Ressignificando o Teorema de Pitágoras com o uso do GeoGebra: uma articulação entre a história da matemática e o uso dos recursos computacionais

Resignifying the Pythagorean theorem with the use of GeoGebra: an articulation between the history of mathematics and the use of computational resources

MARIA DEUSA FERREIRA SILVA [1]

Resumo

Este artigo integra as atividades que vêm sendo desenvolvidas no Grupo de Pesquisa e Extensão em Recursos Computacionais no Ensino de Matemática - GPERCEM da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, campus universitário de Vitória da Conquista. Nesse grupo também agrega o recém-criado Instituto GeoGebra da UESB. Assim, neste artigo, fazemos uma retomada de algumas demonstrações do teorema de Pitágoras usando as ferramentas tecnológicas, no caso o software GeoGebra – uma ferramenta para construção geométrica e algébrica que pode ser bastante útil no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, sobretudo, por sua facilidade de uso e possibilidade de promover mudança sobre um objeto já construído. Ainda utilizamos elementos da história da matemática mostrando que é possível fazer uso das novas tecnologias e da história da matemática, enriquecendo e promovendo o aprendizado a partir de suas raízes históricas, sem abrir mãos das novas tecnologias. Desse modo, escolhemos o teorema de Pitágoras por sua importância histórica para o desenvolvimento da matemática e por ser tão útil no ensino básico, não raro aparecendo em muitos conceitos matemáticos. Ainda, a escolha pelo teorema de Pítágoras se deu por sua beleza e simplicidade na construção, além das inúmeras possibilidades de demonstração, o que, com o uso do GeoGebra, toma uma nova dinâmica.

***Palavras-chave**: história da matemática, recursos computacionais, GeoGebra*

Abstract

This article integrates the activities developed in the Group of Research and Extension in Computational Resources in Mathematics Teaching - GPERCEM and this group also adds the GeoGebra Institute. Thus, we make a resumption of some demonstrations of the Pythagorean theorem using technological tools in case the GeoGebra software - a tool for geometric and algebraic construction that can be very useful in teaching and learning of mathematical concepts above all for its ease of use and ability to effect change on an object ever built. Still, use elements of the history of mathematics shows that it is possible to make use of new technologies and the history of mathematics, enriching and promoting learning from its historical roots without shirk the use of new technologies. Therefore, we chose the Pythagorean Theorem for its historical importance to the development of mathematics and for being so helpful in basic education, not infrequently appearing in many mathematical concepts. Yet, the choice of the Pythagorean Theorem was given by its beauty and simplicity of construction and

[1] Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia-UESB – mariadeusa@gmail.com

countless possibilities of the proof that with the use of technological tools, eg, GeoGebra take a new dynamic.

***Keywords**: history of mathematics, computational resources, GeoGebra*

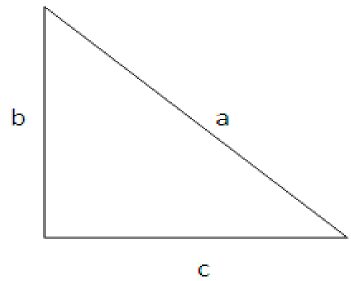
Introdução

O Grupo de Pesquisa e Extensão em Recursos Computacionais no Ensino de Matemática - GPERCEM, criado em 2013, congrega professores-pesquisadores, alunos de pós-graduação, professores de matemática da educação básica e alunos de graduação da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia-UESB, campus universitário de Vitória da Conquista. A criação do mencionado grupo nasceu da necessidade de atender uma demanda latente na Instituição, bem como atender aos pedidos de professores recém-saídos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, polo UESB, em cujos trabalhos de dissertações de mestrado abordaram temáticas relacionadas à utilização de recursos computacionais no ensino de matemática. Assim, a criação do grupo veio atender essa necessidade e, de outro lado, manter o vínculo com esses professores, para que os mesmos possam se tornar multiplicadores na formação continuada de outros professores, em suas respectivas cidades.

Desse modo, o GPERCEM vem desenvolvendo e planeja desenvolver uma série de atividades, tanto de pesquisa quanto de extensão, que busque inserir os recursos tecnológicos nas aulas de matemática, em especial em escolas públicas do interior da Bahia. Outro fator preponderante na alavancada das atividades do grupo é a recém criação do Instituto Geogebra na UESB. A aprovação do Instituto vem, ainda mais, fortalecer as ações do grupo e, ao mesmo, tempo promover cursos de extensão e oficinas que visem a disseminação do Geogebra, um software livre, nas escolas públicas de ensino básico. Assim, as atividades que serão apresentadas, na sequencia do artigo, foram desenvolvidas em alguns momentos com alunos de graduação da UESB e visaram promover uma primeira integração destes com o referido software. O artigo vem também abordar que é possível integrar o uso da história da matemática à utilização de recursos computacionais, mostrando que o uso da história do desenvolvimento de alguns conceitos matemáticos pode se tornar uma atividade investigativa bastante prazerosa quando se usa ferramentas tecnológicas.

1. O Teorema de Pitágoras: considerações históricas

O Teorema de Pitágoras é um dos mais antigos legados da matemática sendo requisitado em muitos conteúdos matemáticos, provavelmente poucos teoremas estejam tão presentes no ensino da matemática quanto ele. A descrição de um triângulo retângulo cujos lados medem 3, 4 e 5 já aparece na matemática egípcia e babilônica, o que pode ser visto em um dos mais antigos escritos sobre a matemática: o papiro Rhind[2]. Todavia, foi por meio da matemática grega, mas precisamente pela escola pitagórica, fundada por Pitágoras[3], que o Teorema se popularizou e que tomamos conhecimento dele (ROQUE, 2010, EVES, 1997). Ao trabalharmos sobre diferentes construções de triângulos retângulos, de acordo com o legado pitagórico, se verifica que:

> Dado um triângulo retângulo de lados a, b e c, sendo b e c os lados menores e a o lado maior (hipotenusa), conforme mostra a figura:
>
> 
>
>
> Figura 1 – Triângulo pitagórico
>
> a relação $a^2 = b^2 + c^2$ é satisfeita. Também podemos obter essa relação de modo inverso. Se em um triângulo qualquer a relação $a^2 + b^2 = c^2$ é observada, então o triângulo é retângulo, onde a e b são os lados e c a hipotenusa do triângulo (HAHN, 1997, p.4).

A primeira demonstração pode ter sido dada pelo próprio Pitágoras e muitas conjecturas têm sido feitas ao longo dos tempos sobre essa demonstração. Ela é feita por decomposição, conforme segue:

> Denotemos por a, b e c os catetos e a hipotenusa de um triangulo retângulo, e consideremos os dois quadrados da figura, a seguir, cada um de lados $a + b$. O primeiro quadrado está decomposto em seis partes - a saber, o quadrado sobre a hipotenusa e quatro triângulos congruentes ao retângulo dado. Subtraindo-se iguais de iguais, conclui-se que o quadrado sobre a hipotenusa é igual a soma dos quadrados sobre os catetos (EVES, 1997, p. 103).

---

[2] - Papiro de Rhind ou papiro de Ahmes é um documento egípcio de cerca de 1650 a.C., onde um escriba de nome Ahmes detalha a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples,equações lineares,trigonometria básica e geometria. É um dos mais famosos antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje, juntamente com o Papiro de Moscou (Disponível em Wikipédia. http://pt.wikipedia.org/wiki/Papiro_de_Rhind, acesso em 28/04/2014).

[3] - Pitágoras tornou-se uma figura legendária: filósofo, profeta, sábio, místico e político. Há controvérsias sobre seus feitos, pois não há registros dessa época, apenas informações obtidas muito tempo depois, às vezes, séculos depois. (BARON, 1985).

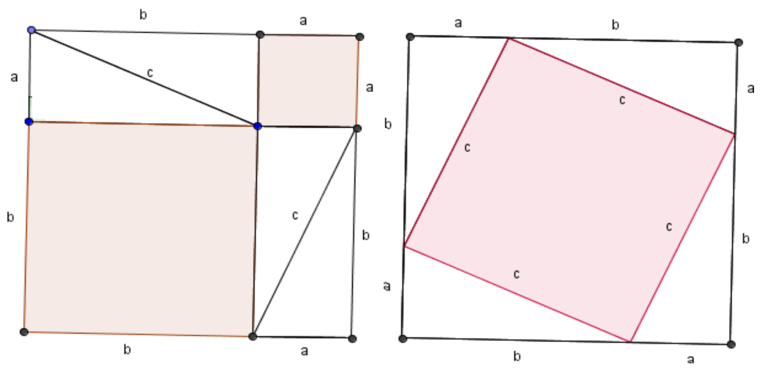


Figura – 2 Ilustração geométrica da demonstração do teorema de Pitágoras[4]

Segundo Eves (1997), para provar que a parte central do segundo quadrado é, de fato, um lado de quadrado *c*, foi preciso assegurar que "a soma dos ângulos de um triângulo retângulo é igual a dois ângulos retos" (EVES, 1997, pág.103). Assim como essa, outras demonstrações foram propostas ao longo da história.

2. Sobre as tecnologias e o seu uso no ensino e aprendizagem da matemática

A discussão obre a inserção dos computadores no ensino, em especial de matemática, não é atual (VALENTE, 1993; BORBA & PENTEADO, 2001; BORBA & VILLAREAL, 2005; ROULKOUSKY, 2011). Ela está presente nos meios educacionais, pelo menos há três décadas, sendo substancial a quantidade de pesquisas apresentadas nos eventos nacionais e internacionais de educação matemática[5]. Portanto, a utilização dos recursos computacionais no ensino, em especial de matemática, continua sendo um tema atual. Ainda, constatamos que apesar da crescente utilização dessa ferramenta pela sociedade em geral, com sua presença cada vez mais marcante nos diversos serviços oferecidos à população, o mesmo não se deu com o ensino de matemática (GUIMARÃES, 2010). Sendo assim, apesar dos enormes avanços observados nos últimos anos no que tange ao uso das novas tecnologias, ainda nos perguntamos: *como tirar proveito nas atividades de ensino, em especial de matemática, de tudo que o computador oferece, a fim de gerar uma aprendizagem significativa*[6]?

Não podemos dizer mais que a maioria das escolas não possuem as ferramentas,

[4] - A demonstração, conforme Eves (1997), também foi feita com uso do Geogebra.
[5] - Conforme Anais IV e V SIPEM – Simpósio Internacional de Educação Matemática – GT-06, Anais VII CIBEM – Conferência Ibero-americana de Educação Matematica .
[6] Aprendizagem significativa segundo Brighenti (2003), baseada na teoria de Auzubel, trata-se um processo pelo qual uma nova informação se relaciona com a estrutura de conhecimento do individuo, ou seja, neste processo, a nova informação interage com uma estrutura de conhecimento especifico. (BRIGHENTI, 2003, p.21)

que os professores não possuam seus equipamentos pessoais, *notebooks*, *tablets*, etc. Portanto, era de se esperar que o uso voltado para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos estivesse muito mais disseminado. Todavia não é isso que ocorre, a resistência ainda é grande por parte dos professores de matemática quando se trata de usar as ferramentas tecnológicas no ensino de matemática.

Em uma pesquisa[7] recente realizada junto a professores de matemática da educação básica de uma cidade do interior da Bahia, quando interrogados sobre o uso ou as razões de não usar as ferramentas tecnológicas, em especial softwares matemáticos em suas aulas, encontramos respostas do tipo[8]: "*não basta ter um laboratório equipado, os professores precisam ser treinados e ter um projeto pedagógico"; "por causa de a carga horária ser muito pequena e não dar tempo de utiliza-lo*"; "n*unca tentei usá-la, na verdade eu não sei usar"; "talvez seja a disciplina que menos utilize os recursos tecnológicos, muitas vezes por falta de conhecimento e habilidade, requer mais tempo e trabalho, etc."*

Assim, fazendo uma breve análise dessas respostas percebe-se que os professores sempre encontram um motivo plausível para justificar esse não uso. Podemos perceber, ainda, que algumas respostas apontam para a falta de formação do professor. Sobre isso, Suzuki e Rampazzo (2009) afirmam:

> Diante desta nova situação, o professor terá necessidade de atualização constante, tanto em sua disciplina específica, quanto nas metodologias de ensino e as novas tecnologias. Nesse sentido, destacamos a importância da formação continuada. Além disso, espera-se do professor do século XXI que ele seja capaz de desenvolver os conteúdos não só de forma individual, mas também coletiva, e que saiba manejar os instrumentos específicos dos novos tempos. (SUZUKI e RAMPAZZO, 2009, p. 40)

Assim, a formação do continua do professor ainda é ponto crucial para que, de fato, aconteça a tão esperada inserção dos recursos computacionais nas aulas de matemática. Apesar dos esforços, dos governos federal e estadual, em implantar laboratórios nas escolas, continuará não surtindo efeito se atrelado a isso não estiver a formação continua do professor para utilizá-los. Isso é o que tem sido apontado nas

---

[7] - Pesquisa realizada junto ao Mestrado Profissional em Matemática/Polo UESB, em 2013.

[8] - Dados de um questionário aplicado a 18 professores de matemática de uma Cidade, no interior da Bahia, faz parte da pesquisa em andamento de um aluno do Mestrado Profissional em Matemática/PROFMAT-UESB, sob a orientação da autora do presente artigo.

inúmeras pesquisas, como exemplo a de Suzuki e Rampazzo, (2009). Isso nos faz perceber a importância de ações que visem amenizar essa situação. Essa é uma das metas do grupo de pesquisa, supracitado, o GPERCEM, atuar na formação continua de professores de matemática visando à efetiva utilização dos recursos computacionais nas aulas de matemática.

Quando Valente (1993) afirmou:

> [...] os computadores podem ser usados para ensinar. A quantidade de programas educacionais e as diferentes modalidades de uso de computador mostram que esta tecnologia pode ser bastante útil no processo de ensino/aprendizado. E mais: para a implantação do computador na educação, são necessários quatro ingredientes, o computador, o software educativo, o professor capacitado para usar o computador como meio educacional e o aluno. O software é um ingrediente importante quanto os outros, pois, sem ele, o computador jamais poderia ser utilizado na educação [...] (VALENTE, 1993, p.37).

Ele já alertava para o fato de que as novas tecnologias estavam cada vez mais acessíveis ao homem e, portanto, é necessário que alunos e professores se apropriassem dos conhecimentos que elas ofereciam de uma forma crítica, fazendo uso delas para melhor compreender, interpretar e transformar a realidade.

De modo semelhante, Borba e Villarreal (2005) no livro: Humanos com Mídia e a Reorganização do Pensamento Matemático[9], trazem novamente a discussão sobre a importância do uso das ferramentas tecnológicas, em especial os computadores no ensino de matemática. Destacam que o uso da tecnologia propicia uma reorganização no pensamento matemático de alunos e professores envolvidos no processo. Sendo assim, essa discussão parece não esgotada, uma vez que percebemos que há ainda muitas dificuldades a serem superadas para que uma utilização mais efetiva dos recursos computacionais possa acontecer na sala de aula, por alunos e professores.

Portanto, neste artigo apresentamos uma proposta de atividade, bastante simples, que pode ser conduzida com o uso de ferramentas tecnológicas, em especial o software de geometria dinâmica GeoGebra[10]. Com ele veremos que é possível aos professores

[9] - Livre tradução nossa.

[10] O GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Além dos aspectos didáticos, o GeoGebra é uma excelente ferramenta para se criar ilustrações profissionais para serem usadas no

mostrar e/ou trabalhar com seus alunos algumas variações da prova dada ao teorema de Pitágoras.

1. O uso do GeoGebra e o teorema de Pitágoras: uma ressignificação possível

Ao abrirmos o GeoGebra nos deparamos com a tela da figura 3, a seguir. E na figura 4 apresentamos uma breve explicação sobre os comandos básicos, conforme segue:

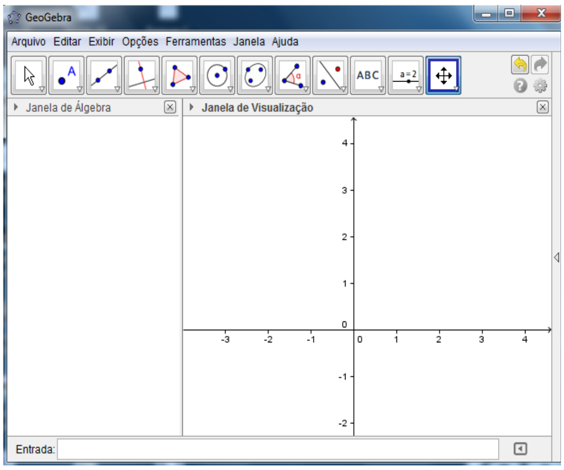


Figura 3 -Tela do inicial do GeoGebra

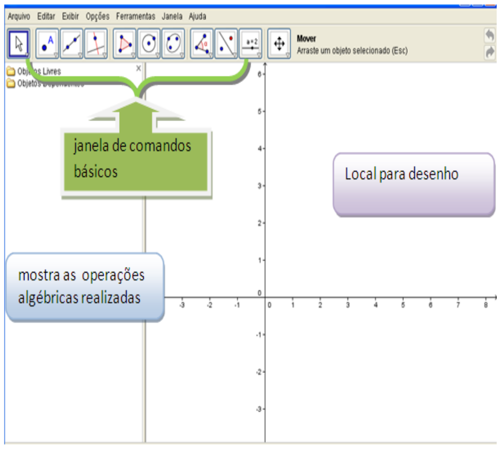


Figura 4 – Breve explicação sobre os comandos

As janelas de comandos do GeoGebra são autoexplicativas, e portanto, é possível, com um pouco de conhecimento e traquejo, qualquer um realizar atividades básicas seguindo essas orientações. Assim, vamos iniciar o uso do GeoGebra – fazendo primeiro as construções elementares da geometria: ponto, reta, semirreta, círculo e polígono regular, conforme figura 5:

Microsoft Word, no Open Office ou no LaTeX. Escrito em JAVA e disponível em português, o GeoGebra é multiplataforma e, portanto, ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS (disponível em: http://www.geogebra.im-uff.mat.br/)

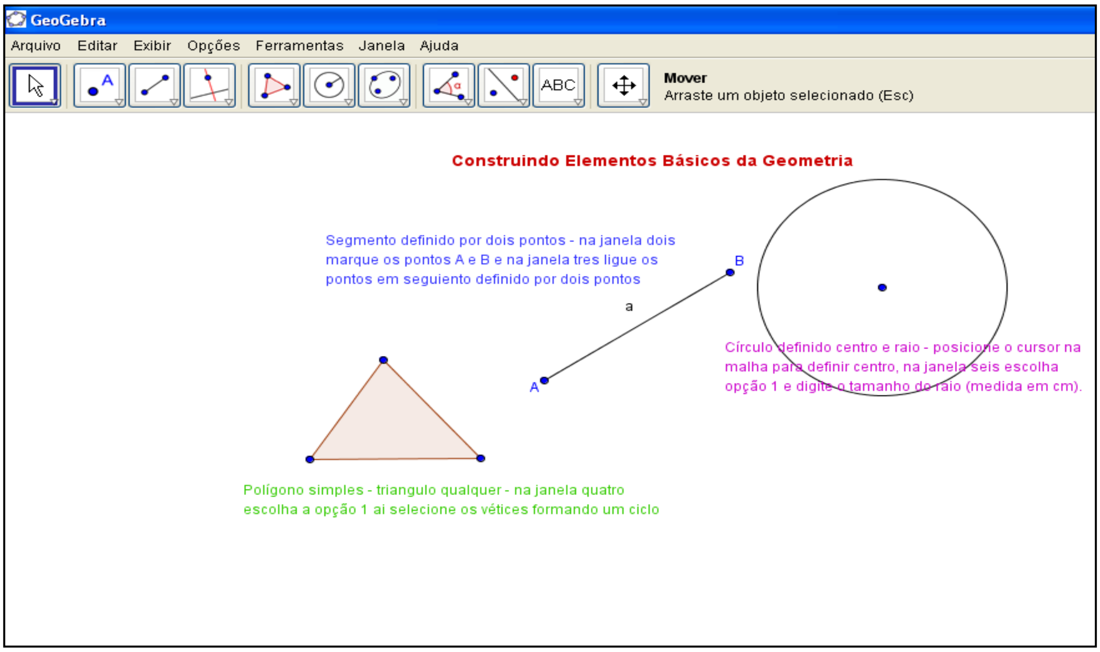


Figura 5 – Elementos básicos da geometria plana com o Geogebra

- A primeira construção é de um triângulo-retângulo, conforme figura 6, a seguir:

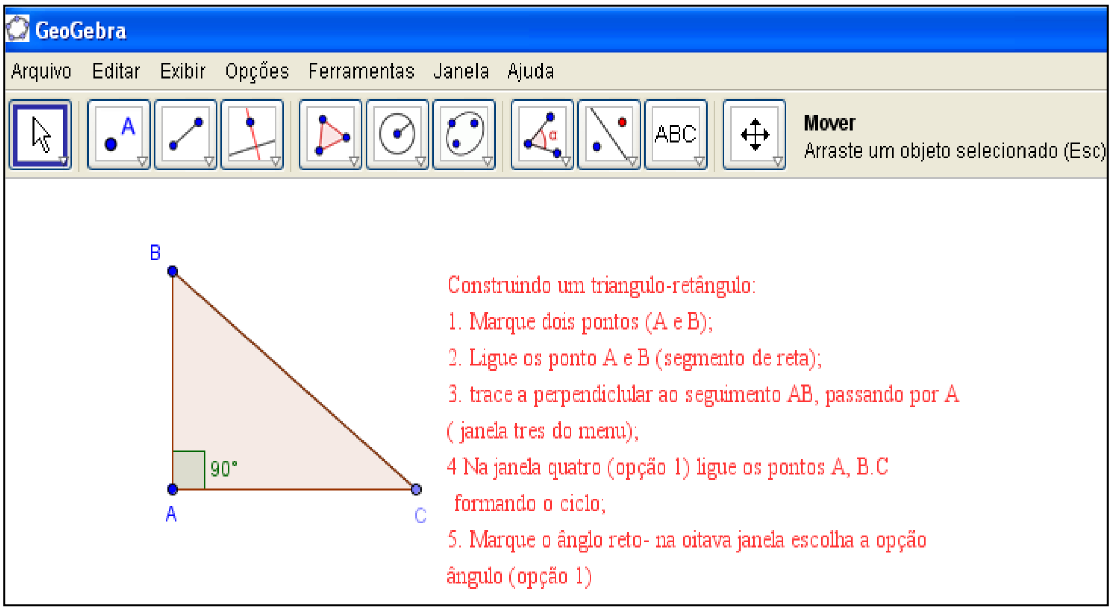


Figura 6 – A construção do triangulo retângulo

Partindo desse triângulo-retângulo, comecemos pela demonstração padrão, ou seja, vamos construir quadrados de lados iguais à hipotenusa e aos catetos do triangulo retângulo, conforme figura 7:

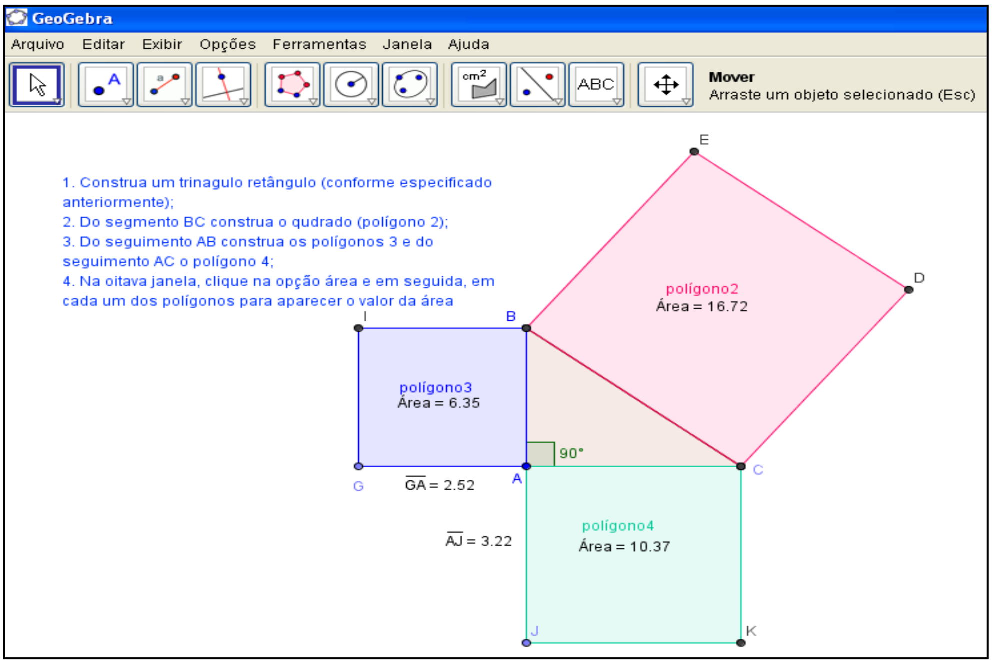


Figura 7 – Demonstração padrão do Teorema de Pitágoras

Assim, essa demonstração é a que está presente na maioria dos livros didáticos e a mais utilizada pelos professores. Todavia, é importante que os alunos tenham a oportunidade de verificar o teorema fazendo uso de outras construções e, para tanto, o GeoGebra é uma importante ferramenta. Vejamos como faze-las, conforme figuras 9 e 10.

2. Fazendo outras demonstrações para o teorema de Pitágoras

Tomando a figura 7 e eliminando-se os polígonos 2, 3 e 4, conforme explicado na figura 8, deixando apenas o triangulo-retângulo, podemos “provar” que o teorema é verificado, também, se, ao invés de quadrados, construirmos outras figuras, tais como círculos, triângulos equiláteros, etc. É o que veremos nas ilustrações 9 e 10.

Objetos já construídos podem ser eliminados ou ficarem ocultos, isso pode ser útil se desejarmos, vejamos, com base na figura 8, como eliniar um objeto já construído:

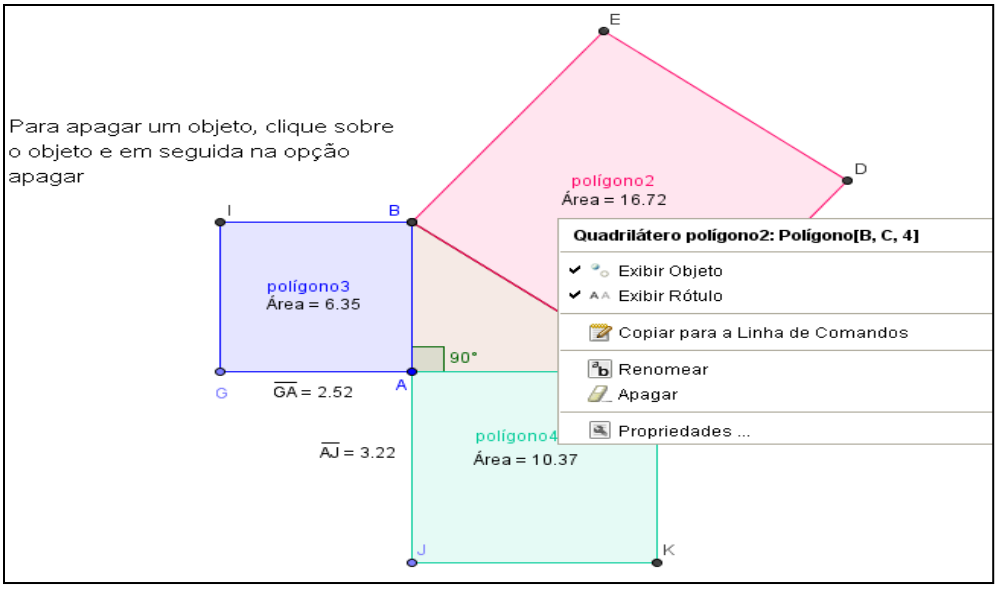


Figura 8 – Explicação de como eliminar objetos no GeoGebra

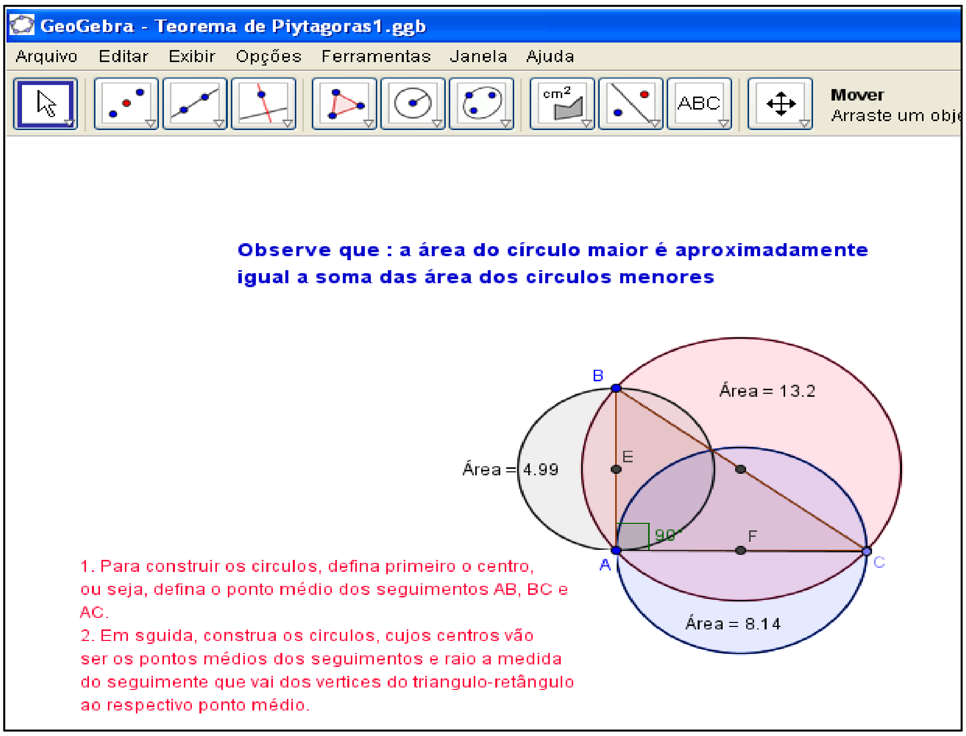


Figura 9 – Teorema de Pitágoras usando círculos construídos sobre os lados do triângulo retângulo

Na construção anterior, figura 9, é possível verificar que, a área do círculo de diâmetro BC – hipotenusa do triangulo retângulo ABC é igual a soma das áreas dos círculos de diâmetro AB e AC, os quais são os catetos do triangulo retângulo dado, ou seja, $\frac{\pi(BC)^2}{4} = \frac{\pi(AB)^2}{4} + \frac{\pi(AC)^2}{4}$, cancelando os termos semelhantes em ambos os membros da equação, obtemos:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$

Já na construção seguinte, figura 10, sobre cada lado do triângulo retângulo base foi construído um triangulo equilátero. Assim, a área do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa, é igual a somas das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos.

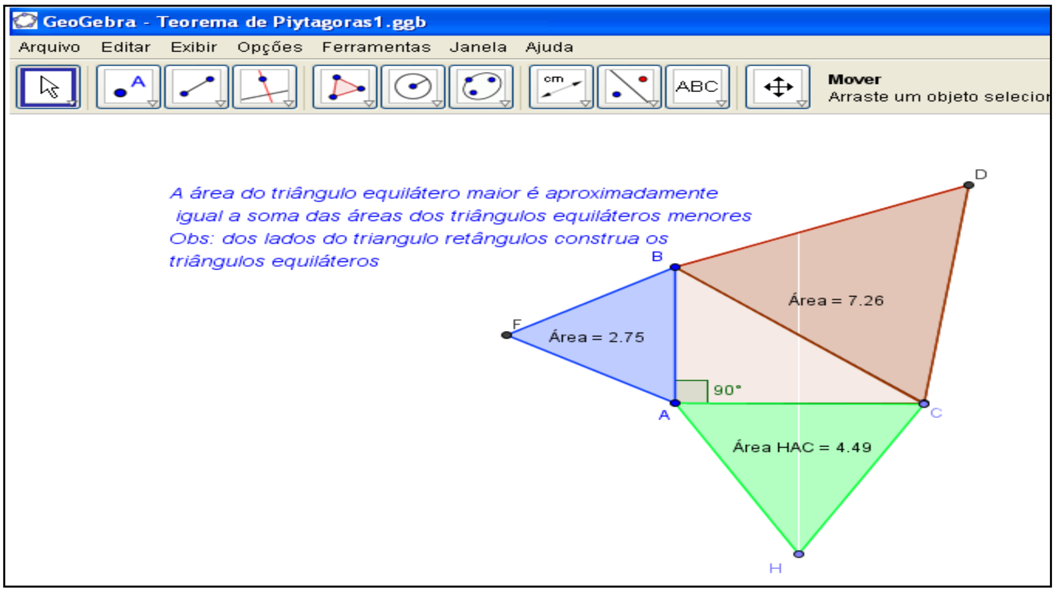


Figura 10 - O Teorema de Pitágoras usando triângulos equiláteros.

3. Considerações finais

Desse modo, pelo exposto, com o uso do GeoGebra é possível ressignificar o teorema Pitágoras. Além disso, para quem deseja introduzir essa ferramenta em suas atividades e não sabe por onde começar fica uma sugestão. Ainda, fica fácil para o professor preparar uma atividade interessante do ponto de vista histórico apresentando um conceito tão presente na matemática como é o teorema de Pitágoras. Para os alunos pode se constituir em momento prazeroso e criativo, não precisam ficar decorando uma fórmula, mas construindo significado sobre conceitos e representações matemáticas. Finalizando, muitos professores desistem de usar o computador em suas aulas por não saberem como fazer, até dominam algumas ferramentas, todavia têm dificuldade de elaborar atividades para a sala de aula. Essa atividade pode ser o início para quebrar a resistência de uso das ferramentas tecnológicas.

Referências

BARON, M. Curso de História da Matemática: Origens e desenvolvimento do cálculo. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985. Volumes 1-3.

BORBA, M. C & VILLA, M. E. *Humans-with-Media and the Reorganization of*

Matematical Thinking. Melbourne, Springer, 2005.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. 2ed. Editora da UNICAMP. Campinas, 1997.

GUIMARÃES, K. P. Desafios e perspectivas para o ensino da Matemática. Curitiba: Ibpex, 2010.

HAHN, A. J. Basic Calculus: from Arquimedes to Newton to its Role in Science. Springer. New York, 1997.

Instituto Geogebra no Rio de janeiro (Disponível em: http://www.geogebra.im-uff.mat.br/. Acessado em 04/12/2012).

Papiro de Rhind. Disponível em Wikipédia. http://pt.wikipedia.org/wiki/Papiro_de_Rhind, acesso em 28/04/2014).

ROQUE, T. História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo lendas e mitos.Rio de janeiro. Jorge Zahar, 2012.

ROULKOUSKY, E. Tecnologias no ensino de Matemática. Curitiba: Ibpex, 2011 – Série Matemática em Sala de Aula.

VALENTE, J. A. *Computadores e Conhecimento:* representando a educação – Campinas. Unicamp, 1993.

VALENTE, J. A & ALMEIDA, F. J. *Visão Analítica da Informática na Educação: a questão da Formação do Professor*. REVISTA BRASILEIRA DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 1(1), 13-21, 1997.