SOBRE LA CURVIDAD (*a*) DE LAS RAYAS DE FRAUNHOFER EN LOS ESPECTROS PRISMÁTICOS, *por* **Antonio Tarazona,** *del Observatorio de Madrid.*

Sabido es que, instalados dos anteojos astronómicos iguales como lo son, por regla general, el colimador y el ocular de un espectroscopio ordinario, frente á frente los objetivos y sensiblemente en coincidencia sus ejes, y supuesto en el plano focal del colimador un punto luminoso no muy alejado del foco principal, forman los rayos emitidos un haz divergente; atraviesan el primer objetivo y salen paralelos al eje secundario definido por el punto fuente de luz; así paralelos alcanzan el segundo objetivo y forman después de atravesarlo otro cono de rayos, pero convergentes; y dejan por fin la imagen del punto luminoso en el plano focal del anteojo ocular sobre un eje secundario paralelo al también secundario considerado en el anteojo colimador. Si el foco luminoso fuese una *línea recta*, cual la rendija ó ventana del colimador de un espectroscopio, *recta*, y *limpia* además, sería la imagen pintada en el plano focal del anteojo ocular. Pero si entre los dos objetivos se interpone un prisma con la arista refringente paralela á la rendija, sufren los rayos una bastante complicada desviación; y, dejando de ser *rectilíneas* las rayas del espectro imágenes de la ventana, afectan la forma *sensiblemente parabólica*, como se indica en la figura 1.ª, con pérdida, por añadidura y por regla general, de la limpidez que presentan las rayas rectas antes de la interposición del prisma. Son debidos estos dos efectos á no haber más que un solo haz de rayos emergentes del colimador paralelos al eje principal y normales

---

(*a*) Las dicciones *curvidad* y *curvatura* son castizas las dos; figuran ambas en el léxico oficial español; son sinónimas; y aunque poco, muy poco usada la primera, todavía no figura en la categoría de las anticuadas, ni siquiera está tachada de poética, ni pesa sobre ella ninguna *capitis-disminutio*. De bastante tiempo á esta parte hemos adquirido el hábito, ó lo que sea, de emplearlas con separación; la primera para significar en absoluto todo desvío de la dirección rectilínea; la segunda como medida de esta desviación en un punto de la curva, mediante el radio del respectivo círculo osculador. Y nos ha parecido que no debíamos abandonar el hábito adqùirido llegada esta primera ocasión de emplearlas por escrito; seguros de que, si pedantería encuentran en ello algunos, de fijo que otros encontrarán otra cosa.

á la arista del prisma, á saber: el que proviene del centro de la rendija ó foco del colimador. Todos los demás hazes de rayos paralelos provienen de otros puntos de la rendija definidores de otros tantos ejes secundarios, y, por consiguiente, de variada inclinación con el eje principal y con la arista refringente. Es de advertir que aquellos dos efectos, el de la curvidad y el de la pérdida de la limpidez de las rayas espectrales, se acentúan más hacia la región del color violeta que hacia la del rojo, pues dependen del índice de refracción, y es sabido cómo con los colores varía este índice en un mismo prisma; y son tanto más notables los mismos dos efectos cuanto menor es la distancia focal del colimador, y mayores la longitud de la ventana ó amplitud del espectro y el poder refringente del prisma por su ángulo y por su índice medio.

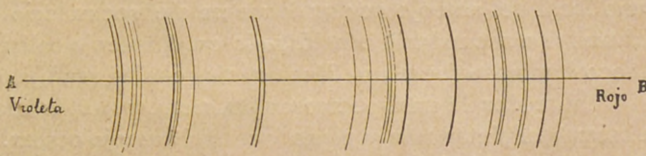

Figura 1.ª

Consecuencia inmediata de lo dicho es que la dispersión varía según que se la considere y mida en la línea recta *A B* (fig. 1.ª), lugar geométrico de los vértices de las parábolas, ó entre esta línea media del espectro y los límites de la amplitud. Y, aunque pequeñas las diferencias, conviene tener claro y cabal conocimiento de su cuantía, especialmente en las delicadísimas mediciones micrométricas directas, ó macromicrométricas efectuadas sobre espectro-fotografías, so pena de operar en la resolución de los problemas bajo dispersiones diferentes que conducirían á resultados no comparables; mientras que, bien conocidas analíticamente las dislocaciones fenomenales relacionadas con la diezmillonésima de milímetro, unidad con que se miden las longitudes de onda, fácilmente serán computadas las correcciones destructoras de los mencionados defectuosos efectos.

Pudiera parecer exagerada, al menos en la práctica, la importancia que estamos dando á las pequeñas dislocaciones que para tomar la forma parabólica sufren los puntos de las rayas de los espectros prismáticos. No hay exageración ninguna; al contrario, todas las precauciones son pocas. Como muestra de la extrema delicadeza á que llegan los astrónomos en sus trabajos, baste mencionar que dotan sus espectroscopios estelares de mecanismos adecuados para que, con ser muy corto el curso de las mandíbulas de la rendija, se aparten ó se aproximen simultáneamente y por igual, al efecto de que el centro de la alargada figura geométrica de la ventana permanezca invariablemente en el foco del colimador; que si sólo se moviese una de las mandíbulas, moviérase también la línea media ideal paralela á ellas, produciéndose en la totalidad del espectro una dislocación equivalente á una alteración del cero ó línea de fe de la escala. Pues bien, la dispersión del espectro lineal de una estrella, segun una paralela á la línea media *A B* del espectro ordinario, no puede ser mirada como constante en los diferentes espectros de la misma estrella para posiciones también diferentes de su imagen en la rendija. Pequeñas son las correcciones resultantes, pero no se las debe despreciar; pues errores sistemáticos son de cantidades que se miden y aquilatan por diezmillonésimas de milímetro ¡0,0000001! ¡¡Y todavia resulta grande esta unidad, todavía no es suficientemente pequeña para esquematizaciones más precisas de los fenómenos que se cumplen en la Físico-Química de la Creación!!

Ahora bien: publicó la revista *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, tomo XXXIV y número correspondiente al mes de Marzo de 1874, un valioso trabajo del eminente astrónomo W. H. M. Christie, en el cual, después de explicar con mucha claridad porqué deben de ser curvas y sensiblemente parabólicas las rayas espectrales obtenidas con un prisma ó batería ordinaria de prismas, llega á la ecuación general de la tal familia de parábolas, y con ella á la cuantía de la corrección que deberá aplicarse en cada caso particular. Pero á su vez, y como solución del mismo problema, inserta E. B. Frost, en la traducción al inglés del nunca bastante encomiado tratado de Espectroscopia astronómica del Dr. J. Scheiner, *Die Spectralanalyse der Gestirne*, otra ecuación también parabólica, sin el menor asomo de demostración y refiriéndose únicamente á trabajos de Ditscheiner. Bien resuelto deja Christie el problema en lo tocante á la forma general de las curvas; pero al tratar de identificar su razonamiento bajo una misma notación con la fórmula escueta que nos da Frost, luego advertimos que no era la misma la expresión analítica de los parámetros de sus parábolas, y que, por ende, diferentes deberían de ser, según una ú otra, los valores numéricos de las correcciones. Á nuestro entender, incurrió Christie, más que en error, en una importante omisión que deja inexacta su fórmula correctiva, omisión tal vez ocasionada por el exagerado laconismo con que sabios incursos en el defecto señalado por Horacio, *brevis esse laboro obscurus fio*, suelen presentar sus exposiciones doctrinales. Y la fórmula análoga inserta en el libro de Frost tampoco está, también á nuestro entender, del todo exenta de alguna incorrección que asimismo habremos de señalar.

No tenemos noticia de que, puestas en evidencia las antedichas omisión é incorrección, é identificadas las dos fórmulas, hayan quedado borradas las diferencias que hubimos de advertir. De haber sido subsanadas, no sabemos dónde ni cómo, y con nosotros serán muchos los que lo ignoren; y habida cuenta de la importancia, teórica y práctica, del asunto, no nos parecen del todo inútiles las someras consideraciones siguientes. Y como no es fácil que los lectores tengan al alcance de la mano algún ejemplar del citado volumen 34 de *Monthly Notices* con la exposición de Christie, y á ella necesariamente nos hemos de remitir, la reproducimos íntegra por vía de nota (*b*), con traduc-

---

(*b*) Antes de la exposición íntegra del razonamiento de Christie damos, á los efectos expresados en el texto, los siguientes preliminares:

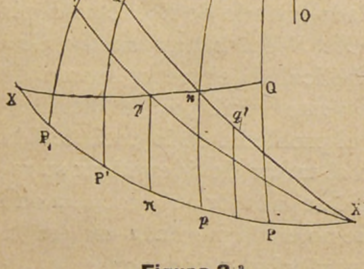

Figura 2.ª

Representa la figura 2.ª una esfera de radio arbitrario con el centro en un punto O de la arista refringente $O\ Z$.—Al mismo punto O suponemos trasladadas, paralelamente á sí mismas, todas las direcciones consideradas en la teoría del prisma, quedando bien definidas por puntos de la misma superficie esférica.—Perpendicularmente á la arista se ha trazado el plano que produce el círculo máximo $X\ X'$, en el cual deben de estar contenidas las direcciones X y X' normales á las caras del prisma.—El rayo incidente Q oblícuo á la arista $O\ Z$ determina con la normal de la incidencia X el plano de la primera refracción $Q\ X$ en el cual está el rayo q

ción literal y completándola con algunos comentarios, indispensables en nuestro concepto, para suplir el que nos parece sobrado laconismo y ahuyentar dudas y posibles malas inteligencias.

*
* *

---

refractado en el interior del prisma. — Este mismo rayo q con la normal de la emergencia X' fija el plano de la segunda refracción $X' q$, en el cual está á su vez el rayo emergente Q_1. Pues á diferencia de lo que ocurre cuando el rayo incidente es normal á la arista, verifícanse las dos refracciones en sendos planos cuya intersección es la dirección q del rayo refractado. — La proyección esférica del punto Q sobre el ecuador $X X'$ da lugar al rayo incidente P normal á la arista, y en este ecuador, en este plano común á las dos refracciones se encuentran el rayo p refractado en el interior del prisma y el emergente P'.—Finalmente por ahora, y sin perjuicio de ir completando la explicación de la figura 2.ª á medida que vaya siendo menester, adviértase que los puntos X y P no corresponden á la representación usual del rayo incidente y de la normal sobre la primera cara del prisma, sino á sus prolongaciones, cual por razón de claridad expresamos en la figura 3.ª Y otro tanto respecto al rayo oblicuo incidente Q.

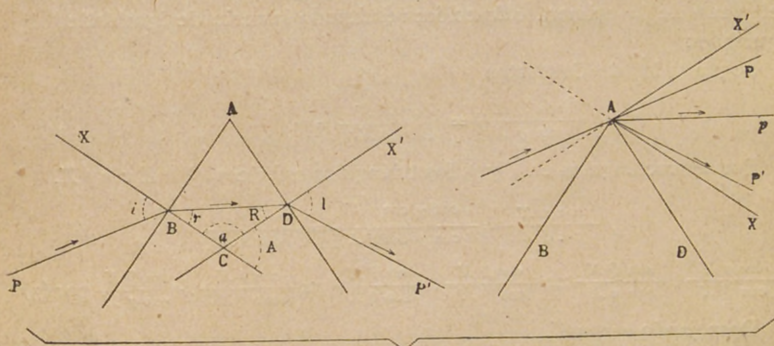

Figura 3.ª

Esto supuesto, si por los puntos Q, Q_1 y q se trazan los arcos meridianos $Q P$, $Q_1 P_1$ y $q\,\pi$, resultan inmediatamente las siguientes importantes proposiciones:

1.ª Teorema. *En las dos refracciones que sufre un rayo luminoso cualquiera al atravesar un prisma se verifica que el ángulo del rayo incidente y el del refractado con la* SECCIÓN *normal siguen la ley de Descartes.* Pues en los triángulos esféricos $Q P X$ y $q \pi X$ rectángulos en P y π, y en los

Llega Christie, como es de ver en la nota (*b*), á la fórmula

$$Q_1 X' - Q' X' = Q_1 \ Q' = \frac{\mu^2 - 1}{2 \mu^2} \ P Q^2 (tg p X + tg p X') \qquad (1)$$

que debemos transformar y rectificar para conseguir su identi-

---

$Q_1 P_1 X'$ y $q \pi X'$ rectángulos en P_1 y π se cumple, llamando α y α' á los ángulos en X y en X'.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\operatorname{sen} Q P}{\operatorname{sen} Q X} = \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} q \ \pi}{\operatorname{sen} q \ X} \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen} Q_1 P_1}{\operatorname{sen} Q_1 X'} = \operatorname{sen} \alpha' = \dfrac{\operatorname{sen} q \ \pi}{\operatorname{sen} q \ X'} \end{array}\right\} \text{ ó } \begin{array}{ll} \dfrac{\operatorname{sen} Q P}{\operatorname{sen} q \ \pi} = \dfrac{\operatorname{sen} Q \ X}{\operatorname{sen} q \ X} = \mu & (1) \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen} Q_1 \ P_1}{\operatorname{sen} q \ \pi} = \dfrac{\operatorname{sen} Q_1 \ X'}{\operatorname{sen} q \ X'} = \mu & (2) \end{array}$$

siendo μ el índice de refracción.

Corolarios. De (1) y (2) resulta que *son iguales los ángulos de los rayos incidente y emergente con la sección* normal. $Q P = Q_1 \ P_1$.

E *iguales* también, como complementos de los anteriores, los *ángulos de los rayos* incidente y emergente con la arista, $Q Z = Q_1 \ Z$.

Razonamiento de Christie.

El meridiano $p Z$ del rayo p, refractado normal en el interior del prisma, encuentra en el punto n al arco de círculo máximo $Q X$ contenido en el plano de la primera refracción; resultando la serie de igualdades siguientes:

Según la ley de Descartes

$$\frac{\operatorname{sen} \ Q X}{\operatorname{sen} \ q \ X} = \frac{\operatorname{sen} P X}{\operatorname{sen} p \ X} = \mu \qquad (3)$$

Por ser rectángulos en P y p, los triángulos esféricos $Q P X$ y $n p X$,

$$\frac{\cot n \ X}{\cot Q \ X} = \frac{\cos \alpha \ \cot p \ X}{\cos \alpha \ \cot P X} = \frac{\cot p \ X}{\cot P X}$$

$$\frac{\cos n \ X}{\cos Q \ X} \cdot \frac{\operatorname{sen} Q \ X}{\operatorname{sen} n \ X} = \frac{\cos p \ X}{\cos P \ X} \cdot \frac{\operatorname{sen} P X}{\operatorname{sen} p \ X} = \frac{\cos p \ X}{\cos P \ X} \cdot \frac{\operatorname{sen} Q \ X}{\operatorname{sen} q \ X} \text{ por (3)}$$

Despejando sen n X,

$$\operatorname{sen} n \ X = \frac{\cos P \ X}{\cos p \ X} \cdot \frac{\cos n \ X}{\cos Q \ X} \cdot \operatorname{sen} q \ X. \qquad (4)$$

Pero

$$\cos n \ X = \cos p \ n. \cos p \ X \qquad \text{y} \qquad \cos Q X = \cos P Q. \cos P X \qquad (5)$$

luego, sustituídas en (4) las expresiones (5),

$$\operatorname{sen} n \ X = \frac{\cos p \ n}{\cos P Q} \operatorname{sen} q \ X. \qquad (6)$$

Por una parte, todos los cuatro ángulos de esta última fórmula son aguficación con la dada por Frost y Scheiner. Consideremos para ello las siguientes particularidades:

1.º El factor binomio del segundo miembro toma forma más adecuada del modo siguiente:

$$(tg\,p\,X + tg\,p\,X') = \frac{\text{sen}\,p\,X}{\cos p\,X} + \frac{\text{sen}\,p\,X'}{\cos p\,X'} = \frac{\text{sen}\,(p\,X + p\,X')}{\cos p\,X \cos p\,X'}$$

$$= \frac{\text{sen}\,A}{\cos R \cos (A - R)}$$

notando que $p\,X + p\,X'$ es el ángulo de las normales señalado con la letra A en la figura 3.ª, representativa de la refracción

---

dos; por otra, siendo convergentes los arcos de círculo máximo $Q\,X$ y $P\,X$ hacia el punto X, por fuerza es $p\,n < P\,Q$ y $\cos p\,n > \cos P\,Q$; luego

$$\text{sen}\,n\,X > \text{sen}\,q\,X \qquad \text{y} \qquad n\,X > q\,X.$$

Por consiguiente, dice Christie, *la imagen de la línea recta después de la primera refracción es cóncava hacia la normal á la primera cara.* Pero, huyendo de exagerado laconismo, lo que resulta hasta ahora es que todo rayo refractado q en el interior del prisma se desvía hacia la normal á la primera cara más que el refractado correspondiente al incidente normal, y nada más. Pues, aunque, como es natural y lógico, sean simétricos respecto al ecuador los refractados de los incidentes también simétricos definidos por puntos del arco $Q\,P$ á uno y otro lado del mismo ecuador, mientras no se prolongue el razonamiento no podemos asegurar si la serie continua de puntos como q formará ó no en p un punto de retroceso de primer género.

Continúa Christie el razonamiento como sigue. De la ecuación (6) resulta

$$\frac{\text{sen}\,n\,X - \text{sen}\,q\,X}{\text{sen}\,n\,X + \cos q\,X} = \frac{\cos p\,n - \cos P\,Q}{\cos n\,p + \cos P\,Q}$$

y transformando en productos las sumas y diferencias de senos ó cosenos.

$$\frac{tg\,1/2\,(n\,X - q\,X)}{tg\,1/2\,(n\,X + q\,X)} = tg\,1/2\,(P\,Q - p\,n) \,.\, tg\,1/2\,(P\,Q + p\,n) \qquad (7)$$

y puesto que $n\,X - q\,X$, $P\,Q$ y $p\,n$ son cantidades pequeñas, se podrá tomar $tg\,X$ en vez de $tg\,\frac{1}{2}\,(n\,X + q\,X)$, y escribir en vez de (7)

$$n\,X - q\,X = 1/2\,(P\,Q - p\,n)\,(P\,Q + p\,n) \,.\, tg\,q\,X \text{ próximamente}$$
$$= 1/2\,(P\,q^2 - p\,n^2)\,tg\,q\,X. \qquad (8)$$

Por otra parte,

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen}\,p\,n = \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,n\,X = \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,q\,X. \\ \text{sen}\,P\,Q = \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,Q\,X\end{array}\right\}\ \text{luego}\ \frac{p\,n}{P\,Q} = \frac{1}{\mu} = \frac{\text{sen}\,q\,X}{\text{sen}\,Q\,X} \qquad (9)$$

y de esta última:

$$\frac{P\,Q^2 - p\,n}{P\,Q^2} = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \qquad (10)$$

normal, ó sea el ángulo A del prisma; ya que son rectos los ángulos en B y en D del cuadrilátero $A\,B\,C\,D$ y suplementos los dos ángulos A del a del cuadrilátero birrectángulo;—que el ángulo $p\,X'$ de la figura 2.ª corresponde al ángulo R de la figura 3.ª, formado por el rayo interior normal del prisma con la normal de la emergencia; — que el ángulo $p\,X$ corresponde al r; — y que siendo el ángulo refringente A igual á la suma de los de refracción en el interior del prisma se tiene que

$$A = r + R, \qquad p\,X = r = A - R.$$

---

y llevada á (8) la diferencia de cuadrados $P\,Q^2 - p\,n^2$ de 10, resulta por fin

$$q\,n = n\,X - q\,X = \frac{\mu^2 - 1}{2\mu^2}\,P\,Q^2\,tg\,p\,X \text{ próximamente.} \qquad (11)$$

Ecuación de una parábola, salvo el adverbio próximamente. Y nos ha llamado la atención que ni con salvedades ni sin ellas haya empleado Christie ni una sola vez la palabra parábola para designar geométricamente la ecuación (11). Ahora sí que podemos decir que la serie de puntos q forma una curva continua con la concavidad vuelta hacia la normal de la incidencia; hacia la base del prisma en general; hacia el color violeta.

Para seguir el *razonamiento de Christie* suponemos trazado el meridiano $p\,Z$ del rayo refractado normal en el interior del prisma. Este meridiano $p\,Z$ corta al plano de primera refracción en el punto n, y por este punto y la normal X' imaginamos el arco de círculo máximo que encuentra en Q' al meridiano $P'\,Z$ del rayo P' emergente normal.

Esto supuesto, acaba Christie del modo siguiente su razonamiento, del cual es copia literal lo que transcribimos en letra cursiva:

Sea O X ′ *la normal á la segunda cara del prisma, y* O P ′ *la dirección del rayo emergente* (normal) *correspondiente al de incidencia O P;* y sea además X' n Q' *un arco de círculo máximo* (definido por los puntos X' y n de significación ya conocida). *Si suponemos invertida la dirección del haz emergente* (tanto para el normal P' como para el oblicuo Q' situado en el merídiano de P') *el* Q′ *se refringirá en la dirección* O q′, *siendo* q′ *punto del arco* n X′ (acercándose á la normal X′ según lo antes demostrado. Y si el rayo que en el interior del prisma sigue la dirección q' se refringe según la dirección Q′) *el rayo que pasa por el prisma siguiendo la dirección* O q *emergerá según* O Q_1 *siendo* Q_1 *punto del arco de círculo máximo* X′ q (por cuanto á mayor ángulo de incidencia corresponde mayor ángulo de refracción, y viceversa; y si $q\,X' > q'\,X'$, también) *será* $Q_1\,X' > Q'\,X'$. *Por consiguiente, la imagen* (de la línea recta con la cual se confunde sensiblemente el arco $P\;Q$ muy pequeño comparado con el radio) *será en la emer-*

Queda así la fórmula (1) de Christie bajo la forma

$$Q_1\, Q' = \frac{\mu^2 - 1}{2\,\mu^2} \cdot \frac{\text{sen } A}{\cos R \cos (A - R)} \cdot P\, Q^2. \qquad (2)$$

2.° Si en el punto P' (fig. 2.ª) de la emergencia normal imaginamos un plano tangente á la esfera, y en este plano un sistema coordenado con el eje de las X tangente al ecuador, y el de las Z paralelo á la arista del prisma, las coordenadas del punto Q_1 serán $z = P\,Q = P_1\, Q_1 = P'\, Q'$ sensiblemente, y $x = P_1\, P' = Q_1\, Q'$

---

gencia cóncava hacia la normal á la superficie de incidencia; y su CURVATURE (dejamos la palabra en inglés) *después de la refracción á través del prisma será:*

$$\frac{\mu^2 - 1}{2\,\mu^2}\; P\, Q^2\,(tg\, p\, X + tg\, p\, X') \qquad (12)$$

Indudablemente se habrá advertido que para llegar Christie á la fórmula (12), ha debido pasar por la análoga á la (11)

$$q'\, n = \frac{\mu^2 - 1}{2\,\mu^2}\; P'\, Q'\, tg\, p\, X' \qquad (13)$$

ecuación que no aparece por ninguna parte, por más que vaya envuelta en su razonamiento. Pero es lo cierto que no se llega á la (12) sumando los (11) y (13), sin demostrar, ó sin recordar, suponiendo conocida la demostración, que $P\ Q = P_1\ Q_1$ como dejamos sentado antes de entrar en el razonamiento de Christie, y que $P_1\ Q_1$ es sensiblemente igual á $P'\ Q'$ como luego veremos.

Y sobre todo, á donde, con la anterior aclaración, llega Christie es al valor $q\, n + q'\, n$ sensiblemente igual á $q\, q'$, mas no al muy otro valor $Q_1\, Q'$ sensiblemente igual á $P_1\, P'$, como vamos á ver. Sobre todo, decimos, porque de aquí arranca el ser muy diferentes, teórica y practicamente, las parábolas de Christié y de Scheiner.

Para dar el mayor rigorismo posible al razonamiento de Christie, conviene tener buena idea de la magnitud relatíva de los segmentos $n\, p$, $q\, \pi$, $n\, q$, diferencia $n\, p - q\, \pi$ y sus análogos.

Mirada como infinitamente pequeña la desviación $P\ Q$ de la normalidad á la arista en la incidencia, y tomada por infinitamente pequeño prinprincipal, resulta:

1.° Que son de primer orden el ángulo α y los segmentos $p\, n$ y $\pi\, q$; pues

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{sen } P\, Q}{\text{sen } P\, X}$$

también sensiblemente. Con lo cual, y despejando $PQ^2=z^2$, obtendremos la fórmula

$$z^2 = \frac{2\mu^2}{\mu^2 - 1} \, \frac{\cos R \cos (A - R)}{\text{sen } A} \, x \tag{3}$$

3.° Tocante al eje de las Z poco importa fijar su sentido positivo ó negativo, ya que la coordenada z entra en la fórmula (3)

y el denominador es finito y los senos son del mismo orden que los arcos,

$$\text{y} \quad \frac{\text{sen } n\, p}{\text{sen } Q\, P} = \frac{\text{sen } \alpha \;\; \text{sen } n\, X}{\text{sen } \alpha \;\; \text{sen } Q\, X}$$

expresión en la que es finito el segundo miembro.

Y análogamente para $\pi\, q$, $Q_1\, P_1$, $Q'\, P'$.

2.° Que el segmento $n\, q$ es de segundo orden, como resulta inmediatamente de las fórmulas (7) y (11).

3.° Que la diferencia $p\, n - \pi\, q$ es de tereer orden, porque partiendo de la relación

$$\frac{\text{sen } n\, P}{\text{sen } q\, \pi} = \frac{\text{sen } \alpha \, \text{sen } n\; X}{\text{sen } \alpha \; \text{sen } q\; X} = \frac{\text{sen } n\; X}{\text{sen } q\; X}$$

se deduce, según el procedimiento seguido para obtener la ecuación (7)

$$\frac{tg\, 1/2\, (n\, p - q\, \pi)}{tg\, 1/2\, (n\, p + q\, \pi)} = \frac{tg\, 1/2\, (n\, X - q\, X)}{tg\, 1/2\, (n\, X + q\, X)};$$

$$tg\, 1/2\, (n\, p - q\, \pi) = \frac{tg\, 1/2\, (n\, p + q\, \pi) \;\; tg\, 1/2\, (n\, X - q\, X)}{tg\, 1/2\, (n\, X + q\, X)}$$

El denominador es finito; $n\, p + q\, \pi$ es de primer orden porque lo son $n\, p$ y $q\, \pi$; acabamos de decir que $n\, q = n\, X - q\, X$ es de segundo; y las tangentes son del orden de los respectivos arcos, mientras, como en nuestro caso, es continua la función $y = tg\, x$. Luego $tg\, 1/2\, (n\, p - q\, \pi)$ y $n\, p - q\, \pi$ son de tercer orden.

Y otro tanto puede decirse de diferencias análogas.

Cierto es que en la realidad fenomenal del problema que nos ocupa, no hay tales infinitamente pequeños, como no los hay en los problemas prácticos de la dilatación por el calor; pero así como sin ser infinitamente pequeño el más pequeño de los coeficientes de dilatación lineal que figuran en los cuadros de los Tratados de Física, nadie duda, sin embargo, de que en la práctica sean su doble ó su triplo los de la dilatación superficial ó cúbica, habida cuenta de que la primera cifra significativa decimal de los cuadrados y cubos va precedida de más ceros que los necesarios y suficientes para dejar rebasada la aproximación exigida en los cálculos, así también sin error sensible puede suponerse confundido el arco $X'\, Q'$, con el $X'\, Q_1$; iguales los arcos casi elementales $Q'\, P'$ y $Q_1\, P_1$ cuya diferencia es de tercer orden; é iguales los segmentos sensiblemente rectilíneos $Q'\, Q_1$ y $P'\, P_1$ proyección del primero; ya que si muy pequeño es el ángulo α', máspequeño aún es el ángulo de los elementos $Q'\, P'$ y $Q_1\, P_1$.

elevada al cuadrado. No así respecto al eje de las X, cuya dirección positiva debe fijarse desde el origen P' hacia P por ser usual contar positivamente el ángulo de incidencia desde la normal á la primera cara hacia la base del prisma. Ahora bien, suponiendo para los efectos analíticos trasladada á $P'\,Q'$ la rendija $P\,Q$ sin dejar de ser paralela á la arista $Z\,O$ y con su punto medio en P', ora esté el punto Q' encima ó debajo del ecuador, ó á uno ú otro lado del plano normal á la arista, esto es, ya sea z positiva ya negativa, siempre, como hemos visto, se desvía el rayo emergente Q_1 hacia la normal X con referencia al emergente normal P'; es decir, que x siempre es negativa, lo cual equivale á suponer negativo el parámetro de la parábola, por cuanto con este signo queda excluído todo valor positivo de x. Poniendo, pues, de manifiesto este signo, pasaremos de la expresión (3) á

$$z^2 = -\frac{2\,\mu^2}{\mu^2 - 1}\,\frac{\cos R \cos (A - R)}{\operatorname{sen} A}\,x \qquad (4)$$

4.° No debe pasar inadvertida la circunstancia originaria ó fenomenal de ser ángulos ó desviaciones de rectas las magnitudes $P\,Q$ y $Q_1\,X' - Q'\,X' = Q'\,Q_1$; las cuales pasan á los cálculos bajo las características trigonométricas sen, t g, etc.; pues de conservar estas magnitudes x y z en los resultados su carácter geométrico lineal ó angular, nos llevarían al absurdo envuelto en toda fórmula no homogénea. En una palabra, es menester restablecer la homogeneidad ó el radio, como se dice en la Geometría Analítica y en la Trigonometría, y escribir $\frac{z}{r}$ y $\frac{x}{r}$ en vez de z y de x, siendo r la distancia focal del colimador del espectroscopio ó radio de la esfera simbolizada en la figura 2.ª. Y como tampoco van á las fórmulas los segmentos lineales r, z, x que las haría perder toda su significación y carácter numérico analítico, sino los números, conocidos ó incógnitos, resultantes de su medición directa ó indirecta con la unidad elegida, el milímetro por ejemplo, si designamos con las letras f, x y z el *número* de milímetros que contienen el radio ó distancia focal del colimador y las coordenadas $z = P\,Q = P'\,Q'$ y $x = Q_1\,Q' = P'\,P_1$, llegaremos á la siguiente expresión

$$\frac{z^2}{f^2} = -\frac{2\,\mu^2}{\mu^2 - 1}\cdot\frac{\cos R \cos (A - R)}{\operatorname{sen} A}\,\frac{x}{f}$$

ó

$$z^2 = -\frac{2\,\mu^2}{\mu^2 - 1}\,\frac{\cos R \cos (A - R)}{\operatorname{sen} A}\,.\,f.\,x \qquad (5)$$

fórmula homogénea en la cual son números abstractos μ, cos R, cos $(A - R)$ y sen A, y *número* de milímetros f, x y z. Suprímase en efecto el valor numérico f, y aunque se considere como homogénea la fórmula (4) por suponerse tácitamente que el valor numérico de la distancia focal es la unidad, que $f = 1$, difícilmente conseguiríamos en la práctica medir y expresar con claridad las dislocaciones correctivas mediante dicha fórmula (4); las cuales correcciones han de ser relacionadas con la unidad admitida, la diezmillonésima de milímetro para las longitudes de onda, como queda dicho.

5.º Escrita según (5) la fórmula de Christie, queda bien preparada para su comparación con la de Scheiner que es

$$z^2 = -\frac{2\,n \cos i \cos (A - r)\, f}{(n^2 - 1) \text{ sen } A}\, x \qquad (6)$$

en la cual simboliza n el índice de refracción del prisma, llamado μ en la notación de Christie, quedando á la vista que los parámetros de una y otra parábola son diferentes.

La causa principal de esta divergencia está en que Christie salta bruscamente del valor $q\,n + q'\,n$ á que realmente llega, al $Q_1\,Q'$ á que debe llegar, adjudicando á éste el valor propio de aquél, como advertimos en la nota.

Son valores muy diferentes $q\ q' = q\ n + n\ q'$ y $Q_1\ Q'$ cuya relación es fácil de establecer mediante la ecuación fundamental de la refracción. En efecto, de la ecuación de Descartes

$$\text{sen } I = \mu \text{ sen } R$$

resulta inmediatamente

$$d\,I = \mu\,\frac{\cos R}{\cos I}\,d\,R \qquad (7)$$

Pero los rayos emergentes Q_1 y Q' están, sensiblemente el segundo, en el plano de la segunda refracción $Q_1\ X'$; y considerados como incidentes, tienen por refractados los q y q', este último también sensiblemente en el mismo plano. Y puesto que los ángulos $Q_1\ Q'$ y $q\ q'$ son muy pequeños, pueden considerarse como incrementos correlativos de los ángulos de incidencia $Q'\ X'$ y de refracción $q'\ X'$. Ha de verificarse, pues, según (7), por cuanto $Q_1\ Q' = d\ I$ y $q\ q' = d\ R$ que

$$Q_1\ Q' = \mu\,\frac{\cos R}{\cos I}\,q\ q' \qquad (8)$$

Con haber escrito $Q_1\,Q'$ en vez de $q\,q'$ en el primer miembro de las fórmulas (2) y siguientes ha sido multiplicado este primer miembro por $\mu \frac{\cos R}{\cos I}$, y para que la igualdad subsista es menester multiplicar el segundo por el mismo factor, y ello hecho conviértese la fórmula (2) en la siguiente:

$$Q'\,Q_1 = \frac{\mu^2-1}{2\,\mu}\,\frac{\operatorname{sen} A}{\cos I \cos(A-R)}\,P\,Q^2 \qquad (7)$$

y la (5) en

$$z^2 = -\frac{2\,\mu}{\mu^2-1}\,\frac{\cos I \cos(A-R)\,f}{\operatorname{sen} A}\,x \qquad (8)$$

Comparada ahora la fórmula (8) con la (6), que es la de Scheiner, ya no se advierte más diferencia que la permutación de los ángulos I y R de la segunda refracción por los i y r de la primera.

Frost, al traducir á Scheiner, dice á la letra que son i y r *respectively the angles of incidence and refraction of the rays emanating from the middle of the slit*. Pero tanto los ángulos I y R de la segunda refracción como los i y r de la primera están formados por las normales respectivas, con rayos que emanan del centro de la rendija, como que continúan sin solución bajo diferentes direcciones desde la incidencia hasta la emergencia.

¿Á qué ángulos se refiere Scheiner? Indudablemente se refiere, como debe ser, á los que hemos designado con las letras mayúsculas I y R, á los de la segunda refracción normal. Y con esta interpretación quedan identificadas la ecuación corregida de Christie con la de Scheiner sin corrección ninguna, salvo lo incorrecto de designar los ángulos de la segunda refracción normal con las letras i y r, siempre empleadas para los de la primera, exponiendo á sus lectores á incurrir en erróneos conceptos teóricos y en defectuosas correcciones prácticas.

Todavía se atenúa más la antexpuesta pequeñísima incorrección de Scheiner, hasta el punto de desaparecer por completo, cuando se llega á la fórmula en que se transforma (8) para el caso de la mínima desviación, la cual pide que el espectroscopio sea ajustado bajo la condición de ser $I=i$ y $R=r$. Y en efecto, bajo este supuesto, considerando que $A = r + R$ y que cuando $r = R$ se verifica que

$$R = \tfrac{1}{2} A; \cos (A - R) = \cos \tfrac{1}{2} A; \qquad \text{sen I} = \mu \text{ sen } R.$$

$$\cos I = \sqrt{1 - \text{sen}^2 I} = \sqrt{1 - \mu^2 \text{sen}^2 R} = \sqrt{1 - \mu^2 \text{ sen } \tfrac{1}{2} A} ;$$

llevando estos valores á la ecuación (8), y advirtiendo que $\text{sen } A = 2 \text{ sen } \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A$ obtiénese

$$z^2 = \frac{\sqrt{1 - \mu^2 \text{sen}^2 \frac{1}{2} A}}{(\mu^2 - 1) \text{ sen } \frac{1}{2} A} \mu f x \qquad (9)$$

expresión independiente de i, r, I y R.

Despejando x, queda bien de manifiesto el valor analítico de la corrección

$$x = \frac{(\mu - \frac{1}{\mu}) \text{ sen } \frac{1}{2} A}{f \sqrt{1 - \mu^2 \text{ sen}^2 \frac{1}{2} A}} z^2$$

para la mínima desviación; ó, para el caso general

$$x = \frac{(\mu - \frac{1}{\mu}) \text{ sen } A}{2 f \cos I \cos (A - R)} z^2$$

y confirmadas las afirmaciones del preliminar puesto á este escrito, á saber: que son tanto mayores las dislocaciones x cuanto mayores sean el índice de refracción μ y el ángulo refringente A, y cuanto menor sea la distancia focal f.

TEMPESTADES ELÉCTRICAS EN ABRIL DE 1903, *por* **Victoriano Fernández Ascarza.**

La gran merced que la Sociedad me hizo al acoger con benevolencia mi nota anterior sobre las tempestades eléctricas, ha fortalecido mi propósito de proseguir esta información y ha disipado mis vacilaciones. Ante la magnitud de la empresa ya no me considero solo, puesto que cuento con el valioso apoyo moral de la Sociedad. Cumplo un deber al manifestar por ello mi hondo reconocimiento, y cumplo un compromiso, gustosamente adquirido, al dar cuenta mensual de los resultados de mi información en este año. Tal es el fin de esta nota.