Dinámica de grupos kleineanos

Manuel Cruz *

Facultad de Matemáticas
Universidad de Guanajuato

En estas breves notas describiremos los conceptos e ideas básicas de la teoría de iteración de los llamados grupos Kleineanos, los cuales fueron introducidos por H. Poincaré.

In this brief notes we introduce the basic concepts and ideas in the iteration theory of Keinian groups, which where introduced by H. Poincaré.

Palabras clave: Iteración de los grupos Kleineanos.
Keywords: Kleinian groups iteration.

1. Introducción

El objetivo de estas breves notas es el de ilustrar algunas ideas de la teoría de *grupos Kleineanos*. Éstos son subgrupos discretos de automorfismos de la esfera de Riemann, que, cuando actúan, en particular, en el semiplano superior $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ presentan un comportamiento muy interesante, no sólo desde el punto de vista dinámico, sino también, desde el punto de vista artístico, como se puede apreciar en los diversos grabados del famoso artista holandés M.C. Escher (ver, por ejemplo, [4]).

En la siguiente figura se puede apreciar la dinámica de un grupo Kleineano, llamado *grupo de Schottky*. Dada una configuración de círculos tangentes en el plano complejo, este grupo está generado por inversiones con respecto de estos círculos. En esta figura se puede apreciar cómo el plano complejo se des–compone en dos partes, una 'curva irregular' y su complemento, un 'abierto regular'. Trataremos de explicar esta dicotomía a lo largo de este manuscrito.

Como 'regla general', no haremos demostraciones en las secciones si–guientes, excepto el resultado que caracteriza a los llamados *grupos Fuchianos*. Los conceptos, ejemplos y resultados pueden consultarse en cualesquiera de las referencias [1, 2, 3].

2. Grupos Kleineanos

Todo automorfismo conforme de la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se puede expresar como una transformación de Möbius de la forma

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

*manuel@cimat.mx

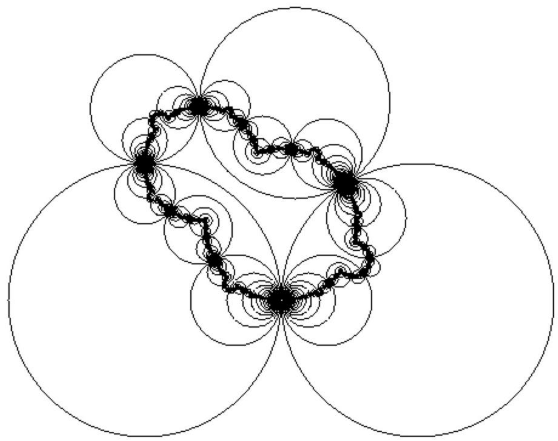

Figura 1. Grupo de Schottky.

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc = 1$. Esto es, el grupo de automorfismos conformes de la esfera, $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, se puede identificar con el grupo de Möbius

$$\text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}}) := \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : ad - bc = 1 \right\}.$$

Por otro lado, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4 : ad - bc = 1\}$ es un subgrupo topológico de $\mathbb{C}^4$. Si consideramos la aplicación antípoda $z \mapsto -z$, podemos entonces definir en $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{z \mapsto -z\}$ la topología cociente y por lo tanto

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) := \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm \mathrm{id}\}$$

admite una estructura de grupo topológico. También, existe un homomorfismo continuo y suprayectivo $\rho : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ dado por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

cuyo kernel es $\{\pm \mathrm{id}\}$. Por el Primer Teorema de Isomorfismo concluimos que

$$\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}).$$

Un *grupo Kleineano* es un subgrupo discreto $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ que actúa en la esfera $\widehat{\mathbb{C}}$ por transformaciones de Möbius de la siguiente manera:

$$\Gamma \times \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad (\gamma, z) \longmapsto \gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

La acción de un grupo Kleineano (infinito) Γ en la esfera, particiona a la esfera en dos subconjuntos ajenos, el *dominio de discontinuidad* $\Omega(\Gamma)$ y el *conjunto límite* $\Lambda(\Gamma) := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega(\Gamma)$. El dominio de discontinuidad es, por definición, el subconjunto abierto más grande de la esfera en el cual Γ actúa propiamente discontinuamente (ver §3). Si la cardinalidad de $\Lambda(\Gamma)$, $|\Lambda(\Gamma)|$, es menor ó igual que 2, decimos que Γ

es *elemental*; en caso contrario, decimos que Γ *no es elemental*. Si Γ es un grupo Kleineano no-elemental, el conjunto límite puede describirse como el subconjunto cerrado mínimo de la esfera que es diferente del vacío e invariante bajo Γ.

En la siguiente sección estudiaremos una clase muy importante de grupos Kleineanos, los llamados *grupos Fuchianos*. Éstos son grupos Kleineanos que dejan invariante un círculo en la esfera, que podemos identificar con el círculo unitario y, por lo tanto, estudiaremos la acción de estos grupos en el llamado *disco de Poincaré*, uno de cuyos modelos es el semiplano superior en el plano complejo $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

3. Grupos Fuchsianos

3.1 Isometrías del plano hiperbólico

Haciendo un análisis similar al de la sección anterior, podemos identificar al grupo de automorfismos conformes del semiplano superior, $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, con

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \cong \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1 \right\}.$$

En $\mathbb{H}$ podemos definir la métrica

$$ds = \frac{1}{\mathrm{Im}(z)} |dz|.$$

Esta métrica se llama la *métrica hiperbólica* ó *métrica de Poincaré*. Se puede probar que $\mathbb{H}$, dotado de esta métrica, es un espacio métrico completo de curvatura constante igual a -1.

Es fácil ver que todo automorfismo conforme de $\mathbb{H}$ es una isometría. Más aún, el grupo completo de isometrías del semiplano hiperbólico lo podemos caracterizar a partir del siguiente resultado.

Teorema 1. Toda isometría del semiplano hiperbólico $(\mathbb{H}, \rho_{\mathbb{H}})$ es de la forma

$$z \longmapsto \gamma(z) \quad \text{ó} \quad z \longmapsto \gamma(-\bar{z}),$$

para algún $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.

Existe también un isomorfismo entre $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ y el grupo de isometrías del semiplano superior que preservan orientación, $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$.

3.2 Clasificación de isometrías

Denotemos por $\mathbb{S}^1_\infty$ a la frontera ideal de $\mathbb{H}$; esto es, $\mathbb{S}^1_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Definición 1. Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$. Decimos que γ_1 y γ_2 son *conjugadas* si existe $h \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$ tal que $\gamma_2 = h\gamma_1 h^{-1}$.

Definición 2. Sea $\gamma \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$, $\gamma \neq \mathrm{id}$. Entonces,

a. γ es *parabólica* si y sólo si γ es conjugada a una traslación $z \mapsto z+1$.

b. γ es *elíptica* si y sólo si γ es conjugada a una rotación euclideana no-trivial $z \mapsto e^{i\theta}z$ alrededor del origen.

c. γ es *hiperbólica* si y sólo si γ es conjugada a una homotecia euclideana no-trivial $z \mapsto \lambda z$, $\lambda > 0$.

Observación 1. Sea $\gamma \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$, $\gamma \neq \mathrm{id}$. Entonces,

a. γ tiene un único punto fijo, el cual está en $\mathbb{S}^1_\infty$, ó

b. γ tiene exactamente dos puntos fijos, los cuales están en $\mathbb{S}^1_\infty$, ó

c. γ tiene un único punto fijo en $\mathbb{H}$ y ninguno en $\mathbb{S}^1_\infty$.

3.3 Grupos Fuchsianos

Definición 3. Un grupo $\Gamma \subset \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$ es *discreto* si su topología inducida es la topología discreta.

Observación 2. Γ es discreto si y sólo si dada una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$, tal que $\gamma_n \to \mathrm{id}$, entonces $\gamma_n = \mathrm{id}$, para n suficientemente grande.

Definición 4. Un *grupo Fuchsiano* es un subgrupo discreto $\Gamma \subset \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$.

Decimos que un grupo Γ actúa *propiamente discontinuamente* en $\mathbb{H}$ si la órbita de cualquier punto $z \in \mathbb{H}$, $\Gamma z := \{\gamma(z) : \gamma \in \Gamma\}$ es localmente finita. Esto es, si para todo $K \subset \mathbb{H}$ compacto se cumple que

$$\gamma(K) \cap K \neq \emptyset,$$

sólo para un número finito de elementos $\gamma \in \Gamma$. En particular, el estabilizador de cualquier punto $z \in \mathbb{H}$, $\Gamma_z := \{\gamma \in \Gamma : \gamma(z) = z\}$, es finito.

De acuerdo con la clasificación de isometrías del semiplano hiperbólico, podemos formar tres tipos de subgrupos cíclicos de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$:

- *Hiperbólico*: $\Gamma = \langle z \to \lambda z : \lambda > 0 \rangle$.
- *Parabólico*: $\Gamma = \langle z \to z+1 \rangle$.
- *Elíptico*: $\Gamma = \left\langle z \to e^{i\theta} z : \theta \in \mathbb{R} \right\rangle$.

Proposicón 1. Tenemos los siguientes casos:

a. Todo subgrupo cíclico hiperbólico de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ es Fuchsiano.

b. Todo subgrupo cíclico parabólico de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ es Fuchsiano.

c. Un subgrupo cíclico elíptico de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ es Fuchsiano si y sólo si es finito.

Ejemplo 1. El grupo Modular El subgrupo de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ definido por

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) := \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad-bc=1 \right\}$$

se llama el grupo modular. $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ es un subgrupo discreto de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, y por lo tanto, es Fuchsiano.

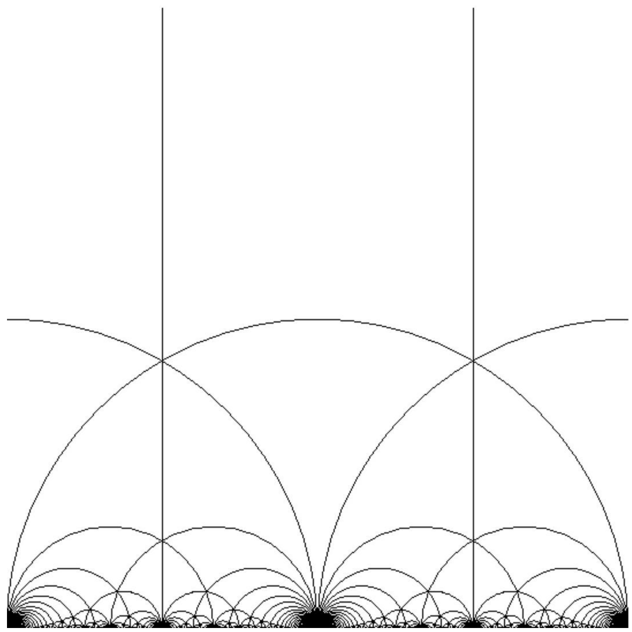

Figura 2. Dinámica de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$.

Ejemplo 2. El grupo $\Gamma = \langle z \to \lambda z : \lambda > 0 \rangle \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ es Fuchsiano.

Ejemplo 3. El grupo $\Gamma = \langle z \to z+1 \rangle \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ es Fuchsiano.

Teorema 2. Sea $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Entonces, Γ es un grupo Fuchsiano si y sólo si Γ actúa propiamente discontinuamente en $\mathbb{H}$.

Prueba. Supongamos primero que Γ es un grupo Fuchsiano. Sean $z \in \mathbb{H}$ y $K \subset \mathbb{H}$ compacto. Entonces,

$$\{\gamma \in \Gamma : \gamma(z) \in K\} = \{\gamma \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) : \gamma(z) \in K\} \cap \Gamma$$

es finito, ya que es la intersección de un conjunto cerrado y uno discreto. Como la acción de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ en $\mathbb{H}$ es continua, se sigue que Γ actúa propiamente discontinuamente.

Recíprocamente, supongamos ahora que Γ actúa propiamente disconti–nuamente en $\mathbb{H}$ y supongamos que Γ no es discreto. Sea $z \in \mathbb{H}$ un punto que no esté fijo por ningún elemento distinto de la identidad en Γ. Como Γ no es discreto, existe una sucesión $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ de elementos distintos tal que $\gamma_n \longrightarrow$ id cuando $n \to \infty$. Luego, $\gamma_n(z)$ converge a z, cuando $n \to \infty$, y como z no es punto fijo de ningún elemento distinto de la identidad en Γ, se sigue que $\{\gamma_n(z)\}$ es una sucesión de puntos distintos de z, para toda n. Esto implica que todo disco hiperbólico cerrado centrado en z contiene una infinidad de puntos de la Γ-órbita de z. Esto es, Γ no actúa propiamente discontinuamente en $\mathbb{H}$, lo cual es una contradicción. ∎

Corolario 1. $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ actúa propiamente discontinuamente en $\mathbb{H}$ si y sólo si para toda $z \in \mathbb{H}$, la Γ-órbita de z es discreta en $\mathbb{H}$.

Esto es, si $z \in \mathbb{H}$ y $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ es una sucesión de elementos distintos, entonces $\{\gamma_n(z)\}$ tiene un punto límite en $\mathbb{S}^1_\infty$.

Definición 5. El conjunto de todos los posibles puntos límite de Γ-órbitas de puntos en $\mathbb{H}$ se llama el *conjunto límite* de Γ y se denota por $\Lambda(\Gamma)$.

De acuerdo con las observación anterior, para todo grupo Fuchsiano $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ se cumple que

$$\Lambda(\Gamma) \subset \mathbb{S}^1_\infty.$$

Ejemplo 4.

1. Si $\Gamma = \langle z \to \lambda z : \lambda > 1 \rangle$, entonces $\Lambda(\Gamma) = \{0, \infty\}$.
2. Si $\Gamma = \langle z \to z + 1 \rangle$, entonces $\Lambda(\Gamma) = \{\infty\}$.
3. Si $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, entonces $\Lambda(\Gamma) = \mathbb{S}^1_\infty$.

4. Grupos Kleineanos otra vez

Supongamos que Γ es un grupo Kleineano no-elemental y finitamente generado. De acuerdo con la dinámica de Γ, la esfera se particiona en dos subconjuntos ajenos: el conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ y el conjunto de discontinuidad, $\Omega(\Lambda) := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Lambda(\Gamma)$. En general, el conjunto límite es el *lugar del comportamiento caótico*; es un conjunto compacto, perfecto y puede caracterizarse de las siguientes maneras:

- El conjunto cerrado mínimo y Γ-invariante si $|\Lambda(\Gamma)| > 2$;
- El conjunto de puntos de acumulación de cualquier órbita $\Gamma z \subset \widehat{\mathbb{C}}$;
- La cerradura del conjunto de puntos fijos repulsores de $\gamma \in \Gamma$; ó,
- El conjunto de puntos, cerca de los cuales Γ no forma una familia normal.

Agradecimientos

Agradezco sinceramente a los Dres. Víctor Castellanos Vargas y Gamaliel Blé González por la invitación que me hicieron para participar en esta Escuela y por haber logrado establecer un espacio verdaderamente estimulante para su desarrollo. Agradezco también a todos los participantes por el gran ambiente de trabajo y amistad logrado.

Referencias

[1] A. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Springer Verlag, 1981.

[2] G.A. Jones and D. Singerman, *Complex functions. An algebraic and geometric viewpoint*, Cambridge University Press, 1987.

[3] S. Katok, *Fuchsian groups*, Benjamin Cumming, 1981.

[4] J.L. Locher, *The world of Escher*, Harry N. Abrams, New York, 1971.