Journal of Basic Sciences, Vol. 2 (4), **Enero**-Abril **20**16

Entropía topológica de funciones multimodales

D. González Martínez[1,*], G. Blé González

[1]División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tabasco, México
*mingo_89gon@hotmail.com

En este trabajo se analizan algunas de las propiedades de la entropía topológica de sistemas generados por funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Además, se muestran resultados numéricos obtenidos a partir de la implementación de un algoritmo basado en el número de doblez de las iteradas de la función.

This paper discusses some properties of the topological entropy systems generated by continuous functions on the interval $[a, b]$. In addition, numerical results are shown from implementation of an algorithm based in the lap number function.

Palabras clave: Entropía, itinerarios, número de doblez.
Keywords: Entropy, kneading sequences, lap number.

Introducción

El concepto de entropía fue introducido por el Físico-Matemático Clausius Rudolf Emmanuel en 1865, y establece que la energía no sólo puede medirse en cantidad, sino también en calidad; a mayor entropía, menor calidad de la energía y mayor tendencia al caos.

En matemáticas, este concepto fue introducido con la finalidad de medir la complejidad de un sistema. Usando la similitud con la física, se propone que el incremento en el desorden de las órbitas de un sistema tenga asociado el incremento de su entropía, por lo que un sistema se dice que es caótico cuando éste tiene entropía positiva. Para calcular la entropía de un sistema de órbitas generado por las iteradas de una función, se han desarrollado diferentes herramientas a partir de los itinerarios de los valores críticos de la función, [3, 2, 5]. En este trabajo se define y se presentan algunas de las propiedades de la entropía topológica de funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Además, se muestran resultados numéricos obtenidos a partir de la implementación en MATLAB de un algoritmo propuesto por [1], el cual está basado en el número de doblez de las iteradas de la función.

*[*] **Dirección postal**: Carr. Cunduacán-Jalpa Km 1, Cunduacán Tabasco, México. A.P. 24 C.P. 86690. Tel.(+52)914 336-0928. **Correo electrónico**: mingo_ 89gon@hotmail.com

Recibido: 17 agosto 2015. Aceptado: 08 noviembre 2015. Publicado: 01 enero 2016.

1. Funciones multimodales

Definición 1.1. Una función continua $f : I = [a, b] \to I$, es *m-modal* si existe una sucesión de puntos

$$a = c_0 < c_1 < ... < c_m < c_{m+1} = b,$$

tal que f es estrictamente monótona en cada intervalo $[c_i, c_{i+1}]$ y alternadamente creciente, decreciente en esos intervalos.

Al número $m + 1$ se le llama *número de doblez* de f y se denota por $\ell(f)$[1].

Sea σ una sucesión alternada de signos. Una función *m-modal* tiene la forma σ, si f restringido a $[c_j , c_{j+1}]$ es creciente cuando $\sigma_j = 1$ o es decreciente cuando $\sigma_j = -1$. Si f es diferenciable, σ_j se identifica con el signo de $f'(x)$ para $x \in (c_j , c_{j+1})$. Se dice que f tiene forma positiva (negativa), si es creciente (decreciente) en $[a, c_1]$.

En la figura 1 se muestra la gráfica de una función *4-modal*, con forma positiva y $\ell(f) = 5$.

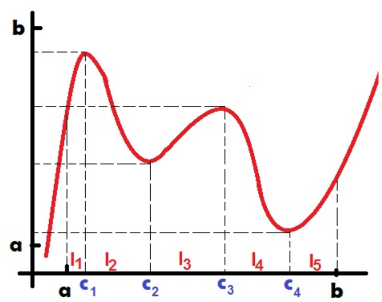

Figura 1. Gráfica de una función 4-modal

Definición 1.2. Se dice que una función $m-$modal $f : I \longrightarrow I$ es de **frontera anclada**, si $f(\{a, b\}) \subseteq \{a, b\}$.

En la figura 2 se muestran los cuatro casos posibles de gráficas de funciones $m-$modales con frontera anclada. El caso m impar corresponde a las dos gráficas del centro y el caso m par a las gráficas de los extremos.

Para definir el itinerario de una función $f : I \to I$ $m-$modal con $c_1, c_2, \cdots , c_m$ puntos de doblez, particionemos el intervalo I en $2m + 1$ conjuntos con interior disjuntos

$$I = I_0 \cup C_1 \cup I_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_m \cup I_m,$$

donde C_j es el conjunto $\{c_j\}$ y los conjuntos

$$I_0 = [a, c_1),\ I_1 = (c_1, c_2), ...,\ I_m = (c_m, b],$$

[1] del inglés *lap number*

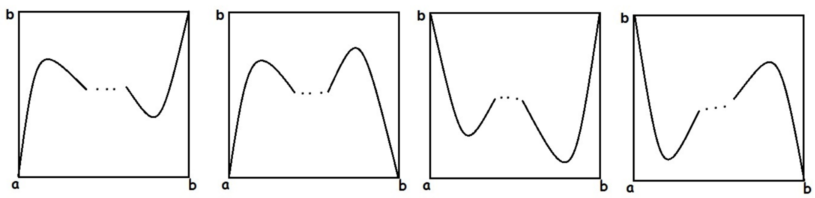

Figura 2. Funciones de frontera anclada

son las componentes conexas de

$$I - \bigcup_{i=1}^{m} C_i,$$

donde la función f no cambia de monotonía.

Ahora tomemos los $C_j's$ y los $I_j's$ como símbolos abstractos y formemos el conjunto

$$\mathfrak{U} = \{I_0, C_1, I_1, C_2, ..., C_m, I_m\}.$$

Definimos un orden natural en $\mathfrak{U}$

$$I_0 < C_1 < I_1 < C_2 < ... < C_m < I_m.$$

Definición 1.3. El itinerario de un punto $x \in I$ se define como la sucesión de símbolos $\{A_k(x)\}$ en $\mathfrak{U}$ tal que

$$A_k(x) = \begin{cases} I_j, & \text{si } f^k(x) \in I_j, \\ C_j, & \text{si } f^k(x) = c_j. \end{cases}$$

Donde $f^k = f \circ f \circ ... \circ f$ denota la composición de f consigo misma k veces.

Ejemplo 1.4. Sea $f(x) = 3x(1-x)$ la función logística de parámetro 3. f tiene la forma $\sigma = (+,-)$ y su único punto crítico es $x = \frac{1}{2}$. Por lo tanto $\mathfrak{U} = \{I_0, C_1, I_1\}$ con $I_0 = [0, \frac{1}{2}),\ I_1 = (\frac{1}{2}, 1], C_1 = \{\frac{1}{2}\}$. Si $x_0 = 0.1$, entonces

$$I(x_0) = I_0 I_0 I_1 I_1 I_1 \ldots,$$

como se muestra en la figura 3.

Definiremos un orden parcial $\preceq$ en $\mathfrak{U}^{\mathbb{N}}$, apoyándonos del orden natural de $\mathfrak{U}$, y de una función $\epsilon : \mathfrak{U} \longrightarrow \{-1, 0, +1\}$ que se define de acuerdo a la forma σ de la función $m-$modal, como sigue

$$\epsilon(v) = \begin{cases} \sigma_j, & \text{si } v = I_j \\ 0, & \text{si } v = C_j. \end{cases}$$

Sean $A = (A_0, A_1, A_2, ...)$ y $B = (B_0, B_1, B_2, ...)$ sucesiones en $\mathfrak{U}^{\mathbb{N}}$. Diremos que $A \prec B$ si existe un entero k tal que

$$A_i = B_i \quad \text{para} \quad i < k,$$

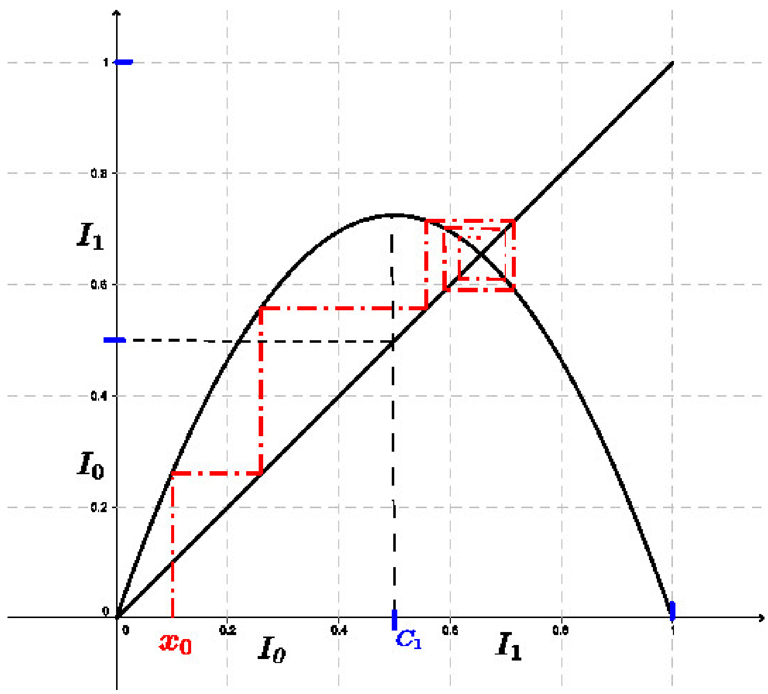

Figura 3. Itinerario para x_0

y

$$A_k < B_k \quad \text{si} \quad \epsilon(A_0)\epsilon(A_1)...\epsilon(A_{k-1}) = +1, \text{ o}$$
$$A_k > B_k \quad \text{si} \quad \epsilon(A_0)\epsilon(A_1)...\epsilon(A_{k-1}) = -1.$$

Si $\epsilon(A_0)\epsilon(A_1)...\epsilon(A_{k-1}) = 0$, es decir si $A_i = B_i = C_j$ para $i < k$, y algún $j \in \{1, 2, ..m\}$, el orden no se define.

Ejemplo 1.5. Sea f la función del ejemplo 1.4 y sean A, B las siguientes sucesiones:

$$A = I_0 I_0 I_1 I_0 I_0 \ldots \qquad \text{y} \qquad B = I_0 I_0 I_1 I_1 I_1 \ldots$$

Como $A_i = B_i$ para $i = 0, 1, 2$, $A_3 < B_3$ y $\epsilon(I_0)\epsilon(I_0)\epsilon(I_1) = (+)(+)(-) = -$, se concluye que $B \prec A$.

Más generalmente se tiene la siguiente propiedad.

Proposición 1.6. Sea $\preceq$ el orden en $\mathfrak{U}^{\mathbb{N}}$ correspondiente a una función $m-modal$ f, $I(x)$ e $I(y)$ itinerarios de x y y bajo f, respectivamente. Se cumple lo siguiente:
i) Si $x < y$ entonces $I(x) \preceq I(y)$.
ii) Si $I(x) \prec I(y)$ entonces $x < y$.

Demostración. Supongamos que $x < y$ y que $I(x) = A_0 A_1 A_2 \ldots \neq I(y) = B_0 B_1 B_2 \ldots$. Sea $n \geq 0$ tal que $A_i = B_i$ para $i = 0, 1, ..., n-1$ y $A_n \neq B_n$, Como $A_i = B_i$ para $i = 0, 1, ..., n-1$, tenemos que no hay puntos de doblez en los

intervalos $[x, y]$, $f([x, y])$, ... $f^{n-1}([x, y])$, pero si existe un punto de doblez c_k en el intervalo $f^n([x, y])$, por lo que f^n es monótona en el intervalo $[x, y]$. Además, si $\epsilon(I_0)\epsilon(I_1)...\epsilon(I_{k-1})$ es positivo (negativo) f^n es creciente (decreciente) en el intervalo $[x, y]$.
En el caso positivo $x < y \Longrightarrow f^n(x) \leq f^n(y) \Longrightarrow A_n \leq B_n$,
en el caso negativo $x < y \Longrightarrow f^n(x) \geq f^n(y) \Longrightarrow A_n \geq B_n$,
de donde se concluye que $I(x) \preceq I(y)$.

El inciso ii) se demuestra usando el mismo argumento. ◀

Dentro de los itinerarios de los puntos del dominio de f, distinguiremos los *itinerarios de los valores críticos*[2], denotándolos por

$$K_j = I(f(c_j)) \in \mathfrak{A}^{\mathbb{N}},$$

los cuales juegan un papel muy importante, en el estudio de la dinámica del sistema.

A cada función $m-modal$ se le asocia la $m-ada$ formada por los m itinerarios de los valores críticos.

$$K(f) = (K_1, K_2, ..., K_m).$$

A este vector de itinerarios le llamaremos el *itinerario principal*[3] de la función f.

1.1 Sucesiones admisibles

Es importante mencionar que no todas las sucesiones en $\mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$, representan el itinerario de algún punto x. Por ejemplo, si $f : X \to X$ es una función continua, no constante y $c_i \in X$ es un punto crítico que no es punto fijo de f, entonces la sucesión $(C_iC_iC_i \dots)$ no representa un itinerario de f. Lo que es cierto, es que si $x \in I$ y su itinerario está dado por

$$I(x) = A_0A_1\dots,$$

entonces se debe cumplir:

Condición de compatibilidad 1: Si el símbolo A_k es igual a algún C_j, entonces la sucesión $(A_{k+1}, A_{k+2}, ...)$ es igual K_j el *itinerario del valor crítico* $f(c_j)$
En vista de esta condición, es conveniente determinar en la sucesión $(A_0, A_1, ...)$ el primer C_j que aparece en ésta.

Condición de compatibilidad 2: Si $A_k = I_{j-1}$ o $A_k = I_j$, entonces la sucesión $(A_{k+1}, A_{k+2}, ...)$ satisface alguna de las siguientes dos condiciones:

$$(A_{k+1}, A_{k+2}, ...) \leq K_j$$

o

$$(A_{k+1}, A_{k+2}, ...) \geq K_j,$$

[2] En inglés *kneading sequences*
[3] En inglés *kneading data*

dependiendo si se tiene un mínimo local $\sigma_j = -1$, o si $\sigma_j = +1$ (se tiene un máximo local).

Con estas dos condiciones podemos empezar a caracterizar las sucesiones en $\mathfrak{U}^{\mathbb{N}}$ que representan un posible itinerario.

Definición 1.7. Una sucesión de símbolos $(A_0, A_1, ...) \in \mathfrak{U}^{\mathbb{N}}$ se dice que es **admisible** para el *itinerario principal* $K(f) = (K_1, K_2, ..., K_m) \in (\mathfrak{U}^{\mathbb{N}})^m$, si satisface las condiciones de compatibilidad 1 y 2.

2. Entropía topológica

En esta sección daremos la definición de entropía topológica en general para una función $f : X \longrightarrow X$, con X un espacio topológico compacto y mostraremos algunos resultados que nos permiten calcularla cuando nos restringimos a funciones definidas en un intervalo.

Definición 2.1. Sea X un espacio topológico compacto. Una cubierta abierta de X es una colección de conjuntos abiertos cuya unión es X. Una cubierta abierta β se dice que es un refinamiento de una cubierta abierta α, si cada conjunto abierto de β se encuentra en un conjunto abierto de α, y se denota por $\alpha < \beta$.

Se dice que β es una subcubierta de α si cada conjunto abierto de β es un conjunto abierto de α.

Definición 2.2. Si α y β son dos cubiertas abiertas, su "unión" es la cubierta abierta que consta de todos los conjuntos $A \cap B$ con $A \in \alpha$, y $B \in \beta$, y se denota por $\alpha \vee \beta$. Así $\alpha \vee \beta$ es un refinamiento de las dos cubiertas α y β.

Dado que X es compacto, cada cubierta abierta tiene una subcubierta finita. La entropía de una cubierta abierta α se define como

$$H(\alpha) = \log(N(\alpha)).$$

Donde $N(\alpha)$ es el número mínimo de conjuntos abiertos en cualquier subcubierta finita. Evidentemente $H(\alpha) \geq 0$, y la igualdad se da si y solo si, $X \in \alpha$.

Sea $f : X \longrightarrow X$ una función continua. Para cualquier cubierta abierta α de X, denotamos por $f^{-n}\alpha$ a la cubierta que consta de los subconjuntos de la forma $f^{-n}(A)$, con $A \in \alpha$, y por α^n al conjunto $\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\alpha$.

A partir de las propiedades de la imagen inversa se obtiene que la sucesión $H(\alpha \vee ... \vee f^{-n+1}\alpha)$ es una sucesión subaditiva y en consecuencia el límite

$$h(f, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee ... \vee f^{-n+1}\alpha)}{n}$$

existe.

Al límite $h(f, \alpha)$ se le llama *entropía topológica* de f relativa a la cubierta α, y satisface

$$0 \leq h(f, \alpha) \leq H(\alpha).$$

Usando las propiedades de la imagen directa con respecto a la intersección de conjuntos se obtiene la siguiente afirmación

Afirmación 2.3. Si f es un homeomorfismo entonces $h(f^{-1}, \alpha) = h(f, \alpha)$

Demostración. Para demostrar esta afirmación observemos que

$$\begin{aligned} H(\alpha \vee ... \vee f^{-n+1}\alpha) &= H(f^{n-1}(\alpha \vee ... \vee f^{-n+1}\alpha)) \\ &= H(f^{n-1}\alpha \vee ... \vee \alpha) \\ &= H(\alpha \vee ... \vee f^{n-1}\alpha) \\ &= H(\alpha \vee (f^{-1})^{-1}\alpha ... \vee (f^{-1})^{-n+1}\alpha). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} H(f, \alpha) &= \lim_{n \to \infty} \frac{H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee ... \vee f^{-n+1}\alpha)}{n} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{H(\alpha \vee (f^{-1})^{-1}\alpha ... \vee (f^{-1})^{-n+1}\alpha)}{n} \\ &= H(f^{-1}, \alpha). \end{aligned}$$

◀

Definición 2.4. Sea $f : X \longrightarrow X$, al número

$$h(f) = sup_{\alpha} h(f, \alpha)$$

se le llama **entropía topológica** de f, donde el supremo se toma sobre todas las cubiertas abiertas de X.

2.1 Entropía de funciones en el intervalo

En este apartado nos restringimos al caso en que $X = I$ es un intervalo compacto y mostraremos algunos resultados que permiten calcular la entropía en este caso. Estos resultados pueden ser consultados y ampliados en [2].

Proposición 2.5. Sea $f : I \longrightarrow I$ una función continua. Si existen intervalos cerrados disjuntos $J_1, ..., J_p$ tales que

$$J_1 \cup ... \cup J_p \subseteq f(J_i) \quad i = 1, ..., p$$

entonces $h(f) \geq \log\ p$.

Demostración. Como los J_i son disjuntos podemos elegir intervalos abiertos disjuntos por pares $G_1, ..., G_p$ con $J_i \subset G_i$ para $i = 1, ..., p$. Podemos tomar intervalos abiertos $G_p + 1, ..., G_q$, que satisfagan $G_i \cap J_k = \emptyset$ para $p + l \leq i \leq q$ y $1 \leq k \leq p$, de modo que obtengamos una cubierta abierta finita α.
Para cualquier entero positivo n y cualquier i_k con $1 \leq i_k \leq p$ el conjunto

$$J_{i_1 \ldots i_n} = \{x : x \in J_{i_1}, f(x) \in J^{i_2}, ..., f_{n-1}(x) \in J_i\}$$

es no vacío. Cada punto de este conjunto está contenido en un único elemento de $\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee ... \vee f^{-n+1}\alpha$, a saber,

$$G_{i_1} \cap f^{-1}(G_{i_2}) \cap ... \cap f^{-n+l}(G_{i_n}).$$

De donde se obtiene que

$$H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee ... \vee f^{-n+1}\alpha) \geq n \log\ p.$$

Por lo tanto $h(f, \alpha) \geq \log\ p$ y en consecuencia, $h(f) \geq \log\ p$. ◄

Una forma sencilla y útil para calcular la entropía de funciones monótonas por piezas de un intervalo en si mismo, lo proporciona el siguiente resultado.

Proposición 2.6. Si $f : I \longrightarrow I$ es una función continua monótona por piezas, entonces

$$h(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \ell(f^n)}{n},$$

donde $\ell(f^n)$ es el *número de doblez* de f^n.

Demostración. Existe una cubierta $\alpha = \alpha(n)$ de I que consiste exactamente de $\ell(f^n)$ intervalos disjuntos y en cada uno de ellos f^n es monótona.
Para cada entero positivo j,

$$c_j(\alpha, f^n) \leq (\ell(f^n))^j,$$

y en consecuencia

$$\frac{\log c_j(\alpha, f^n)}{j} \leq \log \ell(f^n).$$

Por lo tanto $h(f) = \dfrac{h(f^n)}{n} \leq \dfrac{\log \ell(f^n)}{n}$ para cada entero positivo n, y en consecuencia

$$h(f) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\log \ell(f^n)}{n}.$$

Por otro lado, sea γ la colección de intervalos abiertos máximos en los que f es monótona, y sea δ la colección de puntos que son extremos de estos intervalos. Entonces $\beta = \gamma \cup \delta$ es una cubierta de I que consiste de $2k_1 + 1$ intervalos disjuntos. Sea n un entero positivo y J un intervalo máximo en el que f^n es monótona. Para cada $i = 1, ..., n$ existe un único elemento A_i de γ tal que $f^{i-l}(J) \subseteq A_i$. Entonces $\{A_1, ..., A_n\}$ es una cadena en β^n. De su maximalidad se sigue que los intervalos máximos distintos en los cuales f^n es monótona corresponden a elementos distintos de β^n. Así $\ell(f^n) \leq c_n(\beta, f)$ para cada entero positivo n, y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \ell(f^n)}{n} \leq h^*(f,\beta) = h(f).$$

◀

En el siguiente ejemplo se muestra el cálculo de la entropía usando el número de doblez $\ell(f^n)$.

Ejemplo 2.7. Sea $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$, y $T : I \longrightarrow I$, definida con la siguiente regla de correspondencia

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

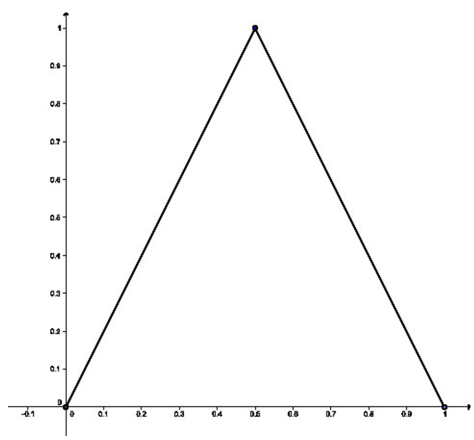

Figura 4. Gráfica de la función T

A la función T se le conoce como la función tienda, por la forma de su gráfica (véase la figura 4).

Notemos que $\ell(T^2) = 2^2$ y $\ell(T^3) = 2^3$, como lo muestra la figura 5 y por inducción se obtiene que $\ell(T^n) = 2^n$. Usando el teorema 2.6 se tiene que

$$\begin{aligned} h(T) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(2^n)}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\log(2)}{n}. \\ &= \log(2). \end{aligned}$$

$$T^2(x) = \begin{cases} 2^2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 2(1-2x), & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(2x-1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 2^2(1-x), & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

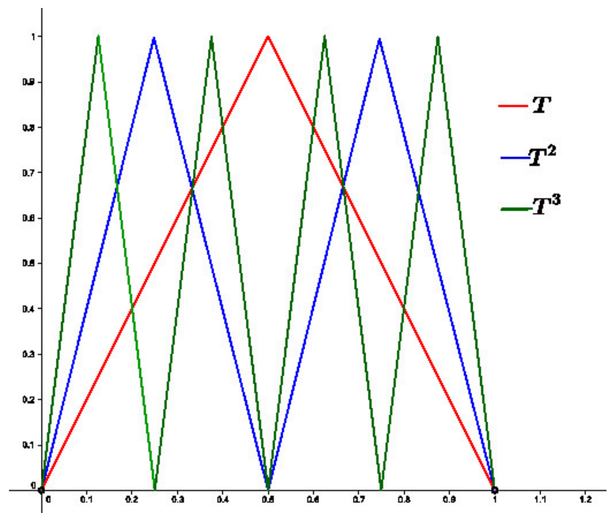

Figura 5. Gráfica de T, T^2, y T^3

2.2 Entropía e itinerario principal

En esta sección se muestra la relación entre la entropía topológica y las sucesiones admisibles. Además se mostrará que la entropía de una función f, está determinada por el itinerario principal.

Para una función $m-$modal denotamos por $Adm(f,k)$ al número de sucesiones acríticas (sucesiones que no contienen C_j) de longitud k que son admisibles. En el caso de funciones de frontera anclada, este número se relaciona con el número de doblez y la cubierta $\vee_{i=0}^{k-1} f^{-i}\mathfrak{U}$ de la siguiente manera,

Lema 2.8. Sea $f : I \to I$ una función $m-$modal de frontera anclada, entonces

$$\ell(f^k) \leq Adm(f,k) \leq card\left(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i}\mathfrak{U}\right). \tag{1}$$

Demostración. Para verificar la primera desigualdad, sea $m = \ell(f^k)$, es decir f^k tiene m subintervalos I_i donde f^k no cambia de monotonía. Si tomamos $x_i \in I_i$, se tiene que $\{A(f^j(x_i)) : j = 0, \cdots k-1\}$ es una sucesión admisible de longitud k, y en consecuencia $\ell(f^k) \leq Adm(f,k)$.
Por otro lado, si $A_0, \cdots A_{k-1}$ es una sucesión admisible de longitud k, entonces $\bigcap_{i=0}^{k-1} f^{-i}A_i$ es un elemento de la cubierta $\vee_{i=0}^{k-1} f^{-1}\mathfrak{U}$, por lo que $Adm(f,k) \leq card(\vee_{i=0}^{k-1} f^{-1}\mathfrak{U})$.
◀

Observemos que el lema anterior, nos garantiza la desigualdad (1) para el caso de funciones de frontera anclada. Cuando la función no es de frontera anclada, se puede extender a una función de este tipo, con el mismo itinerario principal. El siguiente resultado lo demostraremos para el caso cuando f tiene la frontera anclada, pero es válido en general para funciones $m-$modales [5].

Teorema 2.9. Si $f : I \to I$ es una función $m-$modal, entonces la entropía topológica de f está determinada por su itinerario principal.

Demostración. Este resultado lo demostraremos para el caso cuando f tiene la frontera anclada, el caso general para funciones $m-$modales se puede consultar en [5].

Supongamos que f es de frontera anclada y recordemos que las sucesiones admisibles están determinadas por el itinerario principal de f.

Como la función logaritmo natural es creciente, de la ecuación (1) del lema 2.8 se obtiene

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log\ \ell(f^k)}{k} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{\log\ Adm(f,k)}{k} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{\log\ card(\vee_{i=0}^{k-1} f^{-1}\mathfrak{U})}{k}.$$

Es decir

$$h(f) \leq \lim_{k\to\infty} \frac{\log\ Adm(f,k)}{k} \leq h(f,\mathfrak{U}) \leq h(f).$$

De donde se obtiene que

$$h(f) = \lim_{k\to\infty} \frac{\log\ Adm(f,k)}{k}.$$

Esto nos dice, que la entropía de una función f de frontera anclada, está determinada por su itinerario principal.

◀

3. Resultados numéricos

En esta sección se muestran algunos cálculos numéricos de entropía de funciones. Los resultados se obtuvieron de la implementación en MATLAB del algoritmo publicado en [1], el cual está basado en la proposición 2.6.

Sea $f_v(x) = 4vx(1-x)\ \ 0 < v \leq 1$, la familia de funciones logísticas. Esta familia tiene un único punto crítico, $c = \frac{1}{2}$, y el valor crítico es v. Además, esta familia presenta bifurcaciones a medida que crece el parámetro v.

En la parte inferior de la figura 6 se muestra la gráfica de $h(f_v)$ para $0 < v \leq 1$ y en la parte superior se muestra el diagrama de órbitas atractoras existentes en la familia (diagrama de bifurcación). En el diagrama se puede observar que cuando $v < \frac{3}{4}$ existe un punto fijo atractor, seguidamente aparece una órbita de periodo 2 atractora la cual se bifurca y da origen a una órbita de periodo 4, y así sucesivamente hasta llegar al parámetro de Feigenbaum ($v_F \approx 0.8925\cdots$), apartir del cual aparecen órbitas atractoras de periodo diferentes a 2^n.

En la figura 7, se muestra un acercamiento de la gráfica de la función entropía y del diagrama de bifurcación.

Para mostrar el comportamiento de la entropía en funciones $m-$ modales, tomemos la familia de funciones $f_{wv} = f_w \circ f_v$, en la cual existen parámetros donde las funciones

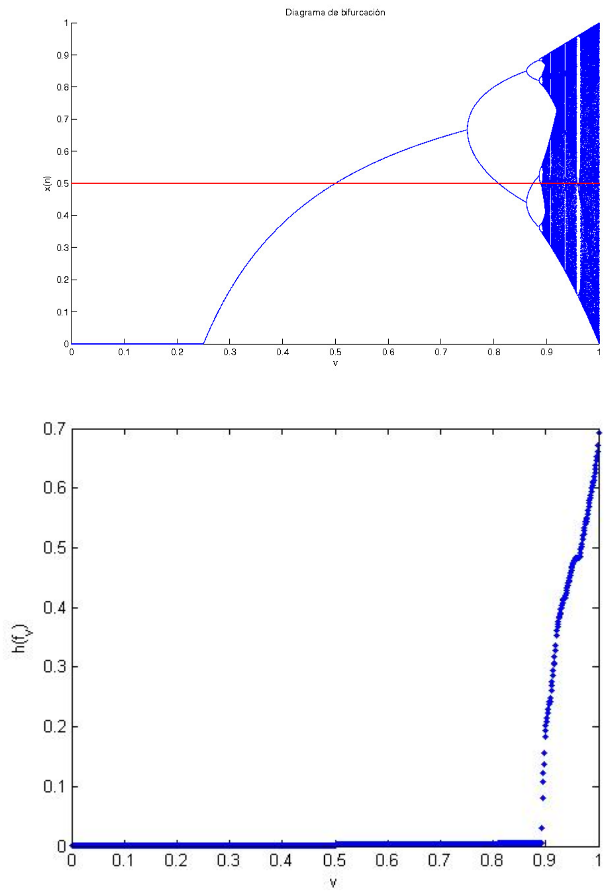

Figura 6. Diagrama de bifurcación y gráfica de h, para la familia logística.

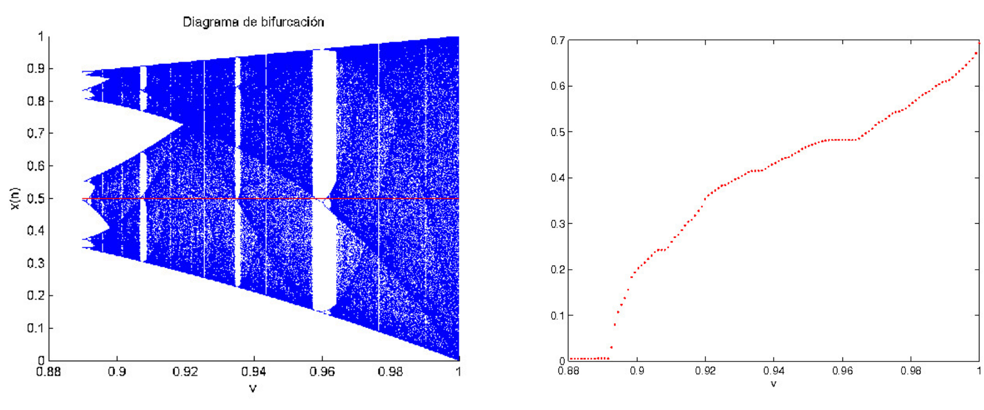

Figura 7. Diagrama de bifurcación y función entropía.

son unimodales, o tres modales, pero todas tienen en común el punto crítico $c = \frac{1}{2}$. Estos modelos fueron usados por Kot y Schaffer [4] para estudiar el crecimiento de poblaciones que se reproducen en dos estaciones del año.

Para calcular la entropía de f_{wv} se toma una malla en el dominio, con tamaño de paso $\frac{1}{2^{10}}$, y una condición de paro (error) de $\epsilon = 10^{-5}$. Los resultados obtenidos se pueden observar en las figura 8, los cuales muestran el comportamiento creciente de la entropía, alcanzando su valor máximo en el parámetro $(1, 1)$. En la figura 9, se muestra un acercamiento de la función entropía y de las curvas de nivel en la región significativa.

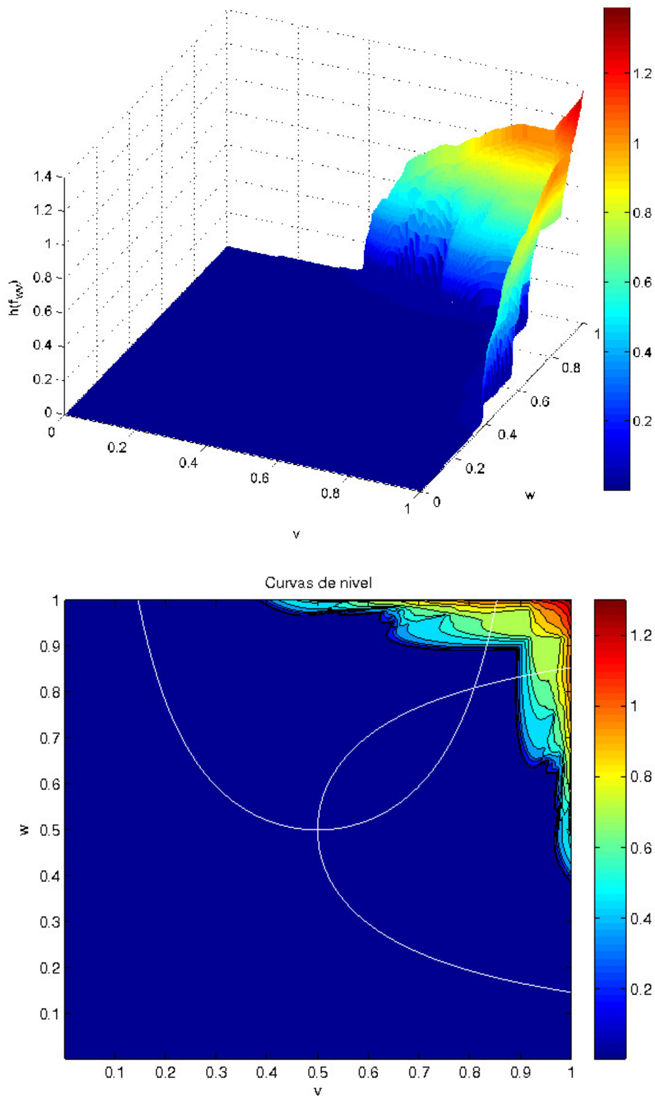

Figura 8. Gráfica de h y curvas de nivel en el espacio de parámetros.

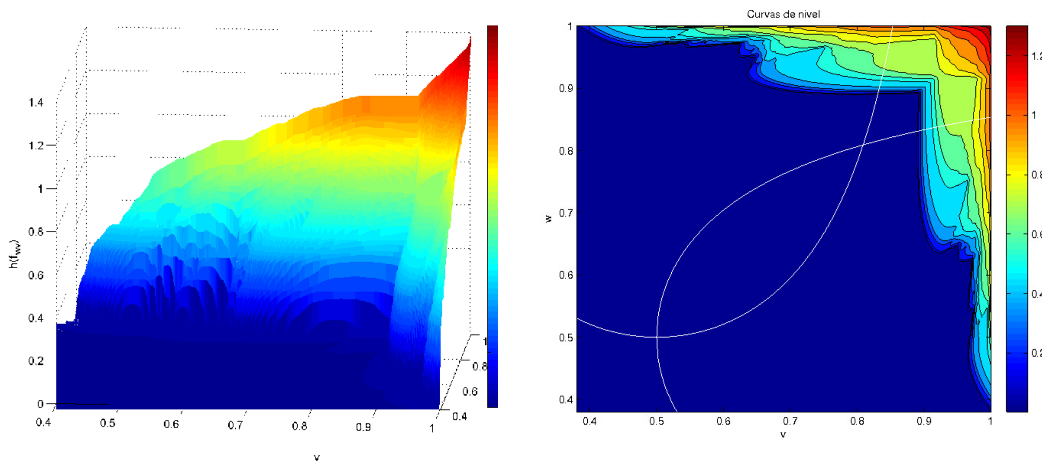

Figura 9. Función entropía y curvas de nivel.

4. Conclusiones

En la figura 6 se puede observar que en los parámetros menores al Feigenbaum ($v_F \approx 0.8925\cdots$), el valor que se obtiene es menor que 10^{-3}. Analíticamente es conocido que el valor de la entropía para estos parámetros es cero [2, 3], por lo que el valor obtenido numéricamente corresponde al error cometido en la aproximación.

Para parámetros mayores a v_F, el valor de la entropía es positiva y además es creciente hasta alcanzar el valor $\log(2)$, el cual corresponde a la entropía del parámetro $v = 1$. En otras palabras, después del parámetro v_F se presenta el caos en la familia logística.

La familia logística es un ejemplo de familia unimodal y como solo hay un punto crítico la entropía está determinada por la órbita de éste. En la figura 8 se muestra la entropía de una familia $3-$modal, la cual resulta de la composición de dos logísticas. Allí se puede observar que la entropía en el cuadrado $[0, v_F] \times [0, v_F]$ sigue siendo cero, por lo que en ese conjunto de parámetros no existe el caos. Por otro lado se puede observar que en el cuadrado $[v_F, 1] \times [v_F, 1]$ la entropía es positiva por lo que la composición de dos funciones caóticas genera una función caótica. Por último podemos observar que en el rectángulo $[v_F, 1] \times [0, v_F]$ se tiene tanto entropía cero como positiva esto implica que la composición de una función caótica con una ordenada(entropía cero) puede dar como resultado caos u orden.

Referencias

[1] J. M. Amigó y A. Giménez (2014). *A simplified Algorithm for the Topological Entropy of Multimodal Maps.* Entropy 2014, 16, 627-644.

[2] L. S. Block y W.A. Coppel. (1991).*Dynamics in One Dimension.* Springer Verlag, New York.

[3] W. de Melo and S. van Strien (1993). *One-dimensional dynamics*, Springer, Berlin.

[4] M. Kot, W.M. Schaffer (1984). *The efects of seasonality on discrete models of population growth.* Theor. Pop. Biol, **26, 340-360.**

[5] J. Milnor and C. Tresser, (2000). *On entropy and monotonicity for real cubic maps,* Commun. Math Phys., **209**, 123-178.