FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISBN: 84-600-9563-O

LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN SECUNDARIA UTILIZANDO ENTORNOS DE GEOMETRÍA DINÁMICA (EGD). ALGUNAS INVESTIGACIONES

Matías Camacho Machín

Universidad de La Laguna

Introducción:

Los avances de la informática en los últimos años no han pasado desapercibidos en la Educación Matemática. Se ha elaborado una cantidad notable de software educativo con el objetivo de potenciar la adquisición de los conceptos matemáticos por parte de los alumnos, principalmente de secundaria.

Dentro del amplio espectro de programas ideados para la enseñanza de las Matemáticas, a principios de la década de los 90, se han desarrollado algunos programas específicos para la enseñanza de la geometría, tales como

Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1991), El Geómetra (versión española, 1998)
Cabri Géomètre (Baulac, Bellemain y J. M. Laborde, 1992, 1994),
Geometry Inventor (Brock, et al, 1994)
SuperSupposer (Schwartz, Yerushalmy, 1992).

Todos ellos representan colectivamente lo que en general se denominan ENTORNOS DE GEOMETRÍA DINÁMICA (EGD)

Paralelamente al desarrollo del software, se ha generado un gran interés por parte de los educadores matemáticos y consecuentemente se ha producido, principalmente en Francia y USA, una rápida introducción de los mismos en las aulas de secundaria. Las imágenes estáticas que los alumnos encuentran en sus libros de texto, se convierten con estas herramientas en dibujos deformables rápidamente y con movimiento, logrando con ello que el estudio de los distintos conceptos geométricos básicos (triángulos, cuadriláteros, propiedades, teoremas,...) se haga mucho más atractivo.

Las características comunes de este software, permiten, entre otras cosas:

- Medir ciertas partes de un dibujo.
- Trazar los caminos que recorren puntos que se mueven a medida que lo hace el ratón.
- Construir rápidamente polígonos y círculos
- Realizar fácilmente transformaciones (giros, traslaciones, simetrías, semejanzas).

  En definitiva, simulan las construcciones con regla y compás, al estilo de la Geometría de Los Elementos de Euclides.
- Permiten utilizar macros fácilmente definidas por el usuario. Esto es, construcciones predeterminadas que se llaman Guiones (Scripts), que pueden ser activadas por el estudiante en cualquier momento. Por ejemplo, si necesitáramos utilizar cuadrados con los que poder comprobar la propiedad pitagórica para los triángulos rectángulos, se puede hacer un Guión que, dados dos puntos, construya un cuadrado y después utilizar dicho guión para construir los cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo. Activada la herramienta macro, se realiza la construcción quedando guardada como un fichero utilizable (fig 1):

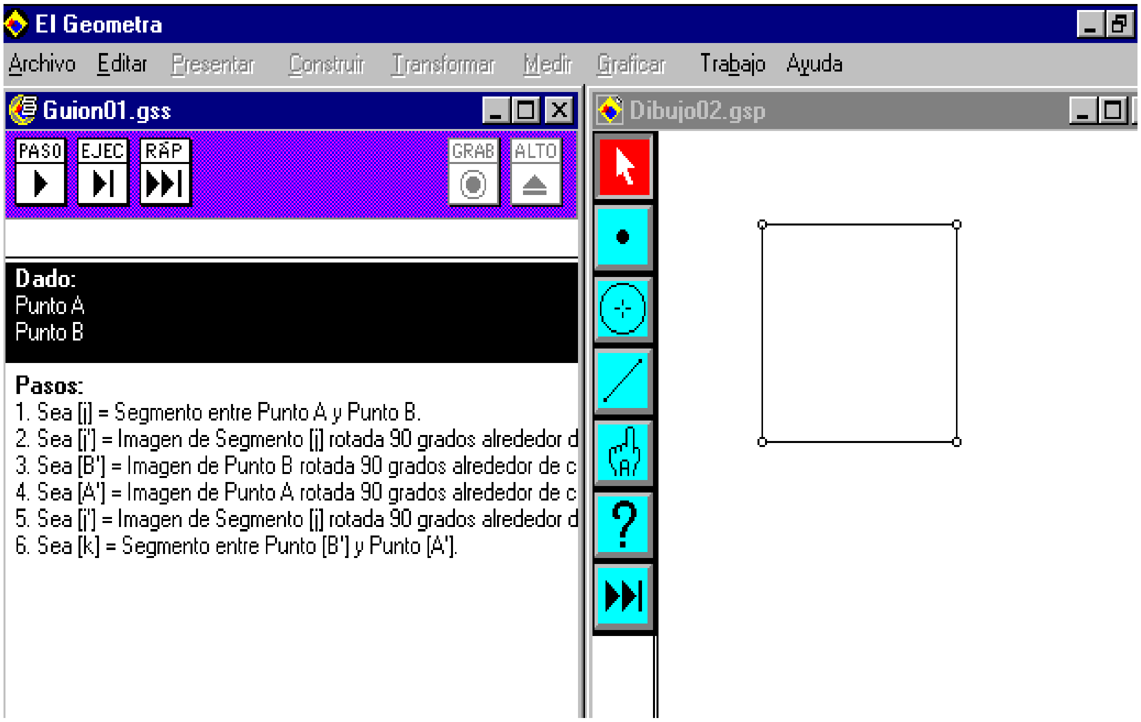

Fig. 1: Guión para construir cuadrados mediante rotación

Ahora bien, quizás la característica más importante de estas herramientas es, sin lugar a dudas, la transformación continua de los dibujos construidos -lo que se denomina típicamente "arrastar" (drag)- y que es precisamente la que da lugar al adjetivo de "dinámica" a esta clase de geometría.

Con esta característica, el usuario puede arrastrar ciertos elementos de un dibujo líbremente después de haberlo construido sin cambiar las relaciones geométricas que subyacen en la figura construida.

Por ejemplo, dibujado un triángulo en la pantalla podemos, puesto el cursor en uno de los vértices, obtener una infinidad de triángulos mayores o más pequeños (fig. 2), simplemente moviendo el ratón con el botón izquierdo pulsado y, como consecuencia, observar que los otros elementos responden dinámicamente a las condiciones alteradas (el punto medio del triángulo original, sigue siendo el punto medio en el transformado, etc).

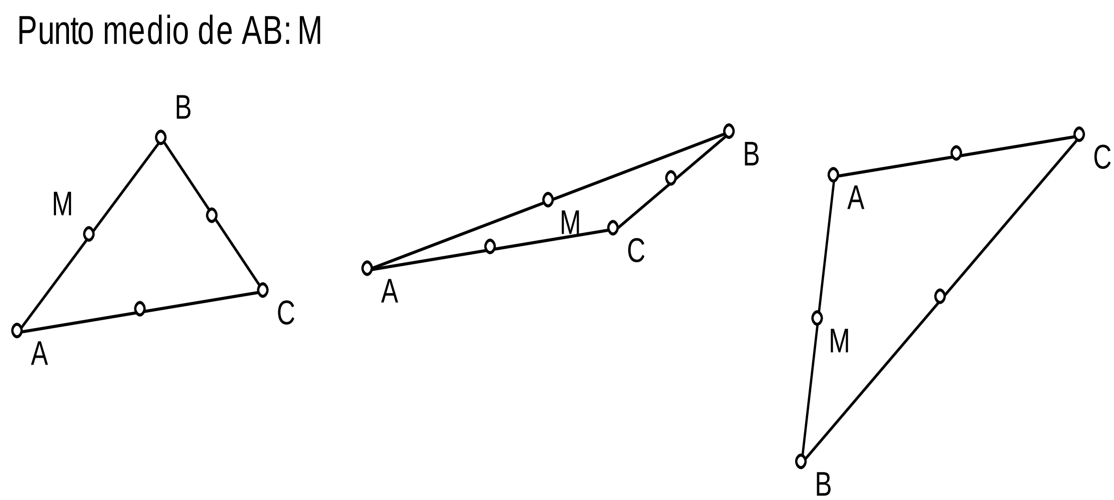

Fig. 2: El segundo y tercer triángulos se han obtenido arrastrando simplemente el vértice B

La visualización de esta operación es que el dibujo está siendo deformado continuamente al "arrastar", mientras que las condiciones que determinan las restricciones esenciales de la figura se siguen manteniendo.

Muchos profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria, consideran que son estos Entornos de Geometría Dinámica buenas herramientas para enseñar geometría, dado que abre a los alumnos un amplio abanico de posibilidades nunca antes conseguidas debido principalemnte a la limitación que supone el uso de la regla y compás.

No obstante, el conocimiento de cómo aprenden los estudiantes utilizando estos materiales puede, y de hecho suele estar, lejos de las intuiciones de los profesores. Mientras que el campo de la enseñanza del cálculo y más particularmente en la representación gráfica de funciones utilizando programas de ordenador existe un gran número de investigaciones (véase por ejemplo, Dunham, 1993), en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos geométricos haciendo uso del software de la Geometría Dinámica. Se puede afirmar que la investigación se empieza a desarrollar en estos últimos cuatro ó cinco años.

A la hora de determinar los problemas de investigación es importante tener en cuenta que nuestras percepciones vienen influenciadas por nuestros propios conocimientos matemáticos, por lo que es muy importante destacar la necesidad de observar y analizar directamente el trabajo de los alumnos para poder inferir e interpretar el funcionamiento de las mentes de los estudiantes cuando trabajan con EGD y consecuentemente optimizar el rendimiento de este recurso didáctico.

Veamos a continuación un ejemplo en el que se pretende poner de manifiesto esto último.

Es sabido que el Teorema de Varignon establece que

La figura formada cuando se unen en el orden dado los puntos medios de un cuadrilátero cualquiera es un paralelogramo y su área es la mitad de la del cuadrilátero original.

Utilizando *el Geómetra*, podemos fácilmente construir el cuadrilátero de partida y el cuadrilátero que une los puntos medios de los lados de dicho cuadrilátero, comprobando visualmente que es un paralelogramo. Ahora bien, ¿será cierta para todos los cuadriláteros la propiedad?

Si modificamos con el ratón el cuadrilátero de partida (fig. 3) cabría hacernos las siguientes preguntas:

¿Cómo interpreta el alumno el efecto de movimiento del punto?

¿Admiten los alumnos que esta propiedad la cumplen todos los cuadriláteros o tienen problemas cuando el cuadrilátero se convierte en un triángulo? ¿Y en un cuadrilátero no simple?

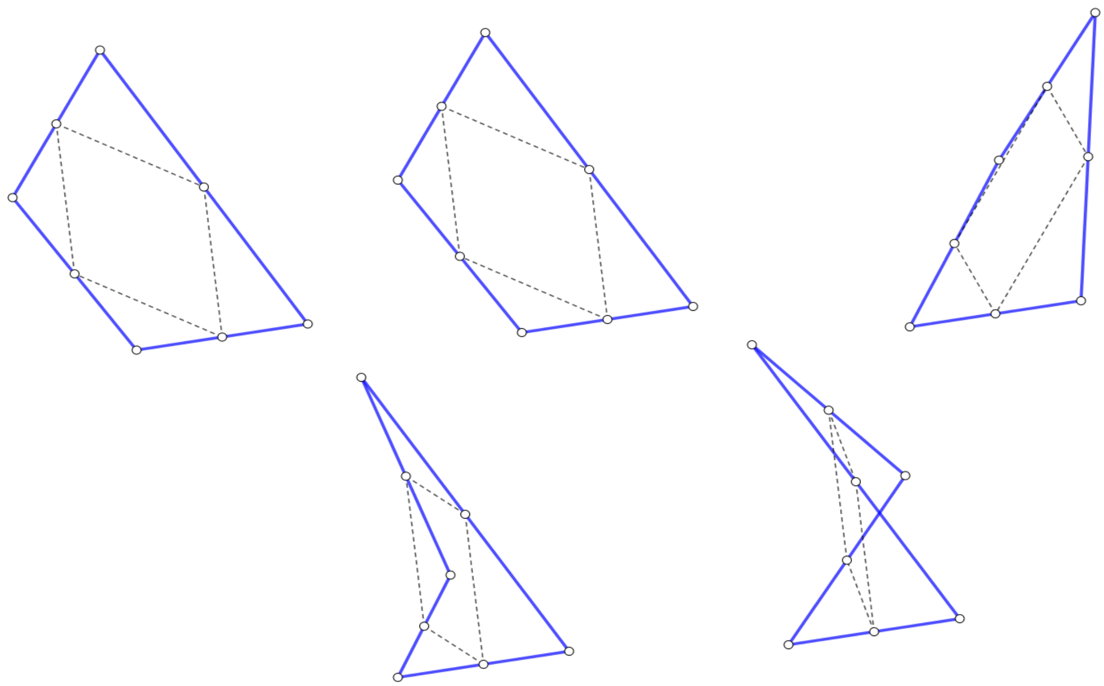

Fig. 3: Teorema de Varignon.

¿Son capaces los alumnos de interpretar un “continuo de cuadriláteros”?

¿Qué clase de interpretación hacen de los cuadriláteros “raros”?

La tesis relativa a las áreas, la podemos comprobar también en *El Geómetra* (Fig. 4)

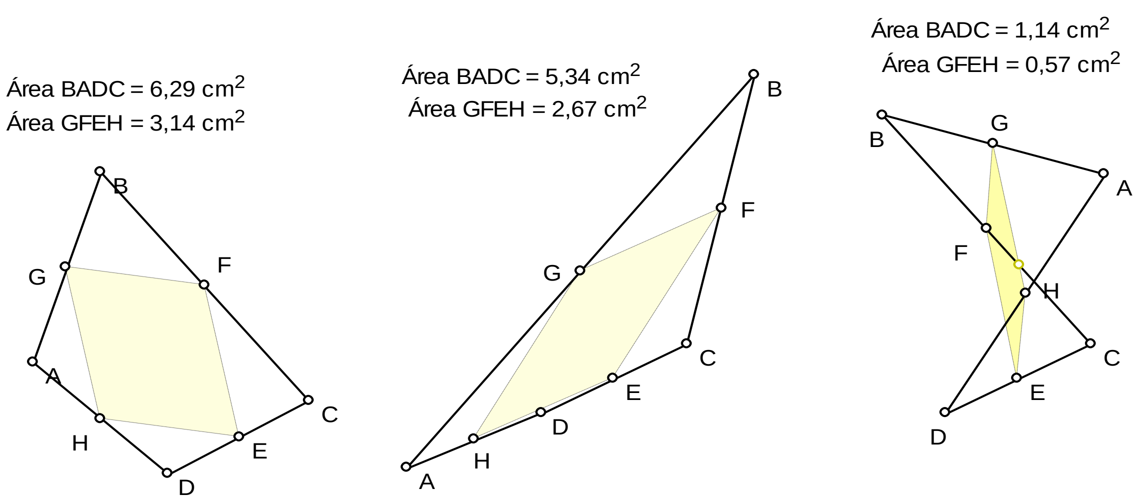

Fig. 4: El área del romboide es la mitad del área del cuadrilátero original.

De lo anterior, podemos concluir que es muy importante que la investigación que se realice sobre el uso de EGD por parte de los estudiantes, deberá partir de la observación, análisis y síntesis de lo que ocurre en el aula.

Dentro ya de la investigación realizada hasta la actualidad, podemos encontrar dos grandes grupos de investigación centradas en :

1.- La caracterización desde la perspectiva matemática d eesta “clase” de Geometría con el objetivo de clarificar e interpretar el uso que puede ser hacerse de este material didáctico, lo que se realiza actualmente siguiendo dos direcciones principales:

1a) Dotando a la Geometría Dinámica de una fundamentación axiomática propia, de manera análoga a lo que hacen Abelson y Dissesa, (1980) con el programa LOGO.

1b) Explicando en términos de una teoría matemática ya existente los fundamentos de esta geometría.

La investigación que se desarrolla en la actualidad en este segundo aspecto (1b) en el Education Development Center (Massachusetts) propone que es necesario analizar en primer lugar cuáles son

- Los **objetivos matemáticos** que intervienen en la GD:

Cada software de GD, posee unos ciertos objetivos primitivos (puntos, líneas, círculos) y herramientas básicas (perpendicular de una recta por un punto, punto medio de un segmento, …) que permiten desarrollar otros objetos. Estos objetos no coinciden con los de la goemetría de Euclides.

Por ejemplo, estirar y encoger segmento conservando razones entre segmentos, cosa que ocurre en los EGD y no en la Geometría Euclídea, debe ser contemplado como un objeto específico de esta “nueva geometría”.

- Las **transformaciones** que tienen lugar:

Junto a las transformaciones básicas (giro, traslación, ...) que aparecen en la Geometría Euclídea, aquí "el arrastre" de segmentos representa una nueva transformación.

- Los **invariantes** en esta clase de Geometría.:

La construcción de segmentos que conserven las razones da lugar evidentemente a nuevos invariantes que deben ser analizados.

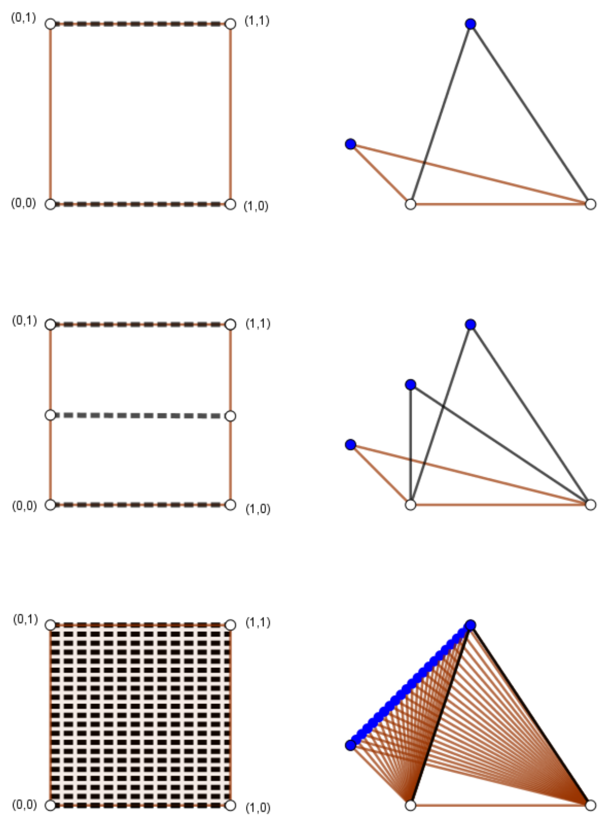

Fig. 5: La homotopía y el "arrastre" en los EGD

En esta línea de investigación, se propone interpretar -dado que la diferencia esencial en los EGD surge cuando se trata de interpretar la equivalencia de las figuras después de deformarlas con continuidad- desde el campo de la Topología y más concretamente de la Homotopía (Véase Goldenberg y Cuoco, en prensa; Abelson y diSsesa, 1980).

En la figura anterior, se hace una analogía entre las homotopías, y la trasformación de "arrastre" válida para los EGD, tomando como elementos básidcs los triángulos, es decir, al segmento de la base ((0,0)-(1,0)) se la asocia el primer triángulo y al segmento de puntos discontinuos el triángulo para el que se "arrastra" el vértice superior. Y así sucesivamente en los demás estadios de las transformaciones (fig. 5)

2.- En este segundo grupo de investigaciones se incluyen aquellas que tienen que ver con el análisis, a partir de los conceptos de la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1986) desarrollada en Francia, de los distintos aspectos de estos EIAO (Environments interactifs d'apprendissage avec ordinateur), tanto desde la perspectiva teórica como práctica de lo que en esta teoría se considera un medio a-didáctico (Laborde y Capponi, 1994).

Las principales investigaciones se han dedicado, por una parte, al estudio del funcionamiento y especificidades del programa Cabri-Géomètre y sobre su papel en la concepción y funcionamiento de las situaciones a-didácticas que provee, y por otra, a la justificación del uso de dicho software como el mejor organizador para el aprendizaje de lo que ellos denominan "figura" geométrica.

Distintas investigaciones llevadas a cabo por este grupo clarifican el significado de algunos términos que permiten elaborar secuencias de aprendizaje con este software. Así, Parzysz (1988)distingue entre los términos "dibujo" y "figura" a la hora de interpretar símbolos linguísticos y gráficos, lo que permite avanzar dentro de los aspectos de generalidad y particularidad de los que significa una imagen de un objeto geométrico visualizado.

A menudo se confunde, tal y como Laborde (1994) lo demuestra, la figura con su trazado material en el papel o en la pantalla del ordenador y sugiere que cuando un problema se plantea en geometría, cada diseño realizado, sea cual sea su soporte físico, no es más que un estado de la figura. Éste es entonces el invariante geométrico que interviene en los cambios de estado susceptibles de producirse respecto de la cuestión a estudiar.

Dar sentido a un problema de geometría consistirá en delimitar el contexto y hacerse una representación mental en la que la permanencia de ciertas propiedades se opone a la variabilidad de los trazados. Laborde y Capponi (1994) identifican:

Objetos geométricos: un objeto matemático definido por un conjunto de relaciones.

Dibujos: que constituyen un soporte con mucha o poca información.

Figuras: que representan el conjunto de características psicológicas, interpretaciones que relacionan el objeto matemático con los dibujos particulares, esto "la imagen mental" del objeto geométrico en el sentido de Tall y Vinner (1981). Cualquier clase de representación (*imagen, forma simbólica, diagrama, gráfica, etc.*) del estudiante asociada al concepto

Se presentará a continuación un proyecto de trabajo que pensamos que puede ser viable dentro de las líneas de investigación que se desarrollan en la actualidad entorno al uso de EGD, que se piensa llevar a cabo en un futuro más o menos inmediato:

Título: *Aportaciones a la elaboración de un marco teórico en torno a la geometría dinámica a partir del estudio de los conceptos de área y perímetro de figuras planas.*

Los objetivos de la investigación:

1.- Analizar la viabilidad de implementación del software en la enseñanza de la Geometría en secundaria.

2.- Profundizar en el estudio de una caracterización matemática de la Geometría Dinámica a partir del análisis de sus objetos, transformaciones e invariantes, con el objetivo de completarlos.

3.- Elaborar y desarrollar en el aula un conjunto de situaciones didácticas en torno a los conceptos áreas y perímetros de figuras desde una perspectiva dinámica, esto es, considerando las figuras planas como figuras obtenidas por movimiento de segmentos en lugar de figuras planas obtenidas por recubrimiento, haciendo uso del *Geómetra*.

4.- Identificar cuáles son los errores y dificultades que surgen en el desarrollo del proceso de de enseñanza aprendizaje de los conceptos de área y perímetro utilizando un software de Geometría Dinámica.

Pensamos que el interés general de nuestra popuesta radica, principalmente en que, dada la inmediatez de la introducción de los programas informáticos en las aulas de secundaria, es esencial un estudio tanto teórico como práctico del uso que se puede y se debe hacer de ellos. Por tanto, es necesario desarrollar secuencias de enseñanza en el aula con el objetivo de analizar tanto la enseñanza que llevará a cabo el profesor en el aula como los problemas y dificultades que encontran los alumnos utilizando este nuevo recurso didáctico.

Con esta propuesta de investigación, se tratarán de confirmar la siguientes hipótesis de trabajo:

1.- La medida de figuras planas en términos de área y perímetro constituye un nuevo objeto matemático que debe ser incorporado al modelo teórico propuesto por Goldenberg y Cuoco (en prensa).

2.- La isoperimetría y la equivalencia de figuras planas constituyen nevos invariantes que deben ser incluidos dentro del grupo de invariantes del modelo anteriormente señalado.

3.- Los conceptos de área y perímetro, tratados conjuntamente desde la perspectiva de la Geometría Dinámica (utilizando como soporte el Geometra) serán adquiridos por los alumnos de secundaria de una forma más completa y en una dimensión mayor que con su enseñanza estática habitualmente utilizada en la secundaria.

Confirmar los planteamientos de Laborde y Capponi ya señalados en un marco de aplicación práctica de secuencias de enseñanza de nuevos conceptos que no han sido considerados en sus investigaciones.

Pa ra ello, proponemos una metodología basada en los siguientes aspectos:

Se conjugarán en la investigación los métodos y técnicas de los paradigmas cuantitativo y cualitativo.

Se utilizarán dos cursos de segundo de la ESO, en uno se desarrrollarán los tópicos de área y perímetro de figuras planas en el sentido tradicional y en otro la secuencia elaborada, previa una formación de dos semanas en el uso del *Geómetra*.

Para la comparación de los resultados obtenidos se utilizará una prueba en ambos grupos.

Para la confirmación de nuestras hipótesis teóricas sobre el modelo matemático de la Geometría Dinámica, utilizaremos un método de investigación eminentemente cualitativo, siendo la observación directa realizada mediante entrevistas clínicas videograbadas nuestra principal fuente de análisis.

Un posible plan de trabajo podría estar constituido por las siguientes fases:

1. Revisión de la literatura sobre el tema y concreción de los problemas de investigación.
2. Preparación de la secuencia didáctica y la secuencia de formación en el empleo del *Geómetra*.
3. Preparación del modelo de investigación y entrevistas.
4. Desarrollo de la formación de un grupo de 2º de la ESO en las características del software.
5. Puesta en marcha de la experiencia en el aula.
6. Desarrollo de las entrevistas clínicas.
7. Análisis de los resultados, establecimiento de las conclusiones y revisión del material utilizado.

Referencias Bibliográficas

ABELSON, H. DISESSA, A. (1980). *Turtle Geometry*, MA:MIT Press con el LOGO (1980).

BROUSSEAU, G. (1986). *La theorization des phenomènes d' enseugnement des. Matgématiques*. Thèse Bordeaux V.

DUNHAM, P.H. (1993). Explaining function machines, Intelligent Tutoring Media, 4 (3-4): pp. 97-108.

GOLDENBERG, E.P., CUOCO, A. (en prensa) What is Dynamic Geometry? En R. Lehrer y D. Chazan (eds), Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space. Hillsdale, N.J.: LEA publishers.

LABORDE C., CAPPONI, B. (1994). Cabri- Géomètre constituant d'un milien pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14, números 1,2; pp. 165-210.

LABORDE, C. (1994). Les rapports entre visual et geometrique dans un EIAO. En Artigue, M.; Gras, R.; Laborde, C.; Tavignot, P. (eds). Vingt ans de idactique des mathematiques en France. Hommage a Guy Brousseau et Gerard Vergnaud. Grenoble: Ed. La Pensee Suvage. Pp. 387-394.

PARZYSZ, B. (1988) “Knowing” vs “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. Educational Studies in Mathematics, 19 (1) pp. 79-92.

TALL, D., VINNER, S. (1981). Concept images and Concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, Educational Studies in Mathematics, 12, pp. 151-169.