Seydel Bueno, María Burgos, Juan D. Godino, Olga Pérez

SIGNIFICADOS INTUITIVOS Y FORMALES DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN LA FORMACIÓN DE INGENIEROS

Intuitive and formal meanings of the definite integral in engineering education

RESUMEN

La integral definida es un concepto central en las aplicaciones del cálculo a las ciencias experimentales e ingeniería por lo que es un tema de investigación didáctica relevante. En este trabajo se analizan los diversos significados de la integral definida aplicando herramientas teóricas del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, en particular, la interpretación del significado en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas relativas a la resolución de tipos de problemas y el modelo de niveles de algebrización de la actividad matemática. Se identifican tipos de situaciones-problemas y configuraciones de prácticas, objetos y procesos que permiten caracterizar y articular los diversos significados parciales de la integral definida (geométrico-intuitivo, como límite de sumas de Riemann y función acumulativa) así como de sus extensiones al caso de integral dobles (como caso particular de las múltiples) y de línea, desde los más intuitivos a los más formales. El análisis permite identificar los grados de generalidad de los objetos del cálculo integral y el papel del álgebra en la caracterización de los significados de la integral definida, que deben considerarse en la planificación y gestión de los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en las carreras de ingeniería.

PALABRAS CLAVE:

- *Integral de Riemann*
- *Significados intuitivos y formales*
- *Niveles de algebrización*
- *Comprensión*

ABSTRACT

The definite integral is a central concept in the applications of calculus to experimental sciences and engineering, and consequently, a relevant didactic research topic. This paper analyses the different meanings of the definite integral by applying theoretical tools of the ontosemiotic approach to mathematical knowledge and instruction, particularly, the interpretation of meaning in terms of systems of operational and discursive practices related to the resolution of types of problems and the algebraization levels model of mathematical activity. Types of problem-situations and configurations of practices, objects, and processes are identified that allow us to

KEY WORDS:

- *Riemann integral*
- *Intuitive and formal meanings*
- *Algebraization levels*
- *Understanding*

Bueno, S., Burgos, M., Godino, J. D. y Pérez, O. (2022). Significados intuitivos y formales de la integral definida en la formación de ingenieros. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 25*(2), 135-168. https://doi.org/10.12802/relime.22.2521. Recepción: Mayo 3, 2020 / Aceptación: Marzo 1, 2023

characterize and articulate the various partial meanings of the definite integral (geometric-intuitive, as a limit of Riemann sums and cumulative function) as well as its extensions to the case of the double integral (as a particular case of the multiple) and the line, from the most intuitive to the most formal. The analysis allows us to identify the generality degrees of the objects of integral calculus and the role of algebra in the characterization of the meanings of the definite integral, which must be considered in the planning and management of the processes of teaching and learning of integral calculus in engineering degrees.

RESUMO

A integral definida é um conceito central nas aplicações de cálculo para as ciências experimentais e engenharia, tornando-o um tópico relevante de pesquisa didática. Este trabalho analisa os diferentes significados do integral definido aplicando ferramentas teóricas da abordagem ontosemiótica ao conhecimento e à instrução matemática, em particular a interpretação do significado em termos de sistemas de práticas operacionais e discursivas relacionadas com a resolução de tipos de problemas e o modelo de níveis de algebrização da atividade matemática. São identificados tipos de situações problemáticas e configurações de práticas, objectos e processos que nos permitem caracterizar e articular os vários significados parciais da integral definida (geométrico-intuitiva, como limite das somas de Riemann e função cumulativa), bem como as suas extensões ao caso da integral dupla (como caso particular do múltiplo) e da linha, desde a mais intuitiva até à mais formal. A análise permite-nos identificar os graus de generalidade dos objectos de cálculo integral e o papel da álgebra na caracterização dos significados da integral definida, que devem ser tidos em conta no planeamento e gestão dos processos de ensino e aprendizagem do cálculo integral nos graus de engenharia.

PALAVRAS CHAVE:

- *Integral de Riemann*
- *Significados intuitivos e formais*
- *Níveis de algebrização*
- *Compreensão*

RÉSUMÉ

L'intégrale définie est un concept central dans les applications du calcul aux sciences expérimentales et à l'ingénierie, ce qui en fait un sujet de recherche didactique pertinent. Cet article analyse les différentes significations de l'intégrale définie en appliquant les outils théoriques de l'approche ontosémiotique de la connaissance et de l'enseignement des mathématiques, en particulier l'interprétation de la signification en termes de systèmes de pratiques opérationnelles et discursives liées à la résolution de types de problèmes et le modèle des niveaux d'algèbre de l'activité mathématique. On identifie des types de situations-problèmes et des configurations de pratiques, d'objets et de processus qui permettent de caractériser et d'articuler les différentes significations partielles de l'intégrale définie

MOTS CLÉS:

- *Intégrale de Riemann*
- *Significations intuitives et formelles*
- *Niveaux d'algèbre*
- *Compréhension*

(géométrique-intuitive, comme limite des sommes de Riemann et fonction cumulative) ainsi que ses extensions au cas de l'intégrale double (comme cas particulier du multiple) et de la ligne, du plus intuitif au plus formel. L'analyse nous permet d'identifier les degrés de généralité des objets du calcul intégral et le rôle de l'algèbre dans la caractérisation des significations de l'intégrale définie, ce qui doit être pris en compte dans la planification et la gestion des processus d'enseignement et d'apprentissage du calcul intégral dans les diplômes d'ingénieur.

1. Introducción

En los últimos años ha aumentado considerablemente el número de estudios que examinan el papel de los cursos de matemáticas en la formación de ingenieros (González-Martín, Gueudet, Barquero y Romo-Vázquez, 2021). Por un lado, existe un consenso generalizado en la comunidad educativa en relación a la necesidad de que los estudiantes para ingenieros piensen matemáticamente y usen unas matemáticas sólidas para describir y analizar diferentes aspectos del mundo real que buscan modelar (Alper, 2013; Pepin, Biehler y Gueudet, 2021). Por otro, los resultados de la investigación ponen de manifiesto las dificultades que encuentran los estudiantes ante los cursos de matemáticas en los programas de ingeniería, algunas de las cuales derivan de una insatisfactoria preparación matemática y la falta de progresión de la educación secundaria a la universitaria (Rooch, Junker, Härterich y Hackl, 2016), así como de la brecha entre el contenido de los cursos de matemáticas y las habilidades matemáticas que requiere el ingeniero (Brito-Vallina, Alemán-Romero, Fraga-Guerra, Para-García y Arias-de Tapia, 2011; González-Martín y Hernandes, 2017).

El papel del cálculo en el desempeño profesional del ingeniero justifica que la mayoría de los programas de ingeniería lo incluyan como asignatura obligatoria, buscando proporcionar a los estudiantes herramientas que utilizarán durante el resto de su formación (Ellis, Larsen, Voigt y Kristeen, 2021; González-Martín, 2021). Así, desde los planes de estudio de ingeniería se insiste en que el ingeniero llegue a "asumir una concepción científica del mundo al interpretar los conceptos del Cálculo Diferencial e Integral", "caracterizar, interpretar, comunicar y aplicar los conceptos y principales resultados de la disciplina, mediante una correcta utilización del lenguaje matemático en sus formas: analítica, gráfica, numérica y verbal, centrando la atención en los modelos matemáticos" y desarrollar la capacidad de razonamiento y de las formas del pensamiento matemático, la comprensión de la demostración de teoremas, la identificación e interpretación de los conceptos matemáticos, la argumentación lógica de propiedades y "la demostración de resultados teóricos sencillos, mediante el empleo de los métodos analíticos, gráficos y/o numéricos" (Ministerio de Educación Superior, 2017, p. 28; 2018, p. 54).

En las revisiones elaboradas por Bressoud, Ghedams, Martinez-Luances y Törner (2016) y por González-Martín (2021) se describe la evolución y principales tendencias de la investigación sobre enseñanza y aprendizaje del cálculo, como son las dificultades de los estudiantes, el diseño de tareas, las prácticas de clase, el uso de la tecnología, etc. Estos autores resaltan la preocupación por las relaciones entre el pensamiento de los estudiantes sobre las nociones fundamentales del cálculo y las expectativas de aprendizaje establecidas en los currículos.

En este artículo nos centramos en uno de los contenidos clave del cálculo en los programas de formación de ingenieros (Ministerio de Educación Superior, 2017; 2018) y también de los que ocasionan más dificultades de comprensión a los estudiantes, la integral definida. Como objeto matemático, la integral definida se utiliza frecuentemente en el cálculo de ingeniería para resolver problemas relacionados con cantidades infinitesimales, en las que se requiere, por un lado, sumas infinitas de cantidades finitas, y por otro lado el desarrollo de los métodos de cuadratura (Puga y Miranda, 2021). La acumulación de áreas no se considera explícitamente en las estrategias didácticas que sugieren algunos planes de estudio, aunque, en cursos posteriores de matemáticas o de física que pertenecen a la formación básica del futuro ingeniero, la idea de función primitiva y la suma de la acumulación de cantidades son fundamentales para entender ciertos fenómenos como las leyes del movimiento de partículas, trabajo y energía, crecimiento poblacional, entre otros (Puga y Miranda, 2021).

Para lograr una buena comprensión de la integral definida los estudiantes de ingeniería deben ser capaces de establecer conexiones entre los múltiples conceptos (sumas de Riemann, límites, derivadas, áreas) y propiedades que forman parte del cálculo integral (Serhan, 2015). Sin embargo, la enseñanza de la integral no suele tener en cuenta la complejidad de estos objetos matemáticos (Contreras, Ordóñez y Wilhelmi, 2010; Robles, Tellechea y Font, 2014) y prioriza la aplicación de técnicas y la manipulación de fórmulas, en lugar de la adquisición de conceptos que son relevantes para la formación del ingeniero (Carvalho y Oliveria, 2018; Viol y Jacques, 2019). A los estudiantes se les enseñan procedimientos para calcular integrales, con un excesivo énfasis en el cálculo de anti-derivadas, ignorando el potencial del significado de la integral como función de acumulación para lograr una comprensión más profunda de este concepto (Bressoud *et al*., 2016). La conceptualización de la integral definida se reduce a la definición de la integral de Cauchy o la de Riemann y las integrales se calculan usando en cierta medida el Teorema Fundamental del Cálculo (Muñoz, 2000).

La aproximación o el mayor enfoque dado a uno u otro significado de la integral definida, influye en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las extensiones de la integral, fundamentales en las carreras técnicas. Resultados de investigaciones como las de Jones y Dorko (2015) ponen de manifiesto la importancia de las concepciones de integrales simples para la comprensión de tipos avanzados de integrales, entre ellas las múltiples. Para estos autores, la comprensión de las integrales múltiples que muestran los estudiantes está fuertemente arraigada con la de las integrales simples. Consideran que “la construcción de la comprensión de las integrales múltiples a partir de las concepciones de la integral simple no es una tarea trivial para los estudiantes” (p.167) y recomiendan articular y conectar las integrales múltiples con el significado de la integral como límite de sumas de Riemann (Jones y Dorko, 2015). Recientemente, en el trabajo de Jones (2020) se examinan las integrales de línea escalares y vectoriales, proporcionando un análisis conceptual de ambos tipos de integrales de línea en términos de cómo las formas teóricas de pensar sobre las integrales definidas resumidas en la literatura de investigación pueden aplicarse a la comprensión específica de las integrales. Como sugiere este autor, las integrales de línea son diferentes de sus integrales definidas homólogas (simples, dobles y triples) ya que pueden tomar como integrando funciones escalares o campos vectoriales. Sin embargo, como las integrales de línea siguen siendo integrales, han de aparecer articuladas en la trayectoria más amplia que va desde las integrales definidas simples hasta otros tipos más avanzados de integrales como las integrales de superficie o la integral de Lebesgue (Jones, 2020).

Así, para planificar y gestionar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la integral definida en las carreras de ingeniería es preciso describir un significado global que oriente el desarrollo del currículo y articule significados parciales implicados (Contreras y Ordónez, 2006). En el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007), se han desarrollado diversas investigaciones (Burgos, Bueno, Godino y Pérez, 2021; Contreras y Ordóñez, 2006; Contreras, Ordóñez y Wilhelmi, 2010; Gordillo y Pino-Fan, 2016; Robles *et al.*, 2014; Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios, y Breda; 2018, entre otras) que tienen en cuenta la naturaleza y complejidad de los objetos matemáticos que configuran los significados de la integral definida, como factor explicativo de las dificultades en su enseñanza y aprendizaje.

Contreras *et al.*, (2010), identifican cuatro configuraciones desde el punto de vista epistémico para la integral definida: geométrica, resultado de un proceso de cambio, inversa de la derivada y aproximación al límite. En la configuración geométrica la integral definida aparece en la determinación del área bajo una curva y el eje de abscisas. Los cálculos de longitudes, áreas y volúmenes asociados hacen referencia a un contexto geométrico estático, ausente de movimiento. La integral como inversa de la derivada, se asocia a los trabajos de Newton y Leibnitz, con los que el conjunto de funciones integrables es cada vez más extenso. Por último, la configuración epistémica de aproximación al límite aparece directamente relacionada con la formalización iniciada por Cauchy.

Posteriormente, Robles *et al.*, (2014) describen el diseño de una secuencia didáctica de tareas para la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo que, asumiendo la complejidad y la articulación de los objetos matemáticos asociados (variación, acumulación, derivada, integral, función, límite), promueva mediante un acercamiento intuitivo y la conjetura, el descubrimiento de dicho teorema, así como el papel esencial que desempeña en el estudio del cálculo.

Gordillo y Pino-Fan (2016) presentan una propuesta de reconstrucción del *significado holístico de referencia para la antiderivada, mostrando su relación con* la derivada y la integral. Para ello, los autores describen las configuraciones epistémicas asociadas a las prácticas matemáticas desarrolladas para resolver diferentes situaciones-problemas que contribuyeron al origen histórico y formalización de la antiderivada como objeto matemático. Esto los lleva a identificar y caracterizar cuatro significados parciales para la antiderivada, *desde lo puramente geométrico hasta lo formal (tangentes-cuadraturas, fluxiones-fluentes, sumatorias-diferencias y funciones elementales) que* conforman el significado holístico. Este modelo de referencia se aplica en el trabajo de Pino-Fan *et al.*, (2018) para identificar y caracterizar los significados de la antiderivada que estudiantes de ingeniería, utilizan en sus prácticas matemáticas. Entre los resultados, los autores identifican dos de los tipos de significados parciales de la antiderivada descritos por Gordillo y Pino-Fan (2016): sumatorias – diferencias y fluxiones – fluentes, según las prácticas se desarrollen en un entorno intra-matemático, o en situaciones vinculadas a fenómenos físicos de variación o velocidad, en la actividad matemática de los estudiantes y observan que estos dieron a la antiderivada el significado de proceso inverso de derivación desde un punto de vista más procedimental que conceptual. Es decir, cuando los participantes aplicaron las reglas de integración para obtener la antiderivada de una función (función derivada), muchos de ellos pensaron que iban a obtener la función concreta de la que procedía dicha función derivada, sin entender lo que realmente ocurría con el proceso inverso.

En Burgos *et al.*, (2021) se complementan estos trabajos realizados en el marco del EOS con la intención de precisar los conocimientos institucionales requeridos para comprender los diversos significados del concepto de integral definida. Para avanzar en la discusión entre lo intuitivo y lo riguroso en la enseñanza del cálculo integral, se confronta el análisis ontosemiótico de la presentación informal que hace Starbird (2006) de la integral con el de la construcción formal general del texto de Stewart (2016). Además, se identifican potenciales conflictos semióticos relacionados particularmente con los procesos de generalización que se realizan, con frecuencia de manera implícita, en la definición de la integral.

En este trabajo, continuamos con esta dialéctica entre lo informal y lo formal profundizando en la naturaleza y complejidad de los objetos matemáticos que configuran los significados de la integral definida que se espera que los estudiantes comprendan y usen. En el EOS el significado (pragmático) de un contenido matemático, como puede ser la integral definida, se entiende en términos de los sistemas de prácticas operativas y discursivas relativas a la resolución de tipos de problemas en los que este interviene (Godino *et al.*, 2007). En dichas prácticas se ponen en juego objetos y procesos matemáticos que pueden hacerlo con distinto grado de algebrización, esto es, de generalidad, formalización y ostensión (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015). Aplicar el modelo de los niveles de algebrización desarrollado en el EOS (Godino *et al.*, 2014; Godino *et al.*, 2015) a las prácticas matemáticas asociadas a distintos significados de la integral definida, permite reconocer la progresión de la actividad matemática desde los niveles aritméticos y protoalgebraicos hasta los niveles más elevados de razonamiento algebraico.

Así nuestro objetivo es identificar los niveles de algebrización implicados en las prácticas matemáticas características de los distintos significados de la integral definida, desde los más intuitivos a los más formales. Incluimos además las extensiones a las integrales doble y de línea, que son un importante objeto de estudio en los programas de cálculo integral para ingeniería.

Antes de esto, en la sección 2 describimos las nociones del EOS que usamos en este trabajo: las de significado pragmático y configuración de prácticas, objetos y procesos, así como el modelo de niveles de algebrización, que permitirá identificar los grados de generalidad de los objetos del cálculo integral y el papel del álgebra en la caracterización de los significados de la integral definida. Para ello empleamos la metodología de análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas puestas en juego en la resolución de problemas vinculados a los distintos significados de la integral definida: geométrico-intuitivo, como límite de las sumas de Riemann y como función acumulativa, así como de extensiones de la aplicación de la integral de Riemann al caso de integral dobles (como caso particular de las múltiples) y de línea. El resultado de este análisis, desde el punto de vista de los niveles de formalización involucrados, se muestra en la sección 3. El artículo termina con una discusión y conclusiones sobre la contribución de este estudio.

2. Marco teórico y método

El EOS entiende las matemáticas como una actividad de las personas implicadas en la solución de cierta clase de situaciones-problemas, e interpreta el significado institucional y personal de los objetos matemáticos en términos de los sistemas de prácticas operativas y discursivas que se ponen en juego en la solución de dichas situaciones. El modelo de los niveles de algebrización desarrollado en el EOS (Godino *et al*., 2014, Godino *et al*., 2015) permite modelizar el conocimiento institucional que se pone en juego en el cálculo integral, en tanto describe la actividad matemática bajo la perspectiva de objetos y procesos característicos del álgebra, admitiendo que un mismo problema se puede abordar de diversas maneras, implicando grados de razonamiento algebraico diferentes.

2.1. *Significado pragmático y configuración ontosemiótica*

El EOS asume una concepción de la matemática de tipo antropológico y, en consecuencia, la noción de práctica matemática ocupa un lugar central. Se considera práctica matemática a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Dado que un objeto matemático, en su versión institucional se concibe como "emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas" (p. 335), el significado de un objeto queda determinado por el "sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado" (p. 338).

La matemática, además de ser una actividad, es también un sistema lógicamente organizado de objetos. Para el EOS, *objeto matemático* es cualquier entidad material o inmaterial que interviene en la práctica matemática, apoyando y regulando su realización. Esta idea general de objeto es útil cuando se complementa con una tipología de objetos matemáticos al tener en cuenta sus diferentes roles en la actividad matemática. Se proponen los siguientes tipos de objetos primarios:

- *Situaciones-problema:* aplicaciones intramatemáticas o extramatemáticas, entendidas como las tareas que inducen la actividad matemática.
- *Lenguajes:* términos y expresiones matemáticas; notaciones, símbolos, representaciones gráficas en sus diversos registros (gestual, oral, escrito).
- *Conceptos:* entidades matemáticas que pueden ser introducidas mediante descripción o definición.
- *Proposiciones:* propiedades o atributos; enunciados sobre conceptos.
- *Procedimientos:* técnicas de cálculo, operaciones y algoritmos.
- *Argumentos:* enunciados requeridos para justificar las proposiciones o explicar los procedimientos.

Los objetos matemáticos que emergen de los sistemas de prácticas matemáticas se relacionan entre sí. Así, las situaciones–problemas son la razón de ser de la actividad matemática; el lenguaje constituye el instrumento de trabajo matemático y representa las demás entidades; los argumentos fundamentan los procedimientos y las proposiciones que relacionan los conceptos matemáticos entre sí. Estos objetos, considerados como primarios, pueden ser contemplados desde diversos puntos de vista duales: ostensivos (materiales, perceptibles) – no ostensivos (abstractos, inmateriales); extensivos (particulares) – intensivos (generales); unitarios (objetos considerados globalmente como un todo) – sistémicos (sistemas formados por componentes estructurados), entre otros (Godino *et al*., 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013).

La noción de *configuración ontosemiótica* (de prácticas, objetos y procesos) responde a la necesidad de analizar minuciosamente las entidades que aparecen en la actividad matemática, su naturaleza y como se relacionan entre sí. Las configuraciones pueden ser *epistémicas* (institucionales) —redes de objetos y procesos que intervienen y emergen de las prácticas necesarias desde un punto de vista experto para resolver un tipo de tareas matemáticas— o *cognitivas* (personales)—redes de objetos y procesos matemáticos que ponen en juego los estudiantes para resolver un tipo de tareas matemáticas— (Godino *et al*., 2007).

2.2. *Niveles de algebrización*

Desde el EOS se entiende el razonamiento algebraico como el sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos: relaciones binarias y sus propiedades; operaciones y sus propiedades sobre elementos de conjuntos diversos; funciones; estructuras y sus propiedades (Godino *et al*., 2014). En el caso de las prácticas algebraicas los procesos de particularización–generalización tienen una importancia especial, dado el papel de la generalización como uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico (Godino *et al*., 2014). La generalización se entiende en el EOS en términos de la identificación de objetos intensivos que intervienen en las prácticas, lo que proporciona un análisis más profundo de dicho proceso y su caracterización en las prácticas consideradas algebraicas. Mediante el proceso inverso de particularización se obtiene un objeto extensivo, esto es, que interviene en la práctica matemática como un ejemplar particular.

En Godino *et al*., (2014) se propone un modelo de razonamiento algebraico para la Educación Primaria basado en la distinción de tres niveles de algebrización. Los criterios para delimitar los niveles están basados en los objetos y procesos matemáticos implicados en la actividad matemática: a) generalización (de la que emergen objetos intensivos en relación dialéctica con los correspondientes extensivos), b) unitarización (reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias), c) formalización y ostensión (nombramiento mediante diferentes sistemas de representación, en particular, expresiones simbólico–literales), d) transformación (intervención de objetos intensivos en procesos de cálculo analítico y nuevas generalizaciones).

– *Nivel 0.* Se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad, usando lenguajes natural, numérico, icónico, gestual.

- *Nivel 1.* Involucra objetos intensivos de segundo grado de generalidad, propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia.
- *Nivel 2.* Se usan representaciones simbólico-literales para referir a objetos intensivos reconocidos ligados a la información espacial y contextual; en tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.
- *Nivel 3.* Los símbolos se emplean de forma analítica. Se realizan operaciones con indeterminadas o variables y se formulan de manera simbólica y descontextualizada reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

Dado que los números naturales son también objetos intensivos (entidades generales) que emergen de colecciones de objetos perceptibles y de las acciones que se realizan con ellos, se les atribuye un primer grado de generalidad o intensión. Así, en el nivel 0 de algebrización se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad, usando los lenguajes natural, numérico, icónico y gestual. La asignación de carácter algebraico a una práctica supone la intervención de intensivos de, al menos, un segundo grado de generalización, es decir, clases de intensivos de grado 1.

En Godino *et al.* (2015) se extiende el modelo de algebrización a la actividad matemática propia de niveles educativos superiores. El uso y tratamiento de parámetros permite definir niveles superiores de algebrización, al estar vinculado a la presencia de familias de ecuaciones y funciones, y, por tanto, implicar nuevos niveles de generalidad. El lenguaje empleado en estos niveles es simbólico-literal; los símbolos se usan de forma analítica, sin referir a información contextual.

- *Nivel 4.* Primer encuentro con parámetros y coeficientes variables que implica la función paramétrica, esto es, la función que asigna a cada valor del parámetro una función o ecuación específica. Se opera con coeficientes variables, pero no con parámetros.
- *Nivel 5.* Tratamiento de parámetros. Se realizan cálculos analíticos (sintácticos) en los que intervienen uno o más parámetros, junto con otras variables. Las operaciones con parámetros y el establecimiento de relaciones entre ellos, ponen en juego a los objetos algebraicos del nivel anterior (familia de ecuaciones, familia de funciones).
- *Nivel 6.* Introducción de algunas estructuras algebraicas (como la de espacio vectorial, o grupo) y el estudio del álgebra de funciones.

2.3. *Método*

En Godino (2002) se desarrolla una técnica para el análisis ontosemiótico que facilita la caracterización de los significados institucionales que sirvan de referencia para el diseño del proceso instruccional. En este análisis se comienza con la selección de las situaciones–problemas y distintas maneras de abordar su resolución, en las cuales interviene el objeto bajo estudio de manera crítica. En las prácticas operativas y discursivas que se deben realizar para resolver tales problemas intervienen, además, otros objetos lingüísticos, conceptuales, procedimentales, proposicionales y argumentativos que ponen en juego diferentes grados de generalidad y formalización. Su reconocimiento permite establecer relaciones jerárquicas entre ellos en función de su complejidad e interdependencia.

Optamos por elegir para nuestro análisis el texto de Stewart (2012a, 2012b) ampliamente utilizado a nivel internacional en carreras científico– técnicas. Además, es el texto recomendado en el Plan de Estudios E propuesto por el Ministerio de Educación Superior para diversas carreras de ingeniería (Ministerio de Educación Superior, 2017, 2018). La lección sobre *Integrales* (Stewart, 2012a) comienza con una primera sección en la que se presentan y resuelven problemas sobre áreas y distancias aplicando procesos de cálculo de límites de sumas de Riemann. Esta sección sirve de contexto y fundamento para introducir seguidamente la definición general de integral definida. En la lección sobre *Integrales múltiples* (Stewart, 2012b) el autor extiende la idea de integral definida a integrales dobles y triples de funciones de dos y tres variables. Finalmente dedica la lección de *Calculo Vectorial* a las integrales de línea y de superficie, que conecta con las integrales simples, dobles y triples por medio de "las versiones de dimensiones más altas del teorema fundamental del cálculo: el teorema de Green, el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia" (Stewart, 2021b, p.1055). En todo momento existe un fuerte apoyo de representaciones gráficas.

De dichos textos seleccionamos, para los distintos significados de la integral definida reconocidos en la literatura, problemas característicos y significativos del cálculo integral en las carreras de ingeniería[1], donde uno de los autores lleva años impartiendo su docencia. Además de los significados geométrico intuitivo, límite y función acumulativa, consideramos por su importancia en la formación de ingenieros, las extensiones de la integral de Riemann doble y de línea. En cada caso, los problemas se escogieron según su representatividad dentro de las tareas frecuentes en el cálculo de ingeniería, y su potencialidad para mostrar la conexión de la integral definida con otros contextos más cercanos a la realidad profesional del ingeniero (por ejemplo, el estudio de la distancia recorrida por un móvil, la

[1] Aunque se siguió el programa de ingeniería industrial, los problemas son también característicos del cálculo integral estudiado en otras carreras de ingeniería en la Universidad de Camagüey, como la eléctrica, mecánica, civil, informática o agronomía.

estimación de la carga eléctrica o la masa de un alambre) y que permiten una aproximación intuitiva de la misma.

Una vez seleccionados los problemas, estos fueron analizados por el equipo investigador. Las prácticas operativas y discursivas que se proponen como solución de las situaciones-problema, son prácticas expertas (desarrolladas y revisadas por los investigadores) para poner de manifiesto las diversas configuraciones de objetos matemáticos, asociados a los distintos niveles de algebrización.

3. Análisis y resultados

El concepto de integral se ha generado y evolucionado, a lo largo de la historia de las matemáticas, partiendo de sus aplicaciones a la solución de problemas, entre los que destacan los relacionados con la física y la geometría (integración geométrica). Tras un período donde el énfasis estaba en el cálculo de primitivas, la integración estuvo enmarcada por su fundamentación con la elaboración de definiciones precisas basadas en el paso al límite e independientes de la geometría y, finalmente llegó su generalización apoyada en la teoría de la medida, progresando hacia el elevado grado de abstracción existente en la actualidad.

El análisis de los significados de la integral definida que mostramos a continuación se basa en los niveles de algebrización de las prácticas matemáticas que se ponen en juego en la solución de los tipos de problemas que se abordan en el cálculo integral.

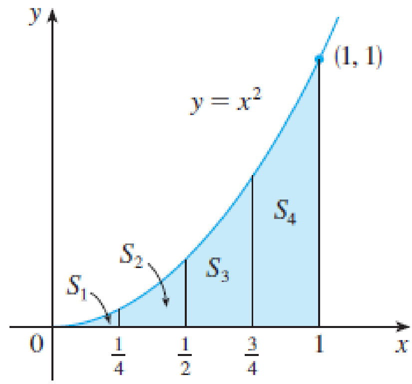
3.1. *Significado geométrico intuitivo*

El punto de vista sobre la integral que se estudia en las carreras universitarias de ingeniería es el de Riemann, en la que el área ya no es un objeto de naturaleza geométrica, sino el resultado de un cálculo según un procedimiento dado. El estudiante debe así relacionar el área con el proceso que permite sumar infinitas cantidades *infinitamente pequeñas*, sin que se le haya atribuido ningún significado al concepto de cantidad infinitamente pequeña.

Un razonamiento de tipo intuitivo, basado en la aproximación del área de una región plana a partir del área de rectángulos, supone un primer acercamiento necesario a la integral definida. El significado geométrico-intuitivo de la integral se pone de manifiesto en las prácticas operativas y discursivas que se realizan para resolver la situación-problema de la Figura 1:

Problema 1.

Utilice rectángulos para estimar el área bajo la parábola $y = x^2$ desde 0 hasta 1 (región S en la imagen).



Solución. Para aproximar el área de S, $A(S)$, se considera S dividida en cuatro regiones, S_1, S_2, S_3 y S_4, de forma que cada una de ellas se puede aproximar por el área de rectángulos, tomando como base las divisiones del intervalo [0,1] y como altura los valores de la función $f(x) = x^2$ en los extremos inferiores de los intervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ y $[\frac{3}{4}, 1]$. Así, una aproximación, por defecto, al área de S vendría dada por

$$\frac{1}{4}.0^2 + \frac{1}{4}.(\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4}.(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}.(\frac{3}{4})^2 = \frac{7}{32} = 0,21875$$

Si en lugar de considerar como altura de los rectángulos el valor de la función en los extremos inferiores consideramos los extremos superiores, obtendríamos una aproximación por exceso del área de S:

$$\frac{1}{4}.(\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4}.(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}.(\frac{3}{4})^2 + \frac{1}{4}.1^2 = \frac{15}{32} = 0,46875$$

Así,

$$0,21875 \leq A(S) \leq 0,46875.$$

Figura 1. Significado geométrico intuitivo (Stewart, 2012a, p. 360)

En una solución como la anterior, intervienen los siguientes objetos:

Conceptos: función, región, rectángulo, cantidades de magnitud, área.

Procedimientos: descomposición de la región, determinación de áreas de rectángulos, aproximación de medidas.

Proposiciones:

P1: el área de la región S bajo la curva es la suma de las áreas de las subregiones S_1, S_2, S_3 y S_4, P2: el área de un rectángulo es el producto de la longitud de su base por la longitud de su altura.

P3: 0,21875≤$A(S)$≤0,46875.

Argumentos: Si todos los rectángulos quedan debajo de la gráfica de la función obtenemos una aproximación por defecto y si la curva queda por debajo de la altura de los rectángulos, la aproximación será por exceso.

La actividad matemática desarrollada en la resolución del problema pone en juego principalmente objetos aritméticos y geométricos particulares. Sin embargo, en el enunciado interviene la función parabólica $y = x^2$; el área bajo la curva es un valor desconocido expresada como $A(S)$, lo que supone un carácter algebraico incipiente, en tanto la relación funcional general se reconoce en un lenguaje simbólico. Dado que no se opera con esta incógnita, la actividad matemática se puede calificar como protoalgebraica de nivel 2.

Este planteamiento intuitivo mostrado en la primera situación (figura 1) lleva, por un lado, a la necesidad de contar con dos medidas, una por defecto, de manera que el aumento de las subdivisiones en el intervalo, es decir, del número de rectángulos empleados en la partición, permitan acotar con un error cada vez menor el valor del área desconocido.

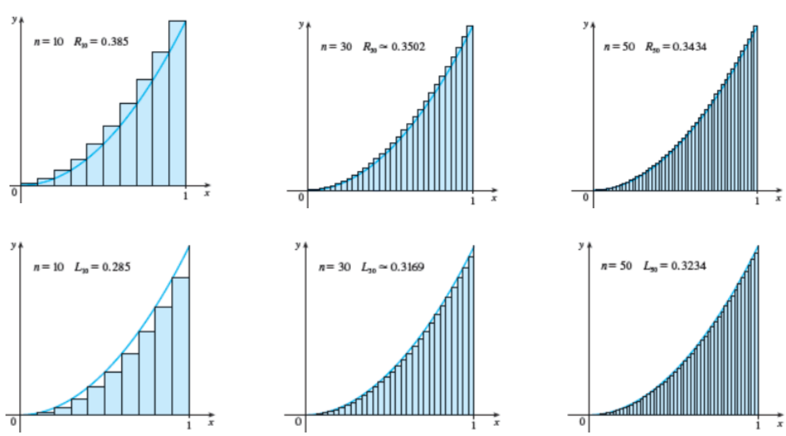


Figura 2. Estimaciones por exceso y defecto del área bajo la curva incrementando el número de subintervalos (Stewart, 2012a, p.363)

Por otro lado, la *exhaución* de la sección parabólica por medio de rectángulos sugiere el uso de un polígono de una gran cantidad de lados que cubra el área bajo la curva que se desea conocer, es decir, podríamos obtener mejores estimaciones al área al incrementar el número n de franjas (figura 2). Esta primera aproximación, se acerca a la definición de integral de una función continua en un intervalo como *el valor al que tienden* las sumas de áreas de rectángulos bajo la curva cuando las "particiones son cada vez más finas".

3.2. *La integral definida como límite*

Cauchy (1789-1857) define la integral de una función f: $[a, b] \rightarrow R$ continua en $[a, b]$ como límite de las sumas,

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

Estas sumas están asociadas a cada partición $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ cuando $||P|| = sup\{|x_k - x_{k-1}|: 1 \leq k \leq n\}$ tiende a 0. Usando la continuidad (uniforme) de f en $[a, b]$, Cauchy demuestra la existencia de este límite.

Riemann (1826-1866) parte de la misma definición de Cauchy, pero considerando la totalidad de todas las funciones integrables (aquellas para las que existe el límite de las sumas asociadas a particiones) y después establece condiciones necesarias y suficientes de integrabilidad.

Dada f: $[a, b] \rightarrow R$ función acotada, para toda partición $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$, existen $M_k = sup\, f([x_{k-1}, x_k])$ y $m_k = inf\, f([x_{k-1}, x_k])$. Los números

$$I(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \ y \ S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$

se llaman, respectivamente, *suma inferior* y *suma superior* de la función f para la partición P. El conjunto de sumas inferiores $I(f, P)$ para todas las particiones posibles de $[a, b]$, $P \in P([a, b])$, está acotado superiormente. De igual manera, el conjunto de sumas superiores $S(f, P)$ para todas las particiones posibles P de $[a, b]$, está acotado inferiormente. Una función f es Riemann – integrable en $[a, b]$ si y sólo si, $sup\, \{I(f, P): P \in P([a, b])\} = inf\, \{S(f, P): P \in P([a, b])\}$.

Dicho número real se designa como $\int_a^b f(x)dx$ y se llama integral (de Rieman) de f en $[a, b]$. Evidentemente, toda función continua y toda función monótona en un intervalo $[a, b]$ es integrable en el sentido Riemann.

Si f es positiva, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ puede interpretarse como el área bajo la curva desde a hasta b. Si f toma valores tanto positivos como negativos entonces $\int_a^b f(x)dx$ puede interpretarse como área neta (Stewart, 2012a, p. 373).

En estas prácticas discursivas que conducen a la definición general de la integral de Riemann intervienen objetos y procesos característicos de un nivel 4 de algebrización (Godino *et al.*, 2015). En efecto, aparecen conceptos y propiedades propios de la teoría de conjuntos (partición, supremo, ínfimo; existencia de supremo y de ínfimo en un conjunto acotado superior o inferiormente, respectivamente) y de funciones (dominio, acotación, signo, monotonía; integrabilidad de una función continua y monótona). Estos se formalizan y hacen ostensivos mediante un registro simbólico. La integral se define sobre un intensivo: la clase de funciones acotadas en un intervalo arbitrario, dado en términos de los parámetros *a* y *b*, aunque estos no intervienen en procesos de cálculo analítico.

Para facilitar la comprensión de esta definición general es necesario planificar en la enseñanza un significado más intuitivo, como el que se pone en juego en el problema 2. Se trata de ejemplificar las sumas de Riemann y el paso al límite para determinar el valor al que *tiende* la suma de áreas de rectángulos bajo la gráfica de $f(x) = x^2$ en el intervalo [0, 1] (Figura 3).

Problema 2. *¿Cuál es el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación superiores para la región S? (Figura 2)*

Solución. Sea R_n la suma de las áreas de *n* rectángulos que aproximan el área S por exceso (figura 2). Cada rectángulo tiene un ancho de 1/n, y las alturas son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos 1/n, 2/n, 3/n, ..., n/n; es decir, las alturas son $(1/n)^2$, $(2/n)^2$, $(3/n)^2$, …, $(n/n)^2$. De este modo,

$$R_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right)$$
$$= \frac{1}{n^3}\cdot\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right)$$

Como la suma de los cuadrados de los *n* primeros enteros positivos es,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

sustituyendo esta expresión en R_n, obtenemos que:

$$R_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\ .$$

El límite de R_n cuando $n\rightarrow\infty$ será finalmente,

$$R_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Figura 3. Aproximación a la integral como límite de sumas de las áreas los rectángulos (adaptado de Stewart, 2012a, p.362)

En las prácticas que componen una solución del problema 2 como la anterior, intervienen los siguientes objetos:

Conceptos: Magnitud área, función parabólica, partición, sumas de cuadrados de números naturales, límite de una sucesión.

Lenguajes: Natural y alfanumérico.

Procedimientos: Cálculo del límite de una sucesión de números reales.

Proposiciones:

P1: Suma de los cuadrados de los primeros n números naturales.

P2: El límite de las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación superiores para la región S es $1/3$.

Argumentos: Deductivo, aplicando las propiedades aritméticas que intervienen en el cálculo del límite.

La actividad matemática desarrollada supone un nivel consolidado de algebrización (nivel 3): se generan objetos intensivos representados de manera simbólica literal y se opera de manera sintáctica en las expresiones conservando la equivalencia (se aplican reglas de cálculo de límites en la variable *n*).

El área bajo una curva no es únicamente un problema de interés geométrico, sino que responde a necesidades científicas o económicas, que también pueden ayudar para introducir distintos contextos de uso de la integral definida de forma intuitiva.

Problema 3. *Estima la distancia recorrida por un objeto si la gráfica de la velocidad/tiempo es la dada en la siguiente gráfica.*

Solución. La distancia recorrida por un móvil en un intervalo de tiempo a velocidad constante es el producto de la velocidad por el tiempo. Por tanto, el área de cada cuadrado en la trama nos da una medida del espacio que recorrería un movil en cada segundo de duración con velocidad constantemente 1 m/s. Podemos estimar la distancia contando los cuadrados que quedan por debajo de la gráfica, es decir, aproximadamente, 30m.

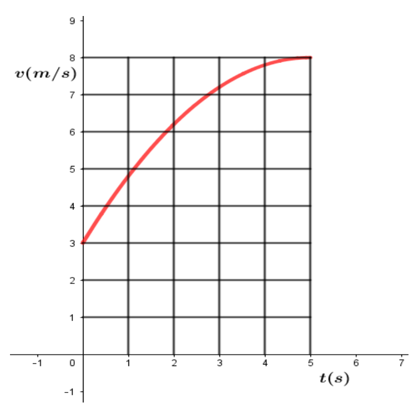


Figura 4. Estimación de la distancia recorrida por un móvil. (Elaboración propia. Inspirado en Stewart, 2012a, p. 369)

La solución al problema planteado en la figura 4, involucra una actividad puramente aritmética (nivel 0 de algebrización), que involucra los objetos:

Conceptos: Área, velocidad constante, tiempo, distancia recorrida, tiempo.

Lenguajes: Natural y alfanumérico.

Procedimientos: Estimar inferiormente contando cuadrados en la trama bajo la función.

Proposiciones:

P1: La distancia recorrida por un móvil en un intervalo de tiempo a velocidad constante es el producto de la velocidad por el tiempo.

P2: El área de cada cuadrado en la trama mide el espacio que recorrería un movil en cada segundo con velocidad constante1 m/s.

Argumentos: Basados en la interpretación intuitiva de la distancia recorrida en cada unidad temporal como área de los cuadrados bajo la función (producto de las medidas de las longitudes de los lados: tiempo y velocidad constante).

Permite conectar el cálculo de la distancia con el área bajo la curva velocidad en función del tiempo[2]. La búsqueda del cálculo exacto de la distancia recorrida por un objeto en un intervalo determinado de tiempo conocida su velocidad en función del tiempo (figura 5), pone en juego el cálculo de límite de sumas de Riemann, lo que supone un grado mayor de formalización.

En las prácticas operativas y discursivas que se ponen en juego en la solución del problema 4, intervienen los siguientes objetos:

Conceptos: área, distancia, tiempo y velocidad.

Procedimientos: reconocimiento de las sumas de Riemann, paso al límite.

Proposiciones:

P1. La distancia recorrida durante el intervalo $[a, b]$ es aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t$$

P2. La distancia recorrida es igual al área bajo la gráfica de la función velocidad.

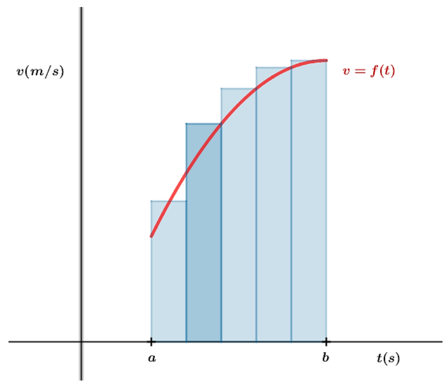
Argumentos: Basados en la relación entre espacio, velocidad y tiempo y las propiedades de los límites.

[2] Similarmente, el área bajo la curva potencia funcionando en cada instante proporciona la energía consumida, o el área bajo la gráfica de las ganancias en función del tiempo representa las ganancias acumuladas.

Se requieren de un lenguaje simbólico y de la intervención de variables (en la definición de la función velocidad) y parámetros (para denotar los extremos del hipotético intervalo de tiempo), pero no se opera con estos últimos, por lo que la actividad matemática desarrollada en la solución supone un nivel 4 de algebrización.

Problema 4. *¿Cómo hallar la distancia recorrida por un objeto durante cierto período de tiempo, si se conoce su velocidad en todo momento?*

Solución.
Supongamos que un objeto se mueve con velocidad $v = f(t)$ y $f(t) \geq 0$ (de modo que el objeto siempre se mueve en la dirección positiva). Para un intervalo concreto de tiempo, $[a, b]$, tomamos lecturas de la velocidad en los instantes $t_0 (= a)$, t_1, t_2, ..., $t_n (= b)$. Si estos instantes están equiespaciados, entonces el tiempo entre lecturas consecutivas es



$\Delta t = \frac{b-a}{n}$.

Tomando como valor estimado de la velocidad en cada subintervalo, el correspondiente al extremo inferior, durante el primer intervalo de tiempo, la distancia recorrida es aproximadamente $f(t_0)\Delta t$. De manera análoga, la distancia recorrida durante el segundo intervalo de tiempo se puede aproximar por $f(t_1)\Delta t$ y la distancia total recorrida durante el intervalo $[a, b]$ es aproximadamente

$$f(t_0)\Delta t + f(t_1)\Delta t + \ldots + f(t_{n-1})\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t .$$

Cuanto mayor es la frecuencia con que se mide la velocidad (es decir, cuanto más fina sea la partición del intervalo de tiempo), más exactas son las estimaciones, de manera que la distancia d recorrida en un intervalo de tiempo $[a, b]$ se puede obtener como el límite de esas expresiones

$$d = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\frac{(b-a)}{n} .$$

Así, la distancia recorrida es igual al área bajo la gráfica de la función velocidad $v = f(t)$

Figura 5. Distancia recorrida como límite de sumas tipo Riemann (Stewart, 2012a, p. 369)

3.3. *La integral como función acumulativa*

Este tercer significado proviene de la relación entre derivada e integral y su conexión mediante el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), que tuvo sus orígenes en los trabajos de Newton y Leibnitz, donde la integral definida, entendida como función acumulativa, básicamente es la suma de un número grande de muchos términos pequeños (Robles *et al*., 2014).

Para una función integrable f: $[a, b] \to R$ podemos definir una nueva función F: $[a, b] \to R$, dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, para todo $x \in [a, b]$. El TFC, permite recuperar la función f a partir de su función área, F, relacionando el concepto de área y el de tangente a una curva. Dicho teorema establece que la función F es continua en $[a, b]$ y que en todo punto $c \in [a, b]$ en el que f sea continua, se cumple que F es derivable con $F(c) = f(c)$. En particular, si f es continua en $[a, b]$ entonces F es derivable en $[a, b]$ y $F(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. En esta primera parte del TFC la integral definida pasa a tener un nuevo significado; ahora no es un valor numérico específico de una cantidad de magnitud, sino que es una función, que puede participar en nuevas prácticas, procesos o transformaciones de manera sintáctica, dando lugar a nuevos objetos intensivos. Dada la generalidad del razonamiento, que se aplica a cualquier función continua $f(x)$ y el cálculo analítico con variables y parámetros, la actividad matemática implicada en esta demostración supone un nivel 5 de algebrización.

En la segunda parte del TFC, también conocida como Regla de Barrow, la integral definida vuelve a tomar el significado de un número específico, dependiente de los extremos de integración $[a, b]$. Cualquier función G: $[a, b] \to R$, continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ tal que $G(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, se llama primitiva de f en $[a, b]$. El TFC, asegura por tanto que la función es una primitiva de f. La Regla de Barrow, establece que para toda función integrable f: $[a, b] \to R$ y cualquier primitiva G de f,

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

La aplicación de la Regla de Barrow y del cálculo de derivadas para obtener el área bajo una función (figura 6), involucra una configuración de objetos característica de este nuevo significado.

Problema 5. *Determine el área bajo la parábola* $y = x^2$ *desde* 0 *hasta* 1.

Solución. La función $G(x) = \frac{x^3}{3}$ es una primitiva de $f(x) = x^2$, dado que $G(x) = f(x)$, para todo $x \in]0, 1[$ Por la Regla de Barrow, $\int_0^1 x^2\,dx = G(1) - G(0) = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$.

Figura 6. Aplicación de la Regla de Barrow en el cálculo de áreas (Stewart, 2012a, p. 392)

En la solución propuesta en la figura 6, intervienen los siguientes objetos matemáticos:

Conceptos: función, derivada, primitiva, integral definida.

Procedimientos: cálculo analítico con funciones, primitivas y derivadas.

Proposiciones: La función $G(x) = \frac{x^3}{3}$ es una primitiva de $f(x) = x^2$; $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

Argumentos: basados en el TFC (Regla de Barrow) y en las propiedades del cálculo de derivadas.

La actividad matemática realizada para resolver de este modo (figura 6) el problema supone un nivel 3 de algebrización, en tanto es característico de este nivel la aplicación de la noción de función y de las técnicas de resolución basadas en sus propiedades. En efecto, para determinar $\int_0^1 x^2\,dx$, es necesario conocer una primitiva de $f(x) = x^2$, por ejemplo, $G(x) = \frac{x^3}{3}$. Esto requiere un procedimiento de cálculo inverso de derivadas, que precisa de un conocimiento previo de reglas de cálculo de derivación, sus propiedades básicas, así como disponer de un *conjunto básico de primitivas inmediatas*. El cálculo de la integral por medio de la evaluación de esta primitiva se argumenta en base a la segunda parte del TFC (regla de Barrow).

Starbird (2006, p. 18-21) ofrece una presentación intuitiva de la integral definida, mediante la cual llega finalmente a justificar las sumas de Riemann para el caso de calcular la distancia recorrida por un móvil con una velocidad variable. El autor comienza considerando el caso en que el coche se mueve a velocidad constante y después a velocidad constante a trozos. A continuación, contempla el caso en que el coche se mueve con velocidad variable (en cada tiempo t a la velocidad $2t$ millas por minutos), mostrando que la distancia exacta recorrida no se puede encontrar con una única división del intervalo de tiempo, sino que "se obtiene mirando las *infinitas aproximaciones* progresivamente mejoradas". "Este proceso infinito es la segunda idea fundamental del cálculo - la integral. Si conocemos la velocidad de un coche en cada momento en un intervalo de tiempo, la integral nos dice la distancia recorrida durante ese intervalo" (p. 20). Finalmente considera el caso en que el espacio es función del tiempo ($p(t) = t^2$) y la velocidad variable $v(t) = 2t$. El proceso integral implica dividir el intervalo de tiempo en pequeños incrementos, ver qué distancia recorrería el coche si hubiera ido a velocidad constante durante cada intervalo pequeño de tiempo, de manera que "haciendo subdivisiones cada vez más pequeñas y tomando límites, llegamos al valor de la integral" (p.21).

3.4. *Extensiones de la integral de Riemann*

En esta sección presentamos dos extensiones de la integral definida de Riemann fundamentales en la formación de un ingeniero. La ampliación de funciones reales de variable real a funciones reales de variable vectorial origina las integrales múltiples (dobles y triples). Por otro lado, cuando el intervalo de integración $[a, b]$ se reemplaza por una curva en el espacio real n-dimensional R^n ($n \geq 2$) la extensión de la noción de integral definida origina las integrales de línea de un campo escalar (o de un campo vectorial) definido y acotado sobre esa curva (camino de integración). De forma similar, la consideración de superficies sobre las que integrar campos escalares (o vectoriales) da lugar a la integral de superficie.

3.4.1. *La integral doble como caso particular de las integrales múltiples*

Un razonamiento de tipo geométrico, similar al desarrollado para aproximar el área de una región plana a partir del área de rectángulos, supone un primer acercamiento necesario a la integral doble, a través de la aproximación del volumen de un sólido. Así, para una función f de dos variables dada en un rectángulo f: $[a, b]\times[c, d]\rightarrow R$, positiva, la gráfica de f determina una superficie en el espacio $z = f(x, y)$. Para determinar el volumen del sólido Ω determinado bajo la gráfica de f, $\Omega = \{(x, y, z)\in R^3 : a\leq x\leq b;\ c\leq y\leq d;\ 0\leq z\leq f(x, y)\}$ es posible aproximar el volumen de S mediante sumas de volúmenes de prismas, cuyas bases vengan dadas por subdivisiones del rectángulo $[a, b]\times[c, d]$ en subrectángulos y sus alturas estén determinadas por los valores de la gráfica de f en dichos subrectángulos.

Para una función f continua de dos variables definida en un rectángulo f: $[a, b]\times[c, d]\rightarrow R$, sendas particiones $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ y $Q = \{c = y_0, y_1, ..., y_{m-1}, y_m = d\}$ del intervalo $[c, d]$, determinan una partición del rectángulo $[a, b]\times[c, d]$ en subrectángulos, $[x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]$, donde $0\leq i\leq n$, $0\leq j\leq m$. Escogiendo puntos $(s_i, t_j)\in[x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]$, se pueden definir las sumas de Riemann de f para la partición $P\times Q$ de $[a, b]\times[c, d]$,

$$\sum_{0\leq i\leq n,\ 0\leq j\leq m} f\left(s_i, t_j\right)\cdot\left(x_i - x_{i-1}\right)\cdot\left(y_j - y_{j-1}\right).$$

Cuando la mayor de las longitudes de los intervalos de las particiones P y Q (esto es, su norma) tiende a 0, las sumas de Riemman, se aproximan tanto como se quiera a un número real, que por definición es la integral de f en el rectángulo $R = [a, b]\times[c, d]$, $\iint_R f(x, y)d(x, y)$. De aquí, se observa que si $f(x, y)\geq 0$ el volumen del sólido Ω determinado bajo la gráfica de f, viene dado por $V(\Omega) = \iint_R f(x, y)d(x, y)$.

De manera similar a como se ha definido la integral doble, se puede establecer la definición de integral (de Riemann) para campos escalares de tres variables, consideradas inicialmente en un ortoedro f: $[a, b]\times[c, d]\times[u, v]\rightarrow R$, como límite de sumas de Riemann asociadas a particiones cuyas normas tienden a 0, $\iiint_R f(x, y, z)d(x, y, z)$. Las definiciones de la integral doble y triple se pueden extender de manera natural a dominios acotados en R^2 y R^3, respectivamente, si bien para el trabajo que realizan los estudiantes de carreras técnicas suele ser suficiente con considerar rectángulos y ortoedros como dominios de integración.

Una de las aplicaciones más frecuentes de la integral doble en el cálculo integral para ingenieros es el cálculo de la masa (o de la carga eléctrica) de láminas con densidad (de carga) variable. Así, si una lámina ocupa una región D del plano y su densidad (unidad de masa por unidad de área) en un punto (x, y) de D está dada por una función continua $\rho(x, y)$ en D, podemos considerar $\rho(x, y)$ definida en un rectángulo $R = [a, b]\times[c, d]$ que contenga a D, de forma que $\rho(x, y) = 0$ en $R\backslash D$. Para cada partición $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b\}$ de $[a, b]$ y $Q = \{c = y_0, y_1, ..., y_{m-1}, y_m = d\}$ de $[c, d]$, una estimación para la masa de la lámina vendría dada por

$$\sum_{0\leq i\leq n,\ 0\leq j\leq m} \rho(s_i, t_j)\cdot(x_i - x_{i-1})\cdot(y_j - y_{j-1})$$

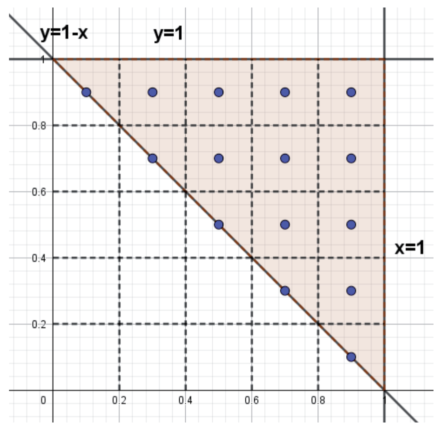
Incrementando el número de subrectángulos, se obtiene la masa total m de la lámina como el valor límite de las aproximaciones, es decir, $m = \iint_D \rho(x, y)d(x, y)$.

De manera similar, si se distribuye una carga eléctrica sobre una región D y la densidad de carga (en unidades de carga por unidad de área) está dada por $\sigma(x, y)$ en un punto (x, y) en D, entonces la carga total Q está dada por $Q = \iint_D \sigma(x, y)d(x, y)$.

La actividad matemática que se pone en juego en una presentación general de los conceptos de integral doble y triple supone un grado de abstracción que puede ser mayor del que los estudiantes de carreras técnicas puedan lograr. En la figura 7 incluimos el enunciado y solución de un problema que permite un acercamiento informal al cálculo de la carga eléctrica. Puede ser un primer encuentro con la integral doble que ayude al estudiante a comprender que las aproximaciones son tanto mejores cuanto más pequeños sean los rectángulos en que se divida la región y conectar con las sumas de Riemann que estudió previamente con las integrales simples.

Problema 6. *La carga eléctrica está distribuida sobre la región triangular D limitada por las rectas $y = 1$, $x = 1$ y $y = 1-x$ de modo que la densidad de carga en (x, y) es $\sigma(x, y) = xy$, medida en coulombs por metro cuadrado (C/m^2). Estime la carga total en el triángulo.*

Solución. La región D se divide como aparece en la figura adjunta. Para aproximar la carga total sobre la región D, con función de densidad $\sigma(x, y) = xy$, la consideramos dividida en la trama de cuadrados, todos ellos de área, $0.4m^2$ y evaluamos la función de densidad en los puntos dados por los medios de las particiones,



$$Q \approx \sigma(0.1,0.9)\cdot 0.4 + \sigma(0.3,0.9)\cdot 0.4 + \sigma(0.5,0.9)\cdot 0.4 + \sigma(0.7,0.9)\cdot 0.4 + ... + \sigma(0.9,0.1)\cdot 0.4 = 0.222$$

Figura 7. Estimación de la carga eléctrica (Adaptado de Stewart, 2012b, p.1004)

La solución al problema 6 supone un primer acercamiento intuitivo a la integral doble, como límite de sumas de Riemann donde la función involucrada tiene dos variables, en este caso la densidad de carga en cada punto de la región. Intervienen los siguientes objetos matemáticos:

Conceptos: función, región, área, densidad de carga, carga total

Procedimientos: descomposición de la región, determinación de áreas de cuadrados, evaluación de la función densidad de carga, cálculos aritméticos, representación de rectas en el plano cartesiano.

Proposiciones:

P1: la carga total de D se puede aproximar como la suma de las cargas en las regiones en las que se divide D.

P2: la carga en cuadrado se aproxima por el producto de la densidad de carga en el centro del cuadrado por el área del cuadrado

P3: $Q \approx 0.222\ C/m^2$.

Argumentos: Se conviene una división de la región y se acepta aproximar la carga asumiendo que fuera constante en cada subregión de D.

La actividad matemática desarrollada corresponde a un nivel 3 de algebrización, pues interviene una función de dos variables, expresada de manera simbólica (no depende de parámetros), que debe ser evaluada en determinados puntos escogidos en la partición del dominio D. Este dominio aparece representado por medio del registro gráfico.

Si un sólido Ω es tal que los planos π_x paralelos al plano YZ, cortan a Ω en secciones, $\Omega(x)$ cuya área es una función continua de x, el volumen del sólido Ω se puede aproximar por sumas de las áreas de sus secciones por planos paralelos a uno dado.

Para la región $\Omega = \{(x, y, z)\in R^3\colon a\leq x\leq b;\ c\leq y\leq d;\ 0\leq z\leq f(x, y)\}$, si $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$, la sección de comprendida entre los planos perpendiculares al eje OX por los puntos $(x_{k-1}, 0,0)$ y $(x_k, 0,0)$ se puede aproximar por un cilindro de altura $x_k - x_{k-1}$ y base $\Omega(x_k)$, cuyo volumen es $A(\Omega(x_k))(x_k - x_{k-1})$. La suma de los volúmenes de estos cilindros

$$\sum_{k=1}^{n} A(\Omega(x_k))(x_k - x_{k-1})$$

es una aproximación del volumen del sólido, que coincide con la suma de Riemann de la función $f\colon [a, b]\rightarrow R$, $f(x) = A(\Omega(x))$, continua en $[a, b]$. Así, el volumen de Ω se obtiene como

$$V(\Omega) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b A(\Omega(x))dx.$$

El cálculo de volúmenes a través de secciones planas es un caso particular del Teorema de Fubini. Sin embargo, puede ser útil presentarlo antes de introducir la definición formal de integral doble, sus técnicas y propiedades fundamentales (figura 8).

Problema 7. *¿Cómo podemos determinar el volumen de un elipsoide?*
Solución. Para un valor $\bar{x}$ el plano $\pi_{\bar{x}}$ cortan al elipsoide $\Omega\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en la elipse $\Omega(\bar{x})$: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{\bar{x}^2}{a^2}$.
Teniendo en cuenta la fórmula del área de la elipse,

$$A(\Omega(x)) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right): V(\Omega) = \int_{-a}^{a} A(\Omega(x))dx = \pi bc\int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc .$$

Figura 8. Cálculo del volumen de un elipsoide (elaboración propia)

En la determinación del volumen de un elipsoide genérico incluida en la figura 8, intervienen objetos de una elevada complejidad semiótica: familias de ecuaciones descritas por medio de parámetros (elipsoides y elipses obtenidas como cortes con los planos). Además, se opera con variables y parámetros (fórmula del área de las elipses obtenidas al seccionar el elipsoide y determinación del volumen como integral de las funciones área) por lo que el nivel de algebrización en la solución descrita es 5.

El teorema de Fubini permite calcular una integral doble haciendo dos integrales simples. Así establece que para una función f: $R \rightarrow R$ continua en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$,

$$\iint_R f(x, y)d(x, y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy.$$

Dicho teorema permitirá determinar de forma exacta la carga eléctrica Q distribuida sobre la región triangular D del problema 6:

$$Q = \iint_D \sigma(x, y)d(x, y) = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xydydx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2}(1^2 - (1-x)^2)dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\left[1^2 - (1-x)^2\right]dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2x^2 - x^3\right)$$

En este caso, una vez establecida que la carga total es la integral doble sobre el recinto D y que, en base a la continuidad de la función de carga eléctrica, es posible determinar ésta como integral iterada, los procedimientos involucrados requieren determinar los límites de integración de las integrales, siendo uno de ellos función de la variable x y el cálculo de integrales definidas. Es necesario un proceso de generalización que permita obtener integrales definidas cuyos límites dependen de una variable, así la integral definida pasa a ser una nueva función. Esto supone un mayor nivel de algebrización (nivel 5) que el desarrollado en la solución aproximada incluida en la figura 7.

3.4.2. *Integral de línea*

Las integrales de línea surgieron a principios del siglo XIX para resolver problemas relacionados con la energía potencial, el flujo de calor, el cambio en la entropía, la circulación de un fluido y otras cuestiones que involucran el comportamiento de un campo escalar o vectorial a lo largo de una curva. En los programas y manuales de estudio del cálculo se pretende que los estudiantes lleguen a comprender la integral de línea en su mayor grado de generalidad, para lo cual se debe poner en juego un lenguaje altamente algebrizado. Como se muestra a continuación la curva sobre la que se integra viene expresada por sus ecuaciones paramétricas por lo que se identifica un nivel de algebrización de la actividad matemática 5, acorde al modelo de Godino *et al.* (2015).

Dada una curva γ: $[a, b]\rightarrow R^n$ con derivada continua y f: $A\rightarrow R$ un campo escalar continuo definido en un subconjunto A que contiene a la imagen de γ, la integral de línea de f sobre la curva viene dada por la integral,

$$\int_{\gamma} f = \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\left\|\gamma'(t)\right\|dt.$$

En particular, si $n = 2$ y $\gamma(t) = (x(t), y(x))$ la integral anterior, se expresa como

$$\int_{\gamma} f = \int_{a}^{b} f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

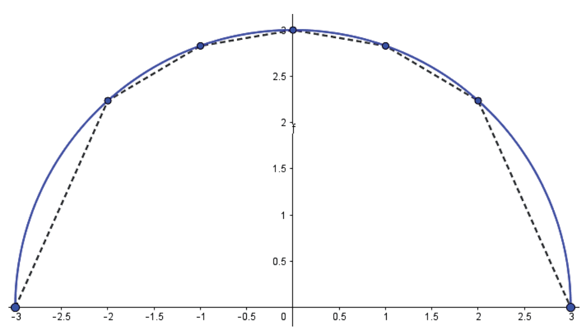
Si la función que se integra es la constante igual a 1,

$$\int_{\gamma} 1 = \int_{a}^{b}\left\|\gamma'(t)\right\|dt = \int_{a}^{b}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

es la longitud de la curva γ: $[a, b]\rightarrow R^2$.

Problema 8. *¿Cómo podemos estimar la masa de un alambre fino cuya forma es la de una semicircunferencia de radio 3, cuya densidad lineal (es igual al cuadrado de su abscisa?*

Solución.
La forma del alambre es la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 9$ con $y\geq 0$. Para estimar su masa, consideramos una poligonal que aproxime a la semicircunferencia y asumimos que la densidad es uniforme en cada segmento de dicha poligonal con valor el cuadrado de la abscisa del extremo final del segmento.



La aproximación a la masa m del alambre es la suma de la masa en cada segmento, producto de su longitud por su densidad:

$$m \approx (-2)^2 \times 2.45 + (-1)^2 \times 1.16 + 0 \times 1.01 + 1^2 \times 1.01 + 2^2 \times 1.16 + 3^2 \times 2.45 = 38.66\,gr$$

Figura 9. Estimación de la masa de un alambre (Adaptado de Stewart, 2012b, p.1073, ejercicios 33 y 34)

En el problema de la figura 9 se plantea una primera aproximación informal a la integral de línea basada en una aplicación frecuente al cálculo para ingenieros: si $f(\gamma(t))$ es la densidad lineal en el punto $\gamma(t)$ de un alambre cuya forma viene dada por la curva γ, la integral nos da la masa total del alambre.

La integral de línea permite obtener de manera exacta la masa del alambre descrito en el problema anterior. Escogemos la parametrización de la curva que modeliza el alambre, $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (3cos(t), 3sen(t))$ definida en $[0, \pi]$. Dado que la densidad del alambre viene dada por $f(x, y) = x^2$, la masa del alambre se obtiene a partir de la integral de línea anterior, la cual se expresa como

$$m = \int_0^{\pi} f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = \int_0^{\pi} 9cos^2(t)\sqrt{9(sen^2(t) + cos^2(t))}\,dt = \int_0^{\pi} 27cos^2(t)dt = 27\left[\frac{sen(t)coscos\,(t) + t}{2}\right]_{t=0}^{t=\pi} = 27\frac{\pi}{2}gr.$$

Donde para obtener una primitiva de la función $cos^2(t)$, se puede emplear la igualdad $cos^2(t) = \frac{1}{2}(1 + cos(2t)$.

La solución al problema 8 es contiene un acercamiento intuitivo y formal a la integral de línea, como aproximación de sumas de Riemann y en función de una integral simple, donde la densidad lineal depende de dos variables, en cada punto de la curva. Intervienen los siguientes objetos matemáticos:

Conceptos: función, intervalo, longitud, norma, densidad lineal, masa.

Procedimientos: descomposición de la curva, determinación de longitudes de segmentos, evaluación de la función densidad lineal, cálculos aritméticos, representación de segmentos de rectas en el plano cartesiano.

Proposiciones:

P1: La aproximación a la masa m del alambre es la suma de la masa en cada segmento, producto de su longitud por su densidad.

P2: La masa del alambre se calcula exactamente mediante una integral de línea.

P3:. $m \approx 38.66\,gr$

P4:. $m = \frac{27\pi}{2}gr.$

Argumentos: Se conviene una división de la curva y se acepta aproximar la masa asumiendo que fuera constante en cada segmento de la curva.

La actividad matemática desarrollada corresponde a un nivel 5 de algebrización, ya que intervienen una función de dos variables, parametrizaciones de una curva, y cálculos analíticos como la distancia de un segmento y de un vector.

4. Discusión y conclusiones

La preocupación por la formación matemática de los futuros ingenieros ha llevado a diversos investigadores a abordar cómo se deben tratar las diferentes nociones matemáticas en los contextos de la ingeniería, analizar el tipo de problemas utilizados para introducir los conceptos, el impacto de los recursos tecnológicos, los libros de texto de matemáticas para ingenieros o la motivación de los estudiantes (Pino-Fan *et al*.,2018). Sin embargo, "los trabajos de investigación internacionales que se centran en el uso de las matemáticas en cursos de ingeniería (y cómo este uso se relaciona con las prácticas "matemáticas") son todavía escasos, a pesar de la necesidad de estudios que examinen los contenidos necesarios para las disciplinas que las demandan" (González-Martín *et al*., 2021 p. 216). Al examinar cómo se utilizan las matemáticas en los cursos de ingeniería, podemos averiguar formas de hacer que la enseñanza del cálculo sea más relevante para los estudiantes de ingeniería (González-Martín *et al*., 2021).

Uno de los problemas fundamentales que se encuentran los estudiantes de carreras de ingeniería tiene que ver con el grado de formalización y abstracción de los contenidos matemáticos que se espera logren conocer y aplicar de manera pertinente y para los que su formación previa puede no ser suficiente. En particular, aquellos relativos al cálculo integral. Como afirma Starbird (2006) "los conceptos fundamentales del cálculo pueden entenderse sin los conocimientos técnicos que tradicionalmente se exigen en los cursos de cálculo" (p.1) Una de las bases del potencial del cálculo reside en el hecho de que "muchas cuestiones en muchas disciplinas son equivalentes cuando se ven en el nivel apropiado de abstracción" (Starbird, 2006, p.2). Sin embargo, lograr acercar a los estudiantes de ingeniería a este nivel de abstracción no es tarea fácil y puede ser conveniente acercarse a las nociones fundamentales desde un punto de vista más intuitivo, menos formal, no sólo a la idea de área bajo una curva, o de *paso al límite* en el caso de la integral definida, también a la integral doble o integral de línea, empleando incluso, como hemos visto, situaciones de "otras disciplinas" como indica Starbird, en las que las técnicas surgen de manera intuitiva y en un contexto cercano al ingeniero.

Para que esa mejora en la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral sea efectiva, como sugiere Serhan (2015), es importante que los formadores revisen cómo se presenta y se enseña la integral definida en clase, haciendo hincapié en las múltiples representaciones y cómo los estudiantes pueden utilizar las conexiones entre sumas de Riemann, límites, derivadas, área y muchos otros conceptos para mejorar su comprensión estructural de la integral definida como objeto sistémico y dinámico (Boigues, Llinares y Estruch, 2010; Serhan, 2015). Es decir, reflexionar sobre la naturaleza y complejidad de los objetos matemáticos que configuran los significados de la integral definida que se espera que los estudiantes comprendan y apliquen (Contreras y Ordóñez, 2006; Gordillo y Pino-Fan, 2016; Robles *et al*., 2014).

Por este motivo, en este trabajo se han analizado los diversos significados de la integral definida propuestos por otros autores (Contreras y Ordóñez, 2006; Contreras *et al.*, 2010; Gordillo y Pino-Fan 2016; Robles *et al.*, 2014; Pino-Fan, Font *et al.*, 2018): geométrico intuitivo, como límite de sumas de Riemann y como función acumulativa, abordando también sus extensiones al caso de integral dobles (como caso particular de las múltiples) y de línea, aplicando el modelo de razonamiento algebraico propuesto en el EOS (Godino *et al.*, 2014; Godino *et al.*, 2015). Los niveles de algebrización han permitido modelizar el conocimiento institucional que se pone en juego en las prácticas operativas y discursivas implicadas en la resolución de problemas de cálculo integral relevantes para la formación de ingenieros, describiendo la actividad matemática bajo la perspectiva de objetos y procesos característicos del álgebra, admitiendo que un mismo problema se puede abordar de diferentes maneras en un momento dado con niveles de algebrización diferentes.

Esta investigación se podría continuar en diversas líneas. En primer lugar, múltiples investigaciones sugieren la importancia del significado variacional en la enseñanza de la integral definida (Jones, 2020; Kouropatov y Dreyfus, 2013) que en ocasiones queda oculto por el tratamiento meramente analítico de los conceptos del cálculo en la enseñanza superior (Contreras *et al*., 2010) y en particular en los estudios de ingeniería (Carracelas, García y Oca, 2022). En este sentido, es conveniente analizar y profundizar en el Teorema Fundamental del Cálculo, articulado alrededor de las nociones de variación y acumulación (Robles *et al*., 2014). Para lograr una enseñanza "suficientemente representativa de la complejidad de los objetos matemáticos integral y derivada y, más en general, de la complejidad del Cálculo", (p. 70), el profesor no debe conformarse con que el estudiante entienda la conexión entre derivada e integral. Un estudio de los niveles de razonamiento algebraico implicados en la construcción del Teorema Fundamental del Cálculo podría facilitar el diseño de secuencias de instrucción que lleven a los estudiantes a asomarse a la idea de variación acumulada para después inferir la existencia de una función que describe la variación de dicha acumulación y llegar a obtener la integral como función acumulativa desde un razonamiento variacional.

En segundo lugar, analizando las implicaciones que el tipo de análisis mostrado tiene para los profesores de los programas de ingeniería. Es necesario conocer sus conocimientos sobre los significados de la integral y su competencia para abordar las tareas prototípicas con diferentes niveles de algebrización. Esto puede llevar a diseñar e implementar acciones formativas con los profesores en carreras técnicas, para desarrollar en ellos la competencia de análisis ontosemiótico y reconocimiento de niveles de algebrización[3] que les permita planificar secuencias formativas que

[3] Este tipo de acciones formativas se ha implementado con futuros profesores de matemáticas, por ejemplo, ver Burgos y Godino (2022).

progresen desde las aproximaciones más intuitivas a las más formales en la enseñanza del cálculo integral.

En tercer lugar, analizando los niveles de razonamiento algebraico desarrollado por estudiantes[4] de ingeniería al resolver los problemas característicos de los significados de la integral definida contemplados en este trabajo. Esto permitiría, por un lado, observar cómo se emplea este tipo de herramienta para analizar el grado de algebrización alcanzado por los estudiantes y por otro, tomar decisiones para el diseño de las acciones formativas con profesores.

El estudio desarrollado en este trabajo permite identificar el grado de formalización y el papel que desempeña el razonamiento algebraico en la caracterización de los diferentes significados de la integral definida. Consideramos que los ejemplos descritos ayudarán a los profesores de los programas de ingeniería a analizar el grado de generalidad en la actividad matemática involucrada en la resolución de problemas, la planificación de los procesos de instrucción y el desarrollo de instrumentos de evaluación que contemplen la complejidad intrínseca al cálculo integral. De manera específica, la identificación de prácticas, objetos y procesos matemáticos mostrada les permitirá valorar en qué momento y de qué forma se puede abordar el estudio de los diferentes componentes del cálculo integral según los diversos niveles de algebrización, teniendo en cuenta los conocimientos necesarios en cada momento y las competencias matemáticas que deben lograr los estudiantes de ingeniería.

Agradecimientos

Investigación realizada con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España).

Referencias

Alpers, B. (Ed.). (2013). *A framework for mathematics curricula in engineering education* (a report of the mathematics working group). Brussels: European Society for Engineering Education. https://www.sefi.be/publication/a-framework-for-mathematics-curricula-in-engineering-education/

Boigues, F., Llinares, S. y Estruch, V. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(3), 255-282.

[4] Se puede observar el análisis de los niveles de algebrización en las producciones de alumnos de educación primaria en Burgos y Godino (2019).

Bressoud, D., Ghedams, I., Martinez-Luances, V. y Törner, G. (2016). *Teaching and learning of Calculus*. Berlin: Springer.

Brito-Vallina, M. L., Alemán-Romero, I., Fraga-Guerra, E., Para-García, J. L. y Arias-De Tapia, R. I. (2011). Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. *Ingeniería Mecánica, 14*(2), 129-139.

Burgos, M., Bueno, S., Godino, J. D. y Pérez, O. (2021). Onto-semiotic complexity of the Definite Integral. Implications for teaching and learning Calculus. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education, 10*(1), 4-40. https://doi.org/10.17583/redimat.2021.6778

Carracelas, G. G., García, S. B. y Oca, N. M. de. (2022). Situaciones didáctico-matemáticas para el tratamiento de los procesos de variación y acumulación del cálculo integral en problemas ingenieriles. *PARADIGMA*, *43*(2),341-363. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2022.p341-363.id1249

Carvalho, P. y Oliveira, P. (2018). Mathematics or mathematics for engineering? *Proceedings of 2018 3rd International Conference of the Portuguese Society for Engineering Education* (CISPEE), Aveiro, Portugal. https://ria.ua.pt/bitstream/10773/25337/1/CISPEE2018_final.pdf

Contreras, A. y Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 65-84. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362006000100004&script=sci_abstract

Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3), 367-384. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v28n3.63

Ellis, B., Larsen, S., Voigt, M. y Kristeen, W. (2021). Where calculus and engineering converge: an analysis of curricular change in calculus for engineers. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 7,* 379–399. https://doi.org/10.1007/s40753-020-00130-9

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*(1), 97–124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 22* (2-3), 237-284.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencia*s, *32*(1), 199-219. http://dx.*doi*.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education* 39 (1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8,* 117-142. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105

González-Martín, A. S. (2021). $V_B - V_A = \int_a^b f(x)dx.$ The Use of Integrals in Engineering Programmes: a Praxeological Analysis of Textbooks and Teaching Practices in Strength of Materials and Electricity and Magnetism Courses. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 7,* 211–234. https://doi.org/10.1007/s40753-021-00135-y

González-Martín, A. S., Gueudet, G., Barquero, B. y Romo-Vázquez, A. (2021). Mathematics and other disciplines, and the role of modelling. En V. Durand-Guerrier, R. Hochmut, E. Nardi, y C. Winsløw (Eds.), *Research and Development in University Mathematics Education* (pp. 169–189). Routledge ERME Series: New Perspectives on Research in Mathematics Education. https://doi.org/10.4324/9780429346859-12

González-Martin, A. S y Hernandes, G. (2017). How are Calculus notions used in engineering? An example with integrals and bending moments. *CERME 10*. Dublin, Ireland. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01941357

Gordillo, W. y Pino-Fan, L. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, 30* (55), 535-558. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a12

Jones, S. R. (2020). Scalar and vector line integrals: A conceptual analysis and an initial investigation of student understanding. *Journal of Mathematical Behavior, 59,* 100801. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100801

Jones, S. R. y Dorko (2015). Students' understandings of multivariate integrals and how they may be generalized from single integral conceptions. *Journal of Mathematical Behavior, 40,* 154-170. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100801

Kouropatov, A. y Dreyfus, T. (2013). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: Suggestions for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(5), 641–651. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.798875

Ministerio de Educación Superior (2017). Plan de Estudios "E". Carrera Ingeniería Informática.

Ministerio de Educación Superior (2018). Plan de Estudios "E". Carrera Ingeniería Industrial.

Muñoz, O. G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(2), 131-170. http://funes.uniandes.edu.co/9599/1/Mu%C3%B1oz2000Elementos.pdf

Pepin, B., Biehler, R. y Gueudet, G. (2021). Mathematics in engineering education: a review of the recent literature with a view towards innovative practices. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 7,*163–188. https://doi.org/10.1007/s40753-021-00139-8

Pino-Fan, L., Font, V., Gordillo, W., Larios, V. y Breda, A. (2018). Analysis of the meanings of the antiderivative used by students of the first engineering courses. *International Journal of Science and Mathematics Education, 16*(6), 1091-1113. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9826-2

Puga, K. y Miranda, E (2021). Construcción del esquema mental para la apropiación del concepto de la integral. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *25,* 113-122. http://funes.uniandes.edu.co/4136/1/PugaConstrucci%C3%B3nALME2012.pdf

Robles, M. G., Tellechea, E. y Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática, 26*(2), 69-109. https://www.redalyc.org/pdf/405/40532665004.pdf

Rooch, A., Junker, P., Härterich, J. y Hackl, K. (2016). Linking mathematics with engineering applications at an early stage – implementation, experimental set-up and evaluation of a pilot project. *European Journal of Engineering Education, 41*(2), 172–191. https://doi.org/10.1080/03043797.2015.1056095

Serhan, D. (2015). Students' understanding of the definite integral concept. *International Journal of Research in Education and Science,* 1(1), 84-88. http://dx.doi.org/10.21890/ijres.00515

Starbird, M. (2006). *Change and motion: Calculus made clear*, 2nd Edition. Chantilly, Virginia: The Teaching Company.

Stewart, J. (2016). *Calculus. Early transcendentals*. Boston: Cengage Learning.

Stewart, J. (2012a). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. (7ª edición). México: Cendage Learning.
Stewart, J. (2012b). *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*. (7ª edición). México: Cendage Learning.
Viol, J. y Jacques, A. (2019). Ensino e Aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo: algumas reflexões a partir de uma revisão sistemática de literatura. *Educacão Matemática Pesquisa, 21*(2), 239–263. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v21i2p239-263

Autores

Seydel Bueno. Universidad de Camagüey, Cuba. seydel.bueno@reduc.edu.cu
https://orcid.org/0000-0001-5608-5507

María Burgos. Universidad de Granada, España. mariaburgos@ugr.es
https://orcid.org/0000-0002-4598-7684

Juan D. Godino. Universidad de Granada, España. jgodino@ugr.es
https://orcid.org/0000-0001-8409-0258

Olga Pérez. Universidad de Camagüey, Cuba. olga.perez@reduc.edu.cu
https://orcid.org/0000-0003-4475-814X