Provocação de situações de aprendizagem em cálculo com o apoio do GeoGebra

ANA REGINA GREGORY BRUNET[1]

JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS[2]

MAGDA LEYSER[3]

ROSVITA FUELBER FRANKE [4]

Resumo

Este relato é um recorte de uma pesquisa qualitativa desenvolvida pelos autores e consiste em uma reflexão sobre uma oficina. O objetivo da oficina foi partir do conceito prévio de função dos envolvidos e aprimorá-lo por suas representações gráficas. Na oficina foram propostas atividades com lápis e papel para serem utilizados nas representações, bem como fazer uso das ferramentas do GeoGebra, a fim de provocar desequilíbrio na concepção de representação de gráficos entre os participantes. Concluímos que a oficina proporcionou uma reconstrução do conceito de função, estabelecendo importância não somente à lei de definição, mas também ao domínio. O GeoGebra se constituiu em um apoio para que a estratégia de ensino utilizada na oficina atingisse as expectativas quanto à representação gráfica de função.

***Palavras-chave**: Situações de Aprendizagem; Função; Geometria Dinâmica.*

Introdução

Porque um estudo em Geometria? Com esta pergunta Mammana e Villani (1998) introduzem um documento de discussão para um estudo no Congresso Internacional de Instrução Matemática (ICMI), intitulado “Perspectivas no ensino de Geometria para o século 21”, ocorrido em 1994. Para os autores,

> Atualmente, a pesquisa em Geometria tem sido muito estimulada por novas ideias, de um lado pela própria matemática e, por outras disciplinas incluindo a ciência da computação. No presente, as várias possibilidades de computação gráfica influenciam muitos aspectos de nossas vidas, a fim de utilizar essas possibilidades, uma conveniente educação visual é necessária. (p. 337).

Ao discutir sobre dificuldades de alunos na visualização gráfica de soluções da equação de uma reta, Fonte (2010, p. 17) assim se expressa com relação à plotagem de gráficos de funções:

[1] Universidade Luterana do Brasil – ULBRA – FAPA anabrunet@cpovo.net
[2] Centro Universitário Franciscano – UNIFRA - leivasjc@yahoo.com.br
[3] Universidade Luterana do Brasil – ULBRA – SENAC - magda.leyser@gmail.com
[4] Universidade Luterana do Brasil - ULBRA - rosvitafranke@ig.com.br

> A construção do gráfico não é algo muito trivial e somente tornou-se mais fácil com o aparecimento da tecnologia computacional: em situações didáticas mais usuais, basta inserir a expressão algébrica que representa uma função num utilitário que constrói gráficos e, em segundos, teremos um gráfico da referida função.

A autora conclui, a partir de sua pesquisa, afirmando que uma provável causa dos alunos se sentirem mais seguros no contexto algébrico do que no contexto gráfico pode ser o enfoque dado, tanto por professores quanto por livros didáticos, às representações algébricas. Ao concordar com a autora, ampliamos nossa crença de que as dificuldades não ocorrem apenas quanto às funções de primeiro grau, se estendendo a outras funções, especialmente pelo tratamento que é dado, focando, principalmente, a lei de formação e pouca ênfase aos conjuntos domínio e contradomínio, que são fundamentais para construir corretamente tal conceito.

Segundo Leão e Bisogin (2009), a teoria de imagem de conceito e definição de conceito encontra guarida nos estudos de Tall e Vinner, os quais

> Acreditam que um determinado conceito não deve ser trabalhado a partir de sua definição formal, ou seja, aquela definição aceita, em geral, pela comunidade matemática, em um determinado momento histórico e contida nos livros didáticos. Para que um determinado conceito seja entendido, os autores defendem a necessidade de o aluno ter uma familiaridade anterior à sua formalização. (p. 28).

Assim, realizar atividades em que os indivíduos sejam colocados em contato com diversas estratégias que os conduzam a perceber a necessidade de caracterizar com precisão domínio e contradomínio, na elaboração de gráficos de expressões algébricas, pode conduzir à formulação adequada do conceito de função. Isso é fundamental na estrutura interna da Matemática cuja compreensão é necessária à formação inicial e continuada de professores dessa disciplina para a escola básica.

Frota (2009) apresenta como um dos resultados de sua pesquisa, na qual investiga sobre estratégias eficazes para o ensino e a aprendizagem de funções, potencialidades na utilização de processos visuais por meio de pensamento visual. Para a autora, visualização é um processo que, além de interpretar, também envolve representar e este é um tema relevante para pesquisa em Educação Matemática atual. O tema visualização é recente, especialmente no Brasil, muito embora o grupo de Psicologia da Educação Matemática (PME) já discuta o assunto há vários anos, por exemplo, Presmeg (1986, 2006) e Eisenberg e Dreyfus (1991), sendo que para os últimos autores *Gráficos e informações visuais desempenham um papel para além de meras representações de um* *problema. Eles são os objetos centrais a partir dos quais a informação é processada tanto simbólica quanto visualmente. (p. 34).*

Ao discutir sobre inovações em Educação Matemática, que sejam relevantes em ambientes virtuais no processo de desenvolvimento da aprendizagem, Soares e outros expressam:

> Pode-se entender que os diálogos, em ambientes virtuais, ao contrário do que ocorre numa discussão oral, encontram-se explicitados e registrados, dando margem a novas organizações e a novos entendimentos, possibilitando o desdobramento em rede de novas questões e de novas elaborações. (2008, p. 18)

Para as autoras, o processo de compreensão está ligado ao fazer diretamente com a compreensão de conceitos de forma que ocorra uma educação com a participação discutida por todos os envolvidos durante o processo de aprendizagem.

Leivas (2009, p. 22) compreende e define visualização *como um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos*. Acreditamos que agregar tecnologia com visualização pode contribuir de forma significativa para a aquisição do conceito de função.

Esses foram alguns aspectos norteadores na elaboração das atividades propostas em uma oficina pedagógica de caráter extensionista. Outro aspecto é o oriundo da experiência dos professores no Ensino Superior em disciplinas introdutórias de Cálculo Diferencial e Integral. Nesse é observado que funções definidas por mais de uma sentença oferecem grande dificuldade de compreensão.

Essas dificuldades também foram constatadas em uma pesquisa qualitativa, que não é objeto deste trabalho, cujo recorte é aqui apresentado na forma de relato de experiência. Segundo Patton (apud Alves-Mazzotti, 2002, p. 131), uma característica das pesquisas qualitativas é ser "compreensivas" ou interpretativas, significando para Alves-Mazzotti (2002) que

> [...] essas pesquisas partem do pressuposto de que as pessoas agem em função de suas crenças, percepções, sentimentos e valores e que seu comportamento tem sempre um sentido, um significado que não se dá a conhecer de modo imediato, precisando ser desvendado. (p. 131).

Partir de conhecimentos preliminares dos envolvidos na oficina e analisar sua compreensão e suas interpretações de um conceito caracteriza bem o tipo de trabalho que temos realizado.

1. A oficina

Um grupo de nove alunos graduandos em Licenciatura em Matemática foram os participantes da oficina que serviu de apoio para pesquisa qualitativa que vem sendo desenvolvida pelos autores.

O objetivo da oficina foi partir do conceito prévio de função dos alunos e aprimorá-lo por suas representações gráficas. As atividades elaboradas, envolvendo funções com domínio discreto e contínuo e funções definidas por mais de uma sentença, partiram de expressões algébricas com a intenção de explorar aspectos visuais envolvidos.

A dinâmica da oficina consistiu de atividades propostas pelos autores para que fossem utilizados lápis e papel nas representações. Também, fazer uso das ferramentas do GeoGebra a fim de provocar desequilíbrio na concepção de representação de gráficos entre os participantes.

Inicialmente foram propostas duas atividades de familiarização com as ferramentas disponíveis no *software* GeoGebra, as quais não constituem elemento de análise e não serão apresentadas. Nosso foco neste trabalho é a atividade denominada Atividade 3. Tal atividade foi constituída de cinco etapas, algumas delas realizadas em papel quadriculado, outras em computador ou concomitantemente.

Na primeira etapa (Figura 1) foi proposta uma atividade a ser realizada utilizando as ferramentas do GeoGebra. A solução deveria ser descrita num arquivo do editor de texto Word, com a imagem obtida no software, e encaminhada por e-mail aos pesquisadores.

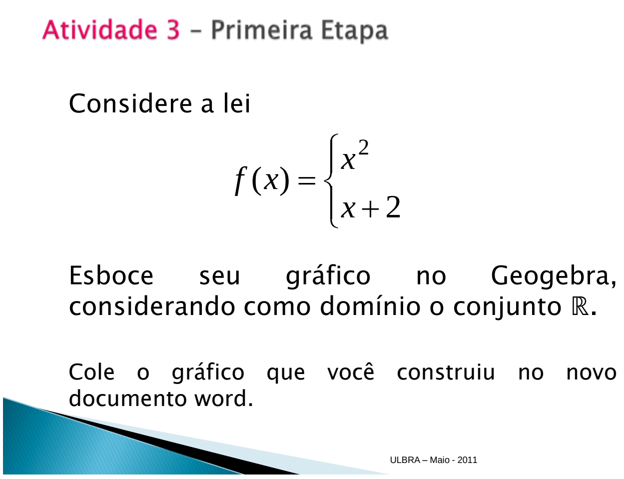

FIGURA 1: primeira etapa da Atividade 3.

Na segunda etapa dessa atividade, os pesquisadores solicitaram aos participantes da oficina que respondessem, utilizando os mesmos recursos da etapa anterior, se o gráfico obtido representava uma função, com a respectiva justificativa. (Figura 2).

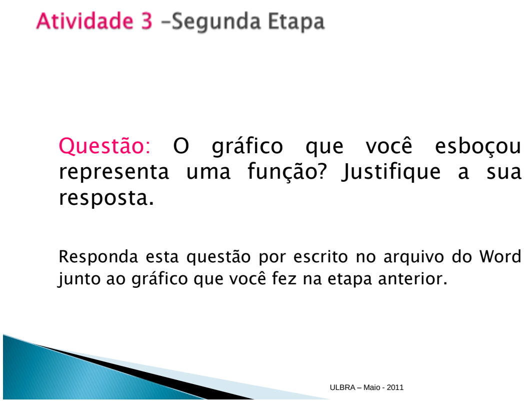

FIGURA 2: segunda etapa da Atividade 3.

A terceira etapa da Atividade 3 foi constituída de uma conversa, em grande grupo, entre os pesquisadores e os participantes e sua análise não faz parte deste relato. Nesse momento os professores tiveram a preocupação de verificar se os indivíduos compreenderam a questão da unicidade de imagem para cada ponto do gráfico da função definida pelas duas sentenças.

Na quarta etapa da Atividade 3, os pesquisadores forneceram uma folha de papel quadriculado, a qual foi recolhida ao final da etapa. A seguir apresentaram o seguinte slide (Figura 3) aos estudantes:

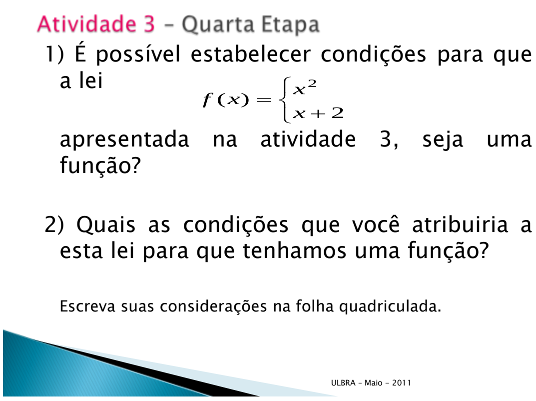

FIGURA 3: quarta etapa da Atividade 3.

Para finalizar a Atividade 3, foi proposta uma quinta etapa (Figura 4), na qual os investigadores buscavam a formalização das condições para que a lei definida pelas duas sentenças constituíssem uma função, a partir das representações gráficas obtidas no GeoGebra.

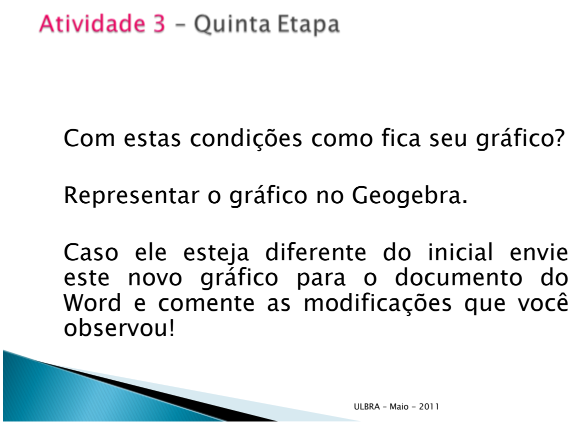

FIGURA 4: quinta etapa da Atividade 3.

Na sequência, apresentaremos considerações das resoluções e encaminhamentos dos participantes da oficina. Para preservar suas identidades, foram nomeados como P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 e P_9. Neste artigo serão considerados os indivíduos P_1 e P_5.

2. Descrição e considerações das resoluções das atividades

A partir das solicitações feitas e, de posse dos registros encaminhados aos pesquisadores, constatamos, o que segue.

Na etapa 1, P_1 faz o esboço do gráfico como se fossem duas funções, pois na janela algébrica denomina a lei que corresponde a uma expressão de primeiro grau como f(x) e a lei que corresponde a uma expressão de segundo grau como g(x). Verificamos que P_1 considera que a lei representa duas funções distintas conforme registro nas janelas algébrica e de visualização do GeoGebra.

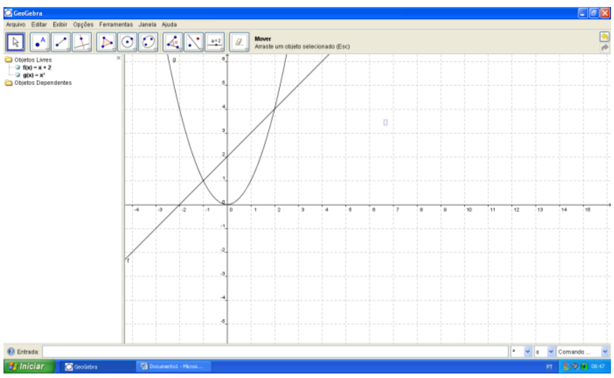

FIGURA 5: representação da etapa 1 realizada no GeoGebra por P_1.

Com relação ao encaminhamento dado para a atividade constante da segunda etapa, temos a seguinte resposta de P_1: *Sim, o gráfico esboçado representa duas funções, uma* *quadrática, a qual é representada por uma parábola, e uma função do primeiro grau que é uma reta.* Ao fornecer essa resposta, podemos afirmar que a interpretação inicial do aluno era de que se tratava mesmo de duas funções distintas e não apenas uma definida por duas sentenças.

P_5, na primeira etapa, introduz na linha de comando as leis x^2 e $x+2$. Aparece na janela algébrica as denominações $f(x)=x+2$ e $g(x)=x^2$. Na janela de visualização surgem os dois gráficos sobrepostos, com as respectivas notações (Figura 6).

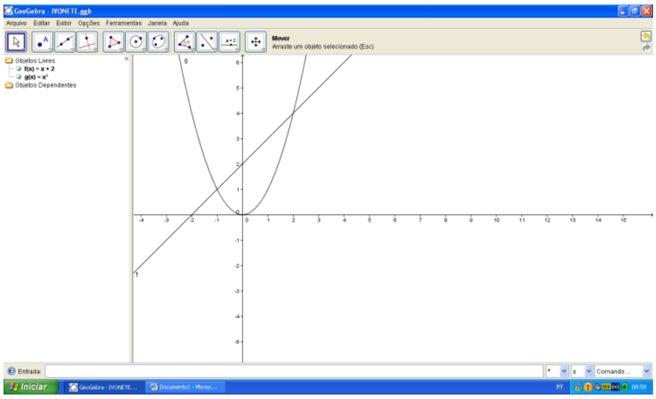

FIGURA 6: gráfico realizado no GeoGebra por P_5.

Em relação à etapa 2, P_5 fornece a seguinte justificativa:

> Sim, representa uma função, pois x² é uma função de grau 2 onde existe dois valores de x para um valor de y e que (x+2) é a equação da reta que passa pelo eixo x interceptando a parábola (formada pela função x²) em 2 de seus pontos e ainda intercepta o eixo y em outro ponto.

Interpretamos que P_5 não tem clareza sobre o conceito de função e propriedades relacionadas, pois o confunde com injetividade. A tentativa de argumentação apresentada não é consistente frente à justificativa solicitada.

Na quarta etapa, P_1 considerou alguns valores inteiros no domínio entre -2 e 2 obtendo as respectivas imagens. Tais valores aparecem em uma tabela de dupla entrada e em um gráfico cartesiano. Entretanto, une os pontos por uma linha reta que ultrapassa o intervalo inicialmente considerado que era de -2 a 2. Muito embora tenha calculado a imagem para x= - 2 e representado o ponto (-2,0) no gráfico, indica o campo de variação para x como sendo $-2<x\leq 2$ (Figura 7).

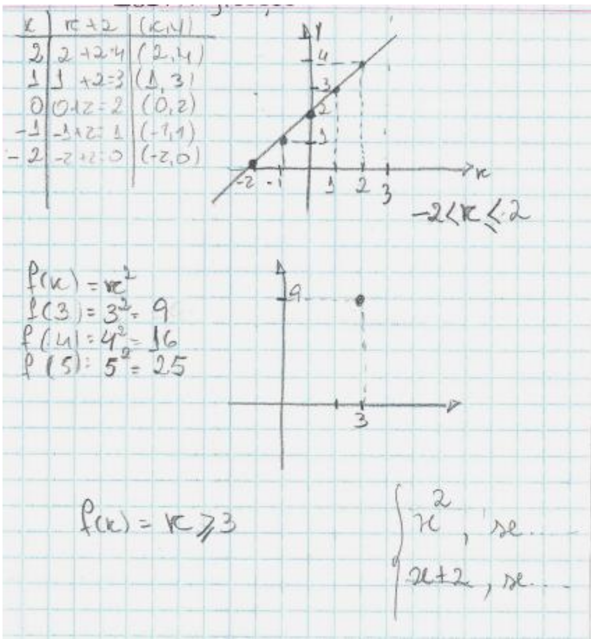

FIGURA 7: representação em folha quadriculada da etapa 4 por P_1.

Na sequência, P_1 utiliza a lei $f(x)=x^2$ e calcula valores da função para x=3, x=4 e x=5. Porém, somente apresenta no gráfico (Figura 7) o ponto (3,9) e indica $f(x)=x\geq 3$ mostrando que se confunde com a notação de “lei”e domínio e abandona a questão.

Ao fazer as representações com lápis e papel, solicitadas na etapa 4, P_5 denota por f as duas leis separadamente e atribui ao domínio os valores -1, -2, -3 e obtém as respectivas imagens. O sujeito não relaciona a denominação ora atribuída com aquela apresentada pelo GeoGebra, na primeira etapa, confirmando expectativa dos pesquisadores de que aquela denominação foi induzida pelo software e não pelo sujeito investigado. Percebemos, da Figura 8, que foi feita tentativa de representação das duas funções.

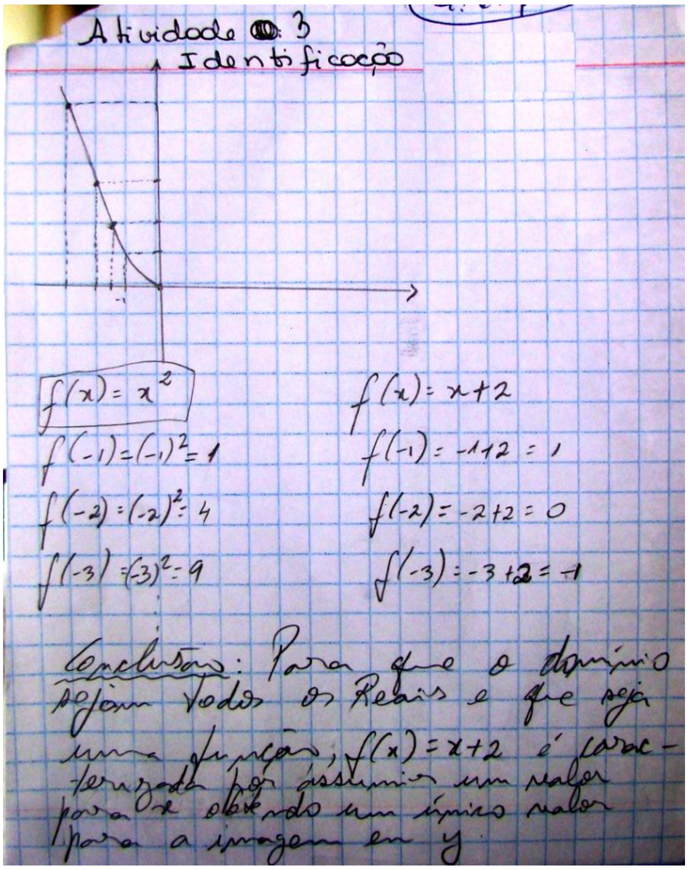

FIGURA 8: registros com lápis e papel do aluno P_5.

Vemos ainda que P_5 sugere que o domínio deve ser o conjunto dos números reais, porém apenas o ramo do lado esquerdo da parábola foi representado, deixando o subconjunto dos reais positivos do domínio sem representação. O investigado não conseguiu organizar as duas leis em um único esboço gráfico.

Ao concluir a realização da quinta etapa da atividade 3, P_1 utiliza o GeoGebra, como solicitado, e realiza a representação dada na Figura 9.

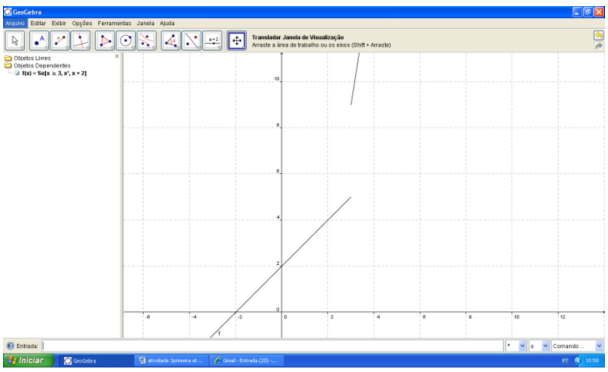

FIGURA 9: representação da função com restrições.

P_1 registrou em seu documento que *o gráfico tornou-se uma função atribuindo valores diferentes para cada lei, na lei x^2 coloquei valores a partir do três, e para x+2 atribui* *valores entre -2 e +2, x^2 se x>=3 e x+2 se x<3.*

A partir da coleta dos registros de P_1, os pesquisadores consideram que a representação da função definida por mais de uma sentença foi alcançada somente por meio do uso do GeoGebra. Quando P_1 utilizou apenas instrumentos usuais de desenho, o mesmo resultado não foi alcançado.

Com relação a esta mesma etapa, P_5 elabora quatro construções distintas no GeoGebra (Figuras 10, 11, 12 e 13).

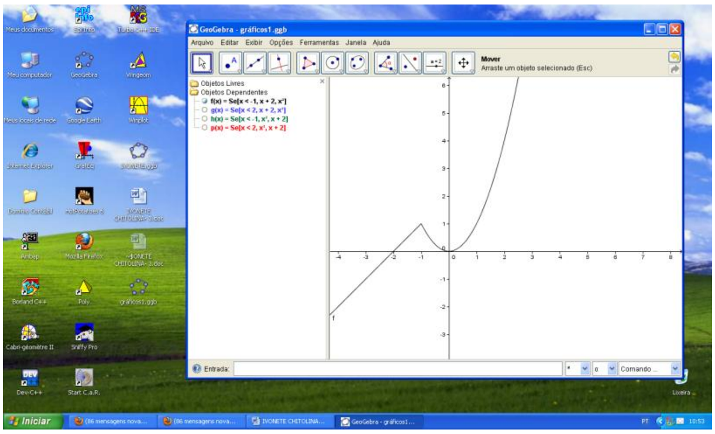

FIGURA 10: primeira representação da etapa 5 por P_5.

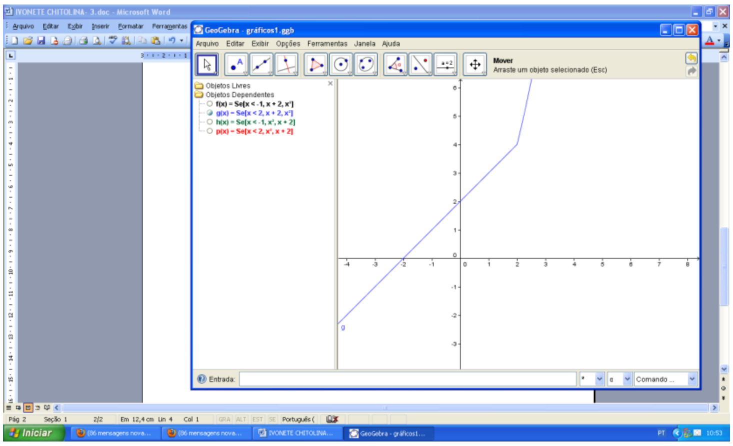

FIGURA 11: segunda representação da etapa 5 por P_5.

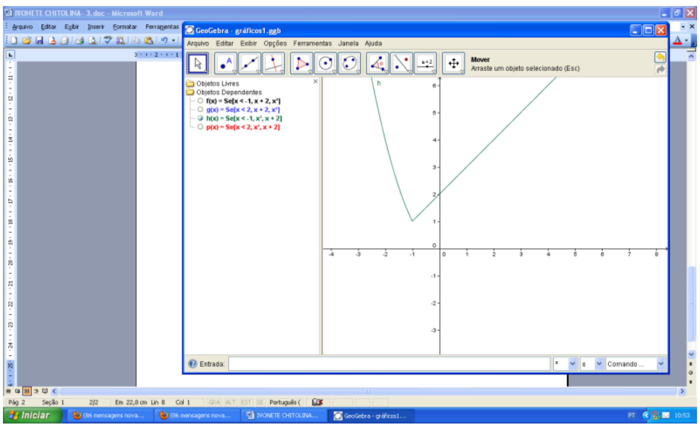

FIGURA 12: terceira representação da etapa 5 por P_5.

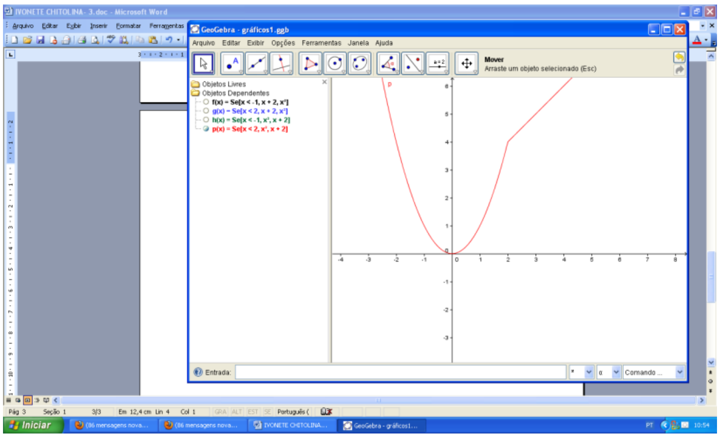

FIGURA 13: quarta representação da etapa 5 por P_5.

Podemos observar, nas janelas algébricas das quatro figuras, que P_5 caracterizou as funções em quatro campos de definição diferentes, deixando ativa apenas uma de cada vez. Na Figura 10 considerou para x< -1 a lei linear e para x>-1 a lei quadrática e na Figura 12 mantém a variação, mas inverte as leis. Faz algo semelhante nas Figuras 11 e 13, porém considera como domínio o que ocorre com x<2 e x>2.

Intuímos que a escolha dos valores x=-1 e x=2 foi feita com base na Figura 6, a qual apresenta os gráficos das duas leis tendo por abscissas dos pontos de intersecção esses valores.

Considerações finais

Os resultados da investigação corroboram com o citado por Leão e Bisogin (2009) a respeito dos estudos de Tall e Vinner. Ao não iniciarmos a oficina pela definição formal de função, foi possível a obtenção correta dos gráficos por meio do resgate de seus aspectos visuais.

Os pesquisadores consideram que a oficina se constituiu em uma estratégia eficaz de ensino e aprendizagem de funções definidas por duas sentenças, como indicado por Frota (2009), pois alguns participantes somente conseguiram a representação gráfica com o uso do GeoGebra.

O software foi um facilitador no processo visual de formação de conceito e na comunicação de imagens visuais, pois ao possibilitar o uso do recurso de exibir objeto foi possível passar de uma função para outra, comparando seus gráficos, de maneira dinâmica, o que pode ser ilustrado por P_5, nas Figuras 10, 11, 12 e 13.

Outra importante contribuição do GeoGebra para a oficina surgiu no inicio das atividades uma vez que ao inserir na janela de entrada uma lei com o nome f, por exemplo, e depois inserir uma segunda lei com o mesmo nome, o software apaga a primeira para representar a segunda. Isso fez com que os investigados fossem obrigados a representar as duas leis com letras diferentes, fornecendo indicativo de que elas, consideradas separadamente, não poderiam representar a mesma função, abrindo espaço para discussão da necessidade de se ter uma única imagem.

No decorrer da análise dos dados coletados foi possível observar que grande parte dos participantes da oficina, intuitivamente, separou cada lei em um subconjunto dos números reais de forma a obter uma função contínua. A análise desses registros, à luz de categorias estabelecidas, é parte da pesquisa qualitativa dos autores e deverá constituir novos trabalhos que comprovam a relevância do GeoGebra no ensino e na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.

Referências

ALVES-MAZZOTTI, A.J. *O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa.* 2 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

EISENBERG, T.; DREYFUS, T. On the reluctance to visualize in Mathematics. In: ZIMERMANN, W. e CUNNINGHAM, S. (Eds.). *Visualization in teaching an learning mathematics.* Washington, USA: Mathematical Association of America, 1991. pp.25-37.

FONTE, Rachel B. Discutindo as dificuldades dos alunos na visualização gráfica da solução da equação de uma reta. In: *Boletim GEPEM*, n. 56 – JAN./JUN. 2010, 15-29.

FROTA, M. C. R Estratégias para o ensino-aprendizagem de funções com um foco no pensamento visual. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - IV SIPEM. Anais... Brasília, (CD-ROM), 2009.

LEÃO, A. S. G. e BISOGNIN, V. Construção do conceito de função no Ensino Fundamental por meio da metodologia de resolução de problemas. In: *Educação Matemática em Revistas* – RS, n. 10, Vol. I, 2009, 27-35.

LEIVAS, J. C. P. *Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática.* 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009, 294p.

MAMMANA, Carmelo; VILLANI, Vinicio. Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: Discussión Document for an ICMI Study. In: *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1998. 337-345.

PRESMEG, Norma C. Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics,* v. 17, n. 3, p. 297-311, 1986.

______. Research on visualization in learning and teaching mathematics. In:

GUTIERREZ, A.; BOERO, P. (Ed.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future.* Rotterdam: Sense Publishers, 2006. p. 205-235.

SOARES, E. M. do S.; LIMA, I. G. de; SAUER, L. Z. Educação Matemática em Ambientes Virtuais: gestão pedagógica nesse cenário. In: *Educação Matemática em Revistas* – RS, n. 9, 2008, 17-25.