

# O Método das Tangentes de Newton: uma abordagem que associa história e tecnologia com o uso do software GeoGebra

The Newton's Tangents Method: an approach combining history and technology using the software GeoGebra

---

NAÍMA SOLTAU FERRÃO<sup>1</sup>

MARCIO VIEIRA DE ALMEIDA<sup>2</sup>

SILVIO DE BRITO MARCELINO<sup>3</sup>

## Resumo

*Apresentamos o Método das Tangentes de Newton, empregado na resolução do problema geral da determinação da tangente a uma curva num ponto dado, com apoio do software GeoGebra. Acompanhando os passos de Newton, mostraremos que o Método das Tangentes, aliado à história de sua criação, pode constituir-se numa estratégia de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial em cursos universitários.*

**Palavras-chave:** História da matemática; Método das Tangentes de Newton; software GeoGebra.

## Abstract

*We show Newton's Tangents Method used to solving the general problem of finding the tangent of a curve at a given point, with the software GeoGebra. Following the Newton's algorithm, we figure out that the tangents method combined with the history of its creation may constitute a strategy of teaching and learning of differential calculus in college.*

**Keywords:** History of Mathematics; Newton's Tangents Method; software GeoGebra.

## Introdução

No ensino superior, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral costuma apresentar uma abordagem tradicional baseada em um conjunto de procedimentos didáticos repetitivos que, via de regra, não possui nenhum significado para o aprendiz. Gravina e Santarosa (1999, p.79) argumentam que historicamente os sistemas de representação do conhecimento matemático tem caráter estático e que, em certos casos “(...) *dificultam a construção do significado, e o significante passa a ser um conjunto de símbolos e palavras ou desenhos a ser memorizado*”.

---

<sup>1</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP – [nferrao@gmail.com](mailto:nferrao@gmail.com)

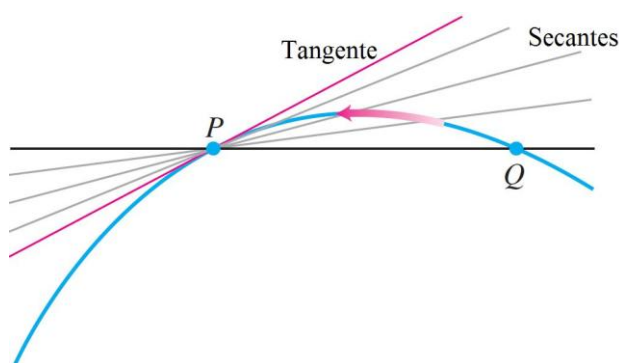
<sup>2</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP – [marcioalmeidasp@gmail.com](mailto:marcioalmeidasp@gmail.com)

<sup>3</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP – [silviodebrito@msn.com](mailto:silviodebrito@msn.com)

Observamos também que muitos pesquisadores apontam a História da Matemática como recurso didático para agregar significado e contexto ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática, dentre os quais podemos citar Byers (1982), D'Ambrosio (1996), Miguel e Miorin (2004), Barufi e Brolezzi (2007), Baroni e Bianchi (2007), entre outros.

O caráter estático ao qual se referem Gravina e Santarosa (1999) é facilmente exemplificado nos livros didáticos usados para o ensino de Cálculo em cursos superiores, dentre os quais citamos Anton (2000), Fleming e Gonçalves (2006), Stewart (2009), Thomas (2008) entre outros.

A necessidade de expressar movimento é perceptível no cuidado e na preocupação dos autores de livros e materiais didáticos, ao incluir ilustrações que tendem a recriar, no papel, a ideia de movimento. Thomas (2008, p.130), por exemplo, argumenta que para definir tangência em curvas precisamos “de um método dinâmico, que leve em conta o comportamento das secantes que passam por um ponto  $P$  e por outros pontos próximos”. (Fig.1)



**FIGURA 1:** Método dinâmico para a tangência  
**FONTE:** Thomas (2008, p.130)

Dall'anesse (2000) estudou oito livros didáticos usados no ensino superior e concluiu que, ao apresentarem a definição de derivada como coeficiente angular da reta tangente, eles apelam para a intuição geométrica do estudante. O autor destaca ainda que os estudantes generalizam a concepção de reta tangente à circunferência, aplicando-a para a reta tangente à uma curva qualquer, impedindo-os de reconhecer o aspecto geométrico da reta tangente.

*Softwares* como o GeoGebra, permitem criar objetos manipuláveis, dotados de movimento, potencializando os processos de ensino de determinado conteúdo, ao contrário de ilustrações estáticas feitas no quadro de giz ou encontradas nos livros

didáticos.

Em nossas pesquisas e experiências docentes no ensino de Cálculo Diferencial e Integral em cursos universitários, percebemos algumas situações que justificam o uso do GeoGebra<sup>4</sup> aliado a tópicos de História da Matemática:

- As representações geométricas e ilustrações estáticas tendem efetivamente a dificultar a compreensão de conteúdos matemáticos que, em muitos casos, foram desenvolvidos a partir da ideia de movimento.
- A História da Matemática, embora esteja presente nos livros didáticos utilizados para introdução do Cálculo Diferencial e Integral, ainda é pouco explorada na contextualização dos temas ensinados.

Classificado como um *software* de Matemática Dinâmica, o GeoGebra é gratuito e une Geometria, Álgebra e Cálculo. Por ser escrito em linguagem Java é multiplataforma, além de possuir uma interface simples e intuitiva. Por estas características e a possibilidade de elaborar e modificar *applets* tanto para uso em sala de aula quanto para disponibilizar em *websites* da internet, escolhemos o GeoGebra para expor o Método da Tangente de Newton.

Mostraremos como o uso do GeoGebra pode auxiliar o professor na elaboração de materiais didáticos significativos e desafiadores utilizando problemas “(...) *recuperados da História da Matemática, com linguagem, procedimentos e desenvolvimento da respectiva época e que permitam, nos dias atuais, a exploração por meio de um software de Geometria Dinâmica*”. (ABAR, 2011, p.10).

Na primeira parte deste trabalho trataremos do contexto histórico no qual se originou e desenvolveu as principais ideias do Cálculo Diferencial e Integral na obra de Isaac Newton (1642 – 1727). Em seguida, apresentaremos o Método da Tangente criado por Newton e sua representação dinâmica com o apoio do *software* GeoGebra.

## **1. O Cálculo Diferencial e Integral em Isaac Newton**

O desenvolvimento do Cálculo sempre esteve ligado a solucionar problemas em vigor a cada época. No século XVII existiam três grandes problemas: o traçado de uma tangente a uma curva, as quadraturas de curvas e as séries infinitas. (GARBI, 2006, p.218). O físico e matemático inglês Isaac Newton dedicou-se a estudar todos eles.

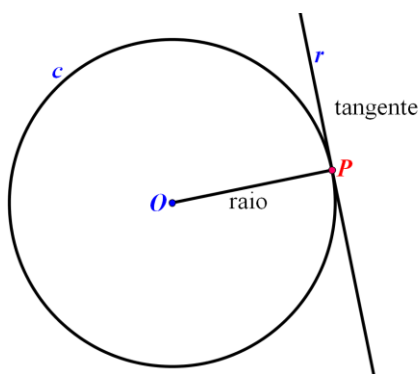
---

<sup>4</sup> *Software* desenvolvido em 2001 pelo professor austríaco Markus Hohenwarter para o ensino e aprendizagem da matemática na Universidade de Salzburg/Áustria.

Nos anos de 1665 e 1666 a Universidade de Cambridge foi fechada por causa da peste, o que obrigou Newton a retornar para sua cidade natal (STEWART, 2009, p.105). Nesse período produziu suas maiores contribuições à Física e à Matemática: a representação de funções como séries infinitas, a sistematização do Cálculo Infinitesimal, as leis do movimento e da Gravitação Universal e os estudos sobre a natureza da luz e cores.

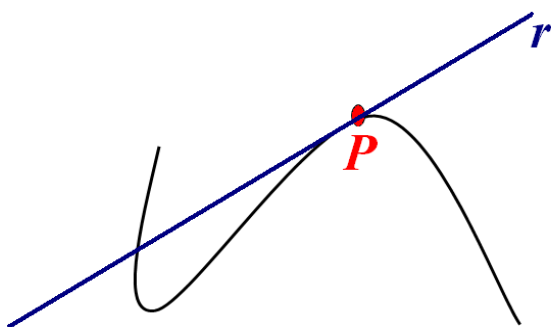
É comum associar os nomes de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716) à invenção do Cálculo. No entanto, o mérito de Newton e Leibniz foi, respectivamente, sistematizar uma teoria geral para a maioria dos problemas descritos na época e uni-los em um novo cálculo operacional por meio de uma notação eficaz (BARON e BOS, 1985, p.5).

Segundo Boyer (1992, p.7) algumas ideias que formam a base do Cálculo já se encontravam nos métodos desenvolvidos por matemáticos gregos como Euclides (330 a.C.- 260 a.C.), Arquimedes (287 a.C.- 212 a.C), e Apolônio (262 a.C.-190 a.C.) para traçar tangentes a curvas, encontrar áreas e volumes. Euclides (2009, p.168), por exemplo, afirmava que se uma reta  $r$  é tangente a uma circunferência  $c$ , então ela encontra o círculo em apenas um ponto e é perpendicular ao raio por esse mesmo ponto (Fig. 2)



**FIGURA 2:** Representação de uma reta  $r$  tangente à circunferência  $c$  no ponto  $P$   
**FONTE:** Ávila (1993, p.78)

Com o desenvolvimento da Geometria Analítica no século XVII, o interesse por tangentes a curvas reaparece quando Descartes e Fermat introduzem as coordenadas cartesianas. Nesta época, Fermat munido de técnicas analíticas resolveu dedicar-se ao antigo Problema das Tangentes e percebeu que o conceito euclidiano de tangente (reta que encontra a curva em um único ponto) precisava ser reformulado, pois embora válido para a circunferência e elipse é inaceitável no caso geral. (GARBI, 2009, p. 197). (ver Fig. 3).



**FIGURA 3:** Representação de uma reta  $r$  tangente à uma curva genérica no ponto  $P$   
**FONTE:** Ávila (1993, p.78)

Fermat desenvolve um método algébrico para determinação de pontos máximos e mínimos de uma função aplicável também na determinação da tangente a uma curva. Seus trabalhos tiveram influência sobre os estudos de Newton e estão diretamente ligados à origem do Cálculo Diferencial.

O Cálculo Diferencial e Integral do século XVII é, portanto, resultado dos esforços e contribuições de diversos matemáticos ao longo do tempo. Dentre eles Euclides, Arquimedes, Viète (1540 – 1603), Galileu (1564 – 1642), Kepler (1571 – 1630), Descartes (1596 - 1650), Fermat (1601 – 1665), Wallis (1616 – 1703), Huygens (1629 – 1695), Barrow (1630 – 1677), Newton e Leibniz.

## 2. O Método das Tangentes de Newton

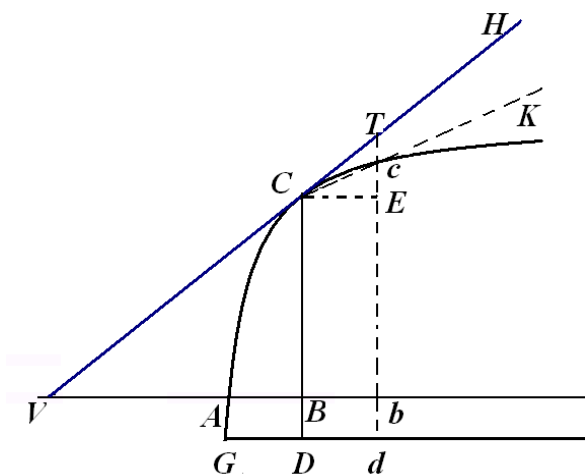
Newton desenvolveu seu Cálculo a partir de ideias sobre a origem e natureza do movimento que remontam aos estudos de Galileu. O Método das Tangentes de Newton (Fig.4), também conhecido como Método das Fluxões, resolveu o problema da determinação do traçado da tangente a uma curva dada por uma equação  $f(x,y) = 0$  onde as variáveis  $x$  e  $y$  representavam grandezas que “fluem” com o passar do tempo – os *fluentes* – e suas velocidades, chamadas de *fluxões*. (BRAGA, 2006, p.157).

Nas palavras de Newton

Chamando de fluxões os aumentos das velocidades dos movimentos, e de fluentes às quantidades geradas esclareci aos poucos (nos anos de 1665 e 1666) o método das fluxões que aproveito aqui na quadratura das curvas.

As fluxões são semelhantes aos aumentos dos fluentes, os quais são gerados em intervalos de tempos iguais, mas são infinitamente pequenos; e para ser mais exato, diria que estão na primeira razão dos aumentos nascentes, mas podem ser representados por quaisquer linhas proporcionais a elas. Se as áreas  $ABC$ ,  $ABDG$  forem descritas pelas ordenadas  $BC$  e  $BD$ , que se movem uniformemente ao longo da

base  $AB$ , então as fluxões dessas áreas estarão entre si como as ordenadas  $BC$  e  $BD$  que as descrevem e poderão ser representadas por aquelas ordenadas; isto é, tais ordenadas estão na mesma proporção que os aumentos nascentes das áreas. (NEWTON, 1704, *apud* BARON e BOS, 1985, v.3, p.31)



**FIGURA 4:** Representação geométrica do Método da Tangente de Newton  
**FONTE:** Baron e Bos (1985, v.3 p.31)

Segundo Boyer (1992, p.48), Newton representava por  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  a velocidade associada aos respectivos fluentes  $x$  e  $y$  que, em notação atual, correspondem a  $dx/dt$  e  $dy/dt$ . Denominava de “momento” ao pequeno incremento que um fluente sofre num pequeno intervalo de tempo  $o$ . Os momentos eram representados por  $\dot{x}o$  e  $\dot{y}o$ . Considerava que se uma relação  $f(x,y) = 0$  é válida para  $x$  e  $y$  em todos os instantes, também o será para  $x + \dot{x}o$  e  $y + \dot{y}o$  sendo  $\dot{x}o$  e  $\dot{y}o$  intervalos de tempo infinitamente pequenos. Para entendermos o procedimento adotado por Newton tomaremos como exemplo a mesma equação usada por ele, em 1666, para encontrar, analiticamente, a inclinação de uma curva dada por uma equação  $f(x,y) = 0$ . (BOYER, 1992, p.20-21).

Seja a curva  $C$  cuja equação é dada por

$$f(x,y) = x^3 - ax^2 + axy - y^3.$$

Para  $f(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o) = 0$ , tem-se que:

$$f(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o) = (x + \dot{x}o)^3 - a \cdot (x + \dot{x}o)^2 + a \cdot (x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0.$$

Expandindo os termos cúbicos e quadráticos da equação, anulamos os termos  $x^3 - ax^2 + axy - y^3$ , pois  $f(x,y) = 0$ . Em seguida, dividimos a equação resultante da equação por  $o$ , obtemos o resultado:

$$3x^2 \dot{x} + 3\dot{x}ox + \dot{x}o^2 - 2ax\dot{x} - a\dot{x}o + ax\dot{y} + a\dot{y}x + a\dot{y}o - 3y^2 \dot{y} - 3\dot{y}oy - \dot{y}o^2 = 0$$

Supondo  $o$  infinitamente pequeno, todos os termos multiplicados por ele serão desprezados, restando assim:

$$3x^2 - 2ax + ay - 3y^2 = 0$$

$$(3x^2 - 2ax + ay) + (ax - 3y^2) = 0$$

E, assim, podemos expressar a razão de proporcionalidade  $\frac{y}{x}$ , ou, como usamos hoje em dia, o coeficiente angular da equação por

$$\frac{y}{x} = \frac{-3x^2 + 2ax - ay}{ax - 3y^2}$$

O processo é semelhante à diferenciação de uma função dada implicitamente.

### 3. Representação geométrica do Método das Tangentes de Newton com apoio do *software* GeoGebra

O objetivo de Newton era analisar o comportamento da semirreta secante a curva quando o incremento das variáveis  $x$  e  $y$  fosse infinitamente pequeno, ou seja, obter o coeficiente angular da reta tangente no ponto  $(x, f(x))$ .

O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no ponto  $x_0$  é obtido através da análise da sequência dos coeficientes angulares da reta secante a uma curva, como mostra a figura 1. Em outras palavras, consiste em determinar a posição limite de uma família de secantes quando os dois pontos de intersecção com a curva tendem a coincidir como no método desenvolvido por Fermat.

Esse procedimento pode auxiliar na compreensão intuitiva de que o coeficiente angular da reta tangente, denotado por  $a_{\text{tangente}}$ , é

$$a_{\text{tangente}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ou seja, o limite que define a derivada da função  $f$  no ponto  $x_0$ .

Vejamos agora a representação geométrica do Método de Newton com o auxílio do GeoGebra.

No GeoGebra, esboçando uma curva qualquer cuja equação é dada por  $f(x,y) = 0$  e dois pontos  $C$  e  $C'$  quaisquer pertencentes à mesma curva (Fig.5). A reta  $t$  é a reta tangente a

curva no ponto  $C$ , a semirreta  $s$  é a reta secante a curva passando pelos pontos  $C$  e  $C'$ .

Com o deslocamento do ponto  $C$  para o ponto  $C'$ , realizado por meio da ferramenta “mover” do GeoGebra verifica-se:

- Aumento da abscissa da variável (ou fluente)  $x$ , cuja medida do segmento é igual a  $CE$ , este seria o fluxo  $\dot{x}$ .
- Aumento da ordenada (ou fluente)  $y$ , cuja medida do segmento é igual a  $C'E$ , o fluxo  $\dot{y}$ .

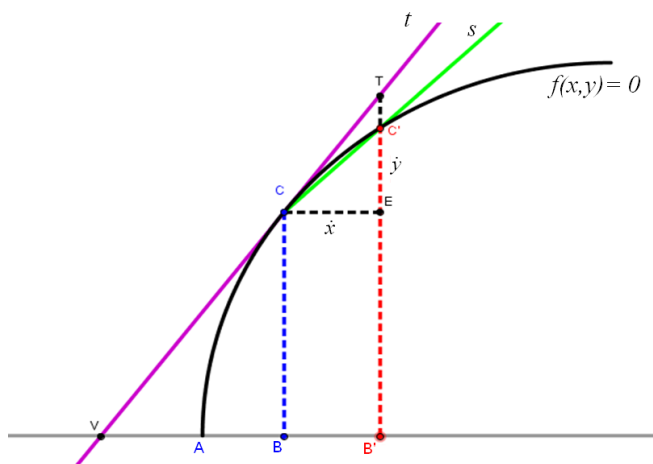


FIGURA 5: Representação do Método da Tangente de Newton no GeoGebra

Quando o deslocamento do ponto  $C$  para o ponto  $C'$  for muito pequeno pode-se considerar os triângulos retângulos  $\Delta VBC$  e  $\Delta CEC'$  da figura 6 semelhantes e, portanto,

$$\frac{CB}{VB} = \frac{C'E}{CE}$$

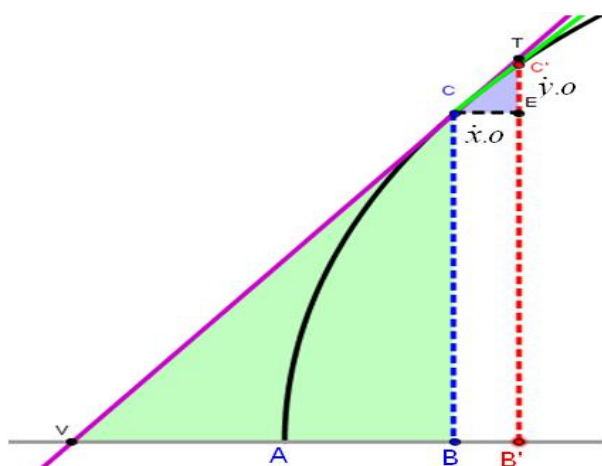


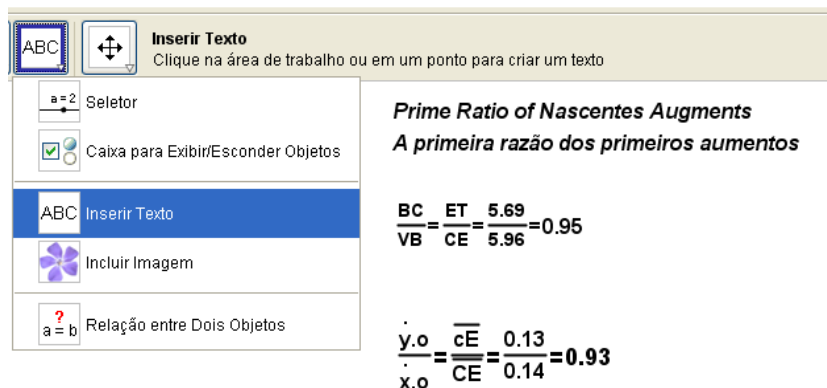
FIGURA 6: Para fluxões  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  muito pequenos  $\Delta VBC$  e  $\Delta CEC'$  são semelhantes

A esta razão de proporcionalidade Newton chamou de “*Prime Ratio of Nascents*”



*Augments*”, isto é, a primeira razão dos aumentos (PIRES, 2004, p. 49).

Utilizando a ferramenta “inserir texto” tem-se ainda a possibilidade de mostrar expressões algébricas na tela de visualização (ver Fig.7) e desta maneira fornecer uma percepção algébrica e geométrica do Método, que segundo Hohenwarter (2011) é uma das características mais notáveis do GeoGebra.



**FIGURA 7:** Exemplo de utilização da ferramenta “inserir texto”

Quando calculado para fluxões muito pequenos, o coeficiente angular da reta tangente é praticamente igual a razão de proporcionalidade, ou seja,  $\frac{C'E}{CE} = \frac{\&o}{\&o}$ . Desta igualdade chamada de “*Ultimo Ratio of Evanescentes Parts*”, Newton conclui que para valores infinitamente pequenos, é válido afirmar que  $\frac{\&o}{\&o} = \frac{ET}{CE}$ .

Sabendo o coeficiente angular e um ponto qualquer da reta é possível encontrar sua equação geral. Por isso, o Método das Fluxões é capaz de encontrar a equação da reta tangente a uma curva em determinado ponto.

Na figura 8, temos a interface completa construída no *software* GeoGebra com os elementos gráficos que podem ser manipulados de modo interativo pelo usuário para acompanhar a evolução da demonstração do Método da Tangente de Newton. Através da ferramenta “caixa para exibir/esconder objetos” é possível selecionar a sequência na qual os objetos da interface aparecem na “janela de visualização”. Esta característica acentua a dinamicidade do processo interativo e oferece a possibilidade de ser revisto tantas vezes quantas forem necessárias.

# Método da Tangente de Newton

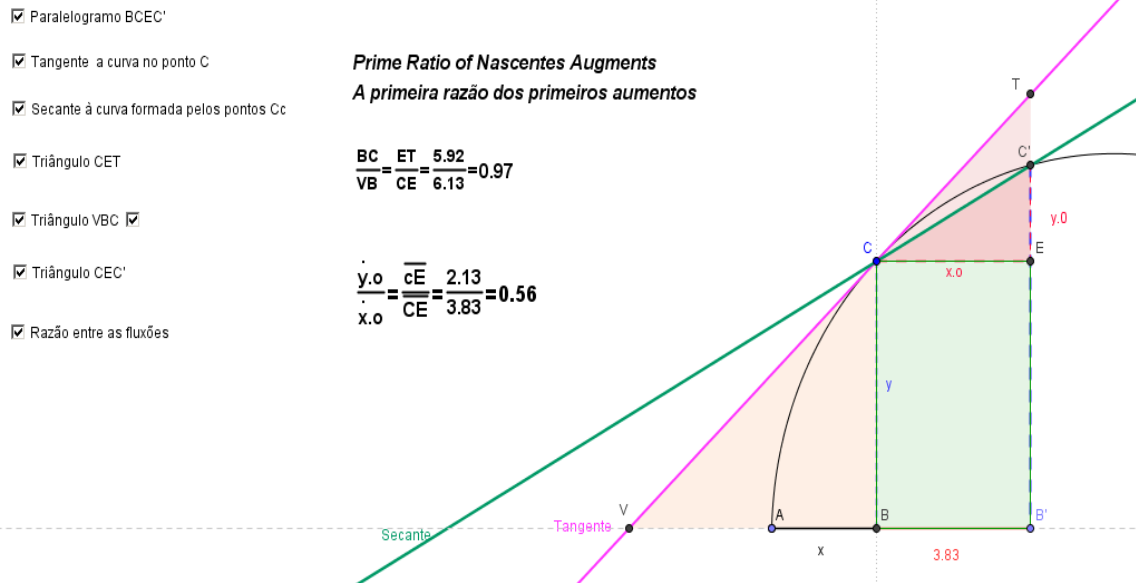


FIGURA 8: Interface do GeoGebra para a demonstração do Método das Tangentes de Newton

## Considerações finais

Vislumbramos a possibilidade de superação do enfoque tradicional no ensino do Cálculo Diferencial e Integral ao apresentar os conteúdos contextualizados historicamente. Entretanto, por vezes, recorrer ao contexto histórico em que tais conhecimentos foram produzidos é insuficiente para romper com o enfoque tradicional e facilitar a aprendizagem. Alguns conteúdos podem exigir, além disso, o uso de recursos que explicitem a dinâmica envolvida nas demonstrações matemáticas. Neste caso, a utilização de *softwares* atende a este último requisito desde que permitam a criação de recursos interativos capazes de suportar a manipulação direta. No entanto, o uso do *software* GeoGebra, por si só, não garante e nem será suficiente para mostrar a generalidade do procedimento de usar sequências de secantes para obter, no limite, a tangente, contudo acreditamos que ele possa promover mais intuição e auxiliar o estudante na construção de uma representação do conceito de derivada que seja significativa para ele.

Ressaltamos que dentre as opções de *softwares* disponíveis no momento, o GeoGebra sobressai pela simplicidade de aprendizado e suporte à interação; o que o torna adequado para colocar em prática estratégias didáticas similares à que defendemos neste trabalho.

## Referências

- ABAR, C. A. A. P. (2011). A contribuição da geometria dinâmica na resolução de problemas. In: *II Seminário em Resolução de Problemas*, 2011, Rio Claro. II SERP. Disponível em <http://www2.rc.unesp.br/gterp/?q=node/65>. Acesso em 02 jan. 2012.
- ANTON, H. (2000). *Cálculo: um novo horizonte*. 6ª. ed. Porto Alegre: Bookman.
- ÁVILA, G. S. de S (2003). *Introdução à Análise Matemática*. 2ª. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher.
- ÁVILA, G. S. de S (1993). *Cálculo I: funções de uma variável* 6ª. ed. Rio de Janeiro: LTC.
- BARON, E.M.; BOS, H.J.M. (1985). *Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo (Matemática Grega)*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.
- BARONI, R. L. S.; BIANCHI, M. I. Z. (2007). *História da matemática em Livros Didáticos*. 20ª. ed.. Rio Claro: SBHMat, v.1.
- BARUFI, M. C. B.; BROLEZZI, A. C. (2007). *História da matemática e ensino de cálculo: reflexões sobre o pensamento reverso*. Guarapuava, PR: SBHMat, v.1.
- BOYER, C. B. (1974). *História da Matemática*. 2ª.ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher.
- BOYER, C. B. (1992). *Cálculo – Tópicos da História da Matemática para uso em sala de aula*. v.6. São Paulo: Atual.
- BRAGA, C. (2006). *Função: a alma do ensino da matemática*. São Paulo: Annablume, Fapesp.
- BYERS, V. (1982). Porque estudar a História da Matemática. *International Journal Mathematics Education, Science and Technologie*. N.1, v.13.Campinas: UNICAMP.
- D'AMBROSIO, U. (1996) História da Matemática e Educação. *Caderno Cedes*, n.40. desafios. Belo Horizonte: Autêntica.
- DALL'NESSE, C. (2000). Conceito de derivada: uma proposta para seu ensino e aprendizagem. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.
- EUCLIDES.(2009) *Os Elementos*. São Paulo: UNESP.
- FLEMMING, M. D; GONÇALVES, M. (2006). *Cálculo A: funções, limites, derivação e integração*. 6 ed. São Paulo: Makron.
- GARBI, G. (2006). *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática*. São Paulo: Livraria da Física.
- GARBI, G. (2009). *O romance das equações algébricas*. 3. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física.
- GRAVINA, M. A., SANTAROSA, L. M. C.(1999). A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. *Informática na Educação: Teoria e Prática*, n.1, v.1. Porto Alegre: UFRGS.
- HOHENWARTER, M. (2011) GeoGebra Quickstart: Guia rápido de referência sobre o GeoGebra. Disponível em:<<http://www.GeoGebra.org>>. Acesso em: 10 jan. 2012.

LEITHOLD, L. (1994). *O Cálculo com geometria analítica*. v.1, 3ed. São Paulo: Harbra.

MIGUEL, A.; MIORIM, M.A. (2004) *História na Educação Matemática: propostas e desafios*. Belo Horizonte: Autêntica.

PIRES, J. A. L. (2004). *Cálculo Diferencial: Estudo histórico sobre a evolução do Cálculo Diferencial no século XVII*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real.

STEWART, J. (2009). *Cálculo*. v.1, 6ed. São Paulo: Cengage.

THOMAS, G. B. (2008). *Cálculo*. v.1, 11ed. São Paulo: Addison Wesley.