Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar
Noviembre-Diciembre, 2023, Volumen 7, Número 6
https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i6.8847

# Ecuación de la Recta Bajo Distintas Razones

**Erik López-García**[1]
eriklg@zacatepec.tecnm.mx
https://orcid.org/0000-0003-2667-6474
Tecnológico Nacional de México
IT de Zacatepec
México

**Manuel Salgado Rodríguez**
manuel.sr@zacatepec.tecnm.mx
https://orcid.org/0009-0002-1143-9281
Tecnológico Nacional de México
IT de Zacatepec
México

**Enrique de Jesús Moreno Carpintero**
enrique.mc@zacatepec.tecnm.mx
https://orcid.org/0000-0002-5472-1503
Tecnológico Nacional de México
IT de Zacatepec
México

**Irma Magali Rojas Campos**
irma.rc@zacatepec.tecnm.mx
https://orcid.org/0009-0009-1623-7620
Tecnológico Nacional de México
IT de Zacatepec
México

**Abel Flores Moreno**
abel.fm@zacatepec.tecnm.mx
https://orcid.org/0009-0008-3833-167X
Tecnológico Nacional de México
IT de Zacatepec
México

**José Rodolfo Sánchez Rivera**
L19090925@zacatepec.tecnm.mx
https://orcid.org/0009-0006-7817-7334
Tecnológico Nacional de México
IT de Zacatepec
México

**RESUMEN**

La manera común en la que calculamos la ecuación de una recta es por la razon de la tangente, dado que es la mas facil de calcular por el menor número de operaciones. Sin embargo, en este artículo vemos el comportamiento de las demás razones para la obtención de una recta. El resultado al que llegamos es el mismo en todas las razones, es decir, demostramos que no importa la razon por el que calculemos la ecuación de la recta, la ecuación simplificada es la misma. En pocas palabras, la ecuación de una recta es invariente con las razones trigonométricas.

***Palabras clave:*** ecuación de la recta; razones trigonométricas; geométria analitica

[1] Autor principal.
Correspondencia: enrique.mc@zacatepec.tecnm.mx

# Equation of the Line Under Different Ratios

**ABSTRACT**

The common way in which we calculate the equation of a line is by the tangent ratio, since it is the easiest to calculate due to the fewest number of operations. However, in this article we see the behavior of the other reasons mathematics for obtaining a straight line. The result we get is the same in all reasons, and to say, we demonstrate that it doesn't matter the reason why we calculate the equation of a line, the simplified ecuation is the same. Simply put,the equation of a line is invariant with trigonometric ratios.

***Keywords*:** equation of the line; trigonometric ratios; analytic geometry

*Artículo recibido 15 noviembre 2023*
*Aceptado para publicación: 20 diciembre 2023*

## INTRODUCCIÓN

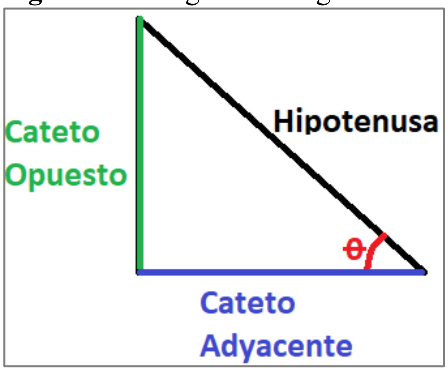
Desde que cursamos la educación preescolar y hasta llegar a la educación superior, desarrollamos conceptos y fundamentos acerca de las matemáticas, en donde empezamos a desarrollar cierta inteligencia e inclusive estrategias para resolver diversos problemas matemáticos, que a veces, lo hacemos hasta inconscientemente. Pero es cierto, que a medida que vamos cursando diversos grados, las matemáticas se nos vuelven tediosas, aburridas y en cierto punto incomprensibles. La trigonometría, así como varias ramas de las matemáticas juega un papel muy importante en el conocimiento del ser humano, el explicar y entender dicha rama, no siempre da los resultados deseados, sin embargo, hoy en día la investigación en este rubro es importante, ya que se desarrollan nuevas técnicas y/o estrategias para el mejor aprendizaje (Fernández et al., 2016; San Martín, 2013).

La trigonometría por su parte estudia las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo, de aquí, que las razones trigonométricas son las relaciones entre los lados de un triángulo y dependen de los ángulos de este. Las razones trigonométricas básicas son: seno, coseno y tangente, y su importancia es tal que se utilizan en múltiples casos de la ingeniería (Vázquez, 2020)

A través de la trigonometría podremos resolver diferentes problemas con el fin de facilitar su cálculo y exactitud en la vida diría, teniendo en cuenta que los análisis matemáticos nos ayudan a tener una mejor eficiencia en todos los trabajos que efectuemos.

A través de un triángulo rectángulo tenemos 6 diferentes tipos de razones trigonométricas (Marcela, 2021), dependiendo el lado que tomemos en cuenta (Benjamín, 2009). Véase la siguiente figura:

**Figura 1**. Triángulo rectángulo



**Las seis razones trigonométricas que se conocen (Sanabria, 2004), (Paz, 2014) son:**

$$Seno(\theta) = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa}, Coseno(\theta) = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa},$$

$$Tangente(\theta) = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente}, Cosecante(\theta) = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ Opuesto},$$

$$Secante(\theta) = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ Adyacente}, Cotangente(\theta) = \frac{C.\ Adyacente}{C. Opuesto}.$$

Se puede notar que las razones cosecante, secante y cotangente son los recíprocos de las razones trigonométricas básicas $Seno$, $Coseno$ y $Tangente$ (Gómez, 2004), es decir, se tienen las siguientes identidades trigonométricas (Alexy, 2016):

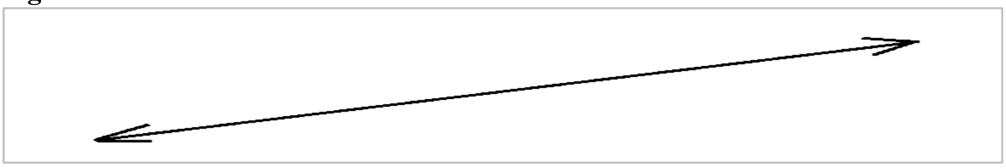
$$Cosecante(\theta) = \frac{1}{Seno(\theta)},$$

$$Secante(\theta) = \frac{1}{Coseno(\theta)},$$

$$Cotangente(\theta) = \frac{1}{Tangente(\theta)}.$$

Por definición una línea recta, es una línea que se extiende en una misma dirección (Ortiz, 2007), (López, 2009). Véase la siguiente figura.

**Figura 2.** Línea recta.

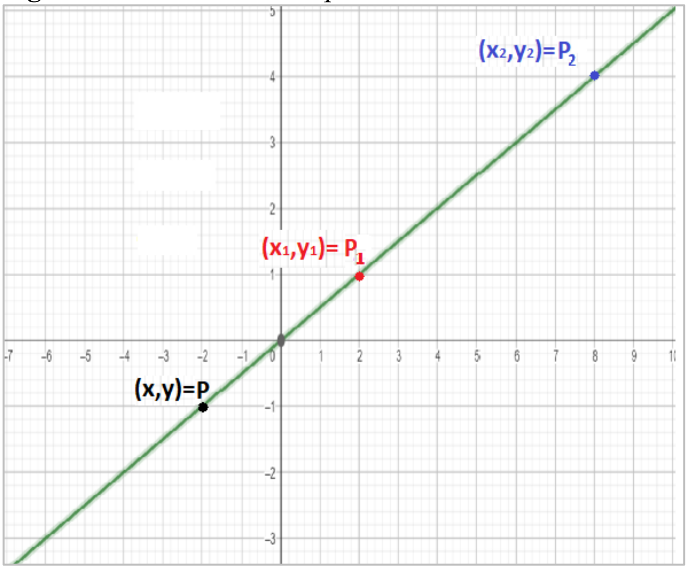


En los cursos de geometría analítica (Esteban, 2016), se ve el tema de la ecuación de una recta, donde se tiene la siguiente formula con dos puntos dados $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \quad \ldots Ec. (1)$$

Vease la siguinte figura.

**Figura 3**. Línea recta en el plano cartesiano.




Si pasamos el factor $(x - x_1)$ de la ecuación (1) al miembro izquierdo (Aguilar, 1998), nos queda la siguiente expresión:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad \ldots Ec. (2)$$

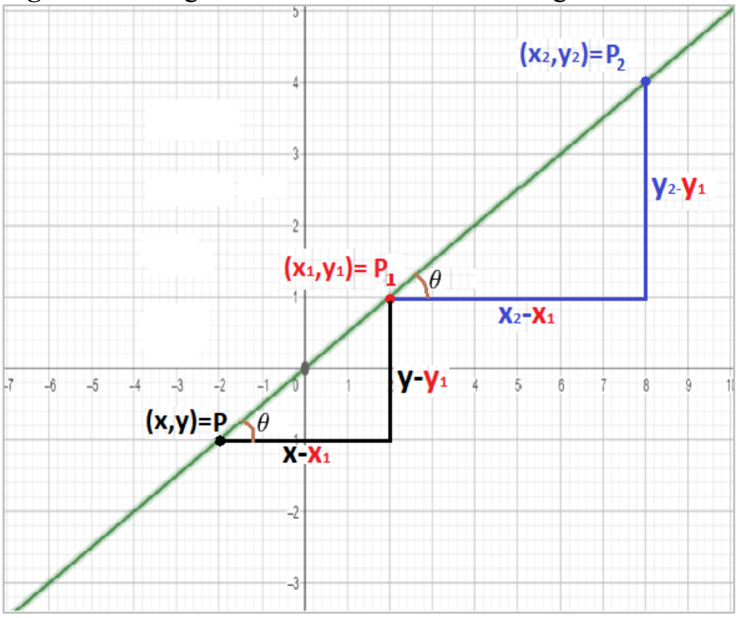
Está ecuación la podemos interpretar como la función tangente de los triángulos correspondientes a los puntos dados $P_1$ y $P_2$ con la diferentes de sus ordenadas y abscisas respectivas (Apolo, 2013), véase la figura 4.

Ya que la dirección no cambia por definición de línea recta, esto nos dice que la razón trigonométrica tangente no varía en ninguna elección de dos puntos de la recta (Vázquez, 2009), en pocas palabras, se conserva el ángulo $\theta$ desde cualesquiera dos puntos de está.

$$\text{Tangente}(\theta) = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ahora que pasa si iniciamos desde otras funciones trigonométricas diferentes a la tangente, como, por ejemplo, la razón seno o coseno (Gil, 2021). Demostraremos que no importa la razón trigonométrica que utilicemos siempre llegamos a la misma ecuación de la recta, es decir la ecuación (1).

**Figura 4.** Triángulos con las diferencias de longitudes.




Lo relevante de esto, es que demostraremos que la ecuación de una recta es invariante ante cualquier razón trigonométrica y esto lo podemos aplicar para trabajar con la razón trigonométricas más fácil de operar, que en este caso es por medio de la razón tangente para llegar a la ecuación de una recta (Del, 2008).

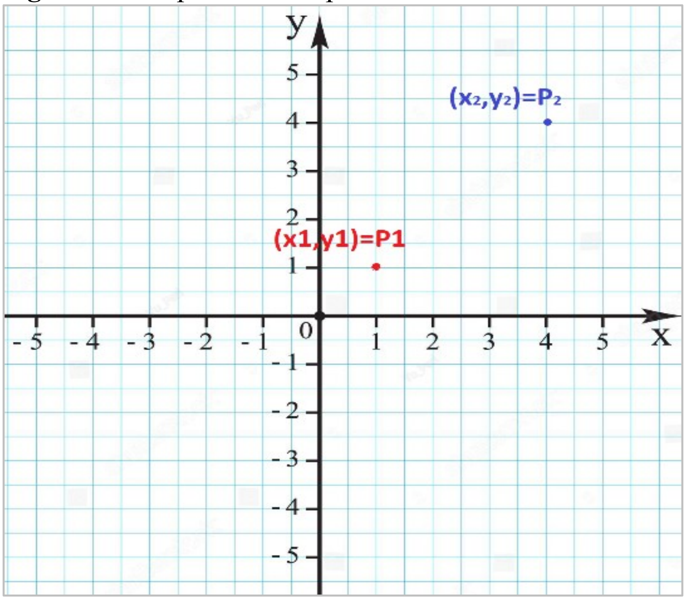
Tangente( $\theta$).

**METODOLOGÍA**

La investigación que realizamos es de matemáticas teóricas, para ser más específico en "Geometría analítica". En este estudio resaltamos que la metodología empleada es la algebraica, es decir, no empleamos algo cualitativo o cuantitativo, sino el álgebra de manera directa para obtener resultados de la recta en el plano cartesiano.

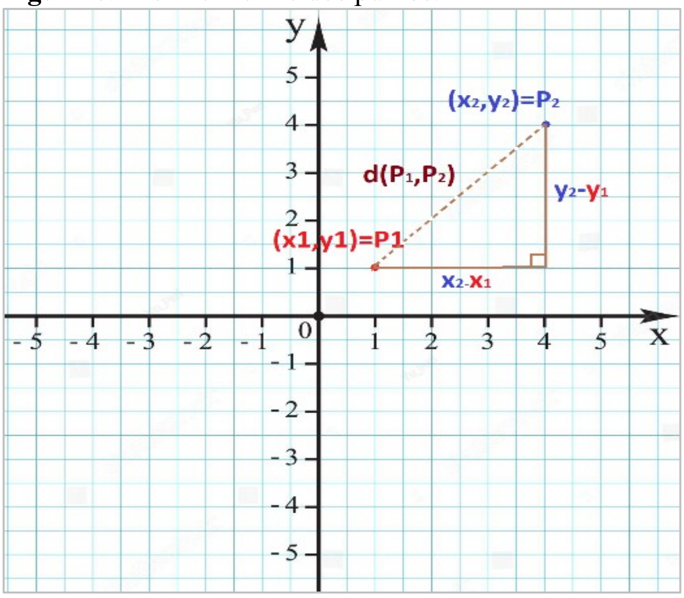
Dentro de la teoría que ocupamos, es la fórmula de la distancia entre dos puntos en un plano cartesiano (Lorenz, 2012), ya que tenemos las distancias de los catetos opuesto y adyacentes, así como las hipotenusas de los correspondientes triángulos hechos por medio de la recta del plano cartesianos y los puntos dados (Caballero, 2007). Véase la figura 5.

**Figura 5.** Dos puntos en el plano cartesiano.




Dados dos puntos en el plano cartesiano $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, vamos a encontrar la distancia entre ellos (denotada por $d(P_1, P_2)$) al tomar en cuenta el triángulo rectángulo ⊿ que podemos ver con la diferencia de sus longitudes correspondientes de los dos puntos (Ramos, 2014). Véase la siguiente figura.

**Figura 6.** Distancia entre dos puntos.




La distancia $d(P_1, P_2)$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo ⊿ (Ángel, 2022), por lo tanto, al utilizar el Teorema de Pitágoras (el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos) podemos calcular la distancia entre los puntos (Vargas, 2013) y seria la siguiente:

$$(d(P_1, P_2))^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

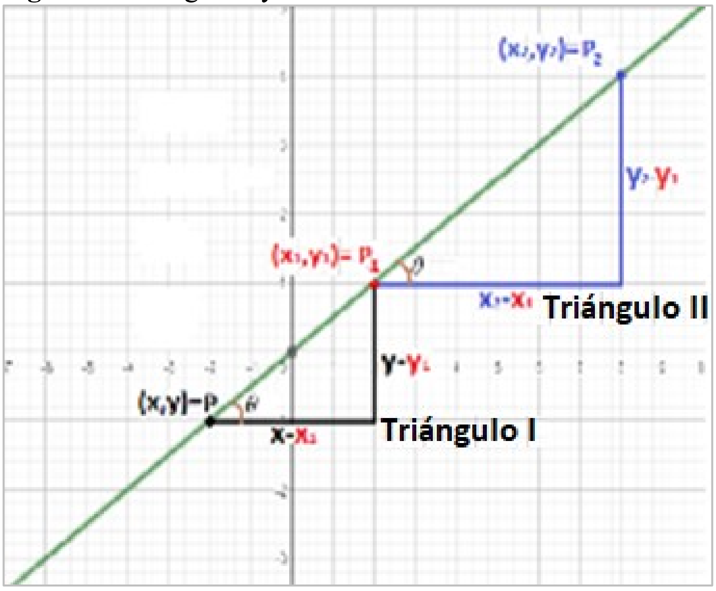
$$\Rightarrow \quad d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad ...Ec.(3)$$

Esta ecuación 3 es la que utilizaremos para encontrar la ecuación de la recta con las diferentes razones trigonométricas (Perry, 2000).

**RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

Por medio de los puntos fijos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y un punto arbitrario $P = (x, y)$ de la línea recta, formamos dos triángulos rectángulos, véase la siguiente figura.

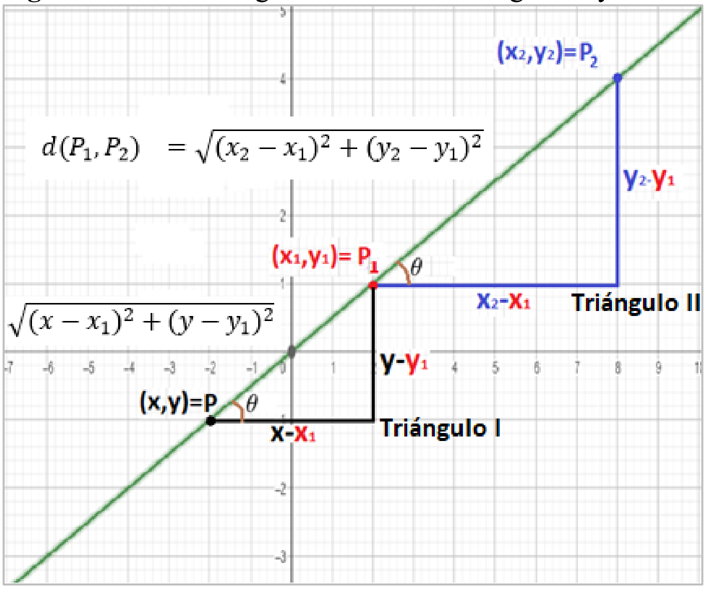
**Figura 7.** Triángulo I y II.




Por definición de línea recta, tenemos que las razones trigonométricas de los triángulos I y II son iguales (porque la inclinación de una recta no varía, es decir, siempre tiene el mismo ángulo). Entonces, $Seno$ del triángulo I es igual al $Seno$ del triángulo II, dado que tienen el mismo ángulo de inclinación $\theta$, lo mismo pasa para las demás razones trigonométricas como $Coseno$, $Tangente$, $Secante$, $Cosecante$ y $Cotangente$.

Véase la figura.

**Figura 8**. Razones trigonométricas de triángulos I y II.




Demostraremos, que no importa la razón trigonométrica que ocupemos, siempre al simplificar llegamos al mismo resultado, es decir, la ecuación de la recta:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

**I CASO. Razón trigonométrica *Seno***. La razón $Seno(\theta)$ de los triángulos I y II es:

$$Seno(\theta)=\frac{y-y_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}.$$

Simplificando:

$$\frac{y-y_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

$$\Rightarrow\frac{(y-y_1)^2}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\frac{(y_2-y_1)^2}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{(y-y_1)^2}=\frac{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}{(y_2-y_1)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{(x-x_1)^2}{(y-y_1)^2}+\frac{(y-y_1)^2}{(y-y_1)^2}=\frac{(x_2-x_1)^2}{(y_2-y_1)^2}+\frac{(y_2-y_1)^2}{(y_2-y_1)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{(x-x_1)^2}{(y-y_1)^2}+1=\frac{(x_2-x_1)^2}{(y_2-y_1)^2}+1$$

$$\Rightarrow\frac{(x-x_1)^2}{(y-y_1)^2}=\frac{(x_2-x_1)^2}{(y_2-y_1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x-x_1}{y-y_1}=\frac{x_2-x_1}{y_{2-}y_1}$$

$$\Rightarrow \frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_{2-}y_1}{x_2-x_1}$$

$$\Rightarrow y-y_1=\frac{y_{2-}y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

Demostramos que al simplificar la razón trigonométrica $Seno$, obtenemos la misma ecuación de la recta (la ecuación (1)).

**II CASO. Razón trigonométrica $\boldsymbol{Coseno}$.** La razón trigonométrica $Coseno(\theta)$ de los triángulos I y II es:

$$Coseno(\theta)=\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}=\frac{x_{2-}x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}.$$

Simplificando:

$$\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}=\frac{x_{2-}x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-x_1)^2}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\frac{(x_{2-}x_1)^2}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{(x-x_1)^2}=\frac{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}{(x_{2-}x_1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-x_1)^2}{(x-x_1)^2}+\frac{(y-y_1)^2}{(x-x_1)^2}=\frac{(x_2-x_1)^2}{(x_{2-}x_1)^2}+\frac{(y_2-y_1)^2}{(x_{2-}x_1)^2}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{(y-y_1)^2}{(x-x_1)^2}=1+\frac{(y_2-y_1)^2}{(x_{2-}x_1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(y-y_1)^2}{(x-x_1)^2}=\frac{(y_2-y_1)^2}{(x_{2-}x_1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_{2-}x_1}$$

$$\Rightarrow y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_{2-}x_1}(x-x_1).$$

Demostramos que al simplificar la razón trigonométrica $Coseno$, obtenemos la misma ecuación de la recta (la ecuación (1)).

**III CASO. Razón trigonométrica $\boldsymbol{Tangente}$.** La razón trigonométrica $Tangente(\theta)$ de los triángulos I y II es:

$$Tangente(\theta) = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_{2-}x_1}.$$

Despejamos "$y - y_1$" y obtenemos la misma ecuación de la recta (la ecuación (1)).

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_{2-}x_1}(x - x_1).$$

Los casos siguientes: IV CASO Razón trigonométrica $Cotangente$, V CASO Razón trigonométrica $Secante$ y VI CASO Razón trigonométrica $Cosecante$, se demuestran de manera sencilla utilizando las identidades trigonométricas de la introducción.

**CONCLUSIONES**

La ecuación de la recta nos lleva a muchos resultados de las matemáticas, desde el trazo de líneas rectas perpendiculares, paralelas, oblicuas hasta una familia de rectas que más se acercan a la gráfica de una función (es decir, las rectas cuyas pendientes son derivadas de la función evaluadas en un punto indicado).

El estudio de la ecuación de la recta en los libros de matemáticas, se hace desde el punto de vista de una sola función trigonométrica, es decir, desde la función tangente. Aquí, realizamos un estudio más detallado, es decir, tomamos en cuenta todas las funciones trigonométricas para obtener la ecuación dela recta.

Hemos podido demostrar que no importa la razón trigonométrica que ocupemos ($seno$, $coseno$, $tangente$, $secante$, $cosecante$ y $cotangente$) para la definición de la ecuación de una recta, siempre llegamos a la misma ecuación.

$$y - y_1 = \frac{y_{2-}y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

De esta forma, hemos visto que la ecuación de una línea recta es invariante ante cualquier razón trigonométrica.

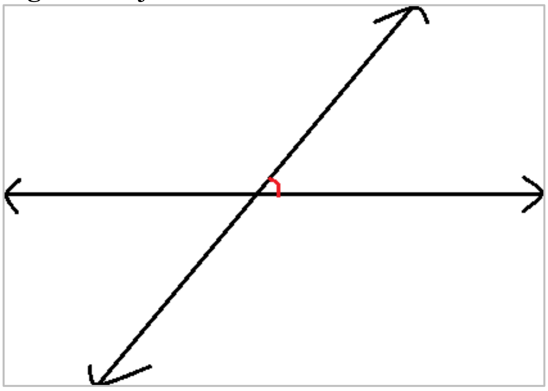
Por medio de estos resultados, recomendamos que la función trigonométrica más sencilla a utilizar para encontrar la ecuación de una recta es la razón $Tangente$.

$$Tangente(\theta) = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente}.$$

A través de este estudio, se corroboro lo que es mejor en el estudio de la recta, en pocas palabras, la fórmula de la ecuación de la recta más simplificada es la ecuación 1.

Una forma de generalizar esta investigación, es verificar que pasa cuando el plano cartesiano no se hace con rectas perpendiculares, sino con rectas que se cortan oblicuamente; conjeturando si llegamos a la misma ecuación de la recta sin importar las funciones trigonométricas o leyes trigonométricas que se ocupen. Véase la siguiente figura.

**Figura 9**. Ejes con rectas oblicuas.



## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS


Aguilar, V. H. (1998). Revisitando la construcción de significado en torno de las ecuaciones lineales con dos incógnitas: observaciones empíricas con estudiantes de 16-18 años de edad. http://bgtq.ajusco.upn.mx:8080/jspui/handle/123456789/164

Alexy, T. a. F. (2016). Sobre las razones y las funciones trigonométricas: ¿Qué tratamiento hacen los libros de texto? https://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/7556

Ángel, P. H. M. (2022, May 1). Implementación de una secuencia didáctica mediada con TIC como estrategia para la enseñanza de las transformaciones en el plano cartesiano en los estudiantes de grado sexto de la institución educativa Dolores Garrido de González de Cereté. https://repositorio.unicartagena.edu.co/handle/11227/15628

Apolo, C. A. (2013, January 16). Elementos para el diseño de una secuencia didáctica para el estudio de la ecuación vectorial de la Recta. https://repositoriodigital.ipn.mx/jspui/handle/123456789/11467

Benjamín, B. T. (2009). Álgebra y trigonometría. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/1630

Caballero, R. M. (2007). Medidor de distancia entre puntos por GPS.

http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/20347

Del Azuay, B. H. M. G.-. U. (n.d.). Precálculo: con avances de cálculo. Biblioteca Hernán Malo González De La Universidad Del Azuay. https://biblioteca.uazuay.edu.ec/buscar/item/81973

Esteban, L. V. J. (2016, October 12). Ecuaciones: lineal y cuadrática. http://repository.ucatolicaluisamigo.edu.co/handle/ucatolicaamigo/1722

Fernández, E., Hidalgo, J., & Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 34(3). https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/v34-n3-martin-ruiz-rico

Gil, D. C. S. (2021). La comprensión de la recta desde la teoría APOE. Dialnet. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8114573

Gómez, P. (n.d.). Estudio de las funciones trigonométricas con Cabri: una estrategia para su enseñanza - Funes - Universidad de los Andes. http://funes.uniandes.edu.co/2687/

López, J. V. B. (2009). La ecuación de la línea recta en la modelación de fenómenos físicos. Dialnet. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3238578

Lorenz, F. U. K. (2012, June 30). Cálculo de la Distancia entre dos Puntos. https://repositorio.konradlorenz.edu.co/handle/001/3209

Marcela, E. a. L. (2021, September 10). Fórmula de la curvatura de una curva plana con funciones trigonométricas. https://repository.unad.edu.co/handle/10596/42336

Ortiz, J. (n.d.). Estudio de las funciones trigonométricas y sus inversas en un ambiente de geometría dinámica. Una propuesta didáctica - Funes - Universidad de los Andes. http://funes.uniandes.edu.co/18517/

Paz, J. L. R. (2014). Construcción de la gráfica de las funciones trigonométricas utilizando geogebra. Big Bang Faustiniano, 2(1). https://doi.org/10.51431/bbf.v0i0.350

Perry, P. (2000). Una propuesta para abordar el teorema de Pitágoras en clase. Repositorio Institucional Séneca. https://repositorio.uniandes.edu.co/entities/publication/5e104791-7363-4b82-a11f-b70d1b1eb1e1

Ramos, L. M. (2014, December 1). El vídeo como recurso didáctico para reforzar el conocimiento. Morales Ramos | Memorias Del Encuentro Internacional De Educación a Distancia. https://www.udgvirtual.udg.mx/remeied/index.php/memorias/article/view/3

San Martín, O. (2013). Representación y visualización en didáctica de la trigonometría: un calculador gráfico de valores de funciones trigonométricas. XII Congreso Nacional de Investigación Educativa. Universidad de Guanajuato, México. https://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v12/doc/0784.pdf

Sanabria, G. (2004). El Método de Exhausión de Arquímedes y las Funciones Trigonométricas. Revistas.tec.ac.cr. https://doi.org/10.18845/rdmei.v5i1.2306

Vargas, G. V. (2013, January 1). La enseñanza del teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del geogebra, según el modelo de Van Hiele. https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/4945

Vázquez, B. O. (2020). Identidades trigonométricas. Con-Ciencia Boletín Científico De La Escuela Preparatoria No. 3, 7(14), 33-34. https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa3/article/view/6113

Vázquez, P. S. (2009, December 14). Ideas para Enseñar Aportes didácticos para abordar el concepto de función. https://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/1075