FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XV
ISSN: 1695-6613

FORMULACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS CON GEOGEBRA. UN ESTUDIO INICIAL

Alexánder Hernández Hernández
Matías Camacho Machín
Josefa Perdomo-Díaz
Universidad de La Laguna

Resumen

La formulación de problemas es reconocida como una actividad matemáticamente enriquecedora, que permite al individuo tanto reflexionar sobre su propio conocimiento como, a partir de dicha reflexión, aportar elementos para desarrollar su creatividad. Diversas investigaciones han mostrado que cuando se utilizan herramientas digitales, la tarea de formular problemas mejora (Abramovich y Cho, 2015; Barana et al., 2020). En este trabajo se presentarán algunos problemas con los que se trata de evidenciar las oportunidades que ofrece el SGD GeoGebra para la formulación de problemas por parte de un grupo de profesores de matemáticas en formación. Se pide que, durante el proceso de resolución, los estudiantes para profesor utilicen un proceso caracterizado por el uso de episodios (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2013). A partir del análisis de los resultados obtenidos, se observó que los participantes formulan problemas plausibles, sin embargo, éstos carecen, en términos generales, de características singulares diferentes de los resueltos durante la experiencia.

Abstract

Problem posing is recognized as a mathematically enriching activity, which allows the individual both to reflect on his own knowledge and to contribute, from this reflection, with elements to develop his creativity. Various investigations have shown that when using digital tools, the task of formulating problems improves (Abramovich and Cho, 2015; Barana et al., 2020). In this work will be presented problems which we try to show the opportunities offered by the GeoGebra GDS for the formulation of problems by a group of teachers of mathematics in training. During the resolution process, students for teachers are asked to use a process characterized by the use of episodes (Santos-Trigo and Camacho-Machín, 2013). From the analysis of the results obtained, it was observed that participants pose plausible problems, however the problems formulated lack, in general terms, unique characteristics different from those resolved during the experience.

Introducción

Se puede afirmar que las investigaciones sobre formulación y resolución de problemas están ampliamente conectadas. En la literatura, se encuentran estudios sobre las diferentes fases por las que transita una persona cuando resuelve problemas matemáticos, sobre las competencias que desarrolla, las estrategias o heurísticos que se ponen en marcha, los elementos matemáticos que se utilizan o qué cambios produce la tecnología en todo el proceso (Liljedahl y Cai, 2021). También se encuentran investigaciones que se centran en la formulación de problemas, donde se analiza cómo esta actividad de creación favorece el aprendizaje de las matemáticas, qué elementos motivan la formulación de problemas interesantes o la influencia del contexto matemático y real (Liljedahl y Cai, 2021). En relación con las conexiones entre la resolución de problemas y la formulación de problemas, un ejemplo claro se observa en las fases de resolución de Polya (1945), puesto que la "visión retrospectiva" incluye formular nuevos problemas asociados al que se ha resuelto. El empleo de herramientas digitales en el proceso de resolución, amplía la variedad de preguntas que se puede hacer el resolutor, motivando con ello que, desde la primera fase de resolución, surja la posibilidad de enunciar nuevos problemas (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2013). Por otra parte, en la formulación de problemas, es habitual encontrarse con la tarea de resolver un problema propuesto, a partir del cuál formular otros, buscando la autoevaluación y análisis propio de las propuestas realizadas. (Crespo, 2015; Zhang et al., 2022). Dicho de otro modo, la formulación y la resolución de problemas pueden desarrollase de manera conjunta y ambas tareas contribuirán a la formación matemática del sujeto. Cuando se habla de Competencia Matemática, Niss (2003) identifica la formulación y resolución de problemas como una de las cuatro competencias relacionadas con la *habilidad de hacer y responder preguntas de y con matemáticas.* Más concretamente, destaca la importancia de adquirir la capacidad de identificar, formular, especificar y resolver diferentes tipos de problemas. Señala además, que una persona que trabaje y desarrolle dichas capacidades, está desarrollando en alguna dirección su competencia específica en formulación y resolución de problemas. A su vez, al ampliar esta competencia específica se desarrolla una Competencia Matemática más amplia en el individuo.

Una visión complementaria de este escenario, es la inclusión en la formación de futuros docentes, es decir, cómo se recoge la formulación y resolución de problemas en el conocimiento y práctica docente del profesorado de Matemáticas. En este estudio se trata de analizar las características de los problemas que formulan futuros docentes de matemáticas de Educación Secundaria usando GeoGebra e identificar de qué manera emplean la herramienta tecnológica en el proceso de formulación.

Marco conceptual

De cara a configurar un marco conceptual que guie nuestro estudio, tomamos como referencia el modelo MTSK (Carrillo, Montes y Climent, 2022), el cual presenta dominios, subdominios y categorías para identificar, describir y comprender el conocimiento especializado del profesorado de Matemáticas. Este marco incorpora la formulación y resolución de problemas en el subdominio *Knowledge of Practices of Mathematics* (KPM), conjuntamente con los conocimientos relacionados con la construcción, la validación y la comunicación en un contexto educativo. Este subdominio incluye la categoría "Conocimiento de la práctica de resolver problemas", siendo uno de sus indicadores el uso de heurísticos y estrategias (Carrillo et al., 2022). Delgado-Rebolledo et al. (2022) señalan la necesidad de ampliar dicha categoría para que el conocimiento de la práctica de formular problemas quede explícito.

En el aprendizaje de las matemáticas en Educación Secundaria es necesario contemplar una mayor formalización de los procedimientos y una comprensión conceptual más profunda (Kilpatrick, 2015). Por tanto, el profesorado de este nivel educativo debe desarrollar una *Comprensión Matemática para la Enseñanza en Educación Secundaria* (MUST, por sus siglas en inglés) que incluya: “saber” matemáticas, “saber hacer” matemáticas y capacidad de “ajustar” este saber hacer a los estudiantes de secundaria (Kilpatrick et al., 2015). Aunque la formulación de problemas no es una componente explícita en este marco, sí lo son la capacidad de sintetizar ideas matemáticas complejas en partes simples, la capacidad de comprender el relato coloquial de los estudiantes para conectarlo con la terminología matemática y conocer el currículo para usarlo en las actividades propuestas en el aula. Estas capacidades forman parte del *Contexto Matemático de la Enseñanza* (Heid, Wilson y Blume, 2015) y se vinculan a la tarea de formular problemas para la enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria.

El uso de herramientas digitales se considera un elemento que favorece el proceso de formulación (Abramovich y Cho, 2015; Barana et al., 2020), facilitando la realización de experimentos, conjeturas y generalizaciones (Christou et al., 2005; Santos-Trigo, 2019). La integración de las herramientas digitales en los procesos de formulación y resolución de problemas genera la necesidad de desarrollar en los futuros docentes otro tipo de conocimiento. Koehler et al. (2014) emplean el término *Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido* (TPACK) para referirse al tipo de conocimiento que los docentes emplean cuando se diseñan tareas para los estudiantes donde se hace uso de tecnología. Estos autores indican que este tipo de conocimiento puede desarrollarse trabajando con profesores y futuros profesores, de forma simultánea, el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) y Conocimiento Tecnológico (TK). Para ello proponen el uso de tareas de revisión de problemas, donde se pida a los docentes o futuros docentes que mejoren su formulación, empleando diferentes herramientas cómo hojas de cálculo y bases de datos. De forma que el uso de la tecnología, el contenido y la pedagogía quedan integrados en una misma actividad. Esto favorecerá que luego los y las estudiantes den con una solución utilizando simultáneamente tecnología y conocimiento matemático.

Respecto al entorno donde se realiza nuestra investigación, en este caso partimos de matemáticos que se introducen en la práctica docente. Para ello, es importante entender la diferencia entre el conocimiento y la práctica matemática, así como, el conocimiento y la práctica de la enseñanza de las matemáticas (Wasserman, 2021). Un espacio de trabajo de interés para la formación del profesorado es el que se genera al trabajar actividades que desarrollan la práctica docente sin abandonar la práctica matemática. Actividades que desarrollen "cómo" enseñar matemáticas dentro del "quehacer" matemático. Wasserman (2021) enmarca estas prácticas dentro de las Prácticas Pedagógicas Matemáticas (PMPs).

En experiencias previas hemos visto que en cursos de formación de profesorado cuando los y las estudiantes resuelven problemas haciendo uso de GeoGebra no solo surgen nuevos caminos y formas de abordar la solución, sino que surgen situaciones que provocan dudas, discusiones e interés en los futuros docentes (Camacho-Machín, Perdomo-Díaz y Hernández; 2019). De estas experiencias es posible extraer situaciones de partida para trabajar con futuros profesores de forma que conecten el currículo de Educación secundaria con la resolución de problemas (Hernández, Perdomo-Díaz, Camacho-Machín, 2019). Estas situaciones se extraen de dudas y preguntas que les surgen al usar tecnología en el proceso de resolución de problemas de matemáticas. Conjeturamos que también son un buen punto de partida para formular nuevos problemas, más sencillos o complejos que el original.

En resumen, esta investigación muestra un ejemplo de la formulación y resolución de problemas matemáticos, como una actividad formativa para matemáticos que se preparan para ser profesores de Educación Secundaria. Todo ello, en un entorno donde el uso de herramientas tecnológicas, especialmente GeoGebra, se realiza de forma simultánea tanto en la formulación como en la resolución de problemas.

Metodología

La investigación se realiza con un enfoque experimental, llevado a cabo durante el desarrollo de la materia "Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas" del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Entre las actividades de esta asignatura se pide a los estudiantes reformular problemas que inviten al alumnado de Educación Secundaria a utilizar diferentes enfoques de resolución para investigar y entender los contenidos matemáticos, reconocer y formular problemas a partir de situaciones matemáticas cercanas, desarrollar y aplicar estrategias para resolver una extensa gama de problemas, verificar e interpretar resultados en relación a los problemas originales, generalizar situaciones y estrategias para nuevas situaciones problemáticas o aplicar el proceso de formulación de modelos matemáticos a situaciones de problemas del mundo real (Camacho-Machín, 2016).

Participantes

En el estudio participaron quince graduados en Matemáticas que cursaban la materia indicada. Estos estudiantes habían desarrollado con anterioridad una formación básica sobre el manejo de GeoGebra durante sus estudios de Grado. Previo a la realización del estudio, los estudiantes habían resuelto diversos problemas con GeoGebra, utilizando un protocolo de resolución desarrollado en

Camacho, Afonso y Moreno (2014), en el que se recogen varias indicaciones que piden a los participantes que formulen nuevas preguntas o extender el problema, a partir de su propia resolución.

Los estudiantes realizaron la tarea en equipos haciendo uso de GeoGebra de manera simultánea al enfoque con lápiz y papel. Se formaron 6 equipos de 2 personas y un equipo de 3 (denominados E1, E2, …, E7). El profesor tuvo un rol de observador y guía, favoreciendo el trabajo autónomo del alumnado. Los equipos tenían que encontrar la solución de los problemas planteados y, posteriormente, formular otros problemas que les vinieran sugeridos durante el proceso de resolución.

Tarea de resolución y formulación de problemas

Durante la experiencia, se entregaron tres problemas a los estudiantes, indicándoles de forma explícita la importancia de que "cada problema que resuelvan sea un punto de partida para identificar otros problemas relacionados, que pueden venir sugeridos por las acciones que se van realizando en las distintas etapas del proceso de resolución, formular dichos problemas y otros relacionados". Para cada problema, se les pidió lo siguiente:

1) Resolver el problema propuesto, construyendo un modelo dinámico del problema atendiendo las indicaciones que se proponen como apartados.
2) Formular dos problemas que se les ocurran durante el proceso de resolución, explicando a partir de qué elementos los han formulado.
3) Preparar el informe de todo el proceso para el problema, atendiendo a diferentes aproximaciones (dinámica, numérica, algebraica, en su caso…).

De los tres problemas planteados, para este artículo nos centraremos en el análisis del siguiente:

PROBLEMA 1.- *Encontrar diferentes formas de construir un cuadrado del que se conocen uno de sus vértices (P) y el punto medio (M) de uno de los lados de extremo P. Construirlo si el punto M es un punto de uno de los lados opuestos al punto P.*
Figura 1: Tarea presentada a los estudiantes

Este problema es una adaptación de uno propuesto por Reyes-Rodríguez, Santos-Trigo y Barrera-Mora (2017) y se plantea con el objetivo de que los estudiantes lo resuelvan de diferentes formas. El problema inicial establece dos condiciones: que M esté en uno de los lados del cuadrado con extremo P y que M sea punto medio de ese lado. Cada una de esas condiciones se puede relacionar con objetos matemáticos construibles fácilmente (Tabla 1): la recta que pasa por M y P y la circunferencia de centro M que pasa por P.

M es el punto medio de uno de los lados de extremo P	
Condiciones	**Construcción**
a) M está en un lado con extremo P	Recta que pasa por M y P
b) M es punto medio	Circunferencia de centro M que pasa por P

Tabla 1: Condiciones dadas y elementos relacionados en la construcción

A partir de la construcción de esos objetos, se puede identificar uno de los puntos de intersección entre la recta y la circunferencia como otro vértice del cuadrado (Figura 2).

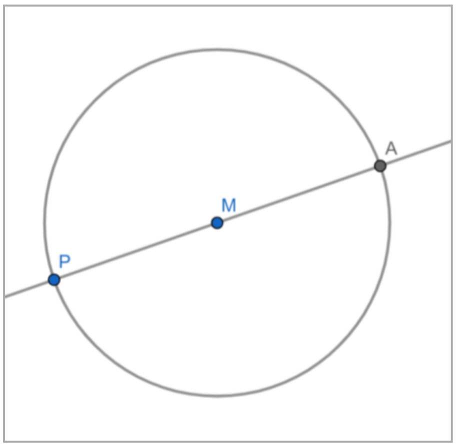


Figura 2: Primeros objetos representados para abordar el problema

Una vez identificados dos vértices del cuadrado (P y A), el resto de la construcción es sencilla y se puede abordar por diferentes caminos. Hay que tener en cuenta que existen dos soluciones, puesto que pueden construirse dos cuadrados orientados de diferente forma, que compartan el lado AP (Figura 3). En la construcción de la Figura 3 se trazó la perpendicular a la recta PM que pasaba por P, para luego trasladar la distancia PA sobre ella y dar con los vértices B y B'. Finalmente, los vértices C y C' se construyen como intersección de las rectas paralelas a PM que pasan por dichos puntos y que cortan a la recta perpendicular a PM que pasa por A. Dando lugar a los cuadrados PACB y PAC'B' que tienen M como punto medio del lado PA.

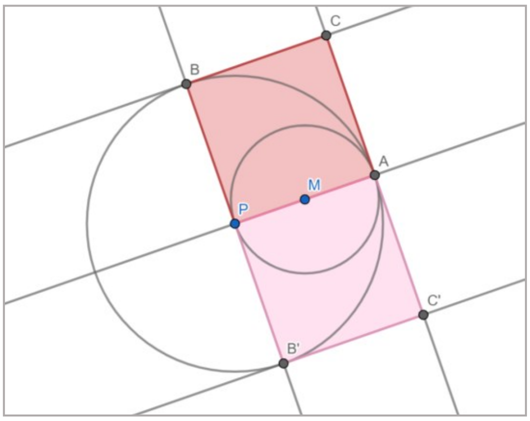


Figura 3: Dos cuadrados solución del problema

La segunda parte del problema da como condición para M que es el punto medio de un lado opuesto a P. A diferencia del caso anterior, no es conocida una relación con un objeto matemático que se pueda construir fácilmente. Esto es una oportunidad para usar GeoGebra para explorar posibilidades (Reyes-Rodríguez et al., 2017), por ejemplo, construir diferentes objetos y observar sus propiedades, luego arrastrarlos y ver si se mantienen o no. De esta manera pueden surgir diferentes conjeturas, que luego habría que validar. En la Tabla 2 se muestra un ejemplo de construcción exploratoria para encontrar otro vértice del cuadrado que se solicita. Empieza con los puntos P y M. Dos objetos que relacionan a estos puntos son la recta que los une (r) y la circunferencia (c) que tiene como diámetro PM. Dicha circunferencia está centrada en el punto medio de P y M y cumple que, cualquier otro punto de la circunferencia sería el vértice de un ángulo de 90º cuyos lados pasan por P y M. No solo eso, cualquier punto del plano que forme 90º con P y M está en esa circunferencia (c). Dicho de otro modo, los vértices del cuadrado buscado pertenecen a la circunferencia (c). Estas deducciones no tienen por qué aparecer al principio de la exploración, o ser conocidas por quién esté resolviendo el problema. Sencillamente se podría trazar la circunferencia como objeto que relaciona a P y M, sin más. En un segundo paso, se puede construir la recta perpendicular a r que pasa por P y la circunferencia de centro P y radio PM. Estos dos objetos se intersecan en dos puntos (nombramos uno de ellos como E). ¿Qué relación tiene ese punto con P Y M? ¿Será uno de los vértices que buscamos? La respuesta a la segunda pregunta es no, ya que la longitud de PM debe ser mayor que la longitud del lado del cuadrado buscado. En un tercer paso se pueden observar algunas relaciones de P y M con E. Por ejemplo, la mediatriz del segmento PE o la bisectriz del ángulo MPE, pero el que muestra un resultado es la circunferencia de centro E que pasa por P. Ésta interseca a la circunferencia c en el punto A. Este punto es un buen candidato a vértice del cuadrado al estar en c. Haciendo una comprobación con ayuda de GeoGebra, se verifica que la distancia entre los puntos P y A es el doble que entre A y M. Por tanto, A es un vértice de uno de los cuadrados buscados (Figura 4A).

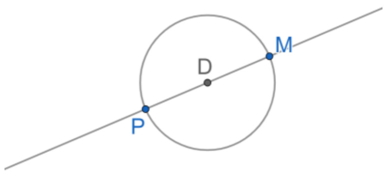
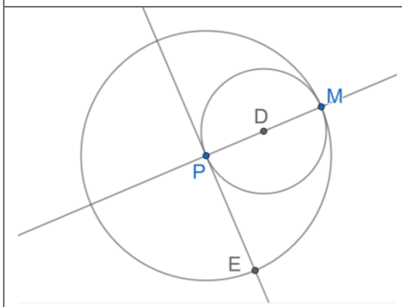
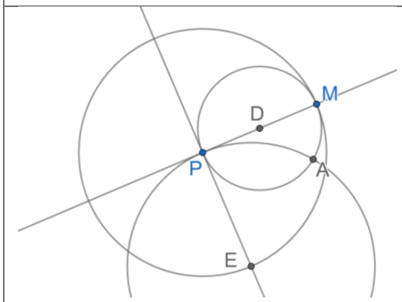
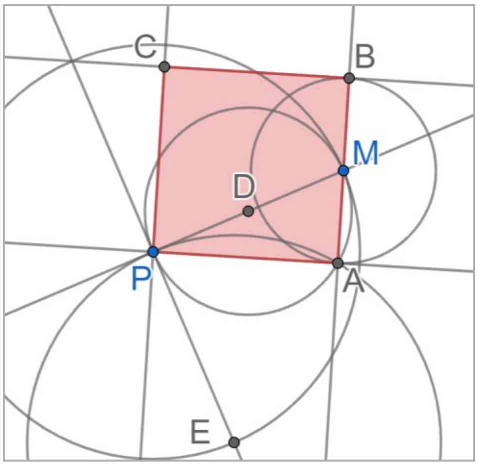
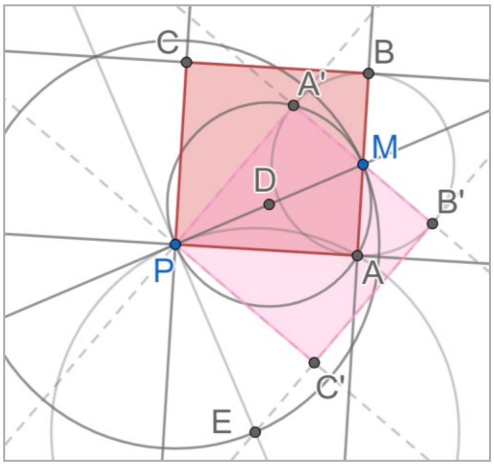
M es el punto medio de uno de los lados opuestos a P	
Paso	**Construcción**
	P y M: puntos arbitrarios. r: recta que pasa por P y M D: punto medio de P y M c: Circunferencia de centro D que pasa por P
	Perpendicular a r que pasa por P Circunferencia de centro P que pasa por M E: Punto de intersección de ambos
	Circunferencia de centro E que pasa por P A: punto de intersección con la circunferencia de centro D

Tabla 2: Pasos de una construcción para otro vértice del cuadrado

Como antes, una vez identificados dos vértices del cuadrado, el resto de la construcción es sencilla. Teniendo en cuenta que existen dos soluciones dependiendo de la orientación y conociendo la primera la segunda se construye de forma similar o siguiendo otro camino que traslade la distancia MA del cuadrado que ya es conocida (Figura 4B). Por ejemplo, la circunferencia de centro M y que pasa por A interseca c en A’ que será el otro vértice buscado.



A



B

Figura 4: Construcciones del cuadrado buscado

Este tipo de exploración genera nuevas preguntas: ¿Por qué es válida la construcción? ¿Por qué la circunferencia de centro E que pasa por P también pasa por el vértice del cuadrado buscado? Estas preguntas generan oportunidades para formular nuevos problemas.

Análisis de los resultados

Los participantes de la investigación resolvieron el problema, haciendo la construcción del cuadrado dadas las dos condiciones diferentes y, a partir de esa resolución formularon los problemas pedidos. En total se realizaron veinte propuestas de enunciados a partir del problema original. En las nuevas propuestas, los futuros docentes añaden información al problema, cambian la figura a construir, ponen de objetivo las construcciones, fijan las dimensiones de la figura o añaden un contexto no matemático. A continuación, se presentan dos de los problemas formulados, uno propuesto por el equipo E1 y otro por el E3. Estas propuestas nos permiten observar qué es lo que entienden los estudiantes cuando se les pide formular problemas a partir de la resolución de un problema inicial. Se observaron dos enfoques diferentes en los problemas formulados por estos equipos.

a) *Problemas que proponen una solución abierta con foco en encontrar formas de construcción*

El equipo E1 formula el problema haciendo dos cambios relevantes con el original (Problema E1). Uno de ellos es relacionado con los datos iniciales, cambiando el punto medio por el vértice opuesto. Otro cambio está relacionado con el objetivo, no se trata de dar con el cuadrado, sino de buscar diferentes formas para lograrlo. Para ello motivan, a quien lo intente resolver, a "ser creativo y encontrar múltiples soluciones".

> *Imagínate que eres un arquitecto que está diseñando una plaza pública y has decidido que la pieza central de la plaza será un gran cuadrado. Sin embargo, debido a otros elementos de la plaza no puedes realizar una construcción normal. En lugar de comenzar con el punto medio y un vértice, decides empezar por dos vértices opuestos del cuadrado. Quieres encontrar diferentes formas de construir el cuadrado utilizando estos dos vértices opuestos.*
>
> *¿Cómo podrías hacer esto? ¿Qué tipos de formas podrías crear con esta información limitada? Este ejercicio te desafía a ser creativo y encontrar múltiples soluciones para construir el cuadrado utilizando solo dos vértices opuestos.*

Problema E1: Propuesta de problema formulado por el equipo E1

Este equipo de estudiantes ha planteado una tarea que tiene como fin que surjan diferentes propiedades matemáticas relacionadas con la geometría, las herramientas que se pueden usar y las formas de definir un cuadrado. En este sentido han formulado un problema orientado a utilizar GeoGebra para explorar opciones y demostrar el grado de conocimiento de propiedades geométricas. Junto al problema plantean una solución (Figura 5) en la que, usando la herramienta rotación, construyen los otros vértices del cuadrado apoyándose en el punto medio de los puntos de partida.

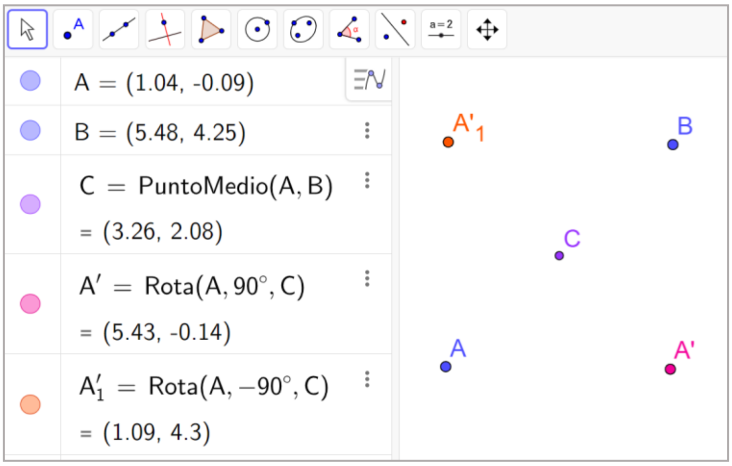


Figura 6: Primeros pasos de construcción de la propuesta de E1

b) *Propuesta de solución cerrada con el foco en la medida*

El equipo E3 formula un problema dentro de un contexto de medida (Problema E3). Para ello realiza también dos cambios, uno consiste en añadir más datos: el área del cuadrado y el coste de la pintura; otro de los cambios es el objetivo, que pasa a ser el de calcular el coste de la pintura necesaria.

Queremos pintar la pared cuadrada de una habitación, pero nos encontramos que la habitación dispone de una estantería triangular fijada a la pared que va desde la esquina superior izquierda hasta el punto medio de la longitud del suelo. Si la pared tiene unas dimensiones de 16 m^2, y la pintura cuesta 1,50 euros por metro cuadrado.

¿Cuánto dinero como mínimo tenemos que gastarnos?

Problema E3: Propuesta de problema formulado por el equipo E3

La propuesta formulada por el equipo E3 concreta el problema inicial, pasa de un caso genérico a uno concreto, en el que es conocida la superficie del cuadrado. Esto provoca que la resolución del mismo se pueda ejecutar directamente: con los datos dados y cálculos simples, se halla el área que se va a pintar y su costo. El equipo realiza una resolución algebraica de su problema (Figura 7) en la que primero calculan la longitud del lado del cuadrado, luego calculan el área de la estantería haciendo uso de fórmulas y por último calculan el coste de la pintura.

Solución. Primero debemos saber las dimensiones de pared que ocupa la estantería. Nos encontramos con una pared cuadrada de área $16\, m^2$, luego el lado tiene una longitud de:

$$A = l \cdot l \Rightarrow A = l^2 \Rightarrow 16 = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{16} \Rightarrow l = 4\, m$$

De este modo, sabemos que la altura de la estantería es de $4\, m$. Además, sabemos que la base, al estar en el punto medio del lado del suelo de la pared, tiene una longitud de $\frac{4}{2} = 2\, m$, luego, ya podemos determinar la superficie que ocupa.

$$A_E = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4\, m^2$$

Luego, la estantería ocupa $4\, m^2$ de la superficie total de la pared. Nos queda para pintar: $16 - 4 = 12\, m^2$. Como la pintura cuesta $1,50$ por metro cuadrado, necesitaremos gastarnos:

$$12 \cdot 1,50 = 18\, euros$$

Concluimos así que debemos gastarnos $18\, euros$ como mínimo para pintar la pared de la habitación.

Figura 7: Resolución algebraica de E3 a su problema formulado

Esta propuesta se asimila a las propuestas clásicas de una enseñanza de las matemáticas donde no es necesario hacer uso de la tecnología, incluso no es necesario contar con una representación gráfica fidedigna de la situación.

Discusión final

El objetivo de este trabajo es mostrar de qué forma los futuros docentes aprovechan el potencial de la herramienta digital GeoGebra para formular problemas matemáticos. Para ello se diseñó una experiencia que combinara el desarrollo de la práctica docente, sin abandonar el uso de prácticas matemáticas

(Wasserman, 2021). Dicha experiencia consistió en resolver un conjunto de problemas, utilizando GeoGebra, para posteriormente analizar el proceso de resolución y, a partir del mismo, formular nuevos problemas.

Los problemas analizados muestran una característica común que refleja la idea de que los problemas deben estar "contextualizados". Ambos problemas se plantean en un contexto no matemático, siendo que el problema inicial venía dado en un contexto puramente matemático. En el caso del segundo problema analizado, formulado por el equipo E3, ese es básicamente el cambio que se ha hecho al problema inicial: dotarle de un contexto no matemático. De esta forma, el problema inicial se ha convertido en un problema análogo a los que pueden encontrarse en los libros de texto y que puede resolverse sin emplear GeoGebra. Para este equipo parece ser que, formular un problema, sea equivalente a "contextualizar". Los cambios realizados al problema inicial son superficiales y no toman en cuenta el uso de la herramienta digital.

El otro caso, si bien también opta por presentar un problema en contexto no matemático, incorpora otro cambio al problema inicial relacionado con las condiciones de los puntos iniciales dados para construir el cuadrado (dos vértices opuestos). De esta forma parece que tratan de ampliar los casos estudiados a partir del problema inicial, donde los cuadrados debían construirse a partir de un vértice y el punto medio de un lado. En este sentido han formulado un problema orientado a utilizar GeoGebra para explorar las propiedades geométricas del cuadrado y combinarlas con las opciones que ofrece la herramienta digital, mostrando así cierto grado de desarrollo de su *Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido* (Koehler et al., 2014).

Estos resultados muestran que los futuros docentes formulan problemas plausibles, en el sentido de que están correctamente formulados, sin errores matemáticos y pueden ser resueltos. No obstante, los problemas formulados carecen, en términos generales, de características singulares diferentes de los resueltos durante la experiencia. Los problemas propuestos incorporan cambios a la forma de presentar la situación, integrándola en un contexto no matemático, y a los datos aportados. Sin embargo, no utilizan las preguntas que se han ido formulando a lo largo del proceso de resolución del problema como una fuente de generación de nuevos problemas. La reflexión que han realizado durante la resolución del problema inicial, las dudas que les han surgido, las hipótesis que han formulado e incluso los errores cometidos pueden sugerir otros problemas geométricos interesantes.

Esto nos lleva a señalar la importancia de tratar, durante la formación inicial de los profesores de matemáticas de Educación Secundaria, el análisis explícito de las posibilidades que ofrece una herramienta digital como GeoGebra para crear nuevos problemas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido cofinanciado por el proyecto ProID2021010018 del Gobierno de Canarias en las áreas prioritarias de la Estrategia de Especialización inteligente de Canarias RIS-3 (cofinanciado por el Programa Operativo FEDER Canarias 2014-2020), así como por el Proyecto del Plan Nacional PID2022-139007NB-I00, financiado por MCIN/ AEI / 10.13039/501100011033 / FEDER, UE.

Referencias bibliográficas

Abramovich, S. y Cho, E.K. (2015). Using digital technology for mathematical problem-posing. En F.M. Singer et al. (eds.), *Mathematical Problem Posing* (pp. 72-102). Research in Mathematics Education, doi: 10.1007/978-1-4614-6258-3_4.

Barana, A., Fissore, C., Marchisio, M., Pulvirenti, M. (2020). Teacher training for the development of computational thinking and problem posing & solving skills with technologies. *Actas de The 16th International Scientific*

Conference eLearning and Software for Education, Bucharest, April 23-24, 2020, 136-144.

Camacho-Machín, M. (2016). Proyecto Docente para el acceso a Catedrático de Universidad. Documento no publicado. Universidad de La Laguna.

Camacho, M.; Afonso, Mª C. y Moreno, M. (2014). Hacia la elaboración de un marco metodológico para la formación de profesores de Secundaria haciendo uso de Software de Geometría Dinámica. *Formación del Profesorado e investigación en Educación Matemática* (11), pp. 81-104

Camacho-Machín, M., Perdomo-Díaz, J., y Hernández, A. (2019). Actividades para la formación de profesores derivadas del uso de GeoGebra en la resolución de problemas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, y M. T. González (Ed.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional*, (pp. 371-394). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Carrillo Yáñez, J., Montes Navarro, M. A. y Climent Rodríguez, N. (Eds) (2022). *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*. Madrid: Dykinson

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M. y Pitta-Pantazi, D. (2005). Problem solving and problem posing in a dynamic geometry environment. *The Montana Mathematics Enthusiast, 2*(2), 125-143.

Crespo, S. (2015). A collection of problem-posing experiences for prospective mathematics teachers that make a difference. En Singer, F. M., Ellerton, N., y Cai, J. (eds.), *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice* (pp. 493-511). Springer.

Delgado-Rebolledo, R., Zakaryan D. y Alfaro-Carvajal C. (2022). El conocimiento de la práctica matemática. En Carrillo Yáñez, J., Montes Navarro, M. Á. y Climent Rodríguez, N. (Eds), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) 10 años de camino.* Madrid, Dykinson. DOI: 10.14679/1454

Heid, M., Wilson, P. S., y Blume, G. W. (Eds.). (2015). *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and Classroom-Based Situations.* United States of America: NCTM and IAP.

Hernández, A., Perdomo-Díaz, J., y Camacho-Machín, M. (2019). Task Designed for Training Secondary Mathematics Teachers Using Technology. *CERME 11*. Obtenido de http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/index.php?slab=proceedings

Kilpatrick, J. (2015). Background for the Mathematical Understanding Framework. In M. K. Heid, P. Wilson, & G. W. Blume (Eds.), *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and*

Classroom-Based Situations (pp. 1-8). Charlotte: Information Age Publishing Icc. and NCTM.

Kilpatrick, J., Blume, G., Heid, M. K., Wilson, J., Wilson, P., & Zbiek, R. M. (2015). Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework. In M. K. Heid, P. Wilson, & G. W. Blume (Eds.), *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and Classroom-Based Situations* (pp. 9-30). Charlotte: Information Age Publishing Icc. and NCTM.

Koehler, M.J., Mishra, P., Kereluik, K., Shin, T.S. y Graham, C.R. (2014). The Technological Pedagogical Content Knowledge Framework. En J. M. Spector, M. D. Merrill, J. Elen, & M. J. Bishop (Eds.), *Handbook of Research on Educational Communications and Technology* (pp. 101-111). Springer Science+Business Media. doi: DOI 10.1007/978-1-4614-3185-5_9

Liljedahl, P., Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. *ZDM Mathematics Education* 53, 723–735. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. En Gagatsis, & S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education - Athens, Hellas 3-4-5 January 2003* (pp. 116-124). Hellenic Mathematical Society.

Pólya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton University Press.

Reyes-Rodríguez, A., Santos-Trigo, M., Barrera-Mora F. (2017). The construction of a square through multiple approaches to foster learners' mathematical thinking. *Teaching Mathematics and Its Applications*. Vol. 36, 3, 167-181. doi:10.1093/teamat/hrw022

Santos-Trigo, M. (2019). Mathematical Problem Solving and the Use of Digital Technologies. En Liljedahl, P., Santos-Trigo**,** M. (Eds.) *Mathematical Problem Solving* (pp. 63-89). Springer Nature Switzerland.

Santos-Trigo, M y Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1-2), 279-302.

Wasserman N. (2021). Re-Exploring the Intersection of Mathematics and Pedagogy. *For the Learning of Mathematics*, vol. 42, 3, 28-33. FLM Publishing Association. Canada. https://flm-journal.org/Articles/53BAD718916533F07E1924AB6EC89D.pdf.

Zhang, L., Cai, J., Song, N., Zhang, H., Chen, T., Zhang, Z. y Guo, F. (2022). Mathematical problem posing of elementary school students: The impact of task format and its relationship to problem solving. *ZDM-Mathematics Education*