Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, Ciudad de México, México.
ISSN 2707-2207 / ISSN 2707-2215 (en línea), enero-febrero 2024,
Volumen 8, Número 1.

DOI de la Revista: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i1

APROXIMACIÓN LINEAL A LA RAÍZ CUADRADA PARA ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DE INGENIERÍA

LINEAR APPROXIMATION TO THE SQUARE ROOT OF AN INTEGER NUMBER FOR STUDENTS AT FIRST YEAR OF ENGINEERING

Ramón Berber Palafox
Instituto Tecnológico de Toluca, México

Jesús González Briones
Instituto Tecnológico de Toluca, México

Martha Martínez Moreno
Instituto Tecnológico de Toluca, México

María Luisa Ernestina Velázquez Sánchez
Instituto Tecnológico de Toluca, México

DOI: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i1.10498

Aproximación Lineal a la Raíz Cuadrada para Estudiantes de Primer Año de Ingeniería

Ramón Berber Palafox[1]
rberberp@toluca.tecnm.mx
https://orcid.org/0009-0000-8701-1359
Profesor adscrito al Departamento de Ciencias Básicas
del Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Toluca
México

Jesús González Briones
jgonzalezb@toluca.tecnm.mx
https://orcid.org/0009-0006-8834-2102
Profesor adscrito al
Departamento de Ciencias Básicas
del Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Toluca
México

Martha Martínez Moreno
martha.mm@toluca.tecnm.mx
https://orcid.org/0000-0003-3793-6315
Profesora adscrita al
Departamento de Sistemas y Computación
del Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Toluca
México

María Luisa Ernestina Velázquez Sánchez
mvelazquezs@toluca.tecnm.mx
https://orcid.org/0000-0002-4339-4471
Profesor adscrito al
Departamento de Ciencias Básicas
del Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Toluca
México

RESUMEN

Como profesores adscritos al departamento de ciencias básicas y basado en la experiencia docente en las áreas de ingeniería, se describe en esta publicación, una propuesta práctica para profesores y estudiantes de primer año de estudios en cualquiera de las ingenierías impartidas por el Tecnológico Nacional de México, cuya intención es incrementar la competencia del razonamiento aritmético en los estudiantes. Se propone que los estudiantes, durante la clase teórica y durante el examen, dejen a un lado la calculadora en materias de matemáticas, sin pretender mantenerlos alejados de las tecnologías; en las materias de matemáticas o ciencias básicas se estudian cinco temas durante un semestre, y en cada tema se deben realizar una o dos prácticas utilizando software de orden matemático, por ejemplo, GeoGebra. En esta propuesta se muestran cuatro ejemplos de aproximación de la raíz cuadrada, cada uno resuelto de cuatro formas diferentes, numeradas L1 y L2, aproximación lineal, D1, aproximación usando diferenciales, y VE, valor exacto de la calculadora, éste último solamente para efectos de comparar la precisión de las aproximaciones. Al final se muestra una justificación de la pertinencia de la aproximación lineal.

Palabras clave: aproximación, raíz, cuadrada, ingenierías

[1] Autor principal
Correspondencia: rberberp@toluca.tecnm.mx

Linear Approximation to the Square Root of an Integer Number for Students at first Year of Engineering

ABSTRACT

As professors assigned to the department of basic sciences and based on teaching experience in the areas of engineering, this publication describes a practical proposal for professors and first-year students of studies in any of the engineering courses taught by the Tecnológico Nacional de México whose intention is to increase students' arithmetic reasoning competence. It is proposed that students, during the theoretical class and during the exam, put aside the calculator in mathematics subjects, without trying to keep them away from technologies; In mathematics or basic science subjects, five topics are studied during a semester, and in each topic one or two practices must be carried out using mathematical software, for example, GeoGebra. This proposal shows four examples of approximation of the square root, each one solved in four different ways, numbered L1 and L2, linear approximation, D1, approximation using differentials, and VE, exact value of the calculator, the latter only for purposes to compare the precision of the approximations. At the end a justification of the relevance of the linear approximation is shown.

Keywords: approximation, root, square, engineering

Artículo recibido 20 febrero 2024

Aceptado para publicación: 20 marzo 2024

INTRODUCCIÓN

El proceso enseñanza aprendizaje en el ámbito de las ingenierías debe ser robusto y basto en el área de las matemáticas. Esto implica el uso de métodos didácticos que lleven de la mano al estudiante para el alcance de las competencias y logre deducir el uso que se le dará a esta área del conocimiento en su vida profesional en un futuro no muy lejano al tiempo en que las está cursando.

Artigue (2011) menciona que el uso de herramientas como las calculadoras, los programas computacionales de geometría dinámica, las hojas de cálculo plantean siempre problemas a nuestros sistemas educativos, aun cuando la evolución tecnológica ofrece perspectivas radicalmente nuevas, en particular nuevas formas de interacciones sociales y didácticas, además de la cosificación de objetos matemáticos en formas directamente manipulables, de la visualización y simulación de fenómenos.

De ahí que el área de las matemáticas en la actualidad no solo se queda en los libros o fundamentos teóricos aprendidos, sino en el uso de herramientas tecnológicas, casos prácticos, aprendizaje basado en proyectos o problemas y la experiencia del docente para expresar sus conocimientos en el salón de clase, demostrando que la teoría y la práctica se pueden relacionar perfectamente al complementarse con técnicas didácticas comprobables Swain, C., & Pearson, T. (2002).

En este caso se desarrollarán problemas utilizados en exámenes utilizando un método o técnica de aproximación que permite demostrar su aplicación real y precisa. Sin desmerecer ni por supuesto, eliminar el uso tecnológico de la calculadora en otros sentidos.

Para detectar algunas áreas de oportunidad en estudiantes de ingeniería, diseñamos un examen para que fuera contestado sin necesidad de usar calculadora, de tal manera que todas las operaciones las pudieran realizar con lápiz y papel. Derivado de que, en respuestas de los exámenes de estudiantes de ingeniería en semestres anteriores, en materias como cálculo integral y cálculo vectorial, nos encontramos casos como

$$a)\ \sqrt{1}, \qquad b)\sqrt{9}, \qquad c)1^{3/2}, \qquad d)\frac{24}{6}$$

Los cuales no tenían la respuesta final simplificada como debería ser: 1, 3, 1 y 4. Nos dimos cuenta de que los alumnos necesitan un mayor acercamiento aritmético al concepto de fracciones, de la raíz cuadrada y, podríamos agregar, de las funciones seno y coseno.

Con frecuencia se hace mención, desde la primaria hasta bachillerato, de que "la matemática es considerada la base de procesos complejos de conocimiento, donde es necesario el pensamiento crítico, reflexivo y analítico" (Vergel, et al, (2015) p. 18, citado en Gómez (2021)) Adicionalmente, estamos explorando la posibilidad, ventajas y conveniencia de no usar la calculadora durante las clases ni en los exámenes en las materias de Cálculo. En el tránsito del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico y de ahí al pensamiento de cálculo infinitesimal, consideramos importante el reforzamiento de la primera etapa. "¿Por qué es esto importante? Si los estudiantes no aprenden la aritmética básica, será muy difícil, o tal vez imposible, que aprendan los conceptos abstractos de nivel superior en matemáticas". Sheets (2007, pág. 5).

Revisando publicaciones relacionadas encontramos, por ejemplo, Carneiro (1999), Trejos y Muñoz (2002). Sin embargo, el método de aproximación para la raíz cuadrada que utilizan requiere el uso intensivo de la calculadora, contrario a nuestro objetivo.

Consideramos que hacer a un lado la calculadora durante las clases de Cálculo será de gran ayuda para desarrollar las competencias genéricas de capacidad de abstracción, análisis y síntesis de acuerdo con el temario de las asignaturas cálculo diferencial, integral, vectorial y álgebra lineal (TecNM, 2016, pág. 6): "Competencias genéricas de las asignaturas de matemáticas en Ingeniería: Capacidad de abstracción, análisis y síntesis. Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas. Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente. Capacidad de trabajo en equipo".

"Para Vygotsky la función de la educación debe ser la creación de Zonas de Desarrollo Próximo (ZDP)", Rodríguez Arocho, (2001, pág. 264). Nosotros agregaríamos, además de la creación de ZDP, el mantenimiento y el fortalecimiento de las ZDP. Por ejemplo, el álgebra la situamos en la ZDP de la aritmética, por eso insistimos en practicar manualmente los procesos aritméticos; el cálculo lo situamos en la ZDP del álgebra. "La ZDP es un proceso construido conjuntamente entre profesor y alumno a través del diálogo y la mediación. La metáfora utilizada por Bruner para designar este proceso ha sido andamiaje", Padilla Partida (2006, pág. 12).

Seleccionamos un método que fuera simple, como el de aproximación lineal, llamado polinomio de interpolación de Lagrange de grado uno, Burden (1985, pág. 99). Una aproximación lineal es una aproximación de cualquier función derivable a otra función que se supone más sencilla que la anterior (Edwin Herman & Gilbert Strang, 2024).

METODOLOGÍA

Experimentación o desarrollo teórico

Aproximación lineal de la raíz cuadrada

Ejemplo 1. El algoritmo se puede encontrar en Wikipedia (2016) y en Black, (2019), donde se explican los 7 pasos para calcular la raíz precisa de cualquier número, cada paso está explicado en 4 o 6 renglones (3 cuartillas aproximadamente), es un poco extenso, por eso proponemos un método aproximado más simple. A continuación, se expone un ejemplo.

a) Algoritmo para calcular la raíz cuadrada.

Se separa de 2 en 2, de derecha a izquierda

$$\begin{array}{rl} \sqrt{1,84} & 13.5 \\ 84 & 23 \\ 69 & \\ 1500 & 265 \\ 1325 & \\ 175 & \end{array}$$

b) Aproximación lineal (L1), también llamado "aproximaciones sucesivas" en SEP (2022): se busca un número entero menor y uno mayor al número del cual se desea aproximar la raíz cuadrada, de preferencia los números enteros más cercanos.

Por ejemplo, aproximar la raíz de $\sqrt{184}$.

$a = 13^2 = 169, \quad b = 14^2 = 196, \quad c = 184$

184 está entre 169 y 196.

Restamos: $b - a = 196 - 169 = 27, \ c - a = 184 - 169 = 15.$

Dividimos: $\dfrac{c - a}{b - a} = \dfrac{15}{27} = 0.5555.$

Esta fracción se suma al predecesor.

La aproximación de la raíz $\sqrt{184}$ es: $a + \dfrac{c - a}{b - a} = 13.5555.$

c) Aproximación lineal (L2) el procedimiento es el mismo que en L1, pero ahora usamos números que no son los más cercanos, por ejemplo,

$a = 12^2 = 144, \qquad b = 15^2 = 225$

$c = 184$ está entre 144 y 225.

Restamos: $b - a = 225 - 144 = 81,\;\; c - a = 184 - 144 = 40.$

Dividimos: $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{40}{81} = 0.4938.$

$\sqrt{b} - \sqrt{a} = 15 - 12 = 3.$

$\dfrac{c-a}{b-a}\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right) = (0.4938)(3) = 1.4814$

La aproximación de la raíz $\sqrt{184}$ es:

$\sqrt{a} + \dfrac{c-a}{b-a}\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right) = 12 + 1.47 = 13.4814.$

d) Usando diferenciales (D1). (Leithold, 1982, p. 346), el método también se explica en (Purcell 2001, p. 152) y (Granville, 1998, pág. 166). $f(x) = \sqrt{x},\;\; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$a = 13^2 = 169,$

Restamos $\Delta x = c - a = 184 - 169 = 15,$

$\sqrt{184} \approx \sqrt{169} + \dfrac{1}{2\sqrt{169}}(15) = 13 + \dfrac{15}{2(13)} = 13.5769$

d) En la calculadora, valor exacto (VE): $\sqrt{184} = 13.56466$

Ejemplo 2. Aproximar la raíz: $\sqrt{20}$.

a) Aproximación lineal (L1). $a = 4^2 = 16,\;\; b = 5^2 = 25$

$c = 20$ está entre 16 y 25.

Restamos: $b - a = 25 - 16 = 9,\;\; c - a = 20 - 16 = 4.$

Dividimos: $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{4}{9} = 0.4444.$

Sumando: $a + \dfrac{c-a}{b-a} = 4 + 0.4444.$

La aproximación de la raíz $\sqrt{20}$ es 4.4444.

b) Aproximación lineal (L2), usando otros números: $a = 3^2 = 9,\;\; b = 6^2 = 36$

$c = 20$ está entre 9 y 36.

Restamos: $b - a = 36 - 9 = 27,\;\; c - a = 20 - 9 = 11.$

Dividimos: $\frac{\mathrm{c-a}}{\mathrm{b-a}} = \frac{11}{27} = 0.4074$. $\sqrt{\mathrm{b}} - \sqrt{\mathrm{a}} = 6 - 3 = 3$,

$\frac{\mathrm{c-a}}{\mathrm{b-a}}(\sqrt{\mathrm{b}} - \sqrt{\mathrm{a}}) = (0.4074)(3) = 1.2222$

La aproximación de la raíz$\sqrt{20}$ es:

$\sqrt{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{c-a}}{\mathrm{b-a}}(\sqrt{\mathrm{b}} - \sqrt{\mathrm{a}}) = 3 + 1.2222 = 4.2222.$

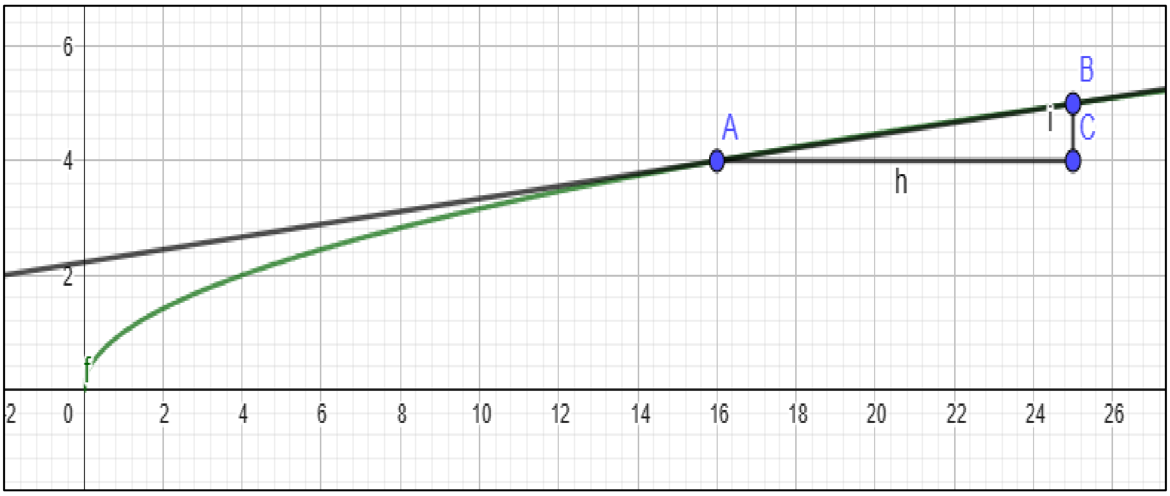
c) Usando diferenciales (D1). $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\mathrm{a} = 4^2 = 16,$

Restamos $\Delta \mathrm{x} = \mathrm{c} - \mathrm{a} = 20 - 16 = 4,$ $\sqrt{20} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}(4) = 4 + \frac{4}{2(4)} = 4.5$

d) Valor exacto (VE) $en\ la\ calculadora$: $\sqrt{20} = 4.472135$

Figura 1. Gráfica de la función raíz cuadrada con la recta secante A-B.



GeoGebra.org. Elaboración propia.

Justificación

Trataremos de esbozar una justificación de por qué es buena la aproximación lineal de la raíz cuadrada de 20, $\sqrt{20}$. Haciendo referencia a la figura 1, graficamos la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, construimos los puntos A(16,4) y B(25,5) y la recta $g(x)$ que pasa por ambos, que son datos del ejemplo 2. La ecuación de la recta la obtenemos con

$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{y}_2 - \mathrm{y\_1}}{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1} = \frac{5-4}{25-16} = \frac{1}{9}$, $\mathrm{y} - \mathrm{y}_1 = \mathrm{m}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_1)$,

$\mathrm{y} - 4 = \frac{1}{9}(\mathrm{x} - 16)$, $\mathrm{y} = \frac{1}{9}\mathrm{x} + \frac{20}{9}$

El error de aproximar la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, con la recta $g(x) = \frac{1}{9}x + \frac{20}{9}$ es

$$E(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - \left[\frac{1}{9}x + \frac{20}{9}\right]$$

Calculamos la derivada para calcular el error máximo.

$$E'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{9}, \qquad \text{igualamos a cero,} \qquad E'(x) = 0$$

Enseguida resolvemos la ecuación resultante.

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{9} = 0, \qquad \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{9}, \quad 9 = 2\sqrt{x}, \qquad x = \frac{81}{4} = 20.25$$

Evaluamos el error máximo en $x = \frac{81}{4}$,

$$E\left(\frac{81}{4}\right) = \sqrt{\frac{81}{4}} - \left[\frac{1}{9}\left(\frac{81}{4}\right) + \frac{20}{9}\right] = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} - \frac{20}{9} = \frac{1}{36} \cong 0.027$$

Ejemplo 3. Aproximar la raíz: $\sqrt{521}$.

a) Aproximación lineal (L1), $20^2 = 16$, $21^2 = 441$, $22^2 = 484$, $23^2 = 529$, $25^2 = 625$,

$c = 521$ está entre $a = 484$ y $b = 529$.

Restamos, $\quad b - a = 529 - 484 = 45$, $\quad c - a = 521 - 484 = 37$.

Dividimos: $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{37}{45} = 0.8222$.

Sumando $\sqrt{a} = 22$ más la fracción.

La aproximación de la raíz $\sqrt{521}$ es:

$$\sqrt{a} + \frac{c-a}{b-a} = 22.822.$$

b) Aproximación lineal (L2), usando otros números: $\quad a = 21^2 = 441$, $b = 25^2 = 625$

$c = 521$ está entre 625 y 441.

Restamos, $\quad b - a = 625 - 441 = 184$, $c - a = 521 - 441 = 80$.

Dividimos $\dfrac{80}{184} = 0.4347$. $\sqrt{b} - \sqrt{a} = 25 - 21 = 4$,

$(0.4347)(4) = 1.7348$

sumando, $\sqrt{a} = 21$ más la fracción:

La aproximación de la raíz$\sqrt{521}$ es: $21 + 1.7348 = 22.7348$.

c) Usando diferenciales (D1). $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$22^2 = 484$,

Restamos $\Delta x = 521 - 484 = 37$,

$$\sqrt{521} \approx \sqrt{484} + \frac{1}{2\sqrt{484}}(37) = 22 + \frac{37}{2(22)} = 22.8409.$$

d) Valor exacto (VE). *En la calculadora*: $\sqrt{521} = 22.825424$

Ejemplo 4. Aproximar la raíz $\sqrt{1452}$.

a) Aproximación lineal (L1), $38^2 = 1444$, $39^2 = 1521$,

$c = 1452$ está entre $a = 1444$ y $b = 1521$.

Restamos, $b - a = 1521 - 1444 = 77$, $c - a = 1452 - 1444 = 8$.

Dividimos $\frac{8}{77} = 0.1038$. Sumando $\sqrt{a} = 38$ más la fracción.

La aproximación de la raíz $\sqrt{1452}$ es:

$$\sqrt{a} + \frac{c-a}{b-a} = 38.1038.$$

b) Aproximación lineal (L2), usando otros números: $a = 37^2 = 1369$, $b = 40^2 = 1600$.

$c = 1452$ está entre 1369 y 1600.

Restamos, $b - a = 1600 - 1369 = 231$, $c - a = 1452 - 1369 = 83$.

Dividimos: $\frac{c-a}{b-a} = \frac{83}{231} = 0.3593$. $40 - 37 = 3$,

$$\frac{c-a}{b-a}\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right) = (0.3593)(3) = 1.0779$$

sumando, $\sqrt{a} = 37$ más la fracción:

La aproximación de la raíz$\sqrt{1452}$ es:

$$\sqrt{a} + \frac{c-a}{b-a}\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right) = 37 + 1.0779 = 38.0779.$$

c) Aproximar la raíz $\sqrt{1452}$ usando diferenciales (D1). $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$38^2 = 1444$,

Restamos $\Delta x = 1452 - 1444 = 8$,

$$\sqrt{1452} \approx \sqrt{1444} + \frac{1}{2\sqrt{1444}}(8) = 38 + \frac{4}{(38)} = 38.1052.$$

d) Valor exacto (VE). $En\ la\ calculadora$: $\sqrt{1452} = 38.10511.$

RESULTADOS

Tabla 1. Resumen de aproximaciones y valor absoluto de los errores.

	V Exacto	L1	Error	L2	Error	D1	Error
$\sqrt{184}$	13.5646	13.5555	0.0091	13.4814	0.0832	13.5769	0.0123
$\sqrt{20}$	4.472135	4.4444	0.027735	4.2222	0.249935	4.5	0.027865
$\sqrt{521}$	22.82542	22.8222	0.00322	22.7348	0.09062	22.8409	0.01548
$\sqrt{1452}$	38.10511	38.1038	0.00131	38.0779	0.02721	38.1052	0.00009
$\sqrt{4850}$	69.6419	69.6403	0.00162	69.6258	0.0161	69.6449	0.003

CONCLUSIONES

De la tabla 1 podemos observar que la aproximación lineal es una "buena" aproximación, desde el momento que seleccionamos dos números enteros cercanos al número del cual deseamos aproximar la raíz cuadrada. Otra cosa que podemos observar es que la aproximación mediante diferenciales solo es buena cuando el incremento de x es pequeño, es decir, cuando el número del cual queremos aproximar la raíz cuadrada está cercano a uno que tiene raíz cuadrada exacta, mientras que para la aproximación lineal no es necesaria esta condición.

Además, se puede concluir que el uso de las técnicas didácticas empleadas por el profesor siempre debe aportar al aprendizaje del estudiante, además deben ayudar a comprender los objetos matemáticos que se utilizan. Aun cuando haya al mismo tiempo la resistencia en las propuestas por algunos profesores, acerca de los debates recurrentes sobre la utilización de calculadoras las ciencias básicas y aprovechar toda esa experiencia en nuevas propuestas, se podría señalar que hay una brecha muy estrecha entre la enseñanza tradicional de las técnicas y una nueva visión de la integración de las matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Artigue Michéle (2011) Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. Cuadernos, 8, pp. 13-33. Université Paris Diderot - Paris 7, Laboratoire de Didactique André Revuz. Francia

Black, Paul. (2019). National Institute of Standard and Technology. Square Root.

https://xlinux.nist.gov/dads/HTML/squareRoot.html

Burden, Richard L. Burden, J. Douglas Faires y Annette M. Burden. Cengage, Análisis Numérico. 3a Ed.

Carneiro, José Paulo Q. (1999). Raíz cuadrada a través de medias... Educación Matemática, Vol. 11 Núm. 1, abril 1999, pp. 135-142. https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol11/1/11Carneiro.pdf.

Edwin Herman & Gilbert Strang. OpenStax (2024). Aproximaciones lineales y diferenciales. Recuperado de https://espanol.libretexts.org/Matematicas/Libro%3A_Calculo_(OpenStax)/04%3A_Aplicaciones_de_Derivados/4.02%3A_Aproximaciones_lineales_y_diferenciales

Gómez Gutiérrez, Héctor Manuel, (2021). Impacto académico de las estrategias empleadas en la enseñanza y evaluación de las matemáticas en los primeros semestres de educación superior. https://ciencialatina.org/index.php/cienciala/article/view/1472 https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v5i4.683 p 70

Granville, William A.. (1998). Cálculo Diferencial e Integral 1ª Edición. Limusa-Noriega Editores.

Leithold, Louis. (1982). El Cálculo con Geometría Analítica 4ª Edición. Ed. Harla.

Libros de texto de secundaria, 2º grado, SEP (2022). https://www.conaliteg.sep.gob.mx/ . https://nuevaescuelamexicana.sep.gob.mx/detalle-ficha/6107/

Padilla Partida, S., (2006). Gestión de ambientes de aprendizaje constructivistas apoyados en la zona dedesarrollo próximo. Apertura, 6(5), 8-21. Gestión de ambientes de aprendizaje constructivistas apoyados en la zona de desarrollo próximo (redalyc.org)

Purcell, E. J., Varberg, D. Rigdon, S. E. (2001). Cálculo. 8a edición. Ed. Pearson Educación.

Rodríguez Arocho, W., (2001). La valoración de las funciones cognoscitivas en la zona de desarrollo próximo. Educere, 5(15), 261-269. La valoración de las funciones cognoscitivas en la zona de desarrollo próximo (redalyc.org)

Sheets, Christina L. (2007). Calculators in the Classroom: Help or Hindrance? University of Nebraska-Lincoln.

https://digitalcommons.unl.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1060&context=mathmidactionresearch

Swain, C., & Pearson, T. (2002). Educators and technology standards: Influencing the digital divide. Journal of Research on Technology in Education, 34(3), 326-335. https://doi.org/10.1080/15391523.2002.10782353

Temario de Álgebra Lineal del Instituto Tecnológico de Toluca, Tecnológico Nacional de México (TecNM). (2016). https://www.tolucatecnm.mx/downloads/programa/6/ac003-algebra-lineal.1645164613.pdf

Temario de Cálculo Vectorial del Instituto Tecnológico de Toluca, Tecnológico Nacional de México. (2016).https://www.tolucatecnm.mx/downloads/programa/6/ac004-calculo-vectorial.1645164618.pdf

Temario de Cálculo Integral del Instituto Tecnológico de Toluca, Tecnológico Nacional de México. (2016).https://www.tolucatecnm.mx/downloads/programa/6/ac002-calculo-integral.1645164608.pdf

Temario de Cálculo Diferencial del Instituto Tecnológico de Toluca, Tecnológico Nacional de México. (2016).https://www.tolucatecnm.mx/downloads/programa/6/ac001-calculo-diferencial.1645164604.pdf

Trejos Buriticá, Omar Iván, Muñoz Guerrero, Luis Eduardo, (2002). Cálculo de aproximación a la raíz cuadrada con el método babilónico usando tres paradigmas de programación. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8704875.

Wikipedia. (2016). Algoritmo para el cálculo exacto de la raíz cuadrada. Cálculo de la raíz cuadrada - Wikipedia, la enciclopedia libre