

MODELO MATEMATICO DE CONVOLUCION Y EL PATRON DE DIFRACCION**MATHEMATIC MODEL OF CONVOLUTION AND THE PATTERN OF DIFFRACTION**

Andrés-Zárate E^{1*}, Angulo-Córdova Q.¹, Gutiérrez-Tepach G.¹, Hernández-Nolasco J. A.².

^{1*} Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, DACB, Carretera Cunduacán-Jalpa KM. 1. Col. La Esmeralda CP. 86690 Cunduacán, Tabasco, México.

² Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, DAIS.

¹esteban.zarate@ujat.mx

RESUMEN

El objetivo del trabajo presentado fue el de determinar un modelo matemático de difracción, en la región de Fresnel convergente y otro en el plano de Fraunhofer o de enfoque de una lente esférica. Usando el método de propagación del espectro angular, se determinaron los modelos matemáticos de difracción óptica asociados a la distribución de amplitud del campo de ondas monocromáticas, difractado por dos aberturas circulares de diámetros diferentes. De forma teórica se obtuvo un modelo matemático de difracción de convolución en la región de Fresnel convergente y un modelo matemático de transformada de Fourier, en el plano focal, los cuales fueron corroborados de forma experimental. La información generada en este trabajo abre nuevas expectativas de aplicación para la óptica difractiva.

PALABRAS CLAVE: Convergente, Focal, Intensidad, Fresnel, Fraunhofer.

ABSTRACT

The objective of the work submitted was to determinate a mathematical model of diffraction into the Fresnel convergent region and other into the plane of Fraunhofer or the focus of a spherical lens. Using the angular spectrum propagation method the mathematical models of optical diffraction associated with the amplitude of the

distribution of the monochromatic wave's field were determined diffracted by two apertures with different diameters. Theoretically, the results obtained were a mathematical model on diffraction of convolution in the Fresnel convergent region and a mathematical model of de Fourier transform into the focal plane, which were corroborated in the experimental way. The information generated in this work gives us new expectations of the application of the diffractive optics.

KEYWORDS: Convergent, Focal, Intensity, Fresnel, Fraunhofer.

INTRODUCCIÓN

La importancia de este trabajo radica en la forma de determinar los modelos matemáticos de la distribución del campo de difracción de ondas monocromáticas de luz laser de HeNe, propagado desde el plano objeto, hasta el plano de distribución haciendo uso de un doblete cementado como lente esférica. Para tal fin, se usó el método de propagación del espectro angular.

En óptica difractiva, continuamente se trabaja en la determinación de modelos matemáticos, que permitan interpretar el problema de difracción de luz coherente como el mapeo de la distribución de

amplitud del campo óptico en algunas regiones del espacio, asociado a este problema, es de gran importancia describir la distribución de amplitud del campo difractado, caracterizada por la función de transmitancia $t(x,y)$ asociada a una abertura u objeto difractor en planos de la región convergente, divergente y focal de una lente esférica.

En óptica difractiva, existen diferentes métodos para el análisis de propagación de campos ópticos, uno de los métodos más usados es la propagación del espectro angular. Martínez *et al*, [1] hicieron uso del método antes referido y una lente esférica delgada simple como

propagadora del campo de difracción. La desventaja que tiene el uso de una lente simple es que deforma el frente de onda que incida sobre ella, es decir produce aberraciones y se tiene que crear un modelo matemático de propagación del campo difractado que contenga una función de aberración. En este trabajo el desarrollo del campo difractado y su propagación, se realizó mediante el uso de un doblete cementado, que posee una función de transmitancia sin aberraciones, lo cual no se puede proponer para una lente delgada simple.

Zárate [2], realizó el estudio de propagación del campo difractado por dos aberturas de radios con igual magnitud, hasta la región de Fraunhofer o plano de enfoque de un doblete cementado como lente transformadora, usando el método de propagación del espectro angular. En tanto que, Zárate

et al, [3], realizaron un análisis de propagación hasta el plano de enfoque o de Fraunhofer de un doblete cementado como lente transformadora, además presentaron imágenes de patrones de difracción generados de forma experimental, en las cuales no se aprecia la geometría elíptica de franjas de máxima y mínima intensidad, ni se analiza la propagación del campo de difracción hacia las regiones convergente de la lente transformadora.

En el trabajo de Quintero *et al*, [4], se estudiaron los efectos de difracción e interferencia producidos por una estructura compuesta de múltiples aberturas circulares idénticas, no reportan análisis de propagación, ni presentan un modelo matemático de difracción, ya que el trabajo lo realizaron sin el uso de lente transformadora. Por su parte Sheppard y Hrynevych, [5] realizaron el estudio de difracción por

una abertura circular, en el que propusieron una generalización a la teoría de difracción de Fresnel, a través de una aproximación por variación paraboidal en vez de una variación binominal en los términos de fase de la ecuación de difracción de Fresnel

METODOLOGIA

El estudio de patrones de difracción y su propagación, se realizó en el laboratorio de Óptica de la División Académica de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco; en el mes de noviembre de 2016 en dos etapas, la primera fue la teórica y la segunda etapa consistió en un desarrollo experimental. Etapa teórica: El modelo matemático de difracción fue generado de acuerdo con el arreglo ilustrado de la **Figura 1**, centrando el análisis de propagación del campo difractado por las dos aberturas circulares colocadas en el plano x_0y_0 , de

radios a_1 y a_2 de diferentes magnitudes, iluminadas con ondas planas monocromáticas de amplitud constante E_0 . La función de transmitancia que se le asocia al par de aberturas como objeto difractor es,

$$t_0(x_0, y_0) = \frac{l_z \text{circ}(r_0 - l_1)}{a_1} + \frac{l_z \text{circ}(r_0 - l_2)}{a_2}, \quad \text{cuyo}$$

espesor es l_z y r_0 en coordenadas polares queda definido como $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ [6].

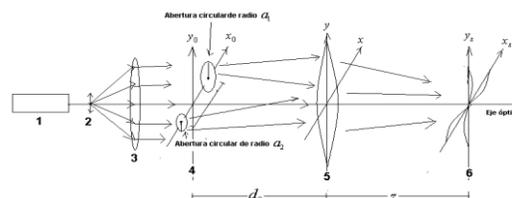


Figura 1. Procesador de Fourier para producir modelos matemáticos de difracción: (1) láser de He-Ne, (2) filtro espacial, (3) colimador, (4) objeto difractor, (5) lente doblete cementada o transformadora, (6) plano de distribución del campo difractado.

La distribución de amplitud del campo de ondas monocromáticas difractadas por el objeto y distribuidas en el plano x_0y_0 , está dado por la ecuación (1).

$$E_1(x_0, y_0)E_0t_0(x_0, y_0) = E_0[l_z \text{circ}\left(\frac{r_0 - l_1}{a_1}\right) + l_z \text{circ}\left(\frac{r_0 + l_1}{a_2}\right)] \dots \dots \dots (1)$$

La distribución de amplitud del campo propagado hasta el plano $xzyz$, en el que se distribuye, se obtiene mediante la ecuación dos [3], en la que se ha usado como condición inicial, que el objeto difractor esté colocado a la distancia d_0 , la cual es la misma que la longitud focal de la lente transformadora ($d_0=f_{LD}$), además de considerar el teorema de la transformada de Fourier del producto de funciones, es decir la convolución de transformadas de Fourier representada por el símbolo \otimes [7]:

$$G_{zC}(u, v) = e^{ik[f_{LD}+z+n_{L1}\Delta_{L1}+n_{L2}l]} \left(\frac{E_0 f_{LD}}{f_{LD}-z} \right) \cdot [l_z [a_1^2 e^{-i2\pi l_1 u} \left(\frac{J_1(2\pi a_1 w)}{w} \right) + a_2^2 e^{-i2\pi l_1 u} \left(\frac{J_1(2\pi a_2 w)}{w} \right)]] \otimes e^{-\frac{i\pi \lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(u^2+v^2)} \left(u = \frac{x_z}{\lambda f_{LD}}, v = \frac{y_z}{\lambda f_{LD}} \right) \dots \dots \dots (2)$$

Etapa Experimental: La evaluación de los resultados teóricos se realizó de forma cualitativa a base de imágenes de los patrones de difracción en distribución de intensidad. Los experimentos se desarrollaron

empleando el sistema óptico de la **Figura 2**, el cual está en relación directa con el esquema de la figura 1. El haz de luz de laser de He-Ne ($\lambda=632\text{nm}$) ampliado y filtrado con objetivo de microscopio 40X y pinhole de $50 \mu\text{m}$, fue colimado con lente doblete acromático de 50 cm de distancia focal. Como objeto difractor, se tomaron dos aberturas circulares cuya imagen se muestra en la **Figura 3**, con diámetros $d_1=2.0\text{mm}$ y $d_2=3.0\text{mm}$, contenidas en material laminado de plástico con $l_z=2.0\text{mm}$ de espesor. Como lente transformadora se usó un doblete acromático cementado de 25 cm de distancia focal. Las imágenes de cada patrón de difracción en intensidad, se grabaron usando cámara digital de alta velocidad y precisión, con sensor CMOS y 18.0 mega-pixeles.

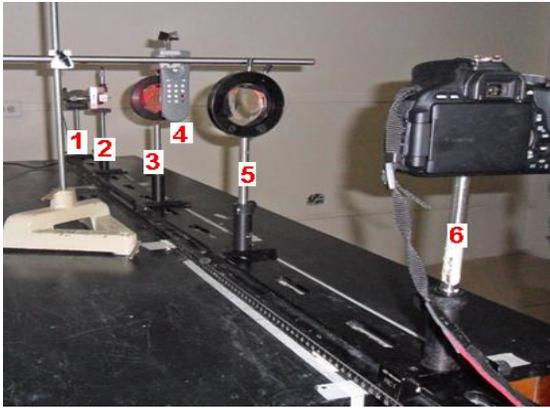


Figura 2. Arreglo experimental.



Figura 3. Aberturas con radios de diferentes magnitudes.

RESULTADOS

Resultados Teóricos: La ecuación dos establece que: el patrón de difracción $G_{zC}(u, v)$ se ha propagado hasta la región de Fresnel (convergente) situada en el intervalo de distancia $0 < z < f_{LD}$ del lente doblete cementado. Usando la transformada de Fourier de la función de transmitancia $t_0(x_0, y_0)$ ecuación uno; el teorema de linealidad, escalamiento y

desplazamiento, además de la propiedad conmutativa de la convolución [7]; a través de un proceso de integración la ecuación dos se reescribe para esta región de Fresnel convergente en la forma dada por la ecuación tres. En esta ecuación, el desfase que ha sufrido el campo propagado desde el plano objeto x_0y_0 hasta el plano $xzyz$ en el intervalo, es de $\pi/4$.

$$G_z(u, v) = \frac{2l_z E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta L_1 + n_{L2}\Delta L_2]} e^{\frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \cos^2 \theta}{\lambda f_{LD}^2}}}{\sqrt{\lambda (f_{LD} - z)}} e^{-i\frac{\pi}{4}} * \left[a_1^2 e^{-i2\pi l_1 u \frac{J_1(2\pi a_1 w)}{w}} + a_2^2 e^{i2\pi l_1 u \frac{J_1(2\pi a_2 w)}{w}} \right] \dots (3)$$

La distribución de intensidad en la región de Fresnel (convergente) de la lente transformadora es:

$$I_z(u, v) = \left[\frac{2(E_0 l_z f_{LD})^2}{\lambda (f_{LD} - z)} \right] \left[a_1^3 \left\langle \frac{a_1 J_1(2\pi a_1 w)}{w} \right\rangle^2 + 2a_1^2 a_2^2 \frac{(\pi a_1 w)(\pi a_2 w)}{(\pi a_1 w + \pi a_2 w)} \cos(4\pi l_1 u) \left\{ \left[\frac{2J_0(2\pi a_1 w)}{J_1(2\pi a_2 w)} \right] + [2J_1(2\pi a_1 w)J_0(2\pi a_2 w)] \right\} - 2a_1^2 a_2^2 \frac{(\pi a_1 w)(\pi a_2 w)}{(\pi a_1 w + \pi a_2 w)} \cos(4\pi l_1 u) [J_1(2\pi a_1 w + 2\pi a_2 w)] + a_2^3 \left[\frac{a_2 J_1(2\pi a_2 w)}{w} \right]^2 \right] \dots (4)$$

La ecuación cuatro, se ha simplificado haciendo uso de la ecuación cinco para el producto de funciones Bessel $J_1(2\pi a_1 w) J_1(2\pi a_2 w)$, [8], [2]; En la que se ha considerado que los términos definidos por la sumatoria ecuación seis, no aportan información relevante a la distribución de intensidad por lo cual no se toman en cuenta.

$$J_1(2\pi a_1 w) J_2(2\pi a_2 w) = \frac{(\pi a_1 w)(\pi a_2 w)}{(\pi a_1 w + \pi a_2 w)} * [2J_0(2\pi a_1 w) J_1(2\pi a_2 w) + 2J_1(2\pi a_1 w) J_0(2\pi a_2 w)] - \frac{(\pi a_1 w)(\pi a_2 w)}{(\pi a_1 w + \pi a_2 w)} [J_1(2\pi a_1 w + 2\pi a_2 w)] + \frac{(\pi a_1 w)(\pi a_2 w)}{(\pi a_1 w + \pi a_2 w)} \sum_{s=2}^{\infty} (-1)^s [J_s(2\pi a_1 w) J_{1+s}(2\pi a_2 w) + J_{1+s}(2\pi a_1 w) J_s(2\pi a_2 w)] \dots \quad (5)$$

$$\sum_{s=2}^{\infty} (-1)^s [J_s(2\pi a_1 w) J_{1+s}(2\pi a_2 w) + J_{1+s}(2\pi a_1 w) J_s(2\pi a_2 w)] \dots \quad (6)$$

Para el caso en que el campo difractado se ha propagado hasta el plano focal o de Fraunhofer, la distancia z del doblete cementado al plano de distribución del campo, es igual a la distancia focal de la lente, además se tiene que la distribución de amplitud del campo está

definido por la ecuación siete, y desfasado en $\pi/2$.

$$P_{fLD}(u, v) = \frac{l_z E_0 e^{ik[l_{fLD} + z + n_{L1} \Delta L_1 + n_{L2} \Delta L_2]}}{i \lambda f_{LD}} [a_1^2 e^{-2\pi l_1 u} \left(\frac{J_1(2\pi a_1 w)}{w} \right) + a_2^2 e^{+2\pi l_1 u} \left(\frac{J_1(2\pi a_2 w)}{w} \right)] \quad (u = \frac{xz}{\lambda f_{LD}}, v = \frac{yz}{\lambda f_{LD}}) \dots \dots \dots (7)$$

Mientras que la distribución de intensidad es

$$I_{fLD}(u, v) = \left[\frac{E_0 l_z}{\lambda f_{LD}} \right]^2 [a_1^3 \left(\frac{a_1 J_1(2\pi a_1 w)}{w} \right)^2 + 2a_1^2 a_2^2 \frac{(\pi a_1 w)(\pi a_2 w)}{(\pi a_1 w + \pi a_2 w)} \cos(4\pi l_1 u) \{ [2J_0(2\pi a_1 w) J_1(2\pi a_2 w)] + [2J_1(2\pi a_1 w) J_0(2\pi a_2 w)] \} - 2a_1^2 a_2^2 \frac{(\pi a_1 w)(\pi a_2 w)}{(\pi a_1 w + \pi a_2 w)} \cos(4\pi l_1 u) [J_1(2\pi a_1 w + 2\pi a_2 w)] + a_2^3 \left[\frac{a_2 J_1(2\pi a_2 w)}{w} \right]^2] \dots \dots \dots (8)$$

La ecuación ocho se ha simplificado haciendo uso de la ecuación cinco, sin tomar en cuenta la sumatoria de los productos de las funciones Bessel ecuación seis.

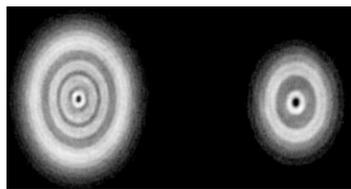
Resultados Experimentales: En la región de Fresnel (convergente) situada en el intervalo de distancia $0 < z < f_{LD}$ de la lente transformadora, se obtiene la convolución de los patrones de

difracción, cuantitativamente los podemos relacionar con los valores exactos dados por la ecuación cuatro La figura 4a, 4b y 4c muestran la distribución de intensidad, de los campos de difracción de convolución grabados a diferentes distancias ver (Tabla 1), puede observarse que el patrón de difracción está formado por franjas elípticas con distribución tipo Bessel modulando franjas de Young. Las imágenes fueron generadas cuando los centros geométricos de las aberturas circulares figura 3, se orientaron paralelas al eje x_0 del plano objeto. La figura 4a, muestra mínimos de intensidad centrales en cada patrón, se establece que es más dominante la función de Bessel de orden uno en el producto con la función de Bessel de orden cero a la distancia $z=22cm$ de propagación. Mientras que a la distancia de propagación $z=23cm$ y $z=24cm$, la función de Bessel de orden cero es la

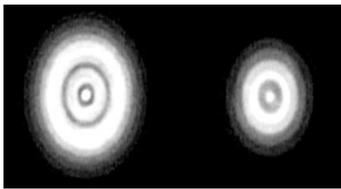
dominante en el producto dando máximos centrales de difracción ver Figuras 4b y 4c. Se observa que conforme se acerca el plano de grabado a la distancia focal de la lente transformadora los máximos centrales en cada patrón se amplifican figura 4c.

Tabla 1. Distancia objeto lente y lente plano de grabado, centros geométricos paralelos al eje x_0 .

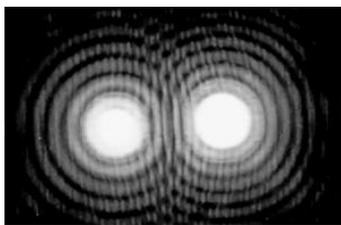
Distancia lente objeto difractor d_0 .	Distancia lente plano de grabado z	Número de imagen
25cm	22cm	4a
25cm	23cm	4b
25cm	24cm	4c



a



b



c

Figura 4. a), b) y c) Patrones de difracción de convolución grabados en zona de Fresnel convergente.

La figura 5a y 5b muestran la distribución de irradiancia, de los campos de difracción de convolución grabados a diferentes distancias de la lente transformadora ver (Tabla 2), cuantitativamente los podemos relacionar con los valores exactos dados

por la ecuación cuatro y se consideran derechos, en la región de Fresnel (convergente), puede observarse que el patrón de difracción está formado por franjas elípticas con distribución tipo Bessel modulando franjas de Young **Figura 5b**. Las imágenes, fueron generadas cuando los centros métricos de las aberturas circulares, se orientaron paralelas al eje y_0 del plano objeto. La imagen de la **Figura 5a**, muestra un máximo y un mínimo de intensidad centrales en cada patrón, se establece que en el patrón superior es más dominante la función de Bessel de orden cero que la función de Bessel de orden uno, en el producto con la función de Bessel a la distancia $z=20cm$; mientras que en el patrón de difracción inferior es dominante la función de Bessel de orden uno más que la de orden cero en el producto de acuerdo a la ecuación cuatro. A la distancia de propagación $z=24cm$, la función de

Bessel de orden cero es la dominante en el producto generando máximos centrales de difracción ver figuras 4b, de esta imagen se observa que conforme se acerca el plano de grabado a la distancia focal de la lente transformadora los máximos centrales en cada patrón de difracción se amplifican.

Tabla 2. Distancia objeto lente y plano de grabado, centros geométricos paralelos al eje y_0 .

Distancia lente objeto difractor d_0 .	Distancia lente plano de grabado z .	Número de imagen
25cm	20cm	5a
25cm	23cm	5b

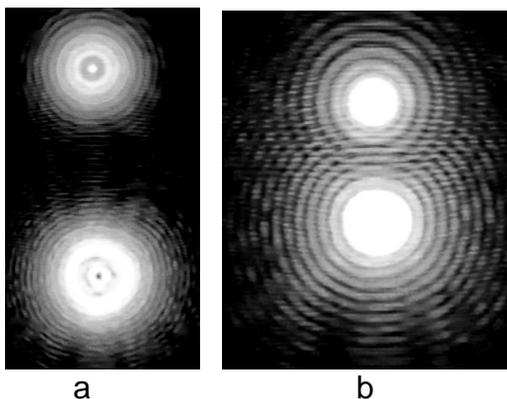


Figura 5 a, b Patrones de difracción de convolución grabados en la región de Fresnel convergente.

En el plano focal, de Fraunhofer o de la transformada de Fourier, situado a la distancia $z=25cm$ de la lente transformadora, se grabaron los patrones de difracción, los cuales se muestran en las **Figuras 6 y 7**. La imagen de la **Figura 6** corresponde al patrón de difracción de franjas elípticas, producido por las dos aberturas circulares con centros de curvatura orientados en el eje x_0 del plano objeto, modulando franjas verticales de Young. Por la forma en que la lente hace converger la información, las franjas elípticas de máxima y mínima intensidad, quedan orientadas hacia el eje v en el espacio de frecuencias espaciales. La imagen de la **Figura 7**, muestra el patrón de difracción de transformada de Fourier, producido por el mismo par de aberturas circulares, con centros de curvatura orientados hacia el eje y_0 del plano objeto, en este caso las franjas elípticas están

orientadas hacia el eje u en el espacio de frecuencias, también modulando franjas horizontales de Young.

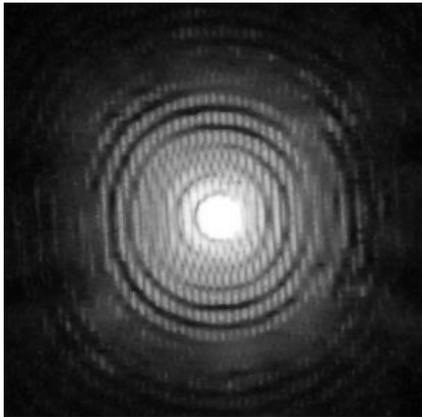


Figura 6. Patrón de difracción de transformada de Fourier.

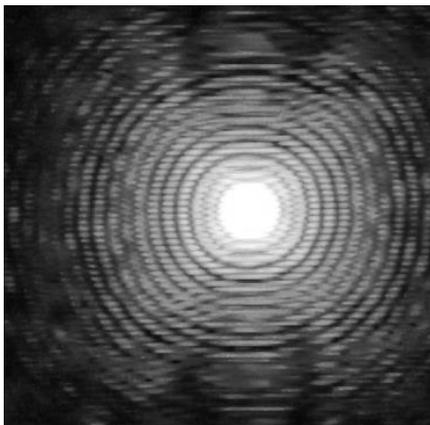


Figura 7. Patrón de difracción de transformada de Fourier.

DISCUSIÒN

Las imágenes de los patrones de difracción de la figura 4 y los de la figura 5, son los más representativos. Los

resultados de tipo experimental mostrados en las figuras 5a y 5b refuerzan, lo publicado por Zárate *et al*, [3,] referente a las imágenes de transformada de Fourier, en ellas se hace evidente la forma elíptica del patrón de difracción.

CONCLUSIÒN

Los modelos matemáticos de convolución de transformadas de Fourier ecuaciones cuatro y siete, permiten establecer que: las funciones de Bessel de orden uno son las dominantes en los productos para generar los mínimos de intensidad de la figura 4a; mientras que las funciones de Bessel de orden cero son dominantes para generar los máximos de irradiancia central imágenes 4b y 4c. Por lo que se refiere a la imagen 4a se observa que a la distancia que fue grabada², se alternan tanto la función de Bessel de orden uno, como la de orden cero en los

productos, para producir de manera simultánea un mínimo y un máximo de irradiancia centrales.

El desfaseamiento del campo de difracción, que se propaga desde el objeto hasta la región convergente de Fresnel, no es de la misma magnitud que la que posee el campo de difracción distribuido en el plano focal o de Fraunhofer.

REFERENCIAS

- [1] Martínez-Niconnoff G., Muñoz-López J., Méndez-Martínez E., (2001) Description of phase singularities and their application to focusing design, J. Opt. Am. A. Vol. 18, 2089-2094.
- [2] Zárate, E. A. (2011). Estudio de patrones de difracción en la Evaluación de Aberturas. *Tesis Doctoral*. Santa María Tonantzintla, Puebla, México: INAOE..
- [3] Zárate-Andrés E, Angulo-Córdova Q., Hernández-Nolasco J. A., Gutiérrez-Tepach G., Treviño-Palacios C. G., (2013) Elliptical Bassel-likediffraction pattern produced by circular apertures white different radius, Pro. of SPIE, Vol. 8785, 1-6.
- [4] Quintero-Orlando., Freddy-Barrera J., Henao-Rodrigo, Medina-Francisco, (2006), Prevailing effects of interference or diffraction by multiple apertures, Optics Communications, Vol. 206, 558-561. .
- [5] Sheppard-C. J. M., Hrynevych-M, (1992), Diffraction by a circular aperture ageneralization of Fresnel diffraction theory, J. Opt. Am. A, Vol. 8, No. 2, 274-281.
- [6] Goodman J. W. Introduction to Fourier Optics, 3^a ed. McGraw Hill (2005).
- [7] Gaskil Jack D., (1978), Linear systems Fourier transforms and optics, John Wiley and Sons, United States of America.
- [8] Hayek-S. I., (2001), Advanced mathematica ,ethods in science and engineering Weber, Marcel Dekker, Germany.

