PRODUCCIÓN SIMPLE Y CONJUNTA A CONSECUENCIA DE SRAFFA (III parte)

Antonio Mora Plaza

Abstract

The joint production is an historical matter from Sraffa, although the text books don´t treat it frequently, perhaps for the formal accommodation to the single production, despite that the joint production is the question more empirical important. Along this papers will appear the names of authors who they have treated this question under a ricardian or neo-ricardian survey. The marginalist joint production is obviated. The other hand, is not my intention to talk about the the historical developement of joint production. This matter has been worked with succes and facilitated many graduates and doctorates. This is an attempt to contribute with somes ideas and to make also somes criticals to the unquestioned knowledge.

keywords: joint production, single production, Sraffa

Introducción

El tema de la producción conjunta es un tema manido desde Sraffa, aunque los manuales se resisten a tratarlo quizá, por la comodidad formal que supone la producción simple, a pesar de que lo relevante empíricamente es la conjunta. A lo largo del artículo saldrán nombres de autores que se han ocupado de esto, es decir, de la producción conjunta en un contexto ricardiano o neo-ricardiano. Se obvia pues la producción conjunta marginalista. No obstante, nada más lejos de mi intención hacer un recuento histórico del tema. Esto ya se ha hecho[1] con éxito y ha dado juego para doctorados. Estas notas son intentos de aportación, de novedad en algunos aspectos de la producción conjunta, por un lado, y, por otro, alguna crítica a verdades consideradas indiscutibles[2].

palabras clave: producción conjunta, producción simple, Sraffa

Jel: B24

---

[1] En general, los libros de Pasinetti; en internet se puede ver el art. de Peris i Ferrando. Ambos se mencionan en la bibliografía.

[2] El caso del aspecto de la frontera salarios-beneficios.

PRODUCCIÓN SIMPLE Y CONJUNTA A CONSECUENCIA DE SRAFFA (III parte)

Antonio Mora Plaza

Apéndice III

Como complemento al epígrafe sobre la frontera salario-ganancia, vamos a dar algunos desarrollos matemáticos acordes con el espíritu económico srafiano a partir de las ecuaciones implícitas del propio modelo de Sraffa, apartándonos de las dadas por Schefold y Nutti[3]. Esta parte, aunque lleva el título de apéndice, puede considerarse un capítulo completo de la producción simple y conjunta, srafiana y no srafiana. No son tampoco simples matemáticas, sino que estas nos ayudan a guiarnos y desarrollar la lógica económica abierta por el genio italiano. Seguimos con la frontera salario-ganancia, que es un capítulo trascendental en el desarrollo de la obra "Producción de mercancías por medio de mercancías". El primer caso será el más simple posible:

a) Frontera salario-ganancia srafiano con salarios ex-post.

Partimos de la ecuación srafiana ex-post que define al sistema:

(51) $$\underset{1xm}{p}\underset{nxn}{Y} = \left[\underset{1x1}{w}\underset{1xn}{L} + \underset{11xn}{p}\underset{nxn}{X}\right] \times \left(1 + \underset{1x1}{g}\right)$$

Si ahora reemplazamos la matriz ***X*** de medios por:

(52) $X = AY$ con lo que $A = XY^{-1}$ y despejamos los precios ***p*** queda:

(53) $$p = w(1+g)LY^{-1}\left[I-(1+g)A\right]^{-1}$$

Para eliminar el factor precios ***p*** vamos a post-multiplicar ambos miembros de la ecuación por ***YI***, siendo ***Y*** los bienes finales e ***I*** el vector vertical de unos. Además haremos del producto $pYI = 1$ el numerario, es decir, $pYI = 1$. Con todo ello queda:

(54) $$1 = pYI = w(1+g)LY^{-1}\left[I-(1+g)A\right]^{-1}YI$$

[3] Capialism. Socialism and Sleady Growth, 1970

Llegado a este punto parecería que ya hemos arribado al destino simplemente con despejar los salarios de la ecuación y tendríamos una relación inversa entre estos y las ganancias puesto que estas aparecen en dos lugares en la ecuación (54) y ambas de forma creciente: la primera es evidente y la que está pre-multiplicando a la matriz de requerimientos ***A*** lo es por el teorema de Perrón-Froebenius al suponérsela irreductible, productiva y mayor que cero. Pero vamos a dar un paso más y desarrollamos (54):

(55) $$1 = pYI = w(1+g)LY^{-1}\left[I + (1+g)A + (1+g)^2 A^2 + \cdots + (1+g)^{n-1} A^{n-1}\right]^{-1} YI$$

Ahora reemplazamos la matriz ***A*** por su valor en (52) y abrimos los corchetes y queda:

(56)
$$1 = pYI = w(1+g)L\left[Y^{-1}IY + (1+g)Y^{-1}XY^{-1}Y + (1+g)^2 Y^{-1}XY^{-1}XY^{-1}Y + \cdots + (1+g)^{n-1}Y^{-1}XY^{n-1}Y\right]^{-1} I$$

y llamando ahora ***B*** a $B = Y^{-1}X$ y reemplazando en lo anterior:

(57) $$1 = w(1+g)L\left[I + (1+g)B + (1+g)^2 B^2 + \cdots + (1+g)^{n-1} B^{n-1}\right]I$$

La diferencia de (54) respecto a (55) es que ahora tenemos integrado la matriz de bienes finales ***Y*** dentro del corchete, al cual se puede aplicar también el teorema P-F[4] y asegurar el crecimiento de la tasa de ganancia. Despejando los salarios queda:

(58) $$\boxed{w = \frac{1}{(1+g)L\left[I - (1+g)B\right]^{-1} I}}$$

que es una función decreciente, con un punto de corte en el eje de ordenadas:

(59) $$\boxed{para \quad g = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1}{L\left[I - B\right]^{-1} I}}$$

y con un descenso monótono, decreciente, convexo y tangencial en el eje de abcisas a medida que aumenta la tasa de ganancia. Ahora bien, nosotros sabemos que ese

[4] Suponiendo a B irreductible, mayor que cero y productiva, también y que g<R (criterio de convergencia) para poder pasar de (57) a (58).

descenso tiene el límite srafiano de la razón-patrón ***R***. Este desarrollo matemático vale tanto si estamos en la producción simple como en la conjunta, puesto que la diferencia es que la matriz ***Y*** de bienes finales sea diagonal (producción simple) o no (producción conjunta), es decir, con valores positivos (puede haber algún cero) en todos los elementos. Pero hay una diferencia notable entre ambos: en la producción conjunta ya no podemos asegurar que ***A*** -y en nuestro caso menos aún ***B***- sea productiva, irreductible y estrictamente mayor que cero, con lo que no podemos recurrir a Perrón- Froebenius. Eso implica que el crecimiento de ***g*** en (53) y siguientes no está asegurado por el teorema; tampoco la convergencia del denominador de (59). Para asegurar esto hay que recurrir al comportamiento económico de los actores -tal y como hace Sraffa[5]- de tal forma que sean ellos los que seleccionen aquellos procesos productivos que aseguren precios y salarios positivos y, a largo plazo, una frontera decreciente entre salarios y ganancias, puesto que es imposible que en una economía real y en su modelo explicativo auto-reproductivo sin acumulación y sin variaciones en la técnica (***A***,***L***) y sin aumentos de productividad, puedan crecer simultáneamente salarios y ganancias. No obstante, este hecho, esta necesidad de recurrir a la economía real, demuestra que la teoría neoclásica -donde la relación entre salarios y ganancias es monótona decreciente y convexa- no puede admitirse como cierta con carácter general. Además, esta necesidad de adecuarse a una economía viable, es decir, modificar la matriz de requerimientos ***A,*** supone un *desplazamiento* de la curva frontera de salario-ganancia, con lo que la función más realista de esta frontera sólo tiene sentido en un espacio de 4 dimensiones (***w***, ***g***, ***A, L***), donde son más significativos las variaciones de la matriz de requerimientos que los *deslizamientos* a través de la línea salario-ganancia.

[5] Es notable que Sraffa no menciona ni recurre en ningún momento al teorema de Perrón-Froebenius. Es posible que el no lo conociera en un principio, pero sí los dos notables matemáticos de Cambrigde que le ayudaron, y en una obra de varias décadas de maduración es impensable que no fuera avisado de ello. Quizá lo omitió por no desvirtuar el carácter económico de sus explicaciones. Mi explicación en concreto es que Sraffa quería presentar un modelo donde el comportamiento de los actores implicados fuera determinante en él, cosa que se hubiera perdido se fijaba las condiciones formales a priori. Pero esto ha originado, creo yo, una confusión en el punto trascendental de la frontera salario-ganancia al no distinguir entre *deslizamientos* a lo largo de la frontera y *desplazamientos* de esta función, que ocurre siempre que no consideremos dados todas las variables (***A***, precios, ***L***) que no sean precisamente salarios y ganancias. De ahí el esfuerzo que se ha hecho en este modesto trabajo en distinguir ambos movimientos.

La limitación de este modelo de producción conjunta srafiano es que el número de procesos ha de ser igual al número de mercancías producidas[6] (***Y*** y ***X*** son del mismo rango).

b1) Frontera salario-ganancia con producción conjunta y con salarios y ganancias múltiples.

Ahora cambiamos el modelo anterior al considerar no un sólo tipo de salario y una sola tasa de ganancia, sino ***n*** tasas de salarios y ***n*** tasas de ganancias, lo cual le añade realismo al modelo. Aquí ya tenemos que caminar solos porque Sraffa nos abandona, puesto que en ningún momento consideró esta posibilidad.

(60) $$\underset{1xn}{p}\underset{nxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{p}\underset{nxn}{X}\right] \times \left(1 + \underset{nxn}{G}\right)$$

donde ***W*** y ***G*** son matrices diagonales. Ahora haremos lo que hemos hecho en el caso a): despejaremos los precios ***p***, hacemos $A = XY^{-1}$ y emplearemos el mismo numerario, es decir, $pYI = 1$, y después de hacer todo esto queda:

(61) $$1 = pYI = LW(1+G)Y^{-1}\left[I - A(1+G)\right]^{-1}YI$$

Llegado a este punto parecería que no podemos salir de ahí salvo extender la expresión entre corchetes como la suma geométrica que representa. Al hacerlo así y sustituir la matriz de requerimientos ***A*** por su valor queda[7]:

(62)
$$1 = LW(1+G)Y^{-1}\left[I + XY^{-1}(1+G) + XY^{-1}XY^{-1}(1+G)^2 + \cdots + (XY^{-1})^{n-1}(1+G)^{n-1}\right]^{-1}YI$$

Y si abrimos la expresión entre corchetes para permitir pre-multiplicarla por Y^{-1} y pos-multiplicarla por Y, llamamos ***B*** a $B = Y^{-1}X$ y ***C*** a $C^i = Y^{-1}(1+G)^i Y$ (al igual que el caso anterior) y con las equivalencias siguientes:

1) $Y^{-1}IY = I$

[6] Pág. 68 de "Producción de mercancías... ".
[7] Damos por supuesto que la expresión entre corchetes de (61) sea convergente.

2) $Y^{-1}XY^{-1}(1+G)Y = BY^{-1}(1+G)Y = BC$

3) $Y^{-1}XY^{-1}XY^{-1}(1+G)^2 Y = B^2\, Y^{-1}(1+G)^2 Y = B^2C^2$

....

n) $Y^{-1}(XY^{-1})^{n-1}(1+G)^{n-1}Y = B^{n-1}\, Y^{-1}(1+G)^{n-1}Y = B^{n-1}C^{n-1}$

tenemos ahora que:

(63) $$1 = LW(1+G)\left[I + BC + B^2C^2 + \cdots + B^{n-1}C^{n-1}\right]I$$

Y si por comodidad hacemos:

(64) $$D = \left[I + BC + B^2C^2 + \cdots + B^{n-1}C^{n-1}\right]$$

es evidente que ***D*** es creciente con respecto a cualquiera de las tasas de ganancias, es decir $dC/dg_i > 0 \quad \forall i = 1\ a\ n$ debido a que ***C*** depende crecientemente de ***G***. No podemos pasar (64) a la expresión sintética porque no tenemos ahora ninguna garantía de que sea creciente pero convergente. Lo será, en todo caso, si cumple que: $límite\ de\ B^iC^i \to a\ cero\ si\ i \to \infty$ (condición necesaria), o también si el sistema $\lambda Y = BCY$ tiene una autovalor máximo tal que $1 > 1/|\lambda_m|$, siendo λ_m el autovalor máximo (condición suficiente)[8]. Ahora bien, si ***D*** no fuera convergente, entonces puede pasar cualquier cosa, incluso valores disparatados desde el punto de vista económico, en especial porque en ***B*** actúa la inversa de ***Y***. Veamos en forma desarrollada (63):

(65) $$1 = (l_1 \cdots l_n) \times \begin{bmatrix} w_1 & & \\ & \ddots & \\ & & w_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1+g_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1+g_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

y visto de forma abreviada:

(66) $$1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} l_i w_i (1+g_i) d_{ij}$$

---

[8] Ver el apéndice matemático al libro de Pasinetti "Lecciones de la teoría de la Producción" ya mencionado.

Parecería también que hemos llegado al final, pero si ahora hacemos que para algún $\boldsymbol{w_i}$ o conjunto de valores de $\boldsymbol{w}$ se cumpla que:

(67) $$1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} l_i w_i (1+g_i) d_{ij} = \left(\sum_{i=1}^{n} l_i \hat{w}_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (1+g)_i d_{ij}\right)$$

cosa que siempre podemos hacer con tal de respetar (67), donde tenemos una ecuación y ***n*** tasa de salarios (gr. de libertad = ***n-1***). Si los actores económicos son capaces de desechar procesos que den valores disparatados, se pude concluir que, si ***D*** es creciente respecto a cada tasa de salarios ***g***, hay una relación inversa entre *masa de salarios* y ganancias de acuerdo con:

(68) $$\boxed{\sum_{i=1}^{n} l_i \hat{w}_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (1+g_i) d_{ij}}}$$

que es una función decreciente con las consideraciones anteriores. El punto de corte en el eje de ordenadas sería:

(68b) $$\boxed{para\ \ g_i=0 \ \ \forall i=1 \ a \ n \ \ \Rightarrow \ \ \sum l_i \hat{w}_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}}}$$

Pero (68) y todo el proceso seguido hasta aquí tiene algunas particularidades que no tenía el caso a) de una frontera con una única tasa de salarios y una única tasa de ganancia:

1) Ahora no tenemos salarios (aunque sean múltiples) para comparar con la ganancia (una o múltiples), sino que debemos tomar el producto de los inputs de trabajo ***L*** y los salarios ***w***. Dicho de otra forma, al tomar las ganancias como variable independiente, no sabemos -en este modelo- qué incidencia tiene sobre una tasa de salario en particular, sino sólo sobre la masa de salarios LW, y muy bien podría ocurrir que un aumento de las ganancias en un sector provocara a la vez un aumento de los salarios en otro -incluso en el mismo- con tal de que el conjunto de la masa de salarios disminuyera.

2) Como hemos tenido que hacer el cambio de w por $\hat{w}$ para algún salario o para el conjunto de ellos (aunque respectando (67)), no tenemos un único punto de arranque de los salarios en el eje de ordenadas cuando las ganancias son nulas, sino una infinidad posible de puntos de arranque.

3) Aún tomando un punto de arranque cualquiera, es decir, desechando la infinidad de combinaciones posibles (en realidad *"(n-1)x(n-2)x....x1"*, puesto que tenemos una ecuación a respectar) para el punto de arranque, hay otra infinidad (en concreto ***n***) de funciones decrecientes (suponiendo que lo sean) según las distintas tasas de ganancia. La forma de concretar esta última cuestión sería tomar la tasa de ganancia ($\boldsymbol{g}_m$) que provoca la masa de salarios menor y la tasa de ganancia ($\boldsymbol{g}_M$), que provoca a su vez la masa de salarios mayor. Y esto es así si estas tasas se mantienen en sus puestos de menor y mayor tasa de salarios a medida que aumentan sus valores, pero bien podría ocurrir que fueran sustituidas por otras tasas de ganancia (hay ***n***) que le tomaran el relevo. De ocurrir esto, tendríamos que cambiar de tasas de ganancia cada cierto tramo de la variable de tal forma que provocara la menor tasa de salario y la mayor.

4) La cosa se podría complicar más aún, porque podría ocurrir también que esa especie de racimos descendientes que arrancan unidos del eje de ordenadas según (68) se cruzaran entre sí si la velocidad de caída de cada racimo es diferente. Es el caso que planteamos de retorno de las técnicas para tasas únicas de salario y ganancia con funciones convexas. Sería como verlo al microscopio. A los efectos teóricos, pues, puede estudiarse el modelo con tasas de salarios y ganancias únicas, pero desde el punto de vista empírico, este modelo de tasas únicas entiendo que es muy pobre.

b2) <u>Frontera salario-ganancia también srafiana y no srafiana. Otro forma.</u>

Vamos a ver que hay una forma más simplificada que esta y que vale tanto para el caso de Sraffa -donde el número de procesos (o mercancías) de bienes finales son iguales al de los medios de producción- como si son mayores los procesos. Las 3 ecuaciones que van a definir el sistema son:

(69) $$\underset{1xm}{p}\underset{mxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W} + \underset{1xm}{p}\underset{mxn}{X}\right] \times \left(1 + \underset{nxn}{G}\right)$$

(70) $$\underset{1xm}{p}\underset{mxn}{Y} = \left[\underset{1xm}{p}\underset{mxn}{X}\right] \times \left(1 + \underset{nxn}{R}\right)$$

(71) $$pXI = 1$$

siendo (71) el numerario, ***R*** representa la matriz diagonal de tipos de ganancia máximas de cada sector cuando las tasas de salarios se han hecho cero, y que en el caso de que ***m***=***n*** estamos en el caso srafiano de producción conjunta. De este conjunto de ecuaciones obtenemos por sustitución:

(72) $$LW(1+G)I = pX(R-G)I$$

ecuación que desarrollada de forma ordinaria:

(72b) $$\sum_{i=1}^{n} l_i w_i (1+g_i) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij}\left(R_j - g_j\right)$$

No tenemos, como en el modelo anterior, una única tasa de salarios ni de ganancias, por lo que vamos a sustituir en (72b) las siguientes ecuaciones:

(73) $$\hat{w} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i w_i (1+g_i)}{\left(\sum_{i=1}^{m} l_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{m} (1+g_i)\right)}$$

(74) $$\hat{g} = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} g_i$$

Ambas, (73) y (74), sustituidas en (73), dan la fórmula que define en este modelo la frontera salario-ganancia a partir de ***n*** tasas de salarios y ***n*** tasas de ganancias:

(75) $$\boxed{\hat{w} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij}\left(R_j - g_j\right)}{n(1+\hat{g}) \times \left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right)}}$$

y ahora sí podemos asegurar que hay una relación decreciente entre salarios y ganancias con tal de que el numerador sea mayor que cero, es decir, que:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} R_j > \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} g_j \tag{76}$$

Pero vamos a ir más lejos, porque ahora sustituiremos los ***R***j (tasas máximas de ganancias de cada sector j) por un ***R*** único como:

$$\hat{R} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} R_j}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij}} \tag{76}$$

y como además el denominador de (76) vale uno por (71), queda:

$$\boxed{\hat{w} = \frac{\hat{R} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} g_j}{n\left(1+\hat{g}\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right)} = \frac{\hat{R} - pXGI}{n(1+\hat{g})LI}} \tag{77}$$

Comparando esta expresión[9] con la obtenida en el modelo anterior (68) para el valor de los salarios respecto a las ganancias se puede observar dos avances y un retroceso: 1) no hemos tenido que invertir ninguna matriz, por lo que no tenemos que conjeturar acerca del comportamiento económico de los actores para conjurar los peligros de valores negativos en los precios o salarios; 2) queda más claro aún la relación inversa entre salarios y ganancias, en una relación monótona decreciente con tal de que el denominador de (77) no se haga negativo o cero: 3) esta tercera diferencia va en contra de (77): aquí los salarios dependen, además, del conjunto de precios, cosa que no ocurría en (68). Para solventar el problema hay que partir de que los precios están dados, es decir, la relación entre salarios y ganancias es estable con precios dados. Como dice el refrán, no hay bien que por mal no venga (y al revés).

[9] Como se ve, se da en forma ordinaria y en forma matricial.

Alguien podría estar tentado en considerar al ***R*** único como igual a la razón-patrón srafiana de la producción simple. Puede coincidir o estar muy cerca ambas, pero hay que recordar que aquella razón-patrón srafiana tenía su razón de ser al no depender de los precios. Significaba 2 cosas simultáneamente: la tasa de beneficio máxima (y única) y la razón (única) entre la producción neta y los medios empleados en un sistema reducido de la economía. Aquí, la razón ***R*** significa *sólo* la tasa máxima de ganancia de cada sector ***j***. Sin embargo, sí se puede conjeturar que ambas estarán muy cerca.

Interesante en este modelo son los puntos de corte de las variables en los ejes de ordenadas y de abcisas. Veamos:

(78) $$para\ \ \hat{g}=0\ \ y\ \ g_i=0\ \ \forall i=1\ a\ n\ \ \Rightarrow\ \ \hat{w}=\frac{\hat{R}}{n\sum_{i=1}^{n} l_i}$$

(79) $$para\ \ \hat{w}=0\ \ \Rightarrow\ \ \hat{R}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} g_j$$

Lo notable de estos puntos es que el corte del eje de ordenadas (salarios igual cero) depende sólo de la razón-media de beneficios ($\hat{g}$), del número de medios usados (***n***) y de los valores-trabajo (***L***), y no de los precios ni de la matriz de requerimientos (***A***) o de sus componentes (***Y***,***X***). Podemos concluir que la "cuerda" o función que desciende en (78) hasta el punto de corte de abcisas (79), está anclada en un sólo punto en el eje de ordenadas (vertical); a diferencia de lo anterior, el punto de corte en el eje de abcisas depende de los precios ($\boldsymbol{p}_i$), de los medios de producción ($\boldsymbol{x}_{ij}$) y de las tasas de ganancia por sector o mercancía ($\boldsymbol{g}_j$), por lo que puede haber múltiples puntos de corte en el eje de abcisas (horizontal).

c) <u>Frontera salario-ganancia en producción conjunta generalizada</u>.

En este modelo vamos a completar la máxima generalización posible: ***m*** bienes finales, ***ñ*** medios de producción, ***n*** sectores, ***n*** tasas de salarios y ***n*** tasas de ganancia. La función que define el sistema es como sigue:

(80) $$\underset{1xm}{p}\,\underset{mxn}{Y}=\left[\underset{1xn}{L}\,\underset{nxn}{W}+\underset{1xm}{p}\,\underset{mx\tilde{n}}{M}\,\underset{\tilde{n}xn}{X}\right]\times\left(1+\underset{nxn}{G}\right)$$

y la que nos da el numerario que nos interesa en este caso va a ser:

(81) $$pYI-pMXI=1$$

La matriz ***M*** es sólo un instrumento auxiliar en la que cada uno de sus elementos ($\boldsymbol{m}_{ij}$) indica el medio de producción (***ñ***) del que procede cada bien final (***m***). Después de sustituciones elementales entre (80) y (81) y post-multiplicando el resultado por el vector vertical de unos ***I***, queda:

(82) $$LW(1+G)I=1-PMXGI$$

(82b) $$\sum_{i=1}^{n} l_i w_i\left(1+g_i\right)=1-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\tilde{n}}\sum_{k=1}^{n} p_i x_{ij} m_{jk} g_k$$

Haremos lo mismo que con el modelo anterior y calculamos el tipo de salario medio ($\hat{w}$) y el de ganancia media ($\hat{g}$) y queda:

(83) $$\boxed{\hat{w}=\frac{1-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\tilde{n}}\sum_{k=1}^{n} p_i m_{ij} x_{jk} g_k}{n\left(1+\hat{g}\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right)}=\frac{1-pMXGI}{n(1+\hat{g})LI}}$$

La diferencia con lo anterior es que en este modelo no hemos empleado las razones máximas de beneficio $\boldsymbol{R}_i$ por cada sector. También es evidente que la relación entre el salario medio y las ganancias (media y de cada sector) es decreciente, donde se pueden hacer las mismas consideraciones generales respecto al comportamiento de la función que ya se han hecho. Resulta curioso que la forma más generalizada de la frontera salario-ganancia es la más sencilla formalmente. Aquí, ni hemos empleado ningún ***R*** como se ha dicho, ni hemos invertido ninguna matriz. Es verdad que esta frontera depende de los precios que, en todo momento, son de equilibrio, por lo que si los consideramos dados, la forma de ajuste ante un movimiento de las tasas de ganancia sectoriales es un *deslizamiento* de los salarios en dirección contraria. Ante cualquier variación de los precios se va a producir un movimiento de *traslación* de la frontera w-g, al igual que si se mueven algunos de los componentes de la matriz auxiliar, ***M***, o de los medios de producción, ***X***, o de los inputs de trabajo, ***L***. También es evidente que, si consideramos como variables los precios y los salarios y, en cambio, todas las demás variables dadas, los salarios se moverán en dirección contraria a los precios. Todo lo anterior siempre que el numerador de (83) sea positivo, es decir que:

(84) $$pMXGI < 1 = pYI - pMXI$$

que es lo mismo que decir que:

(85) $$pYI > pMX(1+G)I$$

cosa natural, salvo que consideremos que los salarios sean cero y que estos estén integrados juntos con los medios de producción (***X***) al igual que el hierro, la cebada o las grúas[10].

En cuanto a los puntos de corte, son aún más sencillos:

(86) $$para\ \ \hat{g}=0\ \ y\ \ g_i=0\ \ \forall i=1\ \ a\ \ n\ \ \Rightarrow\ \ \hat{w}=\frac{1}{n\sum_{i=1}^{n} l_i}$$

(87) $$para\ \ \hat{w}=0\ \ \Rightarrow\ \ \hat{R}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{ñ}\sum_{k=1}^{n} p_i m_{ij} x_{jk}}$$

El punto de corte de ordenadas (86) es evidente simplemente dando el valor cero a las ganancias (tanto la media como las sectoriales) en (83). En cambio, (87) exige alguna explicación adicional porque lo que se ha hecho es calcular un tipo único de ganancia máxima $\hat{R}$ tal que cumpla que:

---

[10] Cosa que se considera de forma didáctica cuando se estudia el modelo de Leontief cerrado, es decir, sin excedente. El propio Sraffa lo considera en su obra en el primer capítulo.

(88) $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{ñ}\sum_{k=1}^{n} p_i m_{ij} x_{jk} g_k = \hat{R}\times\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{ñ}\sum_{k=1}^{n} p_i m_{ij} x_{jk}$$

y que dando el valor cero a la tasa media de los salarios en (83) y reemplazando (88) en el numerador, queda (87).

Apéndice IV

Si la producción es simple, se tiene la ecuación $YQ=(1+R)XQ$, donde ***Y*** es la matriz *diagonal* de bienes finales, donde ***R*** es la razón-patrón srafiana y (*1+R*) es el autovalor Perrón-Froebenius (el más alto de todos en valor absoluto) siempre que la matriz de medios de producción ***X*** la sustituyamos por *AY*, siendo ***A*** la matriz de requerimientos con las siguientes características: ha de ser mayor que cero, irreductible y productiva (*Y>AY*). Con ello se garantiza un conjunto de multiplicadores ***Q*** todos positivos.

Si estamos en la producción conjunta srafiana (o no esrafiana), entonces la matriz ***Y*** no es diagonal, sino que tiene (o puede tener) **n**x**n** elementos distintos de cero. Con ello la matriz $A=XY^{-1}$ no puede garantizarse que cumpla los 3 requisitos anteriores. Eso implica que, aún cuando sea positivo el producto *YQ*, lo sea todos y cada uno de sus multiplicadores $\left(\Sigma_{i=1}^{i=n}\Sigma_{j=1}^{j=n}y_{ij}q_j=(1+R)\Sigma_{i=1}^{i=n}\Sigma_{j=1}^{j=n}x_{ij}q_j\right)$. Y si esto no se cumple, no se puede asegurar que todos los multiplicadores sean positivos (teorema P-F). Y si se calculan los autovalores y autovectores por la izquierda con la ecuación $pY=(1+R)pX$, lo que no se puede asegurar es que todos los precios sean positivos.

Bibliografía

Afriat, S.: “Sraffa´s Prices”, Universitá degli Studi di Siena, quaderni 474.
www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf

Ahijado, M.: “Distribucción, precios de producción y crecimiento”, 1982, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Caballero, A. y Lluch, E.: “Sraffa en España”, Investigaciones Económicas (2ª época, vol. X, n.º 2), 1986.

Dobb, M.: “Teoría del valor y de la distribución desde Adam Smith, edit. Siglo XXI editores.

Dobb, M.: “The Sraffa system and the critique of neoclassical theory of distribution”, 1970.

Estrin, S. y Laidler, D: “Introduction microeconomics”.

Fiorito, Alejandro: “La implosión de la economía neoclásica”. Está en la red: www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf

Foncerrada, Luis Antonio: “Sraffa y Böhm-Bawerk”. Está en la red: http://www.economia.unam.mx/secss/docs/tesisfe/FoncerradaPLA/tesis.pdf

Gehrke, Ch.y Kurz, D.: “Sraffa on von Bortkiewicz”. Está en la red: http://www.newschool.edu/cepa/events/papers/050509_Bortkiewicz.pdf

Harcourt, G.C.: “Teoría del capital” (*Some Cambridge controversies in the theory of capital, 1975*), apéndice al cap. 4, 1975, edit. Oikos-tau.

Heahtfield, D. F.: “Productions funtions”.

Marx, Carlos: “El método en la Economía Política”, 1974, Ediciones Grijalbo, S.A.

Marx, Carlos: “El Capital”, en el FCE, traducción de Wenceslao Roces.

Meade, J.: “A neo Classical Theory of Economic Growth”, 1961.

Meek, R.: “Mr. Sraffa´s Rehabilitationof Classical Economics”, 1961

Mora Plaza, A.: “Aspectos de la economía de Sraffa”, revista: Nómadas, n. 23, U. Complutense de Madrid, enlace: http://www.ucm.es/info/nomadas/23/antoniomora.pdf

Morhisima, M.: “La teoría económica de Marx” (*Marx´s Economics, 1973*), 1977, pág. 15, edit. Tecnos.

Moseley, F.: “El método lógico y el problema de la transformación”.
http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm

Murga, Gustavo: “Piero Sraffa”.
http://marxismo.cl/portal/index.php?option=com_content&task=view&id=100&Itemid=1

Nuti, D.: “Capitalism, Socialism and sleady growth”, 1970.

Okishio, N.: “A mathematical note on marxian theorems”, 1963.

Pasinetti. L.: “Critical of the neoclassical theory of growth and distribution”. Está en la red:
http://www.unicatt.it/docenti/pasinetti/pdf_files/Treccani.pdf

Pasinetti, L.: “Structural Change and Economic Growth: a theoretical essay on the dynamics of Wealth of Nations”, 1981, Cambridge University Press.

Pasinetti, L.: “Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth”, 1961/2.

Pasinetti, L.: “Switches of technique and the rate of return in Capital Theory”, 1969.

Pasinetti, L.: “Crecimiento económico y distribucción de la renta” (“*Growth and Income Distribution*”, 1974), 1978, Alianza Editorial.

Pasinetti, L.: “Lecciones de teoría de la producción” (“Lezioni di teoria della produzioni”, 1975), 1983, FCE.

Peris i Ferrando, J.E: “Análisis de la resolubilidad de modelos lineales de producción conjunta”, 1987, en internet:
http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/3829/1/Peris%20Ferrando,%20Josep.pdf

Potier, J.P.: “Piero Sraffa”, 1994, edicions Alfons Magnànim.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Robinson, J.: “Ensayos críticos”, 1984, Ediciones Orbis.

Samuelson, Paul: “Understanding the Marxian notion of Exploitation”, 1971.

Sargent, T.J.: “Teoría macroeconómica” (*Macroeconomic Theory, 1979*), 1988, Antoni Bosch editor.

Schumpeter, J. A.: “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analisis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Steedman, I.: “Marx, Sraffa y el problema de la transformación” (*Marx after Sraffa, 1977*), 1985, F.C.E.

Sraffa, Piero: “Producción de mercancías por medio de mercancías” (*Production of commodities by means commodities, 1960*), 1975.

Schumpeter, J. A.: “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analisis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Solow, R.: “The interest rate and transition between techniques”, 1967.

Sraffa, Piero: “Producción de mercancías por medio de mercancías” (*Production of commodities by means commodities, 1960*), 1975, Oikos-Tau.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Vegara, J. M.: “Economía política y modelos multisectoriales”,1979, edit. Tecnos.

Varios,: “Matemáticas avanzadas aplicadas a la Economía”, UNED, 2001.

AMP, Madrid, 7 de enero de 2010.