

# DOS EJEMPLOS DE UNIDADES DE APRENDIZAJE DESARROLLADAS BAJO LA PERSPECTIVA DE LOS VAN HIELE: MEDIDA DE ÁNGULOS Y GIROS

M<sup>a</sup> Candelaria Afonso Martín  
Matías Camacho Machín  
Martín M. Socas Robayna

Universidad de La Laguna

## Resumen

En este trabajo presentamos, a modo de ejemplo, una síntesis de dos secuencias didácticas: Medida de Ángulos y Giros, organizadas a partir de la Teoría de los Van Hiele, que se llevaron al aula en el último ciclo de Educación Primaria y en el primer ciclo de la Educación Secundaria.

Estas secuencias didácticas forman parte de dos de las tres unidades de aprendizaje diseñadas para una investigación más amplia (Afonso, Camacho y Socas, 1995, 1997) en la que se analizan las dificultades y potencialidades que se dan en la implementación de un microcurrículo de Geometría por 11 profesores en activo, organizados según en el modelo de Van Hiele.

En artículos anteriores (Afonso, Camacho y Socas, 99a y 99b) hemos constatado cómo la elaboración, implementación y evaluación de un diseño de instrucción de esta naturaleza necesita de una “ingeniería didáctica” que muy pocos profesores pueden afrontar con garantías, al requerir como condiciones previas que el profesorado tenga una formación científica en Geometría, al menos con un nivel de pensamiento geométrico superior en el que se pretende trabajar con sus alumnos; una concepción constructivista del aprendizaje en términos de investigación dirigida; capacitación para trabajar con alumnos que presenten un alto grado de heterogeneidad en destrezas básicas, intereses y necesidades en Geometría; una concepción del currículo de Geometría como un instrumento de investigación que permite desarrollar los diferentes niveles de razonamiento geométrico y una valoración y ejercitación del trabajo en equipo.

### **Abstract**

In this work we present, as a mode of example, a synthesis of two didactical sequences: Measurement of Angles and Turns, organized and derived from the Van Hiele Theory, that were taken into the classroom in the last cycle of Primary Education and in the first cycle of Secondary Education.

These didactical sequences form part of two of the three units of learning, designed to be investigated extensively, in which difficulties and potentialities presented are analyzed in the implementation of the microcurriculum of Geometry by eleven actively organized teachers following the Van Hiele model.

In previous articles (Afonso, Camacho y Socas, 99a y 99b), we have confirmed how the elaboration, implementation, and evaluation of an instructional design of this nature needs the didactical engineering that few teachers could present with confidence. This requires that teachers have a basic, fundamental knowledge and understanding of Geometry that is at least one level higher than that of their students; a constructivist conception of learning in terms of conducting a supervised investigation; the aptitude to work with students who demonstrate an advanced degree of basic, heterogeneous skills, interests and needs in Geometry; a conception of the Geometry curriculum as an instrument of investigation that will allow development of different levels of geometrical reasoning, and a validation of a team work exercise.

### **Introducción**

Este trabajo sobre las unidades de aprendizaje “Medida de ángulos y Giros” complementa el inicialmente desarrollado sobre la unidad de aprendizaje, ángulos (Afonso, Camacho, Socas, 1999c), todas ellas configuran el conjunto de unidades de aprendizaje elaborado para la investigación que llevamos desarrollando desde hace varios años.

Presentamos en primer lugar la unidad de aprendizaje “Medida de ángulos” y en segundo lugar la de “Giros”.

### **La unidad de aprendizaje: “Medida de ángulos”**

La unidad de aprendizaje que se describirá a continuación está organizada a partir de la teoría de los Van Hiele, esto es, atendiendo a sus niveles de pensamiento geométrico y desglosada en las distintas fases de aprendizaje que corresponden a cada uno de los niveles. (véase, Burger y Shaughnessy, 1986, para más detalles).

Conviene señalar en lo que sigue que codificaremos los cinco niveles de Van Hiele desde 1 hasta 5, pese a que en otros trabajos aparecen numerados desde 0 hasta 4.

Los alumnos con los que se desarrolló la experiencia, tenían de 11-13 años de edad y habían alcanzado el Nivel 1 (se utilizaron los tests presentados en Jaime (1993) y Usiskin (1982) para determinar su nivel de pensamiento geométrico) y la experiencia se llevó al aula tratando el tópico de “Medida de ángulos” en los niveles 2 y 3, es decir, para intentar lograr que los alumnos pasen desde el nivel 1 al nivel 2 y de éste al 3 en el tópico definido.

Esta Unidad de aprendizaje consta de dos secuencias de aprendizaje, una sobre “Medida de ángulos y operaciones sobre Medidas de ángulos”, que se situará en el nivel 2, y otra, sobre “Suma de los ángulos de un polígono convexo”, que se trabajará en el nivel 3.

Las dos secuencias de aprendizaje se organizan de manera continua y dan lugar a la unidad de aprendizaje “Medida de Ángulos”, organizada en los niveles 2 y 3; el nivel 2 hace referencia a las medidas directas y el nivel 3 a las medidas indirectas.

Se elaboraron 54 actividades para el nivel 2 organizadas en torno a las fases de aprendizaje de la siguiente forma: 9 actividades para la fase 1,

21 actividades para la fase 2, 15 actividades para la fase 4 y 9 actividades para la fase 5.

En relación con el grupo de actividades correspondientes al nivel 3 se elaboraron 43 actividades distribuidas de la siguiente manera: 7 actividades para la fase 1, 6 actividades para la fase 2, 8 actividades para la fase 4 y 22 actividades para la fase 5.

Se supone, por tanto, que los alumnos han alcanzado el nivel 1 de razonamiento matemático en este tópico. Es decir, los alumnos poseen ya una visión global, no matemática, de lo que es la medida, en general, y de los ángulos en particular. Además poseen unos conocimientos previos adecuados para cada secuencia de aprendizaje. Para la primera secuencia, deben conocer lo que es un ángulo y los diversos tipos de ángulos, y para la segunda secuencia, además de los anteriores conocimientos, deben conocer, lo que un polígono, el concepto de diagonal de un polígono y las diferentes clasificaciones de los polígonos.

En definitiva, para iniciar el trabajo en este tópico, los alumnos deben ser capaces de:

- Describir ángulos verbalmente por su apariencia global.
- Identificar ángulos en figuras y en configuraciones geométricas.
- Designar o etiquetar los ángulos de un figura o de una configuración geométrica, con colores o con letras.
- Relacionar, comparar o clasificar ángulos en una figura o configuración geométrica, en términos de mayor (mayor abertura que el otro) o menor (menor abertura que el otro) que uno dado.
- Construir, dibujar o copiar ángulos de una figura o configuración geométrica dada, utilizando diferentes materiales o recursos.

A efectos de concretar diferentes actividades del diseño de instrucción, vamos a comentar primeramente para los dos niveles de pensamiento geométrico tratados:

- La descripción del nivel para el tópico tratado
- La formulación de los objetivos generales o finalidades

## Nivel 2: Análisis

### Descripción

Los alumnos alcanzarán este nivel cuando sean capaces de identificar, analizar, comparar y clasificar ángulos en términos de sus componentes, descubrir relaciones y propiedades para las diferentes clases de ángulos, además de utilizar el grado y los submúltiplos del grado como unidades de medidas para medir ángulos en figuras y configuraciones geométricas, y para operar con ellos.

### Objetivos generales

- Analizar los ángulos en una figura o en configuraciones geométricas, en términos de sus componentes.
- Comparar dos ángulos de acuerdo con las relaciones entre sus partes y ordenar ángulos.
- Clasificar ángulos de diferentes formas, en particular según su abertura.
- Resolver problemas de medida de ángulos cualesquiera, incluso por estimación.
- Construir ángulos de medidas cualesquiera conocidas.
- Utilizar el grado como unidad de medida y operar con él.
- Utilizar los submúltiplos del grado como unidades de medida y operar con ellos.

- Descubrir propiedades de medidas indirectas, de forma empírica, como por ejemplo, después de colocar los ángulos en un triángulo, recortarlos y unirlos, observar que los tres ángulos del triángulo, suman lo mismo los tres ángulos que se forman en una línea recta, luego suman  $180^\circ$ .
- Identificar propiedades que se usan para determinar la medida de los ángulos de un triángulo, cuadrado o rectángulo.
- Determinar y medir ángulos en configuraciones geométricas dadas, como, por ejemplo, en un teselado.

### Nivel 3: Clasificación (Abstracción)

#### Descripción

Los alumnos alcanzarán este nivel cuando sean capaces de establecer relaciones y formular la medida de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo y de cualquier otro polígono convexo, dando argumentos informales, propiedades o reglas descubiertas previamente.

#### Objetivos generales

- Identificar propiedades que puedan aplicarse para calcular la suma de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo.
- Identificar propiedades que puedan aplicarse para calcular la suma de los ángulos interiores y exteriores de un polígono convexo cualquiera
- Dar argumentos informales, mediante el uso del dibujo o de otra representación, para justificar la suma de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo y de un polígono convexo cualquiera.
- Dar argumentos deductivos propios para justificar la suma de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo y de un polígono convexo cualquiera.

- Dar diferentes explicaciones para justificar la suma de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo y de un polígono convexo cualquiera.
- Determinar y formular la suma de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo y de un polígono convexo cualquiera.
- Identificar y usar estrategias para resolver problemas referidos a la medida de ángulos y a la suma de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo y de un polígono convexo cualquiera.

Con respecto a las fases de aprendizaje, atenderemos en cada una a los siguientes aspectos: Descripción de la fase en el nivel correspondiente; los objetivos didácticos y descriptores (que recoge, tanto los objetivos didácticos a conseguir mediante las actividades, como los aspectos de evaluación de la fase); los recursos o materiales (se presentará un resumen de los recursos y la descripción, en su caso, de alguno de estos materiales); y las actividades, que se presentarán organizadas en torno a: objetivos, materiales, enunciado y propuesta de desarrollo de la actividad, para terminar con la discusión de la actividad en dos aspectos: dudas y observaciones. En cada nivel incluiremos algunas actividades a modo de ejemplo. Para el nivel dos, las actividades 46 y 51 de la fase de integración (fase 5) y para el nivel 3, las actividades 3 y 27 correspondientes a las fases 1 y 5, respectivamente.

## FASES DE APRENDIZAJE PARA EL NIVEL 2

### Fase 1 del nivel 2: Información

#### Descripción

En esta fase, se tratará de:

- Poner a los alumnos en contacto con los objetos geométricos que van a estudiar, con los problemas que deben resolver y con los recursos que van a utilizar en esta secuencia de aprendizaje sobre medidas de ángulos y operaciones sobre medidas de ángulos.

- Recabar información sobre los conocimientos previos que poseen los alumnos sobre ángulos, medidas de ángulos y operaciones con medidas de ángulos, así como del vocabulario que utilizan en este tópico.

- Proporcionar a los alumnos actividades complementarias sobre los conocimientos previos que necesitan para abordar los objetos geométricos que van a estudiar, tales como: ángulo, tipos de ángulos, medida de un ángulo y operaciones con las medidas de un ángulo.

#### Objetivos didácticos. Descriptores

- Dibujar ángulos y señalar sus elementos.
- Determinar ángulos en figuras y en configuraciones geométricas.
- Comparar y clasificar ángulos (rectos, agudos y obtusos).
- Determinar ángulos rectos, agudos, obtusos, llanos y completos.
- Determinar y calcular medidas de ángulos complementarios y suplementarios.

#### Recursos que utilizaremos en las actividades

A lo largo de esta secuencia didáctica sobre “Medida de los ángulos y operaciones sobre medida de ángulos” se utilizarán diferentes materiales que se mencionarán explícitamente en cada una de las actividades. A modo de resumen, los materiales que utilizaremos son: compases, goniómetros, transportadores o semicírculos graduados, papel vegetal, monedas, geoplanos, elásticos, lápices de colores, tijeras, figuras geométricas, relojes, abanicos, colecciones de ángulos, reglas, barras de mecano, cartulinas, ábacos planos, escuadras y cartabones.



### Fase 2 del nivel 2: Orientación dirigida

#### Descripción

En esta fase, los alumnos comienzan a explorar el estudio sobre la comparación de ángulos y la ordenación de ángulos y el uso del ángulo recto y el grado como unidades estándares con los que realizarán operaciones de sumas y restas y medidas de ángulos.

#### Objetivos didácticos. Descriptores

- Saber comparar ángulos de forma no numérica, tomando un ángulo como patrón.
- Saber ordenar ángulos.
- Utilizar el ángulo recto y el grado como unidades estándares para medir ángulos.
- Realizar operaciones de sumar y restar medidas de ángulos.

### Fase 3 del nivel 2: Explicitación

#### Descripción

En esta fase, los alumnos intercambiarán sus experiencias. Comentarán lo que han observado en relación con el contenido y relación con los recursos y métodos utilizados. Explicarán qué actividades parecen más fáciles y cuáles más difíciles y cómo las han realizado.

Todos estos comentarios se producirán en un contexto de diálogo en el grupo.

### Fase 4 del nivel 2: Orientación libre

#### Descripción

Los alumnos, en esta fase, explican y combinan los conocimientos adquiridos para resolver actividades más complejas. Los alumnos conocen

el campo de estudio y las ideas centrales: ángulo, comparación de ángulos, medida de ángulos. Se profundizará en esta fase ampliando las unidades de medida, y se tratarán las medidas de ángulos cualesquiera. Se desarrollará el sentido de la estimación y se harán cálculos con las medidas de ángulos.

#### Objetivos didácticos. Descriptores

- Medir ángulos cualesquiera con un transportador.
- Construir ángulos de una medida dada.
- Estimar la medida de los ángulos y medirlos.
- Utilizar el grado para medir y expresar ángulos.
- Utilizar los submúltiplos del grado para expresar ángulos.
- Hacer sumas y restas con medidas de ángulos.
- Multiplicar o dividir la medida de un ángulo por un número dado.

#### Fase 5 del nivel 2: Integración

##### Descripción

En esta fase, los alumnos deberán relacionar los conocimientos asimilados en las fases anteriores con otros nuevos y con objetos geométricos diferentes. Para ello se propone medir ángulos en diferentes figuras geométricas (triángulos y cuadriláteros) y en teselados, para descubrir propiedades de las figuras relacionadas con las medidas de sus ángulos interiores o exteriores, así como utilizar la noción de ángulo y medida de ángulos en un contexto nuevo como es el ángulo de dirección.

#### Objetivos didácticos. Descriptores

- Medir ángulos para descubrir propiedades de las configuraciones geométricas (teselados).
- Reconocer propiedades de las figuras geométricas a través de la realización de medidas.

- Descubrir a través de la realización de medidas que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ .
- Iniciar a los alumnos en procesos inductivos e identificar propiedades a partir de la realización de medidas.
- Descubrir a través de la realización de medidas que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es  $360^\circ$ .
- Descubrir a través de medidas que la suma de los ángulos exteriores de un triángulo y de un cuadrilátero es  $360^\circ$ .
- Utilizar el conocimiento sobre ángulos y medidas de ángulos en otros contextos (ángulo de dirección).

Ejemplo de actividad

#### ACTIVIDAD 46: MEDIDA DE ÁNGULOS EN TESELADOS

##### Objetivo

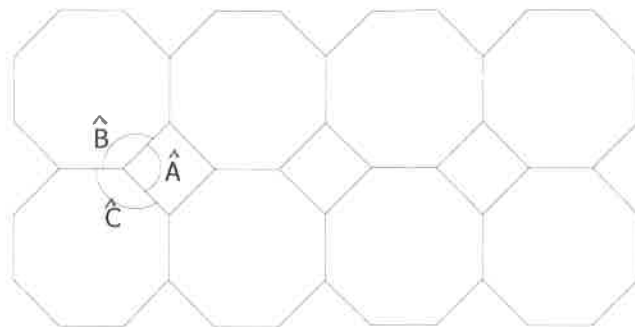
Medir ángulos para describir propiedades de las configuraciones geométricas (teselados).

##### Materiales

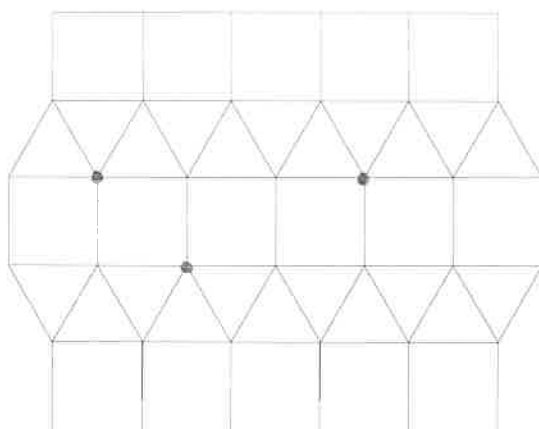
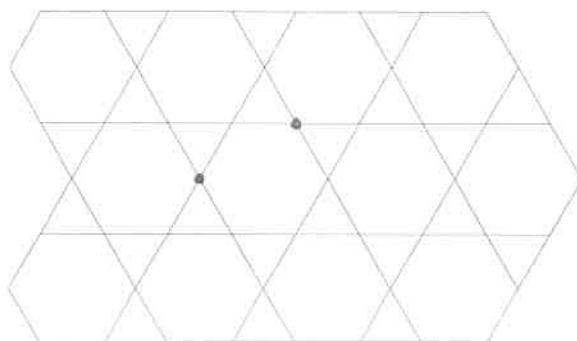
Teselados y goniómetros.

Mide en grados los ángulos que confluyen en un mismo punto, y halla cuánto suman en total:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} =$$



Haz lo mismo con los puntos marcados en las siguientes configuraciones (teselados):



Dudas:.....

Observaciones:.....

## FASES DE APRENDIZAJE PARA EL NIVEL 3

### Fase 1 del nivel 3: Información

#### Descripción

En esta fase se tratará de:

- Poner en contacto al alumno con los objetos geométricos que va a estudiar, con los problemas que debe resolver y con los recursos que va a utilizar.

- Recabar información sobre los conocimientos previos que tienen los alumnos sobre la medida de ángulos interiores y exteriores de un triángulo y de un polígono convexo, así como sobre el vocabulario que utilizan en este tópico.

- Proporcionar a los alumnos actividades complementarias sobre los conocimientos previos que necesitan para abordar los objetos geométricos que van a estudiar, tales como: concepto de ángulo, ángulos complementarios y suplementarios, clasificación de polígonos y diagonales de un polígono.

#### Objetivos didácticos. Descriptores

- Reconocer y clasificar polígonos cóncavos y convexos.
- Reconocer y clasificar polígonos regulares e irregulares.
- Caracterizar y trazar las diagonales de un polígono convexo.
- Medir ángulos internos y externos con el goniómetro y establecer ciertas propiedades en un triángulo y en un cuadrilátero convexo.
- Utilizar el vocabulario apropiado relacionado con los polígonos convexos y sus elementos: lados, vértices, ángulos interiores y exteriores, y diagonales.

#### Recursos que utilizaremos en las actividades

A lo largo de esta secuencia didáctica sobre la medida de los ángulos de un polígono convexo se utilizarán diferentes materiales que se mencionarán explícitamente en cada una de las actividades.

A modo de resumen, los materiales que utilizaremos son: reglas, goniómetros o transportadores, geoplanos, elásticos de colores, cartulinas, tijeras, pegamento, lápices de colores, dispositivos móviles, tableros y barras de mecano, plantillas de polígonos, papeles punteados de tramas cuadradas e isométricas.

### Fase 2 del nivel 3: Orientación dirigida

#### Descripción

En esta fase, los alumnos comienzan a explorar el estudio de los modelos directos e indirectos de los ángulos de un polígono convexo. Se tomará el triángulo como motivo central y se abordará la medida de los ángulos interiores de un triángulo mediante diferentes procedimientos que van desde colorear y recortar yuxtaponiendo los ángulos y midiéndolos, hasta el uso de dispositivos móviles que muestran la medida de los ángulos interiores de un triángulo mediante un proceso continuo, pasando por técnicas de plegado de papel, para pasar a estudiar, a partir de la descomposición en triángulos, la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero. Se determina, finalmente, y se establece una relación entre la suma de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo cualquiera.

#### Objetivos didácticos. Descriptores

- Determinar y formular la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
- Determinar y formular la suma de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo.
- Determinar y formular la suma de los ángulos exteriores de un triángulo.
- Determinar y formular la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero.

### Fase 3 del nivel 3: Explicitación

#### Descripción

Los alumnos intercambian sus experiencias. Comentan lo que han observado en relación con el contenido y con relación con los recursos y métodos utilizados. Explican qué actividades parecen más fáciles y cuáles más difíciles. Explican cómo las han resuelto.

Todos estos comentarios se realizarán en un contexto de diálogo en el grupo.

#### Fase 4 del nivel 3: Orientación libre

##### Descripción

Los alumnos, en esta fase, aplican y combinan los conocimientos adquiridos para resolver actividades más complicadas. Los alumnos ya conocen el campo de estudio y la idea central de tomar el triángulo como elemento de referencia y descomponer el polígono en triángulos para determinar la medida total de los ángulos internos del polígono.

Se combinará en esta fase el método seguido en la fase 1, con otros métodos, como el de descomponer en triángulos a partir de un punto interior de la figura, así como el determinar la medida de los ángulos exteriores de un polígono convexo y su relación con la medida de los ángulos interiores.

Se plantean, finalmente, en esta fase dos actividades más, una de aplicación, dirigida a determinar un ángulo interior de un polígono convexo, conocidos los restantes ángulos, y la otra, a determinar y formular la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo.

##### Objetivos didácticos. Descriptores

- Determinar y formular la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero y de un pentágono convexo mediante la descomposición del polígono en triángulos, tomando un punto interior como vértice origen de la descomposición.
- Determinar y formular la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo mediante su descomposición en triángulos, tomando un vértice del polígono como vértice origen de la descomposición.

- Determinar y formular la suma de los ángulos externos de un polígono convexo.
- Determinar y formular la suma de los ángulos interiores y exteriores de un polígono convexo.
- Determinar un ángulo interior de un polígono convexo conocidos los restantes ángulos interiores.

### Fase 5 del nivel 3: Integración

#### Descripción

En esta fase, los alumnos deberán relacionar los conocimientos asimilados en las dos fases anteriores con otros nuevos y con objetos geométricos diferentes. Para ello se propone, por una parte, determinar y establecer relaciones entre los lados, las diagonales, número de vértices, número de triángulos y los ángulos interiores de un polígono regular (el pentágono), para después generalizarlas a cualquier polígono regular, (excluyendo en este caso la suma de la medida de los ángulos exteriores), y por otra, trabajar todos estos aspectos en una nueva configuración geométrica: los teselados.

#### Objetivos didácticos. Descriptores

- Determinar el número de diagonales de un polígono regular.
- Determinar y establecer relaciones entre los lados, las diagonales, el número de vértices, el número de triángulos y los ángulos interiores de un polígono regular.
- Utilizar el conocimiento sobre la medida de los ángulos interiores de un polígono regular para construir teselados regulares.



Ejemplos de algunas actividades:

### ACTIVIDAD 3: DIAGONALES DE UN POLÍGONO

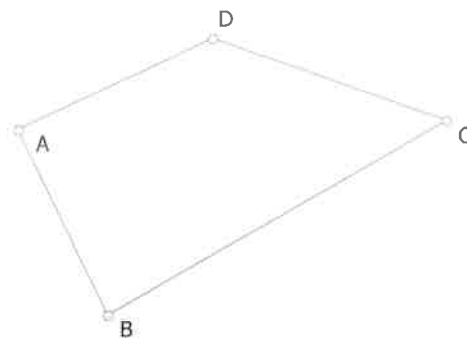
#### Objetivo

Caracterizar y obtener las diagonales de un polígono convexo.

#### Materiales

Regla, geoplano, elásticos de colores.

Observa la siguiente figura:



Une dos vértices que no sean consecutivos.

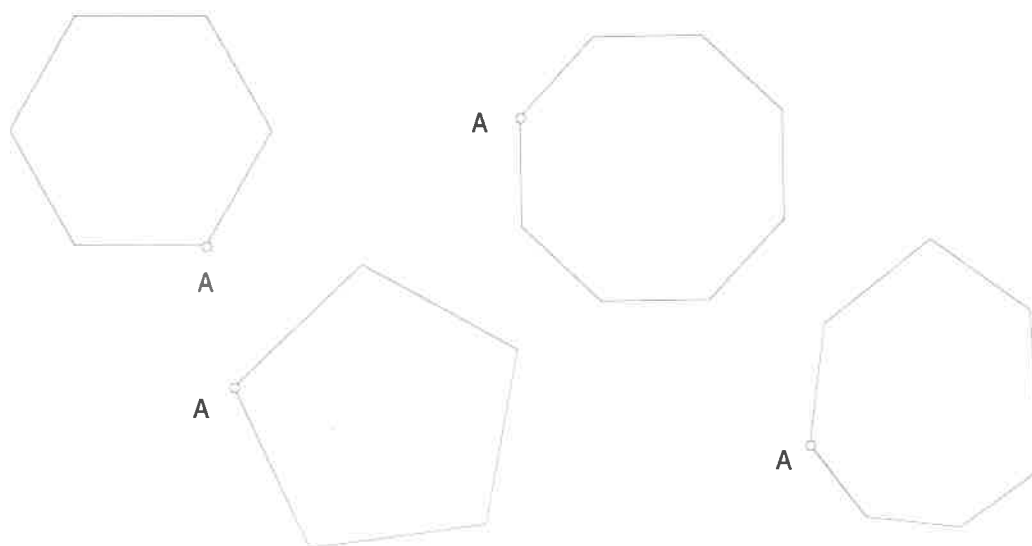
¿Cuántos segmentos puedes trazar?.....

Desde el vértice D, ¿cuántos segmentos puedes trazar que unan vértices no consecutivos?.....

¿Cuántos triángulos quedan formados?.....

Los segmentos que estás trazando se llaman diagonales.

Dibuja las diagonales que se puedan trazar desde el vértice A de los siguientes polígonos. Hazlo primero en las figuras que puedas con el geoplano que creas.



¿Qué relación observas entre el número de lados del polígono y el número de diagonales que parten de un vértice?.....

Completa la siguiente tabla:

N. de lados POLÍGONO	N. diagonales desde un vértice	N. de triángulos formados
3		
4		
5		
6		
7		
8		
N		

Dudas:.....

Observaciones:.....

Una síntesis del trabajo desarrollado para llevar al aula, queda descrita mediante el cuadro del ANEXO I

## **La unidad de aprendizaje: Giros**

Se describe una síntesis de la unidad de aprendizaje llevada al aula y organizada a partir de la teoría de los Van Hiele.

Conviene señalar en lo que sigue que codificaremos, al igual que antes los cinco niveles de Van Hiele tal y como se ha descrito en la unidad didáctica anterior. Además, los alumnos con los que se desarrolló la experiencia, tenían de 11-13 años de edad y habían alcanzado el nivel 1, (se utilizaron los tests ya mencionados para determinar su nivel de pensamiento geométrico) y la experiencia se llevó al aula tratando el tópico de “Giros” en los niveles 2 y 3, es decir, para intentar conseguir que los alumnos pasen del nivel 1 al nivel 2 y de éste al 3 en el tópico definido.

Esta Unidad de aprendizaje consta de dos secuencias, una sobre “Generalidades sobre giros. Propiedades”, que se situará en el nivel 2, y otra, sobre “Producto de giros”, que se trabajará en el nivel 3.

Las dos secuencias de aprendizaje se organizan de manera continua y dan lugar a la unidad de aprendizaje: “Giros”, organizada en torno a los niveles 2 y 3, donde la del nivel dos hace referencia a los giros y sus propiedades y la otra a la composición de giros.

Se elaboraron 35 actividades para el nivel 2 organizadas en torno a las fases de aprendizaje de la siguiente forma: 10 actividades para la fase 1, 10 actividades para la fase 2, 6 actividades para la fase 4 y 9 actividades para la fase 5.

En relación con el grupo de actividades correspondientes al nivel 3 se elaboraron 38 actividades distribuidas de la siguiente manera: 10 actividades para la fase 1, 10 actividades para la fase 2, 6 actividades para la fase 4 y 12 actividades para la fase 5.

Se supone, por tanto, que los alumnos han alcanzado el nivel 1 de razonamiento matemático en este tópico. Es decir, los alumnos poseen ya una visión global, no matemática, de lo que es un giro y su obtención directa utilizando materiales, en general, y de la medida de ángulos en particular.

En definitiva, para iniciar el trabajo en este tópico, los alumnos deben ser capaces de conocer previamente el concepto medida de ángulos, ángulos orientados, los giros desde una perspectiva intuitiva y la obtención directa de los giros utilizando materiales, además de conocer los conceptos de mediatriz de un segmento, suma de ángulos y traslación.

A efecto de concretar diferentes actividades del diseño de instrucción, vamos a comentar primeramente, para los dos niveles de pensamiento geométrico tratados:

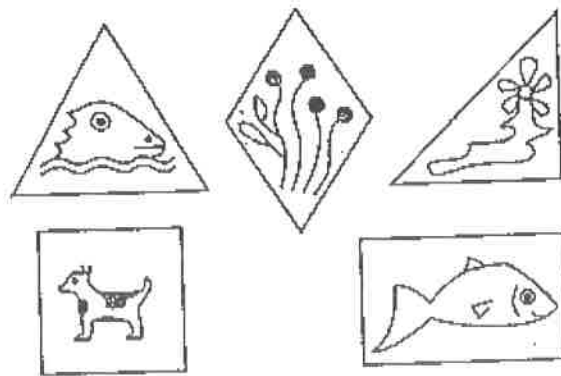
- La descripción del nivel para el tópico tratado
- La formulación de los objetivos generales o finalidades

#### Materiales que se utilizarán en el desarrollo de esta secuencia didáctica

A lo largo de la secuencia didáctica que se presenta sobre giros, se utilizarán los materiales experimentados por Jaime (1993). De la misma forma, gran parte de las actividades que se desarrollaron han sido adaptadas y modificadas de dicho trabajo. Concretamente, los materiales diseñados y que utilizaremos en lo que sigue son:

#### **Juego de figuras de cartulina**

Un grupo de polígonos con dibujos de figuras asimétricas en su interior que permiten observar la orientación que poseen dichas figuras. Se tratará de suministrar al alumno un número suficiente de figuras en cartulina. Los modelos utilizados son los representados en las figuras siguientes:

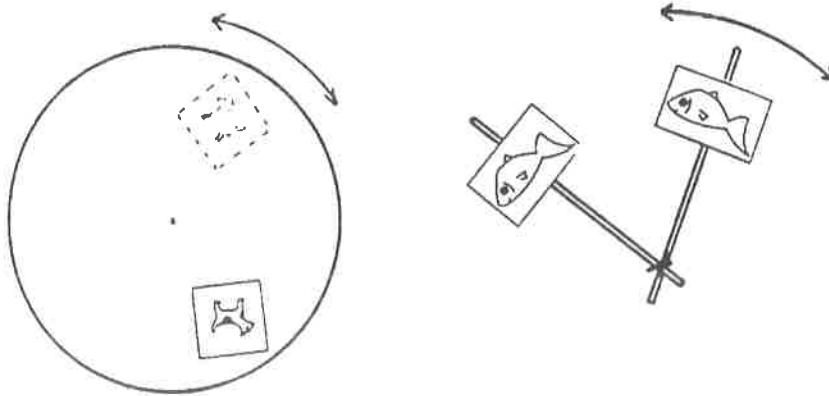


### **Discos transparentes**

Los discos transparentes son círculos de hojas de acetato con su centro marcado. Para girar una figura, se coloca el disco con su centro sobre el de giro, se calca o pega una figura como la que hay que girar, se pincha por el centro del disco con algún objeto punzante y se le dan vueltas (ver dibujo). Para obtener una copia sobre el papel, se pinchan los vértices o puntos extremos de la pieza o dibujo, se retira el disco y se ajusta la imagen a las marcas.

### **Tiras de cartulina**

Los palillos son palitos o tiras de cartulina. En este caso debe haber piezas recortadas como la que es objeto del giro, Para girar una figura, se sitúa el palillo de manera que pase por el centro de giro y por la figura. Se pega sobre el palillo una pieza igual a la que hay que girar, en su mismo lugar y con la misma inclinación; se sujeta o pincha el palillo por el centro del giro y se le dan vueltas (ver dibujo). Para obtener una copia sobre el papel, se pinchan los vértices o puntos extremos de la pieza, se quita el palillo y se ajusta la imagen a las marcas.



En las actividades se utilizarán estos materiales para efectuar giros de figuras, para permitir a los estudiantes observar el desplazamiento de las figuras y para comprobar la exactitud de las respuestas obtenidas

Conviene tener además un cartón grueso de tamaño DIN A4 para colocar los folios sobre el mismo, a la hora de utilizar un punzón o alfiler para determinar los centros de giro.

## Nivel 2: Análisis

### Descripción

Consideraremos que los alumnos han alcanzado este nivel si son capaces de definir, interpretar y utilizar los elementos y propiedades que caracterizan y determinan los giros en el plano.

### Objetivos generales

- Utilizar los elementos que caracterizan los giros: centro y ángulo de giro, para observar la transformación de distintas figuras geométricas.
- Comprender la definición de giro en términos de isometría.
- Descubrir y establecer a partir de la experimentación las propiedades características de los giros.
- Utilizar la propiedad de equivalencia de los giros de ángulos de amplitudes  $\alpha$  y  $360^\circ - \alpha$ .

- Interpretar la simetría central como giro de amplitud un ángulo llano.
- Reconocer y utilizar los giros de ángulos de amplitud mayor de  $360^\circ$ .
- Utilizar la notación matemática para los giros y los elementos que intervienen en ellos.

### Nivel 3: Clasificación (Abstracción)

#### Descripción

Se considera que los alumnos han alcanzado este nivel cuando son capaces de desarrollar composiciones de giros de igual y distinto centro, siguiendo los razonamientos deductivos que dan lugar a las propiedades que surgen.

Además, los alumnos deben ser capaces de formular y relacionar de forma lógica, suministrando argumentos informales, las propiedades que permiten la obtención de centros de giro conociendo figuras homólogas; las justificaciones de la conmutatividad y no conmutatividad de giros según tengan o no el mismo centro; las propiedades de composición y descomposición de giros de igual y distinto centro.

#### Objetivos generales

- Descubrir y justificar que siempre existe una isometría (giro o traslación) que comprende a dos figuras congruentes y con la misma orientación.
- Realizar composiciones y descomposiciones de giros de igual y distinto centro, y generalizar el resultado de la composición de varios de tales giros mediante la utilización de estos resultados en otros problemas.
- Analizar la propiedad conmutativa de los giros de igual y distinto centro.

- Realizar composiciones y descomposiciones de traslaciones. Demostrar el resultado de la composición de giros y de la descomposición en giros de un giro o de una traslación. Comprender y saber utilizar la infinidad de soluciones.
- Demostrar informalmente, mediante razonamiento deductivo, propiedades de los giros descubiertas en este nivel o en los anteriores.
- Comprender el planteamiento y desarrollo de algunas demostraciones informales.
- Resolver situaciones problemáticas que permitan obtener el centro y el ángulo de un giro.
- Obtener el centro de un giro conociendo figuras homólogas.

Con respecto a las fases de aprendizaje, atenderemos en cada una los siguientes aspectos: Descripción de la fase en el nivel correspondiente; objetivos didácticos y descriptores (que recoge, tanto los objetivos didácticos a alcanzar mediante las actividades, como los aspectos de evaluación de la fase); los recursos o materiales (se presentará un resumen de los recursos y la descripción en su caso de alguno de estos materiales); y las actividades que se presentarán organizadas en torno a: objetivos, materiales, enunciado y propuesta de desarrollo de la actividad, para terminar con su discusión en torno a dos aspectos: dudas y observaciones. En cada nivel incluiremos algunas actividades a modo de ejemplo. Para el nivel dos, las actividades 5, 6 y 7 de la fase de información (fase 1) y para el nivel 3, las actividades 36 y 37 de la fase de integración (fase 5).



## FASES DE APRENDIZAJE PARA EL NIVEL 2

### Fase 1 del nivel 2: Información

#### Descripción

En esta fase, se tratará de, por una parte, obtener la información sobre los conocimientos que poseen los alumnos de sobre ángulos, medida de ángulos, ángulos positivos y negativos, y por otra, proporcionar a los alumnos actividades de repaso sobre los aspectos intuitivos que deben conocer sobre los giros.

También se presentan actividades de familiarización con el vocabulario matemático que utilizará, y se orientará además, hacia dónde irá dirigido el estudio posterior.

#### Objetivos didácticos. Descriptores

- Comprender la necesidad de establecer una orientación en el plano.
- Reconocer y utilizar medidas de ángulos negativos.
- Utilizar materiales manipulativos para la obtención de los giros y los elementos que los caracterizan.
- Reconocer la característica que poseen los giros de ser isometrías (el tamaño y la forma de las figuras se conservan).
- Realizar giros de manera directa sirviéndose de los materiales didácticos propuestos (discos, palillos, ruedas).
- Identificar el desplazamiento circular de las figuras giradas
- Utilizar las características visuales de los giros: Desplazamiento circular, cambio de posición, equidistancia al centro y no inversión de la figura.
- Utilizar el vocabulario apropiado relacionado con los giros: Giro, centro, distancia, recorrido circular, inclinación, imagen, ...

## Fase 2 del nivel 2: Orientación dirigida

### Descripción

En esta fase, los alumnos desarrollarán actividades más complejas al objeto de adquirir las destrezas necesarias para aplicar giros a distintas figuras geométricas con los materiales contruidos al efecto y con los convencionales (regla y compás) utilizando la notación matemática para los mismos.

### Objetivos didácticos. Descriptores

- Descubrir y utilizar la equidistancia de cada punto y su imagen al centro de giro como característica de los giros.
- Descubrir y utilizar como característica de los giros la invarianza del ángulo de giro para todos los puntos de una figura.
- Descubrir y utilizar como característica de los giros el centro y el ángulo de giro.
- Determinar el ángulo de un giro.
- Comprender y utilizar la notación estándar de giro,  $G(\text{centro}, \text{ángulo})$ , el vocabulario básico asociado y los sentidos de giro.
- Aprender a aplicar un giro determinado a un punto por procedimientos exactos.
- Obtener la imagen de una figura por un giro dado usando varios procedimientos apropiados para diferentes situaciones.
- Reconocer y utilizar las propiedades particulares de las situaciones según que el centro de giro esté sobre la figura que se quiere girar o fuera de ella.

### Fase 3 del nivel 2: Explicitación

#### Descripción

Los alumnos intercambian sus experiencias. Comentan lo que han observado en relación con el contenido y en relación con los recursos y métodos utilizados. Indican qué actividades parecen más fáciles y cuáles más difíciles. Explican cómo las han resuelto.

Todos estos comentarios se realizarán en un contexto de diálogo en el grupo.

### Fase 4 del nivel 2: Orientación libre

#### Descripción

Los alumnos, en esta fase, explican y combinan los conocimientos adquiridos sobre el concepto de giro y los elementos básicos de los giros, al objeto de resolver actividades más complejas.

Los alumnos conocen las ideas básicas que subyacen en la transformación de figuras planas mediante giros: equidistancia entre el centro de giro y puntos homólogos, invarianza del ángulo de giro, notación matemática para los giros y sentido del ángulo de giro.

Se profundizará en esta fase sobre estos aspectos y se les introducirá en el concepto de equivalencia de giros.

Objetivos didácticos. Descriptores

- Descubrir en una figura geométrica plana, el mínimo número de puntos necesario para determinar la figura transformada mediante un giro
- Descubrir y utilizar la equivalencia de giros.
- Utilizar el vocabulario y la notación formales asociados a los giros.
- Descubrir y utilizar la propiedad de conservación de la inclinación de una figura al girarla con centros distintos, pero con el mismo ángulo.

## Fase 5 del nivel 2: Integración

### Descripción

En esta fase, los alumnos deberán relacionar los conocimientos asimilados en las fases anteriores con otros nuevos. Para ello se propone estudiar las simetrías centrales como casos particulares de giros, así como utilizar otros materiales usuales en la enseñanza de la Geometría, para finalmente trabajar los giros dentro de configuraciones especiales, tales como los mosaicos semirregulares.

Objetivos didácticos. Descriptores

- Interpretar la simetría central como giro.
- Determinar las figuras obtenidas mediante simetrías centrales, sin necesidad de utilizar el transportador de ángulos.
- Realizar giros de una malla cuadrículada, analizando las posibilidades de ésta para simplificar la construcción de algunos giros particulares.
- Reconocer y utilizar el concepto de invarianza ante transformaciones de figuras planas regulares.
- Interpretar los mosaicos semirregulares como configuraciones que permanecen invariables después de aplicar ciertos giros con centros y ángulos determinados.

Veamos algunos ejemplos de actividades:

### ACTIVIDAD 5: GIROS CON CENTRO EN UN VÉRTICE DE LA FIGURA (de grupo)

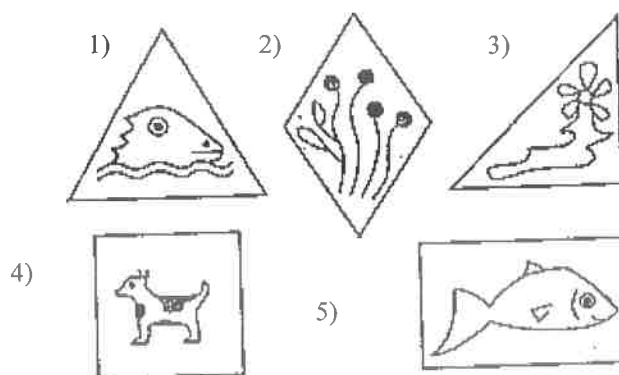
#### Objetivos

Desarrollar, utilizando materiales, giros de figuras geométricas con centro en un vértice de una figura y reconocer el centro y el ángulo de giro como elementos básicos para esta transformación.

### Materiales

Juego de figuras, punzón (o compás).

Elige cuatro copias de una de las figuras del JUEGO DE FIGURAS



(Cada miembro del grupo debe elegir una figura distinta)

Marca un vértice cualquiera. Pincha ahora con un alfiler el vértice elegido, gírala colocándola en tres posiciones distintas y pega una copia de la figura en cada posición en el espacio que se deja a continuación.

Recuerda que el vértice “pinchado” recibe el nombre de centro de giro.

Una vez pegadas las distintas piezas, marca un punto interior en la figura original y otro del borde y señálalos en las figuras transformadas.

¿Qué movimiento describen los puntos marcados? Dibuja la trayectoria.

Traza a continuación las semirrectas con origen el centro del giro y que pasen por los puntos elegidos en la figura original y sus transformados. Mide el ángulo que se forma entre cada punto y su transformado y comprueba que es constante. El ángulo que se forma es el ángulo de giro.

Dudas.....

Observaciones.....

## FASES DE APRENDIZAJE PARA EL NIVEL 3

### Fase 1 del Nivel 3: Información

#### Descripción

En esta fase, se tratará de, por una parte, obtener la información sobre los conocimientos que poseen los alumnos de las operaciones con ángulos orientados, de las traslaciones y de la interpretación como lugar geométrico de la mediatriz de un segmento; y por otra, proporcionarles las actividades que permitan a los alumnos estar en disposición de conocer los aspectos señalados con la profundidad suficiente para poder resolver las situaciones sobre giros que se desarrollarán en las siguientes fases.

#### Objetivos didácticos. Descriptores

- Utilizar la regla y el compás para construir la mediatriz de un segmento.
- Interpretar la mediatriz de un segmento como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento.
- Realizar, tanto gráfica como numéricamente, sumas de ángulos, sea cual sea la orientación que posean.
- Desarrollar traslaciones de manera directa, y justificar que son isometrías.
- Utilizar distintos materiales que permiten desarrollar traslaciones.
- Reconocer la inclinación de las figuras como propiedad invariante de las traslaciones.

### Fase 2 del Nivel 3: Orientación libre

#### Descripción

Las actividades que se desarrollarán en esta fase son más complejas que las de la fase anterior. Se tratará de que el alumno sea capaz de seguir los razonamientos deductivos que permiten interpretar el centro de giro como

intersección de mediatrices, así como adquirir las destrezas necesarias para obtener dicho centro. También se tratará en esta fase de que los alumnos sean capaces de componer giros del mismo centro, tanto numérica como gráficamente, reconociendo los rosetones como una aplicación particular de la composición de giros de igual centro.

#### Objetivos Didácticos. Descriptores

- Descubrir y utilizar la propiedad de la mediatriz de un par de puntos como el lugar geométrico de los centros de giro que transforman un punto en el otro.
- Obtener el centro de giro de dos figuras homólogas dadas.
- Componer giros del mismo centro e observar la facilidad del método numérico sobre el gráfico.
- Descubrir y justificar la propiedad conmutativa de la composición de los giros de igual centro.
- Descubrir y justificar la propiedad de que, dadas dos figuras en el plano directamente iguales, se puede obtener una a partir de la otra mediante un giro o una traslación.
- Comprender y utilizar el vocabulario y la notación formales asociados a la composición de giros y traslaciones.

#### Fase 3 del nivel 3: Explicitación

En esta fase, los alumnos intercambian sus experiencias y analizan conjuntamente las propiedades y conceptos sobre los contenidos desarrollados.

Establecen sus opiniones sobre la mayor o menor dificultad de las actividades realizadas, indican cuáles les han resultado más fáciles y cuáles más difíciles y explican cómo las han resuelto.

Los comentarios se desarrollan dentro de un contexto de diálogo e intercambio.

#### Fase 4 del Nivel 3: Orientación dirigida

##### Descripción

Los alumnos, con la resolución de las actividades correspondientes a esta fase, combinan e interpretan los conocimientos adquiridos en las fases anteriores. Desarrollarán composiciones y descomposiciones de giros de distinto centro y/o traslaciones, atendiendo a la caracterización de las mismas.

Establecerán y justificarán de una manera informal las propiedades esenciales de la composición de giros de distinto centro y generalizarán otras sobre la descomposición de movimientos.

##### Objetivos didácticos. Descriptores

- Componer giros de distinto centro y generalizar el resultado en función del valor de la suma de los ángulos que se componen.
- Demostrar informalmente el resultado de la composición de dos giros de distinto centro, basando el argumento en la relación de las inclinaciones relativas de las diferentes figuras.
- Descomponer una traslación o un giro en producto de dos giros de distintos centros.
- Comprender el desarrollo de algunas demostraciones, dirigidas por el profesor, y proporcionar la justificación de algunas implicaciones que formen parte de las mismas.
- Utilizar las propiedades conocidas de los giros para simplificar movimientos en una composición de giros o de giros y traslaciones.



- Descubrir, aprender y utilizar técnicas para intentar hacer pasar una figura a otra mediante una composición de giros o de giros y traslaciones.

### Fase 5 del nivel 3. Integración

#### Descripción

En esta fase, los alumnos deberán relacionar entre sí los conocimientos adquiridos en las fases anteriores, e incluir estos conocimientos dentro de contextos más generales. En este caso, se establecerán propiedades generales sobre la descomposición de giros en producto de giros y traslaciones, atendiendo a la infinitud de estas descomposiciones.

Se utilizarán las propiedades de los giros para estudiar configuraciones especiales de mosaicos (tipo Escher).

#### Objetivos didácticos. Descriptores

- Descubrir propiedades genéricas sobre la descomposición de giros como producto de dos giros de distinto centro.
- Comprender, justificar y utilizar la infinitud de soluciones que permite descomponer una traslación como producto de dos giros de distinto centro.
- Comprender, justificar y utilizar la infinitud de soluciones que permite descomponer un giro como producto de dos giros de distinto centro.
- Construir y analizar, desde la perspectiva de la composición de movimientos (giros y traslaciones), configuraciones de mosaicos tipo Escher.
- Utilizar los motivos iniciales y los giros para caracterizar mosaicos tipo Escher.

- Comprender y desarrollar argumentos informales de justificación de propiedades en el estudio de la composición y descomposición de giros y traslaciones.

Ejemplos de algunas actividades

### ACTIVIDAD 36: GIROS Y TRASLACIONES EN EL CONTEXTO DE LOS MOSAICOS TIPO ESCHER

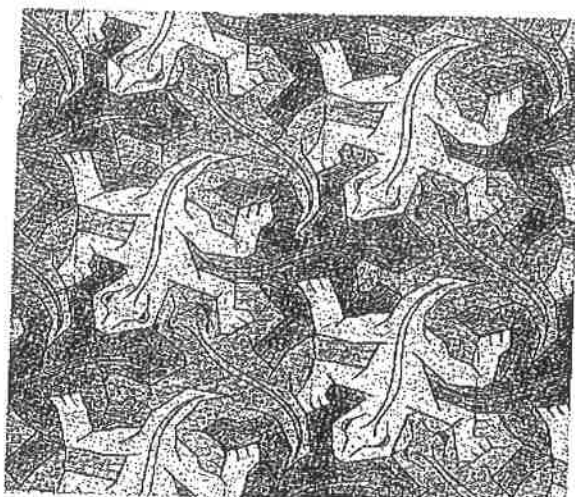
#### Objetivo

Contextualizar las isometrías en aspectos artísticos.

#### Materiales

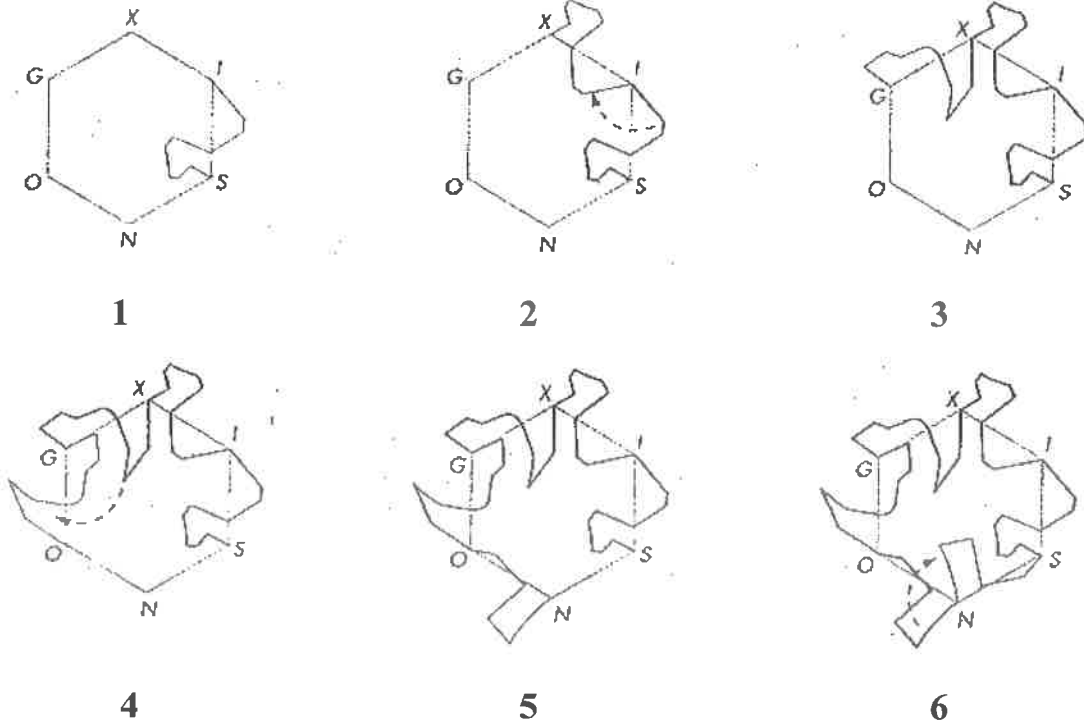
Malla exagonal, está formada como sabes, regla y compás.

La malla exagonal está formada, como sabes, por exágonos regulares y es uno de los tres posibles mosaicos regulares (los otros dos están compuestos por cuadrados y triángulos equiláteros respectivamente). Vamos a obtener a continuación, utilizando giros, un mosaico más artístico a partir del formado por los exágonos. Obtendremos algo similar a lo siguiente:



Symmetry drawing E25, M. C. Escher, 1939  
©1996 M. C. Escher / Cordon Art - Baarn - Holland  
All rights reserved.

Para ello, debes realizar en cada exágono, los siguientes 6 pasos:



1. Une mediante una curva los vértices S e I del exágono.
2. Gira la curva SI tomando como centro de giro el punto I, la curva girada unirá ahora I con X. ¿Cuál es la amplitud del ángulo girado?
3. Construye una nueva curva que una los vértices X con G.
4. Transforma la curva que une X con G, mediante  $G(G, 120^\circ)$
5. Crea la curva NO
6. Gira NO tomando como centro el punto N haciendo coincidir el transformado de O con el punto S.

Finalmente, dibuja sobre el reptil que tienes, los ojos, patas, etc... para obtener, repitiendo en los demás exágonos el mosaico señalado.

## ACTIVIDAD 37: GIROS Y TRASLACIONES EN EL CONTEXTO DE LOS MOSAICOS TIPO ESCHER

### Objetivo

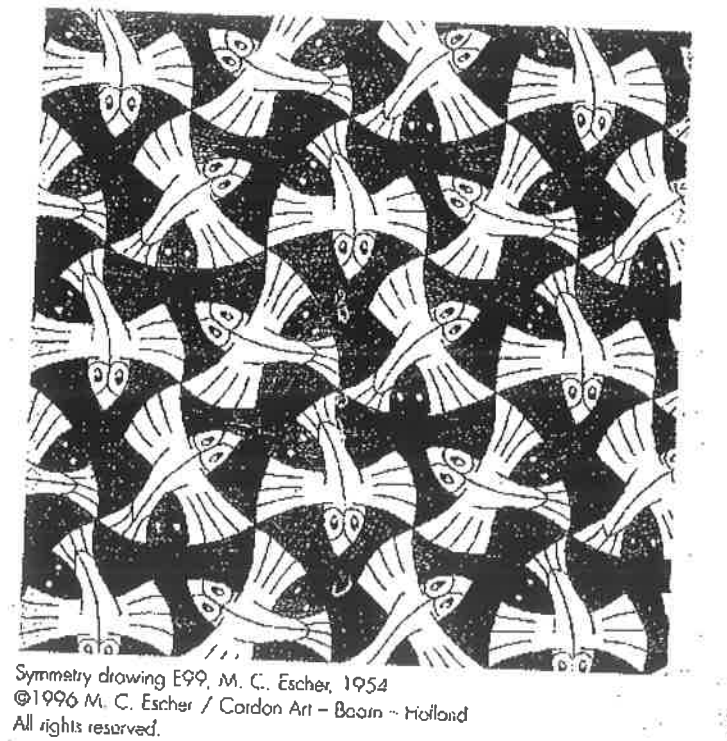
Contextualizar las isometrías en aspectos artísticos.

### Materiales

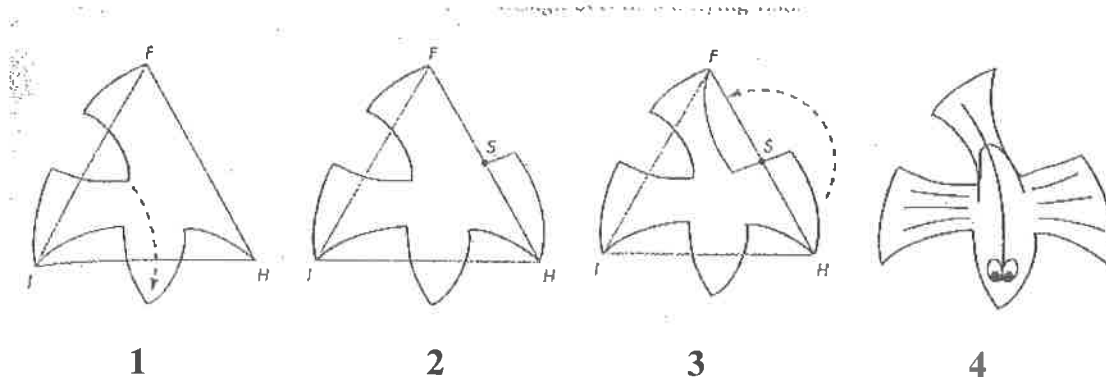
Malla triangular, regla y compás.

El dibujo que realices sobre cada motivo que se obtiene también es importante; según como lo hagas, tendrás una figura u otra.

Usando papel isométrico, o también una malla construida con triángulos equiláteros, vamos a obtener el siguiente mosaico:



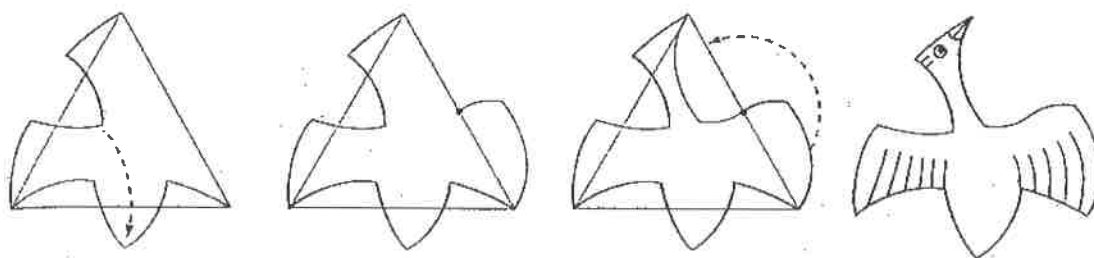
Realiza en la malla la construcción; descubre los pasos tú mismo:



Describe lo que se ha hecho en los pasos 1, 2 y 3.

- 1.
- 2.
- 3.

Observa que siguiendo los mismos pasos se podría obtener un motivo diferente. Comenta el siguiente esquema:



Dudas.....

Observaciones.....

La síntesis del trabajo desarrollado para giros se presenta en el ANEXO II.

**Referencias bibliográficas**

AFONSO, M.C.; CAMACHO, M.; SOCAS, M.M. (1995). Some difficulties in the development of the geometry curriculum according to Van Hiele. Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol 1, p. 191. Brasil.

AFONSO, M.C.; CAMACHO, M.; SOCAS, M.M. (1997) The implementation of a microcurriculum: angles, measurements and rotations from the point of view of Van Hiele. In Pehkonen, E. (ed.). Proceedings of the 21th Conference of the International Group of PME. Finland, vol. 1, p.216.

AFONSO, M.C.; CAMACHO, M.; SOCAS, M.M. (1999a). “La Teoria dei van Hiele come referente teorico per l’insegnamento della Geometria. Il Ruolo del professore”. *La Matematica e la sua Didactica*. Vol. 2, pp.153-174. Pitagora Editrice Bologna.

AFONSO, M.C.; CAMACHO, M.; SOCAS, M.M. (1999b). “Teacher profile in the Geometry Curriculum based on the Van Hiele Theory”. *Proceedings of the 23 th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, En Zaslavsky, O. (Ed.) *Proceeding of the International Group for the PME-23*. Vol. 2, pp. 1-8. Haifa. Israel.

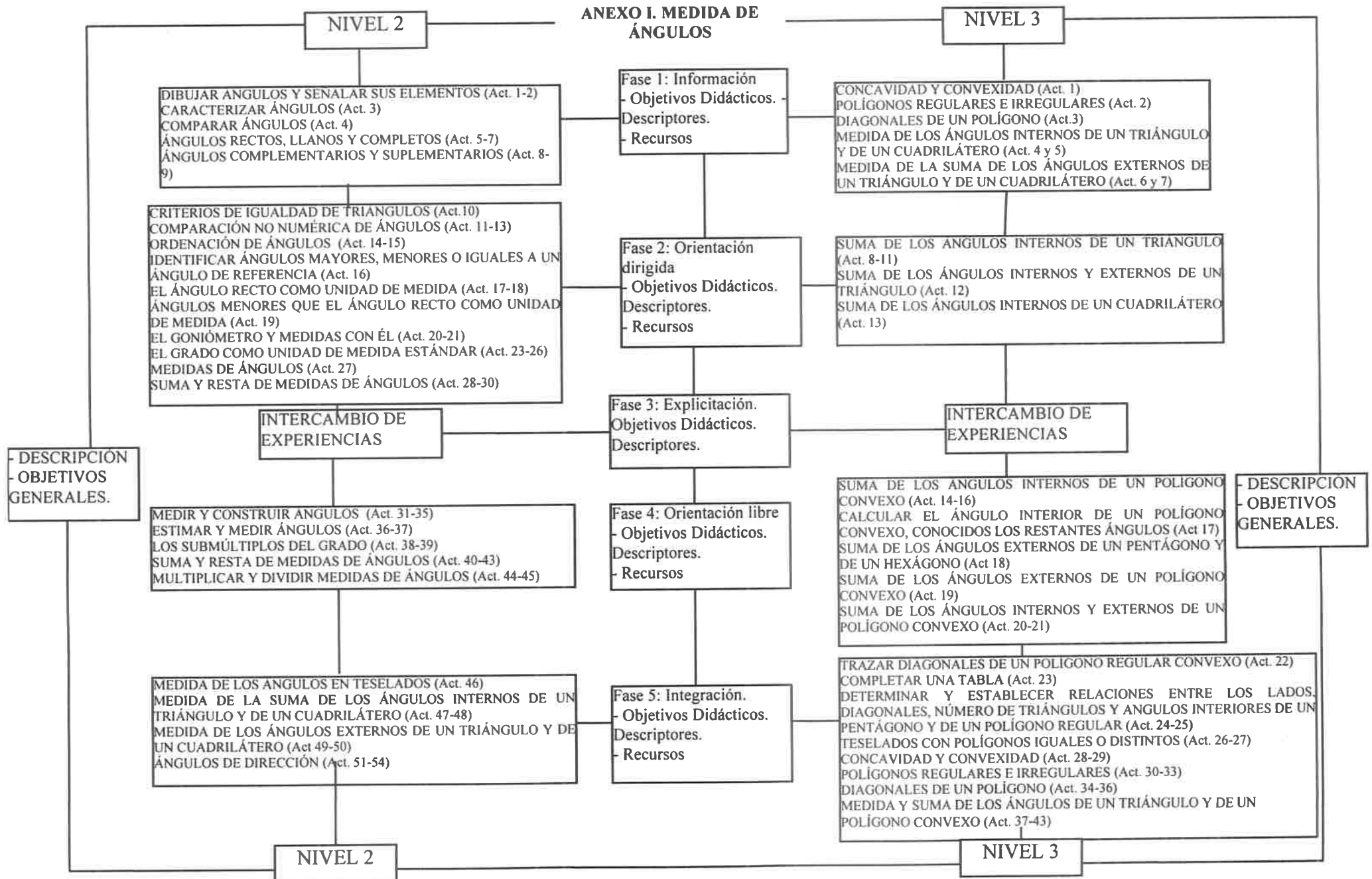
AFONSO, M.C.; CAMACHO, M.; SOCAS, M.M. (1999c). “La enseñanza de la unidad de aprendizaje “Ángulo” desde la teoría de los Van Hiele. El papel del profesor”. En Socas, M.; Camacho, M.; Morales, A. (eds.) *Formación del profesorado e investigación en educación matemática*, pp. 57-78. Universidad de La Laguna. Tenerife.

BURGER, W.F., y SHAUGHNESSY, J.M. (1986). “Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry”. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17, pp. 31-48.

JAIME,A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis Doctoral (sin publicar) Universidad de Valencia.

USISKIN, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometric*. ERIC: Columbus, USA.

## ANEXO I. MEDIDA DE ÁNGULOS



**ANEXO II. GIROS**

