FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA V
ISSN: 1695-6613

REPRESENTACIÓN VISUAL Y EDUCACIONAL DE LA REGLA DE LA CADENA EN UNA Y VARIAS VARIABLES

José Ángel Dorta Díaz

Universidad de La Laguna

Resumen

El objetivo de este artículo es ofrecer a los estudiantes una visión general de la "Regla de la cadena" en la que se conjugan diversas facetas que comparecen en su conceptualización. En una primera instancia, se intentaría proporcionar, desde una perspectiva numérica, el significado de "la variación de la variación" en una variable para, posteriormente, generalizar las ideas a funciones vectoriales. Desde un punto de vista simbólico y visual, complementamos otros aspectos de tal regla para, finalmente, pasar a una simulación en Maple V dentro ya de una fase manipulativa.

Abstract

The objective of this article is to offer the students a general vision of the "Chain Rule" where diverse facets that appear in its conceptualization are conjugated. Firstly, we try to provide, from a numeric perspective, the meaning of the "variation of the variation" in one variable, and later we generalise these ideas to vectorial functions. From a symbolic and visual point of view, we supplement other aspects of this Rule, and finally, into a manipulative phase, we show its simulation in Maple V.

Diálogo entre Cauchy y Weierstrass (Tomado de Hairer y Wanner)

P: ¿Qué es en realidad una derivada?

R: Un límite

P: ¿Qué es en realidad una integral?

R: Un límite

P: ¿Qué es en realidad una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

R: Un límite

P: ¿Qué es en realidad un límite?

R: Un número

P: ¿Qué es en realidad un número?

Y entonces Karl Weierstrass se puso a investigar la construcción de los números reales

Sobre la regla de la cadena en una variable

Entre la amplia gama de representaciones que puede ostentar un número real destacamos que se puede interpretar como una razón de cambio o variación. Por ejemplo, si pensamos en la función lineal de R en R, y=f(x)=2x+1, el número 2 que está multiplicando a la variable "x" representa en una visualización cartesiana la *variación de la ordenada por unidad de variación de la abscisa* (Figura 1) en todos los puntos de R.

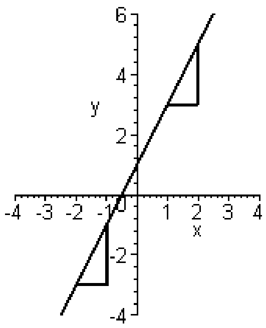

Figura 1

Paralelamente, el número 2 representa la “derivada” de la función y=f(x) respecto de la variable x, que simbolizamos:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2 = y'(x) = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Por otra parte, los maestros en la escuela primaria y los padres en casa enseñan reglas técnicas para estudiar; entre ellas, las más socorridas son las de resumir y esquematizar; así pues, los estudiantes “sintetizan” para, posteriormente, “analizar” y “desarrollar”.

Si tuviéramos que expresar la regla de la cadena, tal como todos la conocemos, en su más reducida simbolización, la formularíamos mediante un punto: “•”, imagen del producto. La regla de la cadena en una y varias variables, como sabemos, es el procedimiento para obtener la derivada de la función compuesta (o de una función de función) con las connotaciones particulares que en ambos casos conlleva, y en el fondo lo que subyace es un efecto multiplicador de una variación (un número) sobre otra variación (otro número), claro está, para el caso de una variable; para analizarlo mejor, exponemos sucintamente tres ejemplos.

Ejemplo 1

Imaginemos que disponemos de dos funciones lineales de R en R, f(x) y g(x), y de su composición h(x)=(gof)(x)=g(f(x)):

$$f(x) = 4x - 1 \qquad g(x) = \frac{x}{2} + 1 \qquad g(f(x)) = 2x + \frac{1}{2}$$

Nótese que, en este caso sencillo, la variación de la función compuesta en cualquier punto de R es la constante 2, que resulta del "producto" de la variación de g(x), 1/2, por la variación de f(x), 4; ello puede comprobarse visualmente en la Figura 2; al mismo tiempo, presentamos esquemáticamente las notaciones de Leibniz, Newton y Algebraica con simbolizaciones adecuadas.

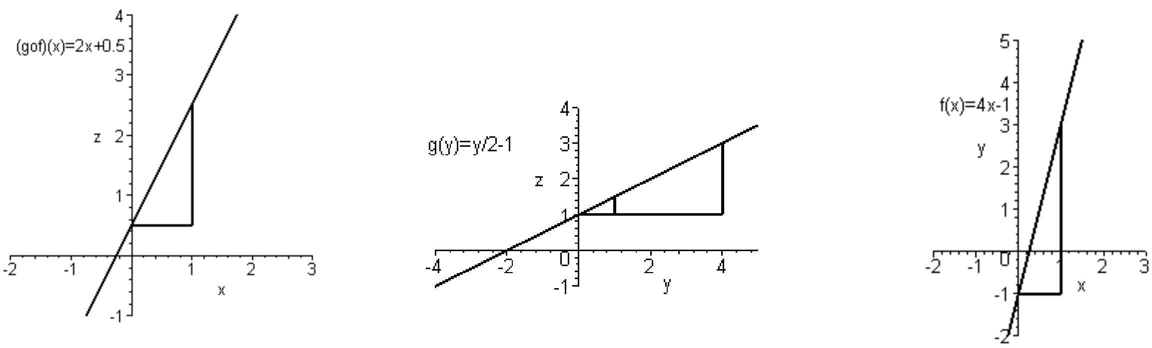

Figura 2

2 = 1/2 • 4

2 = ½ • 4 Regla de la Cadena en una variable

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \bullet \frac{dy}{dx}$$ Notación de Leibniz

$z'(x) = z'(y) \bullet y'(x)$ Notación de Newton

Nota aclaratoria: $z=z(y)= (½)y+1$; $y=y(x)=4x-1$; $z=z(x)= (½)(4x-1)+1=2x+½$

$f:R\rightarrow R$ $g:R\rightarrow R$ $h=gof:R\rightarrow R$

f(x)=4x-1 g(x)= (½)x+1 h(x)=(gof)(x)=2x+½

h'(x)=(gof)'(x)=g'(f(x)) • f'(x) Notación algebraica

2 = ½ • 4

Ejemplo 2

Presentamos a continuación un ejemplo (Figura 3) en el que f(x), g(x) y (fog)(x) no son lineales. Obsérvese que la función derivada de cada una de estas tres funciones es variable, pero su comportamiento (razón o variación instantánea de cambio) en el punto $x_0=1$ es el siguiente: f'(1)=4, g'(1)=1/2 y (gof)'(1)=2, lo cual queda reflejado debajo de la Figura 3; nótese además que la variación de gof en $x_0=1$, que es 2, es el "producto" de los números 4 y 1/2, que representan la respectivas variaciones de f(x) y g(x) en el punto $x_0=1$.

$$\mathrm{f}(x) = 2x^2 - 1 \qquad \mathrm{g}(x) = \frac{x^3}{6} + 2 \qquad \mathrm{h}(x) = \frac{(2x^2-1)^3}{6} + 2$$

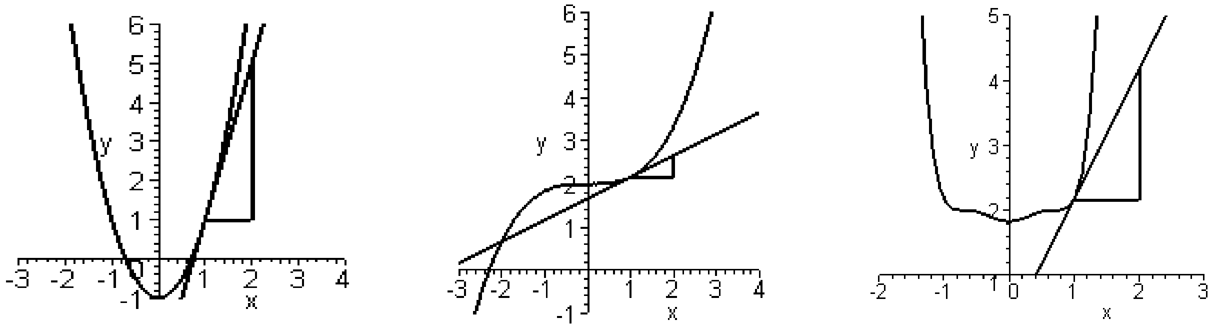

Figura 3

$$\frac{\mathrm{df}(x)}{dx} = 4x \qquad \frac{\mathrm{dg}(x)}{dx} = 3x^2/6 \qquad \frac{dh}{dx} = 2(2x^2-1)^2 x$$

4 • 1/2 = 2

Esquemáticamente tendríamos:

Regla de la cadena:	h'(x) = (gof)'(x)	=	g'(f(x))	•	f'(x)
En general:	$2(2x^2 -1)^2\ x$	=	$3(2x^2 -1)/6$	•	4x
En x_o=1:	2	=	1/2	•	4

Ejemplo 3

Disponemos de un globo esférico. Su volumen, (4/3) πr^3, depende del radio r; supongamos que el radio depende del tiempo t en la siguiente forma: r(t)=3t. Así pues, podemos definir el volumen en función del tiempo como aparece más abajo. Representamos en la Figura 4 las gráficas de r(t), v(r) y v(t), y de sus razones de cambio: r'(t)=3, v'(r)= $4\pi r^2$ y v'(t)=$108\pi t^2$.

$\mathbf{r}(t) = 3\,t$ $\qquad$ $\mathbf{v}(r) = \dfrac{4\,\pi\,r^3}{3}$ $\qquad$ $\mathbf{v}(t) = 36\,\pi\,t^3$

Figura 4

dr/dt=3	dv/dr= $4\pi r^2$	dv/dt= 3•36•πt^2

Esquemáticamente tendríamos:

Regla de la cadena con notación de Leibniz:	dv/dt	=	dv/dr	•	dr/dt
En general:	$108\ \pi t^2$	=	$4\ \pi\ (3t)^2$	•	3
En t=1:	108π	=	36π	•	3

La regla de la cadena en general nos dice que si f derivable en x_o y g derivable en $f(x_o)$, entonces gof es derivable en x_o y se tiene:

$$(gof)'(x_o) = g'(f(x_o)) \bullet f'(x_o)$$

lo cual no es más que la igualdad siguiente:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\mathrm{gof}(x) - \mathrm{gof}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\mathrm{f}(x) \to \mathrm{f}(x_0)} \frac{\mathrm{g}(\mathrm{f}(x)) - \mathrm{g}(\mathrm{f}(x_0))}{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0)} \bullet \lim_{x \to x_0} \frac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0)}{x - x_0}$$

que resulta evidente si tenemos en cuenta la continuidad de f y g en x_o y $f(x_o)$, respectivamente.

Un ejemplo significativo de esta regla lo encontramos en la derivada de la función arcsen(f(x)). Sean g(x) = arcsen(x) y f(x) una función genérica derivable en un cierto dominio de R; entonces h(x)=(gof)(x)=arcsen(f(x)) y la derivada de esta función compuesta será:

$$(gof)'(x) = g'(f(x)) \,.\, f'(x) = (\arcsin(f(x)))' =$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin(\mathrm{f}(x)) = \frac{\frac{d}{dx} \mathrm{f}(x)}{\sqrt{1 - \mathrm{f}(x)^2}}$$

que en realidad es el “producto” de la derivada de la función arco seno en el punto genérico f(x) por la derivada de la función f(x) respecto de x.

Simulación de la Regla de la cadena en una variable

Utilizando el software Maple V, los estudiantes pueden “simular” esta regla de la cadena**,** h'(x) = (gof)'(x) = g'(f(x)) · f'(x), en una variable, desde varios puntos de vista:

a) Simbólicamente:

```
> restart:
> (g@f)(x);
```

$$g(f(x))$$

```
> Diff(%,x)=diff(%,x);
```

$$\frac{d}{dx}\,g(f(x)) = D(g)(f(x))\left(\frac{d}{dx}\,f(x)\right)$$

b**) Mediante ejemplos:**

b.1) Si tomamos una función genérica f(x) y la función g(x) = cos(x), entonces (gof)(x)=cos(f(x)).

```
> g:=x->cos(x);
```

$$g := \cos$$

```
> (g@f)(x);
```

$$\cos(f(x))$$

```
> Diff((g@f)(x),x)=diff((g@f)(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}\,\cos(f(x)) = -\sin(f(x))\left(\frac{d}{dx}\,f(x)\right)$$

b.2) Si tomamos la función h(x)=cos(1/x^2), compuesta de f(x)= 1/x^2 y de g(x)=cos(x), la derivada de h(x)=(gof)(x) sería:

```
> cos(1/(x^2));
```

$$\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

```
> diff(%,x);
```

$$2\,\frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^3}$$

Obsérvese que Maple proporciona el resultado final de la derivada de la función compuesta correctamente, pero no se observa claramente que estamos ante el producto de los dos factores g'(f(x)) y f'(x).

Comprobemos que al multiplicar g'(f(x)) por f'(x) se obtiene idéntico resultado.

Para ello definamos funcionalmente f y g.

```
> f:=x->1/x^2;g:=x->cos(x);
```

$$f := x \to \frac{1}{x^2}$$

$$g := \cos$$

```
> diff(g(x),x);
```

$$-\sin(x)$$

```
> derivadadegenf(x):=subs(x=f(x),%);
```

$$\mathrm{derivadadegenf}(x) := -\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

```
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -2\,\frac{1}{x^3}$$

```
> %*%%;
```

$$-\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2\,\frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^3}$$

c) Numéricamente:

Sería conveniente que los estudiantes realizaran ejemplos numéricos "paso a paso" para comprobar la regla. Retomando las dos funciones del ejemplo anterior y si consideramos el punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$, tendrá que cumplirse la igualdad:

$$(g \text{ o } f)'(\pi/2) = g'(f(\pi/2)) \cdot f'(\pi/2)$$

```
> restart:
> f:=x->1/x^2;g:=x->cos(x);h:=(g@f) (x):
```

Al primer miembro de la igualdad que se debe verificar lo denotaremos por M_1.

M_1= (g o f)'(π/2); calculémoslo:

```
> M[1]:=evalf(subs(x=Pi/2,diff(h,x)));
```

$$M_1 := 0.2034583893$$

Al segundo lo simbolizaremos por $M_2 = g'(f(\pi/2)) \cdot f'(\pi/2)$; veamos que coincide con M_1:

```
>M[2]:=evalf(subs(x=f(Pi/2),diff(g(x),x))*subs(x=Pi/2,
diff(f(x),x)));
```

$$M_2 := 0.2034583893$$

d) Extensiones.

Formalmente, la regla de la cadena para tres funciones f, g y h toma la forma:

$$(hogof)'(x)= h'((gof)(x))\, g'(f(x))\, f'(x) \quad (1)$$

La función estudiada en los dos casos anteriores, $j(x)=\cos(1/x^2)$, la podemos considerar como composición de las tres siguientes: $f(x)=1/x$, $g(x)= x^2$ y $h(x)=\cos(x)$. Denotando por M_1 y por M_2 el primero y segundo miembro de (1), podemos comprobar numéricamente la igualdad en el punto π/2.

```
> restart:f:=x->1/x;g:=x->x^2;h:=x->cos(x);j:=(h@g@f)
(x);
```

$$f := x \to \frac{1}{x}$$

$$g := x \to x^2$$

$$h := \cos$$

$$j := \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

```
> M[1]:=evalf(subs(x=Pi/2,diff(j,x)));
```

$$M_1 := 0.2034583893$$

```
>M[2]:=evalf(subs(x=(g@f)(Pi/2),diff(h(x),x))*subs(x=f
(Pi/2),diff(g(x),x))*subs(x=Pi/2,diff(f(x),x)));
```

$$M_2 := 0.2034583893$$

Sobre la regla de la cadena en varias variables

En este apartado, desde una perspectiva esquemática y sintética, presentamos unas reflexiones sobre la regla de la cadena en varias variables.

Consideremos una función vectorial $f : R^3 \to R^4$

$$f := [f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z), f_4(x, y, z)]$$

Cada una de las f_i (x,y,z), i=1,2,3,4, es una función escalar de la forma

$$f_i : R^3 \to R \;/\; f_i(x,y,z) \in R,$$

y si $f : R^3 \to R^4$ es diferenciable en su dominio de definición; para cada una de ellas existirá:

$$\frac{\partial}{\partial x} f_i(x, y, z) \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_i(x, y, z) \qquad \frac{\partial}{\partial z} f_i(x, y, z)$$

i=1,2,3,4, y estas derivadas parciales se pueden presentar en forma de cuadro o matriz de números reales, que se denomina matriz Jacobiana de la función vectorial y que denotaremos por J_f. Obsérvese que si todas las derivadas parciales se evalúan en un punto (x_o,y_o,z_o) del domino de diferenciabilidad de f, la matriz Jacobiana será $J_f(x_o,y_o,z_o)$.

Matriz Jacobiana

$$A := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1(x,y,z) & \frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y,z) & \frac{\partial}{\partial z} f_1(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y,z) & \frac{\partial}{\partial y} f_2(x,y,z) & \frac{\partial}{\partial z} f_2(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_3(x,y,z) & \frac{\partial}{\partial y} f_3(x,y,z) & \frac{\partial}{\partial z} f_3(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_4(x,y,z) & \frac{\partial}{\partial y} f_4(x,y,z) & \frac{\partial}{\partial z} f_4(x,y,z) \end{bmatrix} = J_f\,(x,y,z)$$

Cuadro de números o matriz de orden (4,3)

Así pues la *"derivad"* de una *función vectorial* viene expresada como un "cuadro de números" reales.

Parece razonable pensar que si la regla de la cadena para funciones de una variable es en realidad un "producto de dos números", (o de tres números en el caso de la composición de tres funciones f, g y h, etc.), la regla de la cadena para *dos funciones vectoriales* pueda expresarse como el "producto de dos cuadros de números" (dos matrices Jacobianas) en forma adecuada. Más concretamente, si disponemos de dos funciones vectoriales f y g, y de su composición h=gof, tal como aparecen a continuación:

$$f:R^n \rightarrow R^m \qquad g:R^m \rightarrow R^p \qquad h=gof:R^n \rightarrow R^p$$

la regla de la cadena, de forma análoga a lo que ocurría en una variable, se expresará:

$$J(gof)(x_0) = Jg(f(x_0)) \bullet Jf(x_0) \quad \text{(Producto de las matrices)}$$

$$(p,n) \qquad (p,m) \qquad (m,n) \quad \text{(Órdenes correspondientes)}$$

Ejemplo 4

Consideremos las funciones vectoriales

$$f:R^3 \rightarrow R^2 \qquad g:R^2 \rightarrow R^2$$

definidas de la siguiente forma:

$$f := (x, y, z) \rightarrow (x^2 y, x\, y\, z) = (u, v)$$

$$g := (u, v) \rightarrow (u + v, u - v) = (s, t)$$

Supongamos que f diferenciable en (x,y,z) y que g diferenciable en f(x,y,z) entonces la composición (gof)(x, y, z) es igual a

$$h(x, y, z) = (x^2 y + x\, y\, z, x^2 y - x\, y\, z)$$

es diferenciable en (x,y,z) y se tiene

Regla de la cadena:	J(g(f(x,y,z))	•	Jf(x,y,z)	=	J(gof)(x, y,z)
Matrices:	B	•	A	=	C
Órdenes:	M(2,2)	•	M(2,3)		M(2,3)

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad A := \begin{bmatrix} 2\,x\,y & x^2 & 0 \\ y\,z & x\,z & x\,y \end{bmatrix} \qquad C := \begin{bmatrix} 2\,x\,y + y\,z & x^2 + x\,z & x\,y \\ 2\,x\,y - y\,z & x^2 - x\,z & -x\,y \end{bmatrix}$$

Si elegimos el punto $x_o(1,1,1)$ de R^3, en el que f y g son diferenciables, se tendrá:

$$\begin{array}{ccccc} Jg(f(1,1,1)) & \bullet & Jf(1,1,1) & = & J(gof)(1,1,1) \\ M(2,2) & & M(2,3) & & M(2,3) \\ B & \bullet & A & = & C_1 \end{array}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C_1 := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que la matriz C_1, producto de B por A, se corresponde con

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial u}s\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right)+\left(\frac{\partial}{\partial v}s\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}v\right) & \left(\frac{\partial}{\partial u}s\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}u\right)+\left(\frac{\partial}{\partial v}s\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}v\right) & \left(\frac{\partial}{\partial u}s\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}u\right)+\left(\frac{\partial}{\partial v}s\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}v\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial u}t\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right)+\left(\frac{\partial}{\partial v}t\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}v\right) & \left(\frac{\partial}{\partial u}t\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}u\right)+\left(\frac{\partial}{\partial v}t\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}v\right) & \left(\frac{\partial}{\partial u}t\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}u\right)+\left(\frac{\partial}{\partial v}t\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}v\right) \end{bmatrix}$$

Dado que *s* y *t* dependen de *u* y *v*, y que éstas dos variables dependen a su vez de *x, y* y *z* , el esquema siguiente facilita la comprensión de la situación:

(s,t)=g(u,v)   (u,v)= f(x,y,z)

s
- **u**: **x**, **y**, **z**
- **v**: **x**, **y**, **z**

t
- **u**: **x**, **y**, **z**
- **v**: **x**, **y**, **z**

Cada uno de los elementos de la matriz C_1 será la suma de los productos:

1•2 + 1•1   1•1 + 1•1   1•0 + 1•1

1•2 + (-1) •1 1•1+ (-1) •1 1•0+(-1) •1

Por ejemplo el elemento a_{11} de la matriz C_1 se corresponde con la suma:

$$\begin{array}{ccccccc} \partial s/\partial u & \bullet & \partial u/\partial x & + & \partial s/\partial v & \bullet & \partial v/\partial x \\ 1 & \bullet & 2 & + & 1 & \bullet & 1 \end{array}$$

que constituye la suma de dos "pequeñas reglas de la cadena en una variable con notación de Leibniz"; como la variable *s* depende de *u* y de *v* habrá que sumar sus aportaciones respecto de *x*; luego para a_{12} haremos lo mismo respecto de *y*, y para a_{13} respecto de *z*. Para los elementos a_{21}, a_{22} y a_{23} de la matriz Jacobiana utilizaremos la variable *t*, actuando de igual forma que con la *s*; por ejemplo, el elemento a_{23} se convertirá en:

$$\begin{array}{ccccccc} \partial t/\partial u & \bullet & \partial u/\partial z & + & \partial t/\partial v & \bullet & \partial v/\partial z \\ 1 & \bullet & 0 & + & (-1) & \bullet & 1 \end{array}$$

4. Simulación de la regla de la cadena en varias variables

Consideremos las funciones f y g del Ejemplo 4. Mediante Maple comprobemos que:

$$Jgof\,(x) = Jg(f(x))\ .\ Jf\,(x)$$

```
> restart:with(linalg):
> f:=(x,y,z)->(x^2*y, x*y*z)=(u,v);
```

$$f := (x, y, z) \to (x^2\,y,\ x\,y\,z) = (u, v)$$

```
> f(1,1,1);
```

$$(1, 1) = (u, v)$$

```
> F := vector( [x^2*y, x*y*z] );
```

$$F := [x^2\,y,\ x\,y\,z]$$

```
> g:=(u,v)->(u+v,u-v)=(s,t);
```

$$g := (u, v) \to (u + v, u - v) = (s, t)$$

```
> g(1,1);
```

$$(2, 0) = (s, t)$$

```
> G := vector( [u+v,u-v] );
```

$$G := [u + v, u - v]$$

```
> A:=jacobian(F, [x,y,z]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2\,x\,y & x^2 & 0 \\ y\,z & x\,z & x\,y \end{bmatrix}$$

```
> A1:=subs(x=1,y=1,z=1,%);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> B:=jacobian(G,[u,v]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> #Nótese que B tiene todos sus elementos constantes.
```

```
> multiply(B, A);
```

$$\begin{bmatrix} 2\,x\,y + y\,z & x^2 + x\,z & x\,y \\ 2\,x\,y - y\,z & x^2 - x\,z & -x\,y \end{bmatrix}$$

```
> multiply(B, A1);
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Hallemos gof:$R^3 \to R^2$ y su matriz Jacobiana, en forma genérica y computada en el punto (1,1,1), para lo cual definamos funcionalmente f, g y h=gof.

```
> f:=(x,y,z)->(x^2*y, x*y*z):
> g:=(x,y)->(x+y,x-y):
> h:=(x,y,z)->(g@f)(x,y,z);
```

$$h := g@f$$

```
> h(x,y,z);
```

$$x^2\,y+x\,y\,z,\,x^2\,y-x\,y\,z$$

```
> H:= vector( [x^2*y+x*y*z, x^2*y-x*y*z] );
```

$$H:=[x^2\,y+x\,y\,z,\,x^2\,y-x\,y\,z]$$

```
> C:=jacobian(H,[x,y,z]);
```

$$C:=\begin{bmatrix} 2\,x\,y+y\,z & x^2+x\,z & x\,y \\ 2\,x\,y-y\,z & x^2-x\,z & -x\,y \end{bmatrix}$$

```
> C1:=subs(x=1,y=1,z=1,%);
```

$$C1:=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Observamos que la matriz del producto:

$$\begin{bmatrix} 2\,x\,y+y\,z & x^2+x\,z & x\,y \\ 2\,x\,y-y\,z & x^2-x\,z & -x\,y \end{bmatrix}$$

coincide con la matriz Jacobiana de la composición.

Veamos finalmente, paso a paso, con uso de la simbología introducida por Leibniz, que el elemento a_{11} de la matriz *C1* toma la forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\,s\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\,u\right)+\left(\frac{\partial}{\partial v}\,s\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\,v\right)$$

y que se corresponde con $1 \bullet 2 + 1 \bullet 1 = 3$ y así, análogamente, con todos los elementos de la matriz Jacobiana, computada en (1,1,1), de la composición gof.

```
>Diff(s,u)*Diff(u,x)+Diff(s,v)*Diff(v,x)=subs(u=1,v=1,
x=1,y=1,z=1,(diff(s(u,v),u)*diff(u(x,y,z),x)+diff(s(u
,v),v)*diff(v(x,y,z),x)));
```

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}s\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right)+\left(\frac{\partial}{\partial v}s\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}v\right)=3$$

Y esto es así ya que:

```
> Diff('s(u,v)',u)=subs(u=1,v=1,diff(s(u,v),u));
```

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{s}(u,v)=1$$

```
>Diff('u(x,y,z)',x)=subs(x=1,y=1,z=1,diff(u(x,y,z),x))
;
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{u}(x,y,z)=2$$

```
> Diff('s(u,v)',v)=subs(u=1,v=1,diff(s(u,v),v));
```

$$\frac{\partial}{\partial v}\mathrm{s}(u,v)=1$$

```
>Diff('v(x,y,z)',x)=subs(x=1,y=1,z=1,diff(v(x,y,z),x))
;
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{v}(x,y,z)=1$$

Referencias bibliográficas

Afonso, R. M. ; Dorta, J. A. (2001). Representación visual y aprendizaje en un contexto de software educativo. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*. 4, 1, 261-272. Madrid

Amillo, J.; Ballesteros, F.; Guadalupe, R; Martín, L. (1996). *Conceptos, ejercicios y sistemas de computación matemática*, *Maple V.* McGrawHill. Madrid

Carrillo; LLamas (1995*). Maple V. Aplicaciones matemáticas para P.C.* RAMA.

Delgado, M. (1998). Maple en la enseñanza secundaria. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española.* 1, 1, 114-120.

Dorta Díaz, J.A. (1996). Algunos tópicos del Análisis Matemático y su enseñanza con Maple V . *Actas II congreso español de usarios de Maple V*. Sevilla.

Garvan, F. (2000). *The Maple book*. Chapman&Hall/CRC. Florida.

Hairer, E.; Wanner, G. (1996). *Analysis by History*. Springer Verlag. New York