FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA III
ISSN: 1695-6613

EXPERIENCIAS CON EL MATERIAL DIDÁCTICO: PUZZLE ALGEBRAICO, SOBRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS ELEMENTALES Y OPERACIONES, CON ALUMNOS DE ESO

Eligia del Pilar Domínguez Santana
Martín M. Socas Robayna,

Universidad de La Laguna

Resumen:

El término innovación es complejo y difícil de definir, pues cada elemento (padres, alumnos, profesores, etc.) que forma parte del sistema educativo lo entiende de diferente forma. En cualquier caso, podemos caracterizar la innovación, en sentido amplio, como cualquier aspecto nuevo para los elementos que constituyen el sistema escolar. El uso en clase de Matemática de materiales concretos con fines didácticos ha tenido gran interés en relación con los aspectos innovadores en el aula de Matemática.

En este trabajo se presenta y analiza la experiencia que se llevó a cabo con 15 alumnos de 4º ESO de la Opción A de Matemáticas, trabajando las expresiones algebraicas elementales y las operaciones de sumar, restar y multiplicar, siguiendo la estructura de su libro de texto y utilizando como "enlace cognitivo" el material didáctico: "Puzzle algebraico". Esta experiencia es parte del estudio que se realiza acerca de la innovación como mejora de la enseñanza de la Matemática y el papel que juegan los materiales concretos con fines didácticos en la clase de Matemática.

Abstract:

The term innovation is complex and difficult to define, because each element (parents, students, teaching profession, etc.) that forms part of the educational system understands it in a different way. Anyway, we can characterize the innovation, in a wide sense, as any new aspect for the elements that constitute the school system. The use in class of Mathematics of concrete materials with didactic purposes has had great interest in connection with the innovative aspects in the classroom of Mathematics.

In this work it is presented and it analyzes the experience that was carried out with 15 students of 4th E.S.O. of the Option A of Mathematics, working the elementary algebraic expressions and the operations of addition, subtraction and multiplication, following the structure of their text book and using as "cognitive link" the didactic material: "Algebraic Puzzle". This experience is part of the study that is carried out about the innovation like improvement of the teaching of Mathematics and the paper that the concrete materials with didactic ends in the class of Mathematical play.

Introducción

Los materiales didácticos se han utilizado en clase de Matemáticas en general, en un marco innovador, como mejora de la enseñanza/aprendizaje de esta disciplina.

El término Innovación es complejo de precisar y difícil de definir, pues cada individuo que forma parte del sistema educativo lo entiende de diferentes formas. En cualquier caso, lo podemos caracterizar de manera general como cualquier aspecto que resulte novedoso para los elementos que constituyen el sistema escolar.

Lo que sí parece estar claro es la diferencia entre Reforma e Innovación. Si consideramos, como ejemplo, nuestro sistema educativo encontramos que la reforma educativa supone cambios a gran escala, que afectan al sistema en general, mientras que la Innovación ocupa un nivel más concreto, principalmente como referencia a cambios que tienen que ver con la práctica en el aula. En este sentido, una innovación no se desarrolla por igual en todos los centros, sino que dependerá de las características del ambiente, alumnos, etc. Es un proceso formado por muchos factores y variables, no sólo se trata de la elaboración de un proyecto o su puesta en práctica.

A grandes rasgos podemos agrupar los grandes cambios educativos acaecidos en tres enfoques teóricos. Estos enfoques podemos caracterizarlos como: científico-técnico, cultural y socio-político. El primero, el enfoque científico-técnico, se caracteriza por su preocupación por el diseño, sin tener en cuenta la práctica (desarrollo en las aulas). Además considera que los profesores no deben formar parte de la innovación, sino que son simples obreros que realizan el trabajo que el “experto” les proporciona. Su principal fundamento es que la teoría dirige y orienta la práctica. El enfoque cultural, se caracteriza por dejar algo de lado la teoría y el diseño, y prestar más atención a la práctica educativa, a las características de la escuela, que hace que tenga cultura propia, y a las ideas que pueden aportar los profesores. El enfoque socio–político, centra su interés en la preocupación por las condiciones estructurales y socio–políticas en las que surge y se construye la innovación.

En estos enfoques podemos definir las fases más características a través de las cuales se lleva a cabo la innovación: planificación, diseminación, adopción, implementación y evaluación.

La fase de planificación es una de las más importantes, pues gracias a ésta se pueden desarrollar los proyectos y ponerlos en práctica. Para el enfoque científico–técnico es el principal tema de preocupación.

La diseminación es abordada de diferentes maneras según los distintos enfoques. Según el enfoque científico–técnico, en esta fase se decide si se utiliza la innovación, los cambios; sin embargo, el enfoque cultural la considera como el conjunto de actividades que unen teoría y práctica.

La fase de adopción es aquella en la que el profesorado decide si se pone o no en práctica la innovación.

La fase de implementación es la encargada de adaptar y poner en práctica el proyecto en situaciones concretas de enseñanza.

La fase de evaluación que nos permite analizar el éxito o fracaso del proyecto.

Algo muy importante y que forma parte de la innovación es la evaluación de la efectividad del cambio y de la internalización del mismo, ya que si los profesores no lo consideran y admiten como propia dicha innovación ésta no tendría sentido.

En general, consideramos la innovación tanto en relación con los cambios curriculares como en lo referente a los cambios en materiales, ideas y personas en el sistema educativo.

En nuestro caso ubicamos el trabajo en el marco de la innovación, al tratarse de una experiencia didáctica que propone un cambio en los medios que se van a utilizar, tanto materiales como metodológicos.

Materiales Didácticos

Los materiales concretos constituyen uno de los elementos que forman parte de la innovación. En los últimos años se ha originado un gran interés por los materiales concretos con fines didácticos, debido a la diversidad cognitiva que nos encontramos en el aula. Pero la utilización de materiales en el aula no es algo nuevo, pues se vienen utilizando desde hace mucho tiempo.

Antes de introducirnos en las teorías y los enfoques que tratan de investigar las ventajas e inconvenientes acerca del uso de materiales concretos en clase de Matemáticas, veamos en primer lugar, la organización o clasificación que se hacen de los mismos, para considerar a continuación su uso en el sistema educativo.

Szendrei (1996), se refiere a los materiales didácticos para la enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas en términos de utensilios comunes, materiales educativos, materiales concretos y juegos.

Los materiales concretos (usados con fines didácticos) son por una parte objetos de la vida real empleados en clase, que llamamos *utensilios comunes*; y también herramientas especialmente construidas con fines educativos, que llamaremos *materiales educativos*. Para algunos autores, en una clase de

Matemática, no se pueden utilizar ambos tipos de materiales debido a las grandes diferencias existentes entre ambos.

Finalmente, Szendrei menciona los *juegos* , que genera enfrentamientos entre los profesores e investigadores, ya que no se ponen de acuerdo en si estos deben ser introducidos o no en las clases de Matemáticas. Bishop (1988) opina que el juego es una actividad crucial para el desarrollo matemático. Sin embargo hay autores que opinan que sirve de distracción a los alumnos y dan una imagen negativa de la Matemática.

En Coriat (1997), encontramos una organización centrada en Recursos y Materiales Didácticos, que ofrece una clara distinción entre ambos.

Señala el autor, que se entiende por Recurso cualquier material, no diseñado específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento determinado, que el profesor decide incorporar en sus enseñanzas. Son recursos habituales la tiza y el encerado o el cuaderno del alumno.

Distingue los Recursos de los Materiales Didácticos, porque estos últimos se suelen diseñar con fines educativos. Son ejemplos de materiales didácticos los siguientes: las hojas de trabajo preparadas por el profesor, los programas de ordenador, las regletas de Cuisenaire, los bloque multibase de Dienes, etc.

Estas dos organizaciones, propuestas por Szendrei y Coriat, respectivamente, no están en contraposición. Por ejemplo, los utensilios comunes utilizados por Szendrei formarían parte de los Recursos en el caso de Coriat y, los Materiales Educativos serían considerados como Materiales Didácticos. La única diferencia es que Coriat no menciona los juegos en su propuesta de organización, aunque señala que pueden formar parte de los recursos utilizados por el profesor en el aula.

Como ya hemos indicado, los materiales didácticos se han utilizado desde hace mucho tiempo. Pero, aún hoy, la principal preocupación es si los materiales benefician o perjudican el aprendizaje del alumno. En este sentido, se plantea si con la utilización del material didáctico los alumnos están aprendiendo un nuevo objeto que nada tiene que ver con la Matemática o están aprendiendo un concepto matemático a través de él, o sólo se utiliza como herramienta para plantear o resolver problemas.

Responder a estas cuestiones es algo muy complejo y que aún en estos momentos está siendo objeto de investigación. Lo que sí parece dejar claro los resultados de la investigación sobre materiales didácticos, es que habitualmente estos se han usado más como un "objeto" de estudio por parte del alumno, que como un "medio" para aprender un concepto matemático determinado.

Son varias las teorías y los enfoques que tratan de investigar sobre la utilización de materiales didácticos. Una de esas teorías es la de Gal´Perin (citada en Gravemeijer, 1994a) que se basa en la utilización de materiales manipulativos para la formación de una acción mental. Según la psicología acción, el uso de materiales permite una buena fijación mental del concepto tratado.

El principal problema que nos encontramos es la transición de lo concreto a lo abstracto, es decir, la resolución de problemas con el uso del material didáctico y sin él. Este problema de transición es probablemente debido a una conexión inadecuada entre los problemas con material didáctico y los algoritmos escritos. Es por ello, por lo que el proceso de información se basa en la introducción del algoritmo escrito junto con el material. La teoría sostiene que el material es el modo más adecuado para el trabajo en Matemáticas, ya que la vida real es demasiado compleja y con muchas distracciones. Esta teoría considera la Matemática como un sistema ya elaborado; sin embargo, la aproximación realista la ve como una actividad, una manera de trabajar y se sigue una estrategia de abajo-arriba.

En el Enfoque Realista, la educación en las matemáticas realistas se basa en la interpretación de Freudenthal de las Matemáticas como actividad (Freudenthal, 1971 y 1983). Según este autor, la actividad principal es organizar o matematizar, entendiéndose por matematizar, todo lo que tiene que ver con elevar el nivel en sentido matemático.

En la teoría de la educación realista, dos son las fuentes que intervienen en los cursos de diseño de instrucción que se utilizan para conseguir este proceso de reconstrucción: la Historia de las Matemáticas y los métodos espontáneos e inventados por los niños.

Los matemáticos realistas utilizan muy poco material en sus investigaciones, porque creen que el material no sirve de ayuda para los alumnos. Opinan que el material didáctico se convierte en objeto de estudio para los alumnos, lo que impide desarrollar otros conceptos matemáticos. Por ello, prefieren enseñar las Matemáticas sin materiales de forma que el alumno vaya construyendo o avanzando en su conocimiento a partir de una serie de problemas reales que se le va planteando.

Un ejemplo de material es el ábaco, que ayudó en el proceso de representación de los números, aunque este material acostumbra al niño a estructurar la acción de forma que no corresponde con la acción mental que debería estar acompañada cuando escribimos aritmética. El niño termina utilizándolo como una calculadora, es decir, no se produce una relación entre la acción material y la mental. Pero esto ocurre también con otros materiales como los bloques de Dienes y las regletas de Cuisenaire.

El problema radica en el uso que le damos al material, ya que un mal uso nos puede limitar el aprendizaje posterior. Este es el caso de las regletas de Cuisenaire, cuando obligamos a los alumnos a memorizar la relación color-número. Este aspecto nos permite avanzar rápidamente en cuestiones relativas a sumas, pero limita notablemente otros aspectos. En este caso el material se ha convertido en un "objeto" y no ha permitido aprender el concepto matemático.

Sin embargo, en la Matemática orientada hacia la estructura, Resnick y Ford (1990) muestran que la manipulación de materiales ayuda a los niños a captar conceptos. Aunque todavía no se sabe explicar este funcionamiento.

Algunos de los experimentos realizados han dado resultados positivos como es el caso de los trabajos acerca del valor posicional utilizando la agrupación de palo, bolas, etc. y también con los bloques multibases de Dienes, con los que experimentó Bruner en los años 60.

Estos resultados permiten albergar esperanzas de que los materiales didácticos también pueden servir para aprender conceptos matemáticos, pero no disponemos de evidencias empíricas suficientemente clarificadoras.

Representación y Comprensión

Hiebert y Carpenter (1992) hacen un recorrido por los distintos trabajos, tanto antiguos como nuevos de la psicología del aprendizaje, pues uno de los temas más importantes y que más preocupa a la comunidad matemática es la idea del aprendizaje con comprensión. Aunque no sólo preocupa a la Educación Matemática, sino también a otros campos de la ciencia.

El objetivo que se persigue es explicar cómo es posible que haya comprensión en el aprendizaje en contextos diarios y que ésta no se produzca en la escuela.

Una manera de estudiar la comprensión es investigando la representación del conocimiento, ya que éste se representa internamente de manera estructurada.

Existen dos tipos de representaciones: externas e internas.

Para pensar y comunicar las ideas matemáticas, necesitamos representarlas de alguna manera.

En el caso de querer comunicar algunas ideas necesitamos de una representación externa, es decir, símbolos escritos, dibujos, objetos, etc. Pero cuando pensamos sobre ideas matemáticas necesitamos de una representación interna, mental.

Hiebert y Carpenter (op. cit.) estudian relaciones entre ambos tipos de representaciones externas e internas y la manera de relacionar o conectar las representaciones internas entre sí. Se basan en trabajos sobre la ciencia cognitiva, pero se plantean la cuestión de si el objeto o suceso representado se imita en dicha representación, es decir, si ejerce influencia sobre la misma.

Ambos autores aceptan que las representaciones matemáticas externas influyen en la construcción de las representaciones internas. Esto es, según la manera con la que interactúe un estudiante con una representación externa se generará un tipo u otro de representación interna y recíprocamente.

El segundo resultado obtenido de los trabajos en ciencia cognitiva es que las representaciones internas se pueden conectar o relacionar unas con otras.

Las conexiones externas entre diferentes representaciones se suelen basar en relaciones de similitud y relaciones de diferencia.

Sin embargo, cuando se construyen conexiones internas se generan redes de conocimiento. Estas redes se pueden estructurar como jerarquías verticales, en las que unas representaciones agrupan a otras (por ejemplo las generalizaciones); o como telas de araña. En estas últimas, las conexiones serían la información representada y los hilos entre ellas las relaciones, de manera que toda la información está relacionada. Estas estructuras pueden ser simples o muy complejas, dependiendo del número de conexiones de cada nodo.

Estos dos tipos de estructuras aparecen en muchos trabajos sobre estructuras del conocimiento y redes semánticas, véase Greeno (1987).

La comprensión la entendemos en términos de la manera en que se representa y estructura la información.

Lo que se pretende es ayudar al alumno a construir conexiones entre las representaciones internas ya existentes. A medida que aumentan las redes de las representaciones mentales también aumenta la comprensión, ya que se producen nuevas relaciones entre la información antigua y la nueva. Cuanto más fuertes sean estas relaciones, mayor será la comprensión, pues unas relaciones débiles no permitirían enfrentarse a situaciones de conflicto.

El crecimiento de las redes puede ocurrir de varias formas, una de ellas es ir añadiendo una representación para cada procedimiento, de manera que vamos enriqueciendo esa red.

Los educadores matemáticos han defendido siempre la idea de representar las ideas matemáticas de varias formas, ya que los estudiantes entienden mejor las ideas cuando se presentan con materiales concretos.

Según Hiebert y Carpenter (op. cit.) debemos tener en cuenta las redes internas del estudiante, así como las actividades que generan la construcción de nuevas relaciones, ya que según sean esas redes internas las conexiones entre ellas y el material serán más o menos fuertes. Generalmente el poco éxito del uso de un material se debe a que el alumno no trae el conocimiento que el profesor espera y, por tanto, el material crea conexiones fortuitas. También podemos buscar el origen de estos resultados negativos en la distancia contextual entre el material concreto y la relación matemática que les intentamos representar. Cuanto más parecido y más similitudes tengan el material con el concepto matemático que se les quiere enseñar menor será la distancia entre ambos. Un ejemplo lo tenemos con los bloques de base 10 y el valor posicional, ya que cada bloque es 10 veces mayor que el anterior, al igual que ocurre con las cantidades numéricas. Sin embargo, si utilizamos como material fichas de colores, la distancia contextual es mayor, ya que debemos fijar, arbitrariamente, un color para cada valor y éste por sí mismo no da pistas sobre el valor de cada ficha. En este caso el material sería poco efectivo.

Marco Conceptual

En la experiencia didáctica que queremos llevar a cabo es necesario fijar la organización que se va a seguir en lo que se refiere a los materiales didácticos, ya que en la literatura la organización de éstos es variada; además, tenemos que fijar el papel que juegan los sistemas de representación externos y su relación con lo que entendemos por comprensión conceptual y procedimental de los objetos matemáticos en general y del Álgebra en particular.

En relación con los materiales didácticos tomamos como referencia el marco teórico presentado en Socas (1999). El autor propone que para que un material didáctico se constituya como un medio que facilite la comprensión conceptual y procedimental de un objeto matemático en el alumno, debe usarse como una representación semiótica autosuficiente del objeto matemático.

El autor toma, en un primer momento, la organización seguida por Coriat (1997), para los objetos materiales, en la que se utiliza el término recurso didáctico para considerar todos aquellos materiales que usa el profesor en el aula (tiza, cuaderno, libro, etc.), y material didáctico para aquellos otros que se construyen con fines educativos. Pero no los toma en el sentido estricto de Coriat, sino que establece una relación de inclusión entre recursos y materiales didácticos, y define el paso del primero al segundo mediante “transformaciones adaptativas” (Socas, 1999), y de éstos a las representaciones semióticas mediante el mismo procedimiento, de manera que podemos transformar un material didáctico en un sistema de representación semiótica para un objeto matemático. Es decir, establece una organización entre los objetos materiales usados en clase de Matemáticas en tres grupos diferenciados: recursos, materiales didácticos y representaciones semióticas, y establece entre ellos una relación inclusión y un proceso de transformación que denomina "adaptativo" que permite el paso de un grupo a otro. A este conjunto de objetos materiales utilizados en clase de Matemáticas lo denomina "Medios Didácticos" y cada uno de ellos son identificados como "Mediadores del Currículo". De esta manera, obtenemos la siguiente relación de inclusión para los diferentes medios didácticos:

Recursos $\supset$ Materiales didácticos $\supset$ Sistemas de Representaciones Semióticas.

Encontramos en los trabajos de este autor que un medio didáctico puede ser usado en clase de Matemáticas con tres intenciones diferentes. Por ejemplo, para poder utilizar un material didáctico como representación semiótica en un proceso de enseñanza / aprendizaje, se necesita realizar "transformaciones adaptativas" del mismo, de manera que este material didáctico se configure como un sistema de representación semiótico "autosuficiente" (Palarea y Socas, 1994b), que permite tanto las elaboraciones sintácticas, como las semánticas del objeto.

Este conjunto de transformaciones nos permite pasar de recursos a sistemas de representaciones semióticos autosuficientes, y éstos a su vez pueden ser de naturaleza diferente: analógica, digital o mixta.

En este marco de referencia podemos señalar las condiciones que debe cumplir un material didáctico como medio para el aprendizaje matemático;

situación que describiremos más adelante con el material utilizado en la experiencia: “Puzzle Algebraico”.

El tema objeto de estudio, en este trabajo, es el Álgebra; ésta resulta difícil para muchos alumnos hasta el punto que debido a esta dificultad, algunos experimentan un rechazo hacia la Matemática en general.

El poder del Álgebra radica en la posibilidad de realizar una manipulación extensiva de relaciones entre variables dentro de un sistema de representación semiótico (SRS) completamente confiable, que no requiere una atención continua del significado referencial de las expresiones intermedias generadas en la representación. El hecho de que este sistema de representación puede realizar transformaciones y operaciones sobre sí mismo es, sin lugar a dudas, un factor de su eficiencia.

Los objetos del Álgebra se presentan bajo dos estatus: El estatus operacional, de carácter dinámico, al que pertenecen los SRS, y el estatus conceptual, de carácter estático.

La Matemática no puede ser comunicada sin estos sistemas de representación.

Kaput (1987) señala que cualquier SRS se ocupa al menos de cuatro fuentes de significado:

- Las traslaciones entre SRS formales.
- Las traslaciones entre SRS formales y no formales.
- Las transformaciones y operaciones dentro de un mismo SRS, sin referencia a ningún otro SRS.
- La consolidación a través de la construcción de objetos mentales mediante acciones, procedimientos y conceptos que se dan en los SRS intermedios.

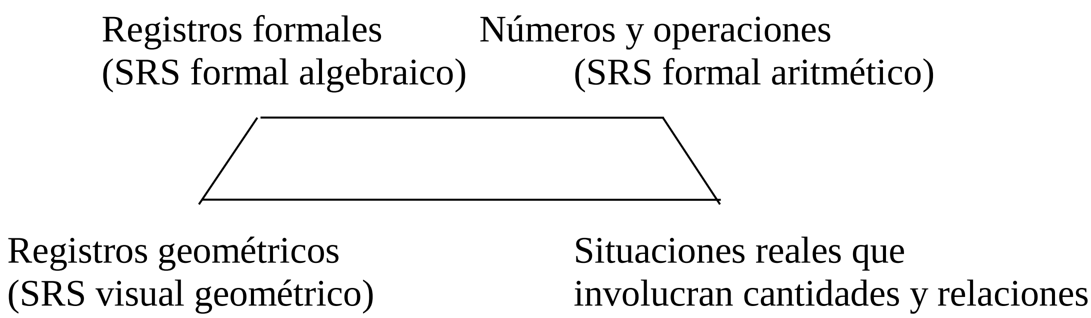
Los objetos matemáticos se comunican mediante los SRS y existen diferentes tipos de representaciones que favorecen una comprensión más amplia de los conceptos; sin embargo, existe la preocupación entre los matemáticos y los profesores de matemáticas para que los alumnos no confundan los objetos matemáticos con sus representaciones, por eso se utilizan los SRS formales. Como señala Socas (1997), este tipo de SRS es el objetivo que se trataría de conseguir a través de un proceso en el que nos encontramos los siguientes estadios de desarrollo: el estadio semiótico; el estadio estructural y el estadio autónomo del SRS formal.

Duval (1995) caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación de la siguiente manera: "un sistema semiótico puede ser un registro de representación si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

1. La presencia de una representación identificable.
2. El tratamiento de una representación, que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada.
3. La conversión de una representación es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

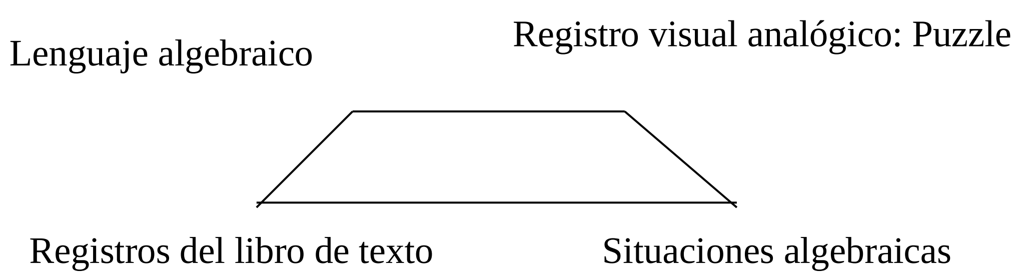
Para que el alumno asimile un objeto matemático es necesario que trabaje con varias representaciones del mismo. La manipulación de varias representaciones por el alumno le permite construir imágenes mentales de un objeto matemático.

De los estudios experimentales sobre lenguaje algebraico (Palarea y Socas, 1994a y 1994b) se ha constatado la necesidad de ampliar las fuentes de significados para el lenguaje algebraico a SRS de procedencia analógica y visual, quedando determinadas las fuentes de significado para el Álgebra de la siguiente forma:



registros que interaccionan entre sí en términos de la propuesta de Duval.

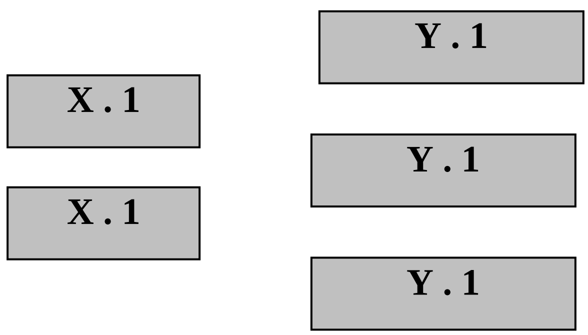
En el caso que nos ocupa hemos limitado las fuentes de significado para el Álgebra a los registros del libro de texto usual del alumno, y al registro visual analógico que proporciona el material didáctico: “Puzzle Algebraico”, quedando determinadas las fuentes de significado para los temas algebraicos que vamos a tratar de la siguiente forma:



El registro visual analógico “Puzzle Algebraico” es utilizado como un SRS autosuficiente para los objetos matemáticos desarrollados en esta experiencia. En

Socas (2001) se describe este material didáctico y se aporta una guía con actividades y sugerencias didácticas para su uso en el contexto escolar.

A modo de ejemplo, y con la intención de clarificar la naturaleza de las representaciones analógicas, digitales y mixtas, consideremos la expresión algebraica: 2x+3y, esta representación es digital, al ser la "x" o la "y" letras con significado algebraico que pueden representar un número generalizado o una incógnita o una relación entre variables, y constituyen en definitiva una notación convencional. En el caso del Puzzle Algebraico la expresión 2x + 3y, quedaría expresada mediante la representación siguiente:



que consideramos como representación de naturaleza mixta: analógica/digital del objeto algebraico (2x + 2y), donde la "x" y la "y", son objetos geométricos específicamente representados y tienen una relación directa con el objeto algebraico que se quiere representar, en este caso área o lado de un rectángulo, es decir, representan números generalizados. Hay en esta representación una correspondencia uno a uno, identificable entre el objeto matemático representado y su representación; es por tanto, en este sentido, una representación de naturaleza analógica. Esta organización del Puzzle como representación de los objetos algebraicos nos permite utilizarlo como medio para construir significados, por ejemplo, para la suma de expresiones algebraicas sencillas.

Diseño y desarrollo de la experiencia con el material: Puzzle Algebraico

El objetivo de esta experiencia es indagar sobre el papel de mediador del conocimiento matemático de un material concreto: el Puzzle Algebraico. Para ello se realiza una experiencia con 15 alumnos de 4º de ESO de la opción A de Matemáticas, en la que el Puzzle Algebraico se utilizará como una representación semiótica de los contenidos algebraicos que se van a tratar.

Para recoger la información utilizamos tres tipos de instrumentos: cuestionario[1], diario de observación y producciones de los alumnos. El cuestionario se administra en forma de pretest y postest, con la finalidad de determinar el progreso o no de los alumnos; en él se incluyen, operaciones con números enteros, expresiones algebraicas elementales y operaciones (sumas, restas y multiplicaciones) y cuestiones relacionadas con el área y el perímetro de figuras geométricas planas sencillas. El cuestionario nos permite por una parte analizar el conocimiento previo de los alumnos sobre dichos conceptos y, por otra, medir el progreso que realizan los alumnos. También pretendemos extraer información del efecto causado por los diferentes mediadores que intervienen en el proceso de enseñanza/aprendizaje.

La experiencia didáctica se realizó durante dos semanas, los días 12 de febrero al 2 de marzo de 20001, se dedicó, aproximadamente, el mismo tiempo al trabajo con el libro de texto que al trabajo con el material didáctico. Éste era nuevo para los alumnos y supuso, al principio, una dificultad añadida al tener que adaptarse éstos a las características del material didáctico.

Se diseña el trabajo con el Puzzle a partir del libro de texto que utilizan los alumnos (Matemáticas A, Bruño). Este libro tiene una estructura formal y tradicional acerca del Álgebra. Cada apartado del tema comienza con un ejemplo,

[1] Cuestionario adaptado de Palarea (1998)

bien relacionado con una situación real o bien de carácter general; a partir de ahí, define el concepto que en ese momento está tratando. El libro opta especialmente por presentar el objeto matemático mediante representaciones semióticas de naturaleza digital. Un ejemplo lo tenemos en las expresiones algebraicas que es uno de los aspectos que trata. En este caso, a partir de una copia de la factura de Telefónica de un particular, hace algunas preguntas acerca de la factura y pone a continuación una expresión algebraica, pero sin identificarla. Hecho esto define lo que es una expresión algebraica, los términos de una expresión algebraica, tipos de expresiones algebraicas, etc., para continuar con ejercicios propuestos para el alumnado, que consisten en expresar algebraicamente determinadas situaciones.

En esta experiencia se seleccionaron cuatro temas de estudio: Operaciones con números enteros, Expresiones algebraicas. Sumas y productos con expresiones algebraicas y Cálculo de perímetros y áreas de figuras planas sencillas.

La experiencia se desarrolla trabajando alternativamente cada uno de los cuatro temas de estudio, primero con el libro de texto, siguiendo la estructura que tiene el mismo y realizando algunas actividades que propone, para a continuación realizar el mismo trabajo con la ayuda del Puzzle. El trabajo con el material didáctico requiere inicialmente de una sesión para presentar el material y enseñar a utilizarlo. el contacto inicial se realiza con el primer tema: los números enteros (suma, resta y multiplicación de cantidades positivas y negativas). Se va entonces alternando, el trabajo habitual en clase, libro y cuaderno, para un tema determinado, con el trabajo con el material didáctico para el mismo tema. Por ello, al comenzar cada clase con el material, al igual que en las clases habituales, se les recuerda lo anterior y sobre todo se recuerda cómo se realizan las actividades con el Puzzle. De esta manera, se trabaja alternativamente los cuatro temas durante dos semanas, y se observa el comportamiento de los alumnos ante el material y las dificultades o facilidades que pueden tener.

A modo de ejemplo estructuramos la experiencia de la siguiente forma:

Inicialmente, se trabajan las actividades que se proponen en el libro de texto para los números enteros y las operaciones; luego se introduce el Puzzle y se trabaja, análogamente, la resolución de actividades sencillas con números enteros, por ejemplo, del tipo: $(+2)+(+5) = +7$; $(-3)-(+5) = -8$...

En un segundo momento, se trabajaba con el libro de texto el tema de Polinomios siguiendo la estructura del mismo, para a continuación introducir los mismos conceptos que más tarde se trabajarán con el material didáctico; por ejemplo:

Expresar algebraicamente: el doble de un número; el doble de un número más el triple de otro; el cuadrado de la diferencia de dos números distintos...

Suma de monomios:

$x+3y-5y-3b+2y+b=$

$x^2+4x^2-2b^2+8b^2+5x^2=$

Producto de monomios y binomios:

$(5x).(2x)=$

$3.(x+y)=$

$(x+2).(x+6)=$

...

Finalizadas las actividades, no se les propone un examen, y se continúa desarrollando el programa con las clases habituales; pasadas otras dos semanas, sin previo aviso, se les vuelve a pasar el mismo cuestionario (postest).

Como hemos señalado, este planteamiento tenía como finalidad analizar los conocimientos que permanecen en los alumnos y estudiar el papel de los diferentes mediadores a la hora de recuperar el conocimiento de la memoria a corto plazo, en particular el Puzzle Algebraico; es decir, analizamos el papel que juegan en el aprendizaje los diferentes mediadores, los utilizados en el libro de texto y el puzzle algebraico como sistema de representación semiótico, para los aspectos conceptuales y de procedimientos de los cuatro temas que se trabajaron: números enteros, expresiones algebraicas y sumas y productos con expresiones algebraicas, y perímetros y áreas.

Resultados

Comentemos brevemente los resultados obtenidos en esta experiencia preparatoria y lo haremos inicialmente a partir de los tests inicial y final que se pasaron a los alumnos. Debemos señalar que, de los 14 alumnos, sólo consideramos 9, dado que 5 no completaron los dos cuestionarios (pretest y postest).

Utilizaremos los siguientes códigos:

B, de bien, cuando el alumno contesta más del setenta y cinco por ciento de las preguntas relativas a uno de los temas.

R, de regular, cuando el alumno contesta entre el veinticinco y el setenta y cinco por ciento de las preguntas relativas a uno de los temas.

M, de mal, cuando el alumno contesta menos del veinticinco por ciento de las preguntas relativas a uno de los temas.

NC, de no contesta, cuando el alumno no da ninguna respuesta a las preguntas relativas a uno de los temas.

En la tabla siguiente recogemos los resultados globales obtenidos en el pretest en relación con los cuatro temas.

Alumnos y Temas	I.Z. (1)	M.G. (2)	A.M. (3)	I.L. (4)	V.S. (5)	Y.A. (6)	A.P. (7)	A.R. (8)	G.B. (9)
Números enteros	B	R	B	B	B	B	B	B	B
Expresiones algebraicas. Sumas	B	M	NC	B	M	NC	NC	M	M
Producto con expresiones algebraicas	B	M	R	B	NC	M	NC	B	B
Áreas y perímetros	B	M	M	B	R	B	M	R	R

Los resultados globales de los nueve alumnos en relación con postest son los siguientes:

El alumno I.Z. (1), mejora en todos los aspectos; el alumno M.G. (2), mejora, únicamente en expresiones algebraicas; el alumno A.M. (3), responde, ahora, erróneamente a la suma de expresiones algebraicas y a la conversión del lenguaje habitual al lenguaje algebraico; el alumno I.L. (4), mejora en todos los aspectos; el alumno V.S. (5), continúa cometiendo los mismos errores en la suma con expresiones algebraicas y en las conversiones del lenguaje habitual al lenguaje algebraico, y mejora en el producto de expresiones algebraicas; el alumno Y.A. (6), mejora en el producto de expresiones algebraicas y en las conversiones del lenguaje habitual al lenguaje algebraico, pero sigue sin saber hacer las sumas de expresiones algebraicas; el alumno A.P. (7), se atreve a realizar las sumas y los productos de expresiones algebraicas, pero realiza bien los productos y mal las sumas; el alumno A.R. (8), mejora en los productos de expresiones algebraicas, pero sigue sin saber realizar las sumas de expresiones algebraicas; el alumno G.B. (9), mejora en todos los aspectos, excepto en las sumas de expresiones algebraicas.

Comentario a los resultados

Observamos que los alumnos en cuanto al tema Operaciones con números enteros no tuvieron, en general, dificultades, tanto en el pretest como en el postest. En relación con la suma de expresiones algebraicas, hay que destacar que seis de los nueve alumnos o continúan haciéndola mal o no se atreven a realizarla, lo que nos pone de manifiesto la dificultad de esta operación algebraica y la poca incidencia en este aspecto de los mediadores del libro de texto y del Puzzle Algebraico. Sin embargo, en relación con el producto de expresiones algebraicas ocurre todo lo contrario, es decir, mejoran notablemente. Los conceptos de perímetro y área, quedaron descuidados y no se pudieron trabajar con detalle; sólo se nombró y utilizó en el producto de expresiones algebraicas, aunque de manera muy superficial y por ello no se estudia concienzudamente en los tests.

En el desarrollo de las distintas sesiones se pudo observar que el alumnado en general, no asimiló fácilmente el material didáctico como una forma de representación de los objetos matemáticos del Álgebra que se estaban tratando. Los alumnos mostraban dificultades para realizar las actividades con el material didáctico. Se puede decir que el camino seguido utilizando el material didáctico no permite reconstruir a los alumnos los aspectos matemáticos tratados. Conjeturamos que nuevamente el material didáctico actúo más como un objeto de estudio para los alumnos que como un medio para representar los objetos matemáticos. El tratamiento dado en el texto a los temas tratados aparentó ocasionar menos dificultades, excepto en la suma de expresiones algebraicas que se muestra como el tema de mayor dificultad. El hecho de que el trabajo con el libro de texto aparezca como menos problemático se debe probablemente a que los alumnos ya están familiarizado con el tipo de representación del libro de texto, que en general es de naturaleza digital, y a que no están habituados a trabajar el contenido matemático mediante representaciones de naturaleza analógica, situación, ésta última, que difícilmente se puede lograr en un tiempo tan corto.

De los resultados obtenidos y de la observación del aula, podemos concluir que el material se convirtió en un "objeto" de estudio para los alumnos, y que esto propició que éstos no lo aceptasen plenamente en el aula y, por tanto, no lo tomaran en serio, al convertirse más en un instrumento de juego que de ayuda para aprender Matemáticas. Sin embargo, en general los alumnos:

- Han mejorado en los conceptos trabajados a lo largo de la experiencia.

- No se han encontrado evidencias de conflictos al utilizar en el salón de clase un procedimiento digital (símbolos algebraicos) y un procedimiento analógico (Puzzle).

- En apariencia, en la peor de las situaciones, el material didáctico ha permanecido neutral en los alumnos, es decir, no los ha beneficiado ni perjudicado.

De todas la maneras no tenemos indicios ni para aceptar ni para rechazar que las mejoras encontradas sean debido a uno o a otro procedimiento. El trabajo con materiales didácticos como el Puzzle necesita un período de adaptación y una mayor dedicación para posiblemente obtener beneficios de su uso.

En cualquier caso ha sido una experiencia positiva, tanto desde el punto de vista de la investigación, obtener datos para preparar con detalle la experiencia definitiva; como desde el punto de vista de la docencia, por el hecho de dar un enfoque distinto a la materia tratada. Por ello creemos que sería beneficioso seguir profundizando y tratar de determinar el papel que como mediador juegan en la construcción del conocimiento algebraico tanto las representaciones de naturaleza digital, como los símbolos algebraicos, en relación con un mediador de naturaleza analógica, como el Puzzle algebraico.

Referencias bibliográficas

BISHOP, A. (1988). *Mathematical Enculturation*. Kluwer Dordrecht: Academic Publishers. (Traducción al castellano: *Enculturación matemática*. Barcelona: Paidós, 1999).

CORIAT, M. (1997): Materiales, recursos y actividades: un panorama. En Rico, L. y otros. *La educación matemática en la Enseñanza Secundaria.* Cap. IV, pp. 155-177. Barcelona: ICE/Horsori.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Peter Lang. Suisse.

FREUDENTHAL, H. (1971). Geometry between the devil and the deep blue sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3, p. 417.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Kluwer.

GONZÁLEZ, M. T. y ESCUDERO, J. M. (1987): *Innovación educativa: teorías y procesos de desarrollo.* Barcelona: Humánitas.

GRAVEMEIJER, K (1994a). An instruction – theorical reflection on the use of manipulatives. *Developing Realistic Mathematics Education*. CD-β: University of Utrecht, pp. 55 – 75.

GRAVEMEIJER, K (1994b). Mediating between concrete and abstract. *Developing Realistic Mathematics Education.* CD-β: University of Utrecht, pp.77 – 106.

GREENO, J. G. (1987). Instructional Representations Based on Research about Understanding. In SCHOENFELD, A. H. *Cognitive Science and Mathematics Education,* London: Lawrence Erlbaum, pp. 61-88.

HIEBERT, J. y CARPENTER, T.P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En Grouws, D.A. (Ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Pp. 65-77. New York: MacMillan Publishing Company.

PALAREA, M. M. (1998). *La adquisición del Lenguaje Algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* Tesis doctoral. Universidad de La Laguna.

PALAREA, M.M. Y SOCAS, M.M.(1994 a) Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma. Monográfico Lenguaje y Matemáticas*, Vol. 16, pp. 91-98.

PALAREA, M.M., SOCAS, M.M. (1994 b) Élaborations sémantiques vs élaborations syntactiques dans l'enseignement- apprentissage de l'algèbre scolaire (12-16 ans), *Actes de la 46ème Rencontre de la CIEAEM.* Toulouse.

RESNICK, L. y FORD, W. (1981). *The Psychology of Mathematics for Instruction.* (Traducción española: (1990) *La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Paidós-MEC).

SOCAS, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap.V, pp.125-154). En Rico, L. y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: Horsori.

SOCAS, M. M. (1999). "El papel de los materiales concretos con fines didácticos en la clase de matemáticas". En Socas, Camacho y Morales (Eds). *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática.* pp.7-32. Campus: Universidad de La Laguna.

SOCAS, M. M. (2001). *Guía del Puzzle Algebraico*. CAMPUS: La Laguna.

SOCAS, M. M. (2000). Álgebra para todos. Análisis de un material didáctico: "Puzzle algebraico". *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática II.* pp. 299-330.

SOCAS, M.M. y PALAREA, M.M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en álgebra escolar. *Uno.* Vol. 14, pp. 7-24. Barcelona.

SZENDREI, J. (1996): Concrete materials in the classroom, en Bishop, A. J. et al.(Eds.). *International Handbook of Mathematics Education.* Vol. 4, 411-434. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.