Ortogonalidades y círculos no convencionales

Non conventional orthogonalities and circles

Lorenzo Acosta G.[1,a]

Resumen. Se estudian algunas consecuencias de la definición de *ortogonalidad* dada por Papy. Cada *ortogonalidad* da lugar a las nociones de *rotación*, *ángulo* y *círculo*. En este contexto general se prueban algunos teoremas clásicos como el Segundo Teorema de Tales y el Teorema del ángulo central.

Palabras claves: Ortogonalidad, rotación, ángulo, círculo.

Abstract. We study some consequences of the definition of *othogonality* given by Papy. Each *orthogonality* gives rise to the notions of *rotation*, *angle* and *circle*. In this general context, we prove some classic theorems like the Second Thales Theorem and the Central Angle Theorem.

Keywords: Orthogonality, rotation, angle, circle.

Mathematics Subject Classification: 51-01,51-02.

Recibido: octubre de 2020 Aceptado: mayo de 2022

Introducción

En este artículo estudiaremos algunas consecuencias de la definición de ortogonalidad que encontramos en [2]:

Una ortogonalidad del plano Π *es una permutación simétrica y antirreflexiva del conjunto de las direcciones de* Π.

Según esta definición, en un plano afín existen multitud de ortogonalidades. Cada ortogonalidad, da lugar a la noción correspondiente de simetría ortogonal que, a su vez, produce la noción de rotación, y, finalmente, la noción de ángulo:

Una rotación es la compuesta de dos simetrías ortogonales de ejes no disyuntos.

Un ángulo es una rotación que ha perdido su centro.

Aunque todo esto se puede desarrollar en el contexto general de los planos afines desarguesianos al estilo de [1], para facilitar la comprensión de más lectores, nos restringiremos a trabajar en un plano euclidiano Π. Sin embargo, para conservar la generalidad, intentaremos no utilizar sino las propiedades

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
[a]lmacostag@unal.edu.co

indispensables. En particular, no usaremos en ningún momento la noción de *distancia*.

Poniendo algunas condiciones de uniformidad sobre las ortogonalidades, el conjunto de las rotaciones de centro fijo resulta ser un subgrupo del grupo de las permutaciones de Π. Estos grupos actúan de manera natural sobre Π y las órbitas de estas acciones son los *círculos*. Hay, pues, una noción de *círculo* asociada con cada ortogonalidad de Π.

Veremos que muchos de los teoremas tradicionales que tienen que ver con círculos, son válidos para estas nociones no convencionales de *círculo*. En particular, probaremos el *Segundo Teorema de Tales* que caracteriza los triángulos inscritos en un semicírculo, y el *Teorema del ángulo central*.

Supondremos que el lector está familiarizado con el concepto de traslación.

A lo largo de este texto Π será un plano euclidiano. Se sabe que si fijamos un punto o de Π, el plano tiene una estructura de espacio vectorial de dimensión dos sobre $\mathbb{R}$ cuyo origen es o. Este espacio vectorial se notará Π_o. Esto es útil pues se pueden usar las herramientas del álgebra lineal para facilitar algunas demostraciones. Si, en algún razonamiento, un punto u juega el papel de vector de Π_o, lo notaremos $\vec{u}$.

Usaremos las siguientes notaciones:

τ_{ab} es la traslación que transforma el punto a en el punto b.

L_a es la recta paralela a L que pasa por el punto a.

s_c es la simetría central de centro c.

$dir\ L$ es el conjunto de todas las rectas paralelas a la recta L y se llama la dirección de L.

$Dir\ \Pi$ es el conjunto de todas las direcciones de Π.

$\mathcal{T}$ es el grupo de las traslaciones de Π.

1. Simetrías paralelas

En esta sección se definen las simetrías paralelas (llamadas también simetrías oblicuas) y se mencionan algunas de sus propiedades básicas.

Definición 1.1. Sean L y M dos rectas no paralelas de Π. Se llama simetría paralela a M de eje L a la función $S_L^M : \Pi \to \Pi$, tal que $S_L^M(x) = \tau_{xc} \circ \tau_{xc}(x)$ donde c es el punto de corte de L con M_x.

En la Figura 1 se ilustra la construcción de la imagen de un punto por una simetría paralela.

Las simetrías paralelas tienen las siguientes propiedades, que enunciaremos sin prueba:

Teorema 1.2. *Sean L y M dos rectas no paralelas que se cortan en el punto o.*

(i) S_L^M es una permutación de Π y, además, es su propia inversa.

(ii) L es el conjunto de puntos fijos de S_L^M. Además, toda recta paralela a M es invariante bajo S_L^M, pero no punto a punto.

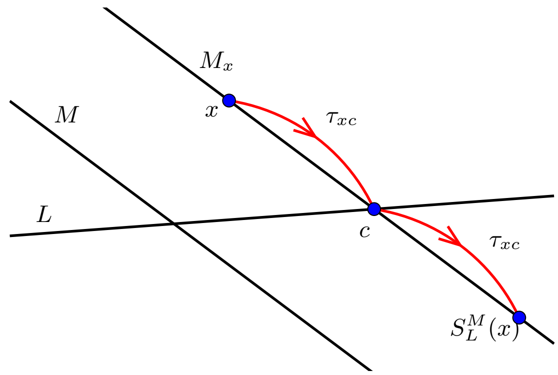


Figura 1: Simetría paralela

(iii) Si N es una recta paralela a L entonces $S_L^M(N)$ es una recta paralela a L.

(iv) $S_L^M : \Pi_o \to \Pi_o$ es una transformación lineal.

2. Ortogonalidades

Presentamos aquí la definición de ortogonalidad dada por Papy en los años 60 del siglo pasado [2] y algunas de sus propiedades. También veremos ejemplos de estas ortogonalidades.

Definición 2.1. (Papy)

Una ortogonalidad sobre el plano Π es una permutación simétrica y antirreflexiva del conjunto de las direcciones de Π.

Si ω es una ortogonalidad sobre Π y L, M son rectas de Π, diremos que $L\ \omega\ M$ si $\omega(dir\ L) = dir\ M$.

Usaremos la notación (Π, ω) para señalar que se ha escogido una ortogonalidad ω sobre el plano Π.

Una ortogonalidad es, pues, una biyección, sin puntos fijos, de $Dir\ \Pi$ en sí mismo, que es su propia inversa.

La siguiente proposición, que se prueba sin dificultad, nos proporciona un método de construcción de ortogonalidades sobre Π.

Proposición 2.2. *Sea $\xi : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ una permutación antirreflexiva y simétrica de $\mathbb{R} - \{0\}$ y sea $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ una base de Π_o. Para cada $t \in \mathbb{R}$, sea L_t la recta que pasa por o y es paralela al vector $\vec{u} + t\vec{v}$ y sea L la recta que pasa por o y es paralela al vector $\vec{v}$. La función*

$$\omega(\xi, B) : Dir\ \Pi \to Dir\ \Pi : \begin{cases} dir\ L \mapsto dir\ L_0 \\ dir\ L_0 \mapsto dir\ L \\ dir\ L_t \mapsto dir\ L_{\xi(t)}\ \ si\ t \neq 0 \end{cases}$$

es una ortogonalidad sobre Π.

En los siguientes ejemplos se muestran dos permutaciones antirreflexivas y simétricas de $\mathbb{R}-\{0\}$ y sus correspondientes ortogonalidades asociadas con una base fija β :

Ejemplo 2.3. 1. Si definimos $\xi_1 : \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}-\{0\} : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$, la ortogonalidad $\omega(\xi_1, \beta)$ se nota $\perp_\beta$. Si se identifica Π_o con $\mathbb{R}^2$ y se toma β la base canónica, escribiremos $\perp$ en lugar de $\perp_\beta$. Esta ortogonalidad corresponde a la noción usual de perpendicularidad en el plano $\mathbb{R}^2$. En efecto, dos rectas son ortogonales si una es vertical y la otra horizontal o bien el producto de sus pendientes es -1.

2. Si definimos

$$\xi_2 : \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}-\{0\} : x \mapsto \begin{cases} x^{-1} & \text{si } x \notin \{1,-1\} \\ -x & \text{si } x \in \{1,-1\} \end{cases},$$

la ortogonalidad $\omega(\xi_2, \beta)$ la notaremos $\top_\beta$. Si identificamos Π_o con $\mathbb{R}^2$ y se toma β la base canónica, escribiremos $\top$ en lugar de $\top_\beta$. En $\left(\mathbb{R}^2, \top\right)$ dos rectas que pasan por $(0,0)$ son ortogonales si una es de pendiente 1 y la otra de pendiente -1 o bien son simétricas con respecto a la recta de ecuación $y = x$.

De ahora en adelante ω ***será una ortogonalidad sobre*** Π***.***

Teorema 2.4. *Sean* L, M, N *tres rectas de* (Π, ω)*. Si* $L\ \omega\ M$ *y* $M\ \omega\ N$ *entonces* $L \parallel N$.

Demostración. Tenemos que $dir\ M\ \omega\ dir\ L$ y $dir\ M\ \omega\ dir\ N$. Como ω es una permutación, forzosamente $dir\ N = dir\ L$ luego $L \parallel N$. $\square$

Teorema 2.5. *Si* L *es una recta y* p *es un punto de* (Π, ω)*, entonces existe una única recta* M *tal que* $p \in M$ *y* $M\ \omega\ L$.

Demostración. Sea T una recta tal que $T\ \omega\ L$. Basta definir $M = T_p$. $\square$

3. Simetrías ortogonales

En esta sección definimos, para cada ortogonalidad, las simetrías ortogonales (que son casos particulares de simetrías paralelas) y mostramos la relación de estas transformaciones con las traslaciones. También introducimos la noción de bisectriz y el axioma de las tres simetrías de ejes concurrentes.

Definición 3.1. Sea L una recta de Π. Si M es una recta tal que $M\ \omega\ L$ entonces la simetría paralela S_L^M se notará S_L^ω y se llama la ω-simetría (ortogonal) de eje L.

Si no hay lugar a ambigüedad, S_L^ω se notará simplemente S_L.

Teorema 3.2. *El grupo de las traslaciones actúa por conjugación sobre el conjunto de las ω-simetrías. Más precisamente, si L es una recta y τ es una traslación entonces $\tau \circ S_L \circ \tau^{-1} = S_{\tau(L)}$. Además, S_L y S_T están en la misma órbita si y solo si L es paralela a T.*

Demostración. Fijemos dos puntos p y q en el plano Π. Así, Π_p y Π_q son espacios vectoriales de dimensión dos sobre $\mathbb{R}$ cuyos orígenes son p y q respectivamente.

Sea L una recta que pasa por p y sea τ la traslación que envía p en q. Llamemos M a la recta $\tau(L)$.

Sea T la recta ortogonal a L que pasa por p y llamemos N a la recta $\tau(T)$.

Escogemos una base $\beta_p = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ del espacio Π_p de tal manera que $\vec{u}$ sea paralelo a L y $\vec{v}$ sea paralelo a T.

Definimos $\beta_q = \{\vec{z}, \vec{w}\}$ donde $\vec{z} = \tau(\vec{u})$ y $\vec{w} = \tau(\vec{v})$. Así, $\vec{z}$ es paralelo a M y $\vec{w}$ es paralelo a N (en realidad $\vec{z} = \vec{u}$ y $\vec{w} = \vec{v}$).

Tenemos los siguientes hechos:

1) $\tau : \Pi_p \to \Pi_q$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. La matriz de τ con respecto a las bases β_p y β_q es $[\tau]_{\beta_p,\beta_q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $S_L : \Pi_p \to \Pi_p$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. La matriz de S_L con respecto a la base β_p es $[S_L]_{\beta_p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $S_M : \Pi_q \to \Pi_q$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. La matriz de S_M con respecto a la base β_q es $[S_M]_{\beta_q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Por consiguiente la matriz de $S_M \circ \tau \circ S_L$ con respecto a las bases β_p y β_q es

$$\begin{aligned} [S_M \circ \tau \circ S_L]_{\beta_p,\beta_q} &= [S_M]_{\beta_q} [\tau]_{\beta_p,\beta_q} [S_L]_{\beta_p} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= [\tau]_{\beta_p,\beta_q}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $S_M \circ \tau \circ S_L = \tau$. Concluimos entonces que

$$S_M = \tau \circ S_L \circ \tau^{-1}.$$

□

Definición 3.3. Dadas dos rectas L y M no paralelas, diremos que una recta B es una ω-bisectriz de $\{L, M\}$ si $S_B(L) = M$.

Proposición 3.4. *Si B es una ω-bisectriz de $\{L, M\}$, $A \; \omega \; B$ y A pasa por el punto de corte de L y M, entonces A es ω-bisectriz de $\{L, M\}$.*

Demostración. Sea c el punto de corte de L y M. Sabemos que $s_c(L) = L$. Entonces

$$\begin{aligned} S_B(L) = M &\Rightarrow S_A \circ S_B(L) = S_A(M) \\ &\Rightarrow s_c(L) = S_A(M) \\ &\Rightarrow L = S_A(M) \end{aligned}$$

luego A es ω-bisectriz de $\{L, M\}$. □

El siguiente axioma es un teorema de la geometría euclidiana. Sin embargo, veremos que su validez depende de la ortogonalidad.

Axioma de las tres simetrías de ejes concurrentes: *Dadas tres rectas L, M y N, concurrentes en c, existe una recta X que pasa por c tal que $S_N \circ S_M \circ S_L = S_X$.*

Ejemplo 3.5. En $(\Pi, \perp_\beta)$ se satisface el axioma de las tres simetrías de ejes concurrentes y en $(\Pi, \top_\beta)$ no se satisface el axioma de las tres simetrías de ejes concurrentes.

Una prueba de estos hechos se presentará más adelante.

Definición 3.6. Diremos que una ortogonalidad ω es normal si en (Π, ω) se satisface el axioma de las tres simetrías de ejes concurrentes.

Proposición 3.7. *Si ω es normal, entonces, dadas tres rectas concurrentes L, M y N, $S_N \circ S_M \circ S_L = S_L \circ S_M \circ S_N$.*

Demostración. Basta observar que, como $S_N \circ S_M \circ S_L$ es una simetría,

$$(S_N \circ S_M \circ S_L)^{-1} = S_N \circ S_M \circ S_L.$$

□

4. Rotaciones

En esta sección definimos las rotaciones asociadas con una ortogonalidad. Introducimos también las nociones de ortogonalidad uniforme y de ángulo. Mostramos, además, que las ortogonalidades $\perp_\beta$ y $\top_\beta$ son uniformes.

Definición 4.1. Una ω-rotación es la compuesta de dos ω-simetrías de ejes no disyuntos. Si c es el punto en la intersección de los ejes de las dos ω-simetrías decimos que la ω-rotación es de centro c.

Llamaremos $\mathcal{R}^\omega$ al conjunto de todas las ω-rotaciones de (Π, ω) y $\mathcal{R}^\omega_c$ al conjunto de todas las ω-rotaciones de centro c.

Es evidente que la identidad es una ω-rotación de centro c, para todo $c \in \Pi$ y que la inversa de una ω-rotación de centro c es una ω-rotación de centro c.

El siguiente teorema se deduce sin dificultad del Teorema 3.2.

Teorema 4.2. *El grupo $\mathcal{T}$ actúa por conjugación sobre el conjunto $\mathcal{R}^\omega$. Más precisamente, si τ es una traslación entonces $\tau \circ \mathcal{R}^\omega_c \circ \tau^{-1} = \mathcal{R}^\omega_{\tau(c)}$.*

La siguiente definición corresponde a la idea de Papy en [2], según la cual, *un ángulo es una rotación que ha perdido su centro.*

Definición 4.3. Las órbitas de la acción de $\mathcal{T}$ sobre $\mathcal{R}^\omega$ se llaman ω-ángulos. El conjunto de los ω-ángulos se llamará $\mathcal{A}^\omega$. La órbita de la ω-rotación r se notará $\angle^\omega r$.

Nota 4.4. Es claro que, para cada $c \in \Pi$, la función $\angle^\omega : \mathcal{R}^\omega_c \to \mathcal{A}^\omega : r \mapsto \angle^\omega r$ es una correspondencia biyectiva. Por consiguiente, si $\mathcal{R}^\omega_c$ es un grupo, $\mathcal{A}^\omega$ tiene una estructura natural de grupo. La operación en $\mathcal{A}^\omega$ la notaremos $+$, aunque no siempre será conmutativa.

Teorema 4.5. *Si ω es normal, entonces para todo $c \in \Pi$ se tiene que $\mathcal{R}^\omega_c$ es un grupo abeliano.*

Demostración. Como la inversa de una ω-rotación es una ω-rotación del mismo centro, para ver que $\mathcal{R}^\omega_c$ es un grupo basta verificar que la compuesta de dos ω-rotaciones de centro c es una ω-rotación de centro c. Sean entonces $r_1 = S_M \circ S_L$ y $r_2 = S_T \circ S_N$ dos ω-rotaciones de centro c. Por el axioma de las tres ω-simetrías de ejes concurrentes sabemos que existe una recta X que pasa por c tal que $S_N \circ S_M \circ S_L = S_X$. Así,

$$\begin{aligned} r_2 \circ r_1 &= (S_T \circ S_N) \circ (S_M \circ S_L) \\ &= S_T \circ (S_N \circ S_M \circ S_L) \\ &= S_T \circ S_X \in \mathcal{R}^\omega_c. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} r_2 \circ r_1 \circ r_2^{-1} \circ r_1^{-1} &= (S_T \circ S_N) \circ (S_M \circ S_L) \circ (S_T \circ S_N)^{-1} \circ (S_M \circ S_L)^{-1} \\ &= (S_T \circ S_N) \circ (S_M \circ S_L) \circ (S_N \circ S_T) \circ (S_L \circ S_M) \\ &= S_T \circ S_N \circ (S_M \circ S_L \circ S_N) \circ S_T \circ S_L \circ S_M \\ &= S_T \circ S_N \circ (S_N \circ S_L \circ S_M) \circ S_T \circ S_L \circ S_M \\ &= S_T \circ (S_N \circ S_N) \circ S_L \circ S_M \circ S_T \circ S_L \circ S_M \\ &= S_T \circ (S_L \circ S_M \circ S_T) \circ S_L \circ S_M \\ &= S_T \circ (S_T \circ S_M \circ S_L) \circ S_L \circ S_M \\ &= (S_T \circ S_T) \circ S_M \circ (S_L \circ S_L) \circ S_M \\ &= S_M \circ S_M \\ &= 1_P, \end{aligned}$$

luego el grupo es abeliano. □

Nota 4.6. *Existen ortogonalidades ω para las cuales el conjunto de todas las ω-rotaciones de centro fijo no es un grupo. Esto se debe a la libertad tan grande* *para escoger la ortogonalidad. Si ésta se escoge de manera que no haya una cierta uniformidad, el comportamiento de las ω-rotaciones puede ser bastante caótico.*

Definición 4.7. Diremos que una ortogonalidad ω sobre Π es uniforme si, para todo $c \in \Pi$, $\mathcal{R}_c^\omega$ es un grupo.

A continuación veremos que las ortogonalidades $\perp_\beta$ y $\top_\beta$ son uniformes.

De ahora en adelante, fijamos una base β de Π_o e introducimos sobre Π un sistema de coordenadas, de tal manera que los vectores de la base β tengan coordenadas $(1,0)$ y $(0,1)$. En muchos razonamientos identificaremos los puntos de Π con sus coordenadas.

4.1. Rotaciones en $(\Pi, \top_\beta)$

En esta subsección, dotamos al plano Π con la ortogonalidad $\top_\beta$. Como toda $\top_\beta$-rotación se obtiene de una $\top_\beta$-rotación de centro o mediante una traslación, estudiaremos únicamente las $\top_\beta$-rotaciones de centro o. Veamos cómo son las matrices de las $\top_\beta$-simetrías con respecto a la base β.

Caso 1. Sea L_m la recta que pasa por $(0,0)$ y $(1,m)$ donde $m \in \mathbb{R} - \{1,-1\}$. Tenemos que $S_{L_m}(1,0) = (\frac{1+m^2}{1-m^2}, \frac{2m}{1-m^2})$ y $S_{L_m}(0,1) = (\frac{2m}{m^2-1}, \frac{1+m^2}{m^2-1})$. Por consiguiente

$$[S_{L_m}] = \begin{pmatrix} \frac{1+m^2}{1-m^2} & \frac{2m}{m^2-1} \\ \\ \frac{2m}{1-m^2} & \frac{1+m^2}{m^2-1} \end{pmatrix}.$$

Caso 2. Sea L_1 la recta que pasa por $(0,0)$ y $(1,1)$. Tenemos que $S_{L_1}(1,0) = (0,1)$ y $S_{L_1}(0,1) = (1,0)$. Por consiguiente

$$[S_{L_1}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Caso 3. Sea L_{-1} la recta que pasa por $(0,0)$ y $(1,-1)$. Tenemos que $S_{L_{-1}}(1,0) = (0,-1)$ y $S_{L_{-1}}(0,1) = (-1,0)$. Por consiguiente

$$[S_{L_{-1}}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Caso 4. Sea L_∞ la recta que pasa por $(0,0)$ y $(0,1)$. Tenemos que $S_{L_\infty}(1,0) = (-1,0)$ y $S_{L_\infty}(0,1) = (0,1)$. Por consiguiente

$$[S_{L_\infty}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos entonces construir rotaciones de diferentes tipos:

$$\begin{array}{llll} S_{L_m} \circ S_{L_n}; & S_{L_m} \circ S_{L_1}; & S_{L_m} \circ S_{L_{-1}}; & S_{L_1} \circ S_{L_m}; \\ S_{L_{-1}} \circ S_{L_m}; & S_{L_m} \circ S_{L_\infty}; & S_{L_\infty} \circ S_{L_m}; & S_{L_\infty} \circ S_{L_1}; \\ S_{L_\infty} \circ S_{L_{-1}}; & S_{L_1} \circ S_{L_\infty}; & S_{L_{-1}} \circ S_{L_\infty}; & S_{L_1} \circ S_{L_{-1}}; \\ S_{L_{-1}} \circ S_{L_1}. & & & \end{array}$$

Haciendo los cálculos se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 4.8. *Una transformación lineal r de Π_o en Π_o es una $\top_\beta$-rotación de centro o si y solamente si la matriz de r con respecto a la base β es de la forma* $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$*, donde $a^2 - b^2 = 1$ o* $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$*, donde $a^2 - b^2 = -1$.*

Se observa que el producto de dos matrices de esta forma es de nuevo de esta forma, por lo que tenemos que $\mathcal{R}_c^{\top_\beta}$ es un grupo. Sin embargo, este grupo no es abeliano ya que, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Como consecuencia, $\top_\beta$ es una ortogonalidad que no es normal y se concluye que, como lo afirmamos en el Ejemplo 3.5, en $(\Pi, \top_\beta)$ no se satisface el axioma de las tres simetrías de ejes concurrentes.

4.2. Rotaciones en $(\Pi, \perp_\beta)$

En esta subsección dotamos al plano Π con la ortogonalidad $\perp_\beta$. Como toda $\perp_\beta$-rotación se obtiene de una $\perp_\beta$-rotación de centro o mediante una traslación, estudiaremos únicamente las $\perp_\beta$-rotaciones de centro o. Veamos cómo son las matrices de las $\perp_\beta$-simetrías ortogonales con respecto a la base β.

Caso 1. Sea L_m la recta que pasa por $(0,0)$ y $(1,m)$ donde $m \in \mathbb{R} - \{0\}$. Tenemos que $S_{L_m}(1,0) = (\frac{1-m^2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2})$ y $S_{L_m}(0,1) = (\frac{2m}{1+m^2}, -\frac{1-m^2}{1+m^2})$. Por consiguiente $[S_{L_m}] = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & -\frac{1-m^2}{1+m^2} \end{pmatrix}$.

Caso 2. Sea L_0 la recta que pasa por $(0,0)$ y $(1,0)$. Tenemos que $S_{L_0}(1,0) = (1,0)$ y $S_{L_0}(0,1) = (0,-1)$. Por consiguiente $[S_{L_0}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Caso 3. Sea L_∞ la recta que pasa por $(0,0)$ y $(0,1)$. Tenemos que $S_{L_\infty}(1,0) = (-1,0)$ y $S_{L_\infty}(0,1) = (0,1)$. Por consiguiente $[S_{L_\infty}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Podemos entonces construir rotaciones de diferentes tipos:

$$S_{L_m} \circ S_{L_n}; S_{L_m} \circ S_{L_0}; S_{L_m} \circ S_{L_\infty}; S_{L_\infty} \circ S_{L_n}; S_{L_0} \circ S_{L_\infty} = S_{L_\infty} \circ S_{L_0}.$$

Haciendo los cálculos se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 4.9. *Una transformación lineal r de Π_o en Π_o es una $\perp_\beta$-rotación de centro o si y solamente si la matriz de r con respecto a la base β es de la forma* $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$*, donde $a^2 + b^2 = 1$.*

Se observa que dos matrices de este tipo siempre conmutan y su producto también es de este tipo. Podemos concluir entonces que $\mathcal{R}_o^{\perp_\beta}$ es un grupo abeliano.

Se puede probar, además, que la compuesta de una $\perp_\beta$-rotación de centro o y una $\perp_\beta$-simetría cuyo eje pasa por o es una $\perp_\beta$-simetría y por consiguiente, $\perp_\beta$ es una ortogonalidad normal.

Definición 4.10. Diremos que el plano (Π, ω) es $\mathcal{R}^\omega$-simétrico si para todo par de rectas no disyuntas L y M existe una ω-rotación r tal que $r(L) = M$.

Proposición 4.11. *El plano* $(\Pi, \perp_\beta)$ *es* $\mathcal{R}^{\perp_\beta}$*-simétrico.*

Demostración. Veamos que si $X = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ y $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx\}$, entonces existe una $\perp_\beta$-rotación r de centro en o tal que $r(X) = L$. Sean $a = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ y $b = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$. Como $a^2 + b^2 = 1$, la transformación lineal r cuya matriz con respecto a la base β es $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ es una rotación de centro en $(0, 0)$. Tenemos que $r(1, 0) = (a, b)$ y

$$L = \{t(a, b) : t \in \mathbb{R}\} = \{tr(1, 0) : t \in \mathbb{R}\} = \{r(t(1, 0)) : t \in \mathbb{R}\} = r(L).$$

Es claro, además, que la $\perp_\beta$-rotación cuya matriz es $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ transforma la recta X en la recta $Y = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

Así, para toda recta L que pasa por o, existe una $\perp_\beta$-rotación que transforma X en L. De aquí concluimos que si L y M son dos rectas que pasan por o, entonces existe una $\perp_\beta$-rotación de centro en o que transforma L en M. Sean ahora dos rectas L y M que se cortan en el punto c. Sea τ la traslación que envía c en o. Tenemos que $\tau(L)$ y $\tau(M)$ son dos rectas que pasan por o, luego existe una $\perp_\beta$-rotación r de centro en o que transforma $\tau(L)$ en $\tau(M)$. Sabemos que $\tau^{-1} \circ r \circ \tau$ es una $\perp_\beta$-rotación de centro c. Además,

$$\tau^{-1} \circ r \circ \tau(L) = \tau^{-1} \circ (\tau(M)) = M.$$

□

Teorema 4.12. *Todo par de rectas no paralelas tiene una* $\perp_\beta$*-bisectriz.*

Demostración. Sean L y M dos rectas que pasan por o. Sean r_1 una $\perp_\beta$-rotación de centro o tal que $r_1(X) = L$ y r_2 una $\perp_\beta$-rotación de centro o tal que $r_2(X) = M$. Consideremos las matrices de r_1 y r_2 con respecto a la base β:

$$[r_1] = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \quad [r_2] = \begin{pmatrix} h & -k \\ k & h \end{pmatrix}.$$

Sabemos que $a^2 + b^2 = 1 = h^2 + k^2$ y, además, $(a, b) \in L$ y $(h, k) \in M$. Sea ahora T la recta que pasa por $(0, 0)$ y $(\frac{a+h}{2}, \frac{b+k}{2})$. Veamos que T es una

$\perp_\beta$-bisectriz de $\{L, M\}$. Como T pasa por el punto $(1, \frac{b+k}{a+h})$, la matriz de S_T es

$$[S_T] = \frac{1}{1 + (\frac{b+k}{a+h})^2} \begin{pmatrix} 1 - (\frac{b+k}{a+h})^2 & 2\frac{b+k}{a+h} \\ \\ 2\frac{b+k}{a+h} & (\frac{b+k}{a+h})^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Si multiplicamos esta matriz por $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, se obtiene $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, luego $S_T(a, b) = (h, k)$, de donde $S_T(L) = M$ y así T es una $\perp_\beta$-bisectriz de $\{L, M\}$.

Sean ahora N y P dos rectas de Π que se cortan en el punto c y sea τ la traslación que envía c en o. Tenemos que las rectas $\tau(N)$ y $\tau(P)$ pasan por o luego tienen una $\perp_\beta$-bisectriz D. Es claro que $\tau^{-1}(D)$ es una $\perp_\beta$-bisectriz de $\{P, N\}$.

$\square$

5. ω-círculos

Toda ortogonalidad uniforme permite definir los círculos como las órbitas de las acciones de los grupos de rotaciones. Estos círculos no convencionales tienen muchas de las propiedades básicas de los círculos clásicos. En las pruebas de algunas de ellas usamos la mediatriz de un par de puntos, recta que también depende de la ortogonalidad.

En lo que sigue, supondremos que la ortogonalidad ω es uniforme.

Para cada punto c de Π, el grupo $\mathcal{R}_c^\omega$ actúa sobre Π mediante la acción definida por $r \cdot p = r(p)$. La órbita del punto p correspondiente a esta acción es

$$\Gamma_c^\omega(p) = \{r(p) : r \in \mathcal{R}_c\}.$$

Definición 5.1. $\Gamma_c^\omega(p)$ se llama el ω-círculo de centro c que pasa por p.

A partir de los Teoremas 4.8 y 4.9, tenemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 5.2. Si $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es una base de Π_o, entonces

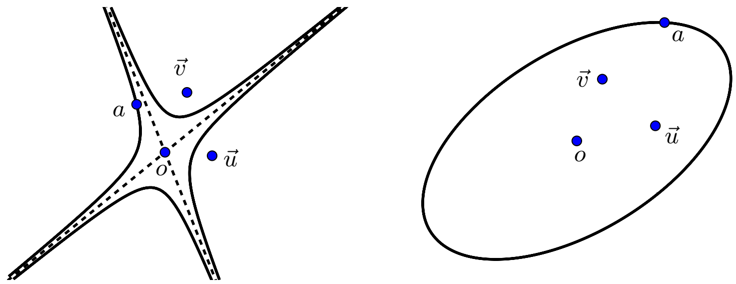
$$\Gamma_o^{\top_\beta}(u) = \{x\vec{u} + y\vec{v} : x^2 - y^2 = 1\} \cup \{x\vec{u} + y\vec{v} : y^2 - x^2 = 1\}.$$

Por consiguiente, todo $\top_\beta$-círculo es una unión de dos hipérbolas conjugadas cuyas asíntotas son paralelas a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Por esta razón, las ortogonalidades de este tipo se llamarán ortogonalidades hiperbólicas (ver Figura 2 (a)).

Ejemplo 5.3. Si $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es una base de Π_o, entonces

$$\Gamma_o^{\perp_\beta}(u) = \{x\vec{u} + y\vec{v} : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Así, todos $\perp_\beta$-círculos son elipses de ejes paralelos y con la misma excentricidad. Por esta razón, las ortogonalidades de este tipo se llamarán ortogonalidades elípticas (ver Figura 2 (b)).



(a) $\Gamma^{\top_\beta}$-círculo de centro o (b) $\Gamma^{\perp_\beta}$-círculo de centro o

Figura 2: Ejemplos de ω-círculos

Proposición 5.4. *Sea $p \in \Pi$ y sea M una recta que pasa por p. Si $b = S_M(a)$, entonces $b \in \Gamma_p^\omega(a)$.*

Corolario 5.5. *Si todo par de rectas no paralelas tiene una bisectriz, entonces*

$$\Gamma_p^\omega(a) = \{S_M(a) : M \text{ es una recta que pasa por } p\}.$$

Definición 5.6. Dados dos puntos a y b, la ω-mediatriz del par $\{a, b\}$ es la recta M tal que $M\ \omega\ ab$ y M pasa por el punto medio de $\{a, b\}$. La ω-mediatriz del par $\{a, b\}$ se notará $Med^\omega(a, b)$.

Proposición 5.7. *Sean a, b, c tres puntos distintos de Π.*
Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
(i) a, b y c son colineales. *(ii) $Med^\omega(a, b) \parallel Med^\omega(b, c)$.*

Demostración. Si existe una recta L tal que $a, b, c \in L$, entonces

$$Med^\omega(a, b)\ \omega\ L\ \omega\ Med^\omega(b, c),$$

y por consiguiente, $Med^\omega(a, b) \parallel Med^\omega(b, c)$.

Recíprocamente, si $Med^\omega(a, b) \parallel Med^\omega(b, c)$, entonces

$$ab\ \omega\ Med^\omega(a, b) \parallel Med^\omega(b, c)\ \omega\ bc,$$

y por lo tanto $ab \parallel bc$. Como ab y bc tienen un punto en común, concluimos que $ab = bc$, luego a, b y c son colineales. $\square$

Proposición 5.8. *Si a, b y c no son colineales, entonces existe un ω-círculo Γ tal que $a, b, c \in \Gamma$.*

Demostración. Sean a, b y c no colineales. Por la Proposición 5.7, existe un punto $p \in Med^\omega(a, b) \cap Med^\omega(b, c)$. Tenemos que $b = S_{Med^\omega(a,b)}(a)$ y $c = S_{Med^\omega(b,c)}(b)$. Si componemos estas dos ω-simetrías obtenemos una ω-rotación $r = S_{Med^\omega(b,c)} \circ S_{Med^\omega(a,b)} \in \mathcal{R}_p^\omega$, tal que $r(a) = c$, luego $c \in \Gamma_p^\omega(a)$.

Por otro lado, $b = (S_{Med^\omega(a,b)} \circ S_{pa})(a)$ y como $S_{Med^\omega(a,b)} \circ S_{pa} \in \mathcal{R}_p$, se tiene que $b \in \Gamma_p^\omega(a)$. $\square$

Proposición 5.9. *Sean a y b dos puntos distintos de Π. Si $p \in Med^{\omega}(a,b)$, entonces $b \in \Gamma_p^{\omega}(a)$.*

Esta proposición nos dice que si $C^{\omega}(a,b)$ es el conjunto de los centros de los ω-círculos que pasan por a y b, entonces $Med^{\omega}(a,b) \subseteq C^{\omega}(a,b)$. El siguiente ejemplo muestra que no siempre se tiene que $C^{\omega}(a,b) \subseteq Med^{\omega}(a,b)$.

Ejemplo 5.10. Si β es una base de Π_o, los puntos $a = (1,0)$ y $b = (1,\sqrt{2})$ están en $\Gamma_o^{\top_\beta}(a)$, pero $Med^{\top_\beta}(a,b)$ no pasa por o.

Proposición 5.11. *Si β es una base de Π_o, dados dos puntos distintos a y b, $Med^{\perp_\beta}(a,b) = C^{\perp_\beta}(a,b)$.*

Demostración. Basta probar que si b está en $\Gamma_o^{\perp_\beta}(a)$, entonces $o \in Med^{\perp_\beta}(a,b)$. Supongamos que $a = (a_1,a_2), b = (b_1,b_2)$ y b está en $\Gamma_o^{\perp_\beta}(a)$, luego $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$. El punto medio de $\{a,b\}$ es $(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2})$ y la ecuación de $Med^{\perp_\beta}(a,b)$ es entonces

$$y - \frac{a_2+b_2}{2} = -\frac{b_1-a_1}{b_2-a_2}(x - \frac{a_1+b_1}{2}).$$

Un cálculo directo muestra que $(0,0)$ satisface esta ecuación, luego $o \in Med^{\perp_\beta}(a,b)$. $\square$

La siguiente proposición muestra que los ω-círculos son simétricos con respecto a las rectas que pasan por su centro.

Proposición 5.12. *Si Γ es un ω-círculo de centro p y M es una recta que pasa por p, entonces $S_M(\Gamma) = \Gamma$.*

Demostración. Basta verificar el caso en que $p = o$. Sea M una recta que pasa por o y sea $b \in \Gamma_o^{\omega}(a)$. Sabemos que existen dos rectas L y N que pasan por o, tales que $b = S_N \circ S_L(a)$, luego $S_M(b) = S_M \circ S_N \circ S_L(a)$. Si T es la recta oa, entonces $S_T(a) = a$ y así, $S_M(b) = (S_M \circ S_N) \circ (S_L \circ S_T)(a)$. Como la ortogonalidad es uniforme, $(S_M \circ S_N) \circ (S_L \circ S_T)$ es una rotación de centro o. Concluimos que $S_M(\Gamma_o^{\omega}(a)) \subseteq \Gamma_o^{\omega}(a)$. Ahora, si aplicamos S_M a ambos lados, se tiene que $\Gamma_o^{\omega}(a) \subseteq S_M(\Gamma_o^{\omega}(a))$. $\square$

Definición 5.13. Sea Γ un ω-círculo de centro p y sea $q \in \Gamma$. Diremos que una recta L es tangente a Γ en el punto q si $q \in L$ y $pq \ \omega \ L$.

Proposición 5.14. *Sea $\Gamma_p^{\omega}(a)$ un ω-círculo. Si L es una recta y $L \cap \Gamma_p^{\omega}(a) = \{q\}$, entonces L es tangente a $\Gamma_p^{\omega}(a)$ en q.*

Demostración. Sea M la recta que pasa por p y es tal que $M \ \omega \ L$. Tenemos que $S_M(L) = L$ y $S_M(\Gamma_p^{\omega}(a)) \subseteq \Gamma_p^{\omega}(a)$ (Proposición 5.12). Así, $S_M(L) \cap \Gamma_p^{\omega}(a) = \{q\}$ y por lo tanto $pq = M \ \omega \ L$. $\square$

Definición 5.15. Diremos que un subconjunto A del ω-círculo Γ de centro p es no degenerado si

(i) A tiene al menos dos puntos,

(ii) si a y b son dos puntos distintos de A, entonces $p \in Med^{\omega}(a,b)$,

(iii) si $x, q \in A$, entonces $S_{pq}(x) \in A$.

Diremos que un ω-círculo Γ es no degenerado si Γ es un subconjunto no degenerado de Γ.

Observe que si A es un subconjunto no degenerado de un ω-círculo, entonces no contiene tres puntos colineales.

Ejemplo 5.16. Todo $\perp_{\beta}$-círculo con más de un punto es no degenerado.

Si Γ es un $\top_{\beta}$-círculo, entonces Γ es degenerado y toda recta tangente a Γ corta a Γ en más de un punto.

Ejemplo 5.17. Sea a un punto de $\mathbb{R}^2$ que no está en las rectas de ecuaciones $y = \pm x$. Sabemos, por el Ejemplo 5.2, que $\Gamma_o^{\top_\beta}(a)$ es la unión de dos hipérbolas H_1 y H_2. H_1 y H_2 son subconjuntos no degenerados de $\Gamma_o^{\top_\beta}(a)$.

Proposición 5.18. *Sea $\Gamma_p^{\omega}(a)$ un ω-círculo y sea A un subconjunto no degenerado de $\Gamma_p^{\omega}(a)$. Si $q \in A$ y L es una recta tal que $q \in L$ y $L\ \omega\ pq$, entonces $A \cap L = \{q\}$.*

Demostración. Supongamos que existe $x \in A \cap L$ tal que $q \neq x$. Como $L\ \omega\ pq$, tenemos que $S_{pq}(L) = L$, luego $S_{pq}(x) \in L$. Además, $S_{pq}(x) \in A$, pues A es no degenado. Así, x, q y $S_{pq}(x)$ son tres puntos en $A \cap L$. Como estos tres puntos son diferentes, esto contradice que A es no degenerado. $\square$

Proposición 5.19. *Si $\Gamma_p^{\omega}(a) = \Gamma_q^{\omega}(a)$ es un ω-círculo no degenerado, entonces $p = q$.*

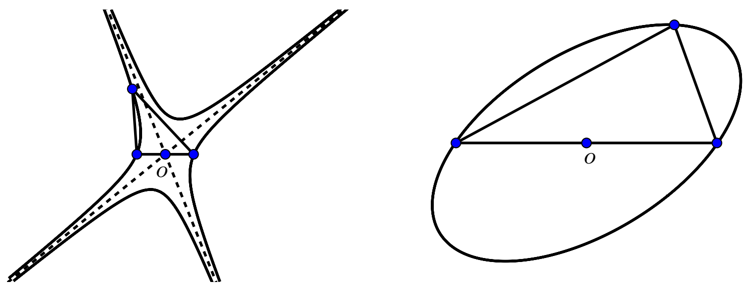
Demostración. Sea L la recta que pasa por a tal que $L\ \omega\ pa$. Por el teorema anterior, L es tangente a $\Gamma_p^{\omega}(a)$. Por consiguiente, L es tangente a $\Gamma_q^{\omega}(a)$, luego $L\ \omega\ qa$. Concluimos que $aq = ap$. Como el ω-círculo no es degenerado, podemos escoger $b \in \Gamma_p^{\omega}(a)$ tal que $b \notin ap$. Por el mismo razonamiento, tenemos que $bp = bq$. Así, $bp \nparallel ap$ y entonces $bp \cap ap = \{p\}$. Entonces $bq \cap aq = \{p\}$ y por lo tanto $p = q$. $\square$

6. Segundo Teorema de Tales

En esta sección demostraremos el Segundo Teorema de Tales, que caracteriza los triángulos inscritos en un semicírculo. Nuestra versión de este teorema requiere de una definición alternativa de lo que significa que un triángulo esté inscrito en un semicírculo.

Definición 6.1. Sea Γ un ω-círculo de centro o. Diremos que *un triángulo abc está inscrito en un ω-semicírculo de* Γ si o es el punto medio de un par de sus vértices y existe un subconjunto no degenerado A de Γ tal que $\{a, b, c\} \subseteq A$.

En la Figura 3 se muestran un triángulo inscrito en un $\top_\beta$-semicírculo y un triángulo inscrito en un $\perp_\beta$-semicírculo.



(a) $\omega = \top_\beta$ (b) $\omega = \perp_\beta$

Figura 3: Triángulos inscritos en ω-semicírculos

Teorema 6.2. ***Segundo Teorema de Tales***

Sean a, b y c tres puntos no colineales y sea o el punto medio de $\{a, b\}$. El triángulo abc está inscrito en un ω-semicírculo de algún ω-círculo de centro o si, y solamente si, $ac\ \omega\ cb$.

Demostración. Sea Γ un ω-círculo de centro o y supongamos que abc está inscrito en un ω-semicírculo de Γ. Sea A un subconjunto no degenerado de Γ tal que $\{a, b, c\} \subseteq A$. Sea m el punto medio de $\{a, c\}$ y sea $q = S_{om}(a)$. Como A es no degenerado, tenemos que $q \in A$. Supongamos que $q \neq c$. Si p es el punto de corte de om con aq, p es el punto medio de $\{a, q\}$ y por consiguiente, por el Primer Teorema de Tales, $om = pm \parallel qc$. De manera similar concluimos que $om = op \parallel qb$. Así, $qb = qc$ y por consiguiente q, c y b son colineales, lo que contradice que A sea no degenerado. Esto implica que $c = q = S_{om}(a)$ y por lo tanto $om = Med(a, c)\ \omega\ ac$. Usando nuevamente el Primer Teorema de Tales, tenemos que $om \parallel bc$ y entonces $ac\ \omega\ bc$.

Recíprocamente, supongamos que $ac\ \omega\ cb$. Sea M la línea paralela a cb que pasa por o. Por el Primer Teorema de Tales, tenemos que M corta a ac en el punto medio de $\{a, c\}$. Es claro que $M\ \omega\ ac$, luego $M = Med(a, c)$ y $S_M(a) = c$. Por consiguiente, $c \in \Gamma_o(a)$. Es claro que también se tiene que $b \in \Gamma_o(a)$. Tomemos $\Gamma = \Gamma_o(a)$. Si $A = \{x \in \Gamma : ax\ \omega\ bx\}$, se tiene que A es un subconjunto no degenerado de Γ tal que $\{a, b, c\} \subseteq A$.

□

7. Teorema del ángulo central

En esta última sección demostraremos el Teorema del ángulo central.

Proposición 7.1. *Sea A un subconjunto no degenerado de un ω-círculo Γ de centro o y sea $coad$ un paralelogramo. Si $a, c \in A$, entonces $ac = Med^\omega(o, d)$.*

Demostración. Como A es no degenerado, $Med^{\omega}(a,c)$ pasa por o. Como las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio, tenemos que od pasa por el punto medio de $\{a,c\}$ y por lo tanto $od = Med^{\omega}(a,c)$. $\square$

Definición 7.2. Sea Γ un ω-círculo no degenerado y sean $r_1 \in \mathcal{R}_u$ y $r_2 \in \mathcal{R}_v$ dos ω-rotaciones. Diremos que r_1 y r_2 subtienden el mismo Γ-arco, si existen $a, b \in \Gamma$ tales que $r_1(ua) = ub$ y $r_2(va) = vb$. En este caso diremos que a y b son los extremos del Γ-arco.

Teorema 7.3. ***Teorema del ángulo central***

Sea A un subconjunto no degenerado de un ω-círculo Γ de centro o y sean $r_1 \in \mathcal{R}^{\omega}_u$ y $r_2 \in \mathcal{R}^{\omega}_o$, donde $u \in A$. Si r_1 y r_2 subtienden el mismo Γ-arco cuyos extremos, a y b, están en A y $\{ua, ub\}$ tiene una ω-bisectriz, entonces $\angle^{\omega} r_2 = 2\angle^{\omega} r_1$.

Demostración. Sea t la traslación que envía u en o. Como $uoat^{-1}(a)$ es un paralelogramo tal que $u \in \Gamma^{\omega}_o(a)$, por la Proposición 7.1 $ot^{-1}(a) = Med^{\omega}(u,a)$ y por consiguiente $S_{ua}(t^{-1}(a)) = o$. Sea ahora B una bisectriz de $\{ua, ub\}$, de modo que $r_1 = S_B \circ S_{ua} = S_{ub} \circ S_B$. Sabemos que $t \circ r_1 \circ t^{-1}$ es una ω-rotación de centro $t(u) = o$. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(t \circ r_1 \circ t^{-1}) \circ (t \circ r_1 \circ t^{-1})(a) &= (t \circ r_1 \circ r_1 \circ t^{-1})(a) \\
&= (t \circ r_1 \circ r_1 \circ t^{-1})(a) \\
&= (t \circ S_{ub} \circ S_B \circ S_B \circ S_{ua} \circ t^{-1})(a) \\
&= (t \circ S_{ub})(o).
\end{aligned}$$

Como $uobt^{-1}(b)$ es un paralelogramo y $u, b \in \Gamma^{\omega}_o(a)$, nuevamente por la Proposición 7.1, $ub = Med^{\omega}(o, t^{-1}(b))$ y por lo tanto $S_{ub}(o) = t^{-1}(b)$. Concluimos que

$$(t \circ r_1 \circ t^{-1}) \circ (t \circ r_1 \circ t^{-1})(a) = (t \circ r_1 \circ r_1 \circ t^{-1})(a) = b.$$

Esto implica que

$$(t \circ r_1 \circ t^{-1}) \circ (t \circ r_1 \circ t^{-1}) = r_2.$$

En términos de ángulos esto significa que $\angle^{\omega} r_2 = \angle^{\omega} r_1 + \angle^{\omega} r_1$. $\square$

Corolario 7.4. *Sea A un subconjunto no degenerado de un ω-círculo Γ de centro o y sean $r_1 \in \mathcal{R}^{\omega}_u$ y $r_2 \in \mathcal{R}^{\omega}{}_v$, donde $u, v \in A$. Si r_1 y r_2 subtienden el mismo Γ-arco cuyos extremos a y b están en A y $\{ua, ub\}$ y $\{va, vb\}$ tienen ω-bisectrices, entonces $\angle^{\omega} r_2 = \angle^{\omega} r_1$.*

Referencias

[1] E. Artin, *Algèbre Géométrique*, (traducción de la edición inglesa), Gauthier-Villars, 1978.

[2] G. Papy, *Mathématique Moderne 3*, Marcel Didier, 1967.