

# Funções definidas implicitamente por meio de equações: uma discussão sobre o uso dos softwares Geogebra e CAS Maple

Functions implicitly defined by equations: a discussion of the use of software Geogebra and the CAS Maple

---

FRANCISCO REGIS VIEIRA<sup>1</sup>

## Resumo

*Discute-se nesse artigo um conteúdo presente, tanto no contexto do Cálculo em Uma Variável Real, bem como no Cálculo a Várias Variáveis. Assim, indicam-se alguns elementos vinculados à noção de equações, definidas de modo implícito, no caso de duas e três variáveis. De modo preliminar, assinala-se a tônica hegemônica de apresentação desse conteúdo, em certos compêndios especializados de Cálculo. Assim, depois de indicar limitações e formular questionamentos direcionados a tal tipo de abordagem, que continua sendo hegemônica no locus acadêmico, alguns exemplos são ressignificados, com o arrimo da tecnologia, descrita por uma proposta de complementaridade do software Geogebra com CAS Maple. Tal complementaridade é caracterizada em virtude de possibilidades de superação de certos entraves indicados, ao longo do escrito, em cada software. Por fim, indica-se um cenário de abordagem e exploração metodológica que evita a imediata aplicação de formulações e regras de cunho analítico, de modo irrefletido, por parte do aprendiz. Por intermédio dessa abordagem, o papel dedicado à visualização recebe lugar de destaque.*

**Palavras-chave:** Funções definidas implicitamente, Visualização, Geogebra, CAS Maple.

## Abstract

*We discuss in this article, un present subject, both in the context of Calculus in One Real Variable, as well as in the Calculus of Several Variables. Thus, we indicate some elements connected to the notion of equations defined implicitly in the case of two or three variables. Thus, we indicate some elements connected to the notion of equations defined implicitly in the case of two or three variables. In a preliminary way, points to hegemonic keynote presentation of such content, in certain specialized textbooks of Calculus. Thus, after indicating limitations and formulate questions directed to this type of approach, wich remains hegemonic in academic locus, some examples are reinterpreted with the help of technology, described by a proposed complementarity with the software Geogebra and the CAS Maple. Such complementarity is characterized by virtue of possibilities to overcome certain obstacles indicated along the writing to each software. Finally, we indicate a scenario approach and methodological exploration that avoids the immediate application of formulations and rules of analytical nature, so thoughtless, by the problem solver. Through this approach, the paper devoted to the display receives detached place.*

**Key-words:** Parameterized curves, Construction, Geogebra, CAS Maple.

## 1. Introdução

---

<sup>1</sup> Instituto Federal de Educação, Ciencia e Tecnologia – CEFET - fregis@ifce.edu.br

Evidenciamos as vantagens da tecnologia no ensino de conteúdos de Matemática, como no caso, por exemplo, do Cálculo. No rol dos tópicos estudados no contexto da transição do Cálculo em Uma Variável Real para o Cálculo a Várias Variáveis, a noção de equações definidas, de modo implícito<sup>2</sup>, por variáveis, permite um amplo campo de relações conceituais e a possibilidade de aplicação e significação de teoremas importantes do Cálculo (ALVES, 2011; 2014) e fundantes em Análise no  $\mathbb{R}^n$  (LIMA, 2009).

Neste escrito, trazemos a discussão do uso, em caráter de complementaridade, dos softwares *Geogebra* e do *CAS Maple*, no contexto de algumas situações problemas, relacionadas com o Teorema da Função Implícita. Logo abaixo apenas indicamos seu enunciado.

Teorema: Seja  $F(x, y)$  de classe  $C^1$  num aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$  e seja  $(x_0, y_0) \in A$  com  $F(x_0, y_0) = 0$ . Nestas condições, se  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$  então existirão intervalos  $(x_0, y_0) \in I_{x_0} \times J_{y_0} \subset \mathbb{R}^2$  tais que, pra cada  $x \in I$  existe um único  $g(x) \in J$ , com

$F(x, g(x)) = 0$ . A função  $g: I \rightarrow J$  é diferenciável e vale  $g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}$ .

(Demonstração: Guidorizzi, 2010, p. 239).

Embora não tencionamos analisar a aplicação particular deste teorema, nos exemplos que discutiremos, as condições de seu uso é possível e, do ponto de vista matemático, é consistente. Por outro lado, diante da ênfase em procedimentos de natureza eminentemente analítica, apontaremos fatores que restringem as possibilidades de exploração de elementos de natureza qualitativa (visual), oriunda da abordagem *standard*, por parte de autores de livros de Cálculo.

Por fim, no caso de equações do tipo  $f(x, y) = k$  (curvas de nível) e  $f(x, y, z) = k$  (superfícies de nível), mostraremos de que modo a tecnologia pode proporcionar elementos para a investigação, análise de caracteres visuais e qualitativos, o que evita restringirmos a tarefa do aprendiz, em uma simples aplicação de formulações e/ou receitas *a priori*, indicadas pelo professor, e validada pelo modelo

---

<sup>2</sup> Neste artigo assumimos posição concorde com o autor Scarpello (2002, p. 173-174), quando acentua que o vocábulo “implícito” com a intenção de “descrever uma função que não opera a partir de uma sequência de valores relativos às variáveis independentes.”

matemático. No próximo segmento, indicaremos uma abordagem, adotada por autores de livros de Cálculo, a qual, necessita maior atenção (ALVES & BORGES NETO, 2011; ALVES, BORGES NETO & INGAR, 2013).

## 2. Funções definidas implicitamente por meio de equações: sua abordagem nos livros

Nesta seção, nos restringiremos a certas equações, descritas em duas ou três variáveis, que definem, de modo implícito, funções do tipo  $z = f(x, y)$  e  $w = f(x, y, z)$ . Na própria História da Matemática, sublinhamos o empenho de matemáticos, tais como: Descartes, Leibniz, Bernoulli e Euler (SCARPELLO, 2002, p. 175-176), com o intuito de estudar e descrever propriedades de certas equações descritas de maneira implícita. De modo preliminar, considerando uma função diferenciável  $y = g(x)$  seja dada implicitamente pela equação  $F(x, y) = g(x) - y = 0$ . Acrescemos a hipótese de que  $F$  é diferenciável e  $\nabla F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ , onde se tem que  $y_0 = g(x_0)$ . Neste caso, o vetor gradiente é descrito do seguinte modo  $\nabla F(x_0, y_0) = (g'(x_0), -1)$  (\*).

Em virtude deste argumento,  $\forall x \in \text{Dom}(g)$ , teremos que  $F(x, g(x)) = 0$ . Daí, ao definirmos a curva  $\gamma(t) = (t, g(t)) \therefore F(\gamma(t)) = F(t, g(t)) = 0$ . Noutros termos, podemos interpretar que a imagem da curva  $\gamma(t)$  está contida na curva de nível  $F(x, y) = 0$ . Outrossim, derivando a equação  $F(\gamma(t)) = 0$ , inferimos que os vetores  $\nabla F$  e  $\gamma'(t)$  são ortogonais (\*\*). Tal fato pode ser generalizado no caso de três variáveis (GUIDORIZZI, 2010; SIMMONS, 1988; STEWART, 2001). Assinalamos, entretanto, alguns exemplos presentes nos principais compêndios especializados no Brasil. O caráter algébrico se sobressai em todas as situações que imprimimos ênfase.

Figura 1. Enunciado *standard* abordado em compêndios de Cálculo

**EXEMPLO 3.**  $y = f(x)$  é uma função diferenciável definida implicitamente pela equação  $y^3 + xy + x^3 = 3x$ . Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de  $f$  no ponto  $(1, 1)$ .

Fonte: Guidorizzi (2010, p. 250)

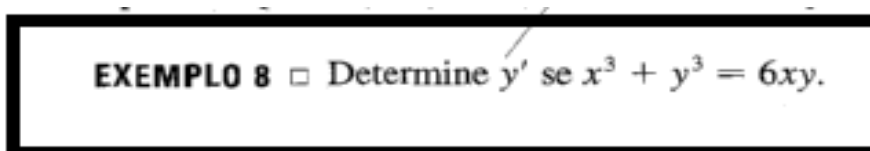
Na figura 1, vale sublinhar que a tarefa retira a responsabilidade do aprendiz, qualquer preocupação relativa à existência de retas tangentes e normais ao gráfico, uma vez que, de modo peremptório, o autor indica o procedimento único a ser executado. Vale destacar que o gráfico da função  $f$  não é fornecido e toda a estratégia é originada a partir das formas analíticas.

Por outro lado, na figura 2, percebemos que a ênfase concedida por Stewart (2001), se restringe em encontrar e determinar (por meio de derivação implícita) a seguinte

expressão  $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$ . Entretanto, questionamos se, de acordo com a natureza

de uma abordagem que prioriza apenas um desses registros, proporcionamos ao aprendiz, a possibilidade da aquisição do significado geométrico e as propriedades gráfico-geométricas envolvidas? Ou a variação de suas propriedades qualitativas, quando alteramos valores correspondentes às variáveis “x” e “y”? Com base nos dados sugeridos, deixamos a cargo do leitor a resposta para tal questionamento.

Figura 2. Descrição de exercício proposto em Stewart (2001, p. 922)

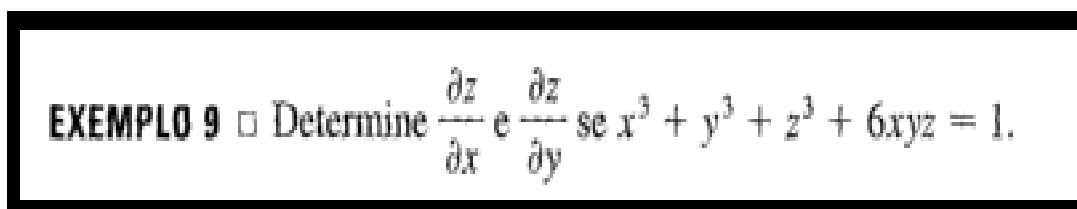


**EXEMPLO 8** □ Determine  $y'$  se  $x^3 + y^3 = 6xy$ .

Fonte: Stewart (2001, p. 922)

Na figura 3, trazemos um exemplo proposto pelo mesmo autor, envolvendo equações descritas de modo implícito, nas variáveis x, y e z. O fator agravante nesta tarefa, que preserva o mesmo estilo da anterior, diz respeito ao fato de que a representação gráfico-geométrica dos objetos envolvidos se relaciona com o  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^4$ . Neste último caso, imperceptível aos olhos humanos.

Figura 3. Exercício proposto em Stewart (2001, p. 923)

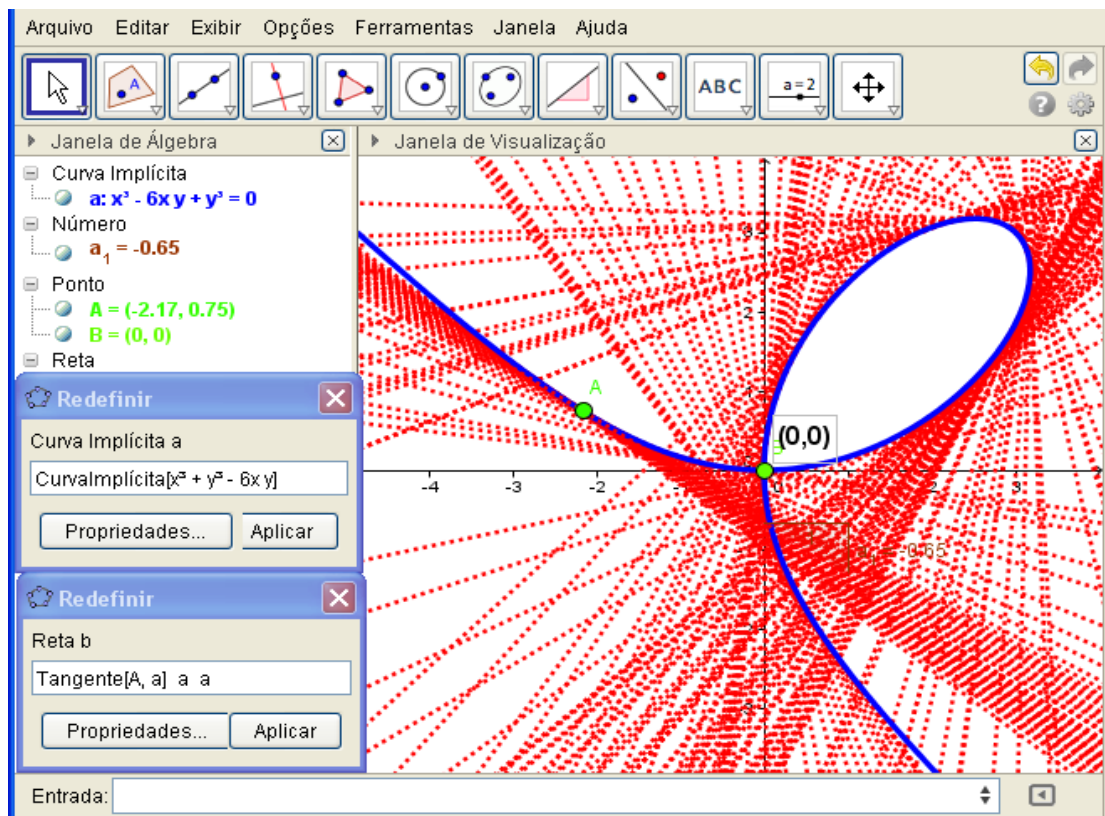


**EXEMPLO 9** □ Determine  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$  se  $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$ .

Fonte: Stewart (2001, p. 923)

Nas situações indicadas há pouco, se sobressaem às equações que descrevem relações implícitas entre as variáveis. Quer sejam com duas ou três variáveis. Para exemplificar, indicamos a equação  $x^3 + y^3 = a6xy$ , com  $a \in \mathbb{R}$ . Com o comando *CurvaImplícita* [ $f(x,y)$ ], como divisamos no canto esquerdo inferior da figura 3, descrevemos a trajetória suave (em cor azul), com um ponto de autointersecção na origem. Com o recurso do *software Geogebra*, podemos inferir o comportamento (e a existência) da reta tangente ao longo de tal trajetória. Neste sentido, ativamos a função rastro, relativo à tangente, no ponto A, curva a. Indicamos a descrição do comando na figura 4, no canto inferior, à esquerda.

**Figura 4. Descrição e exploração da representação gráfica do folium de Descartes e sua família de retas tangentes**



Fonte: Elaboração do autor

Na figura 5, trazemos um exemplo abordado em Pinto & Morgado (2009). Mais uma vez, sentimos a orientação do autor, no sentido da aplicação da técnica de derivação implícita e, em seguida, a determinação numérica da derivada  $\frac{dy}{dx}|_{x=1}$ . Nenhum expediente de natureza gráfico-visual é apontado ou aconselhado por esses autores.

**Figura 5. Exemplo proposto enfatizando um procedimento analítico**

**Exemplo A.4:** Verifique que a equação  $x^3y^3 - x - y + 1 = 0$  define  $y$  como função de  $x$  numa vizinhança de  $P_0 = (1, 1)$ , e obtenha a derivada de  $y = f(x)$  quando  $x = 1$ .

Fonte: Pinto & Morgado (2009, p. 311)

Por fim, Granville & Longley, P. F. (1961, p. 580) indicam o seguinte exemplo. A tônica geral é o apelo à algoritmização e a desconsideração das propriedades gráfico-geométricas (fig. 6). O viés indicado por esses autores na década de 60 se preserva aos nossos dias. Nas seções ulteriores, discutiremos algumas limitações do *software* *Geogebra*, com respeito a determinadas classes de equações descritas por variáveis.

Figura 6. Exemplo de cunho analítico proposto por Granville & Longley (1961)

Exemplo ilustrativo 1. Dado  $x^2y^4 + \text{sen } y = 0$ , achar  $\frac{dy}{dx}$ .

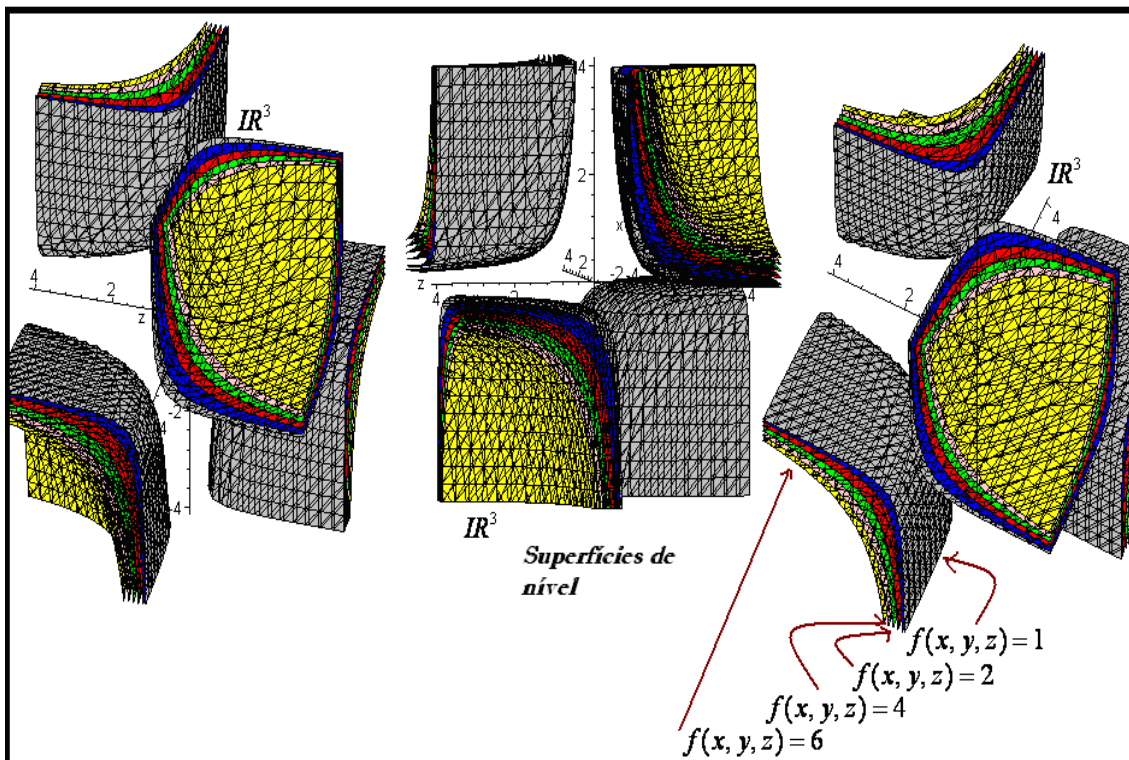
Fonte: Granville & Longley (1961)

### 3. Exploração de situações com ênfase na visualização: uso dos softwares Geogebra e CAS Maple

Podemos evidenciar as potencialidades da tecnologia, na medida em que salientamos e indicamos habilidades cognitivas relacionadas com a visualização, inviáveis de serem exploradas, quando limitamos nossa mediação didática apenas ao uso do lápis e papel (ALVES, 2011).

Por exemplo, quando consideramos a função  $f(x, y, z) = w$ , cujo gráfico é determinado pelos pontos  $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ . Portanto, não podemos visualizar seu gráfico, entretanto, conseguimos exibir, por intermédio do CAS Maple, suas superfícies de nível. Neste caso, indicamos na figura abaixo, as superfícies de nível descritas por  $f(x, y, z) = x^3x^2z + xy^2z^3 + xz = k$ , com  $k \in \{1, 2, 4, 6\}$  (escolhidos de modo arbitrário).

Figura 7. Descrição gráfico-geométrica de superfícies de nível com o auxílio computacional

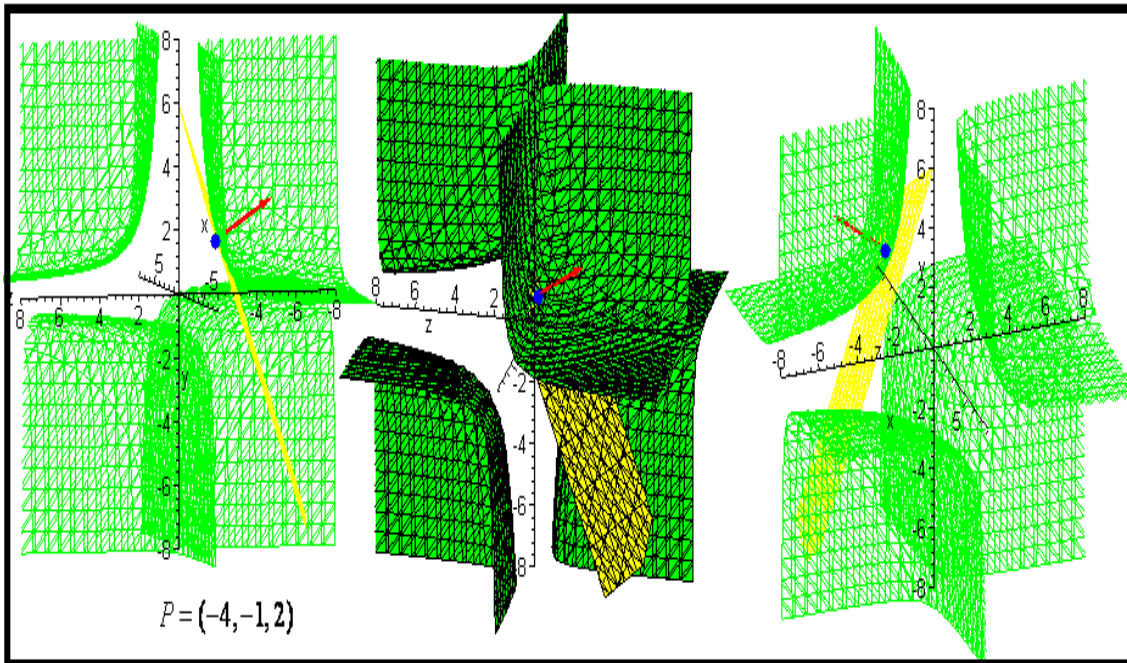


Fonte: Elaboração do autor

Não obstante, nas figura 7 e 8, proporcionamos ao aluno uma visão global dos elementos. Nesse momento, com base na figura 8, indicamos o seguinte ponto

$P = (-4, -1, 2)$  pertencente à superfície de nível (em cor verde) indica por  $f(x, y, z) = x^3 x^2 z + xy^2 z^3 + xz = 4$ .

**Figura 8. Descrição de três possibilidades de visualização do vetor gradiente e um plano que tangencia uma superfície de nível no espaço**



Fonte: Elaboração do autor

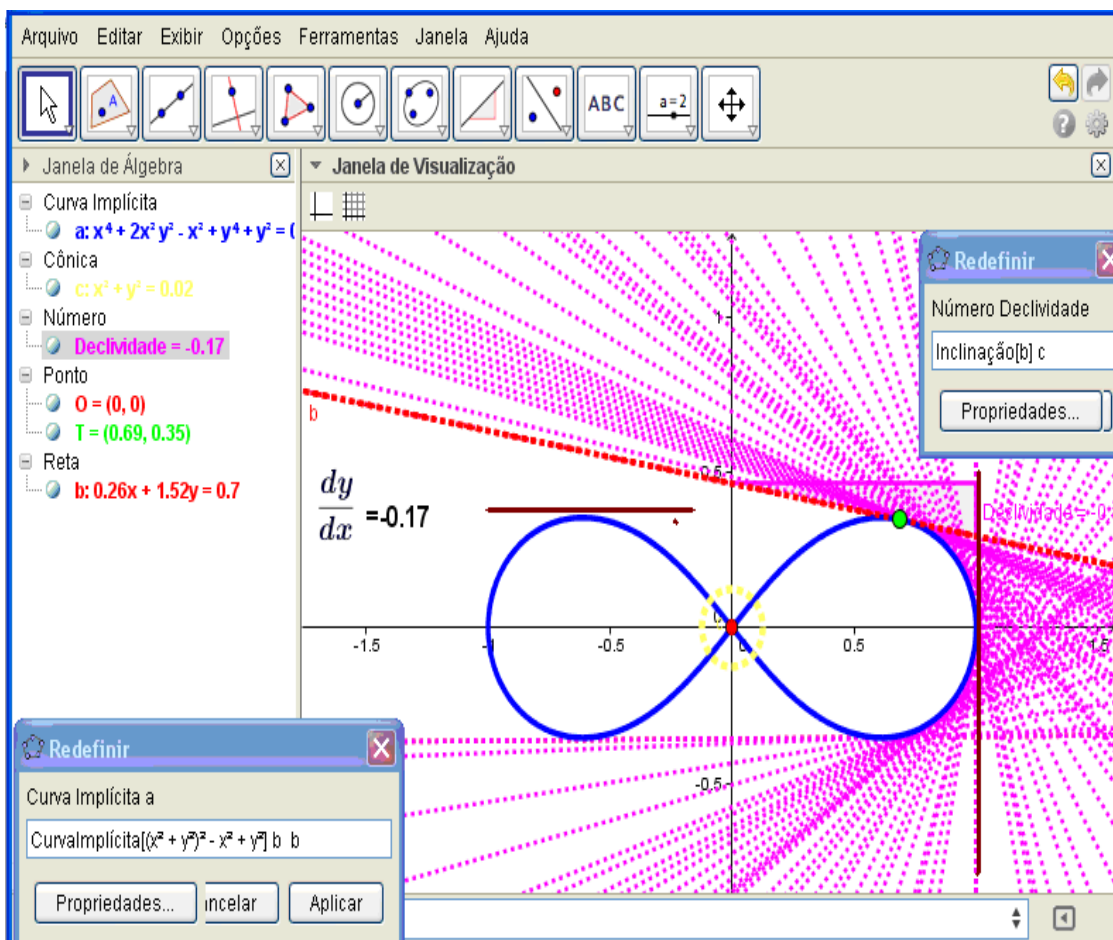
Neste sentido, nas vizinhanças do ponto  $P = (-4, -1, 2)$  indicado, exibimos um plano (em amarelo) e um vetor (em cor vermelha). Reparemos que, de acordo com o exemplo (que exibimos na figura 3), não sabemos, de modo tácito, a região do espaço, na qual, equações descritas de modo implícito, do tipo  $x^3 + y^3 + z^3 = 3z$  (GUIDORIZZI, 2010, p. 253) ou  $x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3 y = 9$  (PINTO & MORGADO, 2009, p. 315), ou ainda  $x + y^3 - 3xz = 0$  (LEITHOLD, 1990, p. 1002) definem, localmente, uma função.

Por outro lado, em relação à condição  $\nabla F(x_0, y_0) = (g'(x_0), -1)$  que descrevemos em (\*), registramos que a propriedade relatada em (\*\*) (ortogonalidade entre o vetor gradiente e o vetor velocidade) continua sendo válida quando acrescentamos uma variável. Com efeito, na figura 8, divisamos uma superfície de nível descrita, de modo implícito, pela equação  $x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3 y = 9$  e, indicamos a posição do vetor gradiente (em cor azul) do ponto  $P = (-4, -1, 2)$ , relativo à função  $F(x, y, z) = x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3 y - 9 = 0$ . E, com base na descrição gráfico-geométrica proporcionada pelo *CAS Maple*, podemos depreender informalmente, com arrimo na visualização, que tal vetor é ortogonal a qualquer vetor do plano tangente em P (de cor amarela). Certamente que tal conjectura exige uma verificação formal, uma vez que, a

visualização não demonstrada. Não obstante, a visualização fornece indícios para uma mobilização preliminar apoiada em um entendimento tácito de uma situação.

Cabe salientar ainda que o *Software Geogebra* possui certas limitações no tocante ao cálculo de manipulação algébrica de equações implícitas mais gerais. Todavia, no caso de equações polinomiais em duas variáveis, conferimos seu bom desempenho. Consideremos a seguinte equação  $(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$  (*lemniscata*). Com uma intenção didática de explorar a complementaridade dos *softwares*, trazemos também, na figura 9, a descrição do gráfico da função  $z = f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2$ , cujo gráfico pode ser observado. Na trajetória, que se assemelha a um “oito”, podemos instigar o estudante à formulação de conjecturas (quanto ao comportamento numérico de  $dy/dx$ ), quanto à localização/identificação de trechos que correspondem ao gráfico de função.

**Figura 9. Descrição do comportamento gráfico-geométrico da equação descrita de modo implícito**



Fonte: Elaboração do autor

O aluno precisa perceber que a equação  $(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$  representa a interseção do gráfico da função  $z = f(x, y)$ , com o plano (em cor amarela)  $z = 0$  (ver figura 10).

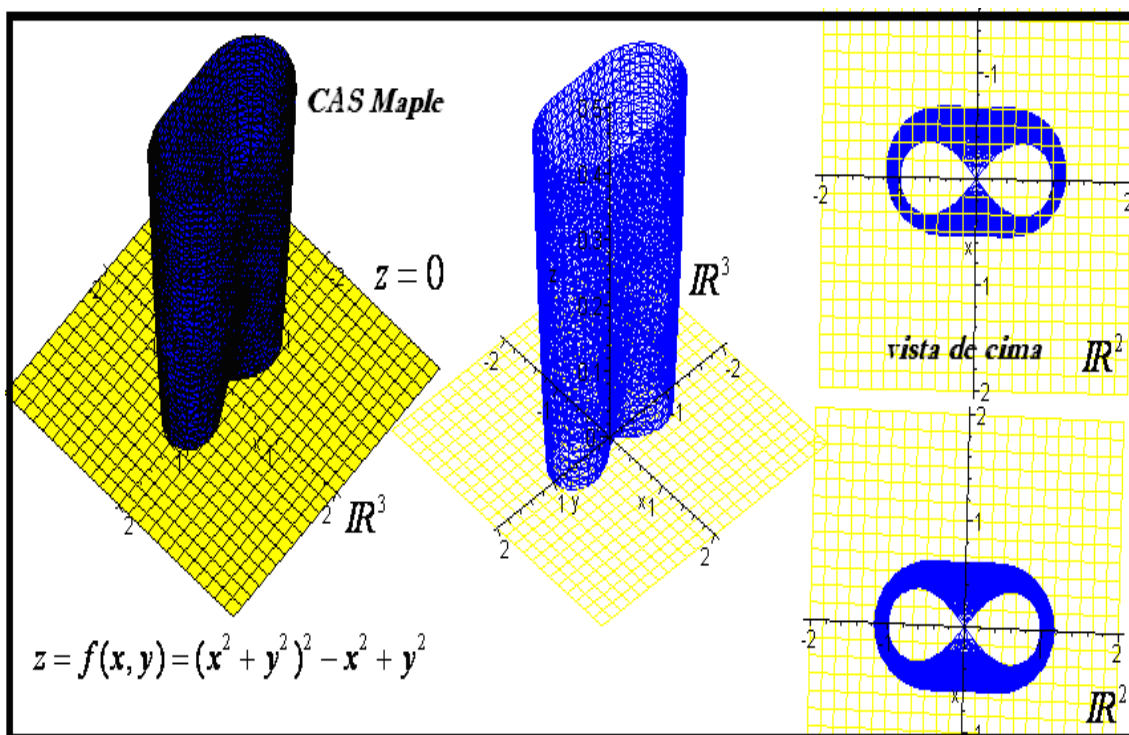
Vale reparar que, relativo ao uso do *software Geogebra*, na figura 9, o aprendiz terá



oportunidade, a partir da manipulação e dinamicidade da construção que indicamos acima, de adquirir o entendimento da localização dos pontos, pertencentes à trajetória abaixo (em cor azul), sobre os quais, registramos uma tangente paralela ao eixo das ordenadas e outra reta paralela ao eixo das abcissas (ver fig. 9).

Na figura 10, exibimos o comportamento da região do espaço  $\mathbb{R}^3$ , na qual, temos define o gráfico da função  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2$ . O aluno deve compreender que a curva na figura 9, representa a intersecção de dois objetos. Neste cenário, conduzimos o aluno a realizar as ligações conceituais entre os objetos exibidos no  $\mathbb{R}^2$  e no  $\mathbb{R}^3$  (relacionando as figuras 9 e 10).

**Figura 10. Descrição e comparação dos gráficos produzidos pelo software CAS Maple**

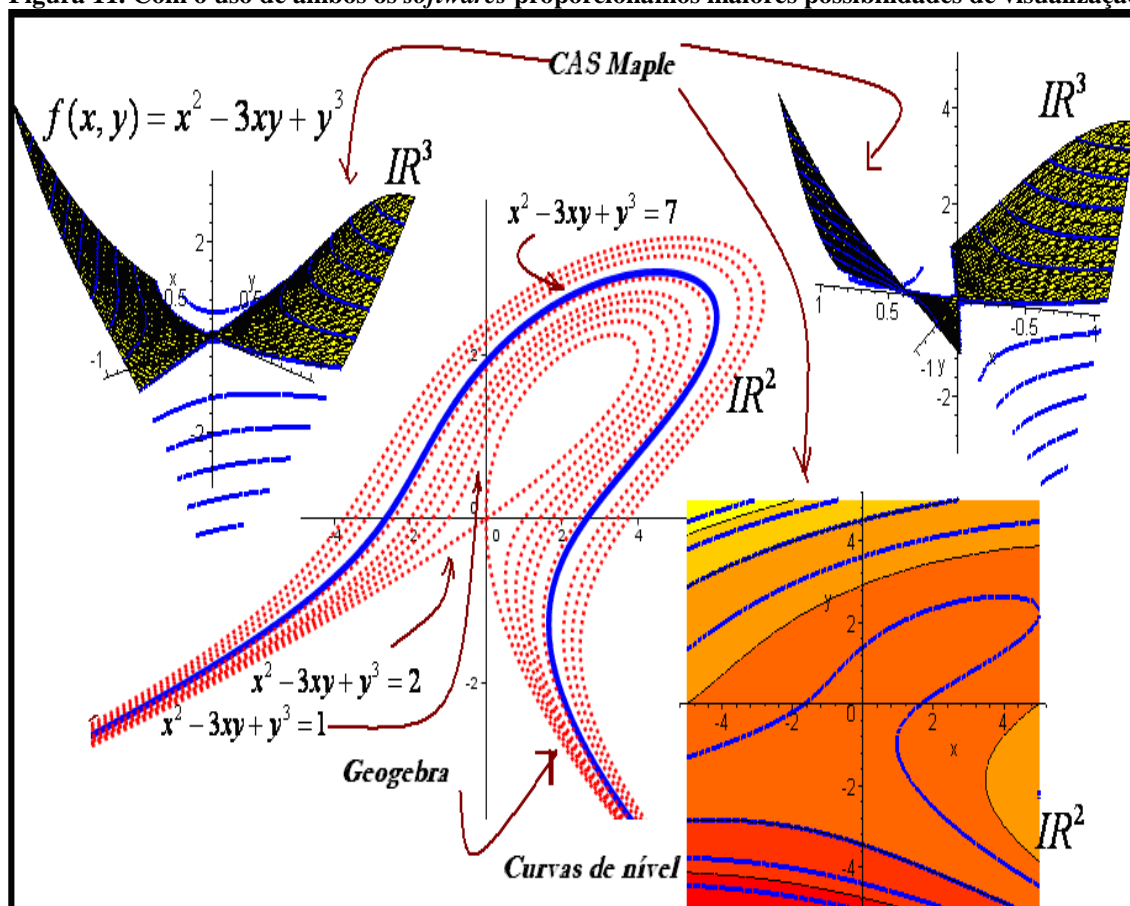


Fonte: Elaboração do autor

Vejamos, por exemplo, o caso da curva  $x^2 - 3xy + y^3 = 7$ . Na figura 11, no centro, apresentamos uma família de curvas do tipo  $x^2 - 3xy + y^3 = k$  e, para efeito didático, colocamos em destaque, a curva  $x^2 - 3xy + y^3 = 7$  (em cor azul). Ademais, podemos conduzir o aluno ao entendimento, relativo ao qual, a função  $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^3$ , que possui seu gráfico no  $\mathbb{R}^3$ , admite várias curvas de nível (figura 11, canto esquerdo superior).

O cenário que elaboramos na figura 11 foi estruturado com vistas ao entendimento, por parte do aluno, compreender as variáveis qualitativas em jogo. Nesse cenário, exploramos uma visão de complementaridade de ambos os *softwares*.

**Figura 11.** Com o uso de ambos os *softwares* proporcionamos maiores possibilidades de visualização



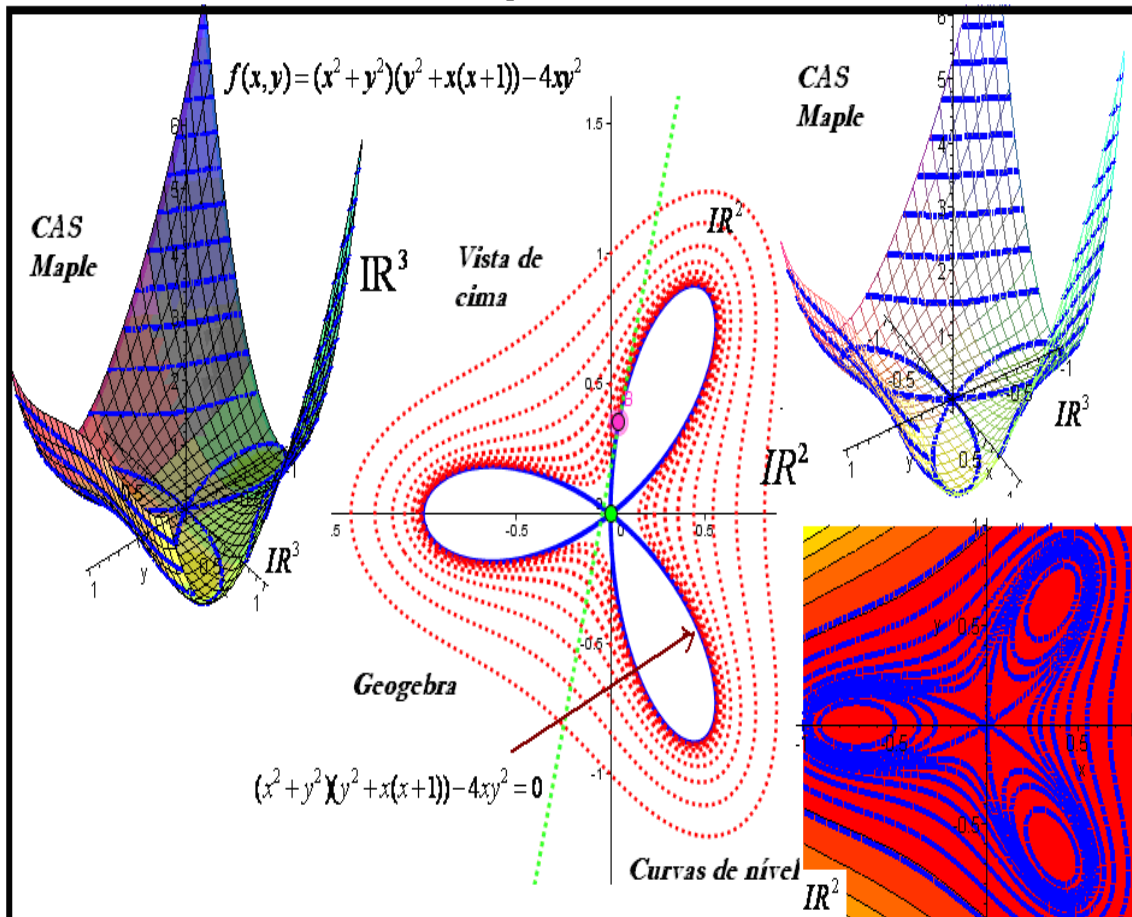
Fonte: Elaboração do autor

Vejamos mais um exemplo, semelhante ao caso anterior, no qual, proporcionamos ao aluno, a percepção de uma perfeita ligação conceitual e entendimento do comportamento geométrico, quando direcionamos nossa atenção aos espaços  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  (ALVES, 2011, p. 233). Daí, consideremos a função  $f(x, y) = (x^2 + y^2)(y^2 + x(x+1)) - 4xy^2$  que admite seu gráfico, descrito por  $(x, y, f(x, y))$ , numa região do espaço  $\mathbb{R}^3$ .

Com o *CAS Maple*, descrevemos as curvas de nível associadas à função acima, tanto no plano como no espaço. A descrição das curvas de nível com o *Geogebra* se restringe às equações polinomiais descritas em duas variáveis (ALVES, 2014). Todavia, com base na figura 12, no centro, elaboramos uma construção dinâmica com o *Geogebra* e, por essa via, podemos manipular o gráfico e identificar regiões topológicas, na quais, a reta que tangencia a curva  $F(x, y) = (x^2 + y^2)(y^2 + x(x+1)) - 4xy^2 = 0$ , é paralela ao eixo das ordenadas. Por exemplo, numa vizinhança da origem  $(0, 0)$ , o aprendiz deve ser

conduzido ao entendimento da impossibilidade de existir uma função do tipo  $y = g(x)$ , que satisfaça a condição  $F(x, g(x)) = 0$ .

Figura 12. Descrição das relações permitidas por intermédio do uso dos *softwares*, num caráter de complementaridade



Fonte: Elaboração do autor

Para concluir, vamos considerar o seguinte sistema (I)  $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z = 4 \\ x^2 + y + z = 3 \end{cases}$ , proposto em

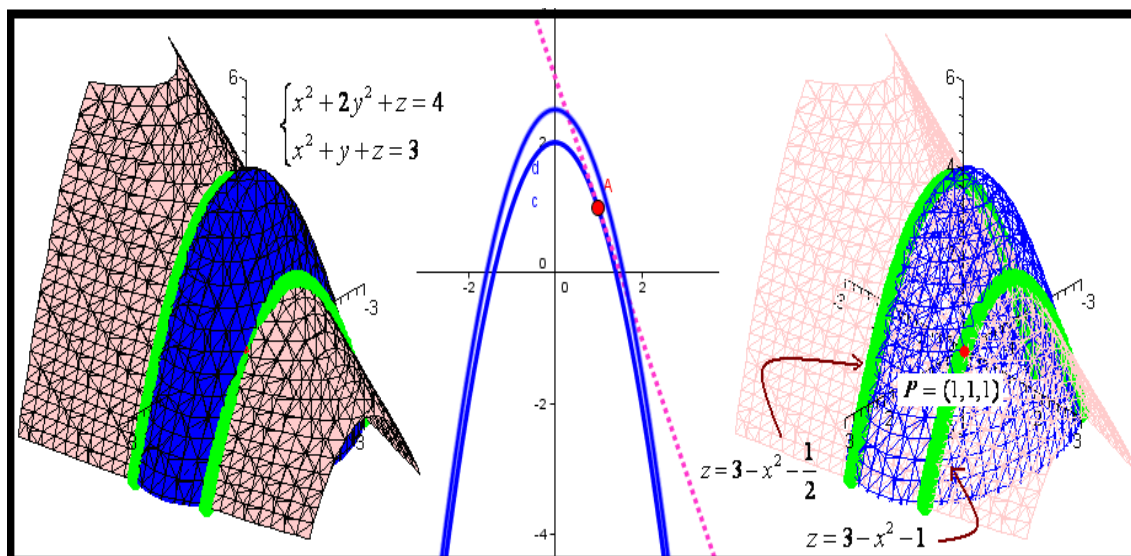
Guidorizzi (2010, p. 255). Com vistas à determinação do conjunto (caso exista!) de soluções do mesmo, devemos impor a condição

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - 2y^2 \\ z = 3 - x^2 - y \end{cases} \therefore 4 - x^2 - 2y^2 = 3 - x^2 - y \leftrightarrow 2y^2 - y = 1.$$

Ora, o autor explica que a equação  $2y^2 - y = 1$ , que descreve a solução do sistema acima, não depende da variável 'x'. Por outro lado, correspondentemente aos valores das incógnitas  $y = 1$  e  $y = -\frac{1}{2}$ , podemos depreender, com arrimo na visualização, a localização da região que exibimos na figura 13. Indicamos duas curvas parábolas, com

concavidade voltada para baixo. Podemos executar sua análise com o *Geogebra* no plano.

**Figura 13. Visualização da região do espaço  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  que compreende a solução do sistema I**



Fonte: Elaboração do autor

Por fim, vale sublinhar as considerações de Guidorizzi (2010, p. 255-256), quando declara que “y não depende de x”. Além disso, com os valores das incógnitas indicados há pouco, escrevemos duas equações:  $z = 3 - x^2 - 1$  e  $z = 3 - x^2 - \frac{1}{2}$  (em planos paralelos). O cenário que indicamos na figura 13, conduz o aprendiz à compreensão, segunda a qual, a parábola de interesse pertence a um plano paralelo ao plano xz. Um pouco mais adiante, Guidorizzi acrescenta: “sugerimos ao leitor desenhar o gráfico da curva”. Entretanto, quando apoiamos nossa investigação na inspeção dos caracteres gráfico-geométricos, depreendemos, a partir de nossa apreensão perceptual, que apenas a curva  $z = 3 - x^2 - 1$  proporciona o alcance e elaboração de alguma conclusão.

Nosso ultimo exemplo, envolvendo essa categoria de situação-problema, é descrito pelo

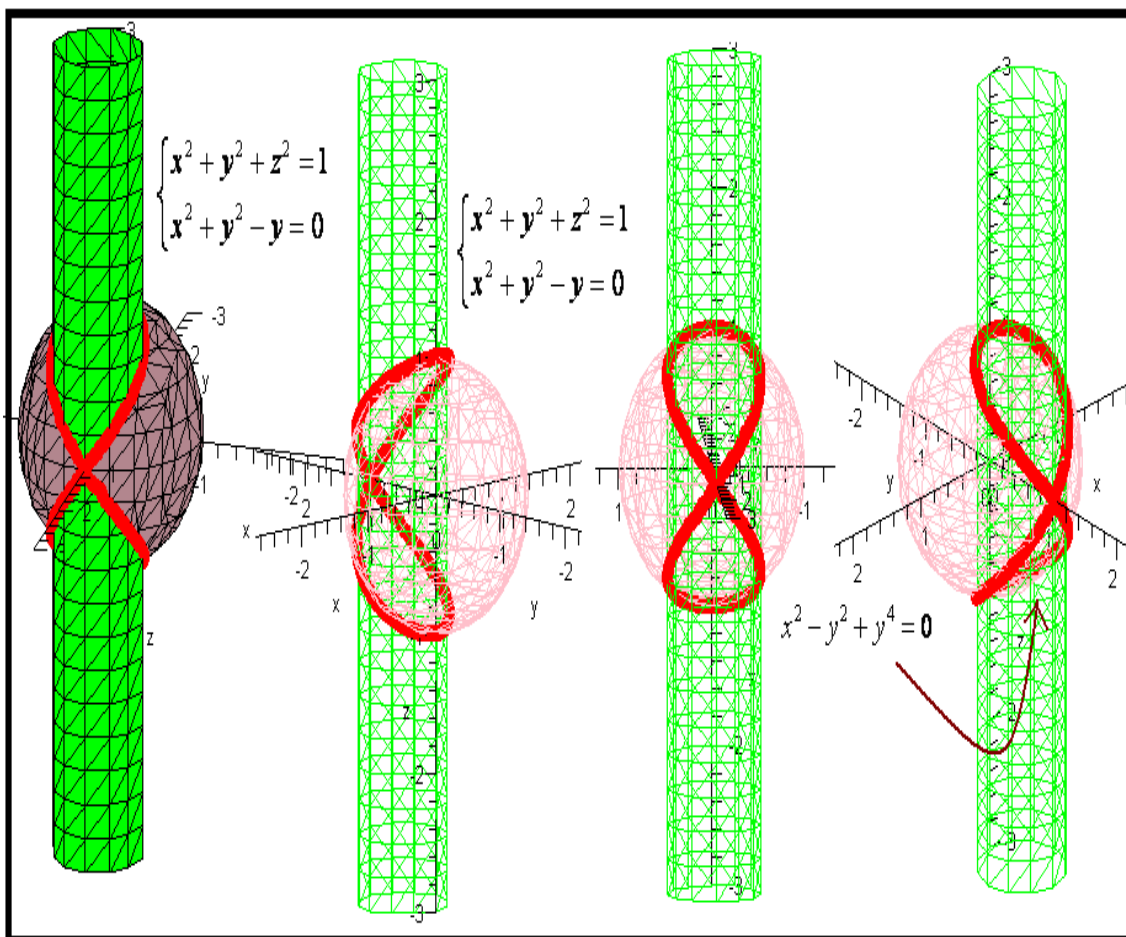
sistema (II)  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - y = 0 \end{cases}$ . O modelo de abordagem padrão, nesse caso, orienta o

aluno à determinação de vários elementos, restrito ao quadro analítico. Quando buscamos determinar o conjunto solução do sistema (II) (ver fig. 14), devemos encontrar uma equação descrita de modo implícito que, do ponto de vista geométrico, é a curva indicada (em cor vermelho) na figura 14. .

O problema é antever, a região (ou porção) do gráfico determinado por tal equação, que diz respeito ao gráfico de uma função. Assinalamos, entretanto, que a região de interseção entre uma esfera e um cilindro deslocado da origem proporcionada pelo CAS

Maple, não permite a exploração das propriedades topológicas da região (curva de cor vermelha), dado o caráter estático do objeto produzido por esse *software*.

**Figura 14. Descrição gráfico-geométrica da equação implícita que descreve a solução do sistema II**

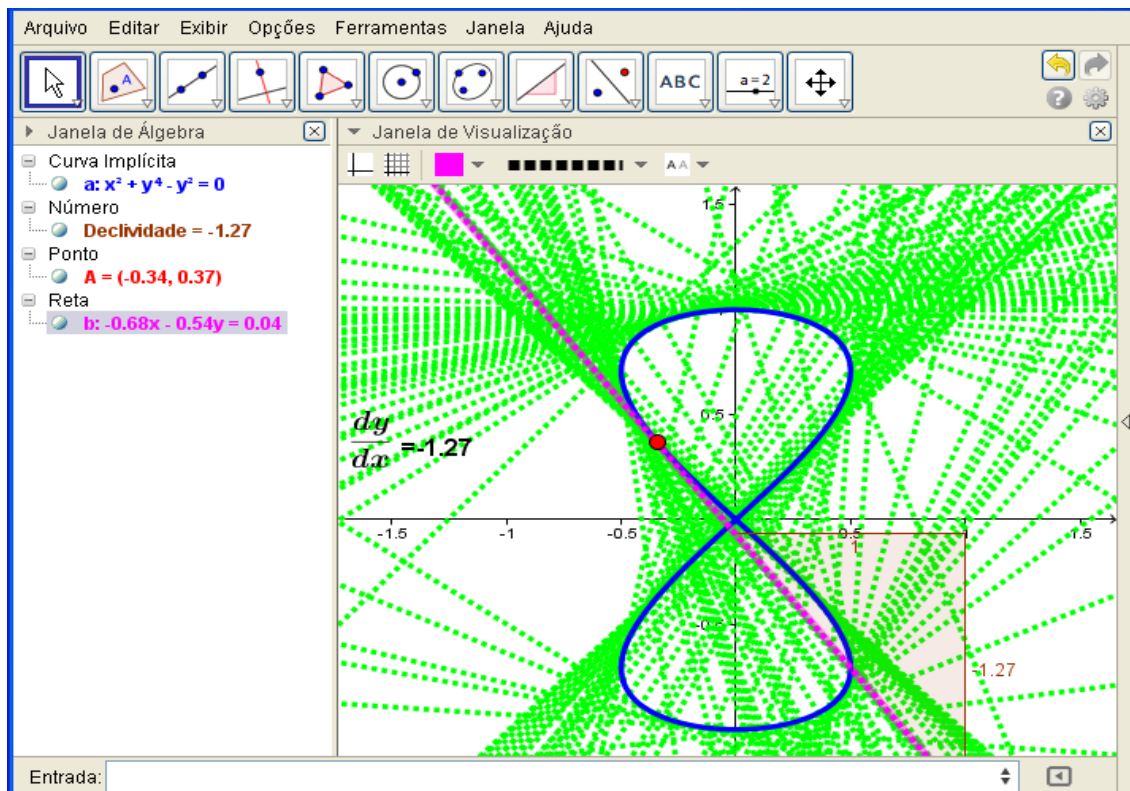


Fonte: Elaboração do autor

Dando prosseguimento à nossa análise e indicação dos elementos que podem ser contemplados numa abordagem didática que evita o emprego, de modo precipitado, do aparato analítico, conduzimos o aluno, em observar as relações e propriedades comuns entre a curva (de cor azul) da figura 13, com a curva (de cor vermelha) que apresentamos na figura 14.

Quando passamos, então, à utilização, em caráter complementar, do *software Geogebra*, registramos um ganho no que concerne à dinamicidade e manipulação da construção que mostramos na figura 15. O caráter qualitativo aqui a ser destacado diz respeito à suavidade de ambas as trajetórias, entretanto, o aluno deve perceber que a seguinte descrição analítica por  $x^2 - y^2 + y^4 = 0$ , representa uma restrição (curva de nível) correspondente à função  $z = f(x, y) = x^2 - y^2 + y^4$  e se assemelha à curva (em forma de “oito”) que indicamos na construção da figura 14.

Figura 15. Conjunto solução fornecido com o software Geogebra



Fonte: Elaboração do autor

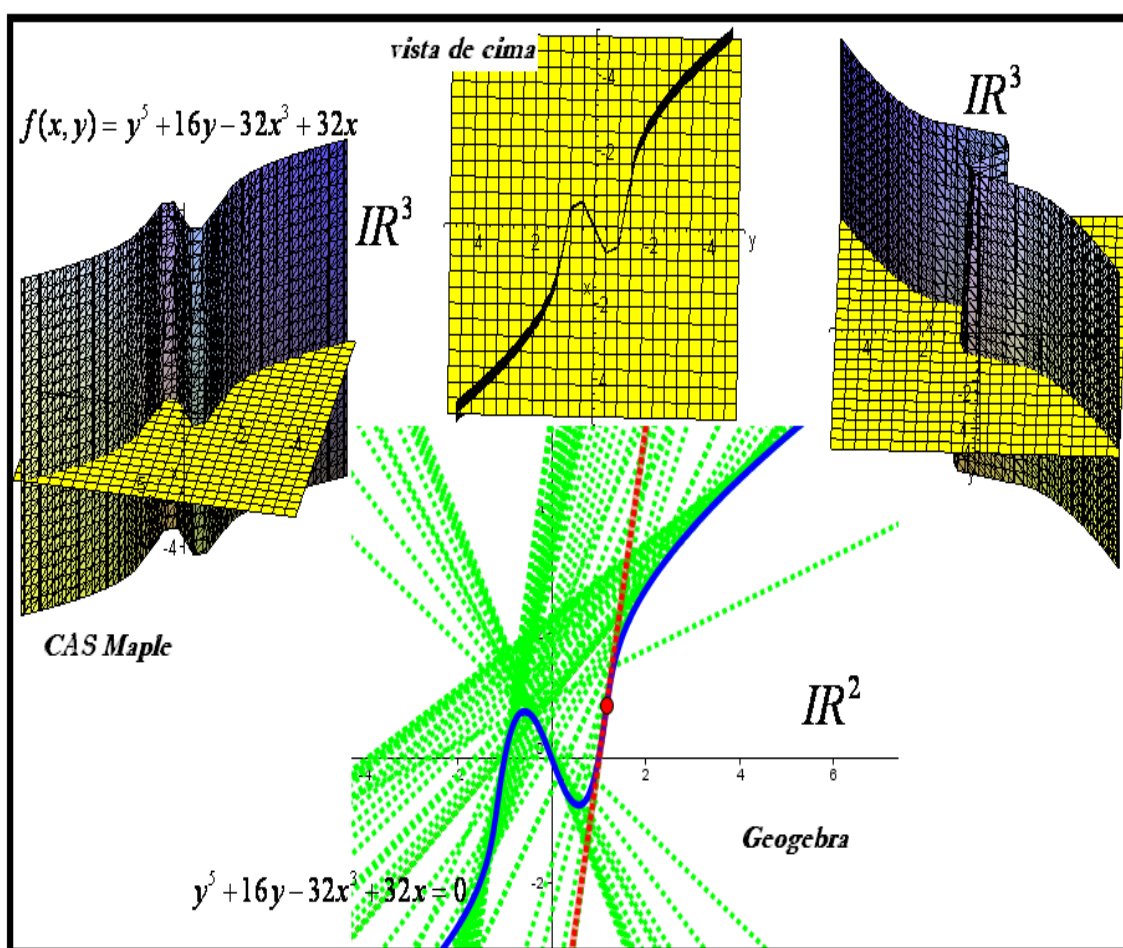
Finalizamos esta seção, acentuando a importância do entendimento, por parte do estudante, da passagem do ambiente do plano, no qual se realiza do estudo do Cálculo em Uma Variável Real, para o espaço  $IR^3$ , no qual temos a possibilidade de perceber, a partir da visualização, propriedades tridimensionais dos objetos (ALVES, 2013). O relevante, do ponto de vista de uma *heurística*<sup>3</sup> (POLYA, 1973, p. 113) para a abordagem de certos problemas que se enquadram na classe de equações descritas de modo implícito, diz respeito às propriedades invariantes e propriedades que se modificam, ou não se preservam, tendo em vista o aumento da dimensão. Essas e outras qualidades são observadas no contexto da resolução de problemas (POLYA, 1977; WICKELGREEN, 1974) e sugeridas no ensino que deparamos no *locus* acadêmico (ARTIGUE, 1995, p. 104-105).

Para ilustrar nosso último comentário, apresentamos, na figura 16, um cenário para a visualização do comportamento de gráficos, produzidos por ambos os softwares. Exemplificamos a trajetória no plano, com origem de um exemplo discutido por Krantz & Parks (2002, p. 2). Neste exemplo, os autores alertam que nem sempre, equações

<sup>3</sup> Polya (1973, p. 112) menciona heurística ou heurética (ars inveniendi) pertencente a um ramo de estudo não muito claro. Seu objetivo, segundo ele, é estudar os métodos e regras de descoberta e invenção.

descritas de modo implícito (curvas), gozam de propriedades de uma função. Outrossim, os estudantes carregam a concepção, segundo a qual, toda função, pode ser expressa, em termos de variáveis independentes e dependentes (ARTIGUE, 1995). O caso discutido por Krantz & Parks, envolve a equação implícita  $y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0$ . O aluno, na condição de interesse em detectar regiões em que contamos com o gráfico de uma função, deve depreender que a curva (em azul, no centro), da figura 16, para toda vizinhança que escolhermos, centrada num ponto da curva, designa o gráfico de uma função, embora, não possamos escrever, de modo explícito as condições  $y = f(x)$  ou  $x = g(y)$ , em termos explícitos.

Figura 16. Exemplo fornecido por Krantz & Parks (2002, p. 2)



Fonte: Elaboração do autor

#### 4. Considerações e recomendações

Equações do tipo  $f(x, y) = k$  (curvas de nível) e  $f(x, y, z) = k$  (superfícies de nível), podem ou não, do ponto de vista local, definir o gráfico de uma função. Neste escrito, damos ênfase em certas possibilidades de se abordar tarefas no contexto do Cálculo, tradicionalmente presentes nos compêndios especializados de Cálculo, que evidenciam

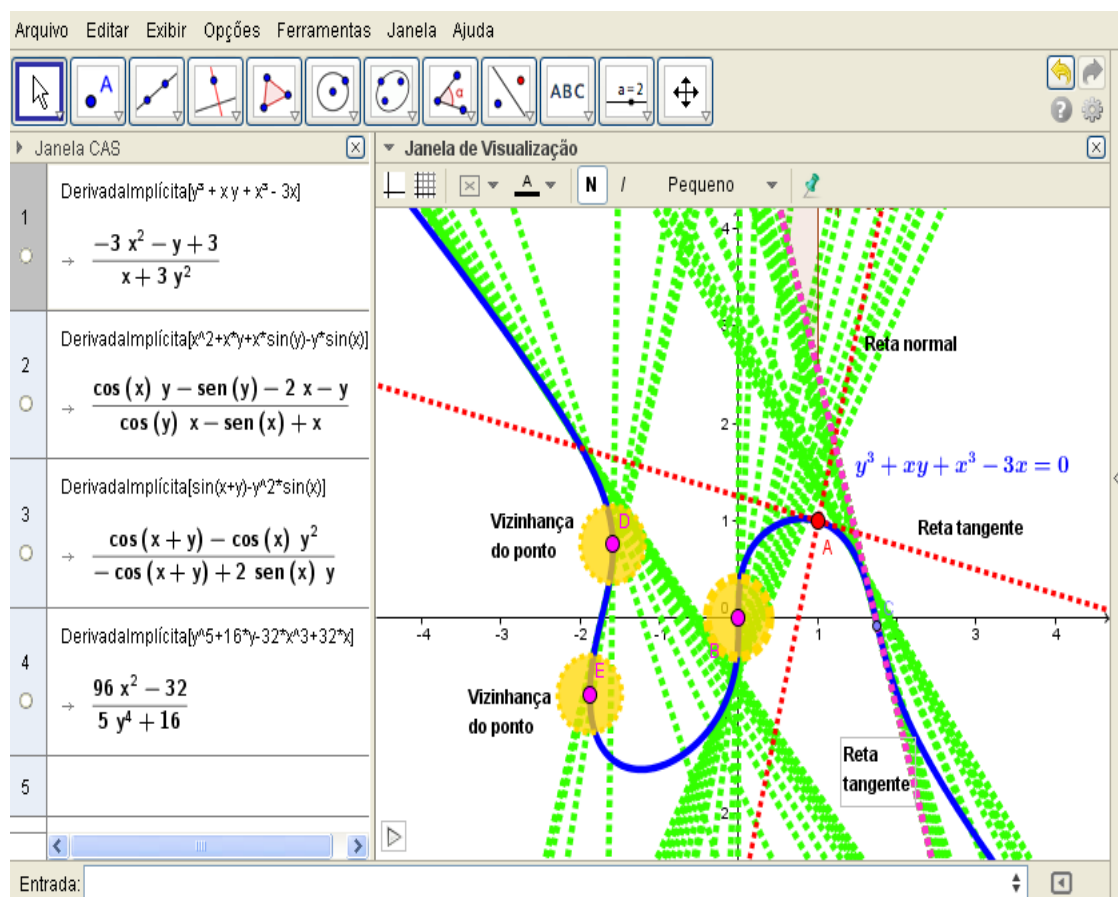
o caráter algorítmico das habilidades requeridas ao aluno. Neste sentido, os autores de livros didáticos, costumam em fornecer equações do tipo  $x^2 + xy + x \cdot \text{sen}(y) = y \cdot \text{sen}(x)$  ou  $\text{sen}(x + y) = y^2 \cdot \cos(x)$ , e a atividade do aluno se encerra, na medida em que fornece

respostas do tipo  $\frac{dy}{dx} = \frac{y \cdot \cos(x) - 2x - y - \text{sen}(y)}{x + x \cdot \cos(y) - \text{sen}(x)}$  ou

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \cdot \text{sen}(x) + \cos(x + y)}{2y \cdot \cos(x) - \cos(x + y)}$  (o que pode ser executado também pelo pacote de

comandos algébricos de versões recentes do *software Geogebra*, como exibimos na figura 17, canto esquerdo). Fato que não promove, necessariamente, um maior entendimento conceitual.

**Figura 17. Reestruturação de tarefa proposta no Cálculo em Uma Variável Real**



Fonte: Elaboração do autor

Por outro lado, apoiando nossa mediação na tecnologia, podemos descrever um cenário de aprendizagem para os estudantes, que envolve a produção de conjecturas, com posterior verificação formal de cada ilação (ALVES, 2014). Pela via que sugerimos, a atividade investigativa do aprendiz evolui, gradativamente, com a descoberta e possibilidades de discussão em grupo, dos aspectos gráfico-visuais percebidos e apreendidos pelos gráficos produzidos por ambos os *softwares* (ver figura 17).



Vale acentuar que o *software Geogebra* permite a manipulação, variação de elementos matemáticos em cada construção, todavia, exhibe apenas uma classe restrita de equações descritas em duas variáveis (somente polinomiais do tipo  $f(x, y) = 0$ ). Por outro lado, o *CAS Maple*, embora exija o domínio de uma sintaxe própria, produz e permite a análise gráfico-visual de regiões do espaço  $IR^3$ , que encerram complexidade, e que, quando restringimos à busca ao lápis e papel, a tarefa do esboço gráfico de algumas regiões, como as que abordamos nas seções anteriores, se mostra inexecutável (ALVES, 2013a, 2013b, 2013c).

Vale assinalar a reflexão de Polya quando acentua que “textos matemáticos tencionam apresentar problemas matemáticos bem formulados. Mas se o objetivo de tal problema é a determinação de algo desconhecido, o livro texto deveria estabelecer, com ambigüidade, os dados e as condições pelas quais a incógnita é determinada. (POLYA, 1977, p. 164). Ora, os trechos de livros que damos ênfase aqui, propõem uma abordagem que sugere exatamente a direção questionada por Polya. Ou, melhor dizendo, problemas bem formulados e estruturados a partir de enunciados que permitem uma única fonte de obtenção de dados, um único modo de iniciar sua solução, além de um emprego precoce de uma linguagem formalizada (ARTIGUE, 1995, p. 104).

Wickelgreen (1974, p. 184) acentua que “o passo mais básico que orienta a atividade de resolução de problemas é constituída pela apresentação da informação em dados simbólicos e em formas de diagramas.”. Essas últimas, como tentamos patentear ao decorrer do texto, proporcionam alterações na mediação do professor, na medida em que, ao decorrer do tempo didático, registremos o espaço adequado para a formulação de conjecturas, originadas na visualização e percepção das propriedades qualitativas das formas gráfico-geométricas (ALVES, 2011; 2014).

Por fim, acentuamos, ao longo do texto, que a decisão ou determinação de propriedades locais, que conferem a uma equação (curva de nível ou superfície de nível) não constitui um problema de fácil solução (BORTOLOSSI, 2009). Ademais, a análise completa envolve e o uso do Teorema da Função Implícita - TFI. Não obstante, tal temática, que envolve a aplicação do TFI, será objeto de nossa discussão em trabalhos ulteriores envolvendo a temática e a preocupação didático-metodológica com a transição interna do Cálculo em Uma Variável para o Cálculo a Várias Variáveis (ALVES, 2011).

## 5. REFERÊNCIAS

- Alves, F. R. V. (2014). Visualizing with dynamic system Geogebra: the Fundamental Theorem of Algebra - TFA and its applications. *GGIJRO - Geogebra International Journal of Romania*, p. 39-50. Available in: <http://ggijro1.files.wordpress.com/2014/01/art48.pdf>
- Alves, F. R. V. (2013a). Visualizing in Polar Coordinates with Geogebra. *GGIJRO - Geogebra International Journal of Romania*, p. 21-30. Disponível em: <http://ggijro.wordpress.com/issues/vol-3-no-1/>
- Alves, F. R. V. (2013b). Exploring L'Hospital Rule with the Geogebra. *GGIJRO - Geogebra International Journal of Romania*, p. 15-20. Disponível em: <http://ggijro.wordpress.com/issues/vol-3-no-1/>
- Alves, F. R. V. (2013c). Transição Interna do Cálculo: uma discussão do uso do Geogebra no contexto do Cálculo a Várias Variáveis. In: *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*. v. 1, nº 2, p. 51-19.
- Alves, F. R. V. (2011). *Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis*. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 353p. Disponível em: [http://www.teses.ufc.br/tde\\_biblioteca/login.php](http://www.teses.ufc.br/tde_biblioteca/login.php)
- Alves, F. R. V. & Borges Neto, Hermínio. (2011). Transição interna do Cálculo em uma variável para o Cálculo a Várias Variáveis: uma análise de livros. In: *Educação Matemática e Pesquisa*. v. 13, nº 3, p. 597-626. Acessado em: 2 de fev. 2013. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/view/327>
- Alves, F. R. V.; Borges Neto, Hermínio & Ingar, Kátia. V. (2013). Transición interna del Cálculo: una propuesta para a identificación de elementos de ruptura y de transición. In: *Revista Premissa*. v. 55, p. 1-13. Disponível em: <http://www.soarem.org.ar/revistapremisa.htm>.
- Artigue, Michelle. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos e didáticos. In: Artigue, M.; Douady, R. & Gomez, L. (Ed.) *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*. México: Grupo Editorial. p. 97-140.
- Bortolossi, Humberto. (2009). *Cálculo Diferencial a Várias Variáveis: uma introdução à Teoria da Otimização*. Rio de Janeiro: Editora PUC/RJ. 3ª edição. Coleção Matmídia.
- Granville, W. A & Longley, P. F. (1961). *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral*.
- Guidorizzi, Hamilton. (2010). *Um curso de Cálculo*. v. 2, São Paulo: LTC.
- Krantz, Steven. G. & Parks, Harold. R. (2002). *The implicit functions theorem: history, theory and application*. Boston: Birkhäuser.
- Leithold, Louis. (1990). *O Cálculo com Geometria Analítica*. 3ª edição, v. 2. São Paulo: HARBRA.
- Lima, Elon, L. (2009). *Elementos de Análise*. v. 2, Rio de Janeiro: SBM. 544f.
- Pinto, Diomara & Morgado, M. Cândida. F. (2009). *Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis*. 3ª edição. Rio de Janeiro: Editora UFRJ.
- Polya, George. (1973). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Second Edition. Princeton: Princeton University Press. 272f.

- Polya, George. (1977). *Mathematical methods in sciences*. New York: The Mathematical Association of America.
- Simmons, George. F. (1988). *Cálculo com Geometria Analítica*. v. 2. São Paulo: Makron Books. 846f.
- Scarpello, Giovanni. M. (2002). A Historical Outline of the Theorem of Implicit Functions. In: *Divulgaciones Matematicas*. v. 10, nº 2. p. 171-180.
- Stewart, J. (2004). *Cálculo*, v. 1 e v. 2, 4ª edição, São Paulo: Pioneira Thompson Learning.
- Wickelgreen, Wayne, A. (1974). *How to solve problems!* San Francisco: Freenman and Company. 275f.