

## DETERMINACIÓN DE PUNTOS RODILLA PARA PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CUÁDRÁTICA MULTI-OBJETIVOS.

### DETERMINATION OF KNEE POINTS FOR MULTI-OBJECTIVE QUADRATIC OPTIMIZATION PROBLEMS.

Almazán-Torres E.<sup>1</sup>, Jasso-Carbajal M.C.<sup>1</sup>, Gaytan-Iniestra J.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Economía de la Universidad Autónoma del Estado de México

<sup>2</sup> Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de México

\*Cerro de Coatepec S/N, Ciudad Universitaria, C.P. 50, Toluca, Estado de México

\*ealmazant@uaemex.mx

#### RESUMEN.

Diversos problemas de la ingeniería son resueltos mediante modelos de optimización, por lo general con múltiples objetivos. Desafortunadamente, la mayoría de las veces sólo es considerado un criterio ignorando otros relevantes. Se ha demostrado que considerar más de un objetivo le proporciona al analista mejores soluciones. El incluir más de un objetivo proporciona ventajas en la calidad de la solución, pero genera el problema de encontrarla teniendo a los objetivos en conflicto. El presente trabajo propone un método de dos etapas para determinar el punto rodilla del frente de Pareto, para el caso de un problema de múltiples

objetivos cuadráticos, convexos con restricciones lineales. El método está basado en la generación de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para el problema de encontrar la máxima flecha que existe entre la Cubierta Convexa de Mínimos Individuales (CHIM) y el frente de Pareto. Además, tiene la ventaja de que para el primer sub-sistema pueden utilizarse algoritmos ya existentes para resolver problema cuadrático mono-objetivo y, una vez conocida su solución, se resuelve el segundo sub-sistema, el cual es un sistema de ecuaciones lineales para el que existen múltiples formas de solucionarlo. El método propuesto es probado resolviendo diversos problemas

de prueba, los resultados son comparados contra el algoritmo general NSGA-II.

**Palabras clave:** cubierta convexa, frente Pareto, múltiples objetivos cuadráticos, punto rodilla.

### **ABSTRACT.**

Optimization models solve many engineering problems, generally with multiple objectives. Unfortunately, most of the time it is considered only a single criterion, disregarding other relevant criteria. It has been demonstrated that considering more than a single objective provides better solutions for the decision taker. Including more than a single objective improves the solution quality but generates the problem of finding it having the objectives in conflict. A two-steps method to determine the knee point of the Pareto front, for the case of a multi-objective problem with convex quadratic objectives, and lineal restrictions is proposed in this paper. The method is

based on the generation of the Karush-Kuhn-Tucker conditions for the problem of finding the maximum (longest) distance between the Convex Hull of Individual Minima (CHIM) and the Pareto front. The method has the advantage that for the first sub-system, existing algorithms can be used to solve mono-objective quadratic problems. Once known the solution of this system, the second sub-system is solved, which is a system of lineal equations and there exist many ways to solve it. The proposed method is tested by solving different test problems, and its results are compared with the general algorithm NSGA-II.

**Key words:** convex hull, Pareto front, quadratic multi-objective, knee point.

### **INTRODUCCIÓN**

El concepto de frente de Pareto se refiere al conjunto de soluciones que no pueden ser optimizados en un criterio sin deteriorar al menos otro. Un punto

frecuentemente utilizado por los tomadores de decisiones es el punto que se encuentra más alejado de los puntos ideales (óptimos individuales) llamado punto rodilla. Así mismo, existen técnicas para determinar la solución involucrando al tomador de decisión. El presente trabajo plantea la posibilidad de dar una solución independiente de involucrar al tomador de decisión. Con esto el tomador de decisión deberá interpretar nuestra solución de forma neutral, requiriendo involucrar más aspectos o “criterios” de manera general. Existen diversos procedimientos que pueden determinar el punto rodilla. Sin embargo, este trabajo presenta una técnica basándose en estudios realizados por Das [1], considerando a las funciones objetivo sean cuadráticas y convexas, con restricciones lineales, lo cual no ha sido estudiado particularmente. Esta técnica tiene la ventaja de que el sistema de ecuaciones asociadas a las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

(KKT) se resuelve en dos etapas. Además, es aplicable a cualquier problema que satisfaga las características requeridas: Funciones objetivo cuadráticas de tal forma que su matriz Hessiana sea semi-positiva definida, cuyas restricciones sean lineales y las variables no sean negativas.

El Problema de Optimización Multi-objetivo POM, (Ec. 1), que se trata el presente artículo tiene la siguiente estructura:

$$\min_{x \in S} F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_l(x) \end{bmatrix} \quad (Ec. 1)$$

$$s. a \quad x \in S = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n | h(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{array} \right\}$$

Donde  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ , es el vector formado por todas las  $l$ -ésimas funciones objetivo, para  $l \geq 2$  con  $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  para  $i = 1, \dots, l$ ;  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$  y  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  las funciones asociadas a las restricciones de igualdad y desigualdad respectivamente.  $S$  es el conjunto de todos aquellos puntos

$x$  que satisfacen las restricciones y a la cual se denomina región factible. Note que expresar el problema de minimización es sólo por conveniencia y sin pérdida de generalidad.

El principal interés es encontrar un punto

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, x^* \in S, \text{ que de manera}$$

simultánea “optimice” (o minimice) todas las funciones objetivo. La noción de óptimo en un POM dado en (1), cambia con respecto a la de un problema de optimización mono-objetivo, dado que, en vez de una solución única, se trata de obtener una solución de compromiso entre los diferentes objetivos. Una solución de compromiso trata de determinar los puntos  $x^* \in S$ , tales que no se incremente un criterio sin causar un decremento simultáneo en al menos otro criterio diferente, es decir, no existe un vector de criterios que domine a otro vector de

criterios, el cual fue llamado óptimo de Pareto, como menciona Coello [2].

A continuación, se presentan conceptos que ayudan a formalizar el concepto de punto rodilla con ayuda de resultados ya establecidos por otros autores.

**Definición 1.** Se dicen que el vector  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  domina a otro vector  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  denotado por  $w < v$ , sí y sólo si,  $w_i < v_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$  y  $w \neq v$ . [3]

**Definición 2.** Un punto  $x^*, x^* \in S$  es óptimo de Pareto para POM (1), sí y sólo sí, no existe otro punto  $x \in S$  tal que satisfaga  $F(x) < F(x^*)$ .  $F(x^*)$  es llamado no dominado [1].

**Definición 3.** Considera al problema multi-objetivo POM. Shukla, P. K. (2007) indica que el conjunto de óptimos de Pareto  $P^*$  se define como

$P^* := \left\{ x \in S : \text{no existe } y \in S \text{ que} \right.$   
 $\left. \text{satisfaga } F(y) < F(x) \right\}$ . Se

define el frente de Pareto al conjunto

$$FP^* := \{u = F(x) : x \in P^*\} [4].$$

**Definición 4.** Sea POM, se denomina vector ideal  $F^*$ , al vector que contiene a los mínimos globales de cada función

objetivo, es decir,  $F^* = \begin{bmatrix} f_1^* \\ \vdots \\ f_l^* \end{bmatrix}$  donde  $f_i^* =$

$\min\{f_i(x) : x \in S\}$  para  $i = 1, \dots, l$ . [4].

**Definición 5.** Cubierta Convexa de Mínimos Individuales (CCMI), (CHIM, Convex Hull of Individual Minima). Sea  $x_i^*$  el punto mínimo global de la función objetivo  $f_i^*(x)$ ,  $i = 1, \dots, l$  para cada  $f_i(x)$  del POM.

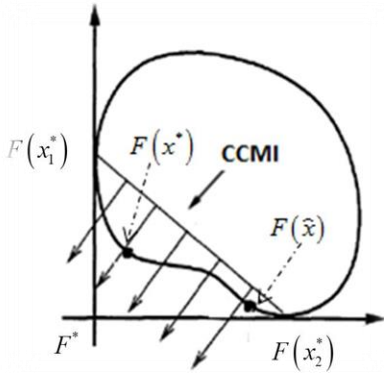
Sea  $F_i^* = F(x_i^*)$ ,  $i = 1, \dots, l$  sea  $\phi$ ,  $\phi \in M_{l \times l}$  una matriz cuadrada, tal que la  $i$ -ésima columna es  $\phi_i = F_i^* - F^*$   $i = 1, \dots, l$ . [4].

Se define a  $B = \{\beta : \beta \in \mathbb{R}^l, \sum_{i=1}^l \beta_i = 1, \beta_i \geq 0, \text{ para cada } i = 1, \dots, l\}$  el conjunto de las combinaciones convexas de los vectores  $\beta$ . Sea el conjunto  $\Gamma$  de puntos en  $\mathbb{R}^l$ , que son combinaciones convexas de  $F_i^* - F^*$  se le denomina cubierta convexa de mínimos individuales (CCMI); es decir,  $\Gamma = \{\phi\beta : \beta \in B\}$ . Se llamará a  $\phi$  la *matriz de pagos trasladada*. [1].

**Definición 6.** Sean  $FP^*$  al conjunto de puntos que se encuentra en  $\Gamma$  el frente de Pareto y CCMI del POM. El punto sobre  $FP^*$  que se encuentra más alejado del CCMI siguiendo una proyección ortogonal a  $\Gamma$ , se llama *punto rodilla del POM* [5].

**Definición 7.** Con referencia al POM, se utiliza  $I(x^*)$  para denotar el conjunto de índices de restricciones que se vuelven activas en el punto  $x^* \in S$ ; es decir,  $I(x^*) = \{i : g_i(x^*) = 0\}$ , [6].

En la **Figura 1**, se ilustra el CCMI para el caso de dos criterios, el punto  $F^*$  así como los puntos ideales individuales, y se aprecian la existencia de dos puntos rodilla, denotados por  $F(x^*)$ ,  $F(\hat{x})$ .



**Figura 1.** CCMI, frente de Pareto y puntos rodilla.

Otros autores aceptan como punto rodilla cualquier mínimo local relativo al CCMI como es el caso del punto  $F(\hat{x})$  en la Figura 1. En el presente trabajo, el punto rodilla es  $F(x^*)$ .

Otro resultado necesario para este trabajo lo enuncian Almazán, Gaytan, y García, (2014) a continuación: *Teorema 1. La matriz de pagos trasladada  $\phi$  es no singular* [7].

**Caracterización del punto rodilla.** Sea  $\hat{n}$  un vector normal a cualquier punto contenido en la CCMI caracterizada por  $\Gamma$ , con dirección al origen; entonces  $\{\phi\beta + t\hat{n}, t \geq 0\}$  representa el conjunto de puntos ortogonales a  $\Gamma$ . El objetivo es determinar el valor máximo de  $t$ , y su correspondiente punto  $t^* \in FP^*$ ,  $x^* \in P^*$ , tal que maximiza la distancia al CCMI, valor dado por  $t^*$ .

El siguiente problema de programación no lineal permite determinar el valor de  $t^*$  así como el punto  $F(x^*)$  en el frente de Pareto, a través del método de Intersección Normal a la Frontera, IFN, definido en las ecuaciones (2)-(7), como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \max_{x,t} t & \quad (Ec. 2) \\ \text{s. a. } \phi\beta + t\hat{n} &= F(x) - F^* & (Ec. 3) \\ e^T \beta &= 1 & (Ec. 4) \\ h(x) &= 0 & (Ec. 5) \\ g(x) &\leq 0 & (Ec. 6) \\ \beta_i &\geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, l & (Ec. 7) \end{aligned}$$

Donde  $e \in \mathbb{R}^l$  es un vector de unos. La condición (2) es la función objetivo que determina el valor máximo para  $t$ , que estará sujeta a las restricciones que se describen a continuación: la condición (3) indica que se desea determinar la distancia máxima del CCMI al frente de Pareto, e indica que el punto  $F(x)$  es ortogonal al CCMI y tienen una distancia máxima de  $t$ . Las ecuaciones (4) y (7) indican la condición de que las componentes  $\beta$  suman uno y son no negativos; y por último las ecuaciones (5) y (6) son las restricciones de igualdad y desigualdad que se establecen en POM. Así, las condiciones necesarias de la terna  $(x^*, \beta^*, t^*)$  que satisfacen las condiciones para que  $x^*$  sea un punto de óptimo de Pareto, se respaldan con los resultados dados por Karush-Kuhn-Tucker para un problema mono-objetivo,

establecidos en los Teoremas 2 y 3, mencionados por Bazaraa y col [8].

Para el Teorema 2, la condición necesaria de KKT es que sea  $X$  un conjunto no vacío  $X \in \mathbb{R}^n$ , y las demás sean  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , se considera el problema P dado en la ecuación 8.

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & \text{s. a. } x \in X \quad ((Ec. 8) \\ & g_i \leq 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Sea  $\tilde{x}$  una solución factible, y sea  $I(\tilde{x}) = \{i: g_i(\tilde{x}) = 0\}$  el conjunto de índices de restricciones activas en  $\tilde{x}$ . Suponiendo que  $f, g_i$   $i \in I(\tilde{x})$  tienen sus primeras derivadas parciales continuas en  $\tilde{x}$ . Además, que  $\nabla g_i(\tilde{x})$  para  $i \in I(\tilde{x})$  son linealmente independientes y si  $\tilde{x}$  resuelve localmente el problema P, entonces, existen escalares  $u_i$  para  $i \in I(\tilde{x})$  tales que:

$$\nabla f(\tilde{x}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\tilde{x}) = 0$$

$$u_i \geq 0 \text{ para } i \in I$$

Si las  $g_i$  para toda  $i = 1, \dots, m$  son diferenciables en  $\tilde{x}$ , entonces las condiciones anteriores se pueden escribir equivalentemente mediante:

$$\nabla f(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(\tilde{x}) = 0 \quad (\text{Ec. 9})$$

$$u_i g_i(\tilde{x}) = 0 \text{ para } i = 1, \dots, m \quad (\text{Ec. 10})$$

$$u_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, m \quad (\text{Ec. 11})$$

Un punto  $\tilde{x}$  que satisface las ecuaciones (9)-(11) se llama un punto KKT [8].

**Teorema 3. Condición Suficiente de KKT.** Considerando el problema P, de la expresión (8). Sea  $X$  un conjunto no vacío  $X \in \mathbb{R}^n$ , sean  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  y  $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  para  $i = 1, \dots, m$  y sea  $\tilde{x}$  una solución KKT, se denota  $I(\tilde{x}) = \{i: g_i(\tilde{x}) = 0\}$ .

Se define  $S$  como la región factible relajada para el problema P de la ecuación 8, en la cual se eliminan aquellas

restricciones que no son activas para  $\tilde{x}$ .

Entonces:

- a. Si existe una vecindad  $N_\varepsilon(\tilde{x})$ ,  $\varepsilon > 0$ , tal que  $f$  es pseudo-convexo en  $N_\varepsilon(\tilde{x}) \cap S$  y  $g_i$ ,  $i \in I(\tilde{x})$ , tiene a sus primeras derivadas parciales continuas en  $\tilde{x}$  y además son cuasi-convexas en  $N_\varepsilon(\tilde{x}) \cap S$ , entonces  $\tilde{x}$  es un mínimo local del problema P.

- b. Si  $f$  es pseudo-convexo en  $\tilde{x}$ , y si  $g_i$ ,  $i \in I(\tilde{x})$  tiene sus primeras derivadas parciales continuas y cuasi-convexas en  $\tilde{x}$ , entonces  $\tilde{x}$  es una solución óptima global del problema P. En particular, al asumir que el dominio de las restricciones factibles a  $N_\varepsilon(\tilde{x})$ , para alguna  $\varepsilon > 0$ , entonces  $\tilde{x}$  es un mínimo local para el problema P [8].

**Condiciones KKT para el POMD.** Para el presente trabajo sólo se considerarán



restricciones de desigualdades, por lo que el problema de enfoque se establece en la ecuación 12 como sigue:

$$\min_{x \in S} F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_l(x) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 12})$$

$$s. a. \quad S = \{x | g(x) \leq 0\}$$

Teorema 4. Condición Necesaria de Calificación de KKT. Sea el problema POMD. Si  $f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, l$  son funciones con primeras derivadas parciales continuas en el punto  $x^* \in S$ . Una condición necesaria para que  $x^*$  sea óptimo de Pareto, es que existan multiplicadores  $0 \leq \lambda, \mu$  tal que  $\lambda \in \mathbb{R}^l$  y  $\mu \in \mathbb{R}^m$ ,  $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$  tales que satisfagan la ecuación 13, tal como lo acota Miettinen [5].

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \\ \mu_j g_j(x^*) &= 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{Ec.13})$$

Teorema 5. Condición Suficiente de KKT para el problema POMD. Sea el problema POMD con funciones objetivo

$f_1(x), f_2(x), \dots, f_l(x)$  convexas y cuyas primeras derivadas parciales son continuas en  $x^* \in S$ . Una condición suficiente para que  $x^* \in S$  sea óptimo de Pareto es que existan vectores  $0 < \lambda, \lambda \in \mathbb{R}^l$  y  $0 \leq \mu, \mu \in \mathbb{R}^m$  tales que satisfacen la ecuación 13 de acuerdo con Miettinen [5].

## METODOLOGÍA

Las técnicas mencionadas son aplicadas para problemas de optimización bi-criterios y algunas enuncian su generalidad a más de dos criterios. En el primer caso se presentan dos técnicas que parten del frente de Pareto y previamente reportadas [9-11] y en el segundo caso, Gaytán y García [11], se auxilian del él.

Técnica 1. Desarrollada por Branke. Este método permite resolver problemas de optimización multi-objetivo aplicando

técnicas evolutivas buscando determinar una región rodilla, en la cual se encuentra el punto de interés. Expresan que al tener ya los puntos que forma el conjunto de frente de Pareto es posible aplicar la medida del ángulo o una medida basada en una función de utilidad [9].

Técnica 2. Desarrollada por Rachmawati y Srinivasan. El algoritmo que desarrollan las autoras involucra el vector de preferencia, intervención que podría ser *a priori* con ayuda del tomador de decisiones. Sin embargo, también podría generarse esta relación de preferencia sin la ayuda del tomador de decisión. [10]. Presentan el algoritmo para identificar tanto la región rodilla como el punto rodilla por medio de una aproximación lineal al considerar problemas de optimización de sólo dos objetivos, aunque también lo contemplan para  $M$  funciones objetivo. Sin embargo, sólo se mencionará el principio de preferencia que utilizaron, englobándose en tres relaciones binarias

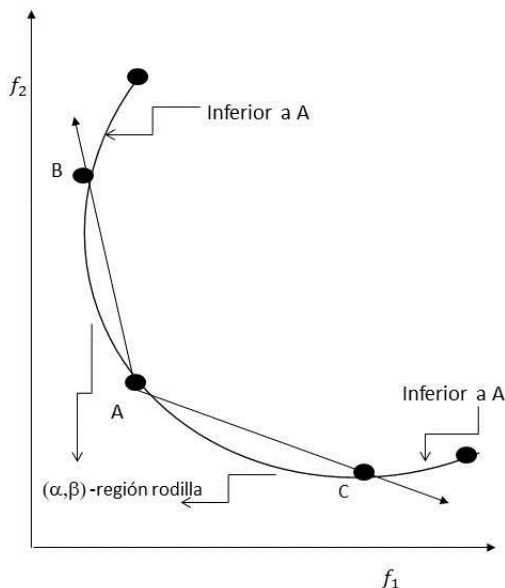
indicadas: preferencia estricta, de igual importancia y de incomparabilidad [10].

Técnica 3. Desarrollada por Deb y Gupta [11], es considerada como una mejora del proceso dado por Branke, específicamente como un esfuerzo para aproximar el ángulo que se encuentra formado por tres puntos consecutivos en la frontera de Pareto. El enfoque Ángulo de la Curva (Bend-Angle approach), se define como el ángulo de reflexión determinado por  $\theta(x, x^I, x^D)$ , donde  $(x^I, x^D)$  es un punto a la izquierda y derecha (antes o después) de  $x$ . Entonces el valor máximo de  $\theta(x, x^I, x^D)$  calculado, indica qué punto es denominado rodilla y se establece únicamente para problemas de optimización de dos criterios.

Con este enfoque se utilizan ciertas líneas como se muestra en la **Figura 2**, las cuales definen secciones llamadas  $(\alpha, \beta)$ -región rodilla. Esta región definida

no está dominada por el cono formado por los valores  $(\alpha, \beta)$ .

Estas dos definiciones están estrechamente relacionadas, de tal forma que el punto rodilla A, está siempre dentro de una  $(\alpha, \beta)$ -región rodilla. A partir de esta región Miettinen [5] define los bordes rodilla, lo cual da una aproximación de la ganancia de una función objetivo en referencia con la pérdida de la otra.



**Figura 2.** Punto rodilla por Deb y  $(\alpha, \beta)$ -región rodilla  
 Técnica 4. Desarrollada por Gaytán y García [12]. Busca encontrar una solución para el Problema Multi-objetivo de

Selección de Proyectos en la Infraestructura de Transporte (MTIPSP), modelado como un problema de optimización multi-objetivo basado en el problema de la mochila multi-objetivo 0-1, el cual utiliza tanto información del modelo costo/beneficio, como del modelo gravitacional y del IFN. Sin embargo, sólo determinan los puntos rodilla una vez determinado el frente de Pareto. En esta técnica también se utiliza el algoritmo NSGA-II para determinar el frente, y con su conocimiento implementar el algoritmo de procedimiento de identificación rodilla. Todas las anteriores técnicas, requieren primero conocer el frente de Pareto para después identificarla. Este procedimiento, no lo requiere, está basado en el método que desarrollaron Branke [9], para determinar el punto rodilla. Das y Dennis [13] establecen “Intersección Normal a la Frontera” (NIB, Normal-Boundary Intersection), para un problema de optimización no lineal multi-objetivo el cual

es independiente a las escalas relativas que tenga cada función objetivo.

**Solución de un PPC mono-objetivo.**

Para el caso cuadrático y con el fin de construir el CCMI, se deben determinar los puntos óptimos individuales de cada función objetivo  $f_i, i = 1, \dots, l_n$  sujeta a las restricciones lineales  $Ax \leq b, x \geq 0$ , el cual se resuelve por medio del Método de Lemke, [14] que dice: Sea el problema de optimización cuadrático PC, de la ecuación 14:

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \\ \text{s. a.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Ec. 14})$$

Donde  $Q$  es una matriz simétrica y positiva semi-definida  $n \times n$  y  $A$  una matriz  $m \times n$ ,  $b$  es un vector  $m \times 1$ , todas con elementos reales. Considerando que las condiciones KKT, dadas en el Teorema 4 para la ecuación 15, se expresan a continuación:

$$\begin{aligned} -Qx + A^T u + y &= 0 \\ Ax + v &= 0 \\ x^T y &= 0 \\ u^T v &= 0 \\ x \geq 0, y \geq 0, v \geq 0, u \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Ec. 15})$$

Donde  $y_i$  y  $v_j$  son considerada como variable básica para  $i = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, m$ . Así mismo las variables  $y_i$ , son definidas como variables complementarias para cada  $i = 1, \dots, n$  respectiva a  $x_i$ ; de manera similar se definen para cada  $j = 1, \dots, m$  las variables  $u_i$ , dada la condición de ortogonalidad. Para su desarrollo se ejercen los tres pasos basados en la literatura [15].

Paso 1. Se comienza agregando una variable de holgura  $z_0$ , donde  $I_n, I_m$  son las matrices de identidad de tamaño  $n$  y  $m$  respectivamente, de tal forma que en la **Tabla 1** el arreglo matricial inicial, se muestran estas condiciones

**Tabla 1.** Arreglo inicial matricial

	$x$	$u$	$y$	$v$	$z_0$
$c$	$-Q$	$-A^T$	$I_n$	$0$	$-1$
$b$	$A$	$0$	$0$	$I_m$	$-1$

Se determina el renglón donde se obtendrá el pivote, considerándose la ubicación del valor más negativo dentro de la tabulación, y con éste, dada la columna de  $z_0$  se cambia de signo y se hace una variable básica.

Paso 2. Se determina el pivote, dada la regla del mínimo cociente o razón mínima en la columna asociada con la variable complementaria que se convirtió en no básica en el último pivote.

Paso 3. Se continúa pivoteando como en el paso 2 hasta que  $z_0$  se convierta en no básica o hasta que no haya más pivotes posibles.

## RESULTADOS

El planteamiento del problema de estudio PMOC, está dado por la expresión (16), que se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \min F(x) &= [f_1(x) \quad f_2(x) \quad \dots \quad f_l(x)]^T \\ \text{s. a.} \quad Ax - b &\leq 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Ec. 16})$$

Siendo las funciones  $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i =$

$1, \dots, l$  y cada  $f_i$  es de la forma (Ec. 17)

$$f_i(x) = \frac{1}{2} x^T H_i x + L_i^T x + c_i \quad (\text{Ec. 17})$$

Donde para cada  $i = 1, \dots, l$ ;  $H_i$ ,  $H_i \in M_n$  es la Hessiana de  $f_i$ , una matriz simétrica positiva semi-definida (para garantizar que  $f_i$  es convexa),  $L_i$ ,  $L_i \in M_{n \times 1}$  es un vector columna de los coeficientes de la parte lineal de  $f_i$ ,  $A \in M_{m \times n}$ ,  $b \in M_{m \times 1}$  y por último  $c_i \in \mathbb{R}$  donde  $c_i$  es el valor constante o término independiente de cada  $f_i$ .

Entonces  $\nabla(F(x))$  está determinado por las derivadas parciales de las funciones  $f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, l$ ; donde  $\nabla f_i(x) = H_i x + L_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ , por lo que  $\nabla F(x)^T = [H_1 x \quad \dots \quad H_l x] + [L_1 \quad \dots \quad L_l]$

Para el problema en estudio, las restricciones lineales se escriben de la forma  $Ax - b \leq 0, x \geq 0$ , siendo  $A, A \in$

$$M_{m \times n}, A = (a_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ y } b, b \in$$

$$M_{m \times 1}, b = (b_k).$$

Considerando la estructura de IFN y las condiciones de optimalidad proporcionadas por Das [1], se establece el sistema MP en la ecuación 18, para el problema planteado en la ecuación 16, siguientes:

$$\begin{aligned} & \max_{x, \beta, t} t \\ \text{s. a. } & \phi(\beta - tv) = F(c) - F^* \\ & e^T \beta = 1 \quad (\text{Ec. 18}) \\ & Ax - b \leq 0 \\ & x, \beta, t \geq 0 \end{aligned}$$

Al cual se debe determinar la solución  $(x^*, \beta^*, t^*)$  donde  $x^* \in S$  es un punto óptimo de Pareto, y será el punto rodilla en el espacio de los criterios  $(f_1(x^*), \dots, f_l(x^*))$  que pertenece al frente de Pareto. Para esta terna se

obtuvieron los siguientes resultados particulares, siendo parte de la metodología propuesta.

**Condiciones y Soluciones de KKT del problema MP.** Se muestran los resultados para el problema de nuestro interés.

Teorema Punto Rodilla. Sea  $(x^*, \beta^*, t^*)$  un punto mínimo del problema MP, (Ec. 18), con  $x^* \in S$  un punto óptimo de Pareto. Sea  $F(x) = [f_1(x) \dots f_l(x)]^T$ , con  $f_i, i = 1, \dots, l$  funciones cuadráticas definidas por la ecuación 17; sea el conjunto de restricciones activas en  $x^* \in S$  linealmente independiente. Sea  $\hat{n} = -\phi v, v > 0, v \in M_{l \times 1}$  y  $s = \left(\frac{\phi^{-T} e}{v^T e}\right)$ .

Entonces  $x^*$  es un punto óptimo de Pareto (Ec. 18), si existen vectores  $\lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \geq 0$ , entonces se satisfacen las condiciones que generan las ecuaciones (19)- (25)

$$\begin{aligned} \nabla F(x)^T s + A^T \lambda - \mu &= 0 & (Ec. 19) \\ F(x) - F^* - \phi(\beta - tv) &= 0 & (Ec. 20) \\ e^T \beta - 1 &= 0 & (Ec. 21) \\ Ax - b &\leq 0 & (Ec. 22) \\ \lambda^T (Ax - b) &= 0 & (Ec. 23) \\ \mu^T x &= 0 & (Ec. 24) \\ x, \beta, t, \lambda, \mu &\geq 0 & (Ec. 25) \end{aligned}$$

Para su solución, se obtienen dos sub-sistemas, que en este caso se reescriben como:

I. Sub-sistema 1 (SS1)

$$\begin{aligned} \nabla F(x)^T s + A^T \lambda - \mu &= 0 & (Ec. 19) \\ Ax - b &\leq 0 & (Ec. 22) \\ \lambda^T (Ax - b) &= 0 & (Ec. 23) \\ \mu^T x &= 0 & (Ec. 24) \\ x, \lambda, \mu &\geq 0 & (Ec. 25) \end{aligned}$$

II. Sub-sistema 2 (SS2)

$$\begin{aligned} F(x) - F^* &= \phi(\beta - tv) & (Ec. 20) \\ e^T \beta &= 1 & (Ec. 21) \\ \beta, t, &\geq 0 & (Ec. 25) \end{aligned}$$

Reescribiendo la primera expresión del primer sub-sistema (SS1), referente al Jacobiano de  $F$ , se observa que la ecuación 19 puede escribirse como

$$\begin{aligned} [H_1 x \cdots H_l x] \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_l \end{bmatrix} + A^T \lambda - \mu \\ = -[L_1 \cdots L_l] \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_l \end{bmatrix} \Rightarrow \\ (\sum_{i=1}^l H_i s_i) x + A^T \lambda - \mu + \\ (\sum_{i=1}^l L_i s_i) = 0 \quad (26) \end{aligned}$$

Se renombra a  $\sum_{i=1}^l H_i s_i = Q$  y  $\sum_{i=1}^l L_i s_i = W$  con  $Q$  y  $W$  matrices de  $n \times n$  y  $n \times 1$  respectivamente. Por lo que el sub-sistema SS1, se reescribe para generar el sub-sistema SS3 dado en las ecuaciones (22) -(26):

$$\begin{aligned} Qx + A^T \lambda + W - \mu &= 0 & (Ec. 26) \\ Ax - b &\leq 0 & (Ec. 22) \\ \lambda^T (Ax - b) &= 0 & (Ec. 23) \\ \mu^T x &= 0 & (Ec. 24) \\ x, \lambda, \mu &\geq 0 & (Ec. 25) \end{aligned}$$

Se nota que la matriz  $Q$  es positiva semi-definida, ya que es una combinación no negativa de matrices positivas semi-definidas. El sub-sistema SS3, satisface las condiciones para aplicar el método de Lemke, ya que son las condiciones KKT\*

para problemas de programación cuadrática, PC, mono-objetivo, descrito en [12]:

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} X^T Q x + W^T x \\ \text{s. a.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Ec. 27})$$

Así SS3 permite determinar los vectores  $x^*$ ,  $\lambda^*$  y  $\mu^*$ ; que una vez conocidos, se sustituyen en el sub-sistema SS2. Cabe aclarar que las condiciones SS3 son necesarias y suficientes para determinar  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  si las matrices  $H_i, i = 1, \dots, l$ , son positivas semi-definidas y  $s \geq 0$ .

Se obtiene con lo anterior los siguientes resultados cuya demostración coinciden con lo previamente reportado [7].

*Corolario 1.* Sea  $(x^*, \beta^*, t^*)$  un punto mínimo del problema MP ecuación (18). Sean las mismas condiciones que en el Teorema 1. Entonces el sistema dado por (KKT 1) tiene solución, si se resuelve de manera independiente primero el sub-

sistema SS3 y una vez conocido  $(x^*, \lambda^*)$ , se resuelve el sub-sistema SS2 [7].

*Proposición 1.* Condición necesaria para  $\beta$ . Sea  $(x^*, \beta^*, t^*)$  un punto mínimo del problema (18), y sean las mismas condiciones que en el Teorema Punto Rodilla,  $\beta^* > 0$ , sí y sólo si, la elección del vector  $v$  en la expresión  $\hat{n} = -\phi v$

satisface 
$$\frac{e^T \phi^{-1}(F(x^*) - F^*)}{e^T \phi^{-1}(F(x^*) - F^*) - 1} < \frac{v}{e^T v}.$$

Siendo  $x^*$  el un punto rodilla [7].

*Lema 1.* Sea  $(x^*, \beta^*, t^*)$  un punto mínimo del problema MP o ecuación (18). Sean las mismas condiciones que en el Teorema Punto Rodilla, supóngase además que se satisface la condición  $e^T \phi^{-1}(F(x^*) - F^*) < 1$ . Entonces el vector  $\beta$  es positivo [7].

**Método de solución.** A continuación, se plantea el procedimiento del método propuesto:



1. Se deben determinar los puntos óptimos individuales. Con ayuda del programa GAMS, se realiza el algoritmo introduciendo los datos de cada función objetivo (puede utilizarse el Método de Lemke, u otro para problemas cuadráticos con restricciones lineales). Para esto cada una de las  $l$  –ésimas funciones deben escribirse para cada  $i = 1, \dots, l$  de la forma (Ec. 17).

$$f_i(x) = \frac{1}{2}x^T H_i x + L_i^T x + c_i$$

Nuestro interés son las matrices  $H_i, L_i, c_i$ . Así como las restricciones  $Ax \leq b, x \geq 0$ , donde  $A: m \times n, b: m \times 1, x: n \times 1$ . Este paso debe realizarse para cada una de las  $l$  funciones objetivo, las restricciones son las mismas para cada uno de los problemas de acuerdo con [7]. Determinar la matriz de pagos, que como se mencionó en la definición 4, es una

matriz cuadrada  $\phi, \phi \in M_{l \times l}$  y por el Teorema 1, será no singular.

2. Calcular un vector normal  $\hat{n} = -\phi e, e \in I_{l \times 1}$ , y con ello se calcule  $\phi \in M_{l \times l}; s = \frac{\hat{n}}{l} = \frac{-\phi e}{v^T e}$ . La elección anterior de  $\hat{n}$  cumple con las condiciones indicadas para  $n$  y  $s$ .

3. Calcule  $Q, W, C$ , de la expresión (Ec. 26), aplicando el mismo algoritmo que se utilizó en el paso 1, pero ahora con las matrices, obtenemos  $(x^*, \lambda^*)$ , lo cual resuelve el sub-sistema SS3.

4. Con los valores obtenidos de  $(x^*, \lambda^*)$  ya podemos resolver el sub-sistema SS2, el cual por conveniencia se reescribe como:

$$\begin{bmatrix} \phi & \phi \\ e^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ t \end{bmatrix} = F(x^*) - F^* \quad (Ec. 28)$$

Con lo cual se obtiene  $(\beta^*, t^*)$ , y con ellos se da solución al sistema KKT1 que es

nuestro objetivo para determinar el punto rodilla.

Los códigos utilizados en GAMS correspondientes a obtener los óptimos individuales se muestran en la **Figura 3**.

## DISCUSIÓN

Dado los resultados mostrados en el Teorema Punto Rodilla, se realizará una aplicación numérica considerando tres funciones objetivas cuadráticas, tres variables y cinco restricciones

$$\begin{aligned} \min f_1(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 8)^2 - 16 \\ \min f_2(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - 5)^2 + 3(x_2 - 2)^2 + 5(x_3 - 1)^2 - 7 \\ \min f_3(x_1, x_2, x_3) &= 2(x_1 - 3)^2 + 5(x_2 - 6)^2 + (x_3 - 0)^2 - 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s. a. } 30x_1 - 5x_2 + 3x_3 &\leq 60 \\ 7x_2 + x_3 &\leq 42 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 12 \\ x_2 + 2x_3 &\leq 20 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 31 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución. Dado el proceso propuesto se obtiene lo siguiente:

Paso 1. En la **Tabla 2**, se da la matriz de pagos asociada del problema.

**Tabla 2.** Puntos ideales y óptimos individuales del ejemplo.

	$f_1(x_i^*)$	$f_2(x_i^*)$	$f_3(x_i^*)$
$x_1^* = (1, 2, 5, 7, 5)$	-14.50	221.0	113.5
$x_2^* = (2, 26, 2, 15, 0, 95)$	36.562	0.569	64.012
$x_3^* = (3, 6, 0)$	58.0	50.0	-12

```

sets
    I variables /x1*x3/
    K restricciones /r1*r5/;
alias(I,J);
parameter C(I) coeficientes de la parte lineal de FOb
    / x1  -4
      x2  -6
      x3  -16 /
parameter Bmay(K)
    / r1  60
      r2  42
      r3  12
      r4  20
      r5  31/;
table H(I,J) coeficientes de la parte cuadratica de fl
      x1  x2  x3
x1    2   0   0
x2    0   2   0
x3    0   0   2
table Amay(K,J) coeficientes de las restricciones comunes con
mayor o igual
      x1  x2  x3
r1    30  -5   3
r2     0   7   1
r3     2   1   1
r4     0   1   2
r5     1   2   3 ;
variables      X(I)
              fl;
positive variable X;
equations
    FOb
    RestMay(K);
FOb..      fl =E= sum(I,C(I)*X(I))+0.5*sum((I,J),
X(I)*H(I,J)*X(J))+61;
RestMay(K)..      sum(J, Amay(K,J)*X(J)) =L= Bmay(K);
model Quad /all/;
solve Quad using NLP MINIMIZING fl;
display X.L, fl.L;
    
```

**Figura 3.** Algoritmo para óptimos individuales

```

sets
    I variables /x1*x3/
    K1 restricciones /r1*r5/;
alias(I,J);
parameter C1(I) coeficientes de la parte lineal de FOb
    / x1 -0.0424807
      x2 -0.1319933
      x3 -0.0730508/;
parameter B may(K1)
    / r1 60
      r2 42
      r3 12
      r4 20
      r5 31 /;
table H1(I,J) coeficientes de la parte cuadratica de fl
      x1      x2      x3
x1  0.0162174    0    0
x2  0          0.0284673    0
x3  0          0    0.01739606
table A may(K1,J) coeficientes de las restricciones comunes con mayor o igual
      x1      x2      x3
r1  30      -5    3
r2  0       7    1
r3  2       1    1
r4  0       1    2
r5  1       2    3 ;
variables      X(I)
              fl
              R(K1);
positive variable X;
equations
    FOb
    RestMay(K1)
    Residuo(K1);
FOb..      fl =E= sum(I,C1(I)*X(I))+0.5*sum((I,J), X(I)*H1(I,J)*X(J))+0.5865831;
RestMay(K1)..      sum(J, A may(K1,J)*X(J)) =L= B may(K1);
Residuo(K1)..      R(K1) =E= B may(K1)-sum(J, A may(K1,J)*X(J));
model Quad /all/;
solve Quad using NLP MINIMIZING fl;
display X.L, fl.L, R.L;
    
```

Figura 4. Algoritmo para resolver SS3

Paso 2. En la **Tabla 3**, se presentan de izquierda a derecha la matriz de pagos trasladada, el vector normal al CCMI y el vector  $s$ .

**Tabla 3.** Matriz de pagos trasladados, vector normal y vector auxiliar del ejemplo.

$$\begin{matrix} \phi \\ \begin{bmatrix} 0 & 49.062 & 72.5 \\ 220.431 & 0 & 49.431 \\ 125.5 & 76.0119 & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{n} \\ \begin{bmatrix} -121.56183 \\ -269.862 \\ -201.51194 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} s \\ \begin{bmatrix} 0.00421331 \\ 0.00056378 \\ 0 - 0016658 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Paso 3. En la Tabla 4, se presentan las componentes  $Q$ ,  $W$  y  $C$  para solucionar el sub-sistema 3.

Paso 4. El código que se utiliza en GAMS para resolver el SS3, se encuentra en la Figura 4. Se obtiene  $(x^*, \lambda^*)$ , que solo se muestra las componentes de  $(x^*)$  en la

**Tabla 4.**

**Tabla 4.** Componentes para el sub-sistema SS3 del ejemplo.

$$\begin{matrix} Q \\ \begin{bmatrix} 0.01621739 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02846732 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01739606 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} W \\ \begin{bmatrix} -0.04248068 \\ -0.13199326 \\ -0.07305079 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} C \\ [0.58658] \end{matrix}$$

Paso 5. Con el resultado del paso 4, en la **Tabla 5** se presenta el sistema de ecuaciones lineales dado por (28) expresado para este caso. Se obtiene la  $(x^*, \beta^*, t^*)$ , correspondientes a los primeros siete primeros renglones de la **Tabla 6**, y se determina el punto rodilla dadas por las coordenadas  $(f_1(x^*), f_2(x^*), f_3(x^*))$ , los cuales están dados en los últimos tres renglones de la misma tabla.

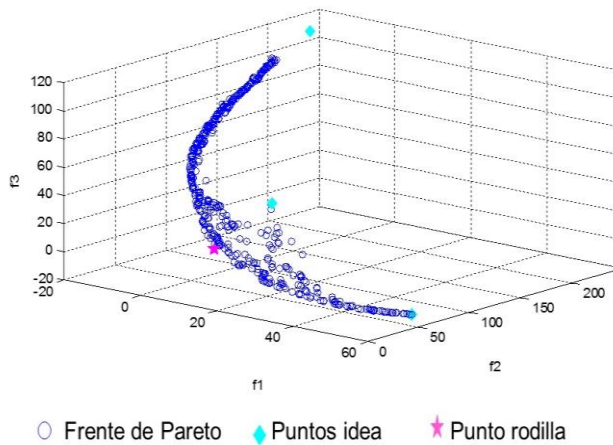
**Tabla 5.** Planteamiento del sub-sistema SS2 forma (28) del ejemplo.

$$\begin{bmatrix} 0 & 49.062 & 72.5 & -121.562 \\ 220.431 & 0 & 49.431 & -269.862 \\ 125.500 & 76.012 & 0 & -201.512 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.779 \\ 60.413 \\ 29.834 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Tabla 6.** Resultados del ejemplo.

	Óptimo
$x_1^*$	1.865
$x_2^*$	4.422
$x_3^*$	3.848
$\beta_1^*$	0.39748
$\beta_2^*$	0.19929
$\beta_3^*$	0.40324
$t^*$	0.17467
$f_1(x^*)$	3.2794
$f_2(x^*)$	60.9820
$f_3(x^*)$	17.8340

Comparando la exactitud de nuestro trabajo con el algoritmo NSGA-II, en la **Tabla 7** se presentan las distancias euclidianas entre el punto rodilla obtenido y puntos en una vecindad de él generado por NSGA-II, observando la calidad del método propuesto.



**Figura 5.** Gráfica del frente de Pareto, punto rodilla y puntos ideales del ejemplo.

En la **Figura 5**, se presentan los puntos ideales, el frente de Pareto y el punto rodilla obtenido para el ejemplo.

La distancia euclidiana para este ejemplo es utilizando la fórmula  $d = \frac{|Ax_i + By_i + Cz_i + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ , entre el hiperplano (CCMI) y puntos especificados  $(x_i, y_i, z_i)$  del frente de Pareto.

Se observa en la **Tabla 7**, de nuevo que el punto rodilla obtenido por nuestro método tiene la mayor distancia que cualquiera de la vecindad tomada por NSGA-II.

**Tabla 7.** Distancia entre frente de Pareto y CCMI del ejemplo.

$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Distancia
<b>2.5063</b>	75.9482	29.6202	41.6526992
<b>2.6291</b>	97.3922	22.5756	38.625565
<b>2.8297</b>	93.7184	23.6846	38.98366243
<b>2.964</b>	73.6611	29.7716	41.5346826
<b>3.2339</b>	93.9071	22.5743	38.5324887
3.2794	<b>60.982</b>	<b>17.834</b>	<b>42.9611766</b>
<b>3.307</b>	72.8997	30.0054	41.3168828
<b>3.4193</b>	101.645	22.0166	37.3080497
<b>3.443</b>	72.1432	30.0205	41.2922609
<b>3.491</b>	74.4073	26.4737	40.9398423
<b>3.5907</b>	97.5379	21.3083	37.7052962

## CONCLUSIONES

El presente trabajo propone una técnica general para determinar los puntos rodillas en problemas de optimización multi-objetivo cuadráticos, con un conjunto de restricciones lineales. La técnica está basada en las condiciones de optimalidad de KKT desarrolladas específicamente para determinar el punto rodilla. Se observa que el punto deseado puede obtenerse resolviendo dos sub-sistemas consecutivos. El primer sub-sistema se utiliza para determinar el óptimo de Pareto (cuya imagen correspondiente es el punto rodilla) y sus multiplicadores asociados a las restricciones del problema,  $(x^*, \lambda^*)$ . La solución de este problema tiene la ventaja que las condiciones KKT se pueden expresar como las de un problema de optimización cuadrática mono-objetivo, al cual se le aplican técnicas numéricas ya conocidas. Una vez conocidas  $(x^*, \lambda^*)$  el

segundo sub-sistema tiene la ventaja de ser un sistema de ecuaciones lineales al cual se le pueden aplicar técnicas conocidas. Adicionalmente se establecen condiciones para garantizar que los valores obtenidos del segundo sub-sistema pertenecen al CCMI. Al comparar nuestro resultado con el obtenido por el algoritmo NSGA-II para el frente de Pareto, se encuentra que la calidad de nuestra propuesta lo supera, encontrando soluciones de mejor calidad y en un tiempo considerablemente corto.

## AGRADECIMIENTOS

Por este medio y espacio se agradece en amplitud la colaboración del Dr. Javier García-Gutiérrez, dado que es uno de los asesores para la Tesis, la cual se realizó en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de México. Así, agradezco el apoyo académico a la directora Dr. Reyna Vergara directora de la Facultad de

Economía de la Universidad Autónoma del Estado de México. También agradezco al COMECyT por el apoyo brindado para este artículo.

## REFERENCIAS

- [1] Das, I. (1999). On characterizing the knee of the Pareto curve based on Normal-Boundary Intersection, *Structural Optimization*, 18 (2-3), 107-115.
- [2] Coello, C. (2012). Introducción a la optimización Multiobjetivo Usando Metaheurísticas. Departamento de computación Centro de Investigación y Estudios Avanzados en el Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN), Mexico, <http://delta.cs.cinvestav.mx/~ccoello/cursoemoo/clase5-emoo-2012.pdf>. Fecha de consulta el 15 de agosto de 2018.
- [3] Zhou, A. *et al.* (2011). "Multi-objective evolutionary algorithms: a survey of the state of the art". *Swarm and Evolutionary Computation*, 1, 32-49.
- [4] Shukla, P. K. (2007). "On the Normal Boundary Intersection Method for Generation of Efficient Front". *ICCS International Conference on Computational Science*, Parte I, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 310-317.
- [5] Miettinen, K. (2012). *Nonlinear Multi-objective Optimization*, 4 ed., Springer Science+Business Media, Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, New York.
- [6]. Ganesan, T., Elamvazathi I., Vasant, P. (2013). "Normal-Boundary intersection based parametric multi-objective optimization of green sand mould system". *ELSIVER Journal Of Manufacturing Systems*, 32, 197-205.
- [7] Almazán, E., Gaytan, J., y García, J. (2014). *Determinación de puntos de rodilla para problemas de optimización cuadrática multi-objetivos*. Tesis de Maestría en Ingeniería en Análisis de Decisiones. Universidad Autónoma del Estado de México, Facultad de Ingeniería.
- [8] Bazaraa, M., Sherali, H. D., Shetty, C. M. (2013). *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms*. 3 ed., John Wiley & Sons.
- [9] Branke, J., Deb, K., Dierolf, H., Osswald, M. (2004). "Finding knees in multiobjective optimizations". *Parallel Problem Solving from Nature (PPSN VIII), Lecture Notes in Computer Science*, Springer Verlag, Birmingham, UK, 3242, 722-731.
- [10] Rachmawati, L., Srinivasan, D. (2009). "A multi-objective evolutionary algorithm with controllable focus on the knee of the Pareto Front". *IEEE Transactions Evolutionary Computation*, 13 (4), 810-824.



- 
- [11] Deb, K., Gupta, S. (2011). "Understanding Knee points in Bicriteria Problems and Their Implications as Preferred Solution Principles". *Journal Engineering Optimization*, 43, 1175-1204.
- [12] Gaytán, J. García, J. (2009) "Multicriteria decisions on interdependent infrastructure transportation projects using an evolutionary-based framework". *Applied Soft Computing*, 9, 512-526.
- [13] Das, I., Dennis, J. (1998). "Normal-Boundary intersection: a new method for generating the Pareto suace in mult-criteria optimization problems". *SIAM Journal on Optimazation*, 8, 631-657.
- [14] Martínez Salazar, Iris A., Vértiz Camarón, Gastón., et. al. (2014) *Investigación de Operaciones*. 1ra edición, Grupo Editorial Patria
- [15] Ecker, J. G., Kupferschimd, M. (2004). *Introduction to Operations Research*. John Wiley & Sons, New York.