Alternativas
ISSN 1390-1915

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN | RESEARCH ARTICLE

Dificultades en la comprensión del concepto límite funcional en estudiantes de Química

Difficulties in understanding the functional limit concept in Chemistry students

Adriana Díaz Cordero[1], **Valentina Badía Albanés**[2]

[1] Facultad de Matemática y Computación. Universidad de La Habana. *adribarza16@gmail.com*
[2] Facultad de Matemática y Computación. Universidad de La Habana. *valia@matcom.uh.cu*

PARA CITAR ESTE ARTÍCULO
Díaz Cordero, A., & Badía Albanés, V. Dificultades en la comprensión del concepto límite funcional en estudiantes de Química . Alternativas, 23(3).

DOI
https://doi.org/10.23878/alternativas.v23i3.412

CORRESPONDENCIA
adribarza16@gmail.com

UNIVERSIDAD CATÓLICA
DE SANTIAGO DE GUAYAQUIL

Av. Carlos Julio Arosemena, Km 1,5. Guayaquil, Ecuador
Teléfono: +593 4 380 4600
Correo electrónico: revista.alternativas@cu.ucsg.edu.ec
Web: www.ucsg.edu.ec

Dificultades en la comprensión del concepto límite funcional en estudiantes de Química

Difficulties in understanding the functional limit concept in Chemistry students

Adriana Díaz Cordero[1], Valentina Badía Albanés[2]

[1] Facultad de Matemática y Computación. Universidad de La Habana. *adribarza16@gmail.com*
[2] Facultad de Matemática y Computación. Universidad de La Habana. *valia@matcom.uh.cu*

RESUMEN

La comprensión del concepto límite es fundamental en la asignatura de Cálculo de una sola Variable, ya que constituye la base para el resto de los conceptos básicos estudiados en la asignatura como son, la continuidad de una función en un punto, la derivada y la integral de funciones de una variable; por lo que es de suma importancia lograr en el estudiante un entendimiento total del mismo, pues de no lograrlo no se alcanza un aprendizaje significativo en la asignatura. Aunque este es un tema ampliamente tratado, lo que se debe a la complejidad del propio concepto; en este trabajo se sistematizan las dificultades encontradas y reportadas en la bibliografía consultada que sirvieron como inspiración para proponer una detallada guía de observación. Además, se realiza una investigación descriptiva para analizar e identificar las dificultades que presentan los estudiantes de Química de la Universidad de La Habana en la manipulación del concepto de límite, a partir de observaciones realizadas en clase y de evaluaciones sistemáticas y parciales de la asignatura. Los resultados son evidencia de las dificultades conceptuales del límite de funciones de una variable real y marcarán el punto de partida para definir las acciones a llevar a cabo para solventar dichas dificultades, mejorando así el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura.

PALABRAS CLAVE

Concepto límite funcional, obstáculos epistemológicos, dificultades conceptuales, proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo.

ABSTRACT

The understanding of the limit concept is fundamental in the subject of Calculus of a single variable, since it constitutes the basis for the rest of the basic concepts studied in the subject, such as the continuity of a function at a point, the derivative and the integral. of functions of a variable; therefore, it is very important to achieve in the student a full understanding of it, because if it is not achieved, significant learning in the subject is not achieved. Although this is a widely discussed topic, which is due to the complexity of the concept itself; this paper systematizes the difficulties encountered and reported in the consulted bibliography that served as inspiration to propose a detailed observation guide. In addition, a descriptive investigation is carried out to analyze and identify the difficulties presented by Chemistry students at the University of Havana in handling the concept of limit, based on observations made in class and systematic and partial evaluations of the subject. The results are evidence of the conceptual difficulties of the limit of functions of a real variable and will mark the starting point to define the actions to be carried out to solve these difficulties, thus improving the teaching-learning process of the subject.

KEYWORDS

Functional limit concept, epistemological obstacles, conceptual difficulties, teaching-learning process of Calculus.

RECIBIDO: 21/08/2022
ACEPTADO: 12/12/2022

DOI: https://doi.org/10.23878/alternativas.v23i3.412

Introducción

La asignatura Cálculo de una sola Variable en la carrera de Química de las Universidad de La Habana tiene como objetivo principal "crear y desarrollar una base de conocimientos que permiten su generalización en otras asignaturas y problemas" (MES, 2018), por lo que es importante realizar una enseñanza que propicie un aprendizaje significativo que vaya mucho más allá de algoritmos para resolver un ejercicio.

Dentro de la asignatura tenemos que la comprensión y el dominio del concepto límite es fundamental; ya que son los cimientos sobre los que se apoyan el resto de los conceptos básicos que se darán en la asignatura como son: la continuidad de una función en un punto, así como la derivada y la integral de funciones de una variable; por lo que es de suma importancia lograr en el estudiante bases sólidas del entendimiento del mismo.

El concepto de límite es en sí un concepto difícil de entender y por supuesto de enseñar, Blázquez y Ortega del Rincón (2000) señalan que dicha temática arrastra, probablemente, la mayor cantidad de dificultades en su aprendizaje, la mayoría de las cuales están ligadas propiamente al concepto en sí, el cual para muchos estudiantes, según los autores, es "árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que olvidan totalmente con demasiada facilidad y, en suma, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender" (p.1).

A esa complejidad debe agregarse que la pandemia provocada por el Covid-19 ha causado daños a nivel mundial, desde el punto de vista económico, social y desde el punto de vista educativo también, y nos vimos forzados a pasar a una enseñanza totalmente a distancia en prácticamente todos los niveles de enseñanza, un tipo de enseñanza que, aunque, no era nueva, fue la primera vez que se usaba con exclusividad; por lo que los estudiantes tuvieron que aprender a estudiar solos, sin una guía presencial. Los estudiantes que ingresaron en primer año en el curso 2023 son producto de esta enseñanza en tiempos de pandemia, y estamos viendo estudiantes con mayor dificultad para aprender el concepto de límite y continuidad en un punto de funciones de una variable real.

Todo lo anterior nos conduce a plantearnos algunas interrogantes, tales como: ¿cuáles son las dificultades que están presentando?, ¿cuáles son los errores que cometen con mayor frecuencia nuestros estudiantes en la manipulación de este concepto? ¿cuán diferentes son estas dificultades respecto a las que se presentan a nivel mundial? ¿debemos reformular la manera en que estamos enseñando este concepto? ¿nuevas estrategias y formas de enseñanza contribuirán a un mejor aprendizaje del concepto?

En este trabajo pretendemos hacer un estudio de investigaciones precedentes con respecto a las dificultades que los estudiantes presentan en el concepto del límite de una variable real y, además diseñar una guía de observación para lograr clasificar e identificar las dificultades que presentan los estudiantes de la carrera de Química en la Universidad de La Habana en el curso 2023; dentro de la asignatura Cálculo de una sola Variable.

En dicha asignatura, que se imparte bajo un modelo de educación presencial, se abordan los temas: límites, continuidad, derivación, aplicaciones de la derivada, integrales indefinidas, definidas e impropias, aplicaciones de la integral definida e indefinida y series numéricas y de potencial. Como parte de la evaluación de la asignatura el estudiante debe realizar una prueba parcial, una prueba intrasemestral y una prueba final, así como cuatro seminarios y 12 preguntas escritas.

Con los resultados obtenidos en la presente investigación, los cuales constituyen la primera etapa de la tesis de maestría de la primera autora, se contará con argumentos e información útil que permitan sugerir acciones encaminadas a favorecer los procesos de enseñanza-aprendizaje del concepto de límite y continuidad, con el objetivo de que los estudiantes logren comprender de manera satisfactoria dichos contenidos y, que sean capaces de usarlos en otros contextos de la misma disciplina o en otras disciplinas de la carrera.

El concepto de límite de una función de una variable real es ampliamente estudiado por la comunidad científica, pues hay muchas maneras de enseñarlo y se presentan muchas dificultades en la comprensión del mismo por los estudiantes. Pero no debe obviarse la dificultad del concepto en sí, pues como expresa Mira (2016):

> "El refinamiento del concepto de límite fue difícil para los científicos de la época dada la profundidad del mismo por su auténtica naturaleza y porque requiere una precisión de pensamiento y una percepción del sistema de los números reales que no era fácil de conseguir". (Mira, 2016, p.7)

Desarrollo

El marco teórico de esta investigación estará constituido por dos componentes fundamentales: las etapas históricas en la evolución del concepto y los obstáculos epistemológicos que dificultan el aprendizaje del concepto del límite de una función de una variable real.

Evolución histórica del concepto de límite de una función real

Es importante analizar la evolución del concepto del límite ya que permite evidenciar las interacciones en el desarrollo de las nociones matemáticas, caracterizar el contexto en el que aparecen los conceptos, como una muestra de que el desarrollo de los conceptos no es lineal (González, 2009; González & Sierra, 2003). Varios autores dividen la evolución del concepto de límite en distintas etapas que varían en dependencia del punto de vista desde el cual se analice.

Dado el carácter pedagógico de la presente investigación, tomaremos la perspectiva de clasificación de Blázquez y Ortega del Rincón (2002), citados en la Tesis doctoral de Arias (2019), los cuales proponen cuatro etapas de evolución de la epistemología de la noción de límite: el inicio del cálculo infinitesimal, la transformación de los fundamentos del análisis infinitesimal, la rigurosidad y aritmetización del cálculo y, en el siglo XX, la concepción topológica del límite. Estas etapas "se diferencian básicamente por la concepción de límite que subyace en ellas, aunque la separación no sea nítida" (Blázquez & Ortega del Rincón, 2002, p.3). En la tabla 1 se resumen cada una de las etapas mencionadas.

Tabla 1. Evolución del concepto de límite

ETAPA	CARACTERIZACION DE LA ETAPA
Etapa 1: de Eudoxo de Cnido a la primera mitad del siglo XVIII	Los principales problemas a resolver involucraban metodologías para hallar áreas y volúmenes (Método de exhausción de Eudoxo de Cnido, 360 A.C; Método de los infinitésimos de Kepler, 1571-1630), para sumar series numéricas (Nicole de Oresme, 1323-1360), para el cálculo de tangentes (Métodos para el cálculo de tangentes de Leibniz, 1646-1716, de Fermat, 1601-1665), la velocidad (Preconcepción de límite de Newton, 1648-1727), y longitudes de curvas. La concepción del enfoque del límite es intuitiva e implícita, como un proceso de aproximación. En la primera parte de esta época, la noción del límite es solo utilizado en la práctica y no como objeto de estudio, es gracias a los trabajos de Newton y Leibniz donde la noción de límite comienza a superar su estatus a herramientas útiles para describir y estudiar otros objetos matemáticos
Etapa 2: Segunda mitad del siglo XVIII	En esta etapa se produce la ruptura del paradigma aristotélico, que daba prioridad a la cantidad antes que a lo cualitativo, y es la Geometría Analítica la que permitió asociar estas categorías, aceptando al Álgebra como instrumento para generar nuevas curvas y estudiar sus propiedades geométricas. El concepto del diferencial se constituye en el aspecto central del cálculo. Euler (1707-1743) determina la importancia de considerar a las funciones como objeto de estudio del cálculo. D'Alembert (1717-1783) fue el primero en proponer la 'Teoría de límites' como alternativa a la solución a los problemas de la época (Medina, 2001). La noción de límite que prima en esta etapa es la concepción algebraica, que se constituyó en una herramienta para describir y analizar otros objetos matemáticos como la continuidad y las derivadas (Blázquez & Ortega del Rincón, 2002).
Etapa 3: Siglo XIX y principios del siglo XX	En esta etapa se reinterpretan y demuestran analíticamente conceptos y teoremas basados en intuiciones geométricas. Los conceptos matemáticos que toman mayor importancia en esta época son: la teoría de conjuntos y la lógica; el concepto de función que se constituye como el objeto central del análisis; el concepto de infinito, cuya concepción se mantiene hasta la actualidad; el concepto de continuidad y, los infinitesimales pensados como una cantidad variable que se hace infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente de forma que converge al límite 0. En esta etapa se concibe al límite como una noción matemática que, sirve como soporte a otras como continuidad, derivada e integral (Blázquez & Ortega del Rincón, 2002). Se destacan matemáticos como: Cauchy (con trabajos publicados entre los años 1789-1857), Bolzano (1781-1848) y Weierstrass (1815-1897)
Etapa 4: Siglo XX	La cuarta etapa se circunscribe al siglo XX, y está relacionada con las concepciones de tipo topológico, cuyo objetivo es generalizar los conceptos del cálculo a conjuntos no necesariamente numéricos, lo que implica un tratamiento en niveles de educación superior y no de bachillerato (Blázquez & Ortega del Rincón, 2002).

Fuente: Elaboración propia como resumen de (Arias, 2019)

Lo anterior pone de manifiesto que históricamente el concepto de límite ha llevado siglos de evolución, primero el concepto fue puramente intuitivo, después se llevó a cabo una concepción algebraica y por último adquirió protagonismo la concepción analítica. Sin embargo, los profesores pretendemos que nuestros estudiantes, en un corto período de tiempo, asimilen el concepto en toda su dimensión, que "logren determinarlos, reconocerlos tanto de forma gráfica como algebraica, haciendo uso de tablas, representaciones en el plano cartesiano, así como verbal" (Quesada & Padilla, 2019).

Obstáculos epistemológicos y dificultades en la comprensión del concepto de límite de una función real

Los obstáculos epistemológicos son formas de comprensión basadas en esquemas de pensamiento inconscientes, culturalmente adquiridos y en ocasiones anacrónicos, que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos, por lo que se hace necesario conocerlos para desarrollar los medios didácticos que permitan superarlos (Sierpinska, 1990). La importancia de "conocer el origen de un obstáculo epistemológico radica en que al reconocerlo es posible establecer soluciones que en realidad ataquen a la raíz misma del obstáculo detectado" (Arias, 2019).

Cornu (1983, citado por Quesada & Padilla, 2019) señala algunos obstáculos epistemológicos que afrontan los estudiantes; el primero, el relacionado al sentido común de la palabra límite, que induce a concepciones relacionadas a una barrera insuperable, por lo que les crea la duda de si se alcanza o no el límite; segundo, la noción del infinito, la cual induce una nueva manera de razonamiento; y, finalmente, los conceptos infinitamente grandes y las cantidades infinitamente pequeñas. Recordemos que, para nuestros estudiantes el concepto del infinito tanto infinitamente grande como infinitamente pequeño, les aparece por primera vez aquí en el cálculo de límites; y que, aunque los estudiantes puedan tener una noción del universo de ser infinitamente grande no logran refinar ese concepto con facilidad, por lo que empieza desde el inicio a ser una contradicción que les cuesta mucho superar.

También son objeto común de estudio en las investigaciones en la Enseñanza de la Matemática las dificultades asociadas al concepto del límite, incluso han sido categorizadas en la investigación realizada por Vrancken, Gregorini, Engler, Müller, & Hecklein (2006) como:

- *Dificultades relacionadas con el concepto de función:* las vinculadas a la representación gráfica de las funciones; al concepto de dominio de una función y a la distinción entre variable independiente y dependiente.
- *Dificultades relacionadas con el concepto de límite:* como es comprender que el límite ocurre cerca del punto y no en el punto; dificultades para reconocer e interpretar límites laterales; manipulación algebraica de las leyes de las funciones y; comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución.
- *Dificultades para pasar de un sistema de representación a otro:* para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario.

Además, en la citada investigación, se llega a la conclusión de que "pareciera haber falta de capacidad de los alumnos para manejar mucha información en simultáneo, integrarla y dar una respuesta adecuada" (Vrancken et al., 2006, p.18).

También vale la pena mencionar las conclusiones de Tall (1992) sobre las dificultades cognitivas que presentan los estudiantes respecto al concepto de límite de una función:

- Dificultades incorporadas en el lenguaje: términos como "límite", "tiende a", "tan pequeños como nos plazca" tienen un poderoso significado coloquial que entran en conflicto con los conceptos formales.
- El proceso de límite no se realiza por simple aritmética o álgebra, surge el concepto de infinito y todo se vuelve "rodeado de un misterio".
- El proceso de encontrar "una variable cada vez más pequeña" es muy comúnmente interpretado como "una cantidad variable arbitrariamente pequeña", que sugiere implícitamente conceptos infinitesimales incluso cuando estos no se enseñan explícitamente.
- Del mismo modo, la idea de "obtener un N arbitrariamente grande", sugiere implícitamente concepciones de números infinitos.
- Los estudiantes a menudo tienen dificultades sobre si el límite puede ser realmente alcanzado.
- Hay confusión sobre la comprensión del paso de límite finito al infinito, es decir, en interpretar "lo que sucede en el infinito". (Tall,1992, p.14)

En las investigaciones de Hernández, Prada y Ramírez (2017) se reportan las siguientes dificultades:

- Los estudiantes suelen tener dificultades para comprender los conceptos abstractos de límite y continuidad, que no se pueden visualizar de manera directa.
- Tienden a confundir el límite de una función con el valor de la función en un punto.
- Tienen dificultades para aplicar la definición formal de límite en la resolución de problemas y ejercicios.
- Tienden a confundir los conceptos de límite y continuidad, asumiendo que los dos representan la misma idea.

En una investigación similar, Quesada y Padilla (2019) encontraron que los estudiantes:

- Tienen problemas para interpretar y utilizar correctamente los símbolos y la notación matemática que se utilizan en la definición formal de límite.
- Tienen problemas de tipo algebraico.
- Tienden a aplicar la definición de límite de forma mecánica, pero se evidencia que no ha sido interiorizada o comprendida correctamente.

Todo lo anterior evidencia que los estudiantes enfrentan numerosas dificultades al aprender sobre límites, incluyendo dificultades conceptuales, problemas con la notación matemática, dificultades para visualizar y conceptualizar la noción del infinito y de lo infinitesimal, y dificultades con la aplicación de estos conceptos en la resolución de problemas y ejercicios. Este tipo de investigaciones no han sido realizadas en Cuba en una etapa de post pandemia, ni tampoco con los estudiantes de la carrera de Química, lo cual lleva a preguntarse si nuestros estudiantes tienen las mismas dificultades o han surgido otras, lo cual justifica la presente investigación.

Metodología

El estudio realizado es de carácter descriptivo y se tomó como población a los estudiantes de la asignatura Cálculo de una sola Variable en la carrera de Química de la Universidad de La Habana. La muestra estuvo conformada por 55 estudiantes, donde se encontraron 21 chicos y 34 chicas. Estos son estudiantes de los grupos 1 y 3 de la carrera de Química, los cuales tienen una profesora de conferencia y la misma profesora de clases prácticas, la cual es la primera autora de este trabajo.

Entre los métodos de investigación empíricos usados se encuentra la observación de los modos de actuación de los estudiantes en clases prácticas para obtener información sobre la cantidad de estudiantes que llegan con una preparación previa a la clase y la calidad de esa preparación, así como la cantidad de ejercicios que son capaces de resolver en clases prácticas y cuánta ayuda necesitan del profesor. También se utilizó el análisis documental de las respuestas a las preguntas escritas y del examen parcial realizado por los estudiantes. Estos métodos, unidos a los métodos de carácter teórico, como el análisis–síntesis, el método histórico–lógico y la abstracción nos permitieron describir las relaciones esenciales del objeto de estudio, logrando así hacer una categorización de las dificultades que presentan los estudiantes con el concepto de límite y en base a la misma elaborar un instrumento que fue aplicado durante el proceso investigativo.

Categorización de las dificultades en el concepto de límite

Como resultado del estudio bibliográfico, la reflexión y el análisis realizado, se proponen 4 categorías para profundizar en las dificultades que enfrentan los estudiantes en el concepto de límite: la dificultad conceptual, la de trabajo algebraico, la de argumentación y la de formalismo simbólico. Estas categorías son una reformulación de las ya presentadas por (Quesada & Padilla, 2019), aunque las categorías no se definen de la misma forma, por lo que en la Tabla 2 se precisan las definiciones adoptadas en el trabajo y, además, se brinda una lista detallada de los errores y dificultades más comunes, lo que constituye un aporte del presente trabajo.

Tabla 2. Tipos de dificultades, sus definiciones y manifestaciones

DIFICULTAD	DEFINICIÓN Y MANIFESTACIONES DE ESTAS
Conceptual	Dominio incorrecto o insuficiente de la definición de límite y continuidad de una función en un punto. Ejemplos de esta dificultad son: ■ No diferenciar para qué tipos de funciones y en cuáles puntos, es necesario hallar los límites laterales. ■ No identificar el tipo de indeterminación que se presenta, en caso de existir. ■ Confundir una indeterminación con una forma indefinida. ■ Al analizar continuidad no hacer un análisis de límite o no comparar el valor del límite hallado con la función evaluada en el punto. ■ No clasificar el tipo de discontinuidad que se presenta.
De trabajo algebraico	En la realización del trabajo algebraico encaminado a la eliminación o transformación de la indeterminación presente en el cálculo del límite, el estudiante comete errores, tales como: ■ Factorizar incorrectamente. ■ Simplificar expresiones fraccionarias con sumas y restas sin extraer factor común previamente. ■ No dominar el trabajo algebraico relacionado con la factorización o simplificación cuando las expresiones contienen raíces. ■ Las transformaciones que realiza no conducen a la eliminación de la indeterminación dada.
De argumentación	Cuando el estudiante es incapaz de explicar correctamente por qué realiza determinadas acciones o justificar la estrategia seguida en la solución. Manifestaciones de esta dificultad son las relacionadas con: ■ Comprender por qué se tiene una indeterminación. ■ Justificar el tipo de indeterminación presente. ■ Comprender qué tipo de manipulación algebraica transforma una indeterminación en otra (por ejemplo, hallar denominador común en la resta de dos fracciones transforma la indeterminación $\infty-\infty$ en ∞/∞). ■ Argumentar por qué es necesario multiplicar por la expresión conjugada en una indeterminación $\infty-\infty$ (para transformarla en una suma de dos infinitos que no constituye una indeterminación). ■ Comprender que con ayuda de la simplificación de fracciones puede eliminarse la indeterminación. ■ Comprender que los cambios de variables usualmente no eliminan indeterminaciones, pero facilitan el cálculo de límites, por ejemplo, al pasar de expresiones irracionales a racionales.

DIFICULTAD	DEFINICIÓN Y MANIFESTACIONES DE ESTAS
Formalismo simbólico	Cuando en el proceso de solución del ejercicio se hace un uso inadecuado de la simbología correspondiente al límite y la continuidad, como puede ser: ■ Omitir el símbolo de límite cuando aún no lo ha calculado, sino que solo se han realizado transformaciones algebraicas ■ Escribir $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \frac{c}{\infty} = 0$ o similares. ■ Escribir $\lim\limits_{x \to x_0} = f(x_0)$ para indicar que el límite es igual a la función evaluada en el punto. ■ Omitir el punto en el cual se está hallando el límite de una función. ■ Uso incorrecto o inexistente de la simbología aceptada para los límites laterales.

Descripción del instrumento para la identificación de las dificultades de los estudiantes de la carrera de Química en la comprensión del concepto límite funcional

Tomando en cuenta las categorías anteriores se elaboró un instrumento para la identificación de las dificultades de los estudiantes de la carrera de Química en la comprensión y manipulación de los conceptos de límite y continuidad. El instrumento elaborado consiste en un banco de preguntas, ejercicios parecidos a los presentes en el texto básico de la asignatura o en otras bibliografías complementarias, ejercicios modificados o concebidos que permiten establecer la presencia o no de las dificultades según la clasificación realizada. Este instrumento es dinámico, es decir, que puede ser actualizado a medida que avanza la investigación: incrementarse la cantidad de preguntas, modificarse las preguntas para revelar las evidencias que buscamos con más claridad y precisión, o poner nuevos tipos de preguntas.

El instrumento realizado tiene diferentes tipos de preguntas, las cuales se clasifican como: de cálculo de límites con trabajo algebraico (CLA), de argumentación usando el significado conceptual del límite (AC), de relación de límite y continuidad de una función de una variable real en un punto (LCP), y de cambios de contexto (CC), que significa pasar de lo algebraico–analítico a lo sintético–geométrico y viceversa. En la tabla 3 se relacionan cada uno de los tipos de preguntas con los objetivos de estas.

Tabla 3. Relación entre los objetivos y los tipos de pregunta

OBJETIVOS DE LAS PREGUNTAS	TIPO DE PREGUNTA
Calcular límites de funciones que presenten indeterminaciones del tipo: $\frac{0}{0}, \infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}$, usando factorización, sustitución, infinitésimos equivalentes, racionalización, conjugadas o la regla de L'Hospital. Aplicar los límites fundamentales algebraicos o trigonométricos, en las expresiones que producen formas indeterminadas del tipo: 1^{∞} ó $\frac{0}{0}$.	Cálculo de límites con trabajo algebraico (CLA)
Interpretar y argumentar la diferencia entre límite infinito y límite al infinito, explicando su relación con la gráfica de la función $y = f(x)$. Uso de las formas indefinidas y análisis del límite a partir del conocimiento del comportamiento de funciones como $\frac{1}{x}$ y e^{x} para el cálculo de límites.	Significado conceptual del límite (AC)
Dada la información del resultado de un límite, y/o límites laterales, graficar el posible comportamiento de la función y viceversa.	Cambios de contexto (CC)
Aplicar el concepto de límites laterales iguales en la comprobación de la existencia del límite puntual para funciones a tramos o redefinidas en un punto. Comprobar las condiciones que debe cumplir en el punto una función de una variable para que sea continua.	Relación de límite y continuidad de una función de una variable real en un punto (LCP)

Resultados obtenidos en la aplicación del instrumento

El instrumento se aplicó en el primer semestre del año 2023 en dos momentos del curso y para dos tipos de evaluaciones parciales diferentes; un primer momento fue una pregunta escrita, y un segundo momento que es la prueba parcial. La pregunta escrita se realizó con el objetivo de observar los métodos que usan los estudiantes para resolver las indeterminaciones; y la prueba parcial, donde hay más preguntas relacionadas al concepto de límite, para tener mayor información de otras representaciones semióticas del concepto.

Tomando como referencia los objetivos de las preguntas que conforman el instrumento (Tabla 3) y la categorización de las dificultades (Tabla 2), se diseñó una guía de observación que está constituida por una lista para la verificación de las respuestas de los estudiantes en cada examen aplicado. El criterio utilizado para analizar las respuestas de los estudiantes; es establecer la presencia o ausencia de lo que se describe en la lista de verificación, quedándonos con el número de comportamientos presentes y calculando así el porcentaje de estos.

En la tabla 4 se sistematizan los resultados de la aplicación del instrumento, apoyándose de la lista de verificación y el porcentaje de presencia de los elementos de la lista en cada una de las respuestas de los estudiantes a las preguntas realizadas. No todos los criterios son medibles en cada una de las preguntas, por lo que hay casillas de la tabla que dicen NA, lo cual significa que ese criterio no es medible en la pregunta específica.

Tabla 4. Resultados de la aplicación del instrumento con ayuda de una guía de observación

LISTA DE VERIFICACIÓN	PREGUNTA ESCRITA	PREGUNTA 1A DEL PARCIAL	PREGUNTA 1B DEL PARCIAL	PREGUNTA 2 DEL PARCIAL
Hay evidencia que permita asegurar que intentó resolver el ejercicio.	98.2	90.9	92.7	76.4
Resuelve correctamente solo algunos pasos del ejercicio	87.3	NA	80	58.2

LISTA DE VERIFICACIÓN	PREGUNTA ESCRITA	PREGUNTA 1A DEL PARCIAL	PREGUNTA 1B DEL PARCIAL	PREGUNTA 2 DEL PARCIAL
Se evidencia que tiene claro el procedimiento que debe realizar.	32.7	47.3	40	31
Justifica de forma clara, en caso de existir, el tipo de indeterminación generada.	87.3	NA	78.2	20
Confunde una forma indeterminada con una forma indefinida.	12.7	NA	21.8	40
Resuelve el ejercicio hasta obtener el resultado final.	72.7	78.2	63.6	54.5
El resultado final es correcto.	16.4	54.5	20	7.3
En la solución sus argumentos conllevan errores de razonamiento, justificaciones inadecuadas o explicaciones sin sentido.	78.2	49	69	82
Comete errores en el trabajo algebraico que impiden que llegue a una solución correcta o no realiza trabajo algebraico alguno	85.5	NA	58.2	67.3
Hay evidencia de que no conoce el trabajo algebraico necesario para continuar el ejercicio y por eso no lo termina	74.6	NA	71	63.6
Omite o confunde el uso de la simbología correspondiente durante la resolución del ejercicio.	23.7	34.5	40	47.3
Se evidencia una estructura de orden en la solución del ejercicio.	36.3	45.5	34.5	27.3
Confunde una función redefinida en el punto con una función a tramos, lo que conlleva a errores al utilizar los límites laterales	NA	NA	NA	45.5
Hay evidencia de que sabe que el límite si existe es único, pero no logra terminar el análisis de continuidad de una función en un punto.	NA	NA	NA	38.2
Hay evidencia de que es capaz de relacionar el resultado de un límite con el análisis gráfico de una función.	NA	11	NA	NA
Uso incorrecto de la regla de L'Hospital y/o de infinitésimos equivalentes.	11	NA	14.5	14.5

Análisis de resultados

Podemos observar en la tabla 4 que hay estudiantes que ni siquiera intentan hacer el ejercicio y que es especialmente notable en la segunda pregunta del parcial, en la cual debían analizar la continuidad de una función en un punto, esta pregunta solamente la intentaron hacer el 76.4% de los estudiantes y solamente el 7.3% logró resolver bien la pregunta, lo cual demuestra claramente la gran dificultad que tienen los estudiantes con estos tipos de preguntas. Vale la pena resaltar que el 85.5% de los estudiantes presentan errores en el trabajo algebraico y un 74.6% de los estudiantes ni siquiera saben qué trabajo algebraico pueden realizar para seguir resolviendo el ejercicio. Es importante resaltar que un 87.3% de los estudiantes es capaz de identificar una indeterminación cuando están en presencia de preguntas de cálculo de límite, pero, solamente el 20% es capaz de identificarla en un ejercicio de análisis de continuidad; al parecer los estudiantes saben que deben aparecer en un ejercicio de cálculo y por lo tanto la buscan de forma mecánica, pero en verdad no tienen interiorizado ese concepto.

También es preocupante que solamente el 11% de los estudiantes es capaz de relacionar el resultado de un límite con el comportamiento gráfico de la función alrededor del punto o en el infinito, lo cual demuestra que hay lagunas en el entendimiento de los estudiantes con respecto al concepto de límite. Pero al menos podemos ver que es muy pequeño (14.5) el porciento de estudiantes que usan de forma incorrecta los infinitésimos equivalentes o la regla de L'Hospital.

Los resultados obtenidos demuestran que con el instrumento utilizado se puede determinar y analizar las dificultades que presentan los estudiantes con el concepto de límite y la continuidad de la función en un punto. Los resultados evidencian que los estudiantes tienen errores de tipos simbólicos, algebraicos, de interpretación geométrica y sobre todo que no tienen incorporados algoritmos correctos al resolver ejercicios relacionados con el análisis de continuidad de funciones.

CONCLUSIONES

El estudio bibliográfico realizado acerca de la evolución histórica del concepto de límite, y de los obstáculos y dificultades que han sido reportados por diferentes investigadores permitió proponer una categorización de las dificultades presentes en la noción de límite que resulta apropiada a los objetivos investigativos de este trabajo. A partir de dicha categorización se elaboró un instrumento que fue aplicado en dos momentos del curso. El análisis de los resultados obtenidos en la aplicación del mencionado instrumento condujo a su validación, por lo que podrá ser utilizado en las evaluaciones finales del curso académico, lo que resulta vital para la culminación de la primera etapa de la investigación. Los resultados de esta investigación permitirán reflexionar sobre los posibles cambios que se podrían realizar en futuras secuencias didácticas en la enseñanza del concepto de límite y continuidad de funciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arias, A. L. (27 de Septiembre de 2019). Análisis de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto en estudiantes ecuatorianos de bachillerato y del curso de nivelación. *Tesis Doctoral* . Alicante, España: Universidad de Alicante.

Blázquez, S., & Ortega del Rincón, T. (2000). *El concepto de límite en la educación secundaria. En el futuro del cálculo infinitesimal.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Blázquez, S., & Ortega del Rincón, T. (2002). Nueva definición del límite funcional. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas* (30), 67-84.

González, M. T., & Sierra, M. (2003). El método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático. *investigación en Educación Matemática: Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* , 109-130.

González, P. (2009). Historia de la matemática y dimensión cultural de las matemáticas. *Actes d'Història de la Ciència i de la técnica* , 337-346.

Hernández, C. A., Prada, R., & Ramírez, P. (2017). Obstáculos epistemológicos sobre los conceptos de límite y continuidad en cursos de cálculo diferencial en programas de ingeniería. *Perspectivas* , 73-83.

MES. (2018). Plan de estudios E. Química. La Habana, Cuba.

Mira, M. (2016). Desarrollo de la comprensión del concepto de límite de una función. Características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje. *Tesis doctoral. Universidad de Alicante* .

Quesada, C., & Padilla, E. (2019). Límite de funciones en una variable y principales dificultades conceptuales de estudiantes en formación inicial. *XV CIAEM - IACME,* .

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in Mathematics. *For the learning of mathematics* , 24-41.

Tall, D. (1992). Students' difficulties in calculus. *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus* (págs. 13-28). Québec: ICME-7.

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., Müller, D., & Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *PREMISA* , 9-19.