceptos cotidianos con objetos matemáticos. Las dificultades están asociadas tanto con los usos y significados que los estudiantes confieren a los conceptos matemáticos en situaciones reales como con las habilidades matemáticas que exhiben al plantear problemas en diversos contextos y en diferentes formas de representación.

La mayoría de los estudiantes consideran necesario realizar los procedimientos matemáticos y escribir una respuesta al problema; ambos aspectos se deben desarrollar como demostración de sus razonamientos y para estar seguros de la respuesta (Entrevistas 25 /04 /17 y 26 /04 /17). Las soluciones de los problemas no muestran interpretación de datos, ni uso de representaciones pictóricas del problema. La realización constante de interpretaciones y representaciones podría favorecer en la comprensión de los problemas.

Es significativa la cantidad de problemas ‘no estructurados’ con redacción confusa, ausencia de una pregunta o de datos, sin coherencia entre sus componentes. Los ‘errores’ en el cálculo escrito expresan dificultades aritméticas en operaciones aditivas y multiplicativas: olvido de algunos hechos aritméticos (las tablas y fórmulas matemáticas), cálculos incorrectos, errores en el uso de símbolos numéricos y operacionales, errores algorítmicos, alineación incorrecta de las cifras y procedimientos inconsistentes.

Entre las dificultades para la resolución de problemas, se encuentran la incorrecta relación entre los datos y las operaciones matemáticas escogidas, soluciones inadecuadas e inconsistentes[2].

Para los estudiantes, un problema es fácil cuando logran entenderlo y resolverlo con operaciones matemáticas. Un problema es difícil, cuando incluye conceptos matemáticos que no conocen y cuando se confunden con los signos matemáticos que acompañan las cantidades. Otra dificultad está asociada con la relación sujeto - conocimiento, Deisy: "cuando una persona no sabe qué es eso…para ella es difícil el problema porque no lo conoce y no ha estudiado esos temas" (Entrevista 1, 25 /04 /22).

La mayoría de las soluciones presentan uso de sumas y multiplicaciones con explicaciones verbales como un método de solución nuevamente es significativa la cantidad de problemas sin algún tipo de respuesta.

Es necesario cuestionar el pensamiento de los estudiantes, mediante preguntas dirigidas y conversatorios, para reconocer los conocimientos que ostentan dado que su pensamiento matemático no se hace explícito en sus soluciones escritas. Además, de plantear, con mayor frecuencia, en las clases de matemáticas problemas matemáticos de gráficos circulares. Los resultados de este trabajo informan las dificultades que tienen los estudiantes para leer e interpretar gráficos y organizar la información en un enunciado matemático. Se sugiere presentar estos gráficos en imágenes reales de situaciones, debido a que los niños atribuyen significados cotidianos a objetos matemáticos de la imagen (Rico, 2012). Los estudiantes desconocen los conceptos matemáticos y solo prestan atención a la forma.

El docente requiere promover la actividad matemática de los estudiantes, al diseñar tareas que requieran del planteamiento y resolución de problemas, que relacionen conceptos matemáticos con situaciones reales y que fomenten el uso de la imaginación y las experiencias cotidianas de los niños como elementos facilitadores en el aprendizaje de las matemáticas.

El tiempo y la diversidad de la información, no permitieron analizar las consideraciones de los estudiantes sobre los problemas fáciles y difíciles, como posibles causantes de dificultades en los conocimientos matemáticos.

Agradecimientos

Los autores agradecen al "Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación – MINCIENCIAS" por financiar el programa "Innovar en la educación básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro" código 1115-852 70767, además al Proyecto "La modelación matemática como fuente de integración de un currículo STEM+H en la básica primaria" con recursos del "Patrimonio autónomo fondo nacional de financiamiento para la ciencia, la Tecnología y la innovación Francisco José de Caldas", contrato CT 183-2021. Además, agradecen al Dr. John Henry Durango O, por los comentarios y sugerencias hechas al artículo.

Notas

[1] En las situaciones libres, los problemas se plantean a partir de una situación o experiencia relacionada con el contexto del estudiante. En la segunda y tercera actividad, los estudiantes trabajan con base en alguna situación, experiencia o información dada, pero con diferente nivel de estructuración de la tarea propuesta (Stoyanova, 1998).

[2] Los estratos están determinados por el poder económico e inmueble, y ayudan a determinar el monto de los impuestos a pagar, las tarifas de los servicios públicos domiciliarios, el acceso a los servicios de salud, las matrículas a pagar en los colegios y universidades estatales. Los estratos I y II están catalogados como nivel bajo.

[3] 'mula' es una expresión coloquial que utilizan los estudiantes para referirse a un camión de 22 ruedas.

Referencias

Arıkan, E. E., & Ünal, H. (2015). Investigation of problem-solving and problem-posing abilities of seventh-grade students. *Educational Sciences – Theory & Practice,15* (5), 1403–1416.

Armstrong, A. (2014). Collective problem posing as an emergent phenomenon in middle school mathematics group discourse. En C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle y D. Allan (Eds.), Proceedings of the joint meeting of PME 38 and PME-NA 36 (Vol. 2, pp. 57-64). Vancouver, Canadá.

Ayllón, M. (2005). *Invención de problemas con números naturales, enteros negativos y racionales. Tarea para profesores de educación primaria en formación* [Tesis de doctorado**,** Universidad de Granada].

Ayllón, M. (2013). *Invención-resolución de problemas por alumnos de Educación Primaria* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. DIGIBUG. http://hdl.handle.net/10481/27771

Ayllón, M., Castro, E. y Molina, M. (2010). Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 223-233). Lleida: SEIEM

Bell, A., Creer, B., Grimison, L., & Mangan, C. (1989). Children ‘s performance on multiplicative word problems: Elements of a descriptive theory. *Journal for Research in mathematics Education*, *20*(5), 434-449.

Brown, S., & Walter, M. (1993). *Problem posing. Reflections and Applications.* Hillsdale: Psychology Press. https://doi.org/10.4324/9781315785394

Cai, J. (2003). Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: An exploratory study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34* (5), 719–737. https://doi.org/10.1080/00207390310001595401

Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B., & Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. *Educational Studies in Mathematics*, *83*, 57–69.

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 401–421. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00142-6

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización* (1ra ed.). Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamericana S.A

Coronel, M. y Curotto, M. (2008). La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *REEC: Revista electrónica de enseñanza de las ciencias, 7*(2), 463-479.

English, L. (1998). Children's Problem Posing within Formal and Informal Contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(1), 83–106. https://doi.org/10.2307/749719

Espinoza, J., Lupiáñez, J. y Segovia, I. (2013a). Características del talento matemático asociadas a la invención de problemas. *Revista científica*, (Edición especial), 190-195.

Espinoza, J., Lupiáñez, J. y Segovia, I. (2013b). *Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento en matemática: un estudio exploratorio.* I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe, Santo Domingo, República Dominicana.

Espinoza, J., Lupiáñez, J. y Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *14*(2), 1-12. https://doi.org/10.18845/rdmei.v14i2.1664

Fernández, E. y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *34*(1), 53-71. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1455

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 3-17. https://doi.org/10.2307/748969

Geary, D. C. (1994). Children's mathematical development: Research and practical applications. American Psychological Association. https://doi.org/10.1037/10163-000

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM Mathematics Education, 39*(1), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática, 12*(1), 70-92.

Guerrero, Y. y Rey, N. (2013). Dificultades en la resolución de problemas multiplicativos. Revista Científica, 17(2), 197–200. https://doi.org/10.14483/23448350.6482

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2022). *Informe nacional de resultados de las pruebas Saber 3°, 5°, 7º y 9°. Aplicación 2022.* https://www.icfes.gov.co/informe-nacional-2022

Jimeno, M. (2006). *¿Por qué las niñas y los niños no aprenden matemáticas?* Editorial Octaedro. ISBN: 9788480637800.

Juvanteny, M., Jiménez, E., García, I., Úbeda, L. y Moratonas, M. (2015). Una propuesta metodológica para el diseño, gestión y evaluación competencial de estrategias de resolución de un problema multiplicativo combinatorio. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, *89*(1), 69-85.

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *Journal of Mathematics Behavior*, *31*(1), 149-161. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.11.002

Kotsopoulos, D. y Cordy, M. (2009). Investigating imagination as a cognitive space for learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 259–274. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-008-9154-0

Leung, Sk. S. (2013). Teachers implementing mathematical problem posing in the classroom: Challenges and strategies. *Educational Studies in Mathematics, 83* (1), 103–116. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9436-4

Lowrie, T., & Whitland, J. (2000). Problem posing as a tool for learning, planning and assessment in the primary school. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th conference of the Psychology of Mathematics Education* (pp. 247–254). Hiroshima, Japan.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction Word problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Rombert. (Eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective* (pp. 25-38). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Noda, M. (2001). La resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, *47*, 3-18.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico [OCDE] (2019). *Programme for international student assessment PISA. Results from PISA 2018*. https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_COL_ESP.pdf

Reitman, W. (1964). Heuristic decision procedures, open constraints, and the structure of ill-defined problems. *Human judgments and optimality*, 282-315.

Reyes, P. (2012). Caracterización del Pensamiento Matemático: Escenarios con estudiantes universitarios y de liceo utilizando temas de la Teoría de Grupos [Tesis de Doctorado, Universidad de Augsburgo]. https://www.researchgate.net/publication/278383052_Caracterizacion_del_Pensamiento_Matematico_Escenarios_con_estudiantes_universitarios_y_de_liceo_utilizando_temas_de_la_Teoria_de_Grupos

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. AIEM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1). 39-63. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.4

Rico, L., Martínez, E. y Solórzano, J. (1998). La invención de problemas en escolares de primaria: un estudio evolutivo. *Aula*, *10*, 19-39. https://doi.org/10.14201/3529

Salgado, A. y Terán, N. (2008). *Dificultades infantiles de aprendizaje. Manual Orientativo para Padres y Educadores*. Editorial Grupo cultural.

Schindler, M., & Bakker, A. (2020). Affective field during collaborative problem posing and problem solving: A case study. *Educational Studies in Mathematics*, *105*, 303-324. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09973-0

Silver, E. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. *ZDM Zentralblatt Fur Didaktik der Mathematik*, *27*(2), 67-72.

Silver, E. A. y Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics*, *12* (3), 129–135.

Singer, F., Ellerton, N. y Cai, J. (Eds.). (2015). *Mathematical problem posing: From research to effective practice*. Springer.

Socas, M. (2011). Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. Buenas prácticas. *Educatio siglo XXI*, *29*(2), 199-224.

Stoyanova, E. (1998). *Extending and exploring students "problem solving" via problem posing: a study of years 8 and 9 students involved in mathematics challenge and enrichment stages of Euler enrichment program for young Australians* [Thesis, Edith Cowan University]. Research Online. https:/0/ro.ecu.edu.au/theses/885

Stoyanova, E. (2003). Extending students´ understanding of mathematics via problem-posing. *Australian Mathematics Teacher*, *59*(2), 32-40. https://search.informit.org/doi/10.3316/aeipt.129365

Suarsana, I., Lestari, I., & Mertasari, N. (2019). The effect of online problem posing on students' problem-solving ability in mathematics. *International Journal of Instruction, 12*(1), 809-820.

Toluk-Uçar (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education*, *23*(1), 166-175.

Vergel, R., Radford, L. y Rojas, P. (2022). Zona conceptual de formas de pensamiento aritmético «sofisticado» y proto-formas de pensamiento algebraico: una contribución a la noción de zona de emergencia del pensamiento algebraico. *Bolema*, *36*(74), 1174-1192. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a11

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Academy Press.

Yamamoto, S., Kanbe, T, Yoshida, Y., Maeda, K., & Hirashima, T. (2012). A case study of learning by problem-posing in introductory phase of arithmetic word problems. En *Proceedings of the International Conference on Computers in Education*, 25-32.

Zhang, H., & Cai, J. (2021). Teaching mathematics through problem posing: insights from an analysis of teaching cases. *ZDM Mathematics Education*, *53*, 961-973. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01260-3

Zhang, L., Cai, J., Song, N., Zhang, H., Chen, T., Zhang, Z., & Guo, F. (2022). Mathematical problem posing of elementary school students: The impact of task format and its relationship to problem solving. *ZDM Mathematics Education*, *54*, 497-512. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01324-4