POSIBILIDADES DE LA CALCULADORA SIMBÓLICA TI-92 PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS: PROPUESTAS DE TRABAJO

Matías Camacho Machín
Alejandro S. González-Martín
Marta Rojas González

Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo se presenta, en primer lugar, una reflexión general sobre la importancia que van adquiriendo cada vez más las calculadoras gráficas y simbólicas en el desarrollo del currículo de Matemáticas para la Secundaria, para, a continuación, describir algunas investigaciones que se desarrollan en la actualidad. Por último, mostramos las líneas de una investigación que se basa principalmente en la resolución de actividades de manipulación y simulación por estudiantes de Bachillerato utilizando la calculadora simbólica TI 92.

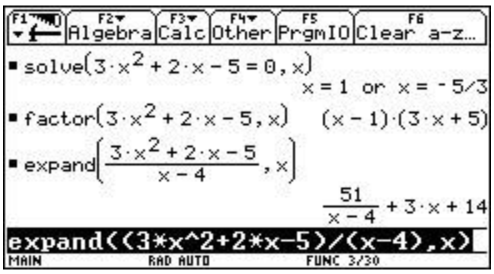
Abstract

In this paper we present, first of all, a general reflection about the increasing importance that graphic and symbolic calculators are acquiring in the development of Mathematics curriculum for Secondary Education. We continue describing some researches carried out nowadays. Finally, we show the guidelines of a research based, fundamentally, in the resolution of manipulation and simulation activities by pre-university students while using the symbolic calculator TI-92.

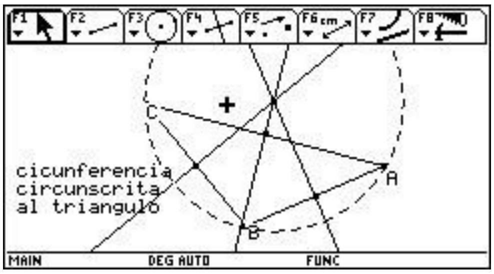
Introducción

Desde los comienzos de la década pasada, ha proliferado en el mercado una nueva clase de calculadoras con objetivos fundamentalmente educativos, cuyas posibilidades gráficas, geométricas, numéricas y simbólicas, en algunos casos, pueden revolucionar la enseñanza de las Matemáticas y materias afines. Éste es el caso de la TI-92 que, dadas sus posibilidades de trabajo en diferentes sistemas de representación, puede constituirse como un buen mediador didáctico en el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Esta calculadora, que puede ser considerada como un híbrido entre una calculadora gráfica y un ordenador, tiene implementados parcialmente dos clases de software, ampliamente utilizados (al menos en otros países) en la enseñanza de las Matemáticas: el DERIVE (programa de cálculo simbólico) y el CABRI GÉOMÈTRE, (programa de geometría dinámica) y permite, ente otras cosas, trabajar con aspectos propios del currículo de Secundaria, tales como:

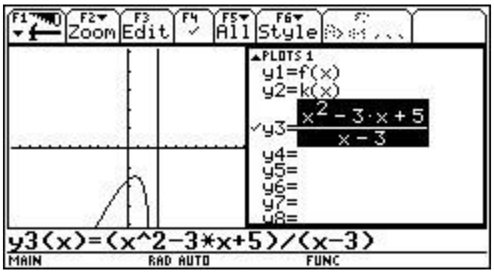
- Operar con números enteros, racionales, reales e incluso números complejos, expresados en todas sus formas.
- Definir funciones y obtener sus representaciones gráficas, construir tablas para los valores de las funciones de una variable, en su formas paramétrica, cartesiana y polar.
- Resolver ecuaciones, encontrar ceros de funciones, factorizar y desarrollar expresiones algebraicas.



- Construir y explorar dinámicamente objetos geométricos de forma interactiva.



- Organizar, visualizar, procesar y analizar datos.



- Escribir, ordenar, editar y ejecutar programas.
- Operar con listas, vectores y matrices cuyas entradas sean números racionales, reales o complejos.

Ahora bien, es claro que con una herramienta como ésta, es necesario analizar el currículo de Secundaria desde otra perspectiva. No se pueden plantear de la misma manera que la que se hace en la enseñanza tradicional las situaciones y problemas de Matemáticas, dado que con una de estas calculadoras los aspectos exclusivamente instrumentales propios (practicados en exceso muchas veces) de las Matemáticas no tendrán sentido si no se orientan de una forma adecuada. Habrá, por tanto, que establecer modificaciones en el currículo, y, como consecuencia, desarrollar investigaciones dirigidas a articular los conocimientos de los alumnos en torno a este nuevo instrumento.

Desde el punto de vista institucional, existen grandes dificultades para disponer de ordenadores en los centros pese a que explícitamente aparezca mencionado su uso en el currículo del Bachillerato. Las calculadoras de esta última generación podrían paliar de alguna forma los problemas de dotación de ordenadores. En nuestra Comunidad Autónoma, el profesorado de Secundaria es cada vez más consciente de este hecho y, concretamente, un grupo bastante significativo de éste presentó en las XVIII Jornadas de las Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas (febrero de 1998) un documento en el que se solicitaba a las autoridades educativas la dotación necesaria de estas calculadoras para los centros de Secundaria. En ese documento, después de una exposición en la que se resaltan los aspectos normativos relativos al uso de las calculadoras y/u ordenadores en algunos de los bloques específicos del Bachillerato que recoge la ley, se señala que:

...consideramos que una vía clara (y considerablemente barata) para mejorar las condiciones de implantación del nuevo currículo de Matemáticas en el Bachillerato podría ser la de dotar a cada Centro con un lote de calculadoras gráficas y una unidad de retroproyección, junto con el correspondiente plan de formación del profesorado.

Además, nos atrevemos a asegurar que la diferencia de coste justificaría que se compraran máquinas de última generación, con cálculo simbólico y geometría dinámica…

Y, a continuación, detalla un conjunto de ventajas, no solamente de orden económico, sino metodológico y didáctico.

Los recientes currículos para la Educación Secundaria (Obligatoria y Bachillerato) explicitan aún más la necesidad de utilizar para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas lo que se denominan Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) entre las que se encuentra el uso de las calculadoras gráficas. Más concretamente señala:

... este currículo se decanta decididamente por la utilización del software educativo en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, a sabiendas de que esta propuesta conlleva dos premisas: la suficiente presencia en las aulas de calculadoras gráficas y ordenadores, y la necesaria formación del profesorado en el uso de entornos informáticos desde un punto de vista didáctico. [1]

Concretamente, entre los Objetivos de Matemáticas para la Educación Secundaria Obligatoria podemos leer:

Utilizar hábilmente y con sentido crítico los distintos recursos tecnológicos (calculadoras, programas informáticos, Internet) para ayudar en el aprendizaje y en las aplicaciones de las Matemáticas.

En los procedimientos:

... Uso de la calculadora para realizar y verificar operaciones, para reflexionar sobre conceptos y para descubrir propiedades.

Y en las actitudes:

... Disposición favorable al uso adecuado de diferentes instrumentos de medida, de la calculadora y de las tecnologías de la información.

Además se señalan sus múltiples usos, no sólo numérico y algebraico, sino también geométrico debido a la incorporación de un software de Geometría Dinámica:

[1] BOC nº 55 del 22 de abril de 2002. *Currículo de Matemáticas en la ESO*

... El uso de programas informáticos específicos en Geometría puede ser un apoyo para afianzar y comprender distintos conceptos, transformaciones y construcciones geométricas, mosaicos, comprobaciones de propiedades, etc.

También en el currículo de Bachillerato se hace mención a este recurso didáctico: *...Es necesario el uso de todos aquellos recursos tecnológicos (calculadoras gráficas, programas informáticos e Internet) que resulten adecuados para facilitar la visualización, la comprensión, la experimentación, la reflexión, el análisis, así como para el desarrollo de procedimientos rutinarios.* [2]

En el bloque de estrategias, habilidades, destrezas y actitudes, se dice:
Manejo de distintos recursos y fuentes documentales: calculadora científica, gráfica, ordenador, Internet, diccionarios, enciclopedias,...
Debemos tener en cuenta, por último, que la utilización de software apto para enseñar Matemáticas debe ser parte de un proceso integral de enseñanza y aprendizaje; no se trata de utilizar calculadoras gráficas u ordenadores en momentos concretos, lo importante es que su disponibilidad esté garantizada en todas las tareas del quehacer matemático.

Algunas investigaciones

Desde la aparición de las calculadoras gráficas, se han desarrollado en distintos países (Francia, Holanda, EE.UU.) cursos y proyectos de investigación dirigidos a generalizar su uso en la enseñanza de las Matemáticas, en general, y del Análisis Matemático en particular.

[2] B.O.C. nº 59 del 8 de mayo de 2002. *Currículo de Matemáticas en el Bachillerato.*

En EE.UU. se desarrolla desde 1986 el proyecto C^2PC (Calculator and Computer Pre-Calculus Project) cuyo objetivo principal consiste en el desarrollo de un currículo de Matemáticas para la Secundaria, analizando para ello las destrezas necesarias para la comprensión de los conceptos de función, gráficas de funciones y otros propios de la Geometría Analítica (véase Browning, 1989; Dunham y Osborne, 1991 y Dunham y Dick, 1994). Uno de los aspectos más interesantes de este trabajo consiste en el desarrollo de un proceso sistemático en la resolución de problemas, que atiende a las conexiones existentes entre las distintas representaciones (verbal, algebraica, numérica y gráfica) que se pueden obtener en el proceso de resolución de una situación problemática, para la cual las calculadoras gráficas son de gran utilidad. Remarcamos el hecho de que en este país el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), al publicar los Curriculum and Evaluation Standars en 1989, insiste en el hecho de que las calculadoras gráficas deben ser accesibles a todos los alumnos, ya que son "ordenadores portátiles" fáciles de transportar. En el año 2000 reafirman su opción por la tecnología, al señalar que:

Las calculadoras y ordenadores están dando nueva forma al paisaje matemático, y las Matemáticas escolares deberían reflejar estos cambios. Los estudiantes pueden aprender más Matemáticas más profundamente con el uso apropiado y responsable de la tecnología. Pueden hacer y comprobar conjeturas. Pueden trabajar en niveles más avanzados de generalización y abstracción".

Sin embargo, indican también el papel del profesor y del uso responsable de los nuevos medios:

El profesor debe tomar decisiones prudentes sobre cuándo y cómo utilizar la tecnología y debería asegurar que la tecnología está mejorando el pensamiento matemático de los alumnos

Se han realizado distintas investigaciones en las que se trata de comparar las destrezas a la hora de resolver problemas de estudiantes instruidos de forma tradicional y estudiantes preparados con del uso de calculadoras gráficas.

Tall (1996) indica que, pese a que los estudiantes muestran preferencia por alguna clase de representación (simbólica o gráfica), parece ser que los estudiantes con los que se realiza un trabajo experimental con calculadoras gráficas obtienen una mayor comprensión conceptual que aquellos con los que se desarrolla un trabajo tradicional.

Otros experimentos muestran cambios significativos cuando se usan calculadoras gráficas durante varios cursos (Quesada y Maxwell, 1994). También Artigue y Lagrange (1997) obtienen resultados que tienden a confirmar que el uso de CAS (Computer Algebra Systems) en un contexto apropiado puede promover el aprendizaje de las Matemáticas y ayudar a enriquecer las Matemáticas escolares con actividades interesantes (véase Artigue, 1996). Sin embargo, también hacen notar que las opiniones de los alumnos sobre el uso del software dependen en gran manera de la opción didáctica del profesor y de sus propias habilidades matemáticas (Guin y Touche, 1999).

Tall (1996) señala, además, que el uso de estas tecnologías provee de formas alternativas para aproximarse al concepto de función con ventajas y desventajas, pero que usadas con imaginación y bajo el control del estudiante, es evidente una mayor implicación del estudiante en las tareas, aunque las interpretaciones de las representaciones dependan del individuo.

Otro proyecto de investigación importante a nivel nacional que debemos mencionar es el proyecto que, sobre la utilización de la TI-92 en el aula, se desarrolla en la actualidad en Francia (la calculadora gráfica TI-92 se encuentra disponible en Francia desde 1996). La importancia de las representaciones gráficas y los métodos numéricos ha ido creciendo en el currículo de Secundaria francés; las normas curriculares oficiales ponen énfasis en el desarrollo de procesos experimentales, en los que las herramientas de cálculo juegan un papel significativo. El uso de calculadoras se ha convertido, por tanto, en un objetivo explícito en estos currículos y el Ministerio de Educación y Tecnología ha financiado varias investigaciones para promover la integración de nuevas tecnologías en la enseñanza. En 1990, el Ministerio de Educación Francés (en su iniciativa DITEN: *Direction de l'Information et des Technologies Nouvelles*) crea un grupo de trabajo nacional de unos 15 profesores cuya tarea era explorar el potencial de los CAS - y específicamente el DERIVE - para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, además de estudiar qué condiciones se requieren para utilizar este potencial al máximo. También debían experimentar y desarrollar materiales curriculares para profesores e investigar el impacto en la enseñanza de las Matemáticas prácticas pedagógicas, objetivos y contenidos del currículum, evaluación...). Este trabajo ha sido realizado desde 1993 hasta 1996 en el grupo DIDIREM (integrado, entre otros, por M. Artigue, M. Abboud, JP. Drouhard y J.B. Lagrange), trabajando en estrecha colaboración con el grupo DITEN:

A partir de 1996, el Ministerio de Educación Nacional redirige las experiencias de integración de programas de cálculo formal y comienza a favorecer experiencias con el uso de calculadoras gráficas y simbólicas. De este modo, subvencionó un proyecto nacional entre los años 1995 y 1998 que cubre diferentes niveles de Secundaria, mediante el cual trató de analizar la viabilidad de introducir desde el punto de vista institucional las calculadoras en el aula. En dicho proyecto participan profesores de Secundaria que han enseñado Informática (expertos) e investigadores de Didáctica de las Matemáticas. Los objetivos generales del proyecto son:

- *Entender cómo se construye la instrumentación de la calculadora, poniendo ésta en relación con las estrategias desarrolladas por los profesores, las condiciones institucionales y las características personales de los alumnos.*
- *Analizar los conocimientos que fundamentan esta instrumentación y analizar sus relaciones con los conocimientos esperados por la institución, investigar posibles conflictos y su manejo por parte de los profesores y alumnos.* (Artigue 1997).
- Varios grupos, repartidos por diferentes ciudades (Paris, Montpellier, Grenoble y Lyon) se ocupan de distintas parcelas de la investigación. Por ejemplo, los grupos de París y Montpellier se encargan de los aspectos de instrumentación e ingeniería.

La propuesta de trabajo

El proyecto que proponemos trata de analizar el papel que juega la TI-92 en un marco amplio de los sistemas de representación, en el que la visualización matemática constituye una visión global, integradora y holística que articula, libre de contradicciones, representaciones de varios sistemas, con el objetivo fundamental de facilitar un nivel más completo del aprendizaje de los conceptos de Análisis Matemático en el Bachillerato.

Se pretende experimentar en el aula, con la colaboración de un grupo de profesores de Secundaria, situaciones de modelización matemática y simulación de fenómenos físicos con el apoyo de la TI-92, de manera que los fenómenos representados se correspondan con el estudio de aspectos propios del análisis matemático.

El trabajo de investigación aparece dividido en 4 fases.

Fase 1. Elaboración de situaciones problemáticas de modelización y simulación de fenómenos físicos.

Fase 2. Instrucción en el aula del uso de la TI-92, con alumnos de primero y segundo de Bachillerato.

Fase 3. Estudio piloto que muestre las dificultades y avances en la comprensión de conceptos del uso de la TI-92 en la resolución de las actividades confeccionadas.

Fase 4. Análisis de los resultados y conclusiones.

En el desarrollo de la primera fase se estructurarán situaciones problemáticas en forma de Proyectos de Trabajo para los alumnos de Bachillerato, elaboradas mediante el siguiente esquema:

1. Objetivos.
2. Conocimientos previos.
3. Planteamiento general.
4. Actividades.

Se presentarán tres Proyectos con complejidad creciente, adaptadas de algunos trabajos que aparecen en la bibliografía consultada:

PROYECTO 1

OBJETIVOS

- Traducir un enunciado no elemental al lenguaje matemático.
- Modelizar una situación real por medio de un modelo geométrico.
- Visualizar dinámicamente la situación del problema.
- Comprender el significado de mínimo relativo.
- Coordinar el lenguaje habitual con diferentes sistemas de representación (geométrico, numérico, gráfico y algebraico).

- Usar técnicas del Análisis Matemático para resolver un problema y contrastar la solución con la obtenida anteriormente.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Elementos básicos de Geometría: perpendicularidad, distancia, ...
- Relaciones entre magnitudes físicas: espacio, velocidad.
- Reglas de derivación de funciones
- Técnicas de optimización

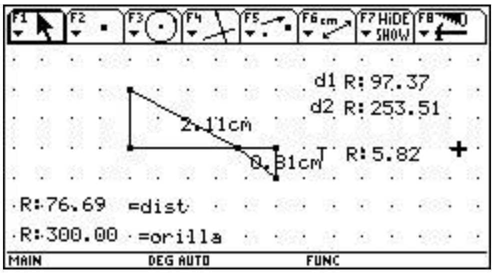
PLANTEAMIENTO GENERAL

Un náufrago logra salvarse y llegar a una isla desierta, donde construye una cabaña que se encuentra a 60 m de la costa (supongamos que tiene forma de línea recta). El barco naufragado se encuentra a 120 m de la costa y su perpendicular a la playa está a 300 metros de la cabaña.

El náufrago ha construido una balsa y debe ir muchas veces al barco semihundido a buscar cosas que aún pueden ser utilizadas. Camina a una velocidad de 130 m/min y navega con su balsa a una velocidad de 50 m/min ¿En qué lugar de la costa debe amarrar la balsa para minimizar el tiempo que tarda en realizar el trayecto?

Para su resolución tendremos:

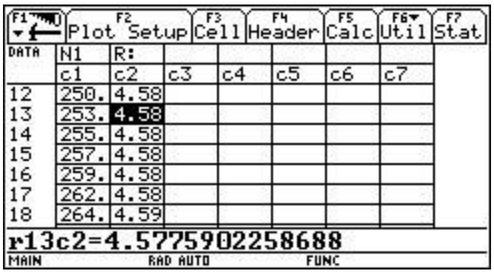
Etapa 1. Preparamos a escala una simulación en el entorno geométrico de la calculadora (CABRI) para el problema planteado:



El segmento horizontal representa la orilla, el punto de la parte inferior la cabaña y el punto de la parte superior simula el barco naufragado.

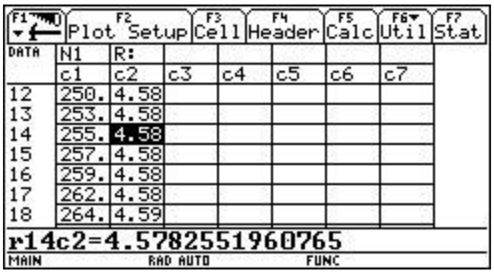
El punto que está sobre el segmento (acceso a la lancha) se puede desplazar sobre el segmento mediante una animación, con lo que se modifican las distancias.

Etapa 2. Recopilamos un conjunto amplio de valores en una tabla que responda a las distintas posibles soluciones de la simulación realizada, lo que conseguimos con una animación del punto situado sobre el segmento. Posibles valores de la función que queremos minimizarse muestran a continuación:



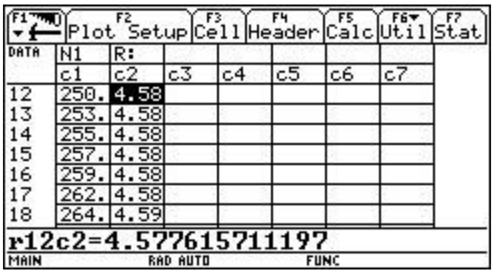
DATA	N1	R:					
	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
12	250.	4.58					
13	253.	4.58					
14	255.	4.58					
15	257.	4.58					
16	259.	4.58					
17	262.	4.58					
18	264.	4.59					

r13c2=4.5775902258688

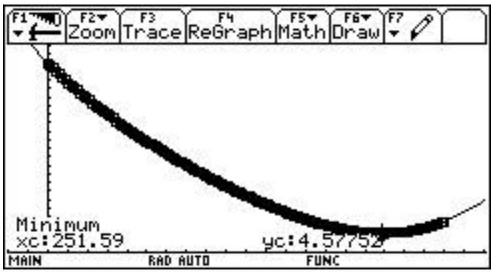


DATA	N1	R:					
	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
12	250.	4.58					
13	253.	4.58					
14	255.	4.58					
15	257.	4.58					
16	259.	4.58					
17	262.	4.58					
18	264.	4.59					

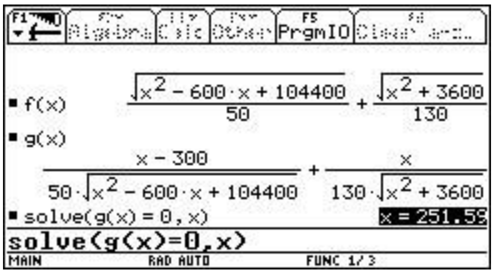
r14c2=4.5782551960765



Etapa 3. Representamos puntualmente los valores de la tabla en una gráfica con lo cual podremos obtener el valor aproximado que optimiza el problema.



Etapa 4. Se resuelve analíticamente el problema de optimización, estableciendo para ello la función que define el problema.



ACTIVIDADES

En primer lugar, se planteará a los alumnos la resolución *general* del problema, esto es, cuando el náufrago camina a una velocidad de *a* m/min y nada a otra de *b* m/min. Una vez abordada esta cuestión, también se tratará de estudiar el caso en el que la costa tiene *M* metros, el barco se encuentra a *N* metros de la costa su perpendicular está a *L* metros de la cabaña. De esta forma, los estudiantes pueden ver que las herramientas del Cálculo permiten la resolución *general* de las situaciones-problema.

Se plantearán posteriormente otros problemas de optimización de naturaleza similar para comprobar si son capaces de traducir los nuevos enunciados al registro geométrico, numéricos gráficos al lenguaje algebraico.

Una clasificación de los tipos de problemas de optimización que suelen encontrarse en los libros de Bachillerato, se puede ver en Camacho y GonzálezMartín (2001).

PROYECTO 2

OBJETIVOS

- Resolver un problema de optimización práctico (se puede utilizar materiales manipulativos).
- Plantear las ecuaciones para optimización en un contexto complejo.
- Estudiar la variación del volumen de un cono en función de la circunferencia de su base y de su altura.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Volumen del cono.
- Expresar una magnitud en función de las variables de las que depende.
- Técnicas generales de optimización.

PLANTEAMIENTO GENERAL

a) Dado un trozo de cartulina en forma de círculo, si recortamos un sector circular (fig.1) y unimos los lados de dicho sector, se obtiene un cono de base el círculo de la fig. 2 y semi-sección vertical el triángulo de la fig.3. Consideremos la circunferencia de partida de radio unidad. Si queremos que el cono construido tenga volumen máximo, ¿qué porción del círculo debemos usar?[3]

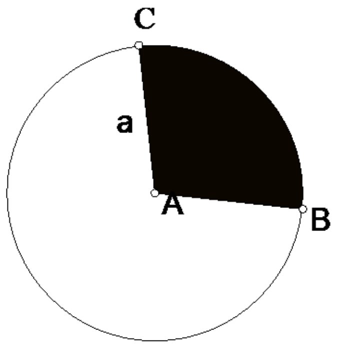


fig.1

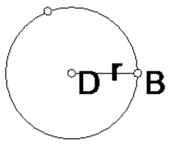


fig. 2

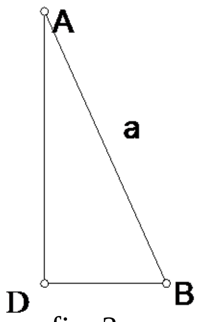


fig. 3

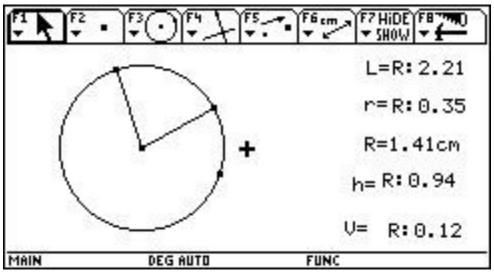
b) ¿Cómo debería dividirse el círculo para que la suma de los volúmenes de los dos conos sea lo mayor posible?

En síntesis, tendríamos:

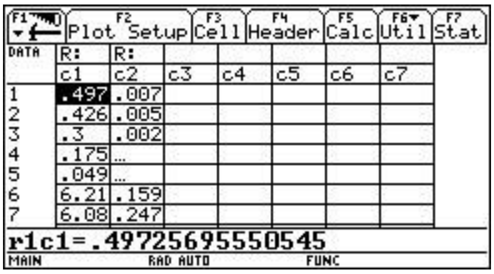
Etapa 1. Preparar una simulación en el entorno geométrico de la calculadora (*Cabri*)

---

[3] Waits, B.; Loughart, K.; Loughart, F. (1998) Le role des calculatrices symboliques dans la reforme de l'enseignement des matématiques. En Guin, D (ed.) *Calculatrices symboliques et geometriques dans l'enseignement des matématiques* IREM. Montpellier. 39-47

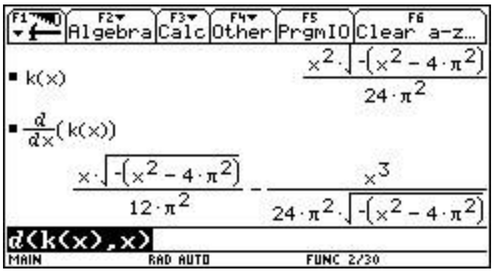


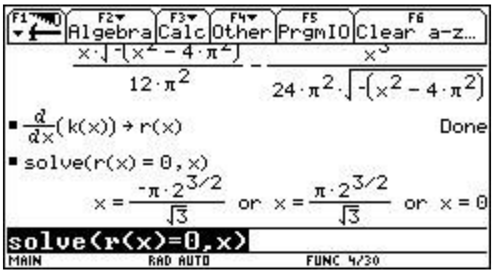
Etapa 2. Recopilar un conjunto amplio de valores en una tabla que responda a las distintas posibles soluciones de la simulación realizada.



Etapa 3. Representar y resolver gráficamente la simulación desarrollada, utilizando la tabla de valores.

Etapa 4. Resolver desde el punto de vista del Análisis Matemático la situación descrita por el siguiente problema.





PROYECTO 3

OBJETIVOS

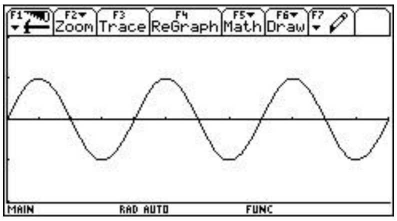
- Introducir el movimiento sinusoidal amortiguado.
- Modelar una aplicación del mundo real mediante funciones de la forma $h(t) = ab^t\, sen(ct)$.
- Ilustrar la conexión entre los aspectos físicos y matemáticos de los fenómenos.

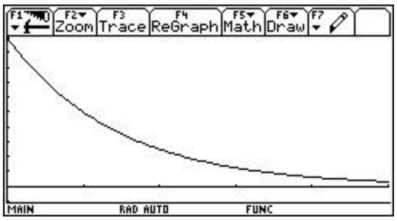
CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Amplitud, período, traslación vertical de las funciones seno y coseno.
- Funciones exponenciales.

PLANTEAMIENTO GENERAL

Las funciones de la forma $f(t) = ab^t$, con $0<b<1$ y $g(t)= sen\ (ct)$, siendo c una constante, pueden ser combinadas para dar lugar a las que se denominan funciones sinusoidales amortiguadas de la forma $h(t)= ab^t\, sen(ct)$ gráficamente vendrían las 3 funciones representadas por:

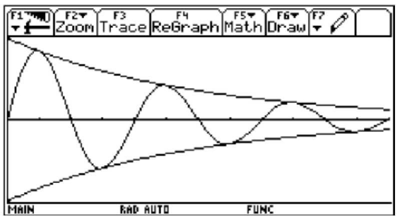




t

$g(t) = sen(ct)$

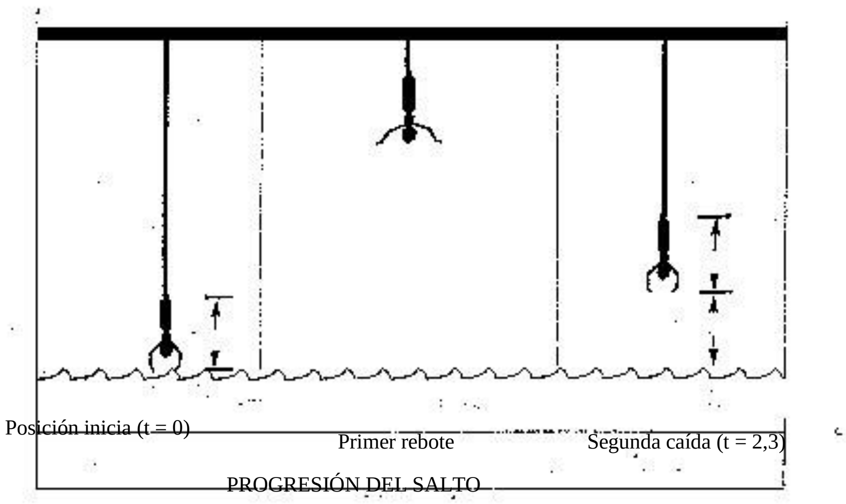
$f(t) = ab$



$h(t) = ab^t$

Se pide utilizar la calculadora para representarlas para diferentes valores de los parámetros *a* y *c*.

Una función de esta clase modeliza el movimiento de un saltador de puentes, dado que el movimiento que describe se va atenuando hasta que el saltador se para. Supongamos que la altura del puente es 60 metros. La situación del salto aparece representada en la siguiente gráfica:



Después de balancearse varias veces, finalmente empieza a estabilizarse a unos 15 metros sobre la superficie del agua. La altura desde los pies del saltador a la superficie del agua, podemos aproximarla como una función que depende del tiempo y cuya expresión es

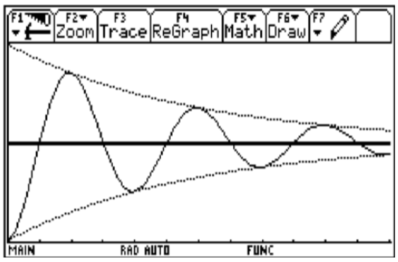
$$h(t)= 15 - ab^t \cos(ct). \qquad (1)$$

ACTIVIDADES

1. Usar el hecho de que $h = 2{,}1$ m cuando $t = 0$ para encontrar el valor de a en la fórmula

$$h(t)= 15 - ab^t \cos(ct).$$

(Véase la figura)



2. Encontrar c determinando el período de la función coseno con los datos dados.
3. Teniendo en cuenta que $h = 6{,}6$ m cuando $t = 2{,}3$ segundos, encontrar b. Escribir la función que define el movimiento.
4. Obtener en la calculadora su representación gráfica para determinar si pasa por los puntos (0 , 2,1) y (2,3 , 6,6).
5. ¿Por qué usamos el signo menos en la expresión (1)?
6. ¿Por qué usamos la función coseno en lugar de la función seno?
7. ¿Cuál es el significado físico del número 15 en la fórmula de $h(t)$?

8. Usar una traslación apropiada para escribir la función (1) utilizando el seno en lugar del coseno. Hacer uso de la calculadora para representar gráficamente ambas funciones. Si las dos gráficas son diferentes, ajustar la nueva función e intentarlo nuevamente. Escribir la expresión analítica de esta nueva función.

A modo de conclusión

Hemos presentado a lo largo de este trabajo una serie de consideraciones generales sobre el uso de las calculadoras gráficas y simbólicas en las aulas de Secundaria basadas en distintas investigaciones desarrolladas en otros países, con la intención de proponer para nuestros estudiantes proyectos de trabajo que puedan ser efectivos para conseguir una mejor comprensión de algunos conceptos matemáticos complejos y para tratar de articular estos proyectos con las actividades que actualmente resuelven los estudiantes de Bachillerato.

Esperamos en un futuro inmediato continuar con estas líneas de investigación para obtener con ello materiales curriculares útiles y de validez probada mediante la experimentación.

Referencias bibliográficas

ARTIGUE, M. (1996). Using computer algebraic systems to teach Mathematics: A didactic perspective. *Teaching Mathematics, the relationship between knowledge, curriculum and practiec* (ADIREM, des.), Pont à Mousson; Topique Éditions, 223.240.

ARTIGUE, M. (1997). La integración de calculadoras gráficas y formales en la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato. *Actas del RELME 11*. México. (en prensa)

ARTIGUE, M.; LAGRANGE, J.B. (1997). The use of computer algebra in Middle Secondary Mathematics, Part 1: Pupils learning Albebra with DERIVE; A didactic perspective, *Zentralblatt für Didaktk der Mathematik*, vol. 4, 105112.

BOC nº 55 de 22 de abril de 2002, *Currículo de Matemáticas en la ESO.*

BOC nº 59 de 8 de mayo de 2002, *Currículo de Matemáticas en el Bachillerato.*

BROWNING, C. A. (1989). *Characterizing levels of understanding of functions and their graphs (Doctoral dissertation)*, The Ohio State University, 1988). Dissertation Abstracts International, 49, 2957A.

CAMACHO, M.; GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. (2001). Análisis de problemas de optimización en libros de Bachillerato y resolución con la TI-92. Aula. *Revista de Investigación y enseñanza. Universidad de Salamanca*, vol. 10, 137152.

DUNHAM, P.H.; DICK, T.P. (1994). Research on graphing calculators. *Mathematics Teacher*, 87, 440-445.

DUNHAM, P.H.; OSBORNE, A. (1991). Learning how to see: Students graphing difficulties. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 13(4), 3549.

GUIN, D. TROUCHE, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 3, 195-227.

QUESADA, A.R.; MAXWELL, M.E. (1994). The effects of using graphing calculators to enhance college students' performance in precalculus. Educational Studies in Maths, 27,pp. 205-215.